Aportaciones al estudio de los sistemas electorales

Vicente Sales Inglés

Memoria presentada para acceder al grado de doctor

Director: Dr. Francesc Carreras Escobar

Programa de Doctorado de Matemática Aplicada

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Al Dr. Francesc Carreras Escobar

A mis compañeros de la sección de Terrassa y del grupo de Teoría de Juegos

A la Pietat

A mis padres y hermano

Índice

Antecedentes

Es conocida la afirmación de que *el ser humano es un ser social*. Con ello se quiere significar que no se relaciona con el resto de la naturaleza de manera individual sino que lo hace junto a otros seres humanos, formando comunidades. Estas comunidades, a medida que han ido evolucionando sus estructuras sociales y económicas, han ido adquiriendo sucesivamente un mayor grado de complejidad. Así, desde las más primitivas, que se organizaban en tribus, se ha pasado a las actuales, caracterizadas por el hecho de acoger a diversos tipos de colectivos en su seno.

Estos colectivos son de procedencias y ámbitos muy diversos –laboral, cultural, deportivo, económico, social, político,...– y un individuo puede formar parte simultáneamente de varios (tal es el caso, por ejemplo, de la comunidad de vecinos, la empresa en la que trabaja, el club donde desarrolla su "hobby", el municipio en el que reside o el estado al que pertenece). Además, los diferentes colectivos se interrelacionan entre sí lo que, por una parte, puede provocar tensiones y conflictos pero, por otra, ofrece también la posibilidad de cooperar y obtener de esta forma mayores beneficios.

Como consecuencia de ello, los diversos colectivos pueden ir de la mano o enfrentarse entre ellos, en función de si sus intereses son convergentes o no en un momento dado. De hecho, puede suceder incluso que un individuo pertenezca a dos o más colectivos que se encuentren enfrentados o que dos individuos distintos pertenezcan a diversos colectivos, algunos enfrentados y otros no.

Una de las cuestiones que afectan a los diferentes colectivos que forman las sociedades actuales es la toma de decisiones, que debería basarse en la opinión de los individuos que los componen. Sin embargo, las formas de llevar a cabo las tomas de decisiones por parte de un colectivo son muy diversas y dependen de múltiples factores y criterios.

La sistematización de las ideas anteriores desembocó finalmente en la denominada *Teoría de la Elección Social*. Esta teoría analiza las diferentes maneras que tiene un colectivo para determinar, a partir de las *preferencias* individuales de sus miembros, cuál de ellas debe corresponder al conjunto. Para ello, considera las llamadas *funciones de elección social*, que determinan el mecanismo concreto de ordenación de las distintas opciones existentes para el colectivo a partir de las diferentes preferencias individuales de sus miembros.

El origen de la Teoría de la Elección Social puede asimilarse a la publicación por K. J. Arrow en el año 1951 de uno de sus resultados más importantes, conocido como teorema de imposibilidad de Arrow. Según dicho resultado, no es posible encontrar ninguna función de elección que satisfaga unas ciertas propiedades, salvo que se acepte la basada en la opinión de sólo uno de los miembros del colectivo.

Precisamente para evitar el resultado negativo de Arrow anterior, D. Black, modificando el concepto de preferencia y una de las condiciones de Arrow, probó en 1958 que en el caso de que el número de individuos sea impar el método de decisión mayoritario sí que verificaba las nuevas condiciones requeridas.

Finalmente, otro resultado también interesante fue publicado en un trabajo de A. K. Sen del año 1970. En dicho trabajo, modificando de nuevo las condiciones de Arrow, Sen probó asimismo que no era posible definir ninguna función de elección que las satisfaciera todas simultáneamente.

Existen numerosos libros que se ocupan de la Teoría de la Elección Social. Entre los más importantes que tratan sobre dicha teoría, podemos citar los siguientes: "Social choice and individual values", de K. J. Arrow [2]; "The theory of commitees and elections", de D. Black [7]; "Social choice theory", de J. S. Kelly [20]; "Game theory and political theory", de P. C. Ordershook [27]; "Game theoretic analysis of voting in committees", de B. Peleg [31]; "Collective choice and social welfare", de A. K. Sen [34]; y "Mathematics and politics", de A. D. Taylor [39].

Además de la toma de decisiones, se presentan otras muchas cuestiones que un colectivo debe afrontar como, por ejemplo, la designación de su propia dirección o el establecimiento de negociaciones que, eventualmente, deban realizar con otros colectivos. Es por este motivo que surge la necesidad de establecer algún sistema de representación, esto es, un mecanismo por el cual sean designados algunos de sus miembros para la realización de dichas funciones. Ello es tanto más necesario, por una elemental cuestión de operatividad, cuanto mayor sea el número de miembros que lo formen. A partir de las ideas anteriores surge el concepto de *sistema electoral*. Este no es más que una manera de elegir los *representantes* de un colectivo por parte de los individuos que lo constituyen. Y en la práctica, ello suele hacerse eligiendo los representantes de entre los individuos que componen una serie de listas de candidatos o *candidaturas*.

En realidad, los sistemas electorales existentes son muy variados, por lo que es posible establecer numerosas *clasificaciones* de éstos. De hecho, los posibles criterios existentes para dichas clasificaciones son igualmente diversos y obedecen a situaciones de muy diferente índole en cada caso. Por ejemplo, frecuentemente vienen dados por la fuerza o poder de un miembro o grupo del colectivo. Así, puede darse el caso que quien tenga la potestad para escoger a los representantes del colectivo sea uno sólo de los individuos, algunos de ellos o todos los que intervengan en la decisión, dando lugar así a las *dictaduras*, *oligarquías* o *democracias*, respectivamente.

Otra clasificación es la basada en si los representantes son elegidos directamente por los individuos del colectivo o por otros representantes previamente elegidos por ellos. Así, se habla respectivamente de elecciones *directas* o *indirectas*. La elección del Jefe del Estado por los propios ciudadanos o bien por los miembros de un Parlamento previamente elegido por ellos es un buen ejemplo de ello.

Asimismo, otra situación usual se produce cuando los miembros del colectivo muestran sus preferencias más de una vez. En este caso, suele suceder que en cada una de las consultas se eliminen candidatos sucesivamente. Incluso puede suceder que el número de dichas consultas sea indeterminado y que en cada una se descarten diversos candidatos hasta obtener el número deseado de ellos. Se habla, entonces, de sistemas a *doble vuelta*, *triple vuelta*,...

Finalmente, también puede ocurrir que los votantes estén divididos en subcolectivos o *circunscripciones* e incluso que éstas se subdividan a su vez en otras menores, etc. En tal caso, los sistemas electorales se denominan de *segundo grado*, *tercer grado*,... En caso contrario, cuando esto último no sucede, se dice que son de *primer grado*.

Por otra parte, los sistemas electorales se dividen tradicionalmente en *mayoritarios* y *proporcionales*, si bien recientemente está aumentando la tendencia a considerar los denominados sistemas electorales *mixtos* que, a menudo, se reducen a una combinación de los anteriores.

En primer lugar, la característica principal de los sistemas mayoritarios es que los representantes son otorgados a las candidaturas más votadas en cada circunscripción, siguiendo algún criterio previamente establecido. El caso más paradigmático es el sistema electoral denominado *mayoritario puro*, que otorga todos los representantes a la candidatura más votada.

La consecuencia que se sigue en estos sistemas electorales es que las candidaturas con mayor número de votos obtienen un número de representantes proporcionalmente superior. Así, en general, en los sistemas mayoritarios son pocas las candidaturas representadas y, con frecuencia, únicamente dos las sobrerepresentadas, situación que se conoce como *bipartidismo*.

Los sistemas electorales proporcionales, en cambio, obedecen al deseo de que la representación de las candidaturas sea lo más ajustada posible a su valor proporcional teórico. El procedimiento más simple consiste en fijar una cuota y asignar a cada candidatura el cociente de dividir su número de votos por dicha cuota, completando los que faltan según el resto de cada una.

El caso más importante se da cuando la cuota es igual al cociente entre el número de votos total y el de representantes a elegir, añadiendo un representante más a aquellas candidaturas cuyo resto es mayor (*mayores restos*, *Hare-Niemeyer*, *Hamilton* o *Vinton*). Dos variantes también utilizadas en la práctica son las de *Droop* e *Imperiali*, que dividen por el número de representantes a elegir aumentado en uno o dos respectivamente.

Otra opción en el caso de los sistemas electorales proporcionales es el uso de los métodos de *divisores*, llamados así porque consideran una sucesión estrictamente creciente y toman los mayores cocientes de los votos de cada candidatura entre los elementos de dicha sucesión hasta obtener el número de representantes totales necesario, otorgando a cada candidatura el número que tenga de éstos. Hay que puntualizar, sin embargo, que este procedimiento es realmente proporcional cuando dicha sucesión es asintóticamente equivalente a la sucesión $(d)_{d\geq 1}$. Normalmente, son números mayores que $d-1$ y menores que $d+1$ y el caso más importante es el de la regla de *Hondt*, cuya sucesión es precisamente la $(d)_{d\geq 1}$, pero existen otras como la *media aritmética* o *St. Lague* (en la que la sucesión es $(d-\frac{1}{2})_{d\geq 1}$), la *media geométrica* o *Hill-Huntington* (cuya sucesión es $(\sqrt{d\cdot(d+1)})_{d\geq 1}$), la *media armónica* o *Dean* (que es la dada por la sucesión $\left(\frac{d(d+1)}{d+\frac{1}{2}}\right)_{d\geq 1}$), etc.

En la actualidad, los sistemas electorales existentes son de muy diversa índole. A modo de ilustración de los ejemplos anteriores, haremos un breve resumen de los utilizados en algunos de los parlamentos, poniendo especial énfasis en si se trata de sistemas mayoritarios o proporcionales.

Por lo que se refiere a los mayoritarios, destacan los casos del Reino Unido, Estados Unidos y Francia. El primero considera circunscripciones de tamaño similar en cuanto a población y otorga un único representante a la candidatura más votada en cada una de ellas. En el caso de los Estados Unidos, para la Cámara de Representantes se utiliza el método de la media geométrica para decidir los representantes que corresponden a cada estado y se otorgan después éstos a la candidatura más votada en cada estado, mientras que para el Senado se eligen dos senadores por estado utilizando el mismo método. Finalmente, en el caso de Francia se elige también un representante por circunscripción, pero con un sistema mayoritario a doble vuelta (en la segunda, los electores eligen únicamente entre los candidatos que han obtenido mayor respaldo en la primera).

Un caso especial es el del Senado en España, donde son elegidos cuatro representantes por circunscripción con algunas excepciones, pero cada individuo puede votar a tres como máximo, lo que se suele traducir en que las dos candidaturas con mayor número de votos obtengan tres y un representantes respectivamente y el resto no obtenga ninguno en cada circunscripción.

En cuanto a los sistemas proporcionales, existen también diversos casos. Así, en el Congreso de los Diputados de España, se aplica la regla de Hondt para repartir los representantes en cada circunscripción, pero se utiliza la de los mayores restos para asignar primero los correspondientes a cada una de las circunscripciones, si bien con un mínimo inicial de tres para cada una, lo que provoca una clara sobrerepresentación de las de peso menor. En los parlamentos de Suecia, Noruega y Dinamarca el método usado es el de St. Lague. En el caso italiano, la cuestión más relevante es que se garantiza el 55 % de los representantes para el Congreso de los Diputados a la coalición ganadora.

Finalmente, como caso también especial cabe destacar el del Bundestag de Alemania. Aquí los electores votan dos listas, una mayoritaria por circunscripciones y otra por el método de los mayores restos a nivel nacional, lo que lo convierte teóricamente en un sistema electoral mixto. Sin embargo, los representantes se otorgan realmente por este último método, aunque tomando de forma preferencial los elegidos según el primero, por lo que el sistema es, de hecho, proporcional.

Históricamente, una de las cuestiones más estudiadas ha sido el de las paradojas. Entre éstas, sin duda la más famosa es la de *Alabama*, denominada así porque en 1880, mientras los EE.UU analizaban de cuántos representantes debía componerse su Congreso, se observó que a dicho estado le correspondían 8 representantes si el tamaño total elegido para el Congreso era de 299, pero sólo 7 si era de 300.

Otro caso también singular se dio en 1907, igualmente para el Congreso de los EE.UU. En ese año se creó un nuevo estado, el de Oklahoma, al que le correspondían 5 representantes en función de su población. Se decidió, entonces, aumentar de 386 a 391 el número total de ellos. Pero en el nuevo reparto resultó que Oklahoma mantenía efectivamente los 5 representantes pero, en cambio, el estado de Maine aumentaba su representación de 3 a 4 y el de Nueva York pasaba de 38 a 37. Esta paradoja es conocida como la de los *nuevos estados.*

Muy relacionado con el tema de las paradojas, tenemos la cuestión de las diferentes propiedades que pueden poseer los sistemas electorales. En los dos casos anteriores, por ejemplo, el método usado fue el de los mayores restos. La conclusión es que dicho método no satisface la propiedad de *monotonía respecto del número total de representantes*, que consiste en que al aumentar el número de representantes totales que deben ser repartidos no disminuya el correspondiente a ninguna de las candidaturas.

Otra propiedad interesante es la *superaditividad*, que consiste en que al sumar los votos de dos o más candidaturas sin alterar el resto el número de representantes que obtienen conjuntamente sea igual o superior a la suma de los que logran por separado. Su interés radica en que favorece la concentración de candidaturas y, por tanto, la toma de decisiones –en términos políticos, la "gobernabilidad"–.

Otras dos propiedades fundamentales son la *monotonía respecto del número de votos* –a una candidatura con más votos que otra debe corresponderle, al menos, el mismo número de representantes– y la *homogeneidad* –el número de representantes de las candidaturas no ha de variar al aplicar un factor constante a los votos de cada una de ellas–.

Existen muchas más propiedades, si bien su importancia es bastante menor. Como ejemplo, tenemos el *principio de mayoría absoluta* –una candidatura ha de obtener la mayoría absoluta de representantes si, y sólo si, tiene la mayoría absoluta de votos– y la *máxima exactitud de la cuota* –la diferencia entre el valor proporcional teórico y el real no ha de exceder de la unidad–.

El estudio de los sistemas electorales se puede considerar que comienza con la aparición del libro “The political consequences of electoral laws” [32], escrito por D. Rae en el año 1967. En él se adopta lo que puede denominarse un enfoque descriptivo. Dentro de esta misma línea, se sitúan también los estudios comparativos de casos prácticos –como el libro de A. Lijphart [21] “Electoral systems and party systems”– y de las diferentes propiedades que pueden tener, así como de sus correspondientes paradojas –es notable en este sentido el libro de H. Nurmi [26] “Voting paradoxes and how to deal with them”–.

En cambio, en 1982 se publicó el libro de M. L. Balinski y H. P. Young “Fair representation: meeting the ideal of one man one vote” [4], con el que se inicia realmente el análisis formal de los sistemas electorales y se estudian diferentes propiedades de los sistemas electorales incluyendo, en particular, el análisis de la incompatibilidad simultánea de algunas de ellas.

En primer lugar, en el estudio de los sistemas electorales hay que partir del hecho de que “ningún sistema electoral es perfecto”, en el sentido de que posea todas las propiedades que pueden ser deseables. Por ejemplo, Balinski y Young probaron el siguiente teorema de imposibilidad: no es posible definir, en general, ningún sistema electoral que sea homogéneo y monótono respecto del número de votos y que satisfaga, además, la propiedad de máxima exactitud de la cuota. Otro ejemplo es la imposibilidad de definir, en general, un sistema que sea monótono respecto del número de votos, superaditivo y que satisfaga el principio de la mayoría absoluta.

Es por ello que a la hora de abordar el análisis de los sistemas electorales se han adoptado varias estrategias, entre las que destacan las basadas en criterios probabilísticos y las que utilizan técnicas de optimización entera. Entre las primeras podemos citar como ejemplo que de entre los métodos de divisores del tipo $d - s$ con $0 \leq s < 1$ el más justo es el de St. Lague ($s = \frac{1}{2}$), puesto que los casos $s < \frac{1}{2}$ y $s > \frac{1}{2}$ favorecen a las candidaturas mayoritarias y minoritarias, respectivamente.

Y por lo que se refiere a las estrategias basadas en la optimización entera, el resultado básico es que el sistema de los mayores restos es el que minimiza los errores absoluto y relativo totales. Pero existen otros que atienden a consideraciones diferentes en cada caso y dan lugar a soluciones distintas. Así, por ejemplo, el de la media geométrica es el que minimiza la suma ponderada de los cuadrados de las diferencias entre el número de votos por representante de cada candidatura y el número medio de votos por representante en total, tomando como votos el número de representantes de cada candidatura.

Para terminar, teniendo en cuenta que los sistemas electorales pretenden establecer mecanismos de representación con la finalidad de hacer más operativa la toma de decisiones de un colectivo, hay que destacar una nueva disciplina: la *Teoría de Juegos*. Ésta se ocupa del análisis de los procesos mismos de decisión. Esencialmente, estudia cómo diversos agentes o *jugadores* pueden elegir entre varias opciones o *estrategias*, las cuales acaban determinando finalmente el desenlace o *valor* del *juego*. Su origen hay que cifrarlo en el año 1944, con la aparición del libro de J. Von Neumann y O. Morgenstern "Theory of games and economic behavior" [38]. En él los autores ponen de manifiesto que numerosas situaciones económicas presentan notables similitudes con las de ciertos juegos de estrategia.

A la hora de establecer una clasificación de los juegos, el criterio más importante es el de si los jugadores pueden unirse o no entre sí para mejorar sus expectativas. Se habla, entonces, de juegos *cooperativos* o *no cooperativos*, respectivamente. Para los primeros, es especialmente interesante la situación en la que el valor o *utilidad* del juego puede fraccionarse y repartirse de forma arbitraria, que da lugar al concepto de *juegos cooperativos con utilidad transferible*. De hecho, son un caso particular de éstos, los *juegos simples* –en los que los resultados posibles son de índole binaria– y, especialmente, un tipo de estos últimos conocido como *juegos de mayoría ponderada* –en los que los diversos jugadores tienen un cierto peso y se necesita una cuota mínima para que el resultado sea positivo–, los relacionados directamente con los sistemas electorales.

El concepto fundamental para los juegos cooperativos con utilidad transferible es el de *valor de Shapley*, introducido por éste en 1953 [36]. Dicho valor proporciona una *solución* racional al problema de cómo debe ser repartida la utilidad total entre los diversos jugadores que intervienen. En particular, cuando este valor se considera para los juegos simples, se obtiene el *índice de poder de Shapley–Shubik* [37].

También para juegos cooperativos en general, hay que destacar asimismo la noción de *valor coalicional*, introducida por G. Owen en 1977 [29], que es una generalización del valor de Shapley al caso en que los agentes se han unido en grupos formando lo que se denomina una *estructura de coaliciones*. Existen otras alternativas a los conceptos anteriores entre las que cabe destacar el *valor de Banzhaf* [6] y, más en general, los llamados *semivalores*.

Introducción

Es en el ámbito general de los sistemas electorales, y en el de su estudio formal en particular, donde cabe situar el presente trabajo. Más concretamente, éste se ha centrado en el análisis de elecciones de índole democrática, directas, a una sola vuelta y de segundo grado como máximo. Sin embargo, se ha aprovechado para complementar su tratamiento estricto como sistemas electorales con otro efectuado desde la óptica de la Teoría de Juegos.

En primer lugar, hay que decir que algunos de los conceptos que se abordan, especialmente en el primer capítulo, no son originales y, por tanto, han sido ya tratados en la literatura común sobre el tema. Tal es el caso, por ejemplo, de las propiedades de monotonía, superaditividad y crecimiento. Pero la conveniencia de presentarlos dentro del contexto general axiomático considerado y la necesidad de ir estableciendo su relación con el resto de conceptos que se van introduciendo, nos ha llevado a exponerlos alternativamente a lo largo del texto a fin de favorecer la unidad de éste y conseguir una mayor claridad en la exposición.

Hay que advertir asimismo que las denominaciones más habituales para las nociones de monotonía y crecimiento que se han considerado en este trabajo son las de monotonía respecto del número de votos y monotonía respecto del número de representantes a elegir, respectivamente. Sin embargo, por razones de comodidad y concisión, hemos preferido el uso de los términos anteriores.

En segundo lugar, dado que lo verdaderamente importante no es el número de votos de las diferentes candidaturas en cada una de las circunscripciones en términos absolutos, sino sus correspondientes valores en términos relativos, hemos preferido incorporar ya de inicio la condición de *homogeneidad* y trabajar en consecuencia con votos normalizados. Ello nos ha conducido a considerar números reales en general y no únicamente naturales, lo cual, además de proporcionar mayor generalidad, ha permitido la utilización de conceptos y técnicas del Análisis Matemático.

Por otra parte, hay que añadir que inmediatamente después de la introducción de los sistemas electorales en general, se han considerado los definidos en una única circunscripción. De hecho, hay que recordar que los ejemplos prácticos están definidos normalmente para el caso de una circunscripción y que el caso de varias circunscripciones suele reducirse a su aplicación simultánea en cada una de ellas. En nuestro caso, dicha generalización se ha realizado a partir de dos operaciones y, como veremos, la segunda de ellas requiere para su definición la utilización de un sistema electoral sobre una única circunscripción.

Todas las consideraciones anteriores nos han conducido a fijar una serie de objetivos para el presente trabajo. Estos objetivos pueden concretarse en una serie de puntos, que enumeramos y desarrollamos a continuación.

1. Apoyarse en la Teoría de Probabilidades para dar respuesta a cuestiones comunes en el estudio de los sistemas electorales que dan lugar a ciertas asimetrías.

2. Añadir nuevas características a los conceptos más generales tratados que permitan desarrollar otros posteriores.

3. Formalizar algunas nociones de uso habitual pero sin un significado preciso, algunas de ellas muy intuitivas.

4. Extender nociones conocidas a situaciones más generales y desarrollar herramientas que permitan analizar éstas a partir de aquéllas.

5. Estudiar los sistemas electorales desde la óptica de la Teoría de Juegos, mediante la sustitución de la consideración de los representantes obtenidos por una candidatura por el índice de poder de Shapley–Shubik, una vez fijada una cuota.

6. Aplicar todas las cuestiones y resultados anteriores al análisis de los ejemplos –o, mejor dicho, grupos de ejemplos– que son utilizados normalmente en la práctica.

En primer lugar, y relacionado con la primera de estas cuestiones, es importante notar que hemos partido de la consideración de la existencia de una cierta probabilidad dentro del conjunto de posibles vectores de votos. Ello se debe a dos aspectos esenciales y aparentemente contradictorios. Por una parte, parece claro que el reparto de representantes debería ser simétrico respecto de los votos de las candidaturas, es decir, debería depender únicamente de los votos de las candidaturas en las diferentes circunscripciones y no de cuales sean las candidaturas.

Por otra parte, a veces se producen empates a la hora de ser adjudicados los representantes que de una manera u otra deben ser resueltos, lo que provoca cierta asimetría respecto de los votos de las candidaturas. La solución elegida ha consistido en imponer en la definición que dicha asimetría pueda darse como máximo con probabilidad nula. Es más, hay que indicar en tal sentido que el propio estudio de los sistemas electorales se ha efectuado en diversas situaciones exceptuando conjuntos de probabilidad nula.

También, y en consonancia con el segundo de los puntos anteriores, son esenciales las ideas de *mayoría* y *proporcionalidad*. En este último caso, ante la imposibilidad de que el valor proporcional teórico se satisfaga para los diferentes valores posibles del número de representantes a elegir, se ha optado por sustituirla por la de su verificación cuando el número de representantes a elegir tienda a infinito. Y esta misma idea se ha aprovechado también para el caso mayoritario y el de su polo opuesto, que hemos denominado *igualdad*. De hecho, se ha considerado el caso más general, denominado *estabilidad*, consistente en la existencia, sin más, de los límites de las proporciones de representantes de las diferentes candidaturas.

En la misma línea, hemos abordado también el problema de cuantificar hasta qué punto un sistema electoral favorece o perjudica a las candidaturas con unos votos dados. Ésta es una cuestión muy utilizada de forma intuitiva en los casos prácticos. Lo que hemos hecho es dar una definición formal que permita evaluarla en cada caso. Para ello, hemos definido las *expectativas electorales* como aplicaciones obtenidas una vez fijados los pesos de las circunscripciones y los de una candidatura cualquiera en cada una de ellas –si las hay– manteniendo variables el resto y hemos considerado entonces su esperanza matemática o *expectativa electoral media*.

Y, como para la estabilidad, la convergencia de las expectativas y de la expectativa electoral media ha dado lugar a los conceptos de *estabilidad parcial* y *estabilidad en media*, respectivamente. Asimismo, y de forma análoga al caso anterior, se obtienen también las nociones de *proporcionalidad parcial* y *proporcionalidad en media*, *mayoría parcial* y *mayoría en media* e *igualdad parcial* e *igualdad en media*.

En cuanto al tercer objetivo, se consideran generalizaciones al caso de varias circunscripciones de las propiedades más habituales, como la *monotonía*, la *superaditividad* y el *crecimiento*, además de las anteriores de estabilidad y de sus casos particulares, la mayoría, la proporcionalidad y la igualdad. Además, dichas generalizaciones, según corresponda, se hacen globalmente o por circunscripciones, distinguiendo entonces entre *fuerte* y *débil* respectivamente, como sucede en el caso de la monotonía.

Hay que remarcar que para la definición de superaditividad se utiliza la noción de *inducción* que se introduce previamente. Además, se definen dos operaciones entre sistemas electorales, la *extensión media* y la *suma*, que permiten obtener sistemas electorales más complejos a partir de otros más simples.

En lo referente a la penúltima de las consideraciones anteriores, la metodología básica ha consistido en tomar, para cada cuota inicial, los juegos de mayoría ponderada dados por dicha cuota y los representantes finales de cada una de las candidaturas y compararlos con los juegos de mayoría ponderada dados por los pesos de las candidaturas en las diferentes circunscripciones y la misma cuota.

Ello ha permitido definir propiedades análogas a algunas de las estudiadas en el texto, substituyendo los representantes correspondientes a cada candidatura por su respectivo índice de poder de Shapley–Shubik. Así, se han considerado las nociones de *monotonía en poder*, *superaditividad en poder* y *estabilidad en poder* y, en particular para este último caso, las de *mayoría en poder*, *proporcionalidad en poder* e *igualdad en poder*.

Finalmente, por lo que respecta al último apartado, y teniendo en cuenta los múltiples casos prácticos existentes, algunos de ellos ciertamente complejos, hemos optado por centrarnos en los ejemplos básicos para el caso de una única circunscripción. De hecho, se han abordado formas generales para cada uno de ellos, entre las que se incluyen sus casos particulares más importantes, dando lugar así a los sistemas *ordinales*, de *cuotas* y de *divisores*

También hemos considerado dos generalizaciones para cada uno de ellos al caso de varias circunscripciones, obtenidas a partir de la extensión media y la suma y hemos deducido sus propiedades a partir de las propiedades de los propios ejemplos para una única circunscripción y de las relativas a dichas operaciones.

1

Sistemas electorales

Como punto de partida para el estudio de los sistemas electorales, podemos imaginar que tenemos un cierto número de representantes que deben ser repartidos entre unas candidaturas dadas, en función de los votos de cada una de ellas en diversas partes del territorio llamadas circunscripciones. De hecho, es posible también que cada una de estas partes esté dividida en otras y así sucesivamente, pero en este trabajo nos limitaremos al caso que corresponde a una única subdivisión del territorio en partes. De hecho, reservaremos el nombre de sistemas electorales simples para el caso de circunscripción única. Además, y con el fin de poder tratar cuestiones cuya naturaleza exige el concepto de verificación casi segura, supondremos también dada una probabilidad en el conjunto de posibles resultados.

Para ello, tras introducir la noción de sistema electoral, definimos dos operaciones –la extensión media y la suma– que permiten obtener nuevos sistemas electorales a partir de otros más simples y, en particular, generalizar de dos maneras distintas los diferentes ejemplos de sistemas electorales simples. Seguidamente introducimos el concepto de sistema electoral inducido y finalizamos con las propiedades de monotonía, superaditividad, crecimiento, estabilidad y, como casos particulares de esta última, las de mayoría, proporcionalidad e igualdad.

1.1 Sistemas electorales

El objetivo de esta sección es presentar la noción de sistema electoral. Comenzamos con una serie de notaciones previas que utilizaremos en adelante, para seguir con la definición de sistema electoral y la consideración de un primer ejemplo.

Sea P un conjunto finito, que escribiremos por comodidad en la forma

$$P = \{1, \ldots, p\}.$$

Consideremos el conjunto

$$\overline{U_p} = \left\{ (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p : \begin{array}{r} 0 < u_1, \ldots, u_p < 1 \\ u_1 + \ldots + u_p = 1 \end{array} \right\}.$$

También, dada una permutación π de $P = \{1, \ldots, p\}$, denotaremos

$$u_\pi = (u_{\pi(1)}, \ldots, u_{\pi(p)}).$$

Además, consideremos también el conjunto

$$\widetilde{\overline{U_{p-1}}} = \left\{ \tilde{u} = (u_1, \ldots, u_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1} : \begin{array}{r} 0 \leq u_1, \ldots, u_{p-1} \leq 1 \\ u_1 + \ldots + u_{p-1} \leq 1 \end{array} \right\},$$

así como la aplicación

$$\bar{F} : \overline{U_p} \longrightarrow \widetilde{\overline{U_{p-1}}}$$

definida para cada $u \in \overline{U_p}$ por

$$\bar{F}(u_1, \ldots, u_p) = (u_1, \ldots, u_{p-1}).$$

Proposición 1.1 *$\bar{F}$ es biyectiva.*

DEMOSTRACIÓN. Por la propia definición de $\bar{F}$. $\square$

Ejemplo 1.2 Podemos considerar el conjunto $\overline{U_2}$ y el par de elementos

$$(u_1, u_2) = (0.6, 0.4),$$

que representaremos en la forma

j=1	j=2
0.6	0.4

Sea ahora N otro conjunto finito que escribiremos asimismo por comodidad en la forma

$$N = \{1, \ldots, n\}\,, \quad \text{con} \quad n \geq 2\,.$$

Y sea también W_n^p el conjunto de matrices de n filas y p columnas

$$W_n^p = \left\{ w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \ldots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & \ldots & w_n^p \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 0 \leq w_i^j \leq 1 \quad \text{para cada} \;\; i \in N \;\; \text{y cada} \;\; j \in P \\ w_1^j + \ldots + w_n^j = 1 \quad \text{para cada} \;\; j \in P \end{array} \right\}.$$

Dadas permutaciones ν de $N = \{1, \ldots, n\}$ y π de $P = \{1, \ldots, p\}$, denotaremos por w_ν y w^π a

$$w_\nu = \begin{pmatrix} w_{\nu(1)}^1 & \ldots & w_{\nu(1)}^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_{\nu(n)}^1 & \ldots & w_{\nu(n)}^p \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad w^\pi = \begin{pmatrix} w_1^{\pi(1)} & \ldots & w_1^{\pi(p)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{\pi(1)} & \ldots & w_n^{\pi(p)} \end{pmatrix}.$$

Además, consideremos también el conjunto

$$\widetilde{W_{n-1}^p} = \left\{ \tilde{w} = (w_1, \ldots, w_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \begin{array}{c} 0 \leq w_1, \ldots, w_{n-1} \leq 1 \\ w_1 + \ldots + w_{n-1} \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Y consideremos también la aplicación

$$F : W_n \longrightarrow \widetilde{W_{n-1}}$$

definida para cada $w \in W_n$ por

$$F(w_1, \ldots, w_n) = (w_1, \ldots, w_{n-1})\,.$$

Proposición 1.3 *F es biyectiva.*

Demostración. Por la propia definición de F. $\square$

Ejemplo 1.4 Consideremos el ejemplo anterior 1.2 y los elementos de W_4^2

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4

La aplicación $\bar{F}$ anterior permite identificar $\widetilde{\overline{U_{p-1}}}$ con $\overline{U_p}$. A estos subconjuntos los denominaremos **pseudoborelianos** de $\overline{U_p}$.

Proposición 1.5 *El conjunto de los pseudoborelianos de $\overline{U_p}$ es una σ–álgebra.*

Demostración. Por definición. □

Consideraremos dada una probabilidad $\mathcal{P}$ en $\overline{U_p}$.

La probabilidad más usual será la *uniforme*, obtenida a partir de los pseudoborelianos de $\overline{U_p}$ por normalización:

$$\mathcal{P}(\beta) = \frac{V(\beta)}{V(\overline{U_p})}$$

para cada pseudoboreliano β de $\overline{U_p}$.

Proposición 1.6 *Para cada pseudoboreliano β de $\overline{U_p}$*

$$\mathcal{P}(\beta) = \frac{V(\beta)}{\frac{\sqrt{p}}{(p-1)!}}.$$

Demostración. Puesto que

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{U_p}} dV = \int_{\overline{U_p}} \sqrt{p}\, du = \sqrt{p} \int_0^1 \ldots \int_0^{1-u_1-\ldots-u_p} (du_1 \ldots du_{p-1})\, du_p \\
= \sqrt{p} \int_0^1 \ldots \int_0^{1-u_1-\ldots-u_{p-1}} (1-u_1-\ldots-u_p)\,(du_1 \ldots du_{p-2})\, du_{p-1} \\
= \sqrt{p} \int_0^1 \ldots \int_0^{1-u_1-\ldots-u_{p-2}} \frac{1}{2}\,(1-u_1-\ldots-u_{p-1})^2\,(du_1 \ldots du_{p-3})\, du_{p-2} \\
= \sqrt{p}\cdot\frac{1}{2} \int_0^1 \ldots \int_0^{1-u_1-\ldots-u_{p-3}} \frac{1}{3}\,(1-u_1-\ldots-u_{p-2})^3\,(du_1 \ldots du_{p-3})\, du_{p-4} \\
= \ldots = \frac{\sqrt{p}}{(p-1)!}
\end{aligned}$$

y se obtiene la afirmación del enunciado. □

Ejemplo 1.7 La probabilidad uniforme en el caso del ejemplo anterior 1.2 es

$$\mathcal{P}(\beta) = \frac{V(\beta)}{\frac{\sqrt{2}}{(2-1)!}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,V(\beta)$$

para cada pseudoboreliano β de $\overline{U_p}$.

La aplicación F anterior permite identificar $\widetilde{W_{n-1}}$ con W_n. En particular, podemos identificar también cada boreliano de $\widetilde{W_{n-1}}$ con su correspondiente subconjunto de W_n. A estos subconjuntos los denominaremos **pseudoborelianos** de W_n.

Proposición 1.8 *El conjunto de los pseudoborelianos de W_n es una σ–álgebra.*

Demostración. Por la identificación anterior. □

Consideremos ahora funciones

$$\tilde{f} : \widetilde{W_{n-1}} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad f : W_n \longrightarrow \mathbb{R}$$

tales que

$$f = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \tilde{f}\,.$$

Proposición 1.9 *Para cada pseudoboreliano β de W_n*

$$\int_\beta f(u)\, dV = \int_{F(\beta)} \tilde{f}(u)\, du\,.$$

Demostración. Ya que

$$\int_\beta f(w)\, dV = \int_{F(\beta)} \sqrt{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\, \tilde{f}(w)\, du = \int_{F(\beta)} \tilde{f}(w)\, dw$$

para cada pseudoboreliano β de W_n. □

Observación 1.10 Se deduce, entonces, que todo vector aleatorio continuo

$$\aleph : W_n^p \longrightarrow \widetilde{W_{n-1}}$$

puede identificarse con la aplicación

$$\aleph : W_n^p \longrightarrow W_n$$

considerando en lugar de su función de densidad $\tilde{f}$ la función

$$f = \frac{1}{\sqrt{n}}\, \tilde{f} : W_n \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Es por ello que, de ahora en adelante, hablaremos de funciones de densidad f tales que

$$\int_{W_n} f(w)\, dV = 1 \qquad \text{y} \qquad f(w) \geq 0$$

para cada $w \in W_n$.

Más en general, podemos identificar cada *boreliano* de

$$\widetilde{W_{n-1}} \times \overset{(m)}{\cdots} \times \widetilde{W_{n-1}}$$

con su correspondiente subconjunto de

$$W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n \, .$$

A estos subconjuntos los denominaremos **pseudoborelianos** de $W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n$.

Supondremos dada una partición del conjunto de circunscripciones P en m subconjuntos y una familia de *probabilidades*

$$(\mathcal{P}_u)_{u \in \overline{U_p}}$$

en W_n^p definidas por una familia

$$\aleph = (\aleph^u)_{u \in \overline{U_p}}$$

de aplicaciones

$$\aleph^u : W_n^p \longrightarrow W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n$$

tales que

$$\aleph_j^u : W_n^p \longrightarrow W_n$$

son *vectores aleatorios continuos independientes* para cada $j = 1, \ldots, m$.

Por tanto, tendremos funciones de densidad $f_1^u, \ldots, f_m^u$ que supondremos siempre *simétricas*, es decir,

$$f_j^u(w_\nu) = f_j^u(w)$$

para cada permutación ν de N y cada $w \in W_n$.

En consecuencia, $\aleph^u$ vendrá dada por la función de densidad f^u producto:

$$f^u(w) = f_1^u(w^1) \cdot \ldots \cdot f_m^u(w^m)$$

para cada $w \in W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n$.

Ejemplo 1.11 Consideremos en el ejemplo anterior 1.4 la función dada por este último caso:

$$\aleph^{(0.6,0,4)} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = \big((0.4, 0.3, 0.2, 0.1), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\big) \, .$$

La función de densidad que utilizaremos habitualmente será la *uniforme* de orden m, definida por
$$f(w) = \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m$$
para cada $w \in W_n \times \overset{(m)}{\ldots} \times W_n$.

Proposición 1.12 *La función de densidad uniforme está bien definida.*

Demostración. Puesto que
$$\int_{W_n \times \overset{(m)}{\ldots} \times W_n} \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m dV = \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m \int_{W_n \times \overset{(m)}{\ldots} \times W_n} dV$$
$$= \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m \left(\int_{W_n} dV\right)^m = \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m \left(\int_{W_n} \sqrt{n}\, dw\right)^m$$
$$= \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m (\sqrt{n})^m \left(\int_0^1 \ldots \int_0^{1-w_1-\ldots-w_n} (dw_1 \ldots dw_{n-1})\, dw_n\right)^m$$
$$= ((n-1)!)^m \left(\int_0^1 \ldots \int_0^{1-w_1-\ldots-w_{n-1}} (1-w_1-\ldots-w_n)\, (dw_1 \ldots dw_{n-2})\, dw_{n-1}\right)^m$$
$$= ((n-1)!)^m \left(\frac{1}{2} \int_0^1 \ldots \int_0^{1-w_1-\ldots-w_{n-2}} (1-w_1-\ldots-w_{n-1})^2\, (dw_1 \ldots dw_{n-3})\, dw_{n-2}\right)^m$$
$$= ((n-1)!)^m \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \int_0^1 \ldots \int_0^{1-w_1-\ldots-w_{n-3}} (1-w_1-\ldots-w_{n-2})^3\, (dw_1 \ldots dw_{n-3})\, dw_{n-4}\right)^m$$
$$= \ldots = ((n-1)!)^m \left(\frac{1}{(n-1)!}\right)^m = 1$$
y
$$f(w) = \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m \geq 0$$
para cada $w \in W_n \times \overset{(m)}{\ldots} \times W_n$. □

Ejemplo 1.13 La función de densidad uniforme en $W_4 \times W_4$ es
$$f(w) = \left(\frac{(4-1)!}{\sqrt{4}}\right)^2 = 9$$
para cada $w \in W_4 \times W_4$.

Y consideremos una familia

$$R = (R^u)_{u \in \overline{U_p}}$$

de aplicaciones

$$R^u : W_n^p \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

que asignan a cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$ una enupla de números naturales

$$R^u(w,k) = (R_1^u(w,k), \ldots, R_n^u(w,k)) \in \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

y tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ las aplicaciones

$$R^{u,k} : W_n^p \longrightarrow \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

obtenidas a partir de R^u fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$

$$R^{u,k}(w) = R^u(w,k)$$

para cada $w \in W_n^p$, son *vectores aleatorios discretos* respecto de la probabilidad $\mathcal{P}^u$.

Ejemplo 1.14 Consideremos el ejemplo anterior 1.4 y la familia de aplicaciones

$$(R^u)_{u \in \overline{U_p}}$$

que otorga los k representantes a la candidatura de mayor voto en la circunscripción de peso mayor

$$R_i^u(w,k) = \begin{cases} k\,, & \text{si } \ u_j > u_{j'} \ \text{ para cada } \ j' \neq j \quad \text{y} \quad w_i^j > w_h^j \ \text{ para cada } \ h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

Por ejemplo, en las condiciones del ejemplo anterior 1.4 se obtiene la tabla

i=1	i=2	i=3	i=4
k	0	0	0

puesto que $0.6 > 0.4$ y entre los valores correspondientes a la circunscripción de peso 0.6 el mayor es el 0.4, que corresponde a la primera candidatura.

Definición 1.15 Dados P, $\mathcal{P}$, N, $\aleph$ y R del tipo anterior, diremos que $(N, \aleph, R)$ es un **sistema electoral** asociado a $(P, \mathcal{P})$ si, y sólo si, se verifican las condiciones siguientes:

• (E) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^u(w, k) = k\,.$$

• (N) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_n^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N$, si $w_i = (0, \ldots, 0)$ entonces

$$R_i^u(w, k) = 0\,.$$

• (S) Para cada permutación π de P, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$

$$R_i^{u_\pi}(w^\pi, k) = R_i^u(w, k)$$

casi seguro $u \in \overline{U_p}$.

• (I) Para cada permutación ν de N, cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$R_{\nu(i)}^u(w_\nu, k) = R_i^u(w, k)$$

casi seguro $w \in W_n^p$.

Definición 1.16 Dado un sistema electoral $(N, \aleph, R)$ asociado a $(P, \mathcal{P})$, a los elementos

$$i\,, \qquad j\,, \qquad u_j\,, \qquad w_i^j\,, \qquad k \qquad \text{y} \qquad R_i^u(w, k)$$

los denominamos **candidatura** i, **circunscripción** j, **peso** de la circunscripción j, **voto** de la candidatura i en la circunscripción j, número de **representantes** a elegir y número de **representantes** de la candidatura i respecto del vector de pesos u correspondiente a la matriz de votos w y el número de representantes a elegir k, respectivamente.

Y a las aplicaciones

$$\aleph^u\,, \qquad R^u \qquad \text{y} \qquad R^{u,k}$$

las denominaremos **función de recuento** correspondiente al vector de pesos u, **regla electoral** correspondiente al vector de pesos u y **ley electoral** correspondiente al vector de pesos u y el número de representantes a elegir k, respectivamente.

Por abuso de lenguaje, hablaremos de *sistema electoral* R en N asociado a P con función de recuento $\aleph$ o de sistema electoral R simplemente, si no hay peligro de confusión.

Las condiciones de la definición anterior las denominaremos **axiomas**. Así, el primero o de **exhaustividad** (E) significa que se reparten todos los representantes. El segundo o del **voto nulo** (N), que las candidaturas con voto nulo en todas las circunscripciones no obtienen representantes. Y el tercero o de **simetría** (S) y el cuarto o de **imparcialidad** (I), que el proceso es simétrico respecto de las circunscripciones y las candidaturas respectivamente salvo, quizás, para un conjunto de probabilidad cero. Esto se debe a que, por una parte, la asignación de los representantes ha de depender sólo de los pesos de las circunscripciones y de los votos de las candidaturas pero, por otra, pueden producirse empates que darán lugar a alguna asimetría. La manera de asegurarse que esto último no se dé con demasiada frecuencia es que suceda, como máximo, para un conjunto de probabilidad cero.

Proposición 1.17 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$*

$$0 \leq R_i^u(w,k) \leq k\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^p$

$$R_i^u(w,0) = 0\,.$$

(c) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$, si $w_i = (1,\ldots,1)$ entonces

$$R_h^u(w,k) = \begin{cases} k\,, & si \quad h = i\,; \\ 0\,, & si \quad h \neq i\,. \end{cases}$$

Demostración. (a) Por definición.

(b) Por el apartado anterior, ya que para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$

$$0 \leq R_i^u(w,k) \leq 0\,.$$

(c) Ya que entonces $w_h = (0,\ldots,0)$ para cada $h \neq i$ de donde, por el axioma del voto nulo,

$$R_h^u(w,k) = 0$$

y, por tanto, por el axioma de exhaustividad,

$$R_i^u(w,k) = k$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 1.18 El sistema del ejemplo anterior 1.14 es un sistema electoral, ya que es obvio que se verifican los axiomas de exhaustividad, voto nulo, imparcialidad y simetría.

Definición 1.19 La **regla electoral relativa** del vector de pesos $u \in \overline{U_p}$ es la aplicación

$$r^u : W_n^p \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definida para cada $i \in N$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$ por

$$r_i^u(w,k) = \begin{cases} \dfrac{R_i^u(w,k)}{k}, & \text{si } k > 0\,, \\ 1\,, & \text{si } w_i = (1,\ldots,1) \text{ y } k = 0\,, \\ 0\,, & \text{si } w_i \neq (1,\ldots,1) \text{ y } k = 0\,. \end{cases}$$

$r_i^u(w,k)$ se denomina **número de representantes relativo** de i respecto del vector de pesos u y el vector de votos w cuando se eligen k representantes. Y como R queda determinada por r, se habla también de **sistema electoral relativo** r.

Proposición 1.20 *(a) Para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$0 \leq r_i^u(w,k) \leq 1\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^u(w,k) = 1\,.$$

(c) Para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$, si $w_i = (0,\ldots,0)$ entonces

$$r_i^u(w,k) = 0\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.17. □

Proposición 1.21 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$r^{u,k}$$

es un vector aleatorio discreto.

Demostración. Por serlo también $R^{u,k}$, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 1.22 En el ejemplo anterior 1.14, es claro que la tabla de representantes relativos es

i=1	i=2	i=3	i=4
1	0	0	0

Definición 1.23 Denominamos **voto medio** de la candidatura $i \in N$ respecto del vector de pesos $u \in \overline{U_p}$ y el vector de votos $w \in W_n^p$ al valor

$$\hat{w}_i = u \cdot w_i = u_1 w_i^1 + \ldots + u_p w_i^p$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

Matricialmente, la definición anterior puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \vdots \\ \hat{w}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1^1 & \ldots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & \ldots & w_n^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

Proposición 1.24 *(a) Para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$*

$$0 \leq \hat{w}_i \leq 1\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$

$$\hat{w}_1 + \ldots + \hat{w}_n = 1\,.$$

(c) Para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$

$$\hat{w}_i = 0$$

si, y sólo si,

$$w_i = (0, \ldots, 0)\,.$$

(d) Para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$

$$\hat{w}_i = 1$$

si, y sólo si,

$$w_i = (1, \ldots, 1)\,.$$

Demostración. (a) Ya que

$$0 \leq \hat{w}_i = u_1 w_i^1 + \ldots + u_p w_i^p \leq w_i^1 + \ldots + w_i^p = 1$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

(b) Puesto que

$$\hat{w}_1 + \ldots + \hat{w}_n = (u_1 w_1^1 + \ldots + u_p w_1^p) + \ldots + (u_1 w_n^1 + \ldots + u_p w_n^p) =$$

$$u_1(w_1^1 + \ldots + w_n^1) + \ldots + u_p(w_1^p + \ldots + w_n^p) = u_1 + \ldots + u_p = 1$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

(c) Ya que el recíproco es obvio. Y para el directo

$$0 = \hat{w}_i = u_1 w_i^1 + \ldots + u_p w_i^p \geq u_j w_i^j \geq 0$$

para cada $j \in P$, de donde

$$u_1 w_i^1 = \ldots = u_p w_i^p = 0$$

y, por tanto, como $u_1, \ldots, u_p > 0$ por definición,

$$w_i^1 = \ldots = w_i^p = 0\,.$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

(d) Puesto que el recíproco es obvio. Y para el directo

$$1 = \hat{w}_i = u_1 w_i^1 + \ldots + u_p w_i^p \leq u_1 + \ldots + u_p = 1$$

de donde

$$u_1 w_i^1 + \ldots + u_p w_i^p = u_1 + \ldots + u_p$$

y, por tanto,

$$w_i^1 = \ldots = w_i^p = 1$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$. □

Ejemplo 1.25 Si consideramos el ejemplo 1.4, tenemos que los votos medios son

$$\hat{w}_1 = 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.1 = 0.28\,,$$

$$\hat{w}_2 = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.26\,,$$

$$\hat{w}_3 = 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.24\,,$$

$$\hat{w}_4 = 0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.4 = 0.22\,.$$

1.1.1 *Sistemas electorales simples*

Definición 1.26 Los sistemas electorales definidos en una única circunscripción los denominaremos **sistemas electorales simples**.

En estos sistemas electorales se tiene que $P = \{1\}$, por lo que $\overline{U_1} = \{1\}$ y la única probabilidad posible en este conjunto es la trivial:

$$\mathcal{P}(\overline{U_1}) = 1 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{P}(\emptyset) = 0\,.$$

Por tanto, la única partición posible de P es la trivial: $\{\{1\}\}$.

Además, el conjunto W_n^1 se identifica con el conjunto W_n:

$$W_n = \left\{ w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{r} 0 \leq w_1, \ldots, w_n \leq 1 \\ w_1 + \ldots + w_n = 1 \end{array} \right\}.$$

También tenemos una única función de recuento $\aleph^1$ y una única función de densidad por tanto, que escribiremos simplemente $\aleph$ y f, respectivamente.

Igualmente, existe una única regla electoral R

$$R : W_n \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n\,;$$

y una única regla electoral relativa r.

Asimismo, en particular, fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$, obtenemos las leyes electorales

$$R^k : W_n \longrightarrow \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n\,,$$

así como las correspondientes leyes electorales relativas.

En consecuencia, un sistema electoral simple viene dado únicamente por la terna ordenada $(N, \aleph, R)$.

Definición 1.27 A la aplicación $\aleph$ anterior la denominaremos **función de recuento simple**; a R, **regla electoral simple**; y a R^k, **ley electoral simple**.

La función de densidad que utilizaremos –si no se especifica lo contrario– será la uniforme, que es la considerada en todos los ejemplos que introducimos seguidamente.

Presentamos a continuación los ejemplos más importantes. En todos ellos se supone que existen unos criterios previamente establecidos para los casos de empate que se produzcan.

Mayoritario puro:
Consiste en asignar los k representantes a la candidatura de mayor voto.

Ejemplo 1.28 Consideremos la siguiente tabla de votos para $n = 4$ candidaturas

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

con $k = 4$ representantes a elegir. Entonces, la distribución de representantes es

i=1	i=2	i=3	i=4
4	0	0	0

Igualitario puro:
Los representantes son asignados de uno en uno en orden decreciente de voto entre las diferentes candidaturas con voto no nulo, efectuando dicho proceso las veces que sea necesario hasta completar los k representantes. Por tanto, si n_0 es el número de candidaturas con voto no nulo, el número de representantes de una de ellas es, según el caso,

$$\left[\frac{k}{n_0}\right] \qquad \text{o} \qquad \left[\frac{k}{n_0}\right] + 1\,.$$

Ejemplo 1.29 Consideremos de nuevo la tabla de votos para $n = 4$ candidaturas

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

y supongamos que hay $k = 4$ representantes a elegir. Entonces, como el número de candidaturas es también 4, es claro que la tabla de representantes obtenida en este caso es

i=1	i=2	i=3	i=4
1	1	1	1

Mayores restos, **Hare–Niemeyer** o **Hamilton**:
Se asigna inicialmente la parte entera del valor proporcional teórico

$$kw_i$$

a cada candidatura i, añadiendo un representante adicional en orden decreciente a aquellas candidaturas cuyo resto

$$kw_i - [kw_i]$$

sea mayor hasta completar los k representantes. Por tanto, el número de representantes obtenido por cada una de ellas es siempre

$$[kw_i] \qquad \text{o} \qquad [kw_i] + 1\,.$$

Ejemplo 1.30 Si consideramos otra vez la tabla

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

y utilizamos la regla de los mayores restos, los valores teóricos respectivos son

i=1	i=2	i=3	i=4
1.6	1.2	0.8	0.4

por lo que corresponde inicialmente un representante a las dos primeras candidaturas y ninguno a las otras. Pero los restos son entonces

i=1	i=2	i=3	i=4
0.6	0.2	0.8	0.4

respectivamente, por lo que la tercera y la primera candidatura obtienen un representante adicional y la tabla de representantes queda

i=1	i=2	i=3	i=4
2	1	1	0

Hondt:
En este caso, se calculan inicialmente todos los cocientes del tipo

$$\frac{w_i}{d}$$

para cada $i \in N$ y cada $d \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq d \leq k$. Entonces, si denotamos por G el conjunto de los k mayores la regla asigna a cada candidatura i tantos representantes como elementos del tipo anterior pertenecen a G.

Ejemplo 1.31 Considerando de nuevo la tabla

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

aplicando ahora la regla de Hondt la tabla de cocientes de los votos entre $d = 1, 2, 3, 4$ es

	i=1	i=2	i=3	i=4
d=1	0.400	0.300	0.200	0.100
d=2	0.200	0.150	0.100	0.050
d=3	0.133	0.100	0.067	0.033
d=4	0.100	0.075	0.050	0.025

con lo que los cuatro cocientes mayores resultan ser

$$0.4\,, \qquad 0.3\,, \qquad 0.2 \qquad \text{y} \qquad 0.2$$

y, en consecuencia, la tabla de representantes correspondiente es

i=1	i=2	i=3	i=4
2	1	1	0

Generalizamos a continuación los ejemplos anteriores. En todos ellos, se continua suponiendo la existencia de algunos criterios previamente establecidos para resolver los casos de empate.

Ordinales:
Dadas n sucesiones crecientes de números naturales

$$(c_1(k))_{k\geq 1}, \ldots, (c_n(k))_{k\geq 1}$$

tales que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$c_1(k) \geq \ldots \geq c_n(k) \qquad \text{y} \qquad c_1(k) + \ldots + c_n(k) = k\,,$$

la regla asigna $c_1(k)$ representantes a la candidatura de voto no nulo mayor, $c_2(k)$ a la siguiente de voto no nulo mayor, etc... y asigna 0 representantes a las candidaturas con voto nulo.

En particular, si

$$c_1(k) = k \qquad \text{y} \qquad c_2(k) = \ldots = c_n(k) = 0$$

se obtiene la regla mayoritaria pura, mientras que si se asignan inicialmente

$$\left[\frac{k}{n_0}\right]$$

representantes a cada una de las n_0 candidaturas de voto no nulo y se reparten los

$$k - n_0\left[\frac{k}{n_0}\right]$$

restantes de forma cíclica de mayor a menor voto, nos queda la regla igualitaria pura.

Ejemplo 1.32 Consideremos de nuevo la tabla de votos siguiente para $n = 4$ candidaturas y supongamos que hay también ahora $k = 4$ representantes a elegir

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

Entonces, si consideramos la regla ordinal que otorga 3 representantes a la candidatura más votada y 1 a la segunda –salvo que una de las candidaturas tenga voto 1 en cuyo caso la regla le otorga los 4 representantes– la tabla de representantes correspondiente es

i=1	i=2	i=3	i=4
3	1	0	0

Proposición 1.33 *En las reglas ordinales, si w_i es el h_i–ésimo voto de w*

$$R_i(w,k) = c_{h_i}(k)$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición. $\square$

Corolario 1.34 *(a) En la regla mayoritaria pura,*

$$R_i(w,k) = \begin{cases} k\,, & \text{si } w_i > w_h \text{ para cada } \; h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } w_h < w_i \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

(b) En la regla igualitaria pura,

$$R_i(w,k) = \begin{cases} \left[\frac{k}{n}\right] + 1\,, & \text{si } w_i \text{ es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } w\,, \\ \left[\frac{k}{n}\right]\,, & \text{si } w_i \text{ no es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } w\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Proposición 1.35 *En las reglas ordinales, si w_i es el h_i–ésimo voto de w*

$$r_i(w,k) = \frac{c_{h_i}(k)}{k}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición. $\square$

Corolario 1.36 *(a) En la regla mayoritaria pura,*

$$r_i(w,k) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } w_i > w_h \text{ para cada } h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } w_h < w_i \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

(b) En la regla igualitaria pura,

$$r_i(w,k) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{k}{n}\right] + 1}{k}\,, & \text{si } w_i \text{ es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } w\,, \\ \dfrac{\left[\frac{k}{n}\right]}{k}\,, & \text{si } w_i \text{ no es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } w\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Observación 1.37 La regla relativa mayoritaria pura no depende de k.

Proposición 1.38 *En las reglas ordinales, para cada* $k \in \mathbb{N}$ *y cada* $(c_1(k), \ldots, c_n(k)) \in \mathbb{N}^n$ *tales que* $c_1(k) + \ldots + c_n(k) = k$ *y* $c_{i_1}(k) \geq \ldots \geq c_{i_n}(k)$ *entonces*

$$\{w \in W_n : w_{i_1} > \ldots > w_{i_n}\} \subseteq (R^k)^{-1}(c_1(k), \ldots, c_n(k)) \subseteq \{w \in W_n : w_{i_1} \geq \ldots \geq w_{i_n}\}.$$

Demostración. En primer lugar, si

$$w_{i_1} > \ldots > w_{i_n}$$

entonces

$$R_{i_1}(w, k) = c_{i_1}(k), \ldots, R_{i_n}(w, k) = c_{i_n}(k)$$

que, reordenando, se convierte en

$$R_1(w, k) = c_1(k), \ldots, R_n(w, k) = c_n(k)$$

o, lo que es lo mismo,

$$R(w, k) = (c_1(k), \ldots, c_n(k)).$$

Y para la segunda inclusión, si

$$R(w, k) = (c_1(k), \ldots, c_n(k)),$$

se tiene que

$$R_{i_1}(w, k) \geq \ldots \geq R_{i_n}(w, k),$$

de donde

$$w_{i_1} \geq \ldots \geq w_{i_n}$$

por la propia definición de las reglas ordinales. □

Proposición 1.39 *Las reglas ordinales son sistemas electorales simples.*

Demostración. Por 1.38, $(R^k)^{-1}(c_{i_1}(k), \ldots, c_{i_n}(k))$ es medible y, por tanto, teniendo en cuenta las identificaciones de W_n y $\widetilde{W_{n-1}}$, se deduce que R^k es un vector aleatorio para cada $k \in \mathbb{N}$.

Además, los axiomas de exhaustividad y voto nulo se deducen de la propia definición de regla ordinal. Y en lo referente al axioma de imparcialidad, basta con observar que los casos en que la regla no decide inicialmente son aquellos en que hay igualdad entre los votos

$$w_h = w_i$$

para ciertos $h, i \in N$, que constituyen un conjunto de probabilidad cero. □

Cuotas:
Consideremos una sucesión

$$(q_k)_{k\geq 1}$$

con $q_k \in (0,1]$ para cada $k \in \mathbb{N}$ y tal que

$$k - n < \left[\frac{w_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{w_n}{q_k}\right] \leq k$$

para cada $w \in W_n$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Entonces, se comienza otorgando

$$\left[\frac{w_i}{q_k}\right]$$

representantes a las diferentes candidaturas y se añade uno más a las de resto

$$\frac{w_i}{q_k} - \left[\frac{w_i}{q_k}\right]$$

mayor hasta completar los k representantes.

Cuando se toma el valor

$$q_k = \frac{1}{k}\,,$$

que se conoce como cuota **Hare**, se obtiene la regla de los mayores restos, ya que

$$\frac{w_i}{\frac{1}{k}} = kw_i\,.$$

Observación 1.40 En particular, es claro que a cada candidatura $i \in N$ le corresponderán

$$\left[\frac{w_i}{q_k}\right] \qquad \text{o} \qquad \left[\frac{w_i}{q_k}\right] + 1$$

representantes, en función de si obtiene o no el representante adicional según su resto sea o no uno de los mayores, respectivamente.

Observación 1.41 Es interesante remarcar asimismo que, una vez otorgadas las partes enteras iniciales correspondientes a cada candidatura en las reglas de cuotas, el procedimiento que sigue después es análogo al de la regla igualitaria pura, salvo que efectuado con los restos en lugar de los votos.

Proposición 1.42 *En las reglas de cuotas, la sucesión $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es admisible si, y sólo si,*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Para la afirmación en sentido directo, supongamos que

$$q_k \notin \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$$

para algún $k \in \mathbb{N}$.

En primer lugar, si

$$q_k \leq \frac{1}{k+1},$$

tomando por ejemplo

$$w_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad w_2 = \ldots = w_n = 0,$$

tenemos que

$$\left[\frac{w_1}{q_k}\right] \geq k+1,$$

en contradicción con la definición de regla de cuotas.

Y en el caso que

$$q_k > \frac{1}{k},$$

tomando

$$w_1 = \ldots = w_{n-1} = \frac{q_k + \frac{1}{k}}{2} \qquad \text{y} \qquad w_n = 1 - (n-1) \cdot \frac{q_k + \frac{1}{k}}{2},$$

es claro que

$$0 \leq w_1, \ldots, w_n \leq 1 \qquad \text{y} \qquad w_1 + \ldots + w_n = 1.$$

Además,

$$\frac{w_1}{q_k} = \ldots = \frac{w_{n-1}}{q_k} < 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{w_n}{q_k} = \frac{1}{q_k} - (n-1) \cdot \frac{q_k + \frac{1}{k}}{2q_k} < k - (n-1) = k - n + 1,$$

con lo que

$$\left[\frac{w_1}{q_k}\right] = \ldots = \left[\frac{w_{n-1}}{q_k}\right] = 0 \qquad \text{y} \qquad \left[\frac{w_n}{q_k}\right] \leq k - n,$$

que está también en contradicción con la definición de regla de cuotas.

Recíprocamente, supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] .$$

Entonces, por ser

$$q_k > \frac{1}{k+1} ,$$

se tiene que

$$\left\lfloor \frac{w_i}{q_k} \right\rfloor \leq \frac{w_i}{q_k} < (k+1)\, w_i$$

para cada $w \in W_n$ y cada $i \in N$, de lo que se deduce que

$$\left\lfloor \frac{w_1}{q_k} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{w_n}{q_k} \right\rfloor < (k+1)\, w_1 + \ldots + (k+1)\, w_n = k+1$$

para cada $w \in W_n$.

Y por otra parte, como

$$q_k \leq \frac{1}{k} ,$$

entonces

$$\frac{w_i}{q_k} \geq k w_i$$

para cada $w \in W_n$ y cada $i \in N$, por lo que

$$\left\lfloor \frac{w_i}{q_k} \right\rfloor > k w_i - 1$$

y, por tanto,

$$\left\lfloor \frac{w_1}{q_k} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{w_n}{q_k} \right\rfloor > k w_1 - 1 + \ldots + k w_n - 1 = k - n$$

para cada $w \in W_n$. □

Observación 1.43 En la práctica, son utilizadas también otras cuotas, tales como

$$q_k = \frac{1}{k+1} \qquad \text{y} \qquad q_k = \frac{1}{k+2} ,$$

cuyas variantes se denominan **Droop** e **Imperiali**, respectivamente. Sin embargo, según 1.42, no son reglas en el sentido aquí definido, puesto que para algunos vectores de votos el número de representantes totales asignados es mayor que k, en contra del axioma de exhaustividad –de hecho, la variante Droop sólo falla en los casos en que uno de los votos es igual a 1 y el resto son 0–.

Ejemplo 1.44 Consideremos de nuevo la tabla de votos para $n = 4$ candidaturas

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

y supongamos que hay también ahora $k = 4$ representantes a elegir.

Si consideramos ahora la regla de cuotas dada por la sucesión

$$q_k = \frac{2}{2k+1}\,,$$

la cuota cuando $k = 4$ es

$$\frac{2}{9} = 0.2222$$

con lo que la tabla de representantes inicial queda

i=1	i=2	i=3	i=4
1	1	0	0

y los restos

i=1	i=2	i=3	i=4
0.178	0.078	0.200	0.100

Por tanto, la tabla de representantes definitiva obtenida es

i=1	i=2	i=3	i=4
2	1	1	0

dado que los dos mayores restos corresponden a la tercera y la primera candidaturas, respectivamente.

Proposición 1.45 *En las reglas de cuotas con*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right],$$

$$R_i(w,k) = \begin{cases} \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right] + 1\,, & si\ \dfrac{w_i}{q_k} - \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right] \ \text{es uno de los mayores restos}\,, \\ \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right]\,, & si\ \dfrac{w_i}{q_k} - \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right] \ \text{no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición. □

Corolario 1.46 *En la regla de los mayores restos,*

$$R_i(w,k) = \begin{cases} [kw_i] + 1\,, & si\ kw_i - [kw_i] \ \text{es uno de los mayores restos}\,, \\ [kw_i]\,, & si\ kw_i - [kw_i] \ \text{no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Proposición 1.47 *En las reglas de cuotas con*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right],$$

$$r_i(w,k) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{w_i}{q_k}\right] + 1}{k}\,, & si\ \dfrac{w_i}{q_k} - \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right] \ \text{es uno de los mayores restos}\,, \\ \dfrac{\left[\frac{w_i}{q_k}\right]}{k}\,, & si\ \dfrac{w_i}{q_k} - \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right] \ \text{no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición. □

Corolario 1.48 *En la regla de los mayores restos,*

$$r_i(w,k) = \begin{cases} \dfrac{[kw_i] + 1}{k}\,, & si\ kw_i - [kw_i] \ \text{es uno de los mayores restos}\,, \\ \dfrac{[kw_i]}{k}\,, & si\ kw_i - [kw_i] \ \text{no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Proposición 1.49 *Para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $B_1, \ldots, B_n$ tales que $B_i = 1$ o $B_i = 0$ para cada $i \in N$ y $B_1 + \ldots + B_n = k - \left(\left[\frac{w_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{w_n}{q_k}\right]\right)$*

$$(R^k)^{-1}\left(\left[\frac{w_1}{q_k}\right] + B_1, \ldots, \left[\frac{w_n}{q_k}\right] + B_n\right)$$

contiene al conjunto

$$\left\{w \in W_n : \frac{w_i}{q_k} - \left[\frac{w_i}{q_k}\right] > \frac{w_h}{q_k} - \left[\frac{w_h}{q_k}\right] \quad \textit{para cada } h, i \ \textit{ tales que } \ B_h = 0 \ \textit{ y } \ B_i = 1\right\}$$

y está contenido en el conjunto

$$\left\{w \in W_n : \frac{w_i}{q_k} - \left[\frac{w_i}{q_k}\right] \geq \frac{w_h}{q_k} - \left[\frac{w_h}{q_k}\right] \quad \textit{para cada } h, i \ \textit{ tales que } \ B_h = 0 \ \textit{ y } \ B_i = 1\right\}.$$

Demostración. Puesto que las reglas de cuotas otorgan

$$\left[\frac{w_i}{q_k}\right] \quad \text{o} \quad \left[\frac{w_i}{q_k}\right] + 1$$

para cada $i \in N$, según su resto

$$\frac{w_i}{q_k} - \left[\frac{w_i}{q_k}\right]$$

sea uno de los mayores o no, respectivamente. □

Proposición 1.50 *Las reglas de cuotas son sistemas electorales simples.*

Demostración. Ya que, teniendo en cuenta las identificaciones de W_n y $\widetilde{W_{n-1}}$ y 1.49, se deduce que R^k es un vector aleatorio para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por su parte, el axioma de exhaustividad se deduce de la propia definición de la regla. Y por lo que se refiere al axioma del voto nulo, sólo hay que observar que si $w_i = 0$, entonces

$$\frac{w_i}{q_k} = 0$$

sea cual sea la cuota q_k. Finalmente, para el axioma de imparcialidad sólo hay que tener en cuenta que los posibles empates se dan cuando

$$w_h = w_i \qquad \text{o} \qquad \frac{w_h}{q_k} - \left[\frac{w_h}{q_k}\right] = \frac{w_i}{q_k} - \left[\frac{w_i}{q_k}\right]$$

para ciertos $h, i \in N$, que constituyen un conjunto de probabilidad cero. □

Divisores:
En este caso, calculamos todos los cocientes del tipo

$$\frac{w_i}{g_d}$$

para cada $i \in N$ y $1 \leq d \leq k$, donde

$$(g_d)_{d \geq 1}$$

es una sucesión estrictamente creciente de números reales estrictamente positivos. Si denotamos por G el conjunto de los k cocientes mayores, la regla asigna a cada candidatura i el número de elementos de G del tipo anterior.

En particular, si

$$g_d = d$$

para cada $d \in \mathbb{N}$, tenemos la regla de Hondt introducida anteriormente.

Entre las muchas sucesiones utilizadas también en la práctica, cabe citar las siguientes:

$$g_d = d - \frac{1}{2}\,, \qquad g_d = d - \frac{2}{3}\,, \qquad g_d = \sqrt{d(d+1)} \qquad \text{y} \qquad g_d = \frac{d(d+1)}{d+\frac{1}{2}}\,,$$

cuyas variantes se denominan de la **media aritmética** o **St. Lague**, **media danesa**, **media geométrica** o **Hill–Huntington** y **media armónica** o **Dean**, respectivamente.

En general, cuando los divisores sean del tipo

$$g_d = d + s$$

con $s > -1$, diremos que las reglas son de divisores **lineales**.

Por tanto, las reglas de Hondt, de la media aritmética y de la media danesa son lineales.

Otros casos utilizados son los de divisores de tipo *potencial*

$$g_d = d^t + s\,, \quad \text{con } \ t > 0 \ \text{ y } \ s > -1\,;$$

los de tipo *logarítmico*

$$g_d = \log_s(1+d)\,, \quad \text{con } \ s > 0\,;$$

y los de tipo *exponencial*

$$g_d = s^d - 1\,, \quad \text{con } \ s > 0\,.$$

Ejemplo 1.51 Consideremos de nuevo la tabla de votos para $n = 4$ candidaturas

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

y supongamos que hay también ahora $k = 4$ representantes a elegir.

Entonces, si tomamos la regla de los divisores con

$$g_d = d^2$$

los cocientes son

	i=1	i=2	i=3	i=4
$g_d = 1$	0.40000	0.30000	0.20000	0.10000
$g_d = 4$	0.10000	0.07500	0.05000	0.02500
$g_d = 9$	0.04444	0.03333	0.02222	0.01111
$g_d = 16$	0.02500	0.01875	0.01250	0.00625

En este caso, al tomar los cuatro mayores

$$0.4\,, \qquad 0.3\,, \qquad 0.2 \qquad \text{y} \qquad 0.1$$

se produce un empate para el cuarto representante entre la primera y la cuarta candidaturas, que debería ser resuelto por algún otro criterio.

En consecuencia, las posibles tablas finales de representantes obtenidas serían

i=1	i=2	i=3	i=4
2	1	1	0

o

i=1	i=2	i=3	i=4
1	1	1	1

en función de si el criterio de desempate previamente establecido otorgara el representante en cuestión a la primera o a la cuarta candidatura, respectivamente.

Proposición 1.52 *La definición de las reglas de divisores no depende de factores constantes para la sucesión*

$$(g_d)_{d\geq 1}\ .$$

Demostración. Sólo hay que tener en cuenta que los cocientes

$$\frac{w_i}{g_d}$$

para cada $i \in N$ y $1 \leq d \leq k$, quedan afectados todos por igual por dicho factor constante, lo cual no modifica cuáles de ellos son los mayores. $\square$

Teorema 1.53 *Sea R una regla de divisores y g una función estrictamente creciente del intervalo $[1, +\infty)$ en el intervalo $(0, +\infty)$ tal que*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

y

$$g(d) = g_d$$

para cada natural $d \geq 1$. Entonces, la antiimagen

$$(R^k)^{-1}(c) = (c_1, \ldots, c_n)$$

de un vector cualquiera $c = (c_1, \ldots, c_n)$ tal que $c_1+\ldots+c_n = k$ contiene al conjunto de vectores $(w_1, \ldots, w_n) \in W_n$ para los que existe un $x_0 > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} c_1 \leq g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x_0}\right) < c_1 + 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_n \leq g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x_0}\right) < c_n + 1 \end{array}\right\}$$

y está contenido en el conjunto de vectores $(w_1, \ldots, w_n) \in W_n$ para los que existe un $x_0 > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} c_1 \leq g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x_0}\right) \leq c_1 + 1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_n \leq g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x_0}\right) \leq c_n + 1 \end{array}\right\}\ .$$

Demostración. En primer lugar, para cada $i \in N$ si $c_i = 0$ entonces

$$0 \leq g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right) < 1\,,$$

de donde

$$\frac{w_i}{x_0} < g(1) = g_1\,,$$

por lo que

$$\ldots < \frac{w_i}{g_d} < \ldots < \frac{w_i}{g_1} < x_0$$

y, por tanto, no hay ningún cociente mayor que x_0.

Y si $c_i > 0$ entonces, por una parte,

$$c_i \leq g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right)\,,$$

de donde resulta que

$$g_{c_i} = g(c_i) \leq \frac{w_i}{x_0}$$

y, en consecuencia,

$$x_0 \leq \frac{w_i}{g_{c_i}}\,.$$

Y, por otra parte,

$$g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right) < \left[g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right)\right] + 1 = c_i + 1\,,$$

por lo que

$$\frac{w_i}{x_0} < g\left(c_i + 1\right) = g_{c_i+1}$$

y, consiguientemente,

$$x_0 > \frac{w_i}{g_{c_i+1}}$$

para cada $i \in N$. Por tanto, de las dos desigualdades anteriores concluimos que

$$\frac{w_i}{g_{c_i+1}} < x_0 \leq \frac{w_i}{g_{c_i}} < \frac{w_i}{g_{c_i-1}} < \ldots < \frac{w_i}{1}\,,$$

lo que significa que existen exactamente c_i cocientes mayores que x_0, tanto si $c_i = 0$ como si $c_i > 0$, por lo que hay

$$c_1 + \ldots + c_n = k$$

cocientes mayores que x_0 y, en consecuencia,

$$R_i(w, k) = c_i$$

para cada $i \in N$.

Recíprocamente, si ahora

$$R_i(w,k) = c_i$$

para cada $i \in N$, definimos

$$x_0 = \text{mín}\left\{\frac{w_i}{g_{c_i}} : w_i > 0, \quad i \in N\right\} > 0\,.$$

Si ahora $c_i = 0$, entonces, teniendo en cuenta que es posible que haya empates, debe ser

$$\frac{w_i}{g_1} \leq x_0\,,$$

por lo que

$$\frac{w_i}{x_0} \leq g_1$$

y, en consecuencia,

$$g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right) \leq 1\,.$$

Y si $c_i > 0$, tenemos que

$$\frac{w_i}{g_{c_i}} \geq x_0\,,$$

lo que equivale a

$$\frac{w_i}{x_0} \geq g_{c_i} = g(c_i)$$

de donde se deduce, por ser g estrictamente creciente, que

$$g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right) \geq c_i\,.$$

Además, si sucediera que

$$g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right) > c_i + 1$$

entonces, de nuevo por ser g estrictamente creciente, debería ser

$$\frac{w_i}{x_0} > g(c_i+1) = g_{c_i+1}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{w_i}{g_{c_i+1}} > x_0\,,$$

que se contradice con la definición de x_0 por ser estricta la desigualdad, ya que podría suceder que

$$\frac{w_i}{g_{c_i+1}} = x_0 = \frac{w_j}{g_{c_h}}$$

para otros $j \neq i$ y el representante en cambio no correspondiera a la candidatura i. $\square$

Observación 1.54 Si consideramos los diferentes cocientes ordenados de mayor a menor en la regla de los divisores, tenemos una sucesión

$$y_1 = \ldots = y_{k_1} > y_{k_1+1} = \ldots = y_{k_2} > y_{k_2+1} \ldots$$

Los números

$$k_1, \ldots, k_s, \ldots$$

son, por tanto, los posibles valores de k para los cuales no va a haber ningún empate final a la hora de asignar los representantes.

Ejemplo 1.55 En la regla de Hondt correspondiente al ejemplo 1.31

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

la tabla de cocientes era

	i=1	i=2	i=3	i=4
d=1	0.400	0.300	0.200	0.100
d=2	0.200	0.150	0.100	0.050
d=3	0.133	0.100	0.667	0.333
d=4	0.100	0.075	0.050	0.025

por lo que la sucesión anterior sería

$$0.400 > 0.300 > 0.200 = 0.200 > 0.150 > 0.133 > 0.100 = 0.100 = 0.100 = 0.100 \ldots$$

lo que significa que

$$\begin{gathered} k_1 = 1 \\ k_2 = 2 \\ k_3 = 4 \\ k_4 = 5 \\ k_5 = 6 \\ k_6 = 10 \\ \vdots \end{gathered}$$

El interés de esta sucesión radica en que, para los términos que la forman, el teorema anterior se convierte en equivalencia.

Proposición 1.56 *Sea R una regla de divisores y g una función estrictamente creciente del intervalo $[1,+\infty)$ en el intervalo $(0,+\infty)$ tal que*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

y

$$g(d) = g_d$$

para cada natural $d \geq 1$. Entonces, para cualesquiera números naturales $c_1,\ldots,c_n$ tales que

$$c_1 + \ldots + c_n = k_s$$

para cierto s –siendo $(k_s)_{s\geq 1}$ la sucesión anterior– y cada $w \in W_n$, se tiene que

$$R_i(w,k_s) = c_i$$

para cada $i \in N$ si, y sólo si, existe un $x_0 > 0$ tal que

$$c_1 = \left[g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0}\right)\right], \ldots, c_n = \left[g^{-1}\left(\frac{w_n}{x_0}\right)\right] .$$

Demostración. En primer lugar, el recíproco coincide con el teorema anterior.

Y para la afirmación en sentido directo, tenemos que si

$$R_i(w,k_s) = c_i$$

entonces existe un $x_0 > 0$ tal que

$$c_i \leq g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right) \leq c_i + 1$$

para cada $i \in N$. Y no puede ocurrir que

$$g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right) = c_i + 1\,,$$

ya que esto, tal y como se deduce de la parte final de la demostración del teorema anterior, significaría que

$$\frac{w_i}{g_{c_i+1}} = x_0 = \frac{w_j}{g_{c_h}}\,,$$

lo cual se contradice con la ausencia de empates finales que no hayan dado lugar a la asignación del representante correspondiente. $\square$

Proposición 1.57 *Sea R una regla de divisores y g una función estrictamente creciente del intervalo $[1,+\infty)$ en el intervalo $(0,+\infty)$ tal que*

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

y

$$g(d) = g_d$$

para cada natural $d \geq 1$. Entonces, existe $x_0 > 0$ tal que para cada $i \in N$

$$R_i(w,k) = \left[g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right)\right]$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Puesto, que según 1.53, notando

$$c_i = R_i(w,k)$$

para cada $i \in N$, tenemos que

$$c_i = \left[g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right)\right]$$

salvo para los vectores $w \in W_n$ tales que

$$g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right) = c_{i+1}\,,$$

es decir, para los que

$$w_i = g_{c_{i+1}}\, x_0$$

para algún $i \in N$ que, obviamente, forman un conjunto de probabilidad cero. □

Definición 1.58 A una función g como la del teorema y las dos proposiciones anteriores, la denominaremos **función generatriz**.

En particular, podemos interpretar que las reglas de divisores, a diferencia de las reglas de cuotas, tratan de determinar una cierta cuota x_0 para la que, salvo empates, las partes enteras de las antiimágenes de los cocientes anteriores por la función g den directamente los representantes de cada candidatura –en lugar de redondear como hacen las reglas de cuotas–.

Proposición 1.59 *En las reglas de divisores con*

$$(g_d)_{g_d \geq 1}$$

estrictamente creciente,

$$\frac{1}{\underset{c_1+\ldots+c_n=k}{\text{máx}} \{g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_n+1}\}} \leq x_0 \leq \frac{1}{\underset{c_1+\ldots+c_n=k}{\text{mín}} \{g_{c_1} + \ldots + g_{c_n}\}} .$$

Demostración. Como ha de ser

$$c_1 \leq g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0}\right) \leq c_1 + 1, \ldots, c_n \leq g^{-1}\left(\frac{w_n}{x_0}\right) \leq c_n + 1$$

para ciertos $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$, se deduce que

$$g_{c_1} \leq \frac{w_1}{x_0} \leq g_{c_1+1}, \ldots, g_{c_n} \leq \frac{w_n}{x_0} \leq g_{c_n+1} .$$

Entonces, sumando miembro a miembro todas estas desigualdades y teniendo en cuenta que $w_1 + \ldots + w_n = 1$, se obtiene que

$$g_{c_1} + \ldots + g_{c_n} \leq \frac{1}{x_0} \leq g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_n+1} ,$$

que equivale a

$$\frac{1}{g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_n+1}} \leq x_0 \leq \frac{1}{g_{c_1} + \ldots + g_{c_n}}$$

para cada $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$ tales que $c_1 + \ldots + c_n = k$ de donde, tomando máximo y mínimo respectivamente, se obtiene el resultado del enunciado. □

Corolario 1.60 *En las reglas de divisores lineales con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$,

$$\frac{1}{k + n(s+1)} \leq x_0 \leq \frac{1}{k + ns} .$$

Demostración. Puesto que, en este caso, para cada $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$ tales que $c_1 + \ldots + c_n = k$ se verifica que

$$g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_n+1} = (c_1 + 1 + s) + \ldots + (c_n + 1 + s) = k + n(s+1)$$

y

$$g_{c_1} + \ldots + g_{c_n} = (c_1 + s) + \ldots + (c_n + s) = k + ns$$

respectivamente y, por tanto, el máximo y el mínimo son estos mismos valores ya que no dependen de $c_1, \ldots, c_n$. □

Ejemplo 1.61 Considerando nuevamente la regla de Hondt para $n = 4$ candidaturas y $k = 4$ representantes a elegir del ejemplo 1.31

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

tenemos que debe ser

$$0.125 = \frac{1}{8} \leq x_0 \leq \frac{1}{4} = 0.25\,.$$

De hecho, dado que la tabla de cocientes era

	i=1	i=2	i=3	i=4
d=1	0.400	0.300	0.200	0.100
d=2	0.200	0.150	0.100	0.050
d=3	0.133	0.100	0.667	0.333
d=4	0.100	0.075	0.050	0.025

los posibles valores en la práctica son

$$0.15 < x_0 \leq 0.2$$

puesto que el último cociente tomado es 0.2 y el primero que se descarta es 0.15.

Por ejemplo, si tomamos $x_0 = 0.18$ nos queda

$$\left[\frac{0.4}{0.18}\right] + \left[\frac{0.3}{0.18}\right] + \left[\frac{0.2}{0.18}\right] + \left[\frac{0.1}{0.18}\right] = 2 + 1 + 1 + 0 = 4$$

con lo que la tabla de representantes es, efectivamente,

i=1	i=2	i=3	i=4
2	1	1	0

Proposición 1.62 *En las reglas de divisores con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$$R_i(w,k) = \left[g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right)\right]$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición. □

Corolario 1.63 *En las reglas de divisores lineales con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$$R_i(w,k) = \left[\frac{w_i}{x_0} - s\right]$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Proposición 1.64 *En las reglas de divisores con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$$r_i(w,k) = \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right)\right]}{k}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición. □

Corolario 1.65 *En las reglas de divisores lineales con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que

$$r_i(w,k) = \frac{\left[\frac{w_i}{x_0} - s\right]}{k}$$

para cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Proposición 1.66 *En las reglas de divisores con* $(g_d)_{d\geq 1}$ *estrictamente creciente, para cada* $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{N}^n$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$ *tales que* $c_1 + \ldots + c_n = k$

$$(R^k)^{-1}(c)$$

contiene al conjunto

$$\left\{ w \in W_n : \frac{w_h}{g_{c_h+1}} < \frac{w_i}{g_{c_i}} \quad \text{para cada } \ h \neq i \right\}$$

y está contenido en el conjunto

$$\left\{ w \in W_n : \frac{w_h}{g_{c_h+1}} \leq \frac{w_i}{g_{c_i}} \quad \text{para cada } \ h \neq i \right\} .$$

Demostración. Supongamos, en primer lugar, que se verifican las desigualdades anteriores en sentido estricto y sea

$$x_0 = \min \left\{ \frac{w_i}{g_{c_i}} : w_i > 0 \,, \quad i \in N \right\} > 0 \,.$$

Entonces

$$\frac{w_1}{g_{c_1+1}} < x_0 \leq \frac{w_1}{g_{c_1}}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{w_n}{g_{c_n+1}} < x_0 \leq \frac{w_n}{g_{c_n}}$$

y se tiene que

$$g\,(c_1) = g_{c_1} \leq \frac{w_1}{x_0} < g_{c_1+1} = g\,(c_1 + 1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g\,(c_n) = g_{c_n} \leq \frac{w_n}{x_0} < g_{c_n+1} = g\,(c_n + 1)$$

de donde, por ser g estrictamente creciente,

$$c_1 \leq g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0}\right) < c_1 + 1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n \leq g^{-1}\left(\frac{w_n}{x_0}\right) < c_n + 1$$

con lo que, por 1.53, se obtiene que para cada $i \in N$ es

$$R_i(w, k) = c_i \,.$$

Por lo que se refiere a la segunda inclusión, tenemos que si

$$R_i(w,k) = c_i$$

entonces

$$c_1 \leq g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0}\right) \leq c_1 + 1$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$c_n \leq g^{-1}\left(\frac{w_n}{x_0}\right) \leq c_n + 1$$

de donde, teniendo en cuenta que g es estrictamente creciente,

$$g_{c_1} = g\left(c_1\right) \leq \frac{w_1}{x_0} \leq g\left(c_1+1\right) = g_{c_1+1}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$g_{c_n} = g\left(c_n\right) \leq \frac{w_n}{x_0} \leq g\left(c_n+1\right) = g_{c_n+1}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{w_1}{g_{c_1+1}} \leq x_0 \leq \frac{w_1}{g_{c_1}}$$

$$\dots\dots$$

$$\frac{w_n}{g_{c_n+1}} \leq x_0 \leq \frac{w_n}{g_{c_n}}$$

y w pertenece, por tanto, al conjunto definido por las desigualdades en sentido amplio. □

Proposición 1.67 *Las reglas de divisores son sistemas electorales simples.*

Demostración. Ya que, teniendo en cuenta las identificaciones de W_n y $\widetilde{W_{n-1}}$ y 1.66, se deduce que R^k es un vector aleatorio para cada $k \in \mathbb{N}$.

Además, el axioma de exhaustividad se verifica por la propia definición de la regla. Por su parte, para el axioma del voto nulo basta con observar que si $w_i = 0$ entonces

$$\frac{w_i}{g_d} = 0$$

sea cual sea el divisor g_d. Y, finalmente, el axioma de imparcialidad se debe a que la regla sólo deja de decidir cuando

$$\frac{w_h}{g_d} = \frac{w_i}{g_{d'}}$$

para ciertos $h, i \in N$, que constituyen un conjunto de probabilidad cero. □

1.2 Extensión media de un sistema electoral

El objetivo de esta sección es definir una operación que permita obtener nuevos sistemas electorales en un conjunto mayor de circunscripciones a partir de otro. La idea básica consiste en considerar las medias ponderadas y aplicar entonces el sistema electoral dado. Sin embargo, y aunque esto es realmente así si partimos de un sistema electoral simple, abordaremos el caso más general en que el punto de partida es un sistema electoral arbitrario.

Sea P un conjunto finito y $\hat{P}$ un conjunto de cardinal múltiplo del cardinal de P.

Entonces, dado un sistema electoral

$$(N, \aleph, R)$$

asociado a $(P, \mathcal{P})$, el objetivo es definir un nuevo sistema electoral

$$(N, \hat{\aleph}, \hat{R})$$

asociado a $(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$.

Por comodidad de notación, supondremos que

$$P = \{1, \ldots, p\}$$

y

$$\hat{P} = \{1, \ldots, p, \ldots, (z-1)p + 1, \ldots, zp\}\,.$$

Ejemplo 1.68 Consideremos un sistema electoral R formado por dos circunscripciones

$$\{1, 2\}\,.$$

Entonces, si consideramos un nuevo conjunto de 4 circunscripciones

$$\{1, 2, 3, 4\}\,,$$

lo que haremos será unir la primera con la tercera y la segunda con la cuarta, con lo que se obtendrán de nuevo dos circunscripciones

$$\big\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\big\}\,.$$

Para cada

$$u = (u_1, \ldots, u_p, \ldots, u_{(z-1)p+1}, \ldots, u_{zp}) \in \overline{U_{zp}}\,,$$

sean

$$u_+ = ((u_+)_1, \ldots, (u_+)_p) = (u_1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}, \ldots, u_p + \ldots + u_{zp}) \in \overline{U_p}$$

y

$$u_1^* = \frac{u_1}{(u_+)_1}, \ldots, u_p^* = \frac{u_p}{(u_+)_p}, \ldots, u_{(z-1)p+1}^* = \frac{u_{(z-1)p+1}}{(u_+)_1}, \ldots, u_{zp}^* = \frac{u_{zp}}{(u_+)_p}\,.$$

Proposición 1.69 *Para cada permutación π de $\hat{P}$*

$$(u_\pi)_+ = (u_+)_\pi$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$.

Demostración. Puesto que para cada permutación π de $\hat{P}$

$$(u_\pi)_+ = (u_{\pi(1)} + \ldots + u_{\pi((z-1)p+1)}, \ldots, u_{\pi(p)} + \ldots + u_{\pi(zp)}) = (u_+)_\pi$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$. □

Ejemplo 1.70 Continuando con el ejemplo 1.68, dada la tabla de pesos de $\overline{U_4}$

j=1	j=2	j=3	j=4
0.4	0.3	0.2	0.1

como $0.4 + 0.2 = 0.6$ y $0.3 + 0.1 = 0.4$, la tabla correspondiente de $\overline{U_2}$ es

j=1	j=2
0.6	0.4

y los valores anteriores son, por tanto,

$$u_1^* = \frac{0.4}{0.6} = 0.67\,, \quad u_2^* = \frac{0.3}{0.4} = 0.75\,, \quad u_3^* = \frac{0.2}{0.6} = 0.33 \quad \text{y} \quad u_4^* = \frac{0.1}{0.4} = 0.25\,.$$

Por otra parte, para cada vector $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada matriz

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^p & \dots & w_1^{(z-1)p+1} & \dots & w_1^{zp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & \dots & w_n^p & \dots & w_n^{(z-1)p+1} & \dots & w_n^{zp} \end{pmatrix} \in W_n^{zp}$$

consideramos la matriz

$$\hat{w}^* = \begin{pmatrix} u_1^* w_1^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_1^{(z-1)p+1} & \dots & u_p^* w_1^p + \ldots + u_{zp}^* w_1^{zp} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^* w_n^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_n^{(z-1)p+1} & \dots & u_p^* w_n^p + \ldots + u_{zp}^* w_n^{zp} \end{pmatrix} \in W_n^p .$$

Proposición 1.71 *(a) Para cada permutación ν de N*

$$\widehat{(w_\nu)}^* = (\hat{w}^*)_\nu$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_n^{zp}$.

(b) Para cada permutación π de $\hat{P}$

$$\widehat{(w^\pi)}^* = (\hat{w}^*)^\pi$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_n^{zp}$.

Demostración. (a) Dado que para cada permutación ν de N

$$\widehat{(w_\nu)}^* = \begin{pmatrix} u_1^* w_{\nu(1)}^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_{\nu(1)}^{(z-1)p+1} & \dots & u_p^* w_{\nu(1)}^p + \ldots + u_{zp}^* w_{\nu(1)}^{zp} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^* w_{\nu(n)}^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_{\nu(n)}^{(z-1)p+1} & \dots & u_p^* w_{\nu(n)}^p + \ldots + u_{zp}^* w_{\nu(n)}^{zp} \end{pmatrix} = (\hat{w}^*)_\nu$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_n^{zp}$.

(b) Puesto que para cada permutación π de $\hat{P}$

$$\widehat{(w^\pi)}^* = \begin{pmatrix} u_1^* w_1^{\pi(1)} + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_1^{\pi((z-1)p+1)} & \dots & u_p^* w_1^{\pi(p)} + \ldots + u_{zp}^* w_1^{\pi(zp)} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^* w_n^{\pi(1)} + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_n^{\pi((z-1)p+1)} & \dots & u_p^* w_n^{\pi(p)} + \ldots + u_{zp}^* w_n^{\pi(zp)} \end{pmatrix} = (\hat{w}^*)^\pi$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Proposición 1.72 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $i \in N$*

$$u_+ \cdot \hat{w}_i^* = \hat{w}_i \, .$$

Demostración. Ya que

$$u_+ \cdot \hat{w}_i^* = ((u_+)_1, \ldots, (u_+)_p) \cdot \left(u_1^* w_i^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_i^{(z-1)p+1}, \ldots, u_p^* w_i^p + \ldots + u_{zp}^* w_i^{zp} \right) =$$

$$((u_+)_1, \ldots, (u_+)_p) \cdot \left(\frac{u_1}{(u_+)_1} w_i^1 + \ldots + \frac{u_{(z-1)p+1}}{(u_+)_1} w_i^{(z-1)p+1}, \ldots, \frac{u_p}{(u_+)_p} w_i^p + \ldots + \frac{u_{zp}}{(u_+)_p} w_i^{zp} \right) =$$

$$u_1 w_i^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1} w_i^{(z-1)p+1} + \ldots + u_p w_i^p + \ldots + u_{zp} w_i^{zp} = \hat{w}_i$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Ejemplo 1.73 Dada la tabla de W_4^4

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.4	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.3	0.3	0.2	0.1	0.4
j=3	0.2	0.2	0.1	0.4	0.3
j=4	0.1	0.1	0.4	0.3	0.2

teniendo en cuenta el ejemplo 1.70 y que

$$\begin{array}{ccc} 0.67 \cdot 0.4 + 0.33 \cdot 0.2 = 0.333 & & 0.75 \cdot 0.3 + 0.25 \cdot 0.1 = 0.250 \\ 0.67 \cdot 0.3 + 0.33 \cdot 0.1 = 0.233 & \text{y} & 0.75 \cdot 0.2 + 0.25 \cdot 0.4 = 0.250 \\ 0.67 \cdot 0.2 + 0.33 \cdot 0.4 = 0.267 & & 0.75 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.3 = 0.150 \\ 0.67 \cdot 0.1 + 0.33 \cdot 0.3 = 0.167 & & 0.75 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.2 = 0.350 \end{array}$$

se obtiene la tabla de W_4^2

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.333	0.233	0.267	0.167
j=2	0.4	0.250	0.250	0.150	0.350

Notamos por F_+ la aplicación

$$F_+ : \overline{U_{zp}} \longrightarrow \overline{U_p}$$

definida para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ por

$$F_+(u) = u_+ \,.$$

Observación 1.74 Consideramos en $\overline{U_{zp}}$ la σ–álgebra de antiimágenes por F_+ de los conjuntos medibles de $\overline{U_p}$

$$\left\{F_+^{-1}(\beta) : \beta \text{ es un conjunto medible de } \overline{U_p}\right\} \,.$$

Y consideraremos en esta σ–álgebra la probabilidad dada para cada β medible de $\overline{U_{zp}}$ por

$$\hat{\mathcal{P}}\left(F_+^{-1}(\beta)\right) = \mathcal{P}(\beta) \,.$$

Proposición 1.75 *F_+ es medible y exhaustiva.*

Demostración. Por definición. □

Ejemplo 1.76 Si consideramos definida, por ejemplo, la probabilidad uniforme en $\overline{U_2}$ del ejemplo 1.7 entonces la probabilidad en $\overline{U_4}$ es

$$\hat{\mathcal{P}}(\beta) = \mathcal{P}(F_+(\beta))$$

para cada β medible de $\overline{U_4}$.

Por otra parte, para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ notamos por $\hat{F}^u$ la aplicación

$$\hat{F}^u : W_n^{zp} \longrightarrow W_n^p$$

definida para cada $w \in W_n^{zp}$ por

$$\hat{F}^u(w) = \hat{w}^* \,.$$

Observación 1.77 Consideramos ahora en W_n^{zp} la σ–álgebra de antiimágenes por $\hat{F}^u$ de los conjuntos medibles de W_n^p

$$\left\{\left(\hat{F}^u\right)^{-1}(\beta) : \beta \text{ es un conjunto medible de } W_n^p\right\} \,.$$

Proposición 1.78 *$\hat{F}^u$ es medible y exhaustiva, para cada $u \in \overline{U_{zp}}$.*

Demostración. Por definición. □

Consideremos la familia de aplicaciones

$$\hat{\aleph} = \left(\hat{\aleph}^u\right)_{u \in \overline{U_{zp}}}$$

tales que

$$\hat{\aleph}^u : W_n^{zp} \longrightarrow W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n$$

es la aplicación definida por

$$\hat{\aleph}^u(w) = \aleph^{u_+}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_n^{zp}$.

Y consideremos asimismo en W_n^{zp} la familia de *probabilidades*

$$(\mathcal{P}_u)_{u \in \overline{U_{zp}}}$$

dadas por las aplicaciones anteriores y las funciones de densidad

$$(\hat{f}^u)_{u \in \overline{U_{zp}}}$$

definidas por

$$\hat{f}^u(w) = f^{u_+}(w)$$

para cada $w \in W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n$.

Proposición 1.79 *Las funciones $\hat{f}^u$ anteriores están bien definidas.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que f^{u_+} es una función de densidad, para cada $u \in \overline{U_{zp}}$. □

Proposición 1.80 *La función de densidad uniforme de la extensión media es también uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$\hat{f}^u(w) = f^{u_+}(w) = \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m$$

para cada $w \in W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n$. □

Proposición 1.81 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$*

$$\hat{\aleph}^u = \aleph^{F_+(u)} \circ \hat{F}^u \,.$$

Demostración. Puesto que

$$\hat{\aleph}^u(w) = \aleph^{u_+}(\hat{w}^*) = \aleph^{F_+(u)}(\hat{F}^u(w)) = (\aleph^{F_+(u)} \circ \hat{F}^u)(w)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Proposición 1.82 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $j = 1, \ldots, m$,*

$$\hat{\aleph}_j^u$$

es un vector aleatorio.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.75, 1.78 y 1.81. □

Proposición 1.83 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, la probabilidad asociada a la extensión media es*

$$\hat{\mathcal{P}}_u\Big((\hat{F}^u)^{-1}(\beta)\Big) = \hat{\mathcal{P}}_{u_+}(\beta)$$

para cada β medible de W_n^{zp}.

Demostración. Puesto que

$$\hat{\mathcal{P}}_u\Big((\hat{F}^u)^{-1}(\beta)\Big) = \int_{(\aleph\circ\hat{F})\big((\hat{F}^u)^{-1}(\beta)\big)} \hat{f}^u(w)\, d\hat{V} = \int_{\aleph(\beta)} f^{u_+}(w)\, dV = \hat{\mathcal{P}}_{u_+}(\beta)$$

para cada β medible de W_n^p. □

Ejemplo 1.84 Si consideramos los ejemplos 1.70 y 1.73 y suponemos que la función de recuento $\aleph$ es

$$\aleph^u(w) = (w_1, w_2)$$

para cada $w \in W_4 \times W_4$, tenemos que

$$\hat{\aleph}^{(0.4,0.3,0.2,0.1)}\begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} = \aleph^{(0.6,0,4)}\begin{pmatrix} 0.333 & 0.233 & 0.267 & 0.167 \\ 0.250 & 0.250 & 0.150 & 0.350 \end{pmatrix}$$

$$= \big((0.333, 0.233, 0.267, 0.167), (0.250, 0.250, 0.150, 0.350)\big)$$

Consideremos ahora la familia de aplicaciones

$$\hat{R} = (\hat{R}^u)_{u \in \overline{U_p}}$$

tales que para cada $u \in \overline{U_{zp}}$

$$\hat{R}^u : W_n^{zp} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

es la aplicación definida por

$$\hat{R}_i^u(w, k) = R_i^{u+}(\hat{w}^*, k)$$

para cada $i \in N$, cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

En particular, podemos considerar también para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $k \in \mathbb{N}$ la aplicación

$$\hat{R}^{u,k} : W_n^{zp} \longrightarrow \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

definida por

$$\hat{R}^{u,k}(w) = \hat{R}^u(w, k)$$

para cada $w \in W_n^{zp}$.

Proposición 1.85 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\hat{R}^{u,k} = R^{\hat{F}(u),k} \circ \hat{F}^u \,.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $i \in N$

$$\hat{R}_i^{u,k}(w) = \hat{R}_i^u(w, k) = R_i^{u+}(\hat{w}^*, k) = R_i^{u+,k}(\hat{w}^*) = R_i^{\hat{F}(u),k}(\hat{F}^u(w)) = (R_i^{\hat{F}(u),k} \circ \hat{F}^u)(w)$$

para cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 1.86 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$R^{u,k}$$

es un vector aleatorio.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.75, 1.78 y 1.85. □

Ejemplo 1.87 Consideramos el sistema electoral para $n = 2$ candidaturas y $p = 2$ circunscripciones que asigna todos los representantes –salvo empates– a la candidatura de voto mayor en la circunscripción de peso superior cuando se han de elegir $k = 6$ representantes.

Entonces, dada la tabla de pesos y votos

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.4	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.3	0.3	0.2	0.1	0.4
j=3	0.2	0.2	0.1	0.4	0.3
j=4	0.1	0.1	0.4	0.3	0.2

como habíamos visto en el ejemplo 1.73, la tabla anterior se reduce a

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.333	0.233	0.267	0.167
j=2	0.4	0.250	0.250	0.350	0.150

Por tanto, como las circunscripciones tienen pesos

$$0.6 \qquad \text{y} \qquad 0.4\,,$$

es la primera circunscripción la de peso mayor. Y, en ésta, como los votos son

$$0.333\,, \qquad 0.233\,, \qquad 0.267 \qquad \text{y} \qquad 0.167\,,$$

la primera es la de voto mayor y, por tanto, los 6 representantes son asignados a la primera candidatura

i=1	i=2	i=3	i=4
6	0	0	0

Proposición 1.88 *$(N, \hat{\aleph}, \hat{R})$ es un sistema electoral asociado a $(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$.*

Demostración. En primer lugar, por 1.82 y 1.86, tanto las aplicaciones $\hat{\aleph}_j^u$ para cada $j = 1, \ldots, m$ como las aplicaciones $\hat{R}^{u,k}$ son vectores aleatorios.

El axioma de exhaustividad es trivial, ya que

$$\hat{R}_1^u(w,k) + \ldots + \hat{R}_n^u(w,k) = R_1^{u+}(\hat{w}^*, k) + \ldots + R_n^{u+}(\hat{w}^*, k) = k$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$, por el axioma de exhaustividad de R.

El axioma del voto nulo se deduce de que si $w_i^1 = \ldots = w_i^{zp} = 0$ entonces

$$(\hat{w}^*)_i^j = u_1^* w_i^j + \ldots + u_z^* w_i^{(z-1)p+j} = 0$$

para cada $j \in P$ y, por el axioma del voto nulo para R, se obtiene que

$$\hat{R}_i^u(w,k) = R_i^{u+}(\hat{w}^*, k) = 0$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Para el de simetría, por el axioma de simetría de R y por 1.69 y 1.71, para cada permutación π de P^+, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\hat{R}_i^{u_\pi}(w^\pi, k) = R_i^{(u_\pi)+}\left(\widehat{(w^\pi)}^*, k\right) = R_i^{(u_+)\pi}\left((\hat{w}^*)^\pi, k\right) = R_i^{u+}(\hat{w}^*, k) = \hat{R}_i^u(w,k)$$

casi seguro $u \in \overline{U_p}$.

Y en el de imparcialidad, por el axioma de imparcialidad de R y por 1.71, para cada permutación ν de N, cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\hat{R}_{\nu(i)}^u(w_\nu, k) = R_{\nu(i)}^{u+}\left(\widehat{(w_\nu)}^*, k\right) = R_{\nu(i)}^{u+}\left((\hat{w}^*)_\nu, k\right) = R_i^{u+}(\hat{w}^*, k) = \hat{R}_i^u(w,k)$$

casi seguro $w \in W_n^{zp}$. □

Definición 1.89 El sistema electoral

$$(N, \hat{\aleph}, \hat{R})$$

asociado a

$$(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$$

se denomina la **extensión media** del sistema electoral $(N, \aleph, R)$ asociado a $(P, \mathcal{P})$.

Por abuso de lenguaje, hablaremos de *extensión media*

$$\hat{R}$$

en N asociada a $\hat{P}$ con función de recuento media $\hat{\aleph}$ o de extensión media $\hat{R}$ simplemente, si no hay peligro de confusión.

Por tanto, la extensión media $\hat{R}$ opera como el sistema electoral R, pero sobre u_+ y $\hat{w}^*$ en lugar de u y w.

Definición 1.90 Las aplicaciones

$$\hat{\aleph}^u$$

se denominan **funciones de recuento medias**; las aplicaciones

$$\hat{R}^u\,,$$

reglas electorales medias; y las aplicaciones

$$\hat{R}^{u,k}\,,$$

leyes electorales medias.

Proposición 1.91 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $i \in N$*

$$\hat{r}_i^u(w,k) = r_i^{u_+}(\hat{w}^*,k)$$

para cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ya que

$$\hat{r}_i^u(w,k) = \frac{\hat{R}_i^u(w,k)}{k} = \frac{R_i^{u_+}(\hat{w}^*,k)}{k} = r_i^{u_+}(\hat{w}^*,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 1.92 Continuando con el ejemplo 1.87, dividiendo por 6 se obtiene la siguiente tabla de representantes relativos:

i=1	i=2	i=3	i=4
1	0	0	0

Consideremos ahora un sistema electoral

$$(N, \aleph, R)$$

asociado a $(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$.

Podemos considerar entonces su extensión media

$$(N, \hat{\aleph}, \hat{R})$$

asociada a $(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$ y la extensión media de ésta

$$(N, \widehat{\hat{\aleph}}, \widehat{\hat{R}})$$

asociada a $(\widehat{\hat{P}}, \widehat{\hat{\mathcal{P}}})$.

Y podemos considerar también la extensión media directa del sistema electoral inicial

$$(N, \hat{\hat{\aleph}}, \hat{\hat{R}})$$

asociada a $(\hat{\hat{P}}, \hat{\hat{\mathcal{P}}})$.

En consonancia con la simbología anterior, y cometiendo un pequeño abuso de notación, utilizaremos los símbolos simples para los conceptos de las primeras extensiones medias anteriores y los símbolos dobles para los de la última extensión media.

Proposición 1.93 $\widehat{\hat{P}} = \hat{\hat{P}}$.

Demostración. Ya que $\widehat{\hat{P}} = \{1, \ldots, zp, \ldots, (z'-1)zp+1, \ldots, z'zp\} = \{1, \ldots, z'zp\} = \hat{\hat{P}}$. $\square$

Proposición 1.94 *Para cada* $u \in \overline{U_{z'zp}}$

$$(u_+)_+ = u_{++}\,.$$

Demostración. Ya que si

$$u = (u_1, \ldots, u_{z'zp}) \in W_{z'zp}$$

entonces

$$u_+ = (u_1 + \ldots + u_{(z'-1)zp+1}, \ldots, u_{zp} + \ldots + u_{z'zp})$$

y, por tanto,

$$(u_+)_+ = (u_1 + \ldots + u_{(zz'-1)p+1}, \ldots, u_p + \ldots + u_{z'zp}) = u_{++}$$

para cada $u \in \overline{U_{z'zp}}$. $\square$

Proposición 1.95 *Para cada $u \in \overline{U_{z'zp}}$ y cada $w \in W_n^{z'zp}$*

$$\widehat{(\hat{w}^*)}^* = \hat{\hat{w}}^{**}.$$

Demostración. Ya que si

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^{z'zp} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & \dots & w_n^{z'zp} \end{pmatrix} \in W_n^{z'zp}$$

entonces

$$(\widehat{(\hat{w}^*)}^*)_i^j = (u_+)_1^*(\hat{w}^*)_i^j + \ldots + (u_+)_{z'}^*(\hat{w}^*)_i^{(z'-1)zp+j} =$$

$$(u_+)_1^*(u_1^* w_i^j + \ldots + u_z^* w_i^{(z-1)p+j}) + \ldots + (u_+)_{z'}^*(u_1^* w_i^{(z'-1)zp+j} + \ldots + u_z^* w_i^{(z'-1)zp+(z-1)p+j}) =$$

$$(u_+)_1^* u_1^* w_i^j + \ldots + (u_+)_1^* u_z^* w_i^{(z-1)p+j} + \ldots + (u_+)_{z'}^* u_1^* w_i^{(z'-1)zp+j} + \ldots + (u_+)_{z'}^* u_z^* w_i^{(z'-1)zp+(z-1)p+j} =$$

$$(u_+)_1^* u_1^* w_i^j + \ldots + (u_+)_{z'}^* u_1^* w_i^{(z'-1)zp+j} + \ldots + (u_+)_1^* u_z^* w_i^{(z-1)p+j} + \ldots + (u_+)_{z'}^* u_z^* w_i^{(z'-1)zp+(z-1)p+j} =$$

$$(\hat{\hat{w}}^{**})_i^j$$

para cada $u \in \overline{U_{z'zp}}$, cada $w \in W_n^{z'zp}$, cada $i \in N$ y cada $j \in P$. □

Proposición 1.96 *Para cada $u \in \overline{U_{z'zp}}$, cada $w \in W_n^{z'zp}$ y cada $i \in N$*

$$\widehat{(\hat{\aleph})}_i^u(w) = \hat{\hat{\aleph}}_i^u(w).$$

Demostración. Puesto que, aplicando 1.94 y 1.95, se tiene que

$$\widehat{(\hat{\aleph})}_i^u(w) = \hat{\aleph}_i^{u_+}(\hat{w}^*) = \aleph_i^{(u_+)_+}(\widehat{(\hat{w}^*)}^*) = \aleph_i^{u_{++}}(\hat{\hat{w}}^{**}) = \hat{\hat{\aleph}}_i^u(w)$$

para cada $u \in \overline{U_{z'zp}}$, cada $w \in W_n^{z'zp}$ y cada $i \in N$. □

Proposición 1.97 *Para cada $u \in \overline{U_{z'zp}}$, cada $w \in W_n^{z'zp}$ y cada $i \in N$*

$$\widehat{(\hat{R})}_i^u(w,k) = \hat{\hat{R}}_i^u(w,k).$$

Demostración. Ya que, por 1.94 y 1.95, se tiene que

$$\widehat{(\hat{R})}_i^u(w,k) = \hat{R}_i^{u_+}(\hat{w}^*,k) = R_i^{(u_+)_+}\left(\widehat{(\hat{w}^*)}^*,k\right) = R_i^{u_{++}}\left(\hat{\hat{w}}^{**},k\right) = \hat{\hat{R}}_i^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{z'zp}}$, cada $w \in W_n^{z'zp}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N$. □

Proposición 1.98 *La extensión media de una extensión media es otra extensión media.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.96 y 1.97. □

1.2.1 Sistemas electorales medios

Definición 1.99 Los sistemas electorales que son extensión media de sistemas electorales simples se denominan **sistemas electorales medios**. Y tenemos los sistemas electorales **ordinales medios**, de **cuotas medios** y de **divisores medios** y sus casos particulares.

Tenemos, por tanto, que los pesos son

$$u_+ = 1 \qquad \text{y} \qquad u_1^* = u_1, \ldots, u_p^* = u_p$$

para cada $u \in \overline{U_p}$; y que los votos son los votos medios

$$\hat{w}^* = \hat{w}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

Además, la probabilidad en $\overline{U_p}$ es la trivial:

$$\hat{\mathcal{P}}(\overline{U_p}) = 1 \qquad \text{y} \qquad \hat{\mathcal{P}}(\emptyset) = 0\,.$$

Igualmente, como $u_+ = 1$, las funciones de recuento son todas iguales

$$\widehat{\aleph}^u(w) = \aleph(\hat{w})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$; la función de densidad es única

$$\hat{f}(w) = f(w)$$

para cada $w \in W_n$; y las probabilidades en W_n^p son

$$\widehat{\mathcal{P}}_u\left((\hat{F}^u)^{-1}\beta\right) = \mathcal{P}(\beta)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada β medible de W_n.

Corolario 1.100 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$, la regla electoral media es*

$$\hat{R}_i^u(w,k) = R_i(\hat{w},k)\,.$$

Corolario 1.101 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$, la regla electoral relativa media es*

$$\hat{r}_i^u(w,k) = r_i(\hat{w},k)\,.$$

La función de densidad usual será la uniforme, que es la considerada en los ejemplos que siguen.

Proposición 1.102 *En los sistemas ordinales medios, si $\hat{w}_i$ es el h_i–ésimo voto medio de $\hat{w}$*

$$\hat{R}_i^u(w,k) = c_{h_i}(k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.33 y 1.100. □

Corolario 1.103 *(a) En el sistema mayoritario puro medio,*

$$\hat{R}_i^u(w,k) = \begin{cases} k\,, & \text{si } \hat{w}_i > \hat{w}_h \text{ para cada } h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{w}_h < \hat{w}_i \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

(b) En el sistema igualitario puro medio,

$$\hat{R}_i^u(w,k) = \begin{cases} \left[\frac{k}{n}\right] + 1\,, & \text{si } \hat{w}_i \text{ es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } \hat{w}\,, \\ \left[\frac{k}{n}\right]\,, & \text{si } \hat{w}_i \text{ no es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } \hat{w}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Proposición 1.104 *En los sistemas ordinales medios, si $\hat{w}_i$ es el h_i–ésimo voto medio de $\hat{w}$*

$$\hat{r}_i^u(w,k) = \frac{c_{h_i}(k)}{k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.35 y 1.101. □

Corolario 1.105 *(a) En el sistema mayoritario puro medio,*

$$\hat{r}_i^u(w,k) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } w_i > w_h \text{ para cada } h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } w_h < w_i \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

(b) En el sistema igualitario puro medio,

$$\hat{r}_i^u(w,k) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{k}{n}\right] + 1}{k}\,, & \text{si } \hat{w}_i \text{ es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } \hat{w}\,, \\ \dfrac{\left[\frac{k}{n}\right]}{k}\,, & \text{si } w_i \text{ no es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } \hat{w}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Observación 1.106 La regla relativa mayoritaria pura media no depende de k.

Proposición 1.107 *En los sistemas de cuotas medios con*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right],$$

$$\hat{R}_i^u(w,k) = \begin{cases} \left[\dfrac{\hat{w}_i}{q_k}\right] + 1\,, & si\ \dfrac{\hat{w}_i}{q_k} - \left[\dfrac{\hat{w}_i}{q_k}\right] \text{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \left[\dfrac{\hat{w}_i}{q_k}\right]\,, & si\ \dfrac{\hat{w}_i}{q_k} - \left[\dfrac{\hat{w}_i}{q_k}\right] \text{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.45 y 1.100. □

Corolario 1.108 *En el sistema de los mayores restos medio,*

$$\hat{R}_i^u(w,k) = \begin{cases} [k\hat{w}_i] + 1\,, & si\ k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i] \text{ es uno de los mayores restos}\,, \\ [k\hat{w}_i]\,, & si\ k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i] \text{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Proposición 1.109 *En los sistemas de cuotas medios con*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right],$$

$$\hat{r}_i^u(w,k) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{\hat{w}_i}{q_k}\right] + 1}{k}\,, & si\ \dfrac{\hat{w}_i}{q_k} - \left[\dfrac{\hat{w}_i}{q_k}\right] \text{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \dfrac{\left[\frac{\hat{w}_i}{q_k}\right]}{k}\,, & si\ \dfrac{\hat{w}_i}{q_k} - \left[\dfrac{\hat{w}_i}{q_k}\right] \text{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.47 y 1.101. □

Corolario 1.110 *En el sistema de los mayores restos medio,*

$$\hat{r}_i^u(w,k) = \begin{cases} \dfrac{[k\hat{w}_i] + 1}{k}\,, & si\ k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i] \text{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \dfrac{[k\hat{w}_i]}{k}\,, & si\ k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i] \text{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Proposición 1.111 *En los sistemas de divisores medios con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{R}_i^u(w,k) = \left[g^{-1}\left(\frac{\hat{w}_i}{x_0}\right)\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.62 y 1.100. □

Corolario 1.112 *En las reglas de divisores lineales medios con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$*, existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{R}_i^u(w,k) = \left[\frac{\hat{w}_i}{x_0} - s\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

Proposición 1.113 *En las reglas de divisores medios con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{r}_i^u(w,k) = \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{w}_i}{x_0}\right)\right]}{k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.64 y 1.101. □

Corolario 1.114 *En las reglas de divisores lineales medios con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$*, existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{r}_i^u(w,k) = \frac{\left[\frac{\hat{w}_i}{x_0} - s\right]}{k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

Ejemplo 1.115 Consideremos la tabla

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4

y supongamos que se aplica el sistema electoral medio de Hondt con $k = 6$ representantes a elegir.

Entonces los votos medios son

$$\hat{w}_1 = 0.6 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.1 = 0.28$$
$$\hat{w}_2 = 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.26$$
$$\hat{w}_3 = 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.24$$
$$\hat{w}_4 = 0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.4 = 0.22$$

con lo que, teniendo en cuenta que la tabla de cocientes respectivos es

	i=1	i=2	i=3	i=4
d=1	0.280	0.260	0.240	0.220
d=2	0.140	0.130	0.120	0.110
d=3	0.093	0.087	0.080	0.073
d=4	0.070	0.065	0.060	0.055

se obtiene la tabla de representantes

i=1	i=2	i=3	i=4
2	2	1	1

1.3 Suma de sistemas electorales

En la sección anterior hemos introducido una manera de definir nuevos sistemas electorales a partir de uno ya dado. Si bien la forma de proceder en dicho caso es la más natural desde el punto de vista racional, no es el caso que suele darse en los ejemplos prácticos. En éstos, la situación más frecuente es que la repartición se haga por separado en cada una de las circunscripciones, previa repartición del número de representantes a elegir entre ellas. En esta sección formalizaremos esta idea, considerando el caso más general de un sistema electoral simple que reparte los representantes primero entre las circunscripciones y unos sistemas electorales que los distribuyen después entre las diferentes candidaturas.

Sean $P^1, \ldots, P^z$ unos conjuntos finitos y $P^+ = P^1 \cup \ldots \cup P^z$.

Entonces, dados unos sistemas electorales asociados a $(P^1, \mathcal{P}^1), \ldots, (P^z, \mathcal{P}^z)$

$$(N, \aleph^1, R^1), \ldots, (N, \aleph^z, R^z)$$

respectivamente y un sistema electoral simple

$$(Z, \aleph^0, R^0)\,,$$

el objetivo es definir un nuevo sistema electoral asociado a $(P^+, \mathcal{P}^+)$

$$(N, \aleph^+, R^+)\,.$$

Por comodidad de notación, supondremos que

$$P^1 = \{1, \ldots, p_1\}, \ldots, P^z = \{p_1 + \ldots + p_{z-1} + 1, \ldots, p_1 + \ldots + p_z\}$$

con lo que, en particular, será

$$P^+ = \{1, \ldots, p_1, \ldots, p_1 + \ldots + p_{z-1} + 1, \ldots, p_1 + \ldots + p_z\}\,.$$

Ejemplo 1.116 Consideremos un sistema electoral R formado por dos circunscripciones

$$\{1, 2\}\,.$$

Entonces, si consideramos un nuevo conjunto de 4 circunscripciones y unimos por ejemplo la primera con la segunda y la tercera con la cuarta, se obtienen de nuevo dos circunscripciones

$$\big\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\big\}\,,$$

Dado un vector

$$u = (u_1, \ldots, u_{p_1}, \ldots, u_{p_1+\ldots+p_{z-1}+1}, \ldots, u_{p_1+\ldots+p_z}) \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}\,,$$

podemos considerar el vector

$$u^+ = (u_1 + \ldots + u_{p_1}, \ldots, u_{p_1+\ldots+p_{z-1}+1} + \ldots + u_{p_1+\ldots+p_z}) \in \overline{U_z}$$

y los vectores

$$u_1^* = \left(\frac{u_1}{u_1^+}, \ldots, \frac{u_{p_1}}{u_1^+}\right) \in \overline{U_{p_1}}, \ldots, u_z^* = \left(\frac{u_{p_1+\ldots+p_{z-1}+1}}{u_z^+}, \ldots, \frac{u_{p_1+\ldots+p_z}}{u_z^+}\right) \in \overline{U_{p_z}}\,.$$

Proposición 1.117 *(a) Para cada permutación π de P^+ y cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$*

$$(u_\pi)^+ = (u^+)_\pi\,.$$

(b) Para cada permutación π de P^+ y cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$

$$(u_\pi)_j^* = (u_j^*)_\pi\,.$$

Demostración. (a) Puesto que para cada permutación π de P^+ y cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$

$$(u_\pi)^+ = (u_{\pi(1)} + \ldots + u_{\pi(p_1)}, \ldots, u_{\pi(p_1+\ldots+p_{z-1}+1)} + \ldots + u_{\pi(p_1+\ldots+p_z)}) = (u^+)_\pi\,.$$

(b) Dado que para cada permutación π de P^+

$$(u_\pi)_j^* = \left(\frac{u_{\pi(p_1+\ldots+p_{j-1}+1)}}{u_j^+}, \ldots, \frac{u_{\pi(p_1+\ldots+p_j)}}{u_j^+}\right) = (u_j^*)_\pi$$

para cada $j \in Z$ y cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$. □

Ejemplo 1.118 Continuando con el ejemplo 1.116, dada la tabla de pesos de $\overline{U_4}$

j=1	j=2	j=3	j=4
0.4	0.3	0.2	0.1

sumando los pesos de las dos primeras y de las dos últimas circunscripciones, obtenemos que

$$u^+ = (0.4 + 0.3, 0.2 + 0.1) = (0.7, 0.3)$$

y

$$u_1^* = \left(\frac{0.4}{0.7}, \frac{0.3}{0.7}\right) = (0.57, 0.43) \qquad \text{y} \qquad u_2^* = \left(\frac{0.2}{0.3}, \frac{0.1}{0.3}\right) = (0.67, 0.33)\,.$$

Asimismo, dada la matriz

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^{p_1} & \dots & w_1^{p_1+\dots+p_{z-1}+1} & \dots & w_1^{p_1+\dots+p_z} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & \dots & w_n^{p_1} & \dots & w_n^{p_1+\dots+p_{z-1}+1} & \dots & w_n^{p_1+\dots+p_z} \end{pmatrix} \in W_n^{p_1+\dots+p_z}$$

podemos considerar las matrices

$$w^1 = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^{p_1} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & \dots & w_n^{p_1} \end{pmatrix} \in W_n^{p_1}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$w^z = \begin{pmatrix} w_1^{p_1+\dots+p_{z-1}+1} & \dots & w_1^{p_1+\dots+p_z} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{p_1+\dots+p_{z-1}+1} & \dots & w_n^{p_1+\dots+p_z} \end{pmatrix} \in W_n^{p_z}\,.$$

Proposición 1.119 *(a) Para cada permutación ν de N, cada $j \in Z$ y cada $w \in W_n^{p_1+\dots+p_z}$*

$$(w_\nu)^j = (w^j)_\nu\,.$$

(b) Para cada permutación π de P^+, cada $j \in Z$ y cada $w \in W_n^{p_1+\dots+p_z}$

$$(w^\pi)^j = (w^j)^\pi\,.$$

Demostración. (a) Ya que para cada permutación ν de N y cada $j \in Z$

$$(w_\nu)^j = \begin{pmatrix} w_{\nu(1)}^{p_1+\dots+p_{j-1}+1} & \dots & w_{\nu(1)}^{p_1+\dots+p_j} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{\nu(n)}^{p_1+\dots+p_{j-1}+1} & \dots & w_{\nu(n)}^{p_1+\dots+p_j} \end{pmatrix} = (w^j)_\nu$$

para cada $w \in W_n^{p_1+\dots+p_z}$.

(b) Puesto que para cada permutación π de P^+ y cada $j \in Z$

$$(w^\pi)^j = \begin{pmatrix} w_1^{\pi(p_1+\dots+p_{j-1}+1)} & \dots & w_1^{\pi(p_1+\dots+p_j)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{\pi(p_1+\dots+p_{j-1}+1)} & \dots & w_n^{\pi(p_1+\dots+p_j)} \end{pmatrix} = (w^j)^\pi$$

para cada $w \in W_n^{p_1+\dots+p_z}$. $\square$

Proposición 1.120 *Para cada* $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$*, cada* $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ *y cada* $i \in N$

$$u_1^+ \cdot \left(u_1^* \cdot w_i^1\right) + \ldots + u_z^+ \cdot \left(u_z^* \cdot w_i^z\right) = \hat{w}_i\,.$$

Demostración. Puesto que para cada $i \in N$

$$u_1^+ \cdot \left(u_1^* \cdot w_i^1\right) + \ldots + u_z^+ \cdot \left(u_z^* \cdot w_i^z\right) =$$

$$u_1^+ \left(\frac{u_1}{u_1^+} w_i^1 + \ldots + \frac{u_{p_1}}{u_1^+} w_i^{p_1}\right) + \ldots + u_z^+ \left(\frac{u_{p_1+\ldots+p_{z-1}+1}}{u_z^+} w_i^{p_1+\ldots+p_{z-1}+1} + \ldots + \frac{u_{p_1+\ldots+p_z}}{u_z^+} w_i^{p_1+\ldots+p_z}\right)$$

$$= u_1 w_i^1 + \ldots + u_{p_1} w_i^{p_1} + \ldots + u_{p_1+\ldots+p_{z-1}+1} w_i^{p_1+\ldots+p_{z-1}+1} + \ldots + u_{p_1+\ldots+p_z} w_i^{p_1+\ldots+p_z} = \hat{w}_i$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Ejemplo 1.121 Dada la tabla de votos de W_4^4

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.4	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.3	0.3	0.2	0.1	0.4
j=3	0.2	0.2	0.1	0.4	0.3
j=4	0.1	0.1	0.4	0.3	0.2

tomando los pesos calculados en 1.118 y los votos de las correspondientes circunscripciones por separado, se obtienen las dos tablas de votos de W_4^2

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.57	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.43	0.3	0.2	0.1	0.4

y

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.67	0.2	0.1	0.4	0.3
j=2	0.33	0.1	0.4	0.3	0.2

Consideremos las aplicaciones

$$F^+ : \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}} \longrightarrow \overline{U_z} \qquad \text{y} \qquad F_j^* : \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}} \longrightarrow \overline{U_{p_j}}$$

definidas para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ por

$$F^+(u) = u^+ \qquad \text{y} \qquad F_j^*(u) = u_j^*$$

para cada $j = 1, \ldots, z$, respectivamente.

Observación 1.122 Consideraremos entonces en $\overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ la σ–álgebra generada por las antiimágenes de conjuntos medibles de $\overline{U_z}$ por F^+ y de $\overline{U_{p_j}}$ por F_j^* para cada $j = 1, \ldots, z$, es decir, la generada por el producto cartesiano de las antiimágenes de conjuntos medibles de $\overline{U_z}$ y de $\overline{U_{p_j}}$ para cada $j = 1, \ldots, z$:

$$\left(\sigma\left((F^+)^{-1}(\beta_0) \times (F_1^*)^{-1}(\beta_1) \times \ldots \times (F_z^*)^{-1}(\beta_z)\right)\right)_{(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_z)\in\overline{U_z}\times\overline{U_{p_1}}\times\ldots\times\overline{U_{p_z}}}$$

y consideraremos en la anterior σ–álgebra la probabilidad $\mathcal{P}^+$ producto

$$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^0 \otimes \mathcal{P}^1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}^z .$$

Proposición 1.123 *(a) F^+ es medible.*

(b) F_j^* es medible, para cada $j \in Z$.

Demostración. Por definición. □

Consideremos asimismo para cada $j = 1, \ldots, z$ la aplicación

$$F^j : W_n^{p_1+\ldots+p_z} \longrightarrow W_n^{p_j}$$

definida para cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ por

$$F^j(w) = w^j .$$

Observación 1.124 Consideraremos entonces en $W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ la σ–álgebra producto de las σ–álgebras de F^j para cada $j = 1, \ldots, z$, es decir, la generada por el producto cartesiano de las antiimágenes por F^j de los conjuntos medibles de $W_n^{p_j}$ para cada $j = 1, \ldots, z$:

$$\left(\sigma\left((F^1)^{-1}(\beta_1) \times \ldots \times (F^z)^{-1}(\beta_z)\right)\right)_{(\beta_1,\ldots,\beta_z)\in W_n^{p_1}\times\ldots\times W_n^{p_z}} .$$

Proposición 1.125 *F^j es medible y exhaustiva, para cada $j = 1, \ldots, z$.*

Demostración. Por definición. □

Consideremos asimismo la familia de aplicaciones

$$\aleph^+ = \left((\aleph^+)^u\right)_{u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}}$$

tales que para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$

$$(\aleph^+)^u : W_n^{p_1+\ldots+p_z} \longrightarrow W_n \times \overset{(m_1+\ldots+m_z)}{\cdots} \times W_n$$

es la aplicación definida para cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ por

$$(\aleph^+)^u(w) = \left((\aleph^1)^{u_1^*}(w^1), \ldots, (\aleph^z)^{u_z^*}(w^z)\right) .$$

Y consideremos asimismo en $W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ la familia de *probabilidades*

$$(\mathcal{P}_+)_{u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}}$$

dadas por las aplicaciones anteriores y las funciones de densidad definidas para cada $w \in W_n \times \overset{(m_1+\ldots+m_z)}{\cdots} \times W_n$ por

$$(f^+)^u(w) = (f^1)^{u_1^*}(w^1) \cdot \ldots \cdot (f^z)^{u_z^*}(w^z) .$$

Proposición 1.126 *Las funciones $(f^+)^u$ anteriores están bien definidas.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que, por ser $(f^1)^{u_1^*}, \ldots, (f^z)^{u_z^*}$ funciones de densidad,

$$\int_{W_n \times \overset{(m_1+\ldots+m_z)}{\cdots} \times W_n} (f^+)^u(w)\, dV^+ = \int_{W_n \times \overset{(m_1+\ldots+m_z)}{\cdots} \times W_n} (f^1)^{u_1^*}(w^1) \cdot \ldots \cdot (f^z)^{u_z^*}(w^z)\, dV^+ =$$

$$\int_{W_n \times \overset{(m_1)}{\cdots} \times W_n} (f^1)^{u_1^*}(w^1)\, dV^1 \cdot \ldots \cdot \int_{W_n \times \overset{(m_z)}{\cdots} \times W_n} (f^z)^{u_z^*}(w^z)\, dV^z = 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$$

y

$$(f^+)^u(w) = (f^1)^{u_1^*}(w^1) \cdot \ldots \cdot (f^z)^{u_z^*}(w^z) \geq 0$$

para cada $w \in W_n \times \overset{(m_1+\ldots+m_z)}{\cdots} \times W_n$. □

Proposición 1.127 *La función de densidad suma de sistemas electorales con funciones de densidad uniformes es uniforme.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$(f^+)^u(w) = (f^1)^{u_1^*}(w^1) \cdot \ldots \cdot (f^z)^{u_z^*}(w^z) = \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^{m_1} \cdots \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^{m_z} = \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^{m_1+\ldots+m_z}$$

para cada $w \in W_n \times \overset{(m_1+\ldots+m_z)}{\cdots} \times W_n$. □

Proposición 1.128 *Para cada* $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$

$$(\aleph^+)^u = \left((\aleph^1)^{F_1^*(u)} \circ F^1, \ldots, (\aleph^z)^{F_z^*(u)} \circ F^z\right) .$$

Demostración. Puesto que para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$

$$(\aleph^+)^u(w) = \left((\aleph^1)^{u_1^*}(w^1), \ldots, (\aleph^z)^{u_z^*}(w^z)\right) = \left((\aleph^1)^{F_1^*(u)}\left(F^1(w)\right), \ldots, (\aleph^z)^{F_z^*(u)}\left(F^z(w)\right)\right) =$$

$$\left(\left((\aleph^1)^{F_1^*(u)} \circ F^1\right)(w), \ldots, \left((\aleph^z)^{F_z^*(u)} \circ F^z\right)(w)\right) = \left((\aleph^1)^{F_1^*(u)} \circ F^1, \ldots, (\aleph^z)^{F_z^*(u)} \circ F^z\right)(w)$$

para cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Proposición 1.129 *Para cada* $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ *y cada* $j = 1, \ldots, m$

$$(\aleph^+)_j^u$$

es un vector aleatorio.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.123, 1.125 y 1.128. □

Proposición 1.130 *Para cada* $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$*, la probabilidad de la suma es la probabilidad producto*

$$\mathcal{P}_u^+ = \mathcal{P}_{u_1^*}^1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}_{u_z^*}^z .$$

Demostración. Puesto que la función de densidad de la suma es el producto de las funciones de densidad de cada uno por definición. □

Ejemplo 1.131 Si consideramos los ejemplos 1.118 y 1.121 y las funciones de recuento

$$(\aleph^1)^u(w) = (\aleph^2)^u(w) = (w^1, w^2)$$

para cada $w \in W_4 \times W_4$, tenemos que

$$(\aleph^+)^{(0.4,0.3,0.2,0.1)} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} =$$

$$\left(\aleph^{(0.57,0.43)} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}, \aleph^{(0.67,0.33)} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\left((0.4, 0.3, 0.2, 0.1), (0.3, 0.2, 0.1, 0.4), (0.2, 0.1, 0.4, 0.3), (0.1, 0.4, 0.3, 0.2)\right) .$$

Consideremos ahora la familia de aplicaciones

$$R^+ = \left((R^+)^u\right)_{u\in\overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}}$$

tales que para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$

$$(R^+)^u : W_n^{p_1+\ldots+p_z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

es la aplicación definida para cada $i \in N$, cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$ por

$$(R^+)_i^u(w,k) = (R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) .$$

En particular, podemos considerar también para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ la aplicación obtenida a partir de la anterior fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$

$$(R^+)^{u,k} : W_n^{p_1+\ldots+p_z} \longrightarrow \mathbb{N}^n \subseteq \mathbb{R}^n$$

definida para cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$ por

$$(R^+)^{u,k}(w) = (R^+)^u(w,k) .$$

Proposición 1.132 *Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$(R^+)^{u,k} = (R^1)^{F_1^*(u),R_1^0(F^+(u),k)} \circ F^1 + \ldots + (R^z)^{F_z^*(u),R_z^0(F^+(u),k)} \circ F^z .$$

Demostración. Puesto que

$$\begin{gathered}(R^+)_i^{u,k}(w) = (R^+)_i^u(w,k) = (R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) = \\ (R^1)_i^{F_1^*(u)}\left(F_1(w), R_1^0(F^+(u),k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{F_z^*(u)}\left(F_z(w), R_z^0(F^+(u),k)\right) = \\ (R^1)_i^{F_1^*(u),R_1^0(F^+(u),k)}\left(F_1(w)\right) + \ldots + (R^z)_i^{F_z^*(u),R_z^0(F^+(u),k)}\left(F_z(w)\right) = \\ \left((R^1)_i^{F_1^*(u),R_1^0(F^+(u),k)} \circ F^1\right)(w) + \ldots + \left((R^z)_i^{F_z^*(u),R_z^0(F^+(u),k)} \circ F^z\right)(w) = \\ \left((R^1)_i^{F_1^*(u),R_1^0(F^+(u),k)} \circ F^1 + \ldots + (R^z)_i^{F_z^*(u),R_z^0(F^+(u),k)} \circ F^z\right)(w)\end{gathered}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Proposición 1.133 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$R^{u,k}$$

es un vector aleatorio.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.123, 1.125 y 1.132. □

Ejemplo 1.134 Consideremos la suma respecto del sistema electoral simple de los mayores restos de los dos sistemas electorales iguales que asignan todos los representantes a la candidatura de mayor voto en la circunscripción de peso superior y supongamos que el número de representantes a elegir es $k = 6$. Entonces, dada la tabla del ejemplo 1.121

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.4	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.3	0.3	0.2	0.1	0.4
j=3	0.2	0.2	0.1	0.4	0.3
j=4	0.1	0.1	0.4	0.3	0.2

la cuota para el sistema electoral simple de los mayores restos es $\frac{1}{6} = 0.167$ e inicialmente corresponden 4 y 1 representantes a cada circunscripción. Pero como los restos son 0.333 y 0.133 respectivamente, el representante adicional se asigna a la segunda circunscripción y la tabla final de representantes de las circunscripciones queda

j=1	j=2
4	2

Entonces, teniendo en cuenta las tablas obtenidas en dicho ejemplo

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.57	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.43	0.3	0.2	0.1	0.4

y

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.67	0.2	0.1	0.4	0.3
j=2	0.33	0.1	0.4	0.3	0.2

los cuatro representantes correspondientes al primer sistema electoral son asignados a la primera candidatura mientras que los dos representantes del segundo se otorgan a la tercera candidatura. Por tanto, la tabla de representantes totales es

i=1	i=2	i=3	i=4
4	0	2	0

Proposición 1.135 *$(N, \aleph^+, R^+)$ es un sistema electoral asociado a $(P^+, \mathcal{P}^+)$.*

Demostración. En primer lugar, por 1.129 y 1.133, tanto las aplicaciones $((\aleph)^+)_j^u$ para cada $j = 1, \dots, m$ como $(R^+)^{u,k}$ son vectores aleatorios.

El axioma de exhaustividad se deduce de los axiomas de exhaustividad de R^0 y de $R^1, \dots, R^z$ y de que

$$(R^+)_1^u(w,k)+\ldots+(R^+)_n^u(w,k) = \sum_{j=1}^{z}(R^j)_1^{u_1^*}\left(w^1, R_j^0(u^+,k)\right)+\ldots+\sum_{j=1}^{z}(R^j)_n^{u_z^*}\left(w^z, R_j^0(u^+,k)\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right)+\ldots+\sum_{i=1}^{n}(R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) = R_1^0\left(u^+,k\right)+\ldots+R_z^0\left(u^+,k\right) = k$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

En cuanto al axioma del voto nulo, si $w_i^1 = \ldots = w_i^{p_1+\ldots+p_z} = 0$ entonces, por el axioma del voto nulo de $R^1, \dots, R^z$,

$$(R^+)_i^u(w,k) = (R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R^0(u^+,k)\right) = 0 + \ldots + 0 = 0$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Para el de simetría, por el axioma de simetría de R^0 y $R^1, \dots, R^z$ y por 1.117 y 1.119, agrupando los valores de los mismos sistemas electorales (reordenando si es necesario), para cada permutación π de P^+, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$(R^+)_i^{u_\pi}(w^\pi,k) = (R^{j_1})_i^{(u_\pi)_{j_1}^*}\left((w^\pi)^{j_1}, R_{j_1}^0((u_\pi)^+,k)\right) + \ldots + (R^{j_z})_i^{(u_\pi)_{j_z}^*}\left((w^\pi)^{j_z}, R_{j_z}^0((u_\pi)^+,k)\right) =$$

$$(R^{j_1})_i^{(u_{j_1}^*)_\pi}\left((w^{j_1})^\pi, R_{j_1}^0((u^+)_\pi,k)\right) + \ldots + (R^{j_z})_i^{(u_{j_z}^*)_\pi}\left((w^{j_z})^\pi, R_{j_z}^0((u^+)_\pi,k)\right) =$$

$$(R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) = (R^+)_i^u(w,k)$$

casi seguro $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$.

Y para el de imparcialidad, por el axioma de imparcialidad de R^0 y de $R^1, \dots, R^z$ y por 1.119, para cada permutación ν de N, cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$(R^+)_{\nu(i)}^u(w_\nu,k) = (R^1)_{\nu(i)}^{u_1^*}\left((w_\nu)^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_{\nu(i)}^{u_z^*}\left((w_\nu)^z, R_z^0(u^+,k)\right) =$$

$$(R^1)_{\nu(i)}^{u_1^*}\left((w^1)_\nu, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_{\nu(i)}^{u_z^*}\left((w^z)_\nu, R_z^0(u^+,k)\right) =$$

$$(R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) = (R^+)_i^u(w,k)$$

casi seguro $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$. $\square$

Definición 1.136 El sistema electoral

$$(N, \aleph^+, R^+)$$

asociado a

$$(P^+, \mathcal{P}^+)$$

se denomina la **suma** de los sistemas electorales

$$(N, \aleph^1, R^1), \ldots, (N, \aleph^z, R^z)$$

asociados a

$$(P^1, \mathcal{P}^1), \ldots, (P^z, \mathcal{P}^z)$$

respecto del sistema electoral simple

$$(Z, \aleph^0, R^0)\,.$$

Por abuso de lenguaje, hablaremos de sistema electoral *suma*

$$R^+$$

en N asociado a P^+ con función de recuento suma $\aleph^+$ respecto del sistema electoral simple R^0 o de sistema electoral suma R^+ respecto del sistema electoral simple R^0 simplemente, si no hay peligro de confusión.

Por tanto, la suma distribuye primero los representantes en cada circunscripción usando el sistema electoral simple R^0 y suma después los obtenidos por cada candidatura en las diversas circunscripciones.

Definición 1.137 Las aplicaciones

$$(\aleph^+)^u$$

se denominan **funciones de recuento suma**; las aplicaciones

$$(R^+)^u\,,$$

reglas electorales suma; y las aplicaciones

$$(R^+)^{u,k}\,,$$

leyes electorales suma.

Proposición 1.138 *Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $i \in N$,*

$$(r^+)_i^u(w,k) = r_1^0\left(u^+,k\right)\cdot(r^1)_i^{u_1^*}\left(w^1,R_1^0(u^+,k)\right)+\ldots+r_z^0\left(u^+,k\right)\cdot(r^z)_i^{u_z^*}\left(w^z,R_z^0(u^+,k)\right)$$

para cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ya que

$$(r^+)_i^u(w,k) = \frac{(R^+)_i^u(w,k)}{k} = \frac{(R^1)_i^{u_1^*}(w^1,R_1^0(u^+,k))+\ldots+(R^z)_i^{u_z^*}(w^z,R_z^0(u^+,k))}{k} =$$

$$\frac{R_1^0\,(u^+,k)}{k}\cdot\frac{(R^1)_i^{u_1^*}(w^1,R_1^0(u^+,k))}{R_1^0\,(u^+,k)}+\ldots+\frac{R_z^0\,(u^+,k)}{k}\cdot\frac{(R^z)_i^{u_z^*}(w^z,R_1^0(u^+,k))}{R_z^0\,(u^+,k)} =$$

$$r_1^0\left(u^+,k\right)\cdot(r^1)_i^{u_1^*}\left(w^1,R_1^0(u^+,k)\right)+\ldots+r_z^0\left(u^+,k\right)\cdot(r^z)_i^{u_z^*}\left(w^z,R_z^0(u^+,k)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$, puesto que si

$$k = 0 \qquad \text{o} \qquad R_j^0(u_j^+,k) = 0$$

para algún $j \in Z$ entonces las correspondientes fracciones son 0 por la propia definición de regla electoral relativa y se sigue cumpliendo asimismo la igualdad. □

Observación 1.139 Las fórmulas anteriores pueden escribirse matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix}(r^+)_1^u(w,k)\\ \vdots \\ (r^+)_n^u(w,k)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(r^1)_1^{u_1^*}(w^1,R_1^0(u^+,k)) & \ldots & (r^z)_1^{u_z^*}(w^z,R_z^0(u^+,k))\\ \vdots & & \vdots \\ (r^1)_n^{u_1^*}(w^1,R_1^0(u^+,k)) & \ldots & (r^z)_n^{u_z^*}(w^z,R_z^0(u^+,k))\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_1^0\,(u^+,k)\\ \vdots \\ r_z^0\,(u^+,k)\end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.140 Continuando con el ejemplo 1.134, dividiendo por 6 se obtiene la siguiente tabla de representantes relativos:

i=1	i=2	i=3	i=4
0.667	0	0.333	0

Dados unos sistemas electorales asociados respectivamente a $(P^1, \mathcal{P}^1), \ldots, (P^z, \mathcal{P}^z)$

$$(N, \aleph^1, R^1), \ldots, (N, \aleph^z, R^z)\,,$$

podemos considerar sus extensiones medias asociadas a $(\widehat{P^1}, \widehat{\mathcal{P}^1}), \ldots, (\widehat{P^z}, \widehat{\mathcal{P}^z})$ respectivamente

$$(N, \widehat{\aleph^1}, \widehat{R^1}), \ldots, (N, \widehat{\aleph^z}, \widehat{R^z})$$

y la suma de éstas respecto de uno simple $(Z, \aleph^0, R^0)$ asociada a $(\hat{P}^+, \hat{\mathcal{P}}^+)$

$$(N, \hat{\aleph}^+, \hat{R}^+)\,.$$

Asimismo, podemos considerar también la suma de los sistemas electorales iniciales asociada a $(P^+, \mathcal{P}^+)$ respecto del mismo sistema electoral simple anterior $(Z, \aleph^0, R^0)$

$$(N, \aleph^+, R^+)$$

y la extensión media asociada a $(\widehat{P^+}, \widehat{\mathcal{P}^+})$ de dicha suma

$$(N, \widehat{\aleph^+}, \widehat{R^+})\,.$$

Proposición 1.141 $\hat{P}^+ = \widehat{P^+}$.

Demostración. Ya que

$$\hat{P}^+ = \{1, \ldots, z'p_1, \ldots, z'p_1 + \ldots + z'p_{z-1}) + 1, \ldots, z'p_1 + \ldots + z'p_z\} =$$

$$\{1, \ldots, p_1 + \ldots + p_z, \ldots, (z'-1)(p_1 + \ldots + p_z) + 1, \ldots, z'(p_1 + \ldots + p_z)\} = \widehat{P^+}$$

donde $P = \{1, \ldots, p\}$ y $Z = \{1, \ldots, z\}$. □

Proposición 1.142 *(a) Para cada* $u \in \overline{U_{z'(p_1+\ldots+p_z)}}$

$$(u_+)^+ = (u^+)_+\,.$$

(b) Para cada $j \in Z$ *y cada* $u \in \overline{U_{z'(p_1+\ldots+p_z)}}$

$$(u_+)^*_j = (u^*_j)_+\,.$$

Demostración. Puesto que para cada

$$u = (u_1, \ldots, u_{z'p_1}, \ldots, u_{z'(p_1+\ldots+p_{z-1})+1}, \ldots, u_{z'(p_1+\ldots+p_z)}) \in \overline{U_{z'(p_1+\ldots+p_z)}}$$

las componentes j–ésimas de u_+ y u^+ son

$$u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+1} + \ldots + u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+(z'-1)p_j+1}, \ldots, u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+p_j} + \ldots + u_{z'(p_1+\ldots+p_j)}$$

y

$$u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+1} + \ldots + u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+p_j}, \ldots, u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+(z'-1)p_j+1} + \ldots + u_{z'(p_1+\ldots+p_j)}$$

respectivamente, por lo que las componentes j–ésimas tanto de $(u_+)^+$ como de $(u^+)_+$ son

$$u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+1} + \ldots + u_{z'(p_1+\ldots+p_j)} .$$

(b) Ya que para cada $j \in Z$

$$u_j^* = \left(\frac{u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+1}}{u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+1} + \ldots + u_{z'(p_1+\ldots+p_j)}}, \ldots, \frac{u_{z'(p_1+\ldots+p_j)}}{u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+1} + \ldots + u_{z'(p_1+\ldots+p_j)}} \right)$$

de donde se deduce que

$$(u_j^*)_+ = (u_+)_j^*$$

ya que $(u_j^*)_+$ se obtiene sumando las fracciones de u_j^* de forma alternativa y $(u_+)_j^*$ dividiendo por $u_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+1} + \ldots + u_{z'(p_1+\ldots+p_j)}$ la expresión del apartado anterior de u_+. □

Proposición 1.143 *Para cada $j \in Z$, cada $u \in \overline{U_{z'(p_1+\ldots+p_z)}}$ y cada $w \in W_n^{z'(p_1+\ldots+p_z)}$*

$$(\hat{w}^*)^j = \widehat{(w^j)}^* .$$

Demostración. Ya que, dada una matriz arbitraria

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \ldots & w_1^{p_1+\ldots+p_z} & \ldots & w_1^{z'(p_1+\ldots+p_{z-1})+1} & \ldots & w_1^{z'(p_1+\ldots+p_z)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & \ldots & w_n^{p_1+\ldots+p_z} & \ldots & w_n^{z'(p_1+\ldots+p_{z-1})+1} & \ldots & w_n^{z'(p_1+\ldots+p_z)} \end{pmatrix} \in W_n^{z'(p_1+\ldots+p_z)} ,$$

tenemos que

$$\left((\hat{w}^*)^j\right)_i^h =$$

$$u^*_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+h} w_i^{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+h} + \ldots + u^*_{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+(z'-1)p_j+h} w_i^{z'(p_1+\ldots+p_{j-1})+(z'-1)p_j+h}$$

$$= \left(\widehat{(w^j)}^*\right)_i^h$$

para cada $h = 1, \ldots, p_j$ y cada $i \in N$, puesto que los valores anteriores se calculan internamente en cada $\overline{U_{p_j}}$, para cada $j \in Z$. □

Proposición 1.144 *Para cada* $u \in \overline{U_{z'(p_1+\ldots+p_z)}}$

$$(\widehat{\aleph^+})^u(w) = (\hat{\aleph}^+)^u(w)\,,$$

para cada $w \in W_n^{z'(p_1+\ldots+p_z)}$.

Demostración. Ya que, por 1.142 y 1.143,

$$(\widehat{\aleph^+})^u(w) = (\aleph^+)^{u_+}(\hat{w}^*) = \big((\aleph^1)^{(u_+)^*_1}((\hat{w}^*)^1),\ldots,(\aleph^z)^{(u_+)^*_z}((\hat{w}^*)^z)\big) =$$

$$\Big((\aleph^1)^{(u^*_1)_+}(\widehat{w^1}^*),\ldots,(\aleph^z)^{(u^*_z)_+}(\widehat{w^z}^*)\Big) = \Big((\widehat{\aleph^1})^{u^*_1}(w^1),\ldots,(\widehat{\aleph^z})^{u^*_z}(w^z)\Big) = (\hat{\aleph}^+)^u(w)$$

para cada $u \in \overline{U_{z'(p_1+\ldots+p_z)}}$ y cada $w \in W_n^{z'(p_1+\ldots+p_z)}$. □

Proposición 1.145 *Para cada* $u \in \overline{U_{z'(p_1+\ldots+p_z)}}$ *y cada* $i \in N$

$$(\widehat{R^+})^u_i(w,k) = (\hat{R}^+)^u_i(w,k)\,,$$

para cada $w \in W_n^{z'(p_1+\ldots+p_z)}$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ya que, por 1.142 y 1.143,

$$(\widehat{R^+})^u_i(w,k) = (R^+)^{u_+}_i\,(\hat{w}^*,k) =$$

$$(R^1)^{(u_+)^*_1}_i\,\big((\hat{w}^*)^1, R^0_1((u_+)^+,k)\big) + \ldots + (R^z)^{(u_+)^*_z}_i\,\big((\hat{w}^*)^z, R^0_z((u_+)^+,k)\big) =$$

$$(R^1)^{(u^*_1)_+}_i\Big(\widehat{w^1}^*, R^0_1((u^+)_+,k)\Big) + \ldots + (R^z)^{(u^*_z)_+}_i\Big(\widehat{w^z}^*, R^0_z((u^+)_+,k)\Big) =$$

$$(\widehat{R^1})^{u^*_1}_i\,\big(w^1, R^0_1(u^+,k)\big) + \ldots + (\widehat{R^z})^{u^*_z}_i\,\big(w^z, R^0_z(u^+,k)\big) = (\hat{R}^+)^u_i(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{z'(p_1+\ldots+p_z)}}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^{z'(p_1+\ldots+p_z)}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 1.146 *La extensión media de la suma de sistemas electorales respecto de uno simple es igual a la suma de las extensiones medias de los sistemas electorales respecto de dicho sistema electoral simple.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.144 y 1.145. □

Corolario 1.147 *La extensión media de sistemas electorales suma respecto de uno simple es igual a la suma de los sistemas electorales medios respecto de dicho sistema electoral simple.*

1.3.1 Sistemas electorales suma

Definición 1.148 Los sistemas electorales obtenidos como suma de sistemas electorales simples $(N, \aleph^1, R^1), \ldots, (N, \aleph, R^p)$ respecto de otro simple $(P, \aleph^0, R^0)$ los denominaremos **sistemas electorales suma**.

Así, los pesos son

$$u^+ = u \qquad \text{y} \qquad u_1^* = 1, \ldots, u_p^* = 1$$

para cada $u \in \overline{U_p}$; y los votos –que escribiremos en filas por ser de sistemas electorales simples–,

$$w_1 = (w_1^1, \ldots, w_n^1), \ldots, w_p = (w_1^p, \ldots, w_n^p)$$

para cada $w \in W_n^p$.

Además, la probabilidad en $\overline{U_p}$ es

$$\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^0 \,.$$

Por su parte, las funciones de recuento suma son

$$(\aleph^+)^u(w) = (\aleph^1(w_1), \ldots, \aleph^p(w_p))$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$; las funciones de densidad

$$(f^+)^u(w) = f^1(w_1) \cdot \ldots \cdot f^p(w_p)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n \times \overset{(p)}{\ldots} \times W_n$; y las probabilidades en W_n^p

$$\mathcal{P}_u^+ = \mathcal{P}^1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}^p$$

para cada $u \in \overline{U_p}$.

Observación 1.149 Es interesante remarcar que las funciones de recuento suma, las funciones de densidad suma y la probabilidad suma no dependen del vector de pesos u considerado.

Normalmente consideraremos la función de densidad uniforme, que será la que se supone en todos los ejemplos siguientes.

Corolario 1.150 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $i \in N$, la regla electoral suma es*

$$(R^+)_i^u(w,k) = R_i^1(w_1, R_1^0(u,k)) + \ldots + R_i^p(w_p, R_p^0(u,k))$$

para cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Corolario 1.151 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $i \in N$, la regla electoral relativa suma es*

$$(r^+)_i^u(w,k) = r_1^0(u,k) \cdot r_i^1(w_1, R_1^0(u,k)) + \ldots + r_p^0(u,k) \cdot r_i^p(w_p, R_p^0(u,k))$$

para cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Observación 1.152 Las fórmulas anteriores pueden escribirse matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix} (r^+)_1^u(w,k) \\ \vdots \\ (r^+)_n^u(w,k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1^1(w_1, R_1^0(u,k)) & \ldots & r_1^p(w_p, R_p^0(u,k)) \\ \vdots & & \vdots \\ r_n^1(w_1, R_1^0(u,k)) & \ldots & r_n^p(w_p, R_p^0(u,k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^0(u,k) \\ \vdots \\ r_p^0(u,k) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Observación 1.153 Si bien en los sistemas electorales suma no es necesario que los sistemas electorales simples sean todos iguales, éste es el caso más frecuente en la práctica.

En particular, podemos tomar cada uno de los diferentes ejemplos de sistemas electorales simples y considerar su sistema electoral suma respecto de uno simple cualquiera, con lo que obtenemos los sistemas electorales **ordinales suma**, de **cuotas suma** y de **divisores suma**, así como cada uno de sus diversos casos particulares.

Proposición 1.154 *En los sistemas ordinales suma, si w_i^j es el h_i^j–ésimo voto de w_j*

$$(R^+)_i^u(w,k) = \sum_{j=1}^{p} c_{h_i^j}^j(R_j^0(u,k))$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.33 y 1.150. □

Corolario 1.155 *En el sistema mayoritario puro suma, si H_i es el conjunto de circunscripciones donde w_i^j es el voto mayor de w_j*

$$(R^+)_i^u(w,k) = \sum_{j \in H_i} R_j^0(u,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

(b) En el sistema igualitario puro suma, si h_i es el número de circunscripciones donde w_i^j es uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de w_j

$$(R^+)_i^u(w,k) = h_i + p\left[\frac{k}{n}\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Proposición 1.156 *En los sistemas ordinales suma, si w_i^j es el h_i^j–ésimo voto de w_j*

$$(r^+)_i^u(w,k) = \frac{\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_i^j}(R_j^0(u,k))}{k} = \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{c^j_{h_i^j}(R_j^0(u,k))}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.33 y 1.150. □

Corolario 1.157 *En el sistema mayoritario puro suma, si H_i es el conjunto de circunscripciones donde w_i^j es el voto mayor de w_j*

$$(r^+)_i^u(w,k) = \sum_{j \in H_i} r_j^0(u,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

(b) En el sistema igualitario puro suma, si h_i es el número de circunscripciones donde w_i^j es uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de w_j

$$(r^+)_i^u(w,k) = \frac{h_i + p\left[\frac{k}{n}\right]}{k} = r_j^0(u,k) \cdot \frac{h_i}{R_j^0(u,k)} + p\sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[\frac{k}{n}\right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Proposición 1.158 *En los sistemas de cuotas suma con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$*, si* h_i *es el número de circunscripciones donde* $\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}} - \left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]$ *es uno de los mayores restos*

$$(R^+)_i^u(w,k) = h_i + \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.45 y 1.150. □

Corolario 1.159 *En el sistema de los mayores restos, si* h_i *es el número de circunscripciones donde* $R_j^0(u,k)w_i^j - \left[R_j^0(u,k)w_i^j\right]$ *es uno de los mayores restos*

$$(R^+)_i^u(w,k) = h_i + \sum_{j=1}^{p} \left[R_j^0(u,k)w_i^j\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

Proposición 1.160 *En los sistemas de cuotas suma con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$*, si* h_i *es el número de circunscripciones donde* $\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}} - \left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]$ *es uno de los mayores restos*

$$(r^+)_i^u(w,k) = \frac{h_i + \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k} = r_j^0(u,k) \cdot \frac{h_i}{R_j^0(u,k)} + \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.47 y 1.151. □

Corolario 1.161 *En el sistema de los mayores restos, si* h_i *es el número de circunscripciones donde* $R_j^0(u,k)w_i^j - \left[R_j^0(u,k)w_i^j\right]$ *es uno de los mayores restos*

$$(r^+)_i^u(w,k) = \frac{h_i + \sum_{j=1}^{p} \left[R_j^0(u,k)w_i^j\right]}{k} = r_j^0(u,k) \cdot \frac{h_i}{R_j^0(u,k)} + \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[R_j^0(u,k)w_i^j\right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

Proposición 1.162 *En los sistemas de divisores suma con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, existe $x_0^j \in (0,1)$ para cada $j \in P$ tal que*

$$(R^+)_i^u(w,k) = \sum_{j=1}^{p} \left[g^{-1}\left(\frac{w_i^j}{x_0^j} \right) \right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.62 y 1.150. □

Corolario 1.163 *En los sistemas de divisores lineales suma con $g_d = d + s$ y $s > -1$, existe $x_0^j \in (0,1)$ para cada $j \in P$ tal que*

$$(R^+)_i^u(w,k) = \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{w_i^j}{x_0^j} - s \right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Proposición 1.164 *En los sistemas de divisores suma con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, existe $x_0^j \in (0,1)$ para cada $j \in P$ tal que*

$$(r^+)_i^u(w,k) = \frac{\sum_{j=1}^{p} \left[g^{-1}\left(\frac{w_i^j}{x_0^j} \right) \right]}{k} = \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{w_i^j}{x_0^j} \right) \right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.64 y 1.151. □

Corolario 1.165 *En los sistemas de divisores lineales suma con $g_d = d + s$ y $s > -1$, existe $x_0^j \in (0,1)$ para cada $j \in P$ tal que*

$$(r^+)_i^u(w,k) = \frac{\sum_{j=1}^{p} \left[\frac{w_i}{x_0^j} - s \right]}{k} = \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[\frac{w_i^j}{x_0^j} - s \right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Ejemplo 1.166 Consideremos el sistema mayoritario puro suma respecto del sistema electoral simple de los mayores restos para $n = 4$ candidaturas, $p = 2$ circunscripciones y $k = 6$ representantes a elegir aplicado a la tabla

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4

En primer lugar, la cuota para la regla de los mayores restos es $\frac{1}{6} = 0.167$ por lo que inicialmente corresponden 3 representantes a la primera circunscripción y 2 a la segunda. Entonces, los restos para la primera y la segunda circunscripción son 0.100 y 0.067 respectivamente, con lo que el representante que queda por asignar corresponde a la primera circunscripción y se obtiene la tabla final de representantes de las circunscripciones

j=1	j=2
4	2

Finalmente, los 4 representantes correspondientes a la primera circunscripción se asignan a la primera candidatura y los 2 de la segunda a la última candidatura, que son las mayoritarias en ambas circunscripciones respectivamente. Entonces, las tablas parciales de representantes son

i=1	i=2	i=3	i=4
4	0	0	0

y

i=1	i=2	i=3	i=4
0	0	0	2

y la tabla final de representantes obtenida es, pues,

i=1	i=2	i=3	i=4
4	0	0	2

1.4 Sistema electoral inducido

En esta sección definimos un nuevo sistema electoral a partir de uno dado cuando se restringe el número de candidaturas. En este caso, además de comenzar definiendo dicho concepto, estudiamos su relación con las dos operaciones introducidas en las secciones precedentes para terminar igualmente exponiendo como puede utilizarse para analizar lo que sucedería en unas elecciones si las diferentes candidaturas se coaligaran previamente entre ellas de alguna cierta forma.

Sea N un conjunto finito y $N' \subseteq N$ un subconjunto suyo. Por comodidad de notación, supondremos que

$$N' = \{1, \ldots, n'\},$$

con $n' \leq n$.

Entonces, dado un sistema electoral

$$(N, \aleph, R)$$

asociado a $(P, \mathcal{P})$, el objetivo es definir un nuevo sistema electoral

$$(N', \aleph', R')$$

asociado igualmente a $(P, \mathcal{P})$.

Esto significa, en particular, que tanto los conjuntos P y $\overline{U_p}$ como la probabilidad $\mathcal{P}$ serán los mismos.

Ejemplo 1.167 Dado el sistema electoral para $n = 6$ candidaturas que asigna todos los representantes a la candidatura cuyo voto en la circunscripción con peso mayor es superior a cualquiera de los otros, se trata de definir un nuevo sistema electoral para $n' = 4$ candidaturas. Así, si por ejemplo el vector de pesos de dos circunscripciones es

j=1	j=2
0.6	0.4

tomaremos este mismo vector de pesos en el nuevo sistema electoral que pretendemos definir.

Dada una matriz arbitraria

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n'}^1 & \dots & w_{n'}^p \end{pmatrix} \in W_{n'}^p$$

podemos considerar la matriz

$$w' = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n'}^1 & \dots & w_{n'}^p \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in W_n^p$$

obtenida a partir de la anterior completando con ceros las filas $n'+1, \dots, n$.

Proposición 1.168 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_{n'}^p$ y cada $i \in N$*

$$\widehat{w'}_i = \begin{cases} \hat{w}_i\,, & si\ \ i \in N'\,; \\ 0\,, & si\ \ i \notin N'\,. \end{cases}$$

Demostración. Por la propia definición de w'. □

Ejemplo 1.169 Dada la tabla de votos siguiente

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4

completando esta tabla con ceros se obtiene la nueva tabla de votos

		i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0	0
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0

Proposición 1.170 *(a) Si ν es una permutación de N' y ν' es una permutación de N que permuta los elementos de N' de la misma forma que ν entonces, para cada $w \in W^p_{n'}$*

$$(w_\nu)' = (w')_{\nu'} \, .$$

(b) Si π es una permutación arbitraria de P entonces, para cada $w \in W^p_{n'}$

$$(w^\pi)' = (w')^\pi \, .$$

Demostración. (a) Puesto que

$$(w_\nu)' = \begin{pmatrix} w^1_{\nu(1)} & \dots & w^p_{\nu(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w^1_{\nu(n')} & \dots & w^p_{\nu(n')} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (w')_{\nu'}$$

para cada $w \in W^p_{n'}$.

(b) Puesto que

$$(w^\pi)' = \begin{pmatrix} w^{\pi(1)}_1 & \dots & w^{\pi(p)}_1 \\ \vdots & & \vdots \\ w^{\pi(1)}_{n'} & \dots & w^{\pi(p)}_{n'} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (w')^\pi$$

para cada $w \in W^p_{n'}$. □

Observación 1.171 En la proposición anterior, ν' es cualquier permutación de N que permuta los elementos de N' de la misma forma que ν.

Obviamente, existen diversas posibilidades para ν'. Sin embargo, como veremos más adelante, para nuestros propósitos será suficiente con saber que existen permutaciones como la anterior.

Consideremos la aplicación
$$F' : W^p_{n'} \longrightarrow W^p_n$$
definida para cada $w \in W^p_{n'}$ por
$$F'(w) = w' \,.$$

Consideramos en $W^p_{n'}$ la σ–álgebra de las antiimágenes de conjuntos medibles de W_n:
$$\left\{(F')^{-1}(\beta) : \beta \quad \text{es un conjunto medible de } W^p_n\right\} \,.$$

Proposición 1.172 *F' es medible e inyectiva.*

Demostración. Por definición. $\square$

Y podemos considerar también la aplicación
$$T' : W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n \longrightarrow W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}$$
definida para cada $w \in W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n$ por
$$T'(w^1, \ldots, w^p) = \left(w^1_{|_{n'}}, \ldots, w^p_{|_{n'}}\right) \,,$$
siendo $w^1_{|_{n'}}, \ldots, w^p_{|_{n'}}$ las matrices obtenidas suprimiendo las componentes de la $n'+1$ en adelante de $w^1, \ldots, w^p$, respectivamente.

Proposición 1.173 $T' \circ F' = I_{|_{W_{n'}}}$.

Demostración. Puesto que
$$(T' \circ F')(w) = T'(F'(w)) = T'(w') = w'_{|_{n'}} = w$$
para cada $w \in W_{n'}$. $\square$

Proposición 1.174 *T' es medible y exhaustiva.*

Demostración. Por definición. $\square$

Consideremos ahora la familia de aplicaciones

$$\aleph' = \left((\aleph')^u\right)_{u \in \overline{U_p}}$$

tales que para cada $u \in \overline{U_p}$

$$(\aleph')^u : W_{n'}^p \longrightarrow W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}$$

es la aplicación definida para cada $w \in W_{n'}^p$ por

$$(\aleph')^u(w) = T'\left(\aleph^u(w')\right) .$$

Proposición 1.175 *Cualquier otra forma de definir*

$$(\aleph')^u ,$$

pero añadiendo los ceros de cualquier otro modo, es igual a la aplicación $(\aleph')^u$ *definida anteriormente.*

Demostración. Por la simetría de la función de recuento. □

Y consideremos asimismo en $W_{n'}^p$ la familia de *probabilidades*

$$(\mathcal{P}_u)_{u \in \overline{U_p}}$$

dadas por las aplicaciones anteriores y las funciones de densidad definidas para cada $w \in W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}$

$$(f')^u(w) = \frac{f^u(w')}{\int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} f^u(w')\, dV} .$$

Proposición 1.176 *Las funciones* $(f')^u$ *anteriores están bien definidas.*

Demostración. Puesto que

$$\int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} (f')^u(w)\, dV = \int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} \frac{f^u(w')}{\int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} f^u(w')\, dV} = \frac{\int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} f^u(w')\, dV}{\int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} f^u(w')\, dV} = 1$$

y

$$(f')^u(w) = \frac{f^u(w')}{\int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} f^u(w')\, dV} \geq 0$$

para cada $w \in W_{n'} \times \overset{(p)}{\cdots} \times W_{n'}$. □

Proposición 1.177 *La función de densidad inducida por otro sistema electoral con función de densidad uniforme es también uniforme.*

Demostración. En efecto, tenemos que la nueva función de densidad es

$$(f')^u(w) = \frac{f^u(w')}{\int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} f^u(w')\, dV} = \frac{\left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m}{\int_{W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}} \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m dV} =$$

$$\frac{\left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m}{\left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m \left(\int_{W_{n'}} dV\right)^m} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{n'}}{(n'-1)!}\right)^m} = \left(\frac{(n'-1)!}{\sqrt{n'}}\right)^m$$

para cada $w \in W_{n'} \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_{n'}$. □

Proposición 1.178 *Para cada $u \in \overline{U_p}$*

$$(\aleph')^u = T' \circ \aleph^u \circ F' .$$

Demostración. Puesto que para cada $u \in \overline{U_p}$

$$(\aleph')^u(w) = T'\left(\aleph^u(w')\right) = T'\left(\aleph^u(F'(w))\right) = (T' \circ \aleph^u \circ F')(w)$$

para cada $w \in W_{n'}^p$. □

Proposición 1.179 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $j = 1, \ldots, m$*

$$(\aleph')_j^u$$

es un vector aleatorio.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.172, 1.174 y 1.178. □

Ejemplo 1.180 Si consideramos el ejemplo 1.11, tenemos que

$$(\aleph')^{(0.6,0.4)} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = T' \left(\aleph^{(0.6,0.4)} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$T'\big((0.4, 0.3, 0.2, 0.1, 0, 0), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0, 0)\big) = \big((0.4, 0.3, 0.2, 0.1), (0.1, 0.2, 0.3, 0.4)\big) .$$

Consideremos ahora la familia de aplicaciones

$$R' = ((R')^u)_{u \in \overline{U_p}}$$

tales que para cada $u \in \overline{U_p}$

$$(R')^u : W^p_{n'} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^{n'} \subseteq \mathbb{R}^{n'}$$

es la aplicación definida para cada $i \in N'$, cada $w \in W^p_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$ por

$$(R')^u_i(w,k) = R^u_i(w',k)\,.$$

Y tenemos también la aplicación obtenida a partir de la anterior fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$

$$(R')^{u,k} : W^p_{n'} \longrightarrow \mathbb{N}^{n'} \subseteq \mathbb{R}^{n'}$$

definida para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W^p_{n'}$ por

$$(R')^{u,k}(w) = (R')^u(w,k)\,.$$

Proposición 1.181 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N'$*

$$(R')^{u,k} = R^{u,k} \circ F'\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$(R')^{u,k}(w) = (R')^u(w,k) = R^u(w',k) = R^{u,k}(w') = R^{u,k}(F'(w)) = (R^{u,k} \circ F')(w)$$

para cada $w \in W^p_{n'}$. □

Proposición 1.182 *$R^{u,k}$ es un vector aleatorio, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.172, 1.174 y 1.181. □

Proposición 1.183 *Cualquier otra forma de definir $(R')^u$, pero añadiendo los ceros de cualquier otro modo, es igual casi seguro a la aplicación $(R')^u$ anteriormente definida.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que, por el axioma de imparcialidad de R, el número de representantes que corresponde a cada candidatura depende únicamente de su voto y no de qué lugar ocupe, salvo conjuntos de probabilidad cero. □

Ejemplo 1.184 Consideremos el sistema electoral simple con $n = 6$ candidaturas y $k = 4$ representantes que asigna todos los representantes a la candidatura de voto superior en la circunscripción de peso mayor.

Entonces, a partir de la tabla de pesos y votos para $n' = 4$ candidaturas

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4

construimos una nueva tabla añadiendo ceros en las dos últimas columnas como vimos ya en el ejemplo 1.169

		i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1	0	0
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4	0	0

Entonces, puesto que el peso de la primera circunscripción –0.6– es superior al de la segunda –0.4– y el voto de la primera candidatura en la primera circunscripción –0.4– es mayor que el del resto –0.3, 0.2 y 0.1– obtenemos la tabla de representantes

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5	i=6
4	0	0	0	0	0

y, en consecuencia, la tabla definitiva de representantes queda

i=1	i=2	i=3	i=4
4	0	0	0

Proposición 1.185 *Para cada $i \in N - N'$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W^p_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$(R')^u_i(w,k) = 0\,.$$

Demostración. Ya que $w'_{n'+1} = \ldots = w'_n = (0,\ldots,0)$ de donde, por el axioma del voto nulo

$$(R')^u_i(w,k) = R^u_i(w',k) = 0$$

para cada $i \in N - N'$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W^p_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 1.186 $(N', \aleph', R')$ *es un sistema electoral asociado a* $(P, \mathcal{P})$.

Demostración. En primer lugar, por 1.179 y 1.182, las aplicaciones $((\aleph)')^u_j$ para cada $j = 1,\ldots,m$ y $(R')^{u,k}$ son vectores aleatorios.

Para el axioma de exhaustividad, tenemos que

$$(R')^u_1(w,k) + \ldots + (R')^u_{n'}(w,k) = R^u_1(w',k) + \ldots + R^u_{n'}(w',k) = k$$

por el axioma de exhaustividad de R y porque $R^u_i(w',k) = 0$ para cada $i = n'+1,\ldots,n$ por 1.185.

Para el axioma del voto nulo, sólo hay que tener en cuenta que si $w^j_i = 0$ para cada $j \in P$ entonces

$$(R')^u_i(w,k) = R^u_i(w',k) = 0$$

por el axioma del voto nulo de R.

Para el axioma de simetría, por el axioma de simetría de R y por 1.170, para cada permutación π de P, cada $i \in N'$, cada $w \in W^p_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$(R')^{u_\pi}_i(w^\pi,k) = R^{u_\pi}_i\left((w^\pi)',k\right) = R^{u_\pi}_i\left((w')^\pi,k\right) = R^u_i(w',k) = (R')^u_i(w,k)$$

casi seguro $u \in \overline{U_p}$, ya que una permutación de las columnas no modifica las filas formadas íntegramente por ceros.

Y para el axioma de imparcialidad, por el axioma de imparcialidad de R y por 1.170, para cada permutación ν de N', cada $i \in N'$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$(R')^u_{\nu(i)}(w_\nu,k) = R^u_{\nu(i)}\left((w_\nu)',k\right) = R^u_{\nu(i)}\left((w')_{\nu'},k\right) = R^u_i(w',k) = (R')^u_i(w,k)$$

casi seguro $w \in W^p_{n'}$. □

Definición 1.187 El sistema electoral

$$(N', \aleph', R')$$

asociado a

$$(P, \mathcal{P})$$

se denomina **inducido** en N' por el sistema electoral $(N, \aleph, R)$ asociado a $(P, \mathcal{P})$.

Por abuso de lenguaje, hablaremos de sistema electoral *inducido* en N'

$$R'$$

con función de recuento $\aleph'$ o de sistema inducido R' simplemente, si no hay peligro de confusión.

En consecuencia, la regla electoral inducida reparte los representantes como la regla electoral original, puesto que completa con ceros y, por tanto, no deja de otorgar ninguno de los representantes a las candidaturas.

Definición 1.188 Las aplicaciones

$$(\aleph')^u$$

se denominan **funciones de recuento inducidas**; las aplicaciones

$$(R')^u \, ,$$

reglas electorales inducidas; y las aplicaciones

$$(R')^{u,k} \, ,$$

leyes electorales inducidas.

Las propiedades cuya verificación para un sistema electoral dado implique que se verifiquen asimismo para sus sistemas electorales inducidos las denominaremos **hereditarias**.

Proposición 1.189 *Para cada $i \in N'$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_{n'}^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$(r')_i^u(w,k) = r_i^u\,(w',k) \; .$$

Demostración. Puesto que

$$(r')_i^u(w,k) = \frac{(R')_i^u(w,k)}{k} = \frac{R_i^u(w',k)}{k} = r_i^u\,(w',k)$$

para cada $i \in N'$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_{n'}^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Corolario 1.190 *Sea R un sistema electoral simple. Entonces:*

(a) para cada $w \in W_{n'}$

$$w' = (w_1, \ldots, w_{n'}, 0, \ldots, 0) \in W_n\,;$$

(b) para cada $i \in N'$, cada $w \in W_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$R'_i(w,k) = R_i(w',k)\,;$$

(c) para cada $i \in N'$, cada $w \in W_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$r'_i(w,k) = r_i(w',k)\,.$$

Proposición 1.191 *(a) El sistema electoral simple inducido de un sistema ordinal es ordinal.*

(b) El sistema electoral simple inducido de un sistema de cuotas es de cuotas.

(c) El sistema electoral simple inducido de un sistema de divisores es de divisores.

Demostración. (a) Puesto que, por ser $w_{n'+1} = \ldots = w_n = 0$, si w_i es el h–ésimo voto mayor de w entonces es también el h–ésimo peso mayor de w' y se tiene que

$$R'_i(w,k) = R_i(w',k) = c_{i_h}(k)$$

para cada $i \in N'$, cada $w \in W_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Ya que, por ser $w_{n'+1} = \ldots = w_n = 0$, se tiene que

$$R'_i(w,k) = R_i(w',k) = \begin{cases} \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right] + 1\,, & \text{si} \quad \dfrac{w_i}{q_k} - \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right] \text{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right]\,, & \text{si} \quad \dfrac{w_i}{q_k} - \left[\dfrac{w_i}{q_k}\right] \text{ no es uno de los mayores restos}\,. \end{cases}$$

para cada $i \in N'$, cada $w \in W_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(c) Dado que, por ser $w_{n'+1} = \ldots = w_n = 0$, se tiene que

$$R'_i(w,k) = R_i(w',k) = \left[\frac{w'_i}{x_0}\right] = \left[\frac{w_i}{x_0}\right]$$

para cada $i \in N'$, cada $w \in W_{n'}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Consideremos ahora un sistema electoral

$$(N, \aleph, R)$$

asociado a $(P, \mathcal{P})$.

Podemos considerar entonces su sistema electoral inducido

$$(N', \aleph', R')$$

asociado a $(P, \mathcal{P})$ y la extensión media de éste

$$(N', \widehat{\aleph'}, \widehat{R'})$$

asociada a $(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$.

Asimismo, podemos considerar la extensión media del sistema electoral inicial

$$(N, \hat{\aleph}, \hat{R})$$

asociada a $(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$ y el sistema electoral inducido de dicha extensión media

$$(N', \hat{\aleph}', \hat{R}')$$

asociada a $(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$.

Proposición 1.192 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_{n'}^{zp}$*

$$\widehat{(w')}^{*} = (\hat{w}^{*})'.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que si

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_p^1 & \dots & w_1^{(z-1)p+1} & \dots & w_1^{zp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{n'}^1 & \dots & w_{n'}^p & \dots & w_{n'}^{(z-1)p+1} & \dots & w_{n'}^{zp} \end{pmatrix} \in W_{n'}^{zp}$$

entonces

$$\widehat{(w')}^{*} = \begin{pmatrix} u_1^* w_1^1 + \dots + u_{(z-1)p+1}^* w_1^{(z-1)p+1} & \dots & u_p^* w_p^1 + \dots + u_{zp}^* w_1^{zp} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^* w_{n'}^1 + \dots + u_{(z-1)p+1}^* w_{n'}^{(z-1)p+1} & \dots & u_p^* w_{n'}^p + \dots + u_{zp}^* w_{n'}^{zp} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\hat{w}^{*})'$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_{n'}^{zp}$. $\square$

Proposición 1.193 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_{n'}^{zp}$*

$$(\hat{\aleph}')^u(w) = \widehat{\aleph'}^u(w)\,.$$

Demostración. Ya que, aplicando 1.192,

$$(\hat{\aleph}')^u(w) = T'\left(\hat{\aleph}^u(w')\right) = T'\left(\aleph^{u+}\left(\widehat{(w')}^*\right)\right) = T'\left(\aleph^{u+}\left((\hat{w}^*)'\right)\right) = (\aleph')^{u+}\left(\hat{w}^*\right) = (\widehat{\aleph'})^u(w)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_{n'}^{zp}$. □

Proposición 1.194 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $w \in W_{n'}^{zp}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N'$*

$$(\hat{R}')_i^u(w,k) = \widehat{R'}_i^u(w,k)\,.$$

Demostración. Ya que, aplicando 1.192,

$$(\hat{R}')_i^u(w,k) = \hat{R}_i^u\left(w',k\right) = R_i^{u+}\left(\widehat{(w')}^*, k\right) = R_i^{u+}\left((\hat{w}^*)', k\right) = (R')_i^{u+}\left(\hat{w}^*, k\right) = \widehat{R'}_i^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $w \in W_{n'}^{zp}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N'$. □

Proposición 1.195 *El sistema electoral inducido de la extensión media coincide con la extensión media del sistema electoral inducido.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.193 y 1.194. □

Corolario 1.196 *El sistema electoral inducido de un sistema electoral medio coincide con el sistema electoral medio de los sistemas electorales simples inducidos.*

Proposición 1.197 *(a) El sistema electoral inducido de un sistema ordinal medio es ordinal medio.*

(b) El sistema electoral inducido de un sistema de cuotas medio es de cuotas medio.

(c) El sistema electoral inducido de un sistema de divisores medio es de divisores medio.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.191 y 1.196. □

Consideremos ahora unos sistemas electorales

$$(N, \aleph^1, R^1), \ldots, (N, \aleph^z, R^z)$$

asociados a $(P^1, \mathcal{P}^1), \ldots, (P^z, \mathcal{P}^z)$.

Podemos considerar entonces sus sistemas electorales inducidos

$$(N', (\aleph^1)', (R^1)'), \ldots, (N', (\aleph^z)', (R^z)')$$

asociados a $(P^1, \mathcal{P}^1), \ldots, (P^z, \mathcal{P}^z)$ y la suma de éstos respecto de uno simple $(Z, \aleph^0, R^0)$

$$(N', (\aleph')^+, (R')^+)$$

asociada a $(P^+, \mathcal{P}^+)$.

Y podemos considerar también la suma respecto del mismo sistema electoral simple $(Z, \aleph^0, R^0)$

$$(N, \aleph^+, R^+)$$

asociada a $(P^+, \mathcal{P}^+)$ y el sistema electoral inducido de dicha suma

$$(N', (\aleph^+)', (R^+)')$$

asociado a $(P^+, \mathcal{P}^+)$.

Proposición 1.198 *Para cada $j \in Z$ y cada $w \in W_{n'}^{p_1+\ldots+p_z}$*

$$(w')^j = (w^j)'.$$

Demostración. Puesto que, dada una matriz arbitraria

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \ldots & w_1^{p_1} & \ldots & w_1^{p_1+\ldots+p_{z-1}+1} & \ldots & w_1^{p_1+\ldots+p_z} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ w_{n'}^1 & \ldots & w_{n'}^{p_1} & \ldots & w_{n'}^{p_1+\ldots+p_{z-1}+1} & \ldots & w_{n'}^{p_1+\ldots+p_z} \end{pmatrix} \in W_{n'}^{p_1+\ldots+p_z}$$

es claro que

$$(w')^j = \begin{pmatrix} w_1^{p_1+\ldots+p_{j-1}+1} & \ldots & w_1^{p_1+\ldots+p_j} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n'}^{p_1+\ldots+p_{j-1}+1} & \ldots & w_{n'}^{p_1+\ldots+p_j} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = (w^j)'$$

para cada $j \in Z$. $\square$

Proposición 1.199 *Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $w \in W_{n'}^{p_1+\ldots+p_z}$*

$$((\aleph^+)')^u(w) = ((\aleph')^+)^u(w)\,.$$

Demostración. En primer lugar, aplicando 1.198,

$$((\aleph^+)')^u(w) = T'\left((\aleph^+)^u(w')\right) = T'\left((\aleph^1)^{u_1^*}((w')^1), \ldots, (\aleph^z)^{u_z^*}((w')^z)\right) =$$

$$T'\left((\aleph^1)^{u_1^*}((w^1)'), \ldots, (\aleph^z)^{u_z^*}((w^z)')\right) = \left(((\aleph^1)')^{u_1^*}(w^1), \ldots, ((\aleph^z)')^{u_z^*}(w^z)\right) = ((\aleph')^+)^u(w)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $w \in W_{n'}^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Proposición 1.200 *Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $w \in W_{n'}^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N'$*

$$((R^+)')_i^u(w,k) = ((R')^+)_i^u(w,k)\,.$$

Demostración. Ya que, aplicando 1.198,

$$\begin{aligned}((R^+)')_i^u(w,k) = (R^+)_i^u\,(w',k) &= (R^1)_i^{u_1^*}\left((w')^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left((w')^z, R_z^0(u^+,k)\right)\\ &= (R^1)_i^{u_1^*}\left((w^1)', R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left((w^z)', R_z^0(u^+,k)\right)\\ &= ((R^1)')_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + ((R^z)')_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) = ((R')^+)_i^u(w,k)\end{aligned}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $w \in W_{n'}^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N'$. □

Proposición 1.201 *El sistema electoral inducido de la suma de sistemas electorales respecto de uno simple es la suma de los sistemas electorales inducidos de cada sistema electoral respecto del mismo sistema electoral simple.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.199 y 1.200. □

Corolario 1.202 *El sistema electoral inducido de un sistema electoral suma respecto de uno simple coincide con el sistema electoral suma de los sistemas electorales simples inducidos respecto del mismo sistema electoral simple.*

Proposición 1.203 *(a) El sistema inducido de un sistema ordinal suma es ordinal suma.*

(b) El sistema inducido de un sistema de cuotas suma es de cuotas suma.

(c) El sistema inducido de un sistema de divisores suma es de divisores suma.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.191 y 1.202. □

Consideremos ahora un sistema electoral

$$(N, \aleph, R)$$

asociado a $(P, \mathcal{P})$.

Podemos considerar entonces su sistema electoral inducido

$$(N', \aleph', R')$$

asociado a $(P, \mathcal{P})$ y el sistema electoral inducido de éste

$$(N'', (\aleph')', (R')')$$

asociado a $(P, \mathcal{P})$.

Asimismo, podemos considerar también el sistema electoral inducido directamente

$$(N'', \aleph'', R'')$$

asociado a $(P, \mathcal{P})$.

Cometiendo un pequeño abuso de notación, pero en consonancia con la simbología anterior, utilizaremos los símbolos simples para los conceptos que aparecen en las inducciones de N a N' y de N' a N'' y los símbolos dobles para los correspondientes a la inducción de N a N''.

Proposición 1.204 *Para cada* $w \in W^p_{n''}$

$$(w')' = w''\,.$$

Demostración. Puesto que

$$(w')' = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n''}^1 & \dots & w_{n''}^p \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = w'' \in W^p_n$$

para cada $w \in W^p_{n''}$. $\square$

Proposición 1.205 *Para cada* $w \in W^p_{n''}$

$$(T')'(w) = T''(w') \,.$$

Demostración. Puesto que

$$T'\left(T'(w)\right) = T'\left(T'\left(w^1, \dots, w^p\right)\right) = T'\left(w^1_{|_{n'}}, \dots, w^p_{|_{n'}}\right) =$$

$$T'\left(w^1_{|_{n''}}, \dots, w^p_{|_{n''}}\right) = T''(w^1, \dots, w^p) = T''(w)$$

para cada $w = (w^1, \dots, w^p) \in W_n \times \overset{(m)}{\dots} \times W_n$. □

Proposición 1.206 *Para cada* $u \in \overline{U_p}$

$$((\aleph')')^u(w) = (\aleph'')^u(w)$$

para cada $w \in W^{n''}_p$.

Demostración. Ya que, por 1.204 y 1.205,

$$((\aleph')')^u(w) = T'\left((\aleph')^u(w')\right) = T'\left(T'\left(\aleph^u\left((w')'\right)\right)\right) = T''\left(\aleph^u(w'')\right) = (\aleph'')^u(w)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W^{n''}_p$. □

Proposición 1.207 *Para cada* $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $i \in N''$

$$((R')')^u_i(w,k) = (R'')^u_i(w,k)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ *y cada* $w \in W^{n''}_p$.

Demostración. Ya que, aplicando 1.204, se tiene que

$$((R')')^u_i(w,k) = (R')^u_i\left(w',k\right) = R^u_i\left((w')',k\right) = R^u_i\left(w'',k\right) = (R'')^u_i(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W^{n''}_p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $i \in N''$. □

Proposición 1.208 *El sistema electoral inducido por un sistema electoral inducido es otro sistema electoral inducido.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.206 y 1.207. □

Observación 1.209 El sistema electoral inducido permite estudiar el caso hipotético en que las candidaturas se hubieran presentado unidas. En tal supuesto, a cada una de las nuevas candidaturas se la denomina **coalición**. Concretamente, dada una partición de N

$$\mathcal{B} = \{N_1, \ldots, N_z\},$$

que denominaremos **estructura de coaliciones**, dados un vector de pesos u y el número de representantes a elegir k, podemos comparar para cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^p$ los valores

$$(R')_i^u \left(\begin{pmatrix} \sum_{h \in N_1} w_h^1 & \cdots & \sum_{h \in N_1} w_h^p \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{h \in N_z} w_h^1 & \cdots & \sum_{h \in N_z} w_h^p \end{pmatrix}, k \right) \qquad \text{y} \qquad \sum_{h \in N_i} R_h^u(w, k)$$

obtenidos sumando los votos de cada bloque y aplicando el sistema electoral inducido por una parte, y los valores dados por la suma de los representantes de cada bloque por otra.

Ejemplo 1.210 Consideremos el sistema electoral simple mayoritario del ejemplo 1.184 que otorga $c_1(4) = 3$ representantes a la candidatura de mayor voto y $c_2(4) = 1$ a la siguiente. Entonces, dada la tabla de votos

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

si se unen las dos primeras candidaturas y las dos últimas, se tiene la nueva tabla de votos

i=0	i=0'
0.7	0.3

con lo que se obtienen las tablas de representantes siguientes, según se sumen los representantes inicialmente sin estructura de coaliciones alguna o bien después de producirse la correspondiente estructura de coaliciones, respectivamente

i=0	i=0'
4	0

y

i=0	i=0'
3	1

Observación 1.211 Un caso particular importante de estructura de coaliciones, que denominaremos **alianza**, se da cuando se forma una única coalición y el resto se mantiene de forma individual. Por ejemplo, para fijar ideas podemos considerar que la coalición es

$$\{1, \ldots, a\}.$$

En tal caso, denotaremos por 0 dicha coalición, por N_0 el conjunto

$$N_0 = \{0, a+1, \ldots, n\}$$

y por w_0 la nueva matriz de votos, con lo que tendremos

$$(R')_0^u \left(\begin{pmatrix} w_1^1 + \ldots + w_a^1 & \ldots & w_1^p + \ldots + w_a^p \\ w_{a+1}^1 & \ldots & w_{a+1}^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^1 & \ldots & w_n^p \end{pmatrix}, k \right) \qquad \text{y} \qquad R_1^u(w,k) + \ldots + R_a^u(w,k)\,.$$

Ejemplo 1.212 Si consideramos el sistema electoral simple mayoritario que otorga

$$c_1(4) = 3 \qquad \text{y} \qquad c_2(4) = 1$$

representantes respectivamente a la candidatura de mayor voto y a la siguiente cuyo peso es mayor entonces, dada la tabla de votos

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

si se unen las dos primeras candidaturas, se tiene la nueva tabla de votos

i=0	i=3	i=4
0.7	0.2	0.1

con lo que se obtienen las tablas de representantes siguientes, según se sumen los representantes inicialmente sin alianza alguna o bien después de producirse la correspondiente alianza, respectivamente

i=0	i=3	i=4
4	0	0

y

i=0	i=3	i=4
3	1	0

1.5 Superaditividad

Una de las cuestiones más interesantes de los sistemas electorales es la idea de gobernabilidad. Para formalizar dicha idea, se define el concepto de superaditividad a partir del hecho de que, en el caso de alianza, la coalición correspondiente no se vea perjudicada. Y se contempla también el caso más fuerte en que, además, el resto de candidaturas no salgan beneficiadas.

Definición 1.213 Un sistema electoral R es **superaditivo** si, y sólo si, para cada $A \subseteq N$

$$(R')^u_A(w_A, k) \geq \sum_{i \in A} R^u_i(w, k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_n$.

Definición 1.214 Diremos que el sistema electoral R es **estrictamente superaditivo** si, y sólo si, es superaditivo y para cada $A \subseteq N$ y cada $i \notin A$

$$(R')^u_i(w_A, k) \leq R^u_i(w, k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_n$.

Evidentemente, podemos sustituir R por r en las definiciones anteriores.

Proposición 1.215 *(a) Un sistema electoral R es superaditivo si, y sólo si, para cada subconjunto $0 = \{1, \ldots, a\}$ de N, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_n$*

$$(R')^u_0(w_0, k) \geq R^u_1(w, k) + \ldots + R^u_a(w, k)\,.$$

(b) Un sistema electoral R es estrictamente superaditivo si, y sólo si, es superaditivo y para cada subconjunto $0 = \{1, \ldots, a\}$ de N, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_n$

$$(R')^u_{a+1}(w_A, k) \leq R^u_{a+1}(w, k), \ldots, (R')^u_n(w_A, k) \leq R^u_n(w, k)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el axioma de imparcialidad. □

Obsérvese que exigimos que las condiciones se verifiquen salvo conjuntos de probabilidad cero. Ello se debe a que es posible que en los casos de empate dichas condiciones dejen de cumplirse.

Proposición 1.216 *La superaditividad estricta implica la superaditividad.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición. □

Proposición 1.217 *El sistema mayoritario puro es estrictamente superaditivo.*

Demostración. Puesto que para que el sistema mayoritario puro no fuera estrictamente superaditivo debería ser

$$R_0((w_1 + \ldots + w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n), k) <$$
$$R_i((w_1, \ldots, w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n), k) + \ldots + R_a((w_1, \ldots, w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n), k)\,.$$

Pero como en dicho sistema todos los representantes corresponden a la candidatura de mayor voto, la condición anterior equivale a

$$R_0((w_1 + \ldots + w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n), k) = 0$$

y

$$R_i((w_1, \ldots, w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n), k) + \ldots + R_a((w_1, \ldots, w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n), k) = k\,.$$

Y esta última se convierte en

$$R_h((w_1, \ldots, w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n), k) = k$$

para cierto h entre 1 y a, de nuevo porque todos los representantes se asignan a la candidatura de mayor voto.

Y ello sólo es posible si $w_1 + \ldots + w_a = w_h$ –o sea, si $w_i = 0$ para cada $i \neq h$ entre 1 y a– y, además, el criterio de desempate previamente establecido no favorece a la candidatura h, lo cual constituye un conjunto de probabilidad cero. □

Contraejemplo 1.218 Los sistemas ordinales no son superaditivos en general.

Consideremos el caso del sistema electoral simple igualitario con $k = 4$ representantes a elegir y la tabla de votos

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

En tal caso, cada candidatura obtiene un representante, mientras que si se hubiesen unido por ejemplo las dos últimas, hubiesen obtenido uno solamente.

Y es claro que variaciones suficientemente pequeñas de los datos producen los mismos resultados, por lo que su validez no se reduce únicamente a conjuntos de probabilidad cero.

Contraejemplo 1.219 Los sistemas de cuotas no son superaditivos en general.

Si aplicamos la regla de los mayores restos a la tabla de votos

i=1	i=2	i=3
0.47	0.37	0.16

con $k = 10$ representantes a repartir la cuota resulta ser 0.1, por lo que es claro que corresponden inicialmente 4, 3 y 1 representante a cada candidatura respectivamente. Y como los dos mayores restos corresponden a las dos primeras candidaturas, se tiene que la tabla de representantes es

i=1	i=2	i=3
5	4	1

En cambio, si las dos primeras se unen la tabla obtenida entonces es

i=0	i=3
0.84	0.16

con lo que los representantes que les corresponden inicialmente son 8 y 1. Entonces, como el mayor resto es el de la última candidatura se tiene que la tabla de representantes es

i=0	i=3
8	2

Por tanto, en definitiva se tiene que las dos primeras candidaturas pasan de tener $5 + 4 = 9$ representantes a únicamente 8.

Y es claro que variaciones suficientemente pequeñas de los datos producen los mismos resultados, por lo que su validez no se reduce únicamente a conjuntos de probabilidad cero.

Definición 1.220 Diremos que un sistema de divisores es de divisores **subaditivos** si admite una función generatriz tal que para cada $x, x' \geq 0$ se cumple que

$$g(x + x') \leq g(x) + g(x')\,.$$

Proposición 1.221 *Los sistemas de divisores lineales*

$$g_d = d + s$$

con $s \geq 0$*, de tipo potencial*

$$g_d = d^s$$

con $0 < s \leq 1$*, y de tipo logarítmico*

$$g_d = \log_s (1 + d)$$

con $s > 0$*, son de divisores subaditivos.*

Demostración. Puesto que las funciones generatrices respectivas $x + s$, x^s y $\log_s (1 + x)$ satisfacen

$$x+x'+s \leq (x+s)+(x'+s)\,, \quad (x+x')^s \leq x^s+x'^s \quad \text{y} \quad \log_s(1+x+x') \leq \log_s(1+x)+\log_s(1+x')$$

para cada $x, x' \geq 0$, por ser $s \geq 0$ y $0 < s \leq 1$ en los dos primeros casos respectivamente y porque

$$\log_s(1 + x + x') - (\log_s (1 + x) + \log_s(1 + x')) = \log_s \frac{1 + x + x'}{(1 + x) \cdot (1 + x')} \leq 0$$

en el tercero. □

Proposición 1.222 *Un sistema de divisores es de divisores subaditivos si, y sólo si, admite una función generatriz* g *tal que para cada* $y, y' \geq 0$ *se cumple que*

$$g^{-1} (y + y') \geq g^{-1} (y) + g^{-1} (y')\ .$$

Demostración. Ya que entonces, notando $y = g(x)$, para cada $y, y' \geq 0$

$$g^{-1} (y + y') = g^{-1} (g(x) + g(x')) \geq g^{-1} (g(x + x')) = x + x' = g^{-1} (y) + g^{-1} (y')\ ,$$

por ser g^{-1} estrictamente creciente.

Y recíprocamente, con la misma notación anterior, se tiene ahora que para cada $x, x' \geq 0$

$$g(x + x') = g\left(g^{-1} (y) + g^{-1} (y')\right) \leq g\left(g^{-1} (y + y')\right) = y + y' = g(x) + g(x')\,,$$

por ser g estrictamente creciente. □

Teorema 1.223 *Los sistemas de divisores subaditivos son estrictamente superaditivos.*

Demostración. Ya que, por 1.62, sabemos que existen valores $x_0 > 0$ y $x_0' > 0$ tales que

$$\left[g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_a}{x_0}\right)\right] + \left[g^{-1}\left(\frac{w_{a+1}}{x_0}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_n}{x_0}\right)\right] =$$

$$k = \left[g^{-1}\left(\frac{w_1 + \ldots + w_a}{x_0'}\right)\right] + \left[g^{-1}\left(\frac{w_{a+1}}{x_0'}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_n}{x_0'}\right)\right]$$

casi seguro $w \in W_n$. Pero, teniendo en cuenta 1.222,

$$\left[g^{-1}\left(\frac{w_1 + \ldots + w_a}{x_0'}\right)\right] \geq \left[g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0'}\right) + \ldots + g^{-1}\left(\frac{w_a}{x_0'}\right)\right] \geq$$

$$\left[g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0'}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_a}{x_0'}\right)\right]$$

y, en consecuencia,

$$\left[g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_a}{x_0}\right)\right] + \left[g^{-1}\left(\frac{w_{a+1}}{x_0}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_n}{x_0}\right)\right] \geq$$

$$\left[g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0'}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_a}{x_0'}\right)\right] + \left[g^{-1}\left(\frac{w_{a+1}}{x_0'}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_n}{x_0'}\right)\right]$$

de lo que se deduce que debe ser

$$x_0' \geq x_0$$

ya que g es estrictamente creciente. Por tanto, se tiene que para cada $i > a$

$$R_i'(w_1 + \ldots + w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n) = \left[g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0'}\right)\right] \leq \left[g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right)\right] = R_i(w_1, \ldots, w_n)$$

casi seguro $w \in W_n$.

Y de nuevo por ser g estrictamente creciente, y teniendo en cuenta la igualdad inicial, se obtiene que también

$$R_0'(w_1 + \ldots + w_a, w_{a+1}, \ldots, w_n) = \left[g^{-1}\left(\frac{w_1 + \ldots + w_a}{x_0'}\right)\right] \geq$$

$$\left[g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\frac{w_a}{x_0}\right)\right] = R_1(w_1, \ldots, w_n) + \ldots + R_a(w_1, \ldots, w_n)$$

casi seguro $w \in W_n$. □

Contraejemplo 1.224 Los sistemas de divisores no son superaditivos en general.

Consideremos el sistema de divisores tal que

$$g_d = d^2$$

para $n = 4$ candidaturas, $k = 5$ representantes a elegir y la tabla de votos

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

Entonces, la tabla de cocientes respectivos es

	i=1	i=2	i=3	i=4
$g_1 = 1$	0.40000	0.30000	0.20000	0.10000
$g_2 = 4$	0.10000	0.07500	0.05000	0.02500
$g_3 = 9$	0.04444	0.03333	0.02222	0.01111
$g_4 = 16$	0.02500	0.01875	0.01250	0.00625

En cambio, si se unen la primera y la tercera candidaturas la tabla queda

	i=0	i=2	i=4
$g_1 = 1$	0.60000	0.30000	0.10000
$g_2 = 4$	0.15000	0.07500	0.02500
$g_3 = 9$	0.06666	0.03333	0.01111
$g_4 = 16$	0.03750	0.01875	0.00625

con lo que ambas candidaturas pasan de tener tres representantes a obtener sólo dos.

Y es claro que variaciones suficientemente pequeñas de los datos producen los mismos resultados, por lo que su validez no se reduce únicamente a conjuntos de probabilidad cero.

Observación 1.225 La superaditividad y la superaditividad estricta no se heredan a los subconjuntos, ya que el hecho que se verifiquen casi seguro $w \in W_n^p$ no implica que se verifiquen también casi seguro $w \in W_{n'}^p$.

Proposición 1.226 *(a) La extensión media de un sistema electoral superaditivo es superaditiva.*

(b) La extensión media de un sistema electoral estrictamente superaditivo es estrictamente superaditiva.

DEMOSTRACIÓN. (a) Ya que, por 1.192, 1.83 y ser R superaditivo, para cada subconjunto $0 = \{1, \ldots, a\}$ de N

$$(\hat{R}^u)'_0 (w_0, k) = \hat{R}_0^u (w'_0, k) = R_0^{u+} \left(\widehat{w'_0}^*, k\right) = R_0^{u+} \left((\hat{w}_0^*)', k\right) \geq$$

$$R_1^{u+} (\hat{w}^*, k) + \ldots + R_a^{u+} (\hat{w}^*, k) = \hat{R}_1^u(w, k) + \ldots + \hat{R}_a^u(w, k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^{zp}$.

(b) Análogamente, por 1.192, 1.83 y ser R estrictamente superaditivo, para cada subconjunto $0 = \{1, \ldots, a\}$ de N y cada $i > a$

$$(\hat{R}')_i^u (w_0, k) = \hat{R}_i^u (w'_0, k) = R_i^{u+} \left(\widehat{w'_0}^*, k\right) = R_i^{u+} \left((\hat{w}_0^*)', k\right) \leq R_i^{u+} (\hat{w}^*, k) = \hat{R}_i^u(w, k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^{zp}$. □

Corolario 1.227 *(a) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples superaditivos son superaditivos.*

(b) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples estrictamente superaditivos son estrictamente superaditivos.

Proposición 1.228 *(a) El sistema mayoritario puro medio es estrictamente superaditivo.*

(b) Los sistemas de divisores subaditivos medios son estrictamente superaditivos.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.217, 1.223 y 1.227. □

Proposición 1.229 *(a) La suma de sistemas electorales superaditivos respecto de uno simple arbitrario es superaditiva.*

(b) La suma de sistemas electorales esrrictamente superaditivos respecto de uno simple arbitrario es estrictamente superaditiva.

Demostración. (a) Puesto que, por ser R^j superaditivo, para cada $0 = \{1, \ldots, a\} \subseteq N$

$$(R^j)_0^{u_j^*}((w^j)_0', R_j^0(u^+, k)) \geq \sum_{i=1}^{a} (R^j)_i^{u_j^*}(w^j, R_j^0(u^+, k))$$

para cada $u \in \overline{U_{p_j}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^{p_j}$ para cada $j \in Z$. Y por 1.198 y 1.130,

$$\left((R^+)'\right)_0^u (w_0, k) = (R^+)_0^u(w_0', k) = (R^1)_0^{u_1^*}((w_0')^1, R_1^0(u^+, k)) + \ldots + (R^z)_0^{u_z^*}((w_0')^z, R_z^0(u^+, k))$$
$$= (R^1)_0^{u_1^*}((w^1)_0', R_1^0(u^+, k)) + \ldots + (R^z)_0^{u_z^*}((w^z)_0', R_z^0(u^+, k)) \geq$$
$$\sum_{i=1}^{a} (R^1)_i^{u_1^*}(w^1, R_1^0(u^+, k)) + \ldots + \sum_{i=1}^{a} (R^z)_i^{u_z^*}(w^z, R_z^0(u^+, k)) = (R^+)_1^u(w, k) + \ldots + (R^+)_a^u(w, k)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1 + \ldots + p_z}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^{p_1 + \ldots + p_z}$.

(b) Ya que, por ser R^j estrictamente superaditivo, para cada $0 = \{1, \ldots, a\} \subseteq N$ y cada $i > a$

$$(R^j)_i^{u_j^*}((w^j)_0', R_j^0(u^+, k)) \leq (R^j)_i^{u_j^*}(w^j, R_j^0(u^+, k))$$

para cada $u \in \overline{U_{p_j}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^{p_j}$ para cada $j \in Z$. Y por 1.198 y 1.130,

$$((R^+)')_i^u (w_0, k) = (R^+)_i^u (w_0', k) = (R^1)_i^{u_1^*} \left((w_0')^1, R_1^0 \left(u^+, k\right) \right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*} \left((w_0')^z, R_z^0 \left(u^+, k\right) \right)$$
$$= (R^1)_i^{u_1^*} \left(\left(w^1\right)_0', R_1^0 \left(u^+, k\right) \right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*} \left((w^z)_0', R_z^0 \left(u^+, k\right) \right) \leq$$
$$(R^1)_i^{u_1^*} \left(w^1, R_1^0(u^+, k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*} \left(w^z, R_z^0(u^+, k)\right) = (R^+)_i^u(w, k)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1 + \ldots + p_z}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^{p_1 + \ldots + p_z}$. □

Corolario 1.230 *(a) Los sistemas electorales suma de sistemas electorales simples superaditivos respecto de uno simple arbitrario son superaditivos.*

(b) Los sistemas electorales suma de sistemas electorales simples esrictamente superaditivos respecto de uno simple arbitrario son estrictamente superaditivos.

Proposición 1.231 *(a) El sistema mayoritario puro suma es estrictamente superaditivo.*

(b) Los sistemas de divisores subaditivos suma son estrictamente superaditivos.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.217, 1.223 y 1.230. □

1.6 Monotonía

Una de las propiedades que suele exigirse a un sistema electoral es que a mayor voto corresponda igual o mayor número de representantes.

En el caso de varias circunscripciones, sin embargo, se nos presentan dos opciones: considerar la misma condición con los votos medios o imponer su verificación cuando se cumplen las desigualdades para los votos en cada circunscripción.

Definición 1.232 Diremos que el sistema electoral R es **fuertemente monótono** si, y sólo si, para cada $h, i \in N$ la condición

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i$$

implica

$$R_h^u(w,k) \leq R_i^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

Definición 1.233 Diremos que el sistema electoral R es **débilmente monótono** si, y sólo si, para cada $h, i \in N$ la condición

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p$$

implica

$$R_h^u(w,k) \leq R_i^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

Evidentemente, podemos sustituir R por r en las definiciones anteriores.

En el caso de los sistemas electorales simples, las condiciones

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i \qquad \text{y} \qquad w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p$$

se reducen ambas a que

$$w_h < w_i$$

y se habla, en tal caso, de **monotonía** sencillamente.

Proposición 1.234 *La monotonía fuerte implica la monotonía débil.*

Demostración. Ya que

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p$$

implica

$$\hat{w}_h = u_1 w_h^1 + \ldots + u_p w_h^p < u_1 w_i^1 + \ldots + u_p w_i^p = \hat{w}_i$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$. $\square$

Proposición 1.235 *(a) La monotonía fuerte es hereditaria.*

(b) La monotonía débil es hereditaria.

Demostración. (a) Puesto que si

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i \,,$$

entonces, por 1.168,

$$\hat{w}'_h = \hat{w}_h < \hat{w}_i = \hat{w}'_i$$

de donde, por ser R fuertemente monótono,

$$(R')_h^u(w,k) = R_h^u(w',k) \leq R_i^u(w',k) = (R')_i^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

(b) Dado que si

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p$$

entonces

$$\begin{gathered}(w')_h^1 = w_h^1 < w_i^1 = (w')_i^1 \\ \ldots\ldots\ldots \\ (w')_h^p = w_h^p < w_i^p = (w')_i^p\end{gathered}$$

de donde, por ser R débilmente monótono, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$(R')_h^u(w,k) = R_h^u(w',k) \leq R_i^u(w',k) = (R')_i^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_{n'}^p$. $\square$

Corolario 1.236 *La monotonía es hereditaria.*

Proposición 1.237 *Los sistemas ordinales son monótonos.*

Demostración. Puesto que, por la propia definición de sistema ordinal, si

$$w_h < w_i$$

entonces, si w_h i w_i son el i_1–ésimo y el i_2–ésimo votos de w, se tiene que $i_1 < i_2$ y, por tanto,

$$R_h(w,k) = c_{i_1}(k) \leq c_{i_2}(k) = R_i(w,k)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n$. □

Proposición 1.238 *Los sistemas de cuotas son monótonos.*

Demostración. Puesto que si

$$w_h < w_i\,,$$

dada una cuota q_k cualquiera, tenemos que no puede ser que

$$R_h(w,k) = \left[\frac{w_h}{q_k}\right] + 1 \qquad \text{y} \qquad R_i(w,k) = \left[\frac{w_i}{q_k}\right]\,,$$

puesto que eso implicaría que o bien

$$\frac{w_h}{q_k} > \frac{w_i}{q_k}$$

o bien

$$\left[\frac{w_h}{q_k}\right] = \left[\frac{w_i}{q_k}\right] \qquad \text{y} \qquad \frac{w_h}{q_k} - \left[\frac{w_h}{q_k}\right] > \frac{w_i}{q_k} - \left[\frac{w_i}{q_k}\right]\,,$$

que es una contradicción. □

Proposición 1.239 *Los sistemas de divisores son monótonos.*

Demostración. Puesto que si

$$w_h < w_i$$

entonces

$$\frac{w_h}{x_0} < \frac{w_i}{x_0}$$

de donde, por ser g estrictamente creciente,

$$R_h(w,k) = \left[g^{-1}\left(\frac{w_h}{x_0}\right)\right] \leq \left[g^{-1}\left(\frac{w_i}{x_0}\right)\right] = R_i(w,k)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n$. □

Proposición 1.240 *(a) La extensión media de un sistema electoral fuertemente monótono es fuertemente monótona.*

(b) La extensión media de un sistema electoral débilmente monótono es débilmente monótona.

Demostración. (a) Dado que si

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i$$

para ciertos $h, i \in N$ entonces, por 1.72,

$$u_+ \cdot \hat{w}_h^* = \hat{w}_h < \hat{w}_i = u_+ \cdot \hat{w}_i^*$$

y, por ser R fuertemente monótono,

$$\hat{R}_h^u(w,k) = R_h^{u_+}(\hat{w}^*,k) \leq R_i^{u_+}(\hat{w}^*,k) = \hat{R}_i^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^{zp}$.

(b) Puesto que si

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p, \ldots, w_h^{(z-1)p+1} < w_i^{(z-1)p+1}, \ldots, w_h^{zp} < w_i^{zp}$$

para ciertos $h, i \in N$ entonces

$$(\hat{w}^*)_h^j = u_j^* \, w_h^j + \ldots + u_{(z-1)p+j}^* \, w_h^{(z-1)p+j} < u_j^* \, w_i^j + \ldots + u_{(z-1)p+j}^* \, w_i^{(z-1)p+j} = (\hat{w}^*)_i^j$$

para cada $j \in P$ y, por ser R débilmente monótono,

$$\hat{R}_h^u(w,k) = R_h^{u_+}(\hat{w}^*,k) \leq R_i^{u_+}(\hat{w}^*,k) = \hat{R}_i^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Corolario 1.241 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples monótonos son fuertemente monótonos.*

Proposición 1.242 *(a) Los sistemas ordinales medios son fuertemente monótonos.*

(b) Los sistemas de cuotas medios son fuertemente monótonos.

(c) Los sistemas de divisores medios son fuertemente monótonos.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.237, 1.238, 1.239 y 1.241. □

Proposición 1.243 *La suma de sistemas electorales débilmente monótonos respecto de uno simple arbitrario es débilmente monótona.*

Demostración. Puesto que si para cada $h, i \in N$

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^{p_1} < w_i^{p_1}, w_h^{p_1+\ldots+p_{z-1}+1} < w_i^{p_1+\ldots+p_{z-1}+1}, \ldots, w_h^{p_1+\ldots+p_z} < w_i^{p_1+\ldots+p_z}$$

entonces, por ser R^j débilmente monótono para cada $j \in Z$,

$$(R^j)_h^{u_j^*}\left(w^j, R_j^0(u^+, k)\right) \leq (R^j)_i^{u_j^*}\left(w^j, R_j^0(u^+, k)\right)$$

y, por tanto,

$$(R^+)_h^u(w,k) = (R^1)_h^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_h^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) \leq$$

$$(R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) = (R^+)_i^u(w,k)\,,$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Corolario 1.244 *Los sistemas electorales suma de sistemas electorales simples monótonos respecto de uno simple arbitrario son débilmente monótonos.*

Proposición 1.245 *(a) Los sistemas ordinales suma respecto de uno simple arbitrario son débilmente monótonos.*

(b) Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple arbitrario son débilmente monótonos.

(c) Los sistemas de divisores suma respecto de uno simple arbitrario son débilmente monótonos.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.237, 1.238, 1.239 y 1.244. □

Contraejemplo 1.246 La suma de sistemas electorales fuertemente monótonos no es fuertemente monótona en general.

Basta con considerar la matriz w del ejemplo 1.166 y observar que

$$R_4^+(w,6) = 2 \qquad \text{y} \qquad R_3^+(w,6) = 0$$

pero

$$\hat{w}_4 = 0.6 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.4 = 0.22 \qquad \text{y} \qquad \hat{w}_3 = 0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.24\,.$$

1.7 Crecimiento

Una de las propiedades deseables de los sistemas electorales es que al aumentar el número de representantes a elegir no disminuya el número de representantes de cada candidatura.

Definición 1.247 Diremos que el sistema electoral R es **creciente** si, y sólo si, para cada $k, l \in \mathbb{N}$ la condición
$$k \leq l$$
implica
$$R_i^u(w,k) \leq R_i^u(w,l)\,,$$
para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

Observación 1.248 Es interesante observar que la condición anterior no puede ser sustituida por la misma para la regla relativa, ya que en un caso r se obtiene a partir de R dividiendo por k y en el otro por l.

Teorema 1.249 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) R es creciente.

(ii) Para cada $k \geq 1$, existe una única candidatura $i_k \in N$ tal que

$$R_{i_k}^u(w,k+1) = R_{i_k}^u(w,k)+1 \qquad y \qquad R_i^u(w,k+1) = R_i^u(w,k) \quad si \quad i \neq i_k$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

(iii) Existe una sucesión $(i_k)_{k\geq 1}$ de N tal que

$$R_i^u(w,k) = \sharp\left\{s \leq k / i_s = i\right\}$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

Demostración. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Dado que
$$k < k+1\,,$$
tenemos que
$$R_i^u(w,k) \leq R_i^u(w,k+1)$$

para cada $i \in N$, por ser R creciente. Pero como

$$\sum_{i=1}^{n} R_i^u(w, k+1) = k+1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} R_i^u(w, k)$$

se deduce que existe un único $i_k \in N$ tal que

$$R_{i_k}^u(w, k+1) = R_{i_k}^u(w, k) + 1 \qquad \text{y} \qquad R_i^u(w, k+1) = R_i^u(w, k) \quad \text{para cada} \quad i \neq i_k\,.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Procedemos por inducción sobre k.

Para $k = 1$, sea i_1 la candidatura tal que

$$R_{i_k}^u(w, 1) = 1 \qquad \text{y} \qquad R_i^u(w, 1) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq i_k\,.$$

Entonces

$$R_{i_k}^u(w, 1) = 1 = \sharp\,\{s \leq 1/i_s = i_k\} \qquad \text{y} \qquad R_i^u(w, 1) = 0 = \sharp\,\{s \leq 1/i_s = i\} \quad \text{si } i \neq i_k\,.$$

Por otra parte, si la afirmación es cierta para $k-1$ sea i_k la candidatura tal que

$$R_{i_k}^u(w, k) = R_{i_k}^u(w, k-1) + 1 \qquad \text{y} \qquad R_i^u(w, k) = R_i^u(w, k-1) \quad \text{si} \quad i \neq i_k\,.$$

Entonces

$$R_{i_k}^u(w, k) = R_{i_k}^u(w, k-1) + 1 = \sharp\,\{s \leq k-1/i_s = i_k\} + 1 = \sharp\,\{s \leq k/i_s = i_k\}$$

y

$$R_i^u(w, k) = R_i^u(w, k-1) = \sharp\,\{s \leq k-1/i_s = i\} = \sharp\,\{s \leq k/i_s = i\} \quad \text{si} \quad i \neq i_k\,.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Finalmente, si

$$k \leq l$$

entonces

$$R_i^u(w, k) = \sharp\,\{s \leq k/i_s = i\} \leq \sharp\,\{s \leq l/i_s = i\} = R_i^u(w, l)$$

para cada $i \in N$. □

Ejemplo 1.250 Si consideramos la tabla de cocientes del sistema electoral simple de Hondt para $n = 4$ candidaturas correspondiente al ejemplo 1.31 la sucesión anterior –suponiendo, por ejemplo, que en caso de empate el representante es asignado a la candidatura de mayor voto–es

$$i_1 = 1\,, \quad i_2 = 2\,, \quad i_3 = 1\,, \quad i_4 = 3\,, \quad i_5 = 2\,, \quad i_6 = 1\,, \quad \ldots$$

Proposición 1.251 *Los sistemas ordinales son crecientes.*

DEMOSTRACIÓN. Por la propia definición de los sistemas ordinales. □

Contraejemplo 1.252 Los sistemas de cuotas no son crecientes en general.

Dado el sistema electoral simple de los mayores restos y la tabla

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
0.28	0.27	0.26	0.10	0.09

las proporciones teóricas de representantes para $k = 5$ y $l = 6$ representantes a elegir son

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
1.40	1.35	1.30	0.50	0.45

y

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
1.68	1.62	1.56	0.60	0.54

respectivamente, por lo que en ambos casos corresponden inicialmente un representante a las tres primeras candidaturas y ninguno a las otras. Sin embargo, en el primer caso son las dos últimas las que poseen el resto mayor, mientras que en el segundo son las dos primeras y la cuarta las tres de mayor resto. Por tanto, las tablas de representantes finales son

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
1	1	1	1	1

y

i=1	i=2	i=3	i=4	i=5
2	2	1	1	0

con lo que la última candidatura pasa de tener un representante a no tener ninguno.

Proposición 1.253 *Los sistemas de divisores son crecientes.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que al aumentar el número de representantes a elegir el número de cocientes ordenados tomado es cada vez mayor y, por tanto, la cantidad que hay de cada candidatura se mantiene o aumenta. □

Proposición 1.254 *El crecimiento es hereditario.*

Demostración. Dados $k, l \in \mathbb{N}$ tales que

$$k \leq l$$

entonces, por ser R creciente,

$$R_i^u(w', k) \leq R_i^u(w', l)$$

y, por tanto,

$$(R')_i^u(w, k) = R_i^u(w', k) \leq R_i^u(w', l) = (R')_i^u(w, l)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N'$ y cada $w \in W_{n'}^p$. □

Proposición 1.255 *La extensión media de un sistema electoral creciente es creciente.*

Demostración. Puesto que si $k, l \in \mathbb{N}$ son tales que

$$k \leq l$$

entonces, por ser R creciente,

$$R_i^{u+}(\hat{w}^*, k) \leq R_i^{u+}(\hat{w}^*, l)$$

y, por tanto,

$$\hat{R}_i^u(w, k) = R_i^{u+}(\hat{w}^*, k) \leq R_i^{u+}(\hat{w}^*, l) = \hat{R}_i^u(w, l)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Corolario 1.256 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples crecientes son crecientes.*

Proposición 1.257 *(a) Los sistemas ordinales medios son crecientes.*

(b) Los sistemas de divisores medios son crecientes.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.251, 1.253 y 1.256. □

Observación 1.258 Los sistemas de cuotas medios no son crecientes en general, como se ha visto ya para los sistemas electorales simples en 1.252.

Proposición 1.259 *La suma de sistemas electorales crecientes respecto de uno simple creciente es creciente.*

Demostración. Ya que si $k, l \in \mathbb{N}$ son tales que

$$k \leq l$$

entonces, por ser R^0 creciente,

$$R_1^0\left(u^+, k\right) \leq R_1^0\left(u^+, l\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_z^0\left(u^+, k\right) \leq R_z^0\left(u^+, l\right)$$

para cada $u \in \overline{U_z}$. Y entonces, por ser $R^1, \ldots, R^z$ crecientes, para cada $i \in N$ y cada $j \in Z$

$$(R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0\left(u^+, k\right)\right) \leq (R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0\left(u^+, l\right)\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0\left(u^+, k\right)\right) \leq (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0\left(u^+, l\right)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_j}}$ y cada $w \in W_n^{p_j}$ y, por tanto,

$$(R^+)_i^u(w,k) = (R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0\left(u^+, k\right)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0\left(u^+, k\right)\right) \leq$$

$$(R^1)_i^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0\left(u^+, l\right)\right) + \ldots + (R^z)_i^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0\left(u^+, l\right)\right) = (R^+)_i^u(w,l)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Corolario 1.260 *Los sistemas electorales suma de sistemas electorales simples crecientes respecto de uno simple creciente son crecientes.*

Proposición 1.261 *(a) Los sistemas ordinales suma respecto de uno simple creciente son crecientes.*

(b) Los sistemas de divisores suma respecto de uno simple creciente son crecientes.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.251, 1.253 y 1.260. □

Observación 1.262 Los sistemas de cuotas suma no son crecientes en general, como se ha visto ya para los sistemas electorales simples en 1.252.

1.8 Estabilidad

El objetivo de esta sección es analizar la convergencia de los representantes relativos cuando el número de representantes a elegir tiende a infinito. Y como casos particulares de esta idea, que recibe el nombre de estabilidad, se obtienen las de mayoría, proporcionalidad e igualdad.

Definición 1.263 Diremos que el sistema electoral R es **estable** si, y sólo si, existe

$$\lim_{k\to\infty} r_i^u(w,k)$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$. Y, en tal caso, los denotaremos por

$$\bar{r}_i^u(w)$$

y los denominaremos **índice de estabilidad** de $i \in N$.

Observación 1.264 La estabilidad consiste en la convergencia de los vectores aleatorios

$$r^{u,k} : W_n^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \,.$$

Y, por tanto, en tal caso, queda definida una aplicación

$$\bar{r}^u : W_n^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \,.$$

Proposición 1.265 *$\bar{r}^u$ es un vector aleatorio, para cada $u \in \overline{U_p}$.*

Demostración. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, ya que los vectores aleatorios $r^{u,k}$ están acotados entre 0 y 1 por definición. □

Proposición 1.266 *(a) Para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$, si $w_i = (0,\ldots,0)$ entonces*

$$\bar{r}_i^u(w) = 0\,;$$

(b) Para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$, si $w_i = (1,\ldots,1)$ entonces

$$\bar{r}_i^u(w) = 1\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.20 y de la propia definición de r. □

Lema 1.267 *Si $(a_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión creciente de números reales, entonces existe*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{k}$$

si, y sólo si, existe una sucesión parcial $(a_{k_s})_{s\geq 1}$ tal que

$$(k_{s+1} - k_s)_{s\geq 1}$$

es una sucesión acotada y existe

$$\lim_{s\to\infty} \frac{a_{k_s}}{k_s} \, .$$

Y en tal caso, ambos límites coinciden.

Demostración. La condición es necesaria tomando $k_s = s$.

Recíprocamente, para cada $k \geq k_1$ existen un $s \in \mathbb{N}$ y un $c > 0$ tales que

$$k_s \leq k \leq k_{s+1} \qquad \text{y} \qquad k_{s+1} - k_s \leq c$$

por lo que

$$k - k_s \leq c \qquad \text{y} \qquad k_{s+1} - k \leq c \, .$$

Entonces, por ser creciente la sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$, se tiene

$$\frac{\frac{a_{k_s}}{k_s}}{1+\frac{c}{k_s}} = \frac{a_{k_s}}{k_s + c} \leq \frac{a_{k_s}}{k_s + (k - k_s)} \leq \frac{a_k}{k} \leq \frac{a_{k_{s+1}}}{k_{s+1} - (k_{s+1} - k)} \leq \frac{a_{k_{s+1}}}{k_{s+1} - c} = \frac{\frac{a_{k_{s+1}}}{k_{s+1}}}{1 - \frac{c}{k_{s+1}}}$$

para cada $s \in \mathbb{N}$ de donde, tomando límites, se deduce el enunciado. □

Proposición 1.268 *Sea R un sistema electoral creciente. Entonces, R es estable si, y sólo si, para cada $i \in N$ existe una sucesión parcial $(k_s^i)_{j\geq 1}$ tal que*

$$(k_{s+1}^i - k_s^i)_{j\geq 1}$$

es una sucesión acotada y existe

$$\lim_{s\to\infty} r_i^u(w, k_s^i)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y $w \in W_n^p$.

Y, en tal caso, dichos límites coinciden con los límites de R.

Demostración. Basta aplicar, para cada $i \in N$, el lema 1.267 a la sucesión

$$a_k = R_i^u(w, k) \, ,$$

que es creciente por ser R creciente. □

Definición 1.269 Denominaremos sistemas ordinales **asintóticos** a los que existe

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_i(k)}{k}$$

para cada $i \in N$. Y en tal caso, a dichos límites los denotaremos por

$$\bar{c}_i \,.$$

Proposición 1.270 *Los sistemas ordinales asintóticos son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\bar{r}_i(w) = \bar{c}_{h_i} \,,$$

si w_i es el h_i–ésimo voto mayor del vector w.

Demostración. Puesto que

$$\bar{r}_i(w) = \lim_{k\to\infty} r_i(w,k) = \lim_{k\to\infty} \frac{R_i(w,k)}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{h_i}(k)}{k} = \bar{c}_{h_i} \,,$$

para cada $i \in N$. □

Proposición 1.271 *En los sistemas de cuotas se verifica que*

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{q_k}{1/k} = 1 \,.$$

Demostración. Puesto que, por 1.42, para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{k}{k+1} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} < \frac{q_k}{\frac{1}{k}} \leq \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k} = 1$$

de donde, tomando límites, se deduce la afirmación del enunciado. □

Proposición 1.272 *Los sistemas de cuotas son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\bar{r}_i(w) = w_i \,.$$

Demostración. La afirmación es obvia para $w_i = 0$.

Y, por otra parte, si $w_i > 0$ entonces

$$\frac{w_i}{\frac{q_k}{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{k} = \frac{\frac{w_i}{q_k} - 1}{k} < \frac{\left[\frac{w_i}{q_k}\right]}{k} \leq r_i(w,k) \leq \frac{\left[\frac{w_i}{q_k}\right] + 1}{k} \leq \frac{\frac{w_i}{q_k} + 1}{k} = \frac{w_i}{\frac{q_k}{\frac{1}{k}}} + \frac{1}{k} \,.$$

Y tomando límites y teniendo en cuenta 1.271, se obtiene la afirmación del enunciado. □

Enunciamos y demostramos a continuación dos lemas que vamos a utilizar en el estudio de la estabilidad de los sistemas de divisores.

Lema 1.273 *Sea $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números reales positivos tal que para cada natural $\lambda > 0$ existe*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{\lambda k}}{a_k}.$$

Entonces existe una función f del intervalo $[0,+\infty)$ en sí mismo que es estrictamente creciente, continua y tal que $f(k) = a_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, y

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{\lambda k}}{a_k}$$

para cada $\lambda \in (0,+\infty)$.

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función f obtenida mediante interpolación lineal a partir de los elementos de la sucesión. Es claro que es estrictamente creciente y continua y que $f(k) = a_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$, por definición.

Supongamos en primer lugar que $\lambda > 1$. Entonces

$$\frac{a_{\lambda k}}{a_{k+1}} \leq \frac{f(\lambda[x])}{f([x]+1)} \leq \frac{f([\lambda x])}{f([x]+1)} \leq \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \leq \frac{f([\lambda x]+1)}{f([x])} \leq \frac{f\left((\lambda+1)x\right)}{f([x])} \leq \frac{a_{(\lambda+1)k}}{a_k}.$$

Tomando límites ahora, tenemos que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{\lambda k}}{a_{k+1}} \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{(\lambda+1)k}}{a_k}.$$

Y como ambos extremos son sucesiones convergentes al mismo límite, se deduce que la fracción central converge también a dicho límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{\lambda k}}{a_k}.$$

Para el caso $\lambda < 1$, con los cambios de variable $x = \dfrac{y}{\lambda}$ y $n = \lambda k$, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f(y)}{f\left(\frac{1}{\lambda}y\right)} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{f(\frac{1}{\lambda}y)}{f(y)}} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\frac{1}{\lambda}n}}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{\frac{1}{\lambda}n}} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{\lambda k}}{a_k}.$$

Finalmente, el caso $\lambda = 1$ es evidente. □

En el lema, las definiciones y las propiedades siguientes utilizaremos los convenios

$$\lambda^{+\infty} = \begin{cases} 0\,, & \text{si} \quad 0 < \lambda < 1 \\ 1\,, & \text{si} \quad \lambda = 1 \\ +\infty\,, & \text{si} \quad \lambda > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad \begin{cases} \log_\lambda(0) = -\infty\,, \\ \log_\lambda(+\infty) = +\infty\,. \end{cases}$$

Lema 1.274 *Sea f una función estrictamente creciente y continua del intervalo $[0, +\infty)$ en sí mismo tal que existe*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$$

para cada $\lambda \in (0, +\infty)$. Entonces, si denotamos este límite por $F(\lambda)$, se verifica que existe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(\lambda x)}{f^{-1}(x)}$$

para cada $\lambda \in (0, +\infty)$ y es

$$\lambda^{\frac{1}{\log_\lambda F(\lambda)}}\,.$$

Demostración. Notando $t = \log_\lambda F(\lambda)$, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = F(\lambda) = \lambda^t\,.$$

Primer caso: $0 < t < +\infty$. Entonces, aplicando la hipótesis a $\lambda^{1/t}$, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda^{1/t} x)}{f(x)} = \left(\lambda^{1/t}\right)^t = \lambda\,.$$

Por tanto, haciendo el cambio de variable $y = f^{-1}(x)$ y teniendo en cuenta que f^{-1} es continua por ser f continua y estrictamente creciente, resulta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(\lambda x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}\left(\lambda f(y)\right)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}\left(\lambda \cdot \dfrac{f(y)}{f\left(\lambda^{1/t} y\right)} \cdot f\left(\lambda^{1/t} y\right)\right)}{y} =$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}\left(\lambda \cdot \dfrac{1}{\lambda} \cdot f\left(\lambda^{1/t} y\right)\right)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}\left(f\left(\lambda^{1/t} y\right)\right)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\lambda^{1/t} y}{y} = \lambda^{1/t}\,.$$

Segundo caso: $t = 0$, es decir,

$$F(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = 1\,.$$

Supongamos primero que $\lambda > 1$. Hay que probar que para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x > \delta$ se verifica que

$$\frac{f^{-1}(\lambda x)}{f^{-1}(x)} > \epsilon\,.$$

Como $\lambda - 1 > 0$, aplicando la hipótesis a ϵ, existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x > \delta$ es

$$\frac{f(\epsilon y)}{f(y)} - 1 < \lambda - 1$$

o sea,

$$\frac{f(\epsilon y)}{f(y)} < \lambda$$

o, lo que es lo mismo,

$$f(\epsilon y) < \lambda f(y)\,.$$

Pero por ser f estrictamente creciente, lo es asimismo f^{-1} y, por tanto,

$$\epsilon y < f^{-1}\left(\lambda f(y)\right)$$

lo cual equivale a

$$\frac{f^{-1}\left(\lambda f(y)\right)}{y} > \epsilon\,.$$

Luego

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}\left(\lambda f(y)\right)}{y} = +\infty$$

que, haciendo el cambio de variable $y = f^{-1}(x)$, queda

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(\lambda x)}{f^{-1}(x)} = +\infty\,.$$

Para el caso $\lambda < 1$, haciendo $y = \lambda x$ y aplicando el caso anterior ya que $\dfrac{1}{\lambda} > 1$, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(\lambda x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}(y)}{f^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}y\right)} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}y\right)}{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{+\infty} = 0\,.$$

Finalmente, el caso $\lambda = 1$ es obvio.

Tercer caso: $t = +\infty$, es decir,

$$F(\lambda) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \begin{cases} 0\,, & \text{si} \quad 0 < \lambda < 1\,, \\ 1\,, & \text{si} \quad \lambda = 1\,, \\ +\infty\,, & \text{si} \quad \lambda > 1\,. \end{cases}$$

Supongamos primero que $\lambda > 1$. Hay que probar que para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x > \delta$ se verifica que

$$\frac{f^{-1}(\lambda x)}{f^{-1}(x)} - 1 < \epsilon\,.$$

Como $\epsilon + 1 > 1$, aplicando la hipótesis a $\epsilon + 1$, existe un $\delta > 0$ tal que para cada $x > \delta$ es

$$\frac{f((\epsilon+1)y)}{f(y)} > \lambda$$

o sea,

$$f((\epsilon+1)y) > \lambda f(y)\,.$$

Pero, por ser f estrictamente creciente, lo es asimismo f^{-1} y, por tanto,

$$(\epsilon+1)y > f^{-1}\left(\lambda f(y)\right)$$

lo cual equivale a

$$\frac{f^{-1}\left(\lambda f(y)\right)}{y} - 1 < \epsilon$$

por lo que

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}\left(\lambda f(y)\right)}{y} = 1$$

de donde, haciendo el cambio de variable $y = f^{-1}(x)$, se obtiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(\lambda x)}{f^{-1}(x)} = 1\,.$$

Para el caso $\lambda < 1$, haciendo $y = \lambda x$ y aplicando el caso anterior ya que $\dfrac{1}{\lambda} > 1$, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(\lambda x)}{f^{-1}(x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}(y)}{f^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}y\right)} = \frac{1}{\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \frac{f^{-1}\left(\frac{1}{\lambda}y\right)}{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Finalmente, el caso $\lambda = 1$ es obvio. $\square$

Definición 1.275 Denominaremos sistemas de divisores t–**asintóticos** a los que

$$\lim_{d\to\infty} \frac{g_{\lambda d}}{g_d} = \lambda^t$$

para cada natural $\lambda > 1$, con $t \in [0, +\infty]$.

Proposición 1.276 *(a) Los sistemas de divisores potenciales*

$$g_d = d^t + s\,, \quad \textit{con} \quad s > -1$$

son t–asintóticos, para cada $t \in (0, +\infty)$.

(b) Los sistemas de divisores logarítmicos

$$g_d = \log_s(1 + d)\,, \quad \textit{con} \quad s > 0$$

son 0–asintóticos.

(c) Los sistemas de divisores exponenciales

$$g_d = s^d - 1\,, \quad \textit{con} \quad s > 0$$

son $+\infty$–asintóticos.

Demostración. (a) Puesto que

$$\lim_{d\to\infty} \frac{g_{\lambda d}}{g_d} = \lim_{d\to\infty} \frac{(\lambda d)^t - s}{d^t - s} = \lambda^t$$

para cada $s > -1$.

(b) Puesto que

$$\lim_{d\to\infty} \frac{g_{\lambda d}}{g_d} = \lim_{d\to\infty} \frac{\log_s(1 + \lambda d)}{\log_s(1 + d)} = 0$$

para cada $s > 0$.

(c) Puesto que

$$\lim_{d\to\infty} \frac{g_{\lambda d}}{g_d} = \lim_{d\to\infty} \frac{s^{\lambda d} - 1}{s^d - 1} = +\infty$$

para cada $s > 0$. □

Corolario 1.277 *Los sistemas de divisores lineales son 1–asintóticos.*

Teorema 1.278 *Los sistemas de divisores t–asintóticos son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\bar{r}_i(w) = \frac{1}{\left(\dfrac{w_1}{w_i}\right)^{1/t} + \ldots + \left(\dfrac{w_n}{w_i}\right)^{1/t}}$$

para cada $i \in N$ y cada $w \in W_n$.

Demostración. En primer lugar, consideremos la sucesión $(k_s)_{s\geq 1}$ dada por los cocientes ordenados del sistema electoral simple de los divisores que fue introducida en 1.54. Entonces, ya que no pueden existir dos cocientes diferentes del tipo $\dfrac{w_i}{g_d}$ para la misma candidatura $i \in N$ en cada uno de los intervalos $[1, k_1]$, $[k_1 + 1, k_2]$, etc., se tiene que la sucesión

$$(k_{s+1} - k_s)_{s\geq 1}$$

está acotada por n. Además, por 1.273, podemos tomar la función generatriz g tal que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(\lambda x)}{g(x)} = \lim_{d\to\infty} \frac{g_{\lambda d}}{g_d} = \lambda^t\,.$$

Entonces, como

$$\frac{g^{-1}\left(\dfrac{w_i}{x}\right) - 1}{g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x}\right) + \ldots + g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x}\right)} \leq \frac{\left[g^{-1}\left(\dfrac{w_i}{x}\right)\right]}{\left[g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x}\right)\right]} \leq$$

$$\frac{g^{-1}\left(\dfrac{w_i}{x}\right)}{g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x}\right) - 1 + \ldots + g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x}\right) - 1} = \frac{g^{-1}\left(\dfrac{w_i}{x}\right)}{g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x}\right) + \ldots + g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x}\right) - n}$$

haciendo el cambio de variable $y = \dfrac{1}{x}$ y teniendo en cuenta 1.56 y 1.274, se tiene que

$$\lim_{s\to\infty} r_i(w, k_s) = \lim_{s\to\infty} \frac{R_i(w, k_s)}{k_s} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left[g^{-1}\left(\dfrac{w_i}{x}\right)\right]}{\left[g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x}\right)\right] + \ldots + \left[g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x}\right)\right]} =$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g^{-1}\left(\dfrac{w_i}{x}\right)}{g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x}\right) + \ldots + g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x}\right)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{g^{-1}(w_i y)}{g^{-1}(w_1 y) + \ldots + g^{-1}(w_n y)} =$$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\dfrac{g^{-1}(w_1 y)}{g^{-1}(w_i y)} + \ldots + \dfrac{g^{-1}(w_n y)}{g^{-1}(w_i y)}} = \frac{1}{\left(\dfrac{w_1}{w_i}\right)^{1/t} + \ldots + \left(\dfrac{w_n}{w_i}\right)^{1/t}}$$

para cada $w \in W_n$ de donde, aplicando 1.268, se deduce el resultado del enunciado. □

Observación 1.279 La única diferencia entre las expresiones

$$\frac{{w_i}^{1/t}}{{w_1}^{1/t} + \ldots + {w_n}^{1/t}} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{\left(\dfrac{w_1}{w_i}\right)^{1/t} + \ldots + \left(\dfrac{w_n}{w_i}\right)^{1/t}}$$

se da cuando $t = 0$, en cuyo caso la primera de ellas no tiene sentido.

Por comodidad de notación, utilizaremos en lo sucesivo siempre la primera de dichas expresiones, entendiendo que para $t = 0$ su valor es el de la segunda, es decir,

$$\bar{r}_i(w) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \ w_i > w_h \ \text{ para cada } \ h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \ w_i < w_h \ \text{ para algún } \ h \neq i\,. \end{cases}$$

Ejemplo 1.280 Supongamos que aplicamos el sistema de los divisores para $n = 4$ candidaturas dado por la sucesión

$$g_d = d^2$$

a la tabla de valores

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

En primer lugar, las raíces cuadradas de los valores anteriores son

$$\sqrt{0.4} = 0.632\,, \qquad \sqrt{0.3} = 0.548\,, \qquad \sqrt{0.2} = 0.447 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{0.1} = 0.316\,.$$

Y como

$$0.632 + 0.548 + 0.447 + 0.316 = 1.943$$

y

$$\frac{0.632}{1.943} = 0.325\,, \qquad \frac{0.548}{1.943} = 0.282\,, \qquad \frac{0.447}{1.943} = 0.230 \qquad \text{y} \qquad \frac{0.316}{1.943} = 0.163\,,$$

la tabla de índices de estabilidad queda

i=1	i=2	i=3	i=4
0.325	0.282	0.230	0.163

Proposición 1.281 *La extensión media de un sistema electoral estable es estable y sus índices de estabilidad son*

$$\bar{\hat{r}}_i^u(w) = \bar{r}_i^{u+}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, *cada* $i \in N$ *y cada* $w \in W_n^{zp}$.

Demostración. Ya que, por 1.91 y ser R estable,

$$\bar{\hat{r}}_i^u(w) = \lim_{k\to\infty} \hat{r}_i^u(w,k) = \lim_{k\to\infty} r_i^{u+}(\hat{w}^*,k) = \bar{r}_i^{u+}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Corolario 1.282 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples estables son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\bar{\hat{r}}_i^u(w) = \bar{r}_i(\hat{w})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $w \in W_n^p$.

Proposición 1.283 *Los sistemas ordinales medios asintóticos son estables y, si* $\hat{w}_i$ *es el* h_i*–ésimo voto mayor del vector* $\hat{w}$*, sus índices de estabilidad son*

$$\bar{\hat{r}}_i^u(w) = \bar{c}_{h_i}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.270 y 1.282. □

Proposición 1.284 *Los sistemas de cuotas medios son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\bar{\hat{r}}_i^u(w) = \hat{w}_i\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.272 y 1.306. □

Proposición 1.285 *Los sistemas de divisores medios t–asintóticos son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\bar{\hat{r}}_i^u(w) = \frac{\hat{w}_i^{1/t}}{\hat{w}_1^{1/t} + \ldots + \hat{w}_n^{1/t}}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.278 y 1.282. □

Proposición 1.286 *La suma de sistemas electorales estables respecto de uno simple estable es estable y sus índices de estabilidad son*

$$\overline{r^+}^u_i(w) = \overline{r^0}_1(u^+)\cdot\overline{r^1}^{u_1^*}_i(w^1) + \ldots + \overline{r^0}_z(u^+)\cdot\overline{r^z}^{u_z^*}_i(w^z)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, *cada* $i \in N$ *y cada* $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$.

Demostración. Ya que, por 1.138 y ser R^0 estable y $R^1,\ldots,R^z$ estables,

$$\overline{r^+}^u_i(w) = \lim_{k\to\infty}(r^+)^u_i(w,k) =$$

$$\lim_{k\to\infty}\Big(r_1^0\left(u^+,k\right)\cdot(r^1)^{u_1^*}_i(w^1,R_1^0(u^+,k)) + \ldots + r_z^0\left(u^+,k\right)\cdot(r^z)^{u_z^*}_i(w^z,R_z^0(u^+,k))\Big) =$$

$$\lim_{k\to\infty} r_1^0\left(u^+,k\right)\cdot\lim_{k\to\infty}(r^1)^{u_1^*}_i(w^1,R_1^0(u^+,k)) + \ldots + \lim_{k\to\infty} r_z^0\left(u^+,k\right)\cdot\lim_{k\to\infty}(r^z)^{u_z^*}_i(w^z,R_z^0(u^+,k))) =$$

$$\overline{r^0}_1(u^+)\cdot\overline{r^1}^{u_1^*}_i(w^1) + \ldots + \overline{r^0}_z(u^+)\cdot\overline{r^z}^{u_z^*}_i(w^z)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Observación 1.287 Las fórmulas anteriores pueden escribirse matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix}\overline{r^+}^u_1(w)\\ \vdots\\ \overline{r^+}^u_n(w)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{r^1}^{u_1^*}_1(w^1) & \ldots & \overline{r^z}^{u_z^*}_1(w^z)\\ \vdots & & \vdots\\ \overline{r^1}^{u_1^*}_n(w^1) & \ldots & \overline{r^z}^{u_z^*}_n(w^z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{r^0}_1(u^+)\\ \vdots\\ \overline{r^0}_z(u^+)\end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$.

Corolario 1.288 *Los sistemas electorales suma de sistemas simples estables respecto de uno simple estable son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\overline{r^+}^u_i(w) = \overline{r^0}_1(u)\cdot\overline{r^1}_i(w^1) + \ldots + \overline{r^0}_p(u)\cdot\overline{r^p}_i(w^p)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $i \in N$ *y cada* $w \in W_n^p$.

Observación 1.289 Las fórmulas anteriores pueden escribirse matricialmente en la forma

$$\begin{pmatrix}\overline{r^+}^u_1(w)\\ \vdots\\ \overline{r^+}^u_n(w)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{r^1}_1(w^1) & \ldots & \overline{r^p}_1(w^p)\\ \vdots & & \vdots\\ \overline{r^1}_n(w^1) & \ldots & \overline{r^p}_n(w^p)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{r^0}_1(u)\\ \vdots\\ \overline{r^0}_p(u)\end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^p$.

Proposición 1.290 *Los sistemas ordinales suma asintóticos respecto de uno simple estable son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\overline{r^+}^u_i(w) = \sum_{j=1}^{p} \overline{r^0}_j(u)\, \bar{c}^j_{h^j_i}\,,$$

si w^j_i *es el* h^j_i*–ésimo voto mayor del vector* w^j *para cada* $j \in P$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.270 y 1.288. □

Proposición 1.291 *Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple estable son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\overline{r^+}^u_i(w) = \sum_{j=1}^{p} \overline{r^0}_j(u)\, w^j_i\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.272 y 1.288. □

Proposición 1.292 *Los sistemas de divisores suma t–asintóticos respecto de uno simple estable son estables y sus índices de estabilidad son*

$$\overline{r^+}^u_i(w) = \sum_{j=1}^{p} \overline{r^0}_j(u) \cdot \frac{{w^j_i}^{1/t}}{{w^j_1}^{1/t} + \ldots + {w^j_n}^{1/t}}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.278 y 1.288. □

Proposición 1.293 *La estabilidad es hereditaria y los índices de estabilidad son*

$$\overline{r'}^u_i(w) = \bar{r}^u_i(w')$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $i \in N' \subseteq N$ *y cada* $w \in W^p_{n'}$.

Demostración. Puesto que, por 1.189 y ser R estable,

$$\overline{r'}^u_i(w) = \lim_{k\to\infty} (r')^u_i(w,k) = \lim_{k\to\infty} r^u_i(w',k) = \bar{r}^u_i(w')$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N' \subseteq N$ y cada $w \in W^p_{n'}$. □

1.8.1 Mayoría, proporcionalidad e igualdad

Consideremos los conjuntos

$$\widehat{W_n^p} = \{w \in W_n^p : \quad \text{existe } \; i \in N \; \text{ tal que } \; \hat{w}_i > \hat{w}_h \; \text{ para cada } \; h \neq i\}$$

y

$$\overline{W_n^p} = \{w \in W_n^p : \quad \hat{w}_i \neq 0 \; \text{ para cada } \; i \in N\} \; .$$

Definición 1.294 Un sistema electoral R es **mayoritario** si y, solo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in \widehat{W_n^p}$

$$\bar{r}_i^u(w) = \begin{cases} 1, & \text{si } \; \hat{w}_i > \hat{w}_h \; \text{ para cada } \; h \neq i \, , \\ 0, & \text{si } \; \hat{w}_i < \hat{w}_h \; \text{ para algún } \; h \neq i \, . \end{cases}$$

Observación 1.295 Es interesante observar que los valores del caso de mayoría definido anteriormente son los índices de poder del sistema mayoritario puro medio vistos en 1.105 que, como se observó en 1.106, no dependían de k.

Definición 1.296 Un sistema electoral R es **proporcional** si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$

$$\bar{r}_i^u(w) = \hat{w}_i \, .$$

Definición 1.297 Un sistema electoral R es **igualitario** si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in \overline{W_n^p}$

$$\bar{r}_i^u(w) = \frac{1}{n} \, .$$

Proposición 1.298 *Los sistemas electorales mayoritarios e igualitarios son estables casi seguro $w \in W_n^p$; y los proporcionales, estables.*

Demostración. Puesto que las condiciones anteriores se verifican en $W_n^p - \widehat{W_n^p}$, $W_n^p - \overline{W_n^p}$ y W_n^p respectivamente. □

Los casos extremos, salvo reordenación, de las enuplas $(\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n)$ de los sistemas ordinales asintóticos son

$$(1, 0, \ldots, 0) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) \, ,$$

que denominaremos de **máxima dispersión** y **mínima dispersión**, respectivamente.

Proposición 1.299 *(a) Los sistemas ordinales asintóticos de máxima dispersión son mayoritarios.*

(b) Los sistemas ordinales asintóticos de mínima dispersión son igualitarios.

Demostración. (a) Ya que, por 1.270, para cada $i \in N$ y cada $w \in \widehat{W_n}$

$$\bar{r}_i(w) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \ w_i > w_h \ \text{ para cada } \ h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \ w_h < w_i \ \text{ para algún } \ h \neq i\,. \end{cases}$$

(b) Puesto que, por 1.270, para cada $i \in N$

$$\bar{r}_i(w) = \frac{1}{n}$$

para cada $w \in \overline{W_n}$. □

Corolario 1.300 *Los sistemas mayoritario e igualitario puros son mayoritario e igualitario, respectivamente.*

Proposición 1.301 *Los sistemas de cuotas son proporcionales.*

Demostración. Por 1.272. □

Corolario 1.302 *El sistema de los mayores restos es proporcional.*

Proposición 1.303 *(a) Los sistemas de divisores* 0*–asintóticos son mayoritarios.*

(b) Los sistemas de divisores 1*–asintóticos son proporcionales.*

(c) Los sistemas de divisores $+\infty$*–asintóticos son igualitarios.*

Demostración. (a) Consecuencia inmediata de 1.279.

(b) Por 1.278, con $t = 1$.

(c) Por 1.278, con $t = +\infty$. □

Corolario 1.304 *Los sistemas de divisores lineales –y, en particular, el de Hondt– son proporcionales.*

Proposición 1.305 *(a) La extensión media de un sistema electoral mayoritario es mayoritaria.*

(b) La extensión media de un sistema electoral proporcional es proporcional.

(c) La extensión media de un sistema electoral igualitario es igualitaria.

DEMOSTRACIÓN. (a) Ya que, por 1.72 y 1.281 y ser R mayoritario,

$$\overline{\hat{r}}_i^u(w) = \bar{r}_i^{u_+}(\hat{w}^*) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \hat{w}_i = u_+ \cdot \hat{w}_i^* > u_+ \cdot \hat{w}_h^* = \hat{w}_h \quad \text{para cada} \quad h \neq i\,, \\ 0, & \text{si} \quad \hat{w}_i = u_+ \cdot \hat{w}_i^* < u_+ \cdot \hat{w}_h^* = \hat{w}_h \quad \text{para algún} \quad h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in \widehat{W_n^{zp}}$.

(b) Dado que, por 1.72 y 1.281 y ser R proporcional,

$$\overline{\hat{r}}_i^u(w) = \bar{r}_i^{u_+}(\hat{w}^*) = u_+ \cdot \hat{w}_i^* = \hat{w}_i$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{zp}$.

(c) Puesto que, por 1.281 y ser R igualitario,

$$\overline{\hat{r}}_i^u(w) = \bar{r}_i^{u_+}(\hat{w}^*) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in \overline{W_n^{zp}}$. □

Corolario 1.306 *(a) Los sistemas electorales medios de sistemas simples mayoritarios son mayoritarios.*

(b) Los sistemas electorales medios de sistemas simples proporcionales son proporcionales.

(c) Los sistemas electorales medios de sistemas simples igualitarios son igualitarios.

Proposición 1.307 *(a) Los sistemas ordinales medios asintóticos de máxima y mínima dispersión son mayoritarios e igualitarios, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas medios son proporcionales.

(c) Los sistemas de divisores medios 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son mayoritarios, proporcionales e igualitarios, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.299, 1.301, 1.303 y 1.306. □

Corolario 1.308 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros medios son mayoritario e igualitario, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos medio es proporcional.

(c) Los sistemas de divisores lineales medios –y, en particular, el de Hondt medio– son proporcionales.

Proposición 1.309 *(a) La suma de sistemas electorales proporcionales respecto de uno simple proporcional es proporcional.*

(b) La suma de sistemas electorales igualitarios respecto de uno simple estable es igualitaria.

Demostración. (a) Dado que, por 1.120 y 1.286 y ser R^0 estable y $R^1, \dots, R^z$ proporcionales,

$$\begin{pmatrix} \overline{r^+}^u_1(w) \\ \vdots \\ \overline{r^+}^u_n(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{r^1}^{u_1^*}_1(w^1) & \dots & \overline{r^z}^{u_z^*}_1(w^z) \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{r^1}^{u_1^*}_n(w^1) & \dots & \overline{r^z}^{u_z^*}_n(w^z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{r^0}_1(u^+) \\ \vdots \\ \overline{r^0}_z(u^+) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1^* \cdot w_1^1 & \dots & u_z^* \cdot w_1^z \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^* \cdot w_n^1 & \dots & u_z^* \cdot w_n^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \vdots \\ u_z^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w}_1 \\ \vdots \\ \hat{w}_n \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\dots+p_z}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{p_1+\dots+p_z}$.

(b) Puesto que, por 1.286 y ser R^0 estable y $R^1, \dots, R^z$ igualitarios,

$$\begin{pmatrix} \overline{r^+}^u_1(w) \\ \vdots \\ \overline{r^+}^u_n(w) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{r^1}^{u_1^*}_1(w^1) & \dots & \overline{r^z}^{u_z^*}_1(w^z) \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{r^1}^{u_1^*}_n(w^1) & \dots & \overline{r^z}^{u_z^*}_n(w^z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{r^0}_1(u^+) \\ \vdots \\ \overline{r^0}_z(u^+) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{r^0}_1(u^+) \\ \vdots \\ \overline{r^0}_z(u^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\dots+p_z}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in \overline{W_n^{p_1+\dots+p_z}}$. □

Corolario 1.310 *(a) Los sistemas electorales suma de sistemas simples proporcionales respecto de uno simple proporcional son proporcionales.*

(b) Los sistemas electorales suma de sistemas simples igualitarios respecto de uno simple estable son igualitarios.

Proposición 1.311 *(a) Los sistemas ordinales suma asintóticos de mínima dispersión respecto de uno simple estable son igualitarios.*

(b) Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple proporcional son proporcionales.

(c) Los sistemas de divisores suma 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos respecto de uno simple proporcional y uno simple estable son proporcionales e igualitarios, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.299, 1.301, 1.303 y 1.310. □

Corolario 1.312 *(a) El sistema igualitario puro suma respecto de uno simple estable es igualitario.*

(b) El sistema de los mayores restos suma respecto de uno simple proporcional es proporcional.

(c) Los sistemas de divisores lineales suma –y, en particular, el de Hondt suma– respecto de uno simple proporcional son proporcionales.

Proposición 1.313 *(a) La mayoría es hereditaria.*

(b) La proporcionalidad es hereditaria.

Demostración. (a) Ya que, por 1.168, 1.293 y ser R mayoritario,

$$\overline{r'}^u_i(w) = \bar{r}^u_i(w') = \begin{cases} 1\,, & \text{si} \quad \hat{w}_i = \widehat{w'}_i > \widehat{w'}_h = \hat{w}_h \quad \text{para cada} \quad h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si} \quad \hat{w}_i = \widehat{w'}_i < \widehat{w'}_h = \hat{w}_h \quad \text{para algún} \quad h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N'$ y cada $w \in \overbrace{W^p_{n'}}$.

(b) Dado que, por 1.168, 1.293 y ser R proporcional,

$$\overline{r'}^u_i(w) = \bar{r}^u_i(w') = \widehat{w'}_i = \hat{w}_i\,,$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N'$ y cada $w \in W^p_{n'}$. □

Observación 1.314 La igualdad no es hereditaria, ya que el hecho que

$$\bar{r}_i^u(w) = \frac{1}{n}$$

no implica que

$$\overline{r'}_i^u(w) = \frac{1}{n'} .$$

	ORDINALES	CUOTAS	DIVISORES
SUPERADITIVIDAD	*mayoritario puro*	*ninguno*	*subaditivos*
SUPERADITIVIDAD ESTRICTA	*mayoritario puro*	*ninguna*	*subaditivos*
MONOTONÍA	*todos*	*todos*	*todos*
CRECIMIENTO	*todos*	*ninguno*	*todos*
ESTABILIDAD	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	$0-$*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 1.1: Propiedades de los sistemas electorales simples notables.

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
SUPERADITIVIDAD	*mayoritario puro*	*ninguno*	*subaditivos*
SUPERADITIVIDAD ESTRICTA	*mayoritario puro*	*ninguno*	*subaditivos*
MONOTONÍA FUERTE	*todos*	*todos*	*todos*
MONOTONÍA DÉBIL	*todos*	*todos*	*todos*
CRECIMIENTO	*todos*	*ninguno*	*todos*
ESTABILIDAD	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	0–*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD	*ninguno*	*todos*	1–*asintóticos*
IGUALDAD	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty$–*asintóticos*

Tabla 1.2: Propiedades de los sistemas electorales medios notables.

	Sistema electoral simple	**ORDINALES**	**CUOTAS**	**DIVISORES**
SUPERADITIVIDAD	*arbitrario*	*mayoritario puro*	*ninguno*	*subaditivos*
SUPERADITIVIDAD ESTRICTA	*arbitrario*	*mayoritario puro*	*ninguno*	*subaditivos*
MONOTONÍA FUERTE	*arbitrario*	*ninguno*	*ninguno*	*ninguno*
MONOTONÍA DÉBIL	*arbitrario*	*todos*	*todos*	*todos*
CRECIMIENTO	*creciente*	*todos*	*ninguno*	*todos*
ESTABILIDAD	*estable*	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA	*arbitrario*	*ninguno*	*ninguno*	*ninguno*
PROPORCIONALIDAD	*proporcional*	*ninguno*	*todos*	1−*asintóticos*
IGUALDAD	*estable*	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty$−*asintóticos*

Tabla 1.3: Propiedades de los sistemas electorales suma notables.

2

Expectativas electorales

A lo largo del capítulo anterior hemos definido y estudiado diversos conceptos y propiedades de los sistemas electorales. En ambos casos podríamos decir que su tratamiento ha sido básicamente global. Con ello queremos indicar que no hemos tenido en cuenta las posibles implicaciones individuales que pueda haber para cada una de las candidaturas. El propósito de este capítulo es precisamente éste: analizar las posibilidades que se le presentan a una candidatura cualquiera en función de los diferentes votos que pueda tener en cada una de las circunscripciones.

Así, comenzamos el capítulo introduciendo la noción de expectativa electoral asociada a un vector de pesos y uno de votos para pasar seguidamente a analizar las propiedades correspondientes de crecimiento, estabilidad y, en particular, las de mayoría, proporcionalidad e igualdad parciales, análogas a las de igual nombre estudiadas en el capítulo anterior pero referidas a la expectativa electoral.

2.1 Expectativas electorales

Con la idea de analizar los sistemas electorales desde un punto de vista individual de una candidatura cualquiera, consideramos en esta sección la noción de expectativas electorales de una candidatura cuando se fija su vector de votos.

Dado un sistema electoral $(N, \aleph, R)$ asociado a $(P, \mathcal{P})$ y $x = (x_1, \ldots, x_p) \in [0,1]^p$, notamos

$$W_{n-1}^p(x) = \left\{ \begin{pmatrix} w_1^1 & \ldots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1}^1 & \ldots & w_{n-1}^p \end{pmatrix} : \begin{array}{l} 0 \le w_i^j \le 1 \text{ para cada } i = 1, \ldots, n \text{ y cada } j \in P \\ w_1^j + \ldots + w_{n-1}^j = 1 - x_1 \text{ para cada } j \in P \end{array} \right\}.$$

En particular, $W_{n-1}^p(0, \ldots, 0) = W_{n-1}^p$ y $W_{n-1}^p(1, \ldots, 1) = \{(0, \ldots, 0)\}$.

Dada entonces la matriz

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \ldots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1}^1 & \ldots & w_{n-1}^p \end{pmatrix} \in W_{n-1}^p(x)$$

podemos considerar la matriz

$$(x/w) = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_p \\ w_1^1 & \ldots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1}^1 & \ldots & w_{n-1}^p \end{pmatrix} \in W_n^p .$$

Ejemplo 2.1 Para la matriz $w \in W_3^2(0.4, 0.1)$ definida por la tabla

		i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.2	0.3	0.4

la matriz $((0.4, 0.1)/w) \in W_4^2$ es

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4

Consideremos para cada $x \in [0,1]^p$ la aplicación

$$F_x : W^p_{n-1}(x) \longrightarrow W^p_n$$

definida para cada $w \in W^p_{n-1}(x)$ por

$$F_x(w) = (x/w)\,.$$

Consideramos en $W^p_{n-1}(x)$ el conjunto de las antiimágenes de conjuntos medibles de W_n:

$$\left\{ {F_x}^{-1}(\beta) : \beta \quad \text{es un conjunto medible de } W_n \right\}\,.$$

Proposición 2.2 *Para cada $x \in [0,1]^p$, F_x es medible e inyectiva.*

Demostración. Por definición. □

Y podemos considerar también para cada $i \in N$ la aplicación

$$T_i : W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n \longrightarrow W_{n-1}(w^1_i) \times \ldots \times W_{n-1}(w^p_i)$$

definida para cada $(w^1, \ldots, w^p) \in W_n \times \overset{(m)}{\cdots} \times W_n$ por

$$T_i(w^1, \ldots, w^p) = (w^1_{w^1_i}, \ldots, w^p_{w^p_i})\,,$$

siendo $w^1_{w^1_i}, \ldots, w^p_{w^p_i}$ las matrices obtenidas suprimiendo las componentes i–ésimas de cada $w^1, \ldots, w^p$, respectivamente.

Proposición 2.3 *Para cada $i \in N$, T_i es medible y exhaustiva.*

Demostración. Por definición. □

Proposición 2.4 *Para cada $x \in [0,1]^p$*

$$T_1 \circ F_x = I_{|_{W_{n-1}(x)}}\,.$$

Demostración. Puesto que

$$(T_1 \circ F_x)(w) = T_1(F_x(w)) = T_1(x/w) = w$$

para cada $w \in W^p_{n-1}(x)$. □

Definición 2.5 Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$, denominamos **función de recuento parcial** del vector de pesos $u \in \overline{U_p}$ y el vector de votos $x \in [0,1]^p$ a la aplicación

$$\aleph_x^u : W_{n-1}^p(x) \longrightarrow W_{n-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n-1}(x_m)$$

definida por

$$\aleph_x^u(w) = T_1\left(\aleph^u(x/w)\right)$$

para cada $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 2.6 *Cualquier otra forma de definir*

$$\aleph_x^u\,,$$

pero añadiendo el vector de votos x de cualquier otro modo, es igual a la aplicación $\aleph_x^u$ definida anteriormente.

Demostración. Por la simetría de la función de recuento $\aleph$. $\square$

Y consideremos asimismo en $W_{n-1}^p(x)$ la familia de *probabilidades*

$$(\mathcal{P}_{u,x})_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

dadas por las aplicaciones anteriores y las funciones de densidad definidas para cada $w \in W_{n-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n-1}(x_m)$ por

$$f_x^u(w) = \frac{f^u(x/w)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w)\,dV}\,.$$

Proposición 2.7 *La funciones anteriores f_x^u están bien definidas.*

Demostración. Puesto que

$$\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f_x^u(w)\,dV = \int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} \frac{f^u(x/w)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w)\,dV}\,dV$$

$$= \frac{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w)\,dV}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w)\,dV} = 1$$

y

$$f_x^u(w) = \frac{f^u(x/w)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w)\,dV} \geq 0$$

para cada $w \in W_{n-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n-1}(x_m)$. $\square$

Proposición 2.8 *La función de densidad parcial respecto de la función de densidad uniforme es uniforme y para cada* $W_{n-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n-1}(x_m)$

$$f_x^u(w) = \frac{((n-2)!)^m}{(\sqrt{n-1})^m \, (1-x_1)^{n-2} \cdot \ldots \cdot (1-x_m)^{n-2}} \, .$$

Demostración. Ya que

$$f_x^u(w) = \frac{f^u(x/w)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w)\, dV} = \frac{\left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} \left(\frac{(n-1)!}{\sqrt{n}}\right)^m dV} =$$

$$\frac{1}{\int_{W_{n-1}(x_1)} dV^1 \cdot \ldots \cdot \int_{W_{n-1}(x_m)} dV^m} = \frac{((n-2)!)^m}{(\sqrt{n-1})^m \, (1-x_1)^{n-2} \cdot \ldots \cdot (1-x_m)^{n-2}} \, ,$$

puesto que

$$\int_{W_{n-1}(x_j)} dV^j = \sqrt{n-1} \int_0^{1-x} \ldots \int_0^{1-x_j-w_1-\ldots-w_{n-1}} (dw_1 \ldots dw_{n-2})\, dw_{n-1} =$$

$$\sqrt{n-1} \int_0^{1-x} \ldots \int_0^{1-x_j-w_1-\ldots-w_{n-2}} (1-x_j)\, (dw_1 \ldots dw_{n-3})\, dw_{n-2} =$$

$$\sqrt{n-1} \int_0^{1-x} \ldots \int_0^{1-x_j-w_1-\ldots-w_{n-3}} \frac{1}{2}(1-x_j)^2 \, (dw_1 \ldots dw_{n-4})\, dw_{n-3} = \ldots = \frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\, (1-x_j)^{n-2}$$

para cada $j = 1, \ldots, m$. □

Proposición 2.9 *Para cada* $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $x \in [0,1]^p$

$$\aleph_x^u = T_1 \circ \aleph^u \circ F_x \, .$$

Demostración. Puesto que

$$\aleph_x^u(w) = T_1\left(\aleph^u(x/w)\right) = T_1\left(\aleph^u(F_x(w))\right) = (T_1 \circ \aleph^u \circ F_x)(x)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$. □

Proposición 2.10 $\aleph_x^u$ *es un vector aleatorio, para cada* $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $x \in [0,1]^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.2, 2.3 y 2.9. □

Ejemplo 2.11 Si consideramos el ejemplo 1.11, tenemos que

$$\aleph_{(0.4,0.1)}^{(0.6,0.4)} \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} = T_1 \left(\aleph^{(0.6,0,4)} \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \right) =$$

$$T_1\big((0.4,0.3,0.2,0.1),(0.1,0.2,0.3,0.4)\big) = \big((0.3,0.2,0.1),(0.2,0.3,0.4)\big) \, .$$

Definición 2.12 Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$, denominamos **expectativa electoral** del vector de pesos $u \in \overline{U_p}$ y el vector de votos $x \in [0,1]^p$ a la aplicación

$$E_x^u : W_{n-1}^p(x) \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$

definida para cada $w \in W_{n-1}^p(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$ por

$$E_x^u(w,k) = R_1^u((x/w),k)\,.$$

Proposición 2.13 *Cualquier otra forma de definir*

$$E_x^u\,,$$

pero añadiendo el vector de votos x de cualquier otro modo, es igual casi seguro a la aplicación E_x^u definida anteriormente.

Demostración. Por el axioma de imparcialidad. □

Proposición 2.14 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $w \in W_{n-1}^p(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$0 \leq E_x^u(w,k) \leq k\,.$$

Demostración. Por definición. □

Proposición 2.15 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_{n-1}^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$E_{(0,\ldots,0)}^u(w,k) = 0\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$E_{(1,\ldots,1)}^u(0,k) = k\,,$$

donde 0 *es la matriz nula.*

(c) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$

$$E_x^u(w,0) = 0\,.$$

Demostración. (a) Consecuencia inmediata del axioma del voto nulo, teniendo en cuenta que $W_{n-1}^p(0,\ldots,0) = W_{n-1}^p$.

(b) Consecuencia inmediata de 1.17, teniendo en cuenta que $W_{n-1}^p(1,\ldots,1) = \{(0,\ldots,0)\}$.

(c) Consecuencia inmediata de 1.17. □

Definición 2.16 Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$, denominamos **expectativa electoral relativa** del vector de pesos $u \in \overline{U_p}$ y el vector de votos $x \in [0,1]^p$ a la aplicación

$$e_x^u : W_{n-1}^p(x) \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$

definida por

$$e_x^u(w,k) = \begin{cases} \dfrac{E_x^u(w,k)}{k}\,, & \text{si } k > 0\,, \\ 1\,, & \text{si } x = (1,\ldots,1) \text{ y } k = 0\,, \\ 0\,, & \text{si } x \neq (1,\ldots,1) \text{ y } k = 0\,, \end{cases}$$

para cada $w \in W_{n-1}^p(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.17 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$*

$$e_x^u(w,k) = r_1^u((x/w),k)$$

para cada $w \in W_{n-1}^p(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$

$$0 \leq e_x^u(w,k) \leq 1$$

para cada $w \in W_{n-1}^p(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición anterior y de 2.14. □

Proposición 2.18 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_{n-1}^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$e_{(0,\ldots,0)}^u(w,k) = 0\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$e_{(1,\ldots,1)}^u(0,k) = 1\,,$$

donde 0 *es la matriz nula.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.15. □

Ejemplo 2.19 Como hemos visto en el ejemplo 2.1, dada la matriz $w \in W_3(0.4, 0.1)$ correspondiente a la tabla

		i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.2	0.3	0.4

se obtiene la matriz $w \in W_4$ dada por la tabla

		i=1	i=2	i=3	i=4
j=1	0.6	0.4	0.3	0.2	0.1
j=2	0.4	0.1	0.2	0.3	0.4

Entonces, si consideramos el sistema electoral del ejemplo 1.14 que asignaba todos los representantes a la candidatura de mayor voto en la circunscripción de peso mayor

$$R_i^u(w,k) = \begin{cases} k\,, & \text{si } \ u_j > u_{j'} \ \text{ para cada } \ j' \neq j \quad \text{y} \quad w_i^j > w_h^j \ \text{ para cada } \ h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$, la tabla de representantes obtenida era

i=1	i=2	i=3	i=4
k	0	0	0

En consecuencia, se obtiene que

$$E_{(0.4,0.1)}^{(0.6,0.4)}(w,k) = k$$

y, en particular,

$$e_{(0.4,0.1)}^{(0.6,0.4)}(w,k) = 1\,.$$

Teorema 2.20 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^p$*

$$\aleph_i^u(w) = \aleph_{w_i}^u(w_{w_i}) \ .$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$

$$R_i^u(w,k) = E_{w_i}^u(w_{w_i},k) \ .$$

(c) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$

$$r_i^u(w,k) = e_{w_i}^u(w_{w_i},k) \, .$$

Demostración. (a) Puesto que, por la simetría de las funciones de recuento parciales,

$$\aleph_i^u(w,k) = \aleph_1^u(w_i, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n) = \aleph_{w_i}^u(w_{w_i})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^p$.

(b) Ya que, por el axioma de imparcialidad,

$$R_i^u(w,k) = R_1^u\left((w_i, w_1, \ldots, w_{i-1}, w_{i+1}, \ldots, w_n), k\right) = E_{w_i}^u(w_{w_i},k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

(c) Dado que

$$r_i^u(w,k) = \frac{R_i^u(w,k)}{k} = \frac{E_{w_i}^u(w_{w_i},k)}{k} = e_{w_i}^u(w_{w_i},k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$. □

Observación 2.21 Las familias de funciones de recuento y reglas electorales

$$(\aleph^u)_{u\in\overline{U_p}} \qquad \text{y} \qquad (R^u)_{u\in\overline{U_p}}$$

determinan las familias de funciones de recuento parciales y expectativas electorales

$$(\aleph_x^u)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p} \qquad \text{y} \qquad (E_x^u)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p} \, .$$

Y, recíprocamente, las familias de funciones de recuento parciales y expectativas electorales

$$(\aleph_x^u)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p} \qquad \text{y} \qquad (E_x^u)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

determinan casi seguro $w \in W_n^p$ las familias de funciones de recuento parciales y reglas electorales

$$(\aleph^u)_{u\in\overline{U_p}} \qquad \text{y} \qquad (R^u)_{u\in\overline{U_p}} \, .$$

Y análogamente con las reglas electorales relativas y la expectativas electorales relativas.

Asimismo, denotaremos por $E_x^{u,k}$ a la aplicación

$$E_x^{u,k} : W_{n-1}^p(x) \longrightarrow \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$$

obtenida a partir de E_x^u fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$

$$E_x^{u,k}(w) = E_x^u(w,k)\,.$$

Proposición 2.22 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$E_x^{u,k} = R_1^{u,k} \circ F_x\,.$$

Demostración. Puesto que

$$E_x^{u,k}(w) = E_x^u(w,k) = R_1^u((x/w),k) = R_1^{u,k}(x/w) = R_1^{u,k}\left(F_x(w)\right) = \left(R_1^{u,k} \circ F_x\right)(w)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 2.23 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$E_x^{u,k}$$

es una variable aleatoria.

Demostración. Por 2.22, teniendo en cuenta que $R_1^{u,k}$ y F_x son medibles. □

Asimismo, denotaremos por $e_x^{u,k}$ a la aplicación

$$e_x^{u,k} : W_{n-1}^p(x) \longrightarrow \mathbb{R}$$

obtenida a partir de e_x^u fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$.

$$e_x^{u,k}(w) = e_x^u(w,k)\,.$$

Proposición 2.24 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$e_x^{u,k}$$

es una variable aleatoria.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.23. □

Proposición 2.25 *En los sistemas electorales ordinales, si x es el h–ésimo voto de (x/w)*

$$E_x(w,k) = c_h(k)$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.33. □

Corolario 2.26 *(a) En el sistema electoral mayoritario puro,*

$$E_x(w,k) = \begin{cases} k\,, & \text{si } x > w_i \text{ para cada } i = 1,\ldots,n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } x < w_i \text{ para algún } i = 1,\ldots,n-1\,, \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

(b) En el sistema electoral igualitario puro,

$$E_x(w,k) = \begin{cases} \left[\frac{k}{n}\right] + 1\,, & \text{si } x \text{ es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } (x/w)\,, \\ \left[\frac{k}{n}\right]\,, & \text{si } x \text{ no es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } (x/w)\,, \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Proposición 2.27 *En los sistemas electorales ordinales, si x es el h–ésimo voto de (x/w)*

$$e_x(w,k) = \frac{c_h(k)}{k}$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.35. □

Corolario 2.28 *(a) En el sistema electoral mayoritario puro,*

$$e_x(w,k) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } x > w_i \text{ para cada } i = 1,\ldots,n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } x < w_i \text{ para algún } i = 1,\ldots,n-1\,, \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

(b) En el sistema electoral igualitario puro,

$$e_x(w,k) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{k}{n}\right] + 1}{k}\,, & \text{si } x \text{ es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } (x/w)\,, \\ \dfrac{\left[\frac{k}{n}\right]}{k}\,, & \text{si } x \text{ no es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos mayores de } (x/w)\,, \end{cases}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Observación 2.29 La expectativa relativa del sistema mayoritario puro no depende de k.

Proposición 2.30 *En los sistemas electorales de cuotas con*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] ,$$

$$E_x(w,k) = \begin{cases} \left[\dfrac{x}{q_k}\right] + 1\,, & \textit{si } \dfrac{x}{q_k} - \left[\dfrac{x}{q_k}\right] \textit{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \left[\dfrac{x}{q_k}\right], & \textit{si } \dfrac{x}{q_k} - \left[\dfrac{x}{q_k}\right] \textit{ no es uno de los restos mayores}\,, \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.45. □

Corolario 2.31 *En el sistema electoral de los mayores restos,*

$$E_x(w,k) = \begin{cases} [kx] + 1\,, & \textit{si } kx - [kx] \textit{ es uno de los mayores restos}\,, \\ [kx]\,, & \textit{si } kx - [kx] \textit{ no es uno de los restos mayores}\,, \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Proposición 2.32 *En los sistemas electorales de cuotas con*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] ,$$

$$e_x(w,k) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{x}{q_k}\right] + 1}{k}, & \textit{si } \dfrac{x}{q_k} - \left[\dfrac{x}{q_k}\right] \textit{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \dfrac{\left[\frac{x}{q_k}\right]}{k}, & \textit{si } \dfrac{x}{q_k} - \left[\dfrac{x}{q_k}\right] \textit{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.47. □

Corolario 2.33 *En el sistema electoral de los mayores restos,*

$$e_x(w,k) = \begin{cases} \dfrac{[kx] + 1}{k}, & \textit{si } kx - [kx] \textit{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \dfrac{[kx]}{k}, & \textit{si } kx - [kx] \textit{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Proposición 2.34 *En los sistemas electorales de divisores con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$E_x(w,k) = \left[g^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right],$$

para cada $x \in [0,1]$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.62. □

Corolario 2.35 *En los sistemas electorales de divisores lineales con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, *existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$E_x(w,k) = \left[\frac{x}{x_0} - s\right],$$

para cada $x \in [0,1]$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}(x)$.

Proposición 2.36 *En los sistemas electorales de divisores con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$e_x(w,k) = \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]}{k},$$

para cada $x \in [0,1]$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.64. □

Corolario 2.37 *En los sistemas electorales de divisores lineales con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, *existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$e_x(w,k) = \frac{\left[\frac{x}{x_0} - s\right]}{k},$$

para cada $x \in [0,1]$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}(x)$.

Consideremos ahora un sistema electoral y su extensión media

$$(N, \aleph, R) \qquad \text{y} \qquad (N, \hat{\aleph}, \hat{R})$$

asociados a $(P, \mathcal{P})$ y $(\hat{P}, \hat{\mathcal{P}})$, respectivamente.

Dados $u \in \overline{U_{zp}}$, $x \in [0,1]^{zp}$ y $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$, consideremos el vector

$$\hat{x}^* = (u_1^* x_1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* x_{(z-1)p+1}, \ldots, u_p^* x_p + \ldots + u_{zp}^* x_{zp}) \in [0,1]^p$$

y la matriz

$$\hat{w}^* = \begin{pmatrix} u_1^* w_1^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_1^{(z-1)p+1} & \ldots & u_p^* w_1^p + \ldots + u_{zp}^* w_1^{zp} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^* w_{n-1}^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_{n-1}^{(z-1)p+1} & \ldots & u_p^* w_{n-1}^p + \ldots + u_{zp}^* w_{n-1}^{zp} \end{pmatrix} \in W_{n-1}^p(x)\,.$$

En particular, para los sistemas electorales medios tenemos

$$\hat{x} = u_1 x_1 + \ldots + u_p x_p \in [0,1]$$

y

$$\hat{w} = (u_1 w_1^1 + \ldots + u_p w_1^p, \ldots, u_1 w_{n-1}^1 + \ldots + u_p w_{n-1}^p) \in W_{n-1}(x)\,.$$

Proposición 2.38 *Para $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$*

$$\widehat{(x/w)}^* = (\hat{x}^*/\hat{w}^*)\,.$$

Demostración. Puesto que

$$\widehat{(x/w)}^* = \begin{pmatrix} u_1^* x_1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* x_{(z-1)p+1} & \ldots & u_p^* x_p + \ldots + u_{zp}^* x_{zp} \\ u_1^* w_1^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_1^{(z-1)p+1} & \ldots & u_p^* w_1^p + \ldots + u_{zp}^* w_1^{zp} \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^* w_{n-1}^1 + \ldots + u_{(z-1)p+1}^* w_{n-1}^{(z-1)p+1} & \ldots & u_p^* w_{n-1}^p + \ldots + u_{zp}^* w_{n-1}^{zp} \end{pmatrix} = (\hat{x}^*/\hat{w}^*)$$

para $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$. □

Corolario 2.39 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$*

$$\widehat{(x/w)} = (\hat{x}/\hat{w})\,.$$

Proposición 2.40 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$*

$$\hat{\aleph}^u_x(w) = \aleph^{u_+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*)$$

para cada $w \in W^{zp}_{n-1}(x)$.

Demostración. Puesto que, por 2.38,

$$\hat{\aleph}^u_x(w) = T_1\left(\hat{\aleph}^u(x/w)\right) = T_1\left(\aleph^{u_+}\left(\widehat{(x/w)}^*\right)\right) = T_1\left(\aleph^{u_+}(\hat{x}^*/\hat{w}^*)\right) = \aleph^{u_+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in W^{zp}_{n-1}(x)$. □

Corolario 2.41 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$*

$$\hat{\aleph}_x(w) = \aleph_{\hat{x}}(\hat{w})$$

para cada $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Proposición 2.42 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$*

$$\hat{f}^u_x(w) = f^{u_+}_{\hat{x}^*}(w)$$

para cada $w \in W_{n-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n-1}(x_m)$.

Demostración. Puesto que, por 1.79,

$$\hat{f}^u_x(w) = \frac{\hat{f}^u(x/w)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\overset{(m)}{\cdots}\times W_{n-1}(x_m)} \hat{f}^u(x/w)\, dV} =$$

$$\frac{f^{u_+}(\hat{x}^*/w)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\overset{(m)}{\cdots}\times W_{n-1}(x_m)} f^{u_+}(\hat{x}^*/w)\, dV} = f^{u_+}_{\hat{x}^*}(w)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in W_{n-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n-1}(x_m)$. □

Corolario 2.43 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$*

$$\hat{f}^u_x(w) = f_{\hat{x}}(w)\,.$$

para cada $w \in W_{n-1}(x)$.

Proposición 2.44 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$*

$$\hat{E}^u_x(w,k) = E^{u+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*,k)$$

para cada $w \in W^{zp}_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Puesto que, por 2.38,

$$\hat{E}^u_x(w,k) = \hat{R}^u_1((x/w),k) = R^{u+}_1\left(\widehat{(x/w)}^*, k\right) = R^{u+}_1\left((\hat{x}^*/\hat{w}^*),k\right) = E^{u+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$, cada $w \in W^{zp}_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Corolario 2.45 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$*

$$\hat{E}^u_x(w,k) = E_{\hat{x}}(\hat{w},k)$$

para cada $w \in W^p_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.46 *Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$*

$$\hat{e}^u_x(w,k) = e^{u+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*,k)$$

para cada $w \in W^{zp}_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado que

$$\hat{e}^u_x(w,k) = \frac{\hat{E}^u_x(w,k)}{k} = \frac{E^{u+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*,k)}{k} = e^{u+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$, cada $w \in W^{zp}_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Corolario 2.47 *Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$*

$$\hat{e}^u_x(w,k) = e_{\hat{x}}(\hat{w},k)$$

para cada $w \in W^p_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.48 *En los sistemas ordinales medios, si $\hat{x}$ es el h–ésimo voto de $(\hat{x}/\hat{w})$*

$$\hat{E}^u_x(w,k) = c_j(k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.25 y 2.45. □

Corolario 2.49 *(a) En el sistema mayoritario puro medio,*

$$\hat{E}_x^u(w,k) = \begin{cases} k\,, & \text{si } \hat{x} > \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1,\dots,n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{x} < \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1,\dots,n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

(b) En el sistema igualitario puro medio,

$$\hat{E}_x^u(w,k) = \begin{cases} \left[\frac{k}{n}\right] + 1\,, & \text{si } \hat{x} \text{ es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos medios mayores de } (\hat{x}/\hat{w})\,, \\ \left[\frac{k}{n}\right]\,, & \text{si } \hat{x} \text{ no es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos medios mayores de } (\hat{x}/\hat{w})\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 2.50 *En los sistemas ordinales medios, si $\hat{x}$ es el h–ésimo voto de $(\hat{x}/\hat{w})$*

$$\hat{e}_x^u(w,k) = \frac{c_j(k)}{k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.27 y 2.45. □

Corolario 2.51 *(a) En el sistema mayoritario puro medio,*

$$\hat{e}_x^u(w,k) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{x} > \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1,\dots,n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{x} < \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1,\dots,n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

(b) En el sistema igualitario puro medio,

$$\hat{e}_x^u(w,k) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{k}{n}\right] + 1}{k}\,, & \text{si } \hat{x} \text{ es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos medios mayores de } (\hat{x}/\hat{w})\,, \\ \dfrac{\left[\frac{k}{n}\right]}{k}\,, & \text{si } \hat{x} \text{ no es uno de los } k - n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ votos medios mayores de } (\hat{x}/\hat{w})\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Observación 2.52 La expectativa electoral relativa del sistema mayoritario puro medio no depende de k.

Proposición 2.53 *En los sistemas de cuotas medios con*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] ,$$

$$\hat{E}^u_x(w,k) = \begin{cases} \left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] + 1\,, & \textit{si } \dfrac{\hat{x}}{q_k} - \left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] \textit{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right]\,, & \textit{si } \dfrac{\hat{x}}{q_k} - \left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] \textit{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.30 y 2.45. □

Corolario 2.54 *En el sistema de los mayores restos medios,*

$$E^u_x(w,k) = \begin{cases} [k\hat{x}] + 1\,, & \textit{si } k\hat{x} - [k\hat{x}] \textit{ es uno de los mayores restos}\,, \\ [k\hat{x}]\,, & \textit{si } k\hat{x} - [k\hat{x}] \textit{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Proposición 2.55 *En los sistemas de cuotas medios con*

$$q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right] ,$$

$$\hat{e}^u_x(w,k) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] + 1}{k}\,, & \textit{si } \dfrac{\hat{x}}{q_k} - \left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] \textit{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \dfrac{\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right]}{k}\,, & \textit{si } \dfrac{\hat{x}}{q_k} - \left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] \textit{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.32 y 2.45. □

Corolario 2.56 *En el sistema de los mayores restos medios,*

$$e^u_x(w,k) = \begin{cases} \dfrac{[k\hat{x}] + 1}{k}\,, & \textit{si } k\hat{x} - [k\hat{x}] \textit{ es uno de los mayores restos}\,, \\ \dfrac{[k\hat{x}]}{k}\,, & \textit{si } k\hat{x} - [k] \textit{ no es uno de los mayores restos}\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Proposición 2.57 *En los sistemas de divisores medios con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{E}_x^u(w,k) = \left[g^{-1}\left(\frac{\hat{x}}{x_0}\right)\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.34 y 2.45. □

Corolario 2.58 *En los sistemas de divisores lineales medios con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, *existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{E}_x^u(w,k) = \left[\frac{\hat{x}}{x_0} - s\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 2.59 *En los sistemas de divisores medios con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{e}_x^u(w,k) = \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{x}}{x_0}\right)\right]}{k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.36 y 2.45. □

Corolario 2.60 *En los sistemas de divisores lineales medios con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, *existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{e}_x^u(w,k) = \frac{\left[\frac{\hat{x}}{x_0} - s\right]}{k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Consideremos ahora unos sistemas electorales

$$(N, \aleph^1, R^1), \ldots, (N, \aleph^z, R^z)$$

asociados a $(P^1, \mathcal{P}^1), \ldots, (P^z, \mathcal{P}^z)$ respectivamente, y su suma respecto de uno simple $(Z, \aleph^0, R^0)$

$$(N, \aleph^+, R^+)$$

asociada a $(P, \mathcal{P}^+)$.

Dados $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$, consideremos para cada $j \in Z$ el vector

$$x_j = (x_{p_1+\ldots+p_{j-1}+1}, \ldots, x_{p_1+\ldots+p_j}) \in [0,1)^{p_j}$$

y la matriz

$$w^j = \begin{pmatrix} w_1^{p_1+\ldots+p_{j-1}+1} & \ldots & w_1^{p_1+\ldots+p_j} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1}^{p_1+\ldots+p_{j-1}+1} & \ldots & w_{n-1}^{p_1+\ldots+p_j} \end{pmatrix} \in W_{n-1}^{p_j}(x)\,.$$

En particular, en los sistemas electorales suma x_j es la componente j–ésima del vector x y w^j la columna j–ésima de la matriz w para cada $j \in P$

$$w^j = \begin{pmatrix} w_1^j \\ \vdots \\ w_{n-1}^j \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.61 *Para cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$ y cada $j \in Z$*

$$(x/w)^j = (x_j/w^j)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$(x/w)^j = \begin{pmatrix} x_{p_1+\ldots+p_{j-1}+1} & \ldots & x_{p_1+\ldots+p_j} \\ w_1^{p_1+\ldots+p_{j-1}+1} & \ldots & w_1^{p_1+\ldots+p_j} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-1}^{p_1+\ldots+p_{j-1}+1} & \ldots & w_{n-1}^{p_1+\ldots+p_j} \end{pmatrix} = (x_j/w^j)\,,$$

para cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$ y cada $j \in Z$. □

Corolario 2.62 *Para cada $x \in [0,1]^p$, cada $w \in W_{n-1}^p(x)$ y cada $j \in P$*

$$(x/w)^j = (x_j/w^j)\,.$$

Proposición 2.63 *Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$*

$$(\aleph^+)^u_x(w) = \left((\aleph^1)^{u_1^*}_{x_1}(w^1), \ldots, (\aleph^z)^{u_z^*}_{x_z}(w^z)\right) .$$

Demostración. Ya que, por 2.61,

$$(\aleph^+)^u_x(w) = T_1\left((\aleph^+)^u(x/w)\right) = T_1\left((\aleph^1)^{u_1^*}((x/w)^1), \ldots, (\aleph^z)^{u_z^*}((x/w)^z)\right) =$$

$$T_1\left((\aleph^1)^{u_1^*}(x_1/w^1), \ldots, (\aleph^z)^{u_z^*}(x_z/w^z)\right) = \left((\aleph^1)^{u_1^*}_{x_1}(w^1), \ldots, (\aleph^z)^{u_z^*}_{x_z}(w^z)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$. □

Corolario 2.64 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$.*

$$(\aleph^+)^u_x(w) = \left(\aleph^1_{x_1}(w^1), \ldots, \aleph^p_{x_p}(w^p)\right) .$$

Proposición 2.65 *Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in W_{n-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n-1}(x_{p_1+\ldots+p_z})$*

$$(f^+)^u_x(w) = (f^1)^{u_1^*}_{x_1}(w^1) \cdot \ldots \cdot (f^z)^{u_z^*}_{x_z}(w^z) .$$

Demostración. Puesto que, por 1.126,

$$(f^+)^u_x(w) = \frac{f^u(x/w)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots W_{n-1}(x_{p_1+\ldots+p_z})} f^u(x/w)\, dV} =$$

$$\frac{(f^1)^{u_1^*}(x_1/w^1) \cdot \ldots \cdot (f^z)^{u_z^*}(x_z/w^z)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_{p_1+\ldots+p_z})} (f^1)^{u_1^*}(x_1/w^1) \cdot \ldots \cdot (f^z)^{u_z^*}(x_z/w^z)\, dV} =$$

$$\frac{(f^1)^{u_1^*}(x_1/w^1)}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_{p_1})} (f^1)^{u_1^*}(x_1/w^1)\, dV^1} \cdot \ldots \cdot$$

$$\frac{(f^z)^{u_z^*}(x_z/w^z)}{\int_{W_{n-1}(x_{p_1+\ldots+p_{z-1}+1})\times\ldots\times W_{n-1}(x_{p_1+\ldots+p_z})} (f^z)^{u_z^*}(x_z/w^z)\, dV^z} = (f^1)^{u_1^*}_{x_1}(w^1) \cdot \ldots \cdot (f^z)^{u_z^*}_{x_z}(w^z)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_{p_1+\ldots+p_z})$. □

Corolario 2.66 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n-1}(x_p)$*

$$(f^+)^u_x(w) = f^1_{x_1}(w^1) \cdot \ldots \cdot f^p_{x_p}(w^p) .$$

Observación 2.67 Es interesante remarcar que la función de densidad suma y la función de recuento parcial suma no dependen del vector de votos u considerado.

Proposición 2.68 *(a) Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$(E^+)_x^u(w,k) = (E^1)_{x_1}^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (E^z)_{x_z}^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) .$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$(e^+)_x^u(w,k) = r_1^0(u^+,k)\cdot(e^1)_{x_1}^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + r_z^0(u^+,k)\cdot(e^z)_{x_z}^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) .$$

Demostración. (a) Ya que, por 2.61,

$$\begin{aligned}(E^+)_x^u(w,k) &= (R^+)_1^u((x/w),k) = (R^1)_1^{u_1^*}\left((x/w)^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_1^{u_z^*}\left((x/w)^z, R_z^0(u^+,k)\right)\\ &= (R^1)_1^{u_1^*}\left((x_1/w^1), R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (R^z)_1^{u_z^*}\left((x_z/w^z), R_z^0(u^+,k)\right)\\ &= (E^1)_{x_1}^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (E^z)_{x_z}^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right)\end{aligned}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Dado que

$$(e^+)_x^u(w,k) = \frac{(E^+)_x^u(w,k)}{k} = \frac{(E^1)_{x_1}^{u_1^*}(w^1, R_1^0(u^+,k)) + \ldots + (E^z)_{x_z}^{u_z^*}(w^z, R_z^0(u^+,k))}{k} =$$

$$\frac{R_1^0(u^+,k)}{k}\cdot\frac{(E^1)_{x_1}^{u_1^*}(w^1, R_1^0(u^+,k))}{R_1^0(u^+,k)} + \ldots + \frac{R_z^0(u^+,k)}{k}\cdot\frac{(E^z)_{x_z}^{u_z^*}(w^z, R_z^0(u^+,k))}{R_z^0(u^+,k)} =$$
$$r_1^0(u^+,k)\cdot(e^1)_{x_1}^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + r_z^0(u^+,k)\cdot(e^z)_{x_z}^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$, puesto que si

$$k = 0 \qquad \text{o} \qquad R_j^0(u^+,k) = 0$$

para algún $j \in Z$ entonces las correspondientes fracciones son 0 por la propia definición de expectativa electoral relativa y se sigue cumpliendo la igualdad. □

Observación 2.69 La fórmula anterior puede escribirse matricialmente en la forma

$$(e^+)_x^u(w,k) = \begin{pmatrix} (e^1)_{x_1}^{u_1^*}(w^1, R_1^0(u^+,k)) & \ldots & (e^z)_{x_z}^{u_z^*}(w^z, R_z^0(u^+,k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^0(u^+,k) \\ \vdots \\ r_z^0(u^+,k) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$, cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Corolario 2.70 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $w \in W^p_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$(E^+)^u_x(w,k) = E^1_{x_1}(w^1, R^0_1(u,k)) + \ldots + E^p_{x_p}(w^p, R^0_p(u,k)) .$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $w \in W^p_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$(e^+)^u_x(w,k) = r^0_1(u,k) \cdot e^1_{x_1}\left(w^1, R^0_1(u,k)\right) + \ldots + r^0_p(u,k) \cdot e^p_{x_p}\left(w^p, R^0_p(u,k)\right) .$$

Observación 2.71 La fórmula anterior puede escribirse matricialmente en la forma

$$(e^+)^u_x(w,k) = \begin{pmatrix} e^1_{x_1}(w^1, R^0_1(u,k)) & \ldots & e^p_{x_p}(w^p, R^0_p(u,k)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^0_1(u,k) \\ \vdots \\ r^0_p(u,k) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $w \in W^p_{n-1}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.72 *(a) Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$(E^1)^{u^*_1, R^0_1(u^+,k)}_{x_1}, \ldots, (E^z)^{u^*_z, R^0_z(u^+,k)}_{x_z}$$

son variables aleatorias independientes.

(b) Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$(e^1)^{u^*_1, R^0_1(u^+,k)}_{x_1}, \ldots, (e^z)^{u^*_z, R^0_z(u^+,k)}_{x_z}$$

son variables aleatorias independientes.

Demostración. Por 2.63. □

Corolario 2.73 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$(E^1)^{R^0_1(u,k)}_{x_1}, \ldots, (E^p)^{R^0_p(u,k)}_{x_p}$$

son variables aleatorias independientes.

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$(e^1)^{R^0_1(u,k)}_{x_1}, \ldots, (e^p)^{R^0_p(u,k)}_{x_p}$$

son variables aleatorias independientes.

Proposición 2.74 *En los sistemas ordinales suma, si x_j es el h_j-ésimo voto de (x_j/w^j)*
$$(E^+)^u_x(w,k)=\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_j}(R^0_j(u,k))$$
para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\in[0,1]^p$, cada $k\in\mathbb{N}$ y casi seguro $w\in W^p_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.25 y 2.70. □

Corolario 2.75 *(a) En el sistema mayoritario puro suma, si H es el conjunto de circunscripciones donde x_j es el mayor voto de (x_j/w^j)*
$$(E^+)^u_x(w,k)=\sum_{j\in H} c^j_{h_j}(R^0_j(u,k))$$
para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\in[0,1]^p$, cada $k\in\mathbb{N}$ y casi seguro $w\in W^p_{n-1}(x)$.

(b) En el sistema igualitario puro suma, si h es el número de circunscripciones donde x_j es uno de los $k-n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de (x_j/w^j)
$$(E^+)^u_x(w,k)=h+p\left[\frac{k}{n}\right]$$
para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\in[0,1]^p$, cada $k\in\mathbb{N}$ y casi seguro $w\in W^p_{n-1}(x)$.

Proposición 2.76 *En los sistemas ordinales suma, si x_j es el h_j–ésimo voto de (x_j/w^j)*
$$(e^+)^u_x(w,k)=\sum_{j=1}^{p}\frac{c^j_{h_j}(R^0_j(u,k))}{k}=\sum_{j=1}^{p} r^0_j(u,k)\cdot\frac{c^j_{h_j}(R^0_j(u,k))}{R^0_j(u,k)}$$
para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\in[0,1]^p$, cada $k\in\mathbb{N}$ y casi seguro $w\in W^p_{n-1}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.27 y 2.70. □

Corolario 2.77 *(a) En el sistema mayoritario puro suma, si H es el conjunto de circunscripciones donde x_j es el mayor voto de (x_j/w^j)*
$$(e^+)^u_x(w,k)=\sum_{j\in H}\frac{c^j_{h_j}(R^0_j(u,k))}{k}=\sum_{j\in H} r^0_j(u,k)\cdot\frac{c^j_{h_j}(R^0_j(u,k))}{R^0_j(u,k)}$$
para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\in[0,1]^p$, cada $k\in\mathbb{N}$ y casi seguro $w\in W^p_{n-1}(x)$.

(b) En el sistema igualitario puro suma, si h es el número de circunscripciones en las que x_j es uno de los $k-n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de (x_j/w^j)
$$(e^+)^u_x(w,k)=\frac{h+p\left[\frac{k}{n}\right]}{k}=r^0_j(u,k)\cdot\frac{h+p\left[\frac{k}{n}\right]}{R^0_j(u,k)}$$
para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\in[0,1]^p$, cada $k\in\mathbb{N}$ y casi seguro $w\in W^p_{n-1}(x)$.

Proposición 2.78 *En los sistemas de cuotas suma con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$*, si* h *es el número de circunscripciones donde* $\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}} - \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]$ *es uno de los mayores restos*

$$(E^+)_x^u(w,k) = h + \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.30 y 2.70. □

Corolario 2.79 *En el sistema de los mayores restos suma, si* h *es el número de circunscripciones donde* $R_j^0(u,k)x_j - [R_j^0(u,k)x_j]$ *es uno de los mayores restos*

$$(E^+)_x^u(w,k) = h + \sum_{j=1}^{p} \left[R_j^0(u,k)x_j\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$*.*

Proposición 2.80 *En los sistemas de cuotas suma con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$*, si* h *es el número de circunscripciones donde* $\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}} - \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]$ *es uno de los mayores restos*

$$(e^+)_x^u(w,k) = \frac{h + \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k} = r_j^0(u,k) \cdot \frac{h}{R_j^0(u,k)} + \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.32 y 2.70. □

Corolario 2.81 *En el sistema de los mayores restos suma, si* h *es el número de circunscripciones donde* $R_j^0(u,k)x_j - [R_j^0(u,k)x_j]$ *es uno de los mayores restos*

$$(e^+)_x^u(w,k) = \frac{h + \sum_{j=1}^{p} \left[R_j^0(u,k)x_j\right]}{k} = r_j^0(u,k) \cdot \frac{h}{R_j^0(u,k)} + \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[R_j^0(u,k)x_j\right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$*.*

Proposición 2.82 *En los sistemas de divisores suma con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, existe $x_0^j \in (0,1)$ para cada $j \in P$ tal que*

$$(E^+)_x^u(w,k) = \sum_{j=1}^{p} \left[g^{-1}\left(\frac{x_j}{x_0^j} \right) \right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.34 y 2.70. □

Corolario 2.83 *En los sistemas de divisores lineales suma con $g_d = d + s$ y $s > -1$, existe $x_0^j \in (0,1)$ para cada $j \in P$ tal que*

$$(E^+)_x^u(w,k) = \sum_{j=1}^{p} \left[\frac{x_j}{x_0^j} - s \right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 2.84 *En los sistemas de divisores suma con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, existe $x_0^j \in (0,1)$ para cada $j \in P$ tal que*

$$(e^+)_x^u(w,k) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{x_j}{x_0^j} \right) \right]}{k} = \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{x_j}{x_0^j} \right) \right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.36 y 2.70. □

Corolario 2.85 *En los sistemas de divisores lineales suma con $g_d = d + s$ y $s > -1$, existe $x_0^j \in (0,1)$ para cada $j \in P$ tal que*

$$(e^+)_x^u(w,k) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\left[\frac{x_j}{x_0^j} - s \right]}{k} = \sum_{j=1}^{p} r_j^0(u,k) \cdot \frac{\left[\frac{x_j}{x_0^j} - s \right]}{R_j^0(u,k)}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Consideremos ahora un sistema electoral asociado a $(P, \mathcal{P})$

$$(N, \aleph, R)$$

y su sistema electoral inducido asociado igualmente a $(P, \mathcal{P})$

$$(N', \aleph', R') .$$

Dada $w \in W^p_{n'-1}(x)$, consideremos la matriz

$$w' = \begin{pmatrix} w_1^1 & \dots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{n'-1} & \dots & w_{n'-1}^p \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in W^p_{n-1}(x) .$$

Proposición 2.86 *Para cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $w \in W^p_{n'-1}(x)$

$$(x/w)' = (x/w') .$$

Demostración. Puesto que

$$(x/w)' = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \\ w_1^1 & \dots & w_1^p \\ \vdots & & \vdots \\ w_1^{n'-1} & \dots & w_{n'-1}^p \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (x/w')$$

para cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$. □

Proposición 2.87 *Para cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $w \in W^p_{n'-1}(x)$

$$(\aleph')^u_x(w) = \aleph^u_x(w') .$$

Demostración. Puesto que, por 2.86,

$$(\aleph')^u_x(w) = T_1\left((\aleph')^u(x/w)\right) = T_1\left(\aleph^u((x/w)')\right) = T_1\left(\aleph^u(x/w')\right) = \aleph^u_x(w')$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$. □

Proposición 2.88 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n'-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n'-1}(x_m)$*

$$(f')^u_x(w) = \frac{f^u_x(w')}{\int_{W_{n'-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_p)} f^u_x(w')\, dV}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Ya que

$$(f')^u_x(w) = \frac{(f')^u(x/w)}{\int_{W_{n'-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n'-1}(x_m)} (f')^u(x/w)\, dV} =$$

$$\frac{\dfrac{f^u((x/w)')}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u((x/w)')\, dV}}{\int_{W_{n'-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} \dfrac{f^u((x/w)')}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u((x/w)')\, dV}\, dV} =$$

$$\frac{\dfrac{f^u(x/w')}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f(x/w')\, dV}}{\dfrac{\int_{W_{n'-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w')\, dV}{\int_{W_{n-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w')\, dV}} =$$

$$\frac{f^u(x/w')}{\int_{W_{n'-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u(x/w')\, dV} = \frac{f^u_x(w')}{\int_{W_{n'-1}(x_1)\times\ldots\times W_{n-1}(x_m)} f^u_x(w')\, dV}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n'-1}(x_1) \times \ldots \times W_{n'-1}(x_m)$. □

Proposición 2.89 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$*

$$(E')^u_x(w,k) = E^u_x(w',k)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Dado que, por 2.86,

$$(E')^u_x(w,k) = (R')^u_1((x/w),k) = R^u_1((x/w)',k) = R^u_1\,((x/w'),k) = E^u_x(w',k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$. □

Proposición 2.90 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$*

$$(e')^u_x(w,k) = e^u_x(w',k)\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Puesto que

$$(e')^u_x(w,k) = \frac{(E')^u_x(w,k)}{k} = \frac{E^u_x(w',k)}{k} = e^u_x(w',k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$. □

2.2 Recorrido de una expectativa electoral

Dado que las aplicaciones $E_x^{u,k}$ y $e_x^{u,k}$ proporcionan las diferentes posibilidades que se le presentan a una candidatura cualquiera, será interesante ocuparse del conjunto de dichas posibilidades o **recorrido**, que notaremos respectivamente,

$$\mathrm{Im}\ E_x^{u,k} \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{Im}\ e_x^{u,k}\,.$$

Proposición 2.91 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Im}\ e_x^{u,k} = \frac{\mathrm{Im}\ E_x^{u,k}}{k}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición. □

Proposición 2.92 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Im}\ E_{(0,\ldots,0)}^{u,k} = \{0\} \qquad e \qquad \mathrm{Im}\ e_{(0,\ldots,0)}^{u,k} = \{0\}\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\ E_{(1,\ldots,1)}^{u,k} = \{k\} \qquad e \qquad \mathrm{Im}\ e_{(1,\ldots,1)}^{u,k} = \{1\}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 2.15 y 2.18. □

Debido a este resultado, excluimos los casos $x = (0,\ldots,0)$ y $x = (1,\ldots,1)$ de las siguientes proposiciones.

Proposición 2.93 *En los sistemas ordinales, el recorrido de E_x^k es*

$$\begin{cases} \{c_2(k),\ldots,c_n(k)\}\,, & si\ \ 0 < x < \dfrac{1}{n}\,,\\ \{c_2(k),\ldots,c_n(k)\}\ \ o\ \ \{c_1(k),\ldots,c_n(k)\}\,, & si\ \ x = \dfrac{1}{n}\,,\\ \{c_1(k),\ldots,c_s(k)\}\,, & si\ \ \dfrac{1}{s+1} < x < \dfrac{1}{s} \quad para\ \ s = 1,\ldots,n-1\,,\\ \{c_1(k),\ldots,c_{s-1}(k)\}\ \ o\ \ \{c_1(k),\ldots,c_s(k)\}\,, & si\ \ x = \dfrac{1}{s} \ \ para\ \ s = 2,\ldots,n-1\,, \end{cases}$$

para cada $x \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. *Primer caso:* $0 < x < \dfrac{1}{n}$.

Entonces existe $i \in N$ tal que

$$w_i > \frac{1}{n}$$

puesto que, en caso contrario, la suma de todos los votos sería menor que 1. Por tanto,

$$E_x^k(w_1, \ldots, w_{n-1}) \neq c_1(k)\,.$$

Y como para cada $h = 1, \ldots, n-1$ tomando

$$w_1 = \ldots = w_h = \frac{1-x}{h} \qquad \text{y} \qquad w_{h+1} = \ldots = w_{n-1} = 0$$

es

$$w_1 = \ldots = w_h > x > w_{h+1} = \ldots = w_{n-1}$$

se tiene que efectivamente

$$E_x^k(w_1, \ldots, w_{n-1}) = c_{h+1}(k)\,.$$

Segundo caso: $\dfrac{1}{s+1} < x < \dfrac{1}{s}$ con $s = 1, \ldots, n-1$.

Entonces, tomando igualmente

$$w_1 = \ldots = w_h = \frac{1-x}{h} \qquad \text{y} \qquad w_{h+1} = \ldots = w_{n-1} = 0$$

para cada $h = 1, \ldots, s-1$, tenemos de nuevo que

$$w_1 = \ldots = w_h > x > w_{h+1} = \ldots = w_{n-1}$$

por lo que se tiene asimismo

$$E_x^k(w_1, \ldots, w_{n-1}) = c_{h+1}(k)\,.$$

Y si tomamos

$$w_1 = \ldots = w_{n-1} = \frac{1-x}{n-1}$$

entonces

$$x > w_1 = \ldots = w_{n-1}$$

con lo que

$$E_x^k(w_1, \ldots, w_{n-1}) = c_1(k)$$

y el recorrido resulta ser, pues, el conjunto

$$\{c_1(k), \ldots, c_s(k)\}\,.$$

Tercer caso: $x = \dfrac{1}{n}$ y $x = \dfrac{1}{s}$ con $i = 2, \ldots, n-1$.

Entonces se dan las situaciones anteriores igualmente, pero con desigualdades en sentido amplio, con lo que el que se produzca una posibilidad u otra depende del criterio de desempate previamente establecido. □

Corolario 2.94 *(a) En el sistema mayoritario puro, el recorrido de E_x^k es*

$$\begin{cases} \{0\}\,, & \text{si } 0 < x < \dfrac{1}{n}\,, \\ \{0\} \text{ o } \{0,k\}\,, & \text{si } x = \dfrac{1}{n}\,, \\ \{0,k\}\,, & \text{si } \dfrac{1}{n} < x < \dfrac{1}{2}\,, \\ \{0,k\} \text{ o } \{k\}, & \text{si } x = \dfrac{1}{2}\,, \\ \{k\}\,, & \text{si } \dfrac{1}{2} < x < 1\,, \end{cases}$$

para cada $x \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) En el sistema igualitario puro, el recorrido de E_x^k es

$$\left\{ \left[\frac{k}{n}\right], \left[\frac{k}{n}\right] + 1 \right\}\,,$$

para cada $x \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.95 *En los sistemas de cuotas con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, el recorrido de E_x^k es el conjunto*

$$\left\{ \left[\frac{x}{q_k}\right], \left[\frac{x}{q_k}\right] + 1 \right\}$$

para cada $x \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.45. □

Corolario 2.96 *En el sistema de los mayores restos, el recorrido de E_x^k es el conjunto*

$$\{[kx], [kx]+1\}\,,$$

para cada $x \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.97 *En los sistemas de divisores con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, si*

$$c \in \mathrm{Im}\ E_x^k$$

entonces existen $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{N}$ tales que $c_1 + \ldots + c_{n-1} = k - c$ y

$$g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\ \left(g_{c_1} + \ldots + g_{c_{n-1}}\right)\right) - 1 \leq c \leq g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\ \left(g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_{n-1}+1}\right)\right)$$

para cada $x \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Puesto que si $c \in E_x^k$ entonces, por 1.66, existen un vector de votos

$$(w_1, \ldots, w_{n-1}) \in W_{n-1}(x)$$

y unos números $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{N}$ tales que

$$c_1 + \ldots + c_{n-1} = k - c$$

para los que se verifica

$$\frac{x}{g_{c+1}} \leq \frac{w_1}{g_{c_1}}, \ldots, \frac{x}{g_{c+1}} \leq \frac{w_{n-1}}{g_{c_{n-1}}}$$

y

$$\frac{w_1}{g_{c_1+1}} \leq \frac{x}{g_c}, \ldots, \frac{w_{n-1}}{g_{c_{n-1}+1}} \leq \frac{x}{g_c}\,,$$

de lo que se deduce que

$$\frac{g_{c_1}}{g_{c+1}}\,x \leq w_1 \leq \frac{g_{c_1+1}}{g_c}\,x, \ldots, \frac{g_{c_{n-1}}}{g_{c+1}}\,x \leq w_{n-1} \leq \frac{g_{c_{n-1}+1}}{g_c}\,x$$

que, sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta que

$$w_1 + \ldots + w_{n-1} = 1 - x\,,$$

se convierte en

$$\frac{x}{g_{c+1}}\ \left(g_{c_1} + \ldots + g_{c_{n-1}}\right) \leq 1 - x \leq \frac{x}{g_c}\ \left(g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_{n-1}+1}\right)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{x}{1-x}\ \left(g_{c_1} + \ldots + g_{c_{n-1}}\right) \leq g_{c+1} \qquad \text{y} \qquad g_c \leq \frac{x}{1-x}\ \left(g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_{n-1}+1}\right)\,,$$

es decir,

$$g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\ \left(g_{c_1} + \ldots + g_{c_{n-1}}\right)\right) - 1 \leq c \leq g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\ \left(g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_{n-1}+1}\right)\right)$$

para cada $x \in (0,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 2.98 *En los sistemas de divisores lineales con $g_d = d + s$ y $s > -1$, el recorrido de E_x^k está contenido en el intervalo cerrado*

$$[(k + ns + 1)x - (s + 1), (k + n(s + 1) - 1)x - s]$$

para cada $x \in (0, 1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ya que en este caso tenemos que

$$g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_{n-1}+1} = k - c + (n - 1)(s + 1)$$

y

$$g_{c_1} + \ldots + g_{c_{n-1}} = k - c + (n - 1)s$$

para cada $c_1, \ldots, c_{n-1}$ tales que $c_1 + \ldots + c_{n-1} = k - c$. Por tanto,

$$g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\left(g_{c_1} + \ldots + g_{c_{n-1}}\right)\right) - 1 = \frac{x}{1-x}\left(k - c + (n - 1)s\right) - s - 1$$

y

$$g^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\left(g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_{n-1}+1}\right)\right) = \frac{x}{1-x}\left(k - c + (n - 1)(s + 1)\right) - s$$

y la condición queda

$$\frac{x}{1-x}\left(k - c + (n - 1)s\right) - s - 1 \leq c \leq \frac{x}{1-x}\left(k - c + (n - 1)(s + 1)\right) - s\,,$$

que equivale a

$$x\left(k - c + (n - 1)s\right) - (s + 1)(1 - x) \leq c(1 - x) \leq x\left(k - c + (n - 1)(s + 1)\right) - s(1 - x)\,.$$

Entonces, desarrollando, se convierte en

$$kx - cx + nsx - sx - s - 1 + sx + x \leq c - cx \leq x\,kx - cx + nsx - sx + nx - x - s + sx$$

y, simplificando, se obtiene

$$(k + ns + 1)x - (s + 1) \leq c \leq x\,(k + n(s + 1) - 1)x - s$$

para cada $x \in (0, 1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Ejemplo 2.99 Consideremos el sistema electoral de Hondt con $n = 4$ candidaturas y $k = 4$ representantes a elegir. Entonces, para el voto $x = 0.3$ por ejemplo, obtenemos el intervalo

$$[(4 + 1) \cdot 0.3 - 1, (4 + 4 - 1) \cdot 0.3] = [0.5, 2.1]$$

y se concluye que a una candidatura cualquiera con dicho voto le pueden corresponder únicamente 1 o 2 representantes.

Proposición 2.100 *En los sistemas ordinales, el recorrido de e_x^k es*

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{c_2(k)}{k},\dots,\dfrac{c_n(k)}{k}\right\}, & \textit{si } 0<x<\dfrac{1}{n}, \\ \left\{\dfrac{c_2(k)}{k},\dots,\dfrac{c_n(k)}{k}\right\} \ \textit{o} \ \left\{\dfrac{c_1(k)}{k},\dots,\dfrac{c_n(k)}{k}\right\}, & \textit{si } x=\dfrac{1}{n}, \\ \left\{\dfrac{c_1(k)}{k},\dots,\dfrac{c_s(k)}{k}\right\}, & \textit{si } \dfrac{1}{s+1}<x<\dfrac{1}{s} \ \textit{para } s=1,\dots,n-1, \\ \left\{\dfrac{c_1(k)}{k},\dots,\dfrac{c_{s-1}(k)}{k}\right\} \ \textit{o} \ \left\{\dfrac{c_1(k)}{k},\dots,\dfrac{c_s(k)}{k}\right\}, & \textit{si } x=\dfrac{1}{s} \ \textit{para } s=2,\dots,n-1, \end{cases}$$

para cada $x\in(0,1)$ y cada $k\in\mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.93. □

Corolario 2.101 *(a) En el sistema mayoritario puro, el recorrido de e_x^k es*

$$\begin{cases} \{0\}, & \textit{si } 0<x<\dfrac{1}{n}, \\ \{0\} \ \textit{o} \ \{0,1\}, & \textit{si } x=\dfrac{1}{n}, \\ \{0,1\}, & \textit{si } \dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{2}, \\ \{0,1\} \ \textit{o} \ \{1\}, & \textit{si } x=\dfrac{1}{2}, \\ \{1\}, & \textit{si } \dfrac{1}{2}<x<1, \end{cases}$$

para cada $x\in(0,1)$ y cada $k\in\mathbb{N}$.

(b) En el sistema igualitario puro, el recorrido de e_x^k es

$$\left\{\frac{\left[\dfrac{k}{n}\right]}{k}, \frac{\left[\dfrac{k}{n}\right]+1}{k}\right\},$$

para cada $x\in(0,1)$ y cada $k\in\mathbb{N}$.

Proposición 2.102 *En los sistemas de cuotas con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$*, el recorrido de* e_x^k *es el conjunto*

$$\left\{ \frac{\left[\dfrac{x}{q_k}\right]}{k}, \frac{\left[\dfrac{x}{q_k}\right]+1}{k} \right\}$$

para cada $x \in (0,1)$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.95. □

Corolario 2.103 *En el sistema de los mayores restos, el recorrido de* e_x^k *es el conjunto*

$$\left\{ \frac{[kx]}{k}, \frac{[kx]+1}{k} \right\},$$

para cada $x \in (0,1)$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.104 *En los sistemas de divisores con* $(g_d)_{d\geq 1}$ *estrictamente creciente, si*

$$c \in \mathrm{Im}\ E_x^k$$

entonces existen $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{N}$ *tales que* $c_1 + \ldots + c_{n-1} = k - c$ *y*

$$\frac{g^{-1}\left(\dfrac{x}{1-x}\left(g_{c_1} + \ldots + g_{c_{n-1}}\right)\right) - 1}{k} \leq \frac{c}{k} \leq \frac{g^{-1}\left(\dfrac{x}{1-x}\left(g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_{n-1}+1}\right)\right)}{k}$$

para cada $x \in (0,1)$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.97. □

Proposición 2.105 *En los sistemas de divisores lineales con* $g_d = d + s$ *y* $s > -1$*, el recorrido de* e_x^k *está contenido en el intervalo cerrado*

$$\left[\frac{(k+ns+1)x-(s+1)}{k}, \frac{(k+n(s+1)-1)x-s}{k} \right]$$

para cada $x \in (0,1)$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.98. □

Proposición 2.106 *(a) Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Im}\ \hat{E}_x^{u,k} = \mathrm{Im}\ E_{\hat{x}^*}^{u_+,k}\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\ \hat{e}_x^{u,k} = \mathrm{Im}\ e_{\hat{x}^*}^{u_+,k}\,.$$

Demostración. (a) Ya que para cada natural $c \leq k$,

$$c \in \mathrm{Im}\ \hat{E}_x^{u,k}$$

si, y solo si, existe $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$ tal que

$$\hat{E}_x^{u,k}(w) = c\,,$$

que equivale a que exista $\hat{w}^* \in W_{n-1}^{p}(x)$ tal que

$$E_{\hat{x}^*}^{u_+,k}(\hat{w}^*) = c\,,$$

es decir, a que

$$c \in \mathrm{Im}\ E_{\hat{x}^*}^{u_+,k}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Puesto que, por 2.106,

$$\mathrm{Im}\ \hat{e}_x^{u,k} = \frac{\mathrm{Im}\ \hat{E}_x^{u,k}}{k} = \frac{\mathrm{Im}\ E_{\hat{x}^*}^{u_+,k}}{k} = \mathrm{Im}\ e_{\hat{x}^*}^{u_+,k}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 2.107 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^{p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Im}\ \hat{E}_x^{u,k} = \mathrm{Im}\ E_{\hat{x}}^{k}\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^{p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\ \hat{e}_x^{u,k} = \mathrm{Im}\ e_{\hat{x}}^{k}\,.$$

Proposición 2.108 *En los sistemas ordinales medios, el recorrido de $\hat{E}_x^{u,k}$ es*

$$\begin{cases} \{c_2(k),\dots,c_n(k)\}\,, & si\ \ 0<\hat{x}<\dfrac{1}{n}\,, \\ \{c_2(k),\dots,c_n(k)\}\ \ o\ \ \{c_1(k),\dots,c_n(k)\}\,, & si\ \ \hat{x}=\dfrac{1}{n}\,, \\ \{c_1(k),\dots,c_s(k)\}\,, & si\ \ \dfrac{1}{s+1}<\hat{x}<\dfrac{1}{s}\ \ \ para\ \ s=1,\dots,n-1\,, \\ \{c_1(k),\dots,c_{s-1}(k)\}\ \ o\ \ \{c_1(k),\dots,c_s(k)\}\,, & si\ \ \hat{x}=\dfrac{1}{s}\ \ para\ \ s=2,\dots,n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\neq(0,\dots,0),(1,\dots,1)$ y cada $k\in\mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.93 y 2.107. □

Corolario 2.109 *(a) En el sistema mayoritario puro medio, el recorrido de $\hat{E}_x^{u,k}$ es*

$$\begin{cases} \{0\}\,, & si\ \ 0<\hat{x}<\dfrac{1}{n}\,, \\ \{0\}\ \ o\ \ \{0,k\}\,, & si\ \ \hat{x}=\dfrac{1}{n}\,, \\ \{0,k\}\,, & si\ \ \dfrac{1}{n}<\hat{x}<\dfrac{1}{2}\,, \\ \{0,k\}\ \ o\ \ \{k\}\,, & si\ \ \hat{x}=\dfrac{1}{2}\,, \\ \{k\}\,, & si\ \ \dfrac{1}{2}<\hat{x}<1\,, \end{cases}$$

para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\neq(0,\dots,0),(1,\dots,1)$ y cada $k\in\mathbb{N}$.

(b) En el sistema igualitario puro medio, el recorrido de $\hat{E}_x^{u,k}$ es

$$\left\{\left[\frac{k}{n}\right],\left[\frac{k}{n}\right]+1\right\}\,,$$

para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\neq(0,\dots,0),(1,\dots,1)$ y cada $k\in\mathbb{N}$.

Proposición 2.110 *En los sistemas de cuotas medios con $q_k\in\left(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\right]$, el recorrido de $\hat{E}_x^{u,k}$ es el conjunto*

$$\left\{\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right],\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right]+1\right\}$$

para cada $u\in\overline{U_p}$, cada $x\neq(0,\dots,0),(1,\dots,1)$ y cada $k\in\mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.95 y 2.107. □

Corolario 2.111 *En el sistema de los mayores restos medio, el recorrido de $\hat{E}_x^{u,k}$ es el conjunto*

$$\{[k\hat{x}], [k\hat{x}] + 1\} ,$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.112 *En los sistemas de divisores medios con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, si*

$$c \in \text{Im } \hat{E}_x^{u,k}$$

entonces existen $c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{N}$ tales que $c_1 + \ldots + c_{n-1} = k - c$ y

$$g^{-1}\left(\frac{\hat{x}}{1-\hat{x}}\ \left(g_{c_1} + \ldots + g_{c_{n-1}}\right)\right) - 1 \leq c \leq g^{-1}\left(\frac{\hat{x}}{1-\hat{x}}\ \left(g_{c_1+1} + \ldots + g_{c_{n-1}+1}\right)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.97. □

Proposición 2.113 *En los sistemas de divisores lineales medios con $g_d = d + s$ y $s > -1$, el recorrido de $\hat{E}_x^{u,k}$ está contenido en el intervalo cerrado*

$$[(k + ns + 1)\hat{x} - (s + 1), (k + n(s + 1) - 1)\hat{x} - s]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.98 y 2.107. □

Ejemplo 2.114 En el sistema electoral de Hondt medio con $n = 4$ candidaturas, $p = 2$ circunscripciones y $k = 4$ representantes a elegir, dados los vectores de pesos $(0.6, 0.4)$ y votos $(0.2, 0.45)$ el voto medio es

$$0.6 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.45 = 0.3$$

y obtenemos el intervalo

$$[(4 + 1) \cdot 0.3 - 1, (4 + 4 - 1) \cdot 0.3] = [0.5, 2.1] ,$$

de lo que se concluye que los representantes posibles son 1 y 2.

Proposición 2.115 *En los sistemas ordinales medios, el recorrido de $\hat{e}_x^{u,k}$ es*

$$\begin{cases} \left\{\dfrac{c_2(k)}{k},\ldots,\dfrac{c_n(k)}{k}\right\}, & si \;\; 0<\hat{x}<\dfrac{1}{n}, \\ \left\{\dfrac{c_2(k)}{k},\ldots,\dfrac{c_n(k)}{k}\right\} \;\; o \;\; \left\{\dfrac{c_1(k)}{k},\ldots,\dfrac{c_n(k)}{k}\right\}, & si \;\; \hat{x}=\dfrac{1}{n}, \\ \left\{\dfrac{c_1(k)}{k},\ldots,\dfrac{c_s(k)}{k}\right\}, & si \;\; \dfrac{1}{s+1}<\hat{x}<\dfrac{1}{s} \;\; para \;\; s=1,\ldots,n-1, \\ \left\{\dfrac{c_1(k)}{k},\ldots,\dfrac{c_{s-1}(k)}{k}\right\} \;\; o \;\; \left\{\dfrac{c_1(k)}{k},\ldots,\dfrac{c_s(k)}{k}\right\}, & si \;\; \hat{x}=\dfrac{1}{s} \;\; para \;\; s=2,\ldots,n-1, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0,\ldots,0),(1,\ldots,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.100 y 2.107. □

Corolario 2.116 *(a) En el sistema mayoritario puro medio, el recorrido de $\hat{e}_x^{u,k}$ es*

$$\begin{cases} \{0\}, & si \;\; 0<\hat{x}<\dfrac{1}{n}, \\ \{0\} \;\; o \;\; \{0,1\}, & si \;\; \hat{x}=\dfrac{1}{n}, \\ \{0,1\}, & si \;\; \dfrac{1}{n}<\hat{x}<\dfrac{1}{2}, \\ \{0,1\} \;\; o \;\; \{1\}, & si \;\; \hat{x}=\dfrac{1}{2}, \\ \{1\}, & si \;\; \dfrac{1}{2}<\hat{x}<1, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0,\ldots,0),(1,\ldots,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) En el sistema igualitario puro medio, el recorrido de $\hat{e}_x^{u,k}$ es

$$\left\{ \frac{\left[\frac{k}{n}\right]}{k}, \frac{\left[\frac{k}{n}\right]+1}{k} \right\},$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0,\ldots,0),(1,\ldots,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.117 *En los sistemas de cuotas medios con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, el recorrido de $\hat{e}_x^{u,k}$ es el conjunto*

$$\left\{ \frac{\left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right]}{k}, \frac{\left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right]+1}{k} \right\}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0,\ldots,0),(1,\ldots,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.102 y 2.107. $\square$

Corolario 2.118 *En el sistema de los mayores restos medio, el recorrido de $\hat{e}_x^{u,k}$ es el conjunto*

$$\left\{ \frac{[k\hat{x}]}{k}, \frac{[k\hat{x}]+1}{k} \right\},$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0,\ldots,0),(1,\ldots,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.119 *En los sistemas de divisores medios con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, si*

$$c \in \operatorname{Im}\, \hat{e}_x^{u,k}$$

entonces existen $c_1,\ldots,c_{n-1} \in \mathbb{N}$ tales que $c_1+\ldots+c_{n-1} = k-c$ y

$$\frac{g^{-1}\left(\dfrac{\hat{x}}{1-\hat{x}}\,\left(g_{c_1}+\ldots+g_{c_{n-1}}\right)\right)-1}{k} \leq \frac{c}{k} \leq \frac{g^{-1}\left(\dfrac{\hat{x}}{1-\hat{x}}\,\left(g_{c_1+1}+\ldots+g_{c_{n-1}+1}\right)\right)}{k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0,\ldots,0),(1,\ldots,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.97 y 2.107. $\square$

Proposición 2.120 *En los sistemas de divisores lineales medios con $g_d = d+s$ y $s > -1$, el recorrido de $\hat{e}_x^{u,k}$ está contenido en el intervalo cerrado*

$$\left[\frac{(k+ns+1)\hat{x}-(s+1)}{k}, \frac{(k+n(s+1)-1)\hat{x}-s}{k}\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \neq (0,\ldots,0),(1,\ldots,1)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.98 y 2.107. $\square$

Proposición 2.121 *Para cada* $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$*, cada* $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\,(E^{+})_x^{u,k} = \mathrm{Im}\,(E^{1})_{x_1}^{u_1^*,R_1^0\left(u^+,k\right)} + \ldots + \mathrm{Im}\,(E^{z})_{x_z}^{u_z^*,R_z^0\left(u^+,k\right)}.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$*, cada* $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\,(e^{+})_x^{u,k} = r_1^0\left(u^+,k\right)\cdot \mathrm{Im}\,(e^{1})_{x_1}^{u_1^*,R_1^0(u^+,k)} + \ldots + r_z^0\left(u^+,k\right)\cdot \mathrm{Im}\,(e^{z})_{x_z}^{u_z^*,R_z^0(u^+,k)}.$$

Demostración. (a) Puesto que para cada natural $c \leq k$,

$$c \in \mathrm{Im}\,(E^{+})_x^{u,k}$$

si, y sólo si, existe $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$ tal que

$$(E^{+})_x^{u,k}(w) = c\,,$$

que equivale a que existan $w^1 \in W_{p_1}^{n-1}(x_1), \ldots, w^z \in W_{p_z}^{n-1}(x_z)$ y $c^1, \ldots, c^z \in \mathbb{N}$ con $c^1 + \ldots + c^z = c$ tales que

$$(E^{1})_{x_1}^{u_1^*,R_1^0\left(u^+,k\right)}(w^1) = c^1, \ldots, (E^{z})_{x_z}^{u_z^*,R_z^0\left(u^+,k\right)}(w^z) = c^z\,,$$

es decir,

$$c^1 \in \mathrm{Im}\,(E^{1})_{x_1}^{u_1^*,R_1^0\left(u^+,k\right)}, \ldots, c^z \in \mathrm{Im}\,(E^{z})_{x_z}^{u_z^*,R_z^0\left(u^+,k\right)}$$

o, lo que es lo mismo,

$$c \in \mathrm{Im}\,(E^{1})_{x_1}^{u_1^*,R_1^0\left(u^+,k\right)} + \ldots + \mathrm{Im}\,(E^{z})_{x_z}^{u_z^*,R_z^0\left(u^+,k\right)}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Ya que, por 2.121, para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\,(e^{+})_x^{u,k} = \frac{\mathrm{Im}\,(E^{+})_x^{u,k}}{k} = \frac{\mathrm{Im}\,(E^{1})_{x_1}^{u_1^*,R_1^0\left(u^+,k\right)} + \ldots + \mathrm{Im}\,(E^{z})_{x_z}^{u_z^*,R_z^0\left(u^+,k\right)}}{k} =$$
$$\frac{R_1^0\,(u^+,k)}{k}\cdot\frac{\mathrm{Im}\,(E^{1})_{x_1}^{u_1^*,R_1^0\left(u^+,k\right)}}{R_1^0\,(u^+,k)} + \ldots + \frac{R_z^0\,(u^+,k)}{k}\cdot\frac{\mathrm{Im}\,(E^{z})_{x_z}^{u_z^*,R_z^0\left(u^+,k\right)}}{R_z^0\,(u^+,k)} =$$
$$r_1^0\left(u^+,k\right)\cdot \mathrm{Im}\,(e^{1})_{x_1}^{u_1^*,R_1^0(u^+,k)} + \ldots + r_z^0\left(u^+,k\right)\cdot \mathrm{Im}\,(e^{z})_{x_z}^{u_z^*,R_z^0(u^+,k)}\,,$$

ya que si

$$k = 0 \qquad \text{o} \qquad R_j^0(u^+,k) = 0$$

para algún $j \in Z$ entonces las correspondientes fracciones son 0 por la propia definición de expectativa electoral relativa y se sigue cumpliendo asimismo la igualdad. □

Corolario 2.122 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Im}\,(E^+)_x^{u,k} = \mathrm{Im}\,(E^1)_{x_1}^{R_1^0(u,k)} + \ldots + \mathrm{Im}\,(E^p)_{x_p}^{R_p^0(u,k)}.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\,(e^+)_x^{u,k} = r_1^0(u,k) \cdot \mathrm{Im}\,(e^1)_{x_1}^{R_1^0(u,k)} + \ldots + r_p^0(u,k) \cdot \mathrm{Im}\,(e^p)_{x_p}^{R_p^0(u,k)}.$$

Proposición 2.123 *En los sistemas ordinales suma, el recorrido de $(E^+)_x^{u,k}$ está contenido en el intervalo cerrado*

$$\left[\sum_{x_j \le \frac{1}{n}} c_2^j(R_j^0(u,k)) + \sum_{x_j > \frac{1}{n}} c_1^j(R_j^0(u,k)), \ldots, \sum_{j=1}^{p} c_i^j(R_j^0(u,k))\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.93 y 2.122. □

Corolario 2.124 *(a) En el sistema mayoritario puro suma, el recorrido de $(E^+)_x^{u,k}$ está contenido en el conjunto*

$$\left\{\sum_{j \in H} R_j^0(u,k) : H \subseteq P\right\}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) En el sistema igualitario puro suma, el recorrido de $(E^+)_x^{u,k}$ es

$$\left\{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right], h + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right]\right\}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.125 *En los sistemas de cuotas suma con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, el recorrido de $(E^+)_x^{u,k}$ está contenido en el intervalo*

$$\left[\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right], h + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]\right],$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.95 y 2.122. □

Corolario 2.126 *En el sistema de los mayores restos suma, el recorrido de* $(E^{+})_x^{u,k}$ *es el intervalo*

$$\left[\sum_{j=1}^{p}[(R_j^0(u,k))\,x_j], p+\sum_{j=1}^{p}[(R_j^0(u,k))\,x_j]\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.127 *En los sistemas de divisores suma con* $(g_d)_{d\geq 1}$ *estrictamente creciente, si*

$$c \in \operatorname{Im}(e^{+})_x^{u,k}$$

entonces existen $c^1,\ldots,c^z \in \mathbb{N}$ *tales que* $c^1+\ldots+c^z = c$ *y existen* $c_1^j,\ldots,c_{n-1}^j \in \mathbb{N}$ *tales que* $c_1^j+\ldots+c_{n-1}^j = R_j^0(u,k)-c^j$ *para cada* $j \in Z$ *y*

$$g^{-1}\left(\frac{x_j}{1-x_j}\left(g_{c_1^j}+\ldots+g_{c_{n-1}^j}\right)\right)-1 \leq c^j \leq g^{-1}\left(\frac{x_j}{1-x_j}\left(g_{c_1^j+1}+\ldots+g_{c_{n-1}^j+1}\right)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.97. □

Proposición 2.128 *En los sistemas de divisores lineales suma con* $g_d = d+s$ *y* $s > -1$, *el recorrido de* $(E^{+})_x^{u,k}$ *está contenido en la suma de intervalos cerrados*

$$\sum_{j=1}^{p}\left[(R_j^0(u,k)+ns+1)x_j-(s+1), \left(R_j^0(u,k)+n(s+1)-1\right)x_j - s\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.98 y 2.122. □

Proposición 2.129 *En los sistemas ordinales suma, el recorrido de* $(e^{+})_x^{u,k}$ *está contenido en el intervalo cerrado*

$$\left[\sum_{x_j\leq\frac{1}{n}}\frac{c_2^j(R_j^0(u,k))}{k}+\sum_{x_j>\frac{1}{n}}\frac{c_1^j(R_j^0(u,k))}{k},\ldots,\sum_{j=1}^{p}\frac{c_i^j(R_j^0(u,k))}{k}\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.100 y 2.122. □

Corolario 2.130 *(a) En el sistema mayoritario puro suma, el recorrido de $(e^+)_x^{u,k}$ está contenido en el conjunto*

$$\left\{\sum_{j\in H} r_j^0(u,k) : H \subseteq P\right\}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) En el sistema igualitario puro suma, el recorrido de $(e^+)_x^{u,k}$ es

$$\left\{\frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right]}{k}, \frac{h+\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right]}{k}\right\}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.131 *En los sistemas de cuotas suma con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, el recorrido de $(e^+)_x^{u,k}$ está contenido en el intervalo*

$$\left[\sum_{j=1}^{p} \frac{\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}, h + \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}\right],$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.102 y 2.122. □

Corolario 2.132 *En el sistema de los mayores restos suma, el recorrido de $(e^+)_x^{u,k}$ es el intervalo*

$$\left[\sum_{j=1}^{p} \frac{[(R_j^0(u,k))\,x_j]}{k}, \frac{p+\sum_{j=1}^{p}[(R_j^0(u,k))\,x_j]}{k}\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 2.133 *En los sistemas de divisores suma con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, si*

$$c \in \operatorname{Im}(e^+)^{u,k}_x$$

entonces existen $c^1, \ldots, c^z \in \mathbb{N}$ tales que $c^1 + \ldots + c^z = c$ y existen $c^j_1, \ldots, c^j_{n-1} \in \mathbb{N}$ tales que $c^j_1 + \ldots + c^j_{n-1} = R^0_j(u,k) - c^j$ para $j \in Z$ y

$$\frac{g^{-1}\left(\dfrac{x_j}{1-x_j}\left(g_{c^j_1} + \ldots + g_{c^j_{n-1}}\right)\right) - 1}{k} \leq \frac{c^j}{k} \leq \frac{g^{-1}\left(\dfrac{x_j}{1-x_j}\left(g_{c^j_1+1} + \ldots + g_{c^j_{n-1}+1}\right)\right)}{k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.104 y 2.122. □

Proposición 2.134 *En los sistemas de divisores lineales suma con $g_d = d + s$ y $s > -1$, el recorrido de $(e^+)^{u,k}_x$ está contenido en la suma de intervalos cerrados*

$$\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{(R^0_j(u,k) + ns + 1)x_j - (s+1)}{k}, \frac{\left(R^0_j(u,k) + n(s+1) - 1\right)x_j - s}{k}\right]$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.105 y 2.122. □

Ejemplo 2.135 Supongamos el caso de $n = 4$ candidaturas, $p = 2$ circunscripciones con pesos 0.4 y 0.6 y $k = 6$ representantes a elegir, y supongamos que se aplica la regla de los mayores restos para repartir los representantes por circunscripciones y la de Hondt para repartirlos en cada una de ellas.

Entonces, dado que la regla de los mayores restos otorga 2 y 4 representantes a las circunscripciones, si consideramos el vector de votos

$$x = (x_1, x_2) = (0.4, 0.1)$$

el intervalo suma es

$$[(2+1)\cdot 0.4 - 1, (2+4-1)\cdot 0.4] + [(4+1)\cdot 0.1 - 1, (4+4-1)\cdot 0.1]$$
$$= [0.2, 2] + [-0.5, 0.7] = [-0.3, 2.7]$$

y por tanto, el número total obtenido oscilará entre 0 y 2 representantes, en función de los posibles votos del resto de candidaturas en las diferentes circunscripciones.

Proposición 2.136 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Im}\,(E')_x^{u,k} \subseteq \mathrm{Im}\; E_x^{u,k}\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\,(e')_x^{u,k} \subseteq \mathrm{Im}\; e_x^{u,k}\,.$$

Demostración. (a) Ya que para cada $c \leq k$,

$$c \in \mathrm{Im}\,(E')_x^{u,k}$$

si, y sólo si, existe $w \in W_{n'-1}^p(x)$ tal que

$$(E')_x^{u,k}(w) = c\,.$$

Y esto implica –pero no es equivalente– a que exista $w' \in W_{n-1}^p(x)$ tal que

$$E_x^{u,k}(w') = c\,,$$

es decir, a que

$$c \in \mathrm{Im}\; E_x^{u,k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Dado que

$$\mathrm{Im}\,(e')_x^{u,k} = \frac{\mathrm{Im}\,(E')_x^{u,k}}{k} \subseteq \frac{\mathrm{Im}\; E_x^{u,k}}{k} = \mathrm{Im}\; e_x^{u,k}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Observación 2.137 La inclusión no es, en general, igualdad puesto que la aplicación que a cada matriz $w \in W_{n'-1}^p(x)$ le asocia la matriz $w' \in W_{n-1}^p(x)$ es inyectiva pero no exhaustiva.

En particular, para los sistemas electorales simples tenemos:

Corolario 2.138 *(a) Para cada $x \in [0,1]$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathrm{Im}\,(E')_x^{k} \subseteq \mathrm{Im}\; E_x^{k}\,.$$

(b) Para cada $x \in [0,1]$ y cada $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{Im}\,(e')_x^{k} \subseteq \mathrm{Im}\; e_x^{k}\,.$$

2.3 Crecimiento parcial

Análogamente al crecimiento de un sistema electoral, cuando consideramos la misma idea pero sobre las expectativas electorales obtenemos el concepto de crecimiento parcial.

Definición 2.139 Diremos que el sistema electoral R es **parcialmente creciente** si, y sólo si, para cada $k, l \in \mathbb{N}$ la condición

$$k \leq l$$

implica

$$E_x^u(w,k) \leq E_x^u(w,l)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Observación 2.140 Observemos que la condición anterior no puede ser sustituida por la misma con r en lugar de R, ya que en un caso r se obtiene a partir de R dividiendo por k y en el otro por l.

Proposición 2.141 *El crecimiento implica el crecimiento parcial.*

Demostración. Puesto que dados $k, l \in \mathbb{N}$ arbitrarios tales que

$$k \leq l$$

entonces, por ser R creciente,

$$E_x^u(w,k) = R_1^u((x/w),k) \leq R_1^u((x/w),l) = E_x^u(w,l)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$. □

Proposición 2.142 *(a) Los sistemas ordinales son parcialmente crecientes.*

(b) Los sistemas de divisores son parcialmente crecientes.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.251, 1.253 y 2.141. □

Observación 2.143 Los sistemas de cuotas no son parcialmente crecientes en general, como se deduce de 1.252, teniendo en cuenta que el contraejemplo es igualmente válido con variaciones suficientemente pequeñas de los datos.

Proposición 2.144 *El crecimiento parcial implica el crecimiento casi seguro $w \in W_n^p$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que si $k, l \in \mathbb{N}$ son tales que

$$k \leq l$$

entonces, por 2.21 y ser R parcialmente creciente,

$$R_i^u(w,k) = E_{w_i}^u((\overset{(1)}{w^2}, \dots, \overset{(i)}{w^1}, \dots, w^n), k) \leq$$

$$E_{w_i}^u((\overset{(1)}{w^2}, \dots, \overset{(i)}{w^1}, \dots, w^n), l) = R_i^u(w,l)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y casi seguro $w \in W_n^p$. □

Proposición 2.145 *La extensión media de un sistema electoral parcialmente creciente es parcialmente creciente.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que si $k, l \in \mathbb{N}$ son tales que

$$k \leq l$$

entonces, por ser R parcialmente creciente,

$$\hat{E}_x^u(w,k) = E_{\hat{x}^*}^{u+}(\hat{w}^*, k) \leq E_{\hat{x}^*}^{u+}(\hat{w}^*, l) = \hat{E}_x^u(w,l)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$. □

Corolario 2.146 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples parcialmente crecientes son parcialmente crecientes.*

Proposición 2.147 *(a) Los sistemas ordinales medios son parcialmente crecientes.*

(b) Los sistemas de divisores medios son parcialmente crecientes.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.257 y 2.141. □

Observación 2.148 Los sistemas de cuotas medios no son parcialmente crecientes en general, como se ha visto ya en particular para el caso simple en 2.143.

Proposición 2.149 *La suma de sistemas electorales parcialmente crecientes respecto de uno simple creciente es parcialmente creciente.*

Demostración. Ya que si

$$k \leq l$$

entonces, por ser R^0 creciente, para cada $j \in Z$

$$R_j^0\left(u^+, k\right) \leq R_j^0\left(u^+, l\right) \ ,$$

para cada $u \in \overline{U_z}$. Y, por ser R^j parcialmente crecientes para cada $j \in Z$,

$$(E^+)_x^u(w,k) = (E^1)_{x_1}^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (E^z)_{x_z}^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,k)\right) \leq$$

$$(E^1)_{x_1}^{u_1^*}\left(w^1, R_1^0(u^+,l)\right) + \ldots + (E^z)_{x_z}^{u_z^*}\left(w^z, R_z^0(u^+,l)\right) = (E^+)_x^u(w,l)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in W_{n-1}^{p_1+\ldots+p_z}(x)$. □

Corolario 2.150 *Los sistemas electorales suma de sistemas electorales simples parcialmente crecientes respecto de uno simple creciente son parcialmente crecientes.*

Proposición 2.151 *(a) Los sistemas ordinales suma respecto de uno simple creciente son parcialmente crecientes.*

(b) Los sistemas de divisores suma respecto de uno simple creciente son parcialmente crecientes.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.261 y 2.141. □

Observación 2.152 Los sistemas de cuotas suma no son parcialmente crecientes en general, como se ha visto ya en particular para el caso simple en 2.143.

Proposición 2.153 *El crecimiento parcial es hereditario.*

Demostración. Puesto que si

$$k \leq l$$

entonces

$$(E')_x^u(w,k) = E_x^u(w',k) \leq E_x^u(w',l) = (E')_x^u(w,l)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n'-1}^p(x)$, por ser R parcialmente creciente. □

2.4 Estabilidad parcial

Cuando se considera la convergencia de las expectativas electorales se obtiene el concepto de estabilidad parcial y, en particular, los de mayoría, proporcionalidad e igualdad parciales.

Definición 2.154 Diremos que el sistema electoral R es **parcialmente estable** si, y sólo si, existe

$$\lim_{k\to\infty} e_x^u(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$. Y, en tal caso, a dicho límite lo denominaremos **índice de estabilidad parcial** y lo denotaremos

$$\bar{e}_x^u(w)\,.$$

Observación 2.155 Obsérvese que la estabilidad parcial equivale simplemente a la convergencia de las variables aleatorias discretas

$$e_x^{u,k} : W_{n-1}^p(x) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Y, en tal caso, tenemos la aplicación

$$\bar{e}_x^u : W_{n-1}^p(x) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Proposición 2.156 *$\bar{e}_x^u$ es una variable aleatoria.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, ya que las variables aleatorias $e_x^{u,k}$ están acotadas entre 0 y 1 por definición. □

Proposición 2.157 *(a) Si R es parcialmente estable entonces, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_{n-1}^p$*

$$\bar{e}_{(0,\dots,0)}^u(w) = 0\,;$$

(b) Si R es parcialmente estable entonces, para cada $u \in \overline{U_p}$

$$\bar{e}_{(1,\dots,1)}^u(0) = 1\,,$$

siendo 0 la matriz nula.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 2.18. □

Proposición 2.158 *La estabilidad implica la estabilidad parcial y los índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{e}_x^u(w) = \bar{r}_1^u(x/w)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Ya que, por ser R estable,

$$\bar{e}_x^u(w) = \lim_{k\to\infty} e_x^u(w,k) = \lim_{k\to\infty} r_1^u((x/w),k) = \bar{r}_1^u(x/w)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$. □

Proposición 2.159 *La estabilidad parcial implica la estabilidad casi seguro* $w \in W_n^p$ *y los índices de estabilidad son*

$$\bar{r}_i^u(w) = \bar{e}_{w^i}^u(w_{w^i})$$

para cada $i \in N$, *cada* $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $w \in W_n^p$.

Demostración. Puesto que, por 2.21 y ser R parcialmente estable,

$$\bar{r}_i^u(w) = \lim_{k\to+\infty} r_i^u(w,k) = \lim_{k\to+\infty} e_{w^i}^u(w_{w^i},k) = \bar{e}_{w^i}^u(w_{w^i})$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$. □

Observación 2.160 Por tanto, si un sistema electoral es estable la familia de aplicaciones

$$(\bar{r}^u)_{u\in\overline{U_p}}$$

determina la familia

$$(\bar{e}_x^u)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p}\,.$$

Y, recíprocamente, si un sistema electoral es parcialmente estable la familia de aplicaciones

$$(\bar{e}_x^u)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

determina la familia de aplicaciones

$$(\bar{r}^u)_{u\in\overline{U_p}}$$

casi seguro $w \in W_n^p$.

Proposición 2.161 *Los sistemas ordinales asintóticos son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{e}_x(w) = \bar{c}_h \,,$$

donde h es el orden del voto x entre los votos del vector (x/w).

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.270 y 2.158. □

Proposición 2.162 *Los sistemas de cuotas son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{e}_x(w) = x \,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.272 y 2.158. □

Proposición 2.163 *Los sistemas de divisores t–asintóticos son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{e}_x(w) = \frac{x^{1/t}}{x^{1/t} + w_1^{1/t} + \ldots + w_{n-1}^{1/t}} \,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.278 y 2.158. □

Ejemplo 2.164 Supongamos que aplicamos el sistema electoral simple de los divisores para $n = 4$ candidaturas con

$$g_d = d^2 \,.$$

Si consideramos, por ejemplo, los votos 0.1 i 0.4 y las tablas de valores

i=1	i=2	i=3
0.3	0.2	0.1

y

i=1	i=2	i=3
0.2	0.3	0.4

teniendo en cuenta el ejemplo 1.280, los índices de estabilidad parcial correspondientes son

$$\bar{e}_{0.4}(0.3, 0.2, 0.1) = 0.325 \qquad \text{y} \qquad \bar{e}_{0.1}(0.2, 0.3, 0.4) = 0.163 \,,$$

respectivamente.

Proposición 2.165 *La extensión media de un sistema electoral parcialmente estable es parcialmente estable y sus índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{\hat{e}}_x^u(w) = \bar{e}_{\hat{x}^*}^{u+}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, *cada* $x \in [0,1]^{zp}$ *y cada* $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$.

Demostración. Puesto que, por 2.44 y ser R parcialmente estable,

$$\bar{\hat{e}}_x^u(w) = \lim_{k\to\infty} \hat{e}_x^u(w,k) = \lim_{k\to\infty} e_{\hat{x}^*}^{u+}(\hat{w}^*,k) = \bar{e}_{\hat{x}^*}^{u+}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$. □

Corolario 2.166 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples parcialmente estables son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{\hat{e}}_x^u(w) = \bar{e}_{\hat{x}}(\hat{w})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 2.167 *Los sistemas ordinales medios asintóticos son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{\hat{e}}_x^u(w) = \bar{c}_h\,,$$

donde h *es el orden del voto* $\hat{x}$ *entre los votos del vector* $(\hat{x}/\hat{w})$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.161 y 2.166. □

Proposición 2.168 *Los sistemas de cuotas medios son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{\hat{e}}_x^u(w) = \hat{x}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.162 y 2.166. □

Proposición 2.169 *Los sistemas de divisores medios t–asintóticos son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$\bar{\hat{e}}_x^u(w) = \frac{\hat{x}^{1/t}}{\hat{x}^{1/t} + \hat{w}_1^{1/t} + \ldots + \hat{w}_{n-1}^{1/t}}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.163 y 2.166. □

Proposición 2.170 *La suma de sistemas electorales parcialmente estables respecto de uno simple estable es parcialmente estable y sus índices de estabilidad parcial son*

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \bar{r}^0_1(u^+) \cdot (\bar{e}^1)^{u_1^*}_{x_1}(w^1) + \ldots + \bar{r}^0_z(u^+) \cdot (\bar{e}^z)^{u_z^*}_{x_z}(w^z)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, *cada* $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ *y cada* $w \in W^{p_1+\ldots+p_z}_{n-1}(x)$.

Demostración. Puesto que, por 2.68 y ser R^0 estable y R^j parcialmente estable para cada $j \in Z$,

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \lim_{k\to\infty} (e^+)^u_x(w,k) =$$
$$\lim_{k\to\infty} \left(r^0_1(u^+,k) \cdot (\bar{e}^1)^{u_1^*}_{x_1} \left(w^1, R^0_1(u^+,k) \right) + \ldots + r^0_z(u^+,k) \cdot (\bar{e}^z)^{u_z^*}_{x_z} \left(w^z, R^0_z(u^+,k) \right) \right) =$$
$$\lim_{k\to\infty} r^0_1(u^+,k) \cdot \lim_{k\to\infty} (\bar{e}^1)^{u_1^*}_{x_1} \left(w^1, R^0_1(u^+,k) \right) + \ldots + \lim_{k\to\infty} r^0_z(u^+,k) \cdot \lim_{k\to\infty} (\bar{e}^z)^{u_z^*}_{x_z} \left(w^z, R^0_z(u^+,k) \right) =$$
$$\bar{r}^0_1(u^+) \cdot (\bar{e}^1)^{u_1^*}_{x_1}(w^1) + \ldots + \bar{r}^0_z(u^+) \cdot (\bar{e}^z)^{u_z^*}_{x_z}(w^z)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in W^{p_1+\ldots+p_z}_{n-1}(x)$. □

Observación 2.171 La fórmula anterior puede escribirse matricialmente en la forma

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \begin{pmatrix} (\bar{e}^1)^{u_1^*}_{x_1}(w^1) & \ldots & (\bar{e}^z)^{u_z^*}_{x_z}(w^z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}^0_1(u^+) \\ \vdots \\ \bar{r}^0_z(u^+) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in W^{p_1+\ldots+p_z}_{n-1}(x)$.

Corolario 2.172 *Los sistemas electorales suma de sistemas electorales simples parcialmente estables respecto de uno simple estable son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \bar{r}^0_1(u) \cdot \bar{e}^1_{x_1}(w^1) + \ldots + \bar{r}^0_p(u) \cdot \bar{e}^p_{x_p}(w^p)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Observación 2.173 La fórmula anterior puede escribirse matricialmente en la forma

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \begin{pmatrix} \bar{e}^1_{x_1}(w^1) & \ldots & \bar{e}^p_{x_p}(w^p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}^0_1(u) \\ \vdots \\ \bar{r}^0_p(u) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Proposición 2.174 *Los sistemas ordinales suma asintóticos respecto de uno simple estable son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \sum_{j=1}^{p} \bar{r}^0_j(u)\, \bar{c}^j_{h_j}$$

si x_j es el h_j–ésimo voto del vector (x_j/w^j) para cada $j \in P$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.161 y 2.172. □

Proposición 2.175 *Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple estable son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \sum_{j=1}^{p} \bar{r}^0_j(u)\, x_j\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.162 y 2.172. □

Proposición 2.176 *Los sistemas de divisores suma t–asintóticos respecto de uno simple estable son parcialmente estables y sus índices de estabilidad parcial son*

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \sum_{j=1}^{p} \bar{r}^0_j(u) \cdot \frac{x_j^{1/t}}{x_j^{1/t} + {w^j_1}^{1/t} + \ldots + {w^j_{n-1}}^{1/t}}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.163 y 2.172. □

Proposición 2.177 *La estabilidad parcial es hereditaria y*

$$(\bar{e}')^u_x(w) = \bar{e}^u_x(w')$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$.

Demostración. Ya que, por 2.89 y ser R parcialmente estable,

$$(\bar{e}')^u_x(w) = \lim_{k\to\infty} (e')^u_x(w,k) = \lim_{k\to\infty} e^u_x(w',k) = \bar{e}^u_x(w')$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$. □

2.4.1 Mayoría, proporcionalidad e igualdad parciales

Consideremos el conjunto

$$\overbrace{W^p_{n-1}}(x) = \left\{ w \in W^p_{n-1}(x) : \begin{array}{rl} \hat{x} > \hat{w}_i & \text{para cada } \ i = 1, \dots, n-1 \\ & \text{o} \\ \hat{x} < \hat{w}_i & \text{para algún } \ i = 1, \dots, n-1 \end{array} \right\}$$

y

$$\overline{W^p_{n-1}}(x) = \left\{ w \in W^p_{n-1}(x) : \quad \hat{w}_i \neq 0 \ \text{ para cada } \ i = 1, \dots, n-1 \right\} .$$

Definición 2.178 Un sistema electoral R es **parcialmente mayoritario** si, y sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overbrace{W^p_{n-1}(x)}$

$$\bar{e}^u_x(w) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \ \hat{x} > \hat{w}_i \ \text{ para cada } \ i = 1, \dots, n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \ \hat{x} < \hat{w}_i \ \text{ para algún } \ i = 1, \dots, n-1\,. \end{cases}$$

Observación 2.179 Es interesante observar que el valor del caso de mayoría parcial definido anteriormente es la expectativa del sistema mayoritario puro medio vista en 2.51 que, como se observó en 2.52, no dependía de k.

Definición 2.180 Un sistema electoral R es **parcialmente proporcional** si, y sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n-1}(x)$

$$\bar{e}^u_x(w) = \hat{x}\,.$$

Definición 2.181 Un sistema electoral R es **parcialmente igualitario** si, y sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overline{W^p_{n-1}(x)}$

$$\bar{e}^u_x(w) = \frac{1}{n}\,.$$

Proposición 2.182 *Los sistemas electorales mayoritarios e igualitarios son parcialmente estables casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ para cada $x \in [0,1]^p$; y los proporcionales, parcialmente estables.*

Demostración. Puesto que las condiciones anteriores se verifican en $W^p_{n-1}(x) - \overbrace{W^p_{n-1}(x)}$, $W^p_{n-1}(x) - \overline{W^p_{n-1}(x)}$ y $W^p_{n-1}(x)$ respectivamente. □

Proposición 2.183 *(a) La mayoría implica la mayoría parcial.*

(b) La proporcionalidad implica la proporcionalidad parcial.

(c) La igualdad implica la igualdad parcial.

Demostración. (a) Ya que, por 2.158 y ser R mayoritario,

$$\bar{e}^u_x(w) = \bar{r}^u_1(x/w) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \ \hat{x} > \hat{w}_i \ \text{ para cada } \ i = 1, \ldots, n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \ \hat{x} < \hat{w}_i \ \text{ para algún } \ i = 1, \ldots, n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \widehat{W^p_{n-1}(x)}$.

(b) Puesto que, por 2.158 y ser R proporcional,

$$\bar{e}^u_x(w) = \bar{r}^u_1(x/w) = \hat{x}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n-1}(x)$.

(c) Dado que, por 2.158 y ser R igualitario,

$$\bar{e}^u_x(w) = \bar{r}^u_1(x/w) = \frac{1}{n}\,,$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overline{W^p_{n-1}(x)}$. □

Proposición 2.184 *(a) La mayoría parcial implica la mayoría casi seguro $w \in W^p_n$.*

(b) La proporcionalidad parcial implica la proporcionalidad casi seguro $w \in W^p_n$.

(c) La igualdad parcial implica la igualdad casi seguro $w \in W^p_n$.

Demostración. (a) Ya que, por 2.158 y ser R parcialmente mayoritario,

$$\bar{r}^u_i(w) = \bar{e}^u_{w^i}(w_{w^i}) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \ \hat{w}_i > \hat{w}_h \ \text{ para cada } \ h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \ \hat{w}_i < \hat{w}_h \ \text{ para algún } \ h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y casi seguro $w \in \widehat{W^p_n}$.

(b) Puesto que, por 2.158 y ser R parcialmente proporcional,

$$\bar{r}^u_i(w) = \bar{e}^u_{w^i}(w_{w^i}) = \hat{w}_i$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y casi seguro $w \in W^p_n$.

(c) Dado que, por 2.158 y ser R parcialmente igualitario,

$$\bar{r}_i^u(w) = \bar{e}_{w^i}^u(w_{w^i}) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y casi seguro $w \in \overline{W_n^p}$. □

Proposición 2.185 *(a) Los sistemas ordinales asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son parcialmente mayoritarios y parcialmente igualitarios, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas son parcialmente proporcionales.

(c) Los sistemas de divisores 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son parcialmente mayoritarios, parcialmente proporcionales y parcialmente igualitarios, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.299, 1.301, 1.303 y 2.183. □

Corolario 2.186 *(a) Los sistemas mayoritario puro e igualitario puros son parcialmente mayoritario y parcialmente igualitario, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos es parcialmente proporcional.

(c) Los sistemas de divisores lineales –y, en particular, el de Hondt– son parcialmente proporcionales.

Proposición 2.187 *(a) La extensión media de un sistema electoral parcialmente mayoritario es parcialmente mayoritaria.*

(b) La extensión media de un sistema electoral parcialmente proporcional es parcialmente proporcional.

(c) La extensión media de un sistema electoral parcialmente igualitario es parcialmente igualitaria.

Demostración. (a) Ya que, por 1.72 y 1.281 y ser R parcialmente mayoritario,

$$\bar{\bar{e}}_x^u(w) = \bar{e}_x^{u_+}(\hat{w}^*) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ \hat{x} = u_+ \cdot \hat{x}^* > u_+ \cdot \hat{w}_i^* = \hat{w}_i \ \text{ para cada } \ i = 1, \ldots, n-1\,, \\ 0, & \text{si } \ \hat{x} = u_+ \cdot \hat{x}^* < u_+ \cdot \hat{w}_i^* = \hat{w}_i \ \text{ para algún } \ i = 1, \ldots, n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in \widehat{W_{n-1}^{zp}}(x)$.

(b) Dado que, por 1.72 y 1.281 y ser R parcialmente proporcional,

$$\overline{\hat{e}}^{u}_{x}(w) = \bar{e}^{u_+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*) = u_+ \cdot \hat{x}^* = \hat{x}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y $w \in W^{zp}_{n-1}(x)$.

(c) Puesto que, por 1.281 y ser R parcialmente igualitario,

$$\overline{\hat{e}}^{u}_{x}(w) = \bar{e}^{u_+}_{\hat{x}^*}(\hat{w}^*) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in \overline{W^{zp}_{n-1}}(x)$. □

Corolario 2.188 *(a) Los sistemas electorales medios de sistemas simples parcialmente mayoritarios son parcialmente mayoritarios.*

(b) Los sistemas electorales medios de sistemas simples parcialmente proporcionales son parcialmente proporcionales.

(c) Los sistemas electorales medios de sistemas simples parcialmente igualitarios son parcialmente igualitarios.

Proposición 2.189 *(a) Los sistemas ordinales medios asintóticos de máxima y mínima dispersión son parcialmente mayoritarios y parcialmente igualitarios, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas medios son parcialmente proporcionales.

(c) Los sistemas de divisores medios 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son parcialmente mayoritarios, parcialmente proporcionales y parcialmente igualitarios, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.185 y 2.188. □

Corolario 2.190 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros medios son parcialmente mayoritario y parcialmente igualitario, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos medio es parcialmente proporcional.

(c) Los sistemas de divisores lineales medios –y, en particular, el de Hondt medio– son parcialmente proporcionales.

Proposición 2.191 *(a) La suma de sistemas electorales parcialmente proporcionales respecto de uno simple proporcional es parcialmente proporcional.*

(b) La suma de sistemas electorales parcialmente igualitarios respecto de uno simple estable es parcialmente igualitaria.

DEMOSTRACIÓN. (a) Dado que, por 1.120 y 1.286 y ser R^0 estable y R^j parcialmente proporcional para cada $j \in Z$,

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \begin{pmatrix} (\bar{e}^1)^{u^*_1}_{x_1}(w^1) & \dots & (\bar{e}^z)^{u^*_z}_{x_z}(w^z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}^0_1(u^+) \\ \vdots \\ \bar{r}^0_z(u^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^*_1 \cdot x_1 & \dots & u^*_z \cdot x_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+_1 \\ \vdots \\ u^+_z \end{pmatrix} = \hat{x}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in W_n^{p_1+\ldots+p_z}$.

(b) Puesto que, por 1.286 y ser R^0 estable y R^j parcialmente igualitario para cada $j \in Z$,

$$(\bar{e}^+)^u_x(w) = \begin{pmatrix} (\bar{e}^1)^{u^*_1}_{x_1}(w^1) & \dots & (\bar{e}^z)^{u^*_z}_{x_z}(w^z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}^0_1(u^+) \\ \vdots \\ \bar{r}^0_z(u^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}^0_1(u^+) \\ \vdots \\ \bar{r}^0_z(u^+) \end{pmatrix} = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $w \in \overline{W_n^{p_1+\ldots+p_z}}$. □

Corolario 2.192 *(a) Los sistemas electorales suma de sistemas simples parcialmente proporcionales respecto de uno simple proporcional son parcialmente proporcionales.*

(b) Los sistemas electorales suma de sistemas simples parcialmente igualitarios respecto de uno simple estable son parcialmente igualitarios.

Proposición 2.193 *(a) Los sistemas ordinales suma asintóticos de mínima dispersión respecto de uno simple estable son parcialmente igualitarios.*

(b) Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple proporcional son parcialmente proporcionales.

(c) Los sistemas de divisores suma 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos respecto de uno simple proporcional y uno simple estable son parcialmente proporcionales y parcialmente igualitarios, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 2.185 y 2.192. □

Corolario 2.194 *(a) El sistema igualitario puro suma respecto de uno simple estable es parcialmente igualitario.*

(b) El sistema de los mayores restos suma respecto de uno simple proporcional es parcialmente proporcional.

(c) Los sistemas de divisores lineales suma –y, en particular, el de Hondt suma– respecto de uno simple proporcional son parcialmente proporcionales.

Proposición 2.195 *(a) La mayoría parcial es hereditaria.*

(b) La proporcionalidad parcial es hereditaria.

Demostración. (a) Ya que, por 1.168, 2.177 y ser R parcialmente mayoritario,

$$(\bar{e}')^u_x(w) = \bar{e}^u_x(w') = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{x} > \widehat{w'}_i = \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1, \ldots, n'-1\,, \\ 0, & \text{si } \hat{x} < \widehat{w'}_i = \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1, \ldots, n'-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overbrace{W^p_{n'-1}(x)}$.

(b) Dado que, por 2.177 y ser R parcialmente proporcional,

$$(\bar{e}')^u_x(w) = \bar{e}^u_x(w') = \hat{x}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$. □

Observación 2.196 La igualdad parcial no es hereditaria, ya que el hecho que

$$\bar{e}^u_x(w) = \frac{1}{n}$$

no implica que

$$(\bar{e}')^u_x(w) = \frac{1}{n'}\,.$$

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
CRECIMIENTO PARCIAL	*todos*	*ninguno*	*todos*
ESTABILIDAD PARCIAL	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA PARCIAL	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	0–*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD PARCIAL	*ninguno*	*todos*	1–*asintóticos*
IGUALDAD PARCIAL	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty$–*asintóticos*

Tabla 2.1: Propiedades de las expectativas electorales de los sistemas electorales simples notables.

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
CRECIMIENTO PARCIAL	*todos*	*ninguno*	*todos*
ESTABILIDAD PARCIAL	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA PARCIAL	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	$0-$*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD PARCIAL	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD PARCIAL	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 2.2: Propiedades de las expectativas electorales de los sistemas electorales medios notables.

	Sistema electoral simple	**ORDINALES**	**CUOTAS**	**DIVISORES**
CRECIMIENTO PARCIAL	*creciente*	*todos*	*ninguno*	*todos*
ESTABILIDAD PARCIAL	*estable*	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA PARCIAL	*arbitrario*	*ninguno*	*ninguno*	*ninguno*
PROPORCIONALIDAD PARCIAL	*proporcional*	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD PARCIAL	*estable*	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 2.3: Propiedades de las expectativas electorales de los sistemas electorales suma notables.

3

Expectativa electoral media

A lo largo del capítulo anterior hemos definido y estudiado diversos conceptos y propiedades de los sistemas electorales desde el punto de vista individual de una candidatura cualquiera. En el presente capítulo, nos basaremos en los resultados de dicho capítulo para introducir una función que permite analizar formalmente algunas cuestiones a las que nos referimos habitualmente. Por ejemplo, es frecuente usar expresiones tales como "este sistema electoral favorece a las candidaturas con mayor voto", de significado intuitivo pero poco preciso.

Para ello, comenzaremos introduciendo la noción de expectativa electoral media como la esperanza matemática de las expectativas electorales y finalizaremos analizando las propiedades de crecimiento, estabilidad y, en particular, las de mayoría, proporcionalidad e igualdad en media, análogas a las definidas para sistemas y expectativas electorales pero referidas ahora a la expectativa electoral media.

3.1 Expectativa electoral media

Para evaluar la fuerza que otorga un sistema electoral a cada vector de pesos dado de una candidatura cualquiera, consideramos la esperanza matemática de las expectativas electorales.

Definición 3.1 Denominamos **expectativa electoral media** del vector de votos $x \in [0,1]^p$ cuando se eligen $k \in \mathbb{N}$ representantes respecto del peso $u \in \overline{U_p}$ a la esperanza matemática de la variable aleatoria discreta $E_x^{u,k}$

$$\mathfrak{E}^u(x,k) = \mu(E_x^{u,k}) = \sum_{c=0}^{k} c \cdot \mathcal{P}_{u,x}(E_x^{u,k} = c)\,.$$

Tenemos, así, una familia

$$(\mathfrak{E}^u)_{u \in \overline{U_p}}$$

de funciones

$$\mathfrak{E}^u : [0,1]^p \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Y podemos considerar, asimismo, las funciones

$$\mathfrak{E}^{u,k} : [0,1]^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

obtenidas fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.2 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$0 \leq \mathfrak{E}^u(x,k) \leq k\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición anterior y de 2.14. □

Proposición 3.3 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\mathfrak{E}^u\left((0,\ldots,0),k\right) = 0 \qquad y \qquad \mathfrak{E}^u\left((1,\ldots,1),k\right) = k\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \neq (1,\ldots,1)$

$$\mathfrak{E}^u(x,0) = 0\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición anterior y de 2.15. □

Definición 3.4 Denominamos **expectativa electoral media relativa** del vector de votos $x \in [0,1]^p$ cuando se eligen $k \in \mathbb{N}$ representantes respecto del vector de pesos $u \in \overline{U_p}$ a

$$\mathfrak{e}^u(x,k) = \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{E}^u(x,k)}{k}, & \text{si } k > 0\,, \\ 1\,, & \text{si } x = (1,\ldots,1) \text{ y } k = 0\,, \\ 0\,, & \text{si } x \neq (1,\ldots,1) \text{ y } k = 0\,. \end{cases}$$

Tenemos, así, una familia

$$\mathfrak{e} = (\mathfrak{e}^u)_{u \in \overline{U_p}}$$

de funciones

$$\mathfrak{e}^u : [0,1]^p \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Y podemos considerar de nuevo las funciones

$$\mathfrak{e}^{u,k} : [0,1]^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

obtenidas fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.5 *La expectativa electoral media relativa es la esperanza matemática de la variable aleatoria discreta* $e_x^{u,k}$

$$\mathfrak{e}^u(x,k) = \mu(e_x^{u,k}) = \sum_{c=0}^{k} \frac{c}{k} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(e_x^{u,k} = \frac{c}{k}\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \mathfrak{e}^u(x,k) \leq 1\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de la definición anterior y de 3.2. □

Proposición 3.6 *(a) Para cada* $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $k > 0$

$$\mathfrak{e}^u\left((0,\ldots,0),k\right) = 0 \qquad y \qquad \mathfrak{e}^u\left((1,\ldots,1),k\right) = 1\,.$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $x \neq (1,\ldots,1)$

$$\mathfrak{e}^u(x,0) = 0\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de la definición anterior y de 3.3. □

Proposición 3.7 *Las expectativas electorales medias de los sistemas ordinales son*

$$\mathfrak{E}(x,k)=\sum_{s=1}^{n} c_s(k)\cdot \frac{V\left(\left\{w\in W_{n-1}(x): \begin{array}{ll} x>w_i & \text{para } n-s \text{ votos} \\ x<w_i & \text{para los } s-1 \text{ votos restantes}\end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x\in[0,1]$ *y cada* $k\in\mathbb{N}$.

Demostración. Por 1.38 y 2.93, teniendo en cuenta en el primer caso que el sistema otorga

$$c_s(k)$$

representantes para cada $s=1,\ldots,n$ a la candidatura cuyo voto es el s–ésimo mayor, lo que se corresponde con ser mayor que $n-s$ votos y menor que los $s-1$ restantes, salvo conjuntos de probabilidad 0. □

Corolario 3.8 *(a) La expectativa electoral media del sistema mayoritario puro es*

$$\mathfrak{E}(x,k)=k\cdot\frac{V\left(\{w\in W_{n-1}(x): x>w_i \quad \text{para cada } i=1,\ldots,n-1\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x\in[0,1]$ *y cada* $k\in\mathbb{N}$.

(b) La expectativa electoral media del sistema igualitario puro es

$$\mathfrak{E}(x,k)=\left[\frac{k}{n}\right]\cdot\frac{V\left(\left\{w\in W_{n-1}(x): x<w_i \quad \text{para } k-n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ o más votos}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

$$+\left(\left[\frac{k}{n}\right]+1\right)\cdot\frac{V\left(\left\{w\in W_{n-1}(x): x>w_i \quad \text{para } k-n\left[\frac{k}{n}\right] \text{ o más votos}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x\in[0,1]$ *y cada* $k\in\mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.26 y 3.7. □

Corolario 3.9 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas ordinales son*

$$\mathfrak{e}(x,k) = \sum_{s=1}^{n} c_s(k) \cdot \frac{V\left(\left\{ w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{l} x > w_i \quad \textit{para } n-s \textit{ votos} \\ x < w_i \quad \textit{para los } s-1 \textit{ votos restantes} \end{array} \right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.7. $\square$

Corolario 3.10 *(a) La expectativa electoral media relativa del sistema mayoritario puro es*

$$\mathfrak{e}(x,k) = \frac{V\left(\{ w \in W_{n-1}(x) : x > w_i \quad \textit{para cada } i = 1, \ldots, n-1\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

(b) La expectativa electoral media relativa del sistema igualitario puro es

$$\mathfrak{e}(x,k) = \frac{\left[\dfrac{k}{n}\right]}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} x < w_i \quad \textit{para } k - n\left[\dfrac{k}{n}\right] \\ \textit{o más votos} \end{array} \right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

$$+ \frac{\left[\dfrac{k}{n}\right]+1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} x > w_i \quad \textit{para } k - n\left[\dfrac{k}{n}\right] \\ \textit{o más votos} \end{array} \right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.8. $\square$

Observación 3.11 La expectativa electoral media relativa del sistema mayoritario puro no depende de k.

Proposición 3.12 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de cuotas con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ *son*

$$\mathfrak{E}(x,k) = \left[\frac{x}{q_k}\right] \cdot \frac{V\left(\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{l} x - q_k\left[\frac{x}{q_k}\right] < w_i - q_k\left[\frac{w_i}{q_k}\right] \quad \text{para} \\ k - \left(\left[\frac{x}{q_k}\right] + \left[\frac{w_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{w_{n-1}}{q_k}\right]\right) \quad \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

$$+ \left(\left[\frac{x}{q_k}\right] + 1\right) \cdot \frac{V\left(\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{l} x - q_k\left[\frac{x}{q_k}\right] > w_i - q_k\left[\frac{w_i}{q_k}\right] \quad \text{para} \\ k - \left(\left[\frac{x}{q_k}\right] + \left[\frac{w_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{w_{n-1}}{q_k}\right]\right) \quad \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Por 1.49 y 2.95, teniendo en cuenta que la candidatura dada obtiene sólo

$$\left[\frac{x}{q_k}\right]$$

representantes si no está entre las

$$k - \left(\left[\frac{x}{q_k}\right] + \left[\frac{w_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{w_{n-1}}{q_k}\right]\right)$$

de mayor resto, salvo conjuntos de probabilidad 0. □

Proposición 3.13 *La expectativa electoral media del sistema de los mayores restos es*

$$\mathfrak{E}(x,k) = [kx] \cdot \frac{V\left(\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{l} kx - [kx] < kw_i - [kw_i] \quad \text{para} \\ k - ([kx] + [kw_1] + \ldots + [kw_{n-1}]) \quad \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

$$+ ([kx]+1) \cdot \frac{V\left(\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{l} kx - [kx] > kw_i - [kw_i] \quad \text{para} \\ k - ([kx] + [kw_1] + \ldots + [kw_{n-1}]) \quad \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Caso particular de 3.12 cuando $q_k = \frac{1}{k}$. □

Corolario 3.14 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de cuotas con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ *son*

$$\mathfrak{e}(x,k) = \frac{\left[\frac{x}{q_k}\right]}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} x - q_k\left[\frac{x}{q_k}\right] < w_i - q_k\left[\frac{w_i}{q_k}\right] \quad \text{para} \\ k - \left(\left[\frac{x}{q_k}\right] + \left[\frac{w_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{w_{n-1}}{q_k}\right]\right) \\ \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

$$+\frac{\left[\frac{x}{q_k}\right]+1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} x - q_k\left[\frac{x}{q_k}\right] > w_i - q_k\left[\frac{w_i}{q_k}\right] \quad \text{para} \\ k - \left(\left[\frac{x}{q_k}\right] + \left[\frac{w_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{w_{n-1}}{q_k}\right]\right) \\ \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.12. □

Corolario 3.15 *Las expectativa electoral media relativa del sistema de los mayores restos es*

$$\mathfrak{e}(x,k) = \frac{[kx]}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} kx - [kx] < kw_i - [kw_i] \quad \text{para} \\ k - ([kx] + [kw_1] + \ldots + [kw_{n-1}]) \\ \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

$$+\frac{[kx]+1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} kx - [kx] > kw_i - [kw_i] \quad \text{para} \\ k - ([kx] + [kw_1] + \ldots + [kw_{n-1}]) \\ \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.13. □

Proposición 3.16 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de divisores con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente son

$$\mathfrak{E}(x,k) = \sum_{c=1}^{k} c \cdot \frac{V\left(\displaystyle\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=k-c}\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} \dfrac{g_{c_1}}{g_{c+1}}\,x < w_1 < \dfrac{g_{c_1+1}}{g_c}\,x \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{g_{c_{n-1}}}{g_{c+1}}\,x < w_{n-1} < \dfrac{g_{c_{n-1}+1}}{g_c}\,x \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Puesto que, por 1.66, debe ser

$$\frac{w_i}{g_{c_i+1}} < \frac{x}{g_c} \qquad \text{y} \qquad \frac{x}{g_{c_i}} < \frac{w_i}{g_{c+1}}$$

que, despejando w_i, se convierte en

$$x\,\frac{g_{c_i}}{g_{c+1}} < w_i < x\,\frac{g_{c_i+1}}{g_c}$$

para cada $i = 1,\ldots,n-1$. □

Proposición 3.17 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de divisores lineales con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, son

$$\mathfrak{E}(x,k) = \sum_{c=(k+ns+1)\,x-(s+1)}^{(k+n(s+1)-1)\,x-s} c\cdot$$

$$\cdot\frac{V\left(\displaystyle\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=k-c}\left\{w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} \dfrac{c_1+s}{c+1+s}\,x < w_1 < \dfrac{c_1+1+s}{c+s}\,x \\ \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{c_{n-1}+s}{c+1+s}\,x < w_{n-1} < \dfrac{c_{n-1}+1+s}{c+s}\,x \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 2.97 y 3.16. □

Corolario 3.18 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de divisores con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente es

$$\mathfrak{e}(x,k) = \sum_{c=1}^{k} \frac{c}{k} \cdot \frac{V\left(\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=k-c} \left\{ w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} \frac{g_{c_1}}{g_{c+1}}\, x < w_1 < \frac{g_{c_1+1}}{g_c}\, x \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{g_{c_{n-1}}}{g_{c+1}}\, x < w_{n-1} < \frac{g_{c_{n-1}+1}}{g_c}\, x \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.16. □

Corolario 3.19 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de divisores lineales con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, *son*

$$\mathfrak{e}(x,k) = \sum_{c=(k+ns+1)\,x-(s+1)}^{(k+n(s+1)-1)\,x-s} \frac{c}{k} \cdot$$

$$\cdot \frac{V\left(\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=k-c} \left\{ w \in W_{n-1}(x) : \begin{array}{c} \frac{c_1+s}{c+1+s}\, x < w_1 < \frac{c_1+1+s}{c+s}\, x \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{c_{n-1}+s}{c+1+s}\, x < w_{n-1} < \frac{c_{n-1}+1+s}{c+s}\, x \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x)^{n-2}}$$

para cada $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.17. □

Ejemplo 3.20 Supongamos que el número de candidaturas es $n = 3$ y consideremos el caso del sistema electoral simple mayoritario que otorga

$$c_1(k) = k - 1 \qquad \text{y} \qquad c_2(k) = 1$$

representantes a la candidatura más votada y a la siguiente en voto respectivamente.

Así, para que una candidatura cualquiera con voto x sea la de voto mayor, la condición –salvo empates, que forman un conjunto de probabilidad cero– es que

$$x > w \qquad y \qquad x > 1 - w - x\,,$$

es decir,

$$1 - 2x < w < x \qquad \text{y} \qquad 0 < w < 1 - x\,,$$

mientras que la condición para quedar segunda es

$$0 < w < x \qquad \text{o} \qquad 1 - 2x < w < 1 - x\,,$$

siendo también

$$0 < w < 1 - x$$

en ambos casos. Entonces, para $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ las primeras son imposibles y las segundas quedan igual; para $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ las iniciales se reducen sólo a la primera y las finales pasan a ser

$$0 < w < 1 - 2x \qquad \text{o} \qquad x < w < 1 - x\,;$$

y para $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ las primeras se convierten en la tercera únicamente mientras que las finales no se pueden dar, por lo que la función expectativa electoral media es

$$\mathfrak{E}(x,k) = \begin{cases} (k-1)\,\dfrac{0}{1-x} + 1 \cdot \dfrac{2x}{1-x} = \dfrac{2x}{1-x}, \quad \text{si} \quad x \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right]\,, \\[2ex] (k-1)\,\dfrac{3x-1}{1-x} + 1 \cdot \dfrac{2(1-2x)}{1-x} = \dfrac{(3k-7)x + (3-k)}{1-x}, \quad \text{si} \quad x \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]\,, \\ (k-1)\,\dfrac{1-x}{1-x} + 1 \cdot \dfrac{0}{1-x} = k - 1, \quad \text{si} \quad x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right)\,, \\ k, \quad \text{si} \quad x = 1\,. \end{cases}$$

Proposición 3.21 *Si $\mathfrak{E}$ y $\hat{\mathfrak{E}}$ son las expectativas electorales medias de un sistema electoral R y su extensión media $\hat{R}$ entonces*

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = \mathfrak{E}^{u_+}(\hat{x}^*,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Puesto que

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = \sum_{c=0}^{k} c \cdot \hat{\mathcal{P}}_{u,x}(\hat{E}_x^{u,k} = c) = \sum_{j=0}^{k} c \cdot \mathcal{P}_{u_+,\hat{x}^*}(E_{\hat{x}^*}^{u_+,k} = c) = \mathfrak{E}^{u_+}(\hat{x}^*,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Corolario 3.22 *Si $\mathfrak{E}$ y $\hat{\mathfrak{E}}$ son las expectativas electorales medias de un sistema electoral simple R y su sistema electoral medio $\hat{R}$ entonces*

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = \mathfrak{E}(\hat{x},k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.23 *Si $\mathfrak{e}$ y $\hat{\mathfrak{e}}$ son las expectativas electorales medias relativas de un sistema electoral R y su extensión media $\hat{R}$ entonces*

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \mathfrak{e}^{u_+}(\hat{x}^*,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.21. □

Corolario 3.24 *Si $\mathfrak{e}$ y $\hat{\mathfrak{e}}$ son las expectativas electorales medias relativas de un sistema electoral simple R y su sistema electoral medio $\hat{R}$ entonces*

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \mathfrak{e}(\hat{x},k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.25 *Las expectativas electorales medias de los sistemas ordinales medios son*

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = \sum_{s=1}^{n} c_s(k) \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{ll} \hat{x} > \hat{w}_i & \text{para } n-s \text{ votos} \\ \hat{x} < \hat{w}_i & \text{para los } s-1 \text{ votos restantes} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.7 y 3.22. □

Proposición 3.26 *(a) La expectativa electoral media del sistema mayoritario puro medio es*

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = k \cdot \frac{V\left(\{\hat{w} \in W_{n-1}(x) : \hat{x} > \hat{w}_i \quad \text{para cada } i = 1,\ldots,n-1\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

(b) La expectativa electoral media del sistema igualitario puro medio es

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = \left[\frac{k}{n}\right] \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} \hat{x} < \hat{w}_i \quad \text{para} \\ k - n\left[\frac{k}{n}\right] \quad \text{o más votos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!} \cdot (1-\hat{x})^{n-2}}$$

$$+ \left(\left[\frac{k}{n}\right] + 1\right) \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} \hat{x} > \hat{w}_i \text{para} \\ k - n\left[\frac{k}{n}\right] \quad \text{o más votos} \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.8 y 3.22. □

Corolario 3.27 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas ordinales medios son*

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \sum_{s=1}^{n} c_s(k) \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{ll} \hat{x} > \hat{w}_i & \text{para } n-s \text{ votos} \\ \hat{x} < \hat{w}_i & \text{para los } s-1 \text{ votos restantes} \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.25. □

Corolario 3.28 *(a) La expectativa electoral media relativa del sistema mayoritario puro medio es*

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \frac{V\left(\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \hat{x} > \hat{w}_i \quad \text{para cada } i = 1, \ldots, n-1\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

(b) La expectativa electoral media relativa del sistema igualitario puro medio es

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \frac{\left\lceil \frac{k}{n} \right\rceil}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{l} \hat{x} < \hat{w}_i \quad \text{para} \\ k - n\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \quad \text{o más votos} \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

$$+ \frac{\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor + 1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{l} \hat{x} > \hat{w}_i \quad \text{para} \\ k - n\left\lfloor \frac{k}{n} \right\rfloor \quad \text{o más votos} \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.26. □

Observación 3.29 La expectativa electoral media relativa del sistema mayoritario puro medio no depende de k.

Proposición 3.30 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de cuotas medios con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ son*

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = \left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} \hat{x} - q_k\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] < \hat{w}_i - q_k\left[\frac{\hat{w}_i}{q_k}\right] \quad para \\ k - \left(\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] + \left[\frac{\hat{w}_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{\hat{w}_{n-1}}{q_k}\right]\right) \\ o\ más\ restos \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

$$+ \left(\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] + 1\right) \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} \hat{x} - q_k\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] > \hat{w}_i - q_k\left[\frac{\hat{w}_i}{q_k}\right] \quad para \\ k - \left(\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] + \left[\frac{\hat{w}_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\frac{\hat{w}_{n-1}}{q_k}\right]\right) \\ o\ más\ restos \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.12 y 3.22. □

Proposición 3.31 *La expectativa electoral media del sistema de los mayores restos medio es*

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = [k\hat{x}] \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} k\hat{x} - [k\hat{x}] < k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i] \quad para \\ k - ([k\hat{x}] + [k\hat{w}_1] + \ldots + [k\hat{w}_{n-1}]) \\ o\ más\ restos \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

$$+ ([k\hat{x}] + 1) \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} k\hat{x} - [k\hat{x}] > k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i] \quad para \\ k - ([k\hat{x}] + [k\hat{w}_1] + \ldots + [k\hat{w}_{n-1}]) \\ o\ más\ restos \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.13 y 3.22. □

Corolario 3.32 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de cuotas medios con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ *son*

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \frac{\left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right]}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} \hat{x} - q_k \left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] < \hat{w}_i - q_k \left[\dfrac{\hat{w}_i}{q_k}\right] \quad \text{para} \\ k - \left(\left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] + \left[\dfrac{\hat{w}_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\dfrac{\hat{w}_{n-1}}{q_k}\right]\right) \\ \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

$$+ \frac{\left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] + 1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} \hat{x} - q_k \left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] > \hat{w}_i - q_k \left[\dfrac{\hat{w}_i}{q_k}\right] \quad \text{para} \\ k - \left(\left[\dfrac{\hat{x}}{q_k}\right] + \left[\dfrac{\hat{w}_1}{q_k}\right] + \ldots + \left[\dfrac{\hat{w}_{n-1}}{q_k}\right]\right) \\ \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.30. □

Corolario 3.33 *Las expectativa electoral media relativa del sistema de los mayores restos medio es*

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \frac{[k\hat{x}]}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} k\hat{x} - [k\hat{x}] < k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i] \quad \text{para} \\ k - ([k\hat{x}] + [k\hat{w}_1] + \ldots + [k\hat{w}_{n-1}]) \\ \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

$$+ \frac{[k\hat{x}] + 1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} k\hat{x} - [k\hat{x}] > k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i] \quad \text{para} \\ k - ([k\hat{x}] + [k\hat{w}_1] + \ldots + [k\hat{w}_{n-1}]) \\ \text{o más restos} \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.31. □

Proposición 3.34 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de divisores medios con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente son

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k)=\sum_{c=1}^{k} c\cdot\frac{V\left(\bigcup\limits_{c_1+\ldots+c_{n-1}=k-c}\left\{\hat{w}\in W_{n-1}(\hat{x}):\begin{array}{c}\dfrac{g_{c_1}}{g_{c+1}}\,\hat{x}<\hat{w}_1<\dfrac{g_{c_1+1}}{g_c}\,\hat{x}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{g_{c_{n-1}}}{g_{c+1}}\,\hat{x}<\hat{w}_{n-1}<\dfrac{g_{c_{n-1}+1}}{g_c}\,\hat{x}\end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u\in\overline{U_p}$, *cada* $x\in[0,1]^p$ *y cada* $k\in\mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.16 y 3.22. □

Proposición 3.35 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de divisores lineales medios con*

$$g_d=d+s$$

y $s>-1$, *son*

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k)=\sum_{c=(k+ns+1)\,\hat{x}-(s+1)}^{(k+n(s+1)-1)\,\hat{x}-s} c\cdot$$

$$\cdot\frac{V\left(\bigcup\limits_{c_1+\ldots+c_{n-1}=k-c}\left\{\hat{w}\in W_{n-1}(\hat{x}):\begin{array}{c}\dfrac{c_1+s}{c+1+s}\,\hat{x}<\hat{w}_1<\dfrac{c_1+1+s}{c+s}\,\hat{x}\\ \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{c_{n-1}+s}{c+1+s}\,\hat{x}<\hat{w}_{n-1}<\dfrac{c_{n-1}+1+s}{c+s}\,\hat{x}\end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u\in\overline{U_p}$, *cada* $x\in[0,1]^p$ *y cada* $k\in\mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.17 y 3.22. □

Corolario 3.36 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de divisores medios con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente son

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \sum_{c=1}^{k} \frac{c}{k} \cdot \frac{V\left(\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=k-c} \left\{ w \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} \frac{g_{c_1}}{g_{c+1}}\,\hat{x} < \hat{w}_1 < \frac{g_{c_1+1}}{g_c}\,\hat{x} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{g_{c_{n-1}}}{g_{c+1}}\,\hat{x} < \hat{w}_{n-1} < \frac{g_{c_{n-1}+1}}{g_c}\,\hat{x} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.34. □

Corolario 3.37 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de divisores lineales medios con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, *son*

$$\hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \sum_{c=(k+ns+1)\,\hat{x}-(s+1)}^{(k+n(s+1)-1)\,\hat{x}-s} \frac{c}{k} \cdot$$

$$\cdot \frac{V\left(\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=k-c} \left\{ w \in W_{n-1}(\hat{x}) : \begin{array}{c} \frac{c_1+s}{c+1+s}\,\hat{x} < \hat{w}_1 < \frac{c_1+1+s}{c+s}\,\hat{x} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{c_{n-1}+s}{c+1+s}\,\hat{x} < \hat{w}_{n-1} < \frac{c_{n-1}+1+s}{c+s}\,\hat{x} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.35. □

Proposición 3.38 *(a) Si $\mathfrak{E}^1, \ldots, \mathfrak{E}^z$ y $\mathfrak{E}^+$ son las expectativas electorales medias de los sistemas electorales $R^1, \ldots, R^z$ y su suma R^+ respecto de uno simple R^0*

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = (\mathfrak{E}^1)^{u_1^*}(x_1, R_1^0(u^+,k)) + \ldots + (\mathfrak{E}^z)^{u_z^*}\left(x_z, R_z^0(u^+,k)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Si $\mathfrak{e}^1, \ldots, \mathfrak{e}^z$ y $\mathfrak{e}^+$ son las expectativas electorales medias relativas de los sistemas electorales $R^1, \ldots, R^z$ y su suma R^+ respecto de uno simple R^0

$$(\mathfrak{e}^+)^u(x,k) = r_1^0\left(u^+,k\right) \cdot (\mathfrak{e}^1)^{u_1^*}\left(x_1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + r_z^0\left(u^+,k\right) \cdot (\mathfrak{e}^z)^{u_z^*}\left(x_z, R_z^0(u^+,k)\right),$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. (a) Puesto que la esperanza matemática de la suma es la suma de las esperanzas matemáticas de las variables

$$(E^1)_{x_1}^{u_1^*, R_1^0(u^+,k)}, \ldots, (E^z)_{x_z}^{u_z^*, R_z^0(u^+,k)},$$

que son independientes como se vio ya en 2.72.

(b) Ya que

$$\begin{gathered}(\mathfrak{e}^+)^u(x,k) = \frac{(\mathfrak{E}^+)^u(x,k)}{k} = \frac{(\mathfrak{E}^1)^{u_1^*}\left(x_1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + (\mathfrak{E}^z)^{u_z^*}\left(x_z, R_z^0(u^+,k)\right)}{k} = \\ \frac{R_1^0\left(u^+,k\right)}{k} \cdot \frac{(\mathfrak{E}^1)^{u_1^*}\left(x_1, R_1^0(u^+,k)\right)}{R_1^0\left(u^+,k\right)} + \ldots + \frac{R_z^0\left(u^+,k\right)}{k} \cdot \frac{(\mathfrak{E}^z)^{u_z^*}\left(x_z, R_z^0(u^+,k)\right)}{R_z^0\left(u^+,k\right)} = \\ r_1^0\left(u^+,k\right) \cdot (\mathfrak{e}^1)^{u_1^*}\left(x_1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + r_z^0\left(u^+,k\right) \cdot (\mathfrak{e}^z)^{u_z^*}\left(x_z, R_z^0(u^+,k)\right)\end{gathered}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$, puesto que si

$$k = 0 \qquad \text{o} \qquad R_j^0\left(u^+,k\right) = 0$$

para algún $j \in Z$ entonces las correspondientes fracciones son 0 por definición y se sigue cumpliendo asimismo la igualdad. □

Observación 3.39 La fórmula anterior puede escribirse matricialmente en la forma

$$(\bar{\mathfrak{e}}^+)^u(x) = \begin{pmatrix} (\mathfrak{e}^1)^{u_1^*}\left(x_1, R_1^0(u^+,k)\right) & \ldots & (\mathfrak{e}^z)^{u_z^*}\left(x_z, R_z^0(u^+,k)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^0\left(u^+,k\right) \\ \vdots \\ r_z^0\left(u^+,k\right) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$, cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Corolario 3.40 *(a) Si $\mathfrak{E}^1, \ldots, \mathfrak{E}^p$ y $\mathfrak{E}^+$ son las expectativas electorales medias de los sistemas electorales simples $R^1, \ldots, R^p$ y su sistema electoral suma R^+ respecto de uno simple R^0*

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \mathfrak{E}^1\left(x_1, R_1^0(u,k)\right) + \ldots + \mathfrak{E}^p\left(x_p, R_p^0(u,k)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) Si $\mathfrak{e}^1, \ldots, \mathfrak{e}^p$ y $\mathfrak{e}^+$ son las expectativas electorales medias relativas de los sistemas electorales simples $R^1, \ldots, R^p$ y su sistema electoral suma R^+ respecto de uno simple R^0

$$(\mathfrak{e}^+)^u(x,k) = r_1^0(u,k)\cdot\mathfrak{e}^1\left(x_1, R_1^0(u,k)\right) + \ldots + r_p^0(u,k)\cdot\mathfrak{e}^p\left(x_p, R_p^0(u,k)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Observación 3.41 La fórmula anterior puede escribirse matricialmente en la forma

$$(\mathfrak{e}^+)^u(x,k) = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}^1\left(x_1, R_1^0(u,k)\right) & \ldots & \mathfrak{e}^z\left(x_z, R_z^0(u,k)\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^0(u,k) \\ \vdots \\ r_p^0(u,k) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.42 *Las expectativas electorales medias de los sistemas ordinales suma son*

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} R_j^0(u,k) +$$

$$\sum_{x_j<1}\sum_{s=1}^{n} c_s(R_j^0(u,k)) \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{ll} x_j > w_i^j & \text{para } n-s \text{ votos} \\ x_j < w_i^j & \text{para los } s-1 \text{ votos restantes} \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.7 y 3.40. □

Proposición 3.43 *(a) La expectativa electoral media del sistema mayoritario puro suma es*

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} R_j^0(u,k) + \sum_{x_j<1} R_j^0(u,k) \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{l} x_j > w_i^j \quad \text{para} \\ \text{cada } i = 1, \ldots, n-1 \end{array}\right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) La expectativa electoral media del sistema igualitario puro suma es

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} R_j^0(u,k) + \sum_{x_j<1} \left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right] \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j < w_i^j \quad \text{para} \\ R_j^0(u,k) - n\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right] \\ \text{o más votos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

$$+ \sum_{x_j<1} \left(\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right] + 1\right) \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j > w_i^j \quad \text{para} \\ R_j^0(u,k) - n\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right] \\ \text{o más votos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.8 y 3.40. □

Corolario 3.44 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas ordinales suma son*

$$(\mathfrak{e}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} r_j^0(u,k) +$$

$$\sum_{x_j<1}\sum_{s=1}^{n} \frac{c_s(R_j^0(u,k))}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w_j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{ll} x_j > w_i^j & \text{para } n-s \text{ votos} \\ x_j < w_i^j & \text{para los } s-1 \text{ votos restantes} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.42. □

Corolario 3.45 *(a) La expectativa electoral media relativa del sistema mayoritario puro suma es*

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} r_j^0(u,k) + \sum_{x_j<1} r_j^0(u,k) \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j > w_i^j \quad \text{para} \\ \text{cada } i = 1, \ldots, n-1 \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) La expectativa electoral media relativa del sistema igualitario puro suma es

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} r_j^0(u,k) + \sum_{x_j<1} \frac{\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right]}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{r} x_j < w_i^j \quad \text{para} \\ R_j^0(u,k) - n \left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right] \\ \text{o más votos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

$$+ \sum_{x_j<1} \frac{\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right]+1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{l} x_j > w_i^j \quad \text{para} \\ R_j^0(u,k) - n \left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right] \quad \text{o más votos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.43. □

Proposición 3.46 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de cuotas suma con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ son*

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} R_j^0(u,k) +$$

$$\sum_{x_j<1} \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{l} x_j - q_{R_j^0(u,k)} \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] < w_i^j - q_{R_j^0(u,k)} \left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \quad \text{para} \\ R_j^0(u,k) - \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] - \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \quad \text{o más restos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}} +$$

$$\sum_{x_j<1} \left(\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]+1\right) \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{l} x_j - q_{R_j^0(u,k)} \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] > w_i^j - q_{R_j^0(u,k)} \left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \\ \text{para } R_j^0(u,k) - \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] - \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \\ \text{o más restos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.12 y 3.40. □

Proposición 3.47 *La expectativa electoral media del sistema de los mayores restos suma es*

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} R_j^0(u,k) +$$

$$\sum_{x_j<1} [R_j^0(u,k)\,x_j] \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j - \dfrac{[R_j^0(u,k)x_j]}{R_j^0(u,k)} < w_i^j - \dfrac{[R_j^0(u,k)\,w_i^j]}{R_j^0(u,k)} \ \text{ para} \\ R_j^0(u,k) - [R_j^0(u,k)\,x_j] - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} [R_j^0(u,k)\,w_i^j] \\ \text{o más restos} \end{array} \right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x_j)^{n-2}} +$$

$$\sum_{x_j<1} \big([R_j^0(u,k)\,x_j] + 1\big) \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j - \dfrac{[R_j^0(u,k)\,x_j]}{R_j^0(u,k)} > w_i^j - \dfrac{[R_j^0(u,k)\,w_i^j]}{R_j^0(u,k)} \ \text{ para} \\ R_j^0(u,k) - [R_j^0(u,k)\,x_j] - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} [R_j^0(u,k)\,w_i^j] \\ \text{o más restos} \end{array} \right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.13 y 3.40. □

Corolario 3.48 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de cuotas suma con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$ *son*

$$(\mathfrak{e}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} r_j^0(u,k) +$$

$$\sum_{x_j<1} \frac{\left[\dfrac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j - q_{R_j^0(u,k)} \left[\dfrac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] < w_i^j - q_{R_j^0(u,k)} \left[\dfrac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \ \text{ para} \\ R_j^0(u,k) - \left[\dfrac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \left[\dfrac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \text{ o más restos} \end{array} \right\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x_j)^{n-2}} +$$

$$\sum_{x_j<1} \frac{\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]+1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j - q_{R_j^0(u,k)}\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] > w_i^j - q_{R_j^0(u,k)}\left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \\ \text{para } R_j^0(u,k) - \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] - \sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{w_i^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right] \\ \text{o más restos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.46. □

Corolario 3.49 *La expectativa electoral media relativa del sistema de los mayores restos suma es*

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} r_j^0(u,k) +$$

$$\sum_{x_j<1} \frac{[R_j^0(u,k)x_j]}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j - \frac{[R_j^0(u,k)\,x_j]}{R_j^0(u,k)} < w_i^j - \frac{[R_j^0(u,k)\,w_i^j]}{R_j^0(u,k)} \text{ para} \\ R_j^0(u,k) - [R_j^0(u,k)\,x_j] - \sum_{i=1}^{n-1}[R_j^0(u,k)\,w_i^j] \\ \text{o más restos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

$$+\sum_{x_j<1} \frac{[R_j^0(u,k)\,x_j]+1}{k} \cdot \frac{V\left(\left\{ w^j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} x_j - \frac{[R_j^0(u,k)\,x_j]}{R_j^0(u,k)} > w_i^j - \frac{[R_j^0(u,k)\,w_i^j]}{R_j^0(u,k)} \text{ para} \\ R_j^0(u,k) - [R_j^0(u,k)\,x_j] - \sum_{i=1}^{n-1}[R_j^0(u,k)\,w_i^j] \\ \text{o más restos} \end{array} \right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.47. □

Proposición 3.50 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de divisores suma con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente son

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) =$$
$$\sum_{c=1}^{k} c \cdot \frac{V\left(\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=R_j^0(u,k)-c}\left\{w_j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} \frac{g_{c_1}}{g_{c+1}}\, x_j < w_j^1 < \frac{g_{c_1+1}}{g_c}\, x_j \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{g_{c_{n-1}}}{g_{c+1}}\, x_j < w_j^{n-1} < \frac{g_{c_{n-1}+1}}{g_c}\, x_j \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.16 y 3.40. □

Proposición 3.51 *Las expectativas electorales medias de los sistemas de divisores lineales suma con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, son

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} R_j^0(u,k) + \sum_{c \in \sum_{j=1}^{p}\left[\left(R_j^0(u,k)+ns+1\right) x_j - (s+1) \leq \left(R_j^0(u,k)+n\,(s+1)-1\right) x_j - s\right]} c \cdot$$
$$\cdot \frac{V\left(\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=R_j^0(u,k)-c}\left\{w_j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} \frac{c_1+s}{c+1+s}\, x_j < w_j^1 < \frac{c_1+1+s}{c+s}\, x_j \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{c_{n-1}+s}{c+1+s}\, x_j < w_j^{n-1} < \frac{c_{n-1}+1+s}{c+s}\, x_j \end{array}\right\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.17 y 3.40. □

Corolario 3.52 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de divisores suma con*

$$(g_d)_{d\geq 1}$$

estrictamente creciente son

$$(\mathfrak{e}^+)^u(x,k) = \sum_{c=1}^{k} \frac{c}{k} \cdot \frac{V\left(\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=R_j^0(u,k)-c} \left\{ w_j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} \frac{g_{c_1}}{g_{c+1}} x_j < w_j^1 < \frac{g_{c_1+1}}{g_c} x_j \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{g_{c_{n-1}}}{g_{c+1}} x_j < w_j^{n-1} < \frac{g_{c_{n-1}+1}}{g_c} x_j \end{array} \right\} \right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!} (1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.50. □

Corolario 3.53 *Las expectativas electorales medias relativas de los sistemas de divisores lineales suma con*

$$g_d = d + s$$

y $s > -1$, *son*

$$(\mathfrak{e}^+)^u(x,k) = \sum_{x_j=1} r_j^0(u,k) + \sum_{c \in \sum_{j=1}^{p} \left[(R_j^0(u,k)+ns+1)\cdot x_j - (s+1) \leq \left(R_j^0(u,k)+n\,(s+1)-1 \right) x_j - s \right]} \frac{c}{k} \cdot$$

$$\cdot \frac{V\left(\bigcup_{c_1+\ldots+c_{n-1}=R_j^0(u,k)-c} \left\{ w_j \in W_{n-1}(x_j) : \begin{array}{c} \frac{c_1+s}{c+1+s} x_j < w_j^1 < \frac{c_1+1+s}{c+s} x_j \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{c_{n-1}+s}{c+1+s} x_j < w_j^{n-1} < \frac{c_{n-1}+1+s}{c+s} x_j \end{array} \right\} \right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!} (1-x_j)^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.51. □

Ejemplo 3.54 Supongamos que el número de candidaturas es $n = 3$, el número de circunscripciones es $p = 2$ con vector de votos $u = (0.6, 0.4)$ y se aplica el sistema electoral simple de los mayores restos para repartir $k = 6$ representantes por circunscripciones y el sistema electoral mayoritario que otorga

$$c_1(k) = k - 1 \qquad \text{y} \qquad c_2(k) = 1$$

representantes a la candidatura más votada y a la siguiente en ambas circunscripciones. En primer lugar, como ya se vio en 1.166, corresponden

$$R_1^0(0.6, 6) = 4 \qquad \text{y} \qquad R_2^0(0.4, 6) = 2$$

representantes respectivamente a cada una de las circunscripciones.

Así, en el conjunto $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{3}\right]$ por ejemplo, teniendo en cuenta el ejemplo 3.20, tenemos que

$$(\mathfrak{E}^{+})^{(0.6,0.4)}((x, y), 6) = \mathfrak{E}^1(x, 4) + \mathfrak{E}(y, 2) = \frac{5x - 1}{1 - x} + \frac{2y}{1 - y}\,.$$

Observación 3.55 Es falso en general que la expectativa electoral media del sistema electoral inducido sea igual a la expectativa electoral media del sistema electoral original, como muestra el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 3.56 Si consideramos el mismo sistema electoral simple mayoritario del ejemplo anterior 3.20 que otorga

$$c_1(k) = k - 1 \qquad \text{y} \qquad c_2(k) = 1$$

representantes a la candidatura cuyo voto sea mayor y a la que le sigue en voto respectivamente pero para $n = 2$ candidaturas, es claro que la expectativa electoral media en tal caso es

$$\mathfrak{E}'(x, k) = \begin{cases} 0, \quad \text{si} \;\; x = 0\,, \\ 1, \quad \text{si} \;\; x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)\,, \\ 1 \quad \text{o} \;\; k - 1, \quad \text{si} \quad x = \dfrac{1}{2}\,, \\ k - 1, \quad \text{si} \;\; x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)\,, \\ k, \quad \text{si} \;\; x = 1\,, \end{cases}$$

donde el valor para $x = \frac{1}{2}$ dependerá del criterio de desempate que se haya fijado previamente. En cualquier caso, no obstante, es obvio que ambas funciones son diferentes.

3.2 Crecimiento en media

Una propiedad que también parece deseable en los sistemas electorales es que al aumentar el número de representantes a elegir la expectativa electoral media no disminuya.

Definición 3.57 Diremos que el sistema electoral R es **creciente en media** si, y sólo si, para cada $k, l \in \mathbb{N}$ la condición

$$k \leq l$$

implica

$$\mathfrak{E}^u(x, k) \leq \mathfrak{E}^u(x, l)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0, 1]^p$.

Proposición 3.58 *El crecimiento parcial implica el crecimiento en media.*

Demostración. Si $k, l \in \mathbb{N}$ son tales que

$$k \leq l$$

entonces, por ser R parcialmente creciente,

$$\mathfrak{E}^u(x, k) = \mu(E_x^{u,k}(w)) \leq \mu(E_x^{u,l}(w)) = \mathfrak{E}^u(x, l)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0, 1]^p$. □

Proposición 3.59 *El crecimiento implica el crecimiento en media.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.141 y 3.58 □

Proposición 3.60 *(a) Los sistemas ordinales son crecientes en media.*

(b) Los sistemas de divisores son crecientes en media.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.142 y 3.58. □

Proposición 3.61 *La extensión media de un sistema electoral creciente en media es creciente en media.*

Demostración. Dados $k, l \in \mathbb{N}$ tales que

$$k \leq l\,,$$

por 3.21 y ser R creciente en media,

$$\hat{\mathfrak{E}}^u(x,k) = \mathfrak{E}^{u_+}\left(\hat{x}^*, k\right) \leq \mathfrak{E}^{u_+}\left(\hat{x}^*, l\right) = \hat{\mathfrak{E}}^u(x,l)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^p$. □

Corolario 3.62 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples crecientes en media son crecientes en media.*

Proposición 3.63 *(a) Los sistemas ordinales medios son crecientes en media.*

(b) Los sistemas de divisores medios son crecientes en media.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.60 y 3.62. □

Proposición 3.64 *La suma de sistemas electorales crecientes en media respecto de uno simple creciente es creciente en media.*

Demostración. Dados $k, l \in \mathbb{N}$ tales que

$$k \leq l\,,$$

por ser R^0 creciente, R^j creciente en media para cada $j \in Z$ y 3.38,

$$(\mathfrak{E}^+)^u(x,k) = \sum_{j=1}^{z} (\mathfrak{E}^j)^{u_j^*}\left(x_j, R_j^0(u^+,k)\right) \leq \sum_{j=1}^{z} (\mathfrak{E}^j)^{u_j^*}\left(x_j, R_j^0(u^+,l)\right) = (\mathfrak{E}^+)^u(x,l)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Corolario 3.65 *Los sistemas electorales suma respecto de uno simple creciente son crecientes en media.*

Proposición 3.66 *(a) Los sistemas ordinales suma respecto de uno simple creciente son crecientes en media.*

(b) Los sistemas de divisores suma respecto de uno simple creciente son crecientes en media.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.60 y 3.65. □

3.3 Estabilidad en media

Como en el caso de la estabilidad parcial, se generaliza en esta sección a sistemas electorales la noción de estabilidad en media y, en particular, las de mayoría, proporcionalidad e igualdad en media. Seguidamente se estudia su relación con la extensión media, la suma y la inducción, y se deducen en particular los resultados correspondientes a los ejemplos de sistemas electorales medios y suma considerados.

Definición 3.67 Diremos que el sistema electoral R es **estable en media** si, y sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$ existe

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{e}^u(x,k)\,.$$

Y, en tal caso, a dicho límite lo denominaremos **índice de estabilidad en media** de x y lo denotaremos

$$\overline{\mathfrak{e}}^u(x)\,.$$

En particular, si R es estable en media queda definida la aplicación

$$\overline{\mathfrak{e}}^u : [0,1]^p \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Proposición 3.68 *Si R es estable en media, entonces*

$$0 \leq \overline{\mathfrak{e}}^u(x) \leq 1$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición anterior y de 3.5. □

Proposición 3.69 *Si R es un sistema electoral estable en media, entonces*

$$\overline{\mathfrak{e}}^u(0,\ldots,0) = 0 \qquad y \qquad \overline{\mathfrak{e}}^u(1,\ldots,1) = 1$$

para cada $u \in \overline{U_p}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.6. □

Proposición 3.70 *La estabilidad parcial implica la estabilidad en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\mathfrak{e}}^u(x) = \mu(\bar{e}^u_x)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $x \in [0,1]^p$.

DEMOSTRACIÓN. Ya que, por ser R parcialmente estable,

$$\bar{\mathfrak{e}}^u(x) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{e}^u(x,k) = \lim_{k\to\infty} \mu(e^u_x) = \mu\left(\lim_{k\to\infty} e^u(x,k)\right) = \mu(\bar{e}^u_x)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$. □

Proposición 3.71 *La estabilidad implica la estabilidad en media.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 2.158 y 3.70. □

Proposición 3.72 *Los sistemas ordinales asintóticos son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\mathfrak{e}}(x) = \sum_{i=1}^{s} \bar{c}_i \cdot \frac{V\left(\{w \in W_{n-1}(x) : x \text{ es el } i\text{–ésimo voto mayor del vector } (x/w)\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x)^{n-2}}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 2.161 y 3.70. □

Proposición 3.73 *Los sistemas de cuotas son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\mathfrak{e}}(x) = x\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 2.162 y 3.70. □

Proposición 3.74 *Los sistemas de divisores t–asintóticos son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\mathfrak{e}}(x) = \frac{\displaystyle\int_{W_{n-1}(x)} \frac{x^{1/t}}{x^{1/t} + w_1^{1/t} + \ldots + w_{n-1}^{1/t}}\, dV}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x)^{n-2}}\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 2.163 y 3.70. □

Ejemplo 3.75 Consideremos el sistema electoral simple de los divisores

$$g_d = \sqrt{d}$$

para $n = 3$ candidaturas.

Entonces, para cada $x \in [0, 1)$

$$\bar{\mathfrak{e}}(x) = \frac{\displaystyle\int_{W_2(x)} \frac{x^2}{y^2 + z^2 + x^2}\, dV}{\sqrt{2}\,(1-x)} = \frac{\displaystyle\sqrt{2}\int_0^{1-x} \frac{x^2}{y^2 + (1-x-y)^2 + x^2}\, dy}{\sqrt{2}\,(1-x)} =$$

$$\frac{x^2}{1-x} \int_0^{1-x} \frac{1}{2y^2 + 2(x-1)y + (2x^2 - 2x + 1)}\, dy\,.$$

Por otra parte, las raíces del polinomio en y del denominador son

$$\frac{-(x-1) \pm \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 16x^2 + 16x - 8}}{4} = \frac{1 - x \pm \sqrt{-15x^2 + 14x - 7}}{4}\,.$$

Entonces, dado que el valor máximo del discriminante anterior se alcanza cuando su derivada $-30x + 14$ se anula, es decir, para $x = \dfrac{7}{15}$ y es, pues,

$$-15 \cdot \frac{49}{225} + 14 \cdot \frac{7}{15} - 7 = -\frac{84}{15}$$

se tiene que las raíces del polinomio anterior son complejas con lo que, escribiendo dicho denominador en la forma

$$\left(\sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)\right)^2 + \frac{3x^2 - 2x + 1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)}{\sqrt{\dfrac{3x^2 - 2x + 1}{2}}}\right)^2 + 1 = \left(\frac{2y + x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}\right)^2 + 1$$

y teniendo en cuenta la última expresión de $\bar{\mathfrak{e}}(x)$, se deduce que

$$\bar{\mathfrak{e}}(x) = \frac{x^2}{1-x} \left[\sqrt{3x^2 - 2x + 1}\, \arctan \frac{2y + x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}\right]_0^{1-x} =$$

$$\frac{x^2}{(1-x)\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} \left(\arctan \frac{1-x}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} - \arctan \frac{x-1}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}\right)$$

pàra cada $x \in [0, 1)$ y, en definitiva,

$$\bar{\mathfrak{e}}(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2}{(1-x)\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} \arctan \dfrac{1-x}{\sqrt{3x^2 - 2x + 1}}\,, & \text{si} \quad x < 1\,, \\ 1\,, \quad \text{si} \quad x = 1\,. \end{cases}$$

Proposición 3.76 *La extensión media de un sistema electoral estable en media es estable en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\hat{\mathfrak{e}}}^u(x) = \bar{\mathfrak{e}}^{u_+}(\hat{x}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$.

Demostración. Ya que, por 3.23 y ser R estable en media,

$$\bar{\hat{\mathfrak{e}}}^u(x) = \lim_{k\to\infty} \hat{\mathfrak{e}}^u(x,k) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{e}^{u_+}(\hat{x}^*, k) = \bar{\mathfrak{e}}^{u_+}(\hat{x}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$. □

Corolario 3.77 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples estables en media son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\hat{\mathfrak{e}}}^u(x) = \bar{\mathfrak{e}}(\hat{x})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$.

Proposición 3.78 *Los sistemas ordinales medios asintóticos son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\hat{\mathfrak{e}}}^u(x) = \sum_{i=1}^{s} \bar{c}_i \cdot \frac{V\left(\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \hat{x} \text{ es el } i\text{–ésimo voto mayor del vector } (\hat{x}/\hat{w})\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.72 y 3.77. □

Proposición 3.79 *Los sistemas de cuotas medios son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\hat{\mathfrak{e}}}^u(x) = \hat{x}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.73 y 3.77. □

Proposición 3.80 *Los sistemas de divisores t–asintóticos medios son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$\bar{\hat{\mathfrak{e}}}^u(x) = \frac{\displaystyle\int_{W_{n-1}(\hat{x})} \frac{\hat{x}^{1/t}}{\hat{x}^{1/t} + \hat{w}_1^{1/t} + \ldots + \hat{w}_{n-1}^{1/t}}\, dV}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.74 y 3.77. □

Proposición 3.81 *La suma de sistemas electorales estables en media respecto de uno simple estable es estable en media y el índice de estabilidad en media es*

$$(\bar{\mathfrak{e}}^+)^u(x) = \bar{r}_1^0(u^+) \cdot (\bar{\mathfrak{e}}^1)^{u_1^*}(x_1) + \ldots + \bar{r}_z^0(u^+) \cdot (\bar{\mathfrak{e}}^z)^{u_z^*}(x_z)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ *y cada* $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$.

Demostración. Ya que, por 3.38 y ser R^0 estable y R^j estable en media para cada $j \in Z$,

$$(\bar{\mathfrak{e}}^+)^u(x) = \lim_{k\to\infty} (\mathfrak{e}^+)^u(x,k) =$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(r_1^0\left(u^+,k\right) \cdot (\mathfrak{e}^1)^{u_1^*}\left(x_1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + r_z^0\left(u^+,k\right) \cdot (\mathfrak{e}^z)^{u_z^*}\left(x_z, R_z^0(u^+,k)\right)\right) =$$

$$\lim_{k\to\infty} r_1^0\left(u^+,k\right) \cdot \lim_{k\to\infty} (\mathfrak{e}^1)^{u_1^*}\left(x_1, R_1^0(u^+,k)\right) + \ldots + \lim_{k\to\infty} r_z^0\left(u^+,k\right) \cdot \lim_{k\to\infty} (\mathfrak{e}^z)^{u_z^*}\left(x_z, R_z^0(u^+,k)\right) =$$

$$\bar{r}_1^0(u^+) \cdot (\bar{\mathfrak{e}}^1)^{u_1^*}(x_1) + \ldots + \bar{r}_z^0(u^+) \cdot (\bar{\mathfrak{e}}^z)^{u_z^*}(x_z)$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Observación 3.82 La fórmula anterior puede escribirse matricialmente en la forma

$$(\bar{\mathfrak{e}}^+)^u(x) = \begin{pmatrix} (\bar{\mathfrak{e}}^1)^{u_1^*}(x_1) & \ldots & (\bar{\mathfrak{e}}^z)^{u_z^*}(x_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1^0(u^+) \\ \vdots \\ \bar{r}_z^0(u^+) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$.

Corolario 3.83 *Los sistemas electorales suma de sistemas simples estables en media respecto de uno simple estable son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$(\bar{\mathfrak{e}}^+)^u(x) = \bar{r}_1^0(u) \cdot \bar{\mathfrak{e}}^1(x_1) + \ldots + \bar{r}_p^0(u) \cdot \bar{\mathfrak{e}}^p(x_p)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $x \in [0,1]^p$.

Observación 3.84 La fórmula anterior puede escribirse matricialmente en la forma

$$(\bar{\mathfrak{e}}^+)^u(x) = \begin{pmatrix} \bar{\mathfrak{e}}^1(x_1) & \ldots & \bar{\mathfrak{e}}^p(x_p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1^0(u) \\ \vdots \\ \bar{r}_p^0(u) \end{pmatrix}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$.

Proposición 3.85 *Los sistemas ordinales suma asintóticos respecto de uno simple estable son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$(\bar{\mathfrak{e}}^{+})^{u}(x) = \sum_{x_j=1} \bar{r}_j^0(u) + \sum_{x_j<1} \bar{r}_j^0(u) \cdot \sum_{i=1}^{s} \bar{c}_i \cdot \frac{V\left(\{w_j \in W_{n-1}(x_j) : x_j \text{ es el } i\text{–ésimo voto de } (x_j/w^j)\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x_j)^{n-2}}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.72 y 3.83. □

Proposición 3.86 *Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple estable son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$(\bar{\mathfrak{e}}^{+})^{u}(x) = \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, x_j\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.73 y 3.83. □

Proposición 3.87 *Los sistemas de divisores suma t–asintóticos respecto de uno simple estable son estables en media y el índice de estabilidad en media es*

$$(\bar{\mathfrak{e}}^{+})^{u}(x) = \sum_{x_j=1} \bar{r}_j^0(u) + \sum_{x_j<1} \bar{r}_j^0(u) \cdot \frac{\displaystyle\int_{W_{n-1}(x_j)} \frac{x_j^{1/t}}{x_j^{1/t} + {w_1^j}^{1/t} + \ldots + {w_{n-1}^j}^{1/t}}\, dV}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x_j)^{n-2}}\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.74 y 3.83. □

Ejemplo 3.88 Si consideramos el sistema de divisores suma $g_d = \sqrt{d}$ respecto del sistema de los mayores restos con $n = 3$ candidaturas y $p = 2$ circunscripciones, teniendo en cuenta el ejemplo 3.75 y que el sistema de los mayores restos es proporcional, obtenemos que

$$(\bar{\mathfrak{e}}^{+})^{u}(x) = \begin{cases} u \cdot \dfrac{2x^2}{(1-x)\sqrt{3x^2-2x+1}} \arctan \dfrac{1-x}{\sqrt{3x^2-2x+1}} + \\ \qquad (1-u) \cdot \dfrac{2y^2}{(1-y)\sqrt{3y^2-2y+1}} \cdot \arctan \dfrac{1-y}{\sqrt{3y^2-2y+1}}\,, \ \text{si } x<1 \text{ e } y<1\,, \\ u \cdot \dfrac{2x^2}{(1-x)\sqrt{3x^2-2x+1}} \arctan \dfrac{1-x}{\sqrt{3x^2-2x+1}} + (1-u)\,, \ \text{si } x<1 \text{ e } y=1\,, \\ u + (1-u) \cdot \dfrac{2y^2}{(1-y)\sqrt{3y^2-2y+1}} \cdot \arctan \dfrac{1-y}{\sqrt{3y^2-2y+1}}\,, \ \text{si } x=1 \text{ e } y<1\,, \\ 1\,, \ \text{si } x=y=1\,. \end{cases}$$

3.3.1 Mayoría, proporcionalidad e igualdad en media

Definición 3.89 Diremos que un sistema electoral R es **mayoritario en media** si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$

$$\bar{\mathfrak{e}}^u(x) = \frac{V\left(\{w \in W_{n-1}(\hat{x}) : \hat{x} > \hat{w}_i \quad \text{para cada } \; i = 1, \ldots, n-1\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}} \,.$$

Observación 3.90 Es interesante observar que el valor del caso de mayoría en media definido anteriormente es la expectativa media del sistema mayoritario puro medio vista en 3.28 que, como se observó en 3.29, no dependía de k.

Definición 3.91 Diremos que un sistema electoral R es **proporcional en media** si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$

$$\bar{\mathfrak{e}}^u(x) = \hat{x}\,.$$

Definición 3.92 Diremos que un sistema electoral R es **igualitario en media** si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$

$$\bar{\mathfrak{e}}^u(x) = \frac{1}{n}\,.$$

Proposición 3.93 *(a) La mayoría parcial implica la mayoría en media.*

(b) La proporcionalidad parcial implica la proporcionalidad en media.

(c) La igualdad parcial implica la igualdad en media.

DEMOSTRACIÓN. (a) Puesto que, por 3.70 y ser R mayoritario,

$$\bar{\mathfrak{e}}^u(x) = \mu(\bar{e}^u_x) = \frac{V\left(\{W_{n-1}(\hat{x}) : \hat{x} > \hat{w}_i \quad \text{para cada } \; i = 1, \ldots, n-1\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$.

(b) Dado que, por 3.70 y ser R proporcional,

$$\bar{\mathfrak{e}}^u(x) = \mu(\bar{e}^u_x) = \mu(\hat{x}) = \hat{x}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$.

(c) Ya que, por 3.70 y ser R igualitario,

$$\bar{\mathfrak{e}}^u(x) = \mu(\bar{e}_x^u) = \mu\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$. □

Proposición 3.94 *(a) La mayoría implica la mayoría en media.*

(b) La proporcionalidad implica la proporcionalidad en media.

(c) La igualdad implica la igualdad en media.

Demostración. Consecuencia inmediata de 2.183 y 3.93. □

Proposición 3.95 *(a) Los sistemas ordinales asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son mayoritarios en media e igualitarios en media, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas son proporcionales en media.

(c) Los sistemas de divisores 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son mayoritarios en media, proporcionales en media e igualitarios en media, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.303 y 3.94. □

Corolario 3.96 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros son mayoritario en media e igualitario en media, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos es proporcional en media.

(c) Los sistemas de divisores lineales –y, en particular, el de Hondt– son proporcionales en media.

Proposición 3.97 *(a) La extensión media de un sistema electoral mayoritario en media es mayoritaria en media.*

(b) La extensión media de un sistema electoral proporcional en media es proporcional en media.

(c) La extensión media de un sistema electoral igualitario en media es igualitaria en media.

DEMOSTRACIÓN. (a) Puesto que, por 1.72 y 3.76 y ser R mayoritario en media,

$$\bar{\bar{\mathfrak{e}}}^{u}(x) = \bar{\mathfrak{e}}^{u_+}(\hat{x}^*) = \frac{V\left(\{u_+ \cdot \hat{w}^* \in W_{n-1}(u_+ \cdot \hat{x}^*) : u_+ \cdot \hat{x}^* > u_+ \cdot \hat{w}_i^* \quad \text{para cada } \ i = 1, \ldots, n-1\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1 - u_+ \cdot \hat{x}^*)^{n-2}}$$

$$= \frac{V\left(\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \hat{x} > \hat{w}_i \quad \text{para cada } \ i = 1, \ldots, n-1\}\right)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1 - \hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$.

(b) Dado que, por 1.72 y 3.76 y ser R proporcional en media,

$$\bar{\bar{\mathfrak{e}}}^{u}(x) = \bar{\mathfrak{e}}^{u_+}(\hat{x}^*) = u_+ \cdot \hat{x}^* = \hat{x}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$.

(c) Ya que, por 3.76 y ser R igualitario en media,

$$\bar{\bar{\mathfrak{e}}}^{u}(x) = \bar{\mathfrak{e}}^{u_+}(\hat{x}^*) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$. □

Corolario 3.98 *(a) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples mayoritarios en media son mayoritarios en media.*

(b) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples proporcionales en media son proporcionales en media.

(c) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples igualitarios en media son igualitarios en media.

Proposición 3.99 *(a) Los sistemas ordinales medios asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son mayoritarios en media e igualitarios en media, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas medios son proporcionales en media.

(c) Los sistemas de divisores medios 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son mayoritarios en media, proporcionales en media e igualitarios en media, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 3.95 y 3.98. □

Corolario 3.100 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros medios son mayoritario en media e igualitario en media, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos medio es proporcional en media.

(c) Los sistemas de divisores lineales medios –y, en particular, el de Hondt medio– son proporcionales en media.

Proposición 3.101 *(a) La suma de sistemas electorales proporcionales en media respecto de uno simple proporcional es proporcional en media.*

(b) La suma de sistemas electorales igualitarios en media respecto de uno simple estable es igualitaria en media.

Demostración. (a) Dado que, por 1.120 y 3.81 y ser R^0 proporcional y R^j proporcional en media para cada $j \in Z$,

$$(\bar{\mathfrak{e}}^{+})^{u}(x) = \begin{pmatrix} (\bar{\mathfrak{e}}^{1})^{u_1^*}(x_1) & \dots & (\bar{\mathfrak{e}}^{z})^{u_z^*}(x_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1^0(u^+) \\ \vdots \\ \bar{r}_z^0(u^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^* \cdot x_1 & \dots & u_z^* \cdot x_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^+ \\ \vdots \\ u_z^+ \end{pmatrix} = \hat{x}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$.

(b) Puesto que, por 3.81 y ser R^0 estable y R^j igualitario en media para cada $j \in Z$,

$$(\bar{\mathfrak{e}}^{+})^{u}(x) = \begin{pmatrix} (\bar{\mathfrak{e}}^{1})^{u_1^*}(x_1) & \dots & (\bar{\mathfrak{e}}^{z})^{u_z^*}(x_z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1^0(u^+) \\ \vdots \\ \bar{r}_z^0(u^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{r}_1^0(u^+) \\ \vdots \\ \bar{r}_z^0(u^+) \end{pmatrix} = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_{p_1+\ldots+p_z}}$ y cada $x \in [0,1]^{p_1+\ldots+p_z}$. □

Corolario 3.102 *(a) Los sistemas electorales suma de sistemas simples proporcionales en media respecto de uno simple proporcional son proporcionales en media.*

(b) Los sistemas electorales suma de sistemas simples igualitarios en media respecto de uno simple estable son igualitarios en media.

Proposición 3.103 *(a) Los sistemas ordinales suma asintóticos de mínima dispersión respecto de uno simple estable son igualitarios en media.*

(b) Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple proporcional son proporcionales en media.

(c) Los sistemas de divisores suma 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos respecto de uno simple proporcional y uno simple estable son proporcionales en media e igualitarios en media, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 3.95 y 3.102. $\square$

Corolario 3.104 *(a) El sistema igualitario puro suma respecto de uno simple estable es igualitario en media.*

(b) El sistema de los mayores restos suma respecto de uno simple proporcional es proporcional en media.

(c) Los sistemas de divisores lineales suma –y, en particular, el de Hondt suma– respecto de uno simple proporcional son proporcionales en media.

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
CRECIMIENTO EN MEDIA	*todos*	*???*	*todos*
ESTABILIDAD EN MEDIA	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN MEDIA	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	$0-$*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD EN MEDIA	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD EN MEDIA	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 3.1: Propiedades de la expectativa electoral media de los sistemas electorales simples notables.

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
CRECIMIENTO EN MEDIA	*todos*	*???*	*todos*
ESTABILIDAD EN MEDIA	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN MEDIA	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	$0-$*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD EN MEDIA	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD EN MEDIA	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 3.2: Propiedades de la expectativa electoral media de los sistemas electorales medios notables.

	Sistema electoral simple	**ORDINALES**	**CUOTAS**	**DIVISORES**
CRECIMIENTO EN MEDIA	*creciente*	*todos*	*???*	*todos*
ESTABILIDAD EN MEDIA	*estable*	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN MEDIA	*arbitrario*	*ninguno*	*ninguno*	*ninguno*
PROPORCIONALIDAD EN MEDIA	*proporcional*	*ninguno*	*todos*	1–*asintóticos*
IGUALDAD EN MEDIA	*estable*	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty$–*asintóticos*

Tabla 3.3: Propiedades de la expectativa electoral media de los sistemas electorales suma notables.

4

Complementos de juegos de mayoría ponderada

A fin de poder relacionar los sistemas electorales con la Teoría de Juegos, dedicaremos este capítulo a analizar algunas cuestiones previas de juegos de mayoría ponderada que se utilizarán en el capítulo siguiente.

Así, comenzamos introduciendo algunas formas alternativas de referirse a los juegos de mayoría ponderada, concretamente su definición a partir de la consideración de cuotas y pesos normalizados y su definición a partir de cuotas estrictas. A continuación, y a partir de la representación anterior de los juegos de mayoría ponderada mediante cuotas estrictas, introducimos la idea de suma de juegos de mayoría ponderada. Finalmente, terminamos el capítulo con el análisis de la convergencia de juegos de mayoría ponderada como caso particular de la convergencia de juegos cooperativos en general.

4.1 Representaciones de juegos de mayoría ponderada

En el contexto de los sistemas electorales se trabaja con votos entre 0 y 1 cuya suma es 1. Es por ello que a la hora de interpretar dichos votos como los de un juego de mayoría ponderada trabajaremos con juegos como los anteriores cuya cuota y votos estén también entre 0 y 1. Además, en muchas situaciones se requiere superar y no sólo igualar una cierta cuota –piénsese, por ejemplo, en la mayoría relativa simple–, lo que conduce también a analizar esta cuestión en la presente sección.

Definición 4.1 Denominamos **juego de mayoría ponderada normalizado** a todo juego de mayoría ponderada

$$[q;\, w_1, \ldots, w_n]$$

tal que

$$0 \leq w_1, \ldots, w_n \leq 1 \quad \text{con} \;\; w_1 + \ldots + w_n = 1$$

y

$$0 < q \leq 1\,.$$

Proposición 4.2 *Todo juego de mayoría ponderada*

$$[q;\, w_1, \ldots, w_n]$$

con

$$w_1, \ldots, w_n \geq 0 \qquad y \qquad 0 < q \leq T = \sum_{i \in N} w_i\,,$$

es equivalente al juego de mayoría ponderada normalizado

$$\left[\frac{q}{T};\, \frac{w_1}{T}, \ldots, \frac{w_n}{T}\right]\,.$$

Demostración. Sólo hay que tener en cuenta que la proporcionalidad de cuotas y votos no modifica las coaliciones ganadoras de su juego simple asociado. □

Ejemplo 4.3 El juego de mayoría ponderada

$$[51;\, 40, 30, 20, 10]$$

se representa en forma normalizada

$$[0.51;\, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1]\,.$$

Proposición 4.4 *Dado un juego simple v definido en N, son equivalentes:*

(i) existe $q \in (0, T]$ tal que S es una coalición ganadora de v si, y sólo si,

$$\sum_{i \in S} w_i \geq q\,;$$

(ii) existe $q' \in [0, T)$ tal que S es una coalición ganadora de v si, y sólo si,

$$\sum_{i \in S} w_i > q'\,.$$

Demostración. Para probar que la primera implica la segunda consideremos la cuota

$$q' = \max \left\{ \sum_{i \in S} w_i : S \notin W \right\}\,.$$

Entonces, si S era una coalición ganadora, se tendrá que

$$\sum_{i \in S} w_i > q'\,;$$

y si era perdedora, que

$$\sum_{i \in S} w_i \leq q'\,.$$

Recíprocamente, sea ahora

$$q = \min \left\{ \sum_{i \in S} w_i : S \in W \right\}\,.$$

Entonces se tiene que

$$\sum_{i \in S} w_i \geq q$$

si S era una coalición ganadora y

$$\sum_{i \in S} w_i \leq q$$

si era perdedora. □

Ejemplo 4.5 El juego de mayoría ponderada normalizado anterior

$$[0.51;\, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1]$$

puede describirse también con la cuota estricta

$$q' = 0.5$$

entendiendo que, en tal caso, se trata de superar y no sólo igualar la cuota.

Ya que la primera condición anterior es la definición de juego de mayoría ponderada normalizado, podemos usar igualmente la segunda. En tal caso, hablaremos de **juegos de mayoría ponderada con cuota estricta** o **juegos de mayoría ponderada estrictos** y escribiremos

$$(q;\, w_1, \ldots, w_n)\,.$$

Proposición 4.6 *(a) El dual del juego de mayoría ponderada*

$$[q;\, w_1, \ldots, w_n]$$

es el juego de mayoría ponderada estricto

$$(T - q;\, w_1, \ldots, w_n)\,.$$

(b) El dual del juego de mayoría ponderada estricto

$$(q;\, w_1, \ldots, w_n)$$

es el juego de mayoría ponderada

$$[T - q;\, w_1, \ldots, w_n]\,.$$

Demostración. (a) Ya que las coaliciones cuyo complementario no son ganadoras del original

$$T - \sum_{i \in S} w_i < q$$

son las coaliciones ganadoras del juego dual

$$\sum_{i \in S} w_i > T - q\,.$$

(b) Análogamente al apartado anterior, pero con desigualdades en sentido amplio. □

Ejemplo 4.7 El dual del juego de mayoría ponderada normalizado estricto

$$(0.5;\, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$$

es el juego de mayoría ponderada normalizado

$$[0.5;\, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1]\,.$$

Observación 4.8 Las propiedades que siguen están formuladas para juegos de mayoría ponderada estrictos, pero son igualmente válidas para juegos de mayoría ponderada usuales. En todas ellas, notaremos los índices de poder de Shapley–Shubik del jugador $i \in N$ por

$$\phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\,.$$

Teorema 4.9 *Si* $(q;\, w_1, \ldots, w_n)$ *es un juego de mayoría ponderada estricto y*

$$\phi_i^j = \begin{cases} 1\,, & si \quad w_j > q \quad e \quad i = j\,, \\ 0\,, & si \quad w_j > q \quad e \quad i \neq j\,, \\ 0\,, & si \quad w_j \leq q \quad e \quad i = j\,, \\ \phi_i[(q - w_j;\, w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_n)]\,, & si \quad w_j \leq q \quad e \quad i \neq j\,, \end{cases}$$

para cada $i, j = 1, \ldots, n$ *entonces, para cada* $i = 1, \ldots, n$,

$$\phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)] = \frac{\phi_i^1 + \ldots + \phi_i^n}{n}\,.$$

Demostración. Si p y p_j son el número de permutaciones en las que i es pivote y el número de éstas que comienzan por j respectivamente, entonces $p = p_1 + \ldots + p_n$ y

$$\phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)] = \frac{p}{n!} = \frac{p_1 + \ldots + p_n}{n!} = \frac{\dfrac{p_1}{(n-1)!} + \ldots + \dfrac{p_n}{(n-1)!}}{n}$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. Por tanto, todo se reduce a probar que para cada $i, j = 1, \ldots, n$ es

$$\frac{p_j}{(n-1)!} = \phi_i^j\,.$$

Primer caso: $w_j > q$. Entonces, el pivote de todas las permutaciones que empiezan por j es j:

$$\frac{p_j}{(n-1)!} = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!}{(n-1)!} = 1\,, & \text{si} \quad i = j\,, \\ \dfrac{0}{(n-1)!} = 0\,, & \text{si} \quad i \neq j\,. \end{cases}$$

Segundo caso: $w_j \leq q$. En primer lugar, si $i = j$ es $w_i \leq q$ e i no puede ser pivote de ninguna permutación que empiece por j. Y si $i \neq j$, si ν_j es la permutación obtenida de una permutación dada ν de $\{1, \ldots, n\}$ prescindiendo de j y manteniendo el orden del resto de elementos de ν y P es el conjunto de predecesores de i en ν tenemos que i es pivote de ν si, y sólo si,

$$\sum_{k \in P} w_k \leq q \quad \text{y} \quad w_i + \sum_{k \in P} w_k > q\,,$$

o sea,

$$\sum_{k \in P - \{j\}} w_k - w_j \leq q - w_j \quad \text{y} \quad w_i + \sum_{k \in P - \{j\}} w_k - w_j > q - w_j\,,$$

lo que significa que i es pivote de ν_j. Por tanto,

$$\frac{p_j}{(n-1)!} = \begin{cases} \dfrac{0}{(n-1)!} = 0\,, & \text{si} \quad i = j\,, \\ \phi_i[(q - w_j;\, w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_n)]\,, & \text{si} \quad i \neq j\,, \end{cases}$$

efectivamente. $\square$

Observación 4.10 La propiedad anterior proporciona una forma recursiva de calcular los índices de poder de los juegos de mayoría ponderada. Podemos facilitar dicho cálculo mediante la adopción de algunos convenios adecuados.

Primeramente, escribimos los n juegos de mayoría ponderada de $n-1$ jugadores obtenidos suprimiendo sucesivamente cada uno de los jugadores formalmente:

$$(q-w_1;\, w_2,\ldots,w_n),\ldots,(q-w_n;\, w_1,\ldots,w_{n-1})\,.$$

Entonces, en primer lugar, para los índices $j=1,\ldots,n$ tales que $q-w_j<0$ –es decir, cuando $w_j>q$– convenimos que el índice de poder del jugador j es 1 y el del resto 0 –como en los dos primeros casos de la definición de ϕ_i^j–.

Y en segundo lugar, para los índices $j=1,\ldots,n$ tales que $q-w_j\geq 0$ –es decir, cuando $w_j\leq q$– convenimos que el índice de poder del jugador j es 0 y el del resto el índice de poder

$$\phi_i[(q-w_j;\, w_1,\ldots,w_{j-1},w_{j+1},\ldots,w_n)]$$

que le corresponde como juego de mayoría ponderada auténtico –como en los dos últimos casos de la definición de ϕ_i^j–.

Ejemplo 4.11 Dado el juego de mayoría ponderada normalizado estricto de 4 jugadores

$$(0.5;\, 0.4,0.3,0.2,0.1)\,,$$

consideramos los 4 juegos de mayoría ponderada normalizados estrictos de 3 jugadores

$$(0.1;\, 0.3,0.2,0.1)\,,\quad (0.2;\, 0.4,0.2,0.1)\,,\quad (0.3;\, 0.4,0.3,0.1)\quad \text{y}\quad (0.4;\, 0.4,0.3,0.2)\,.$$

Como en este caso no hay cuotas negativas, para calcular el índice de poder del primer jugador tendremos en cuenta que en el primero de los juegos anteriores –que es el que se obtiene prescindiendo del primer jugador– el índice de poder será 0 y en el resto el que realmente le corresponde como juego de mayoría ponderada:

$$\phi_1(0.5;\, 0.4,0.3,0.2,0.1) =$$
$$\frac{\phi_1(0.1;\, 0.3,0.2,0.1)+\phi_1(0.2;\, 0.4,0.2,0.1)+\phi_1(0.3;\, 0.4,0.3,0.1)+\phi_1(0.4;\, 0.4,0.3,0.2)}{4} =$$
$$\frac{0+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{4}=\frac{5}{12}\,.$$

Teorema 4.12 *Si* $(q;\, w_1, \ldots, w_n)$ *es un juego de mayoría ponderada estricto entonces, para cada* $i = 1, \ldots, n$,

$$\int_0^T \phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\, dq = w_i\,.$$

Demostración. En primer lugar, para cada $i \in N$ consideremos el caso en que $(q;\, w_1, \ldots, w_n)$ es el juego de unanimidad u_i^n de i. Entonces

$$\int_0^T \phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\, dq = \int_0^{T-w_i} 0\, dq + \int_{T-w_i}^T 1\, dq = 0 + T - (T - w_i) = w_i\,.$$

Y en el caso general, procederemos por inducción sobre n. Así, si $n = 1$ como el juego es entonces el de unanimidad, por el caso anterior se tiene que

$$\int_0^T \phi_i[(q;\, w_1)]\, dq = w_1\,.$$

Supongamos ahora que la afirmación es cierta para los juegos de mayoría ponderada estrictos de $n-1$ jugadores. Entonces, por el caso anterior y por 4.9, se deduce que

$$\int_0^T \phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\, dq = \frac{1}{n}\left[\int_0^T \phi_i^1\, dq + \ldots + \int_0^T \phi_i^n\, dq\right] = \frac{1}{n}(w_i + \ldots + w_i) = w_i$$

para cada $i \in N$. $\square$

Proposición 4.13 *Si* $(q;\, w_1, \ldots, w_n)$ *es un juego de mayoría ponderada estricto entonces, para cada* $i \in N$,

$$w_i = 0$$

si, y sólo si, i *es jugador nulo para cada* $q \in [0, T)$

$$\phi_i(q;\, w_1, \ldots, w_n) = 0\,.$$

Demostración. La afirmación en sentido directo es obvia.

Y para el recíproco, sólo hay que tener en cuenta que

$$\int_0^T \phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\, dq = w_i = 0$$

por 4.12. $\square$

Proposición 4.14 *Sea* $(q;\, w_1, \ldots, w_n)$ *un juego de mayoría ponderada estricto.*

(a) Para cada $h, i = 1, \ldots, n$

$$w_h \leq w_i$$

si, y sólo si, para cada $q \in [0, T)$

$$\phi_h(q;\, w_1, \ldots, w_n) \leq \phi_i(q;\, w_1, \ldots, w_n)\,.$$

(b) Para cada $h, i = 1, \ldots, n$

$$w_h < w_i$$

si, y sólo si, para cada $q \in [0, T)$

$$\phi_h(q;\, w_1, \ldots, w_n) \leq \phi_i(q;\, w_1, \ldots, w_n)$$

y existe $q_0 \in [0, T)$ *tal que*

$$\phi_h(q_0;\, w_1, \ldots, w_n) < \phi_i(q_0;\, w_1, \ldots, w_n)\,.$$

Demostración. (a) La afirmación en sentido directo es conocida.

Y para el recíproco sólo hay que tener en cuenta que para cada $h, i = 1, \ldots, n$

$$w_h = \int_0^T \phi_h[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\, dq \leq \int_0^T \phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\, dq = w_i$$

por 4.12.

(b) La afirmación en sentido directo es conocida.

Y para el recíproco sólo hay que tener en cuenta que para cada $h, i = 1, \ldots, n$

$$w_h = \int_0^T \phi_h[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\, dq \leq \int_0^T \phi_i[(q;\, w_1, \ldots, w_n)]\, dq = w_i$$

por 4.12; y que si no existiese $q \in [0, T)$ tal que

$$\phi_h(q;\, w_1, \ldots, w_n) < \phi_i(q;\, w_1, \ldots, w_n)$$

significaría que para cada $q \in [0, T)$ es

$$\phi_h(q;\, w_1, \ldots, w_n) \geq \phi_i(q;\, w_1, \ldots, w_n)$$

y en consecuencia, por el apartado anterior, se deduciría que

$$w_h \geq w_i\,,$$

en contra de la hipótesis inicial. $\square$

Teorema 4.15 *Sean $v_q = (q; w_1, \ldots, w_n)$ y $v'_q = (q; w'_1, \ldots, w'_n)$ dos juegos de mayoría ponderada estrictos.*

(a) Para cada $i = 1, \ldots, n$, si

$$w'_i \geq w_i \qquad \text{y} \qquad w'_j \leq w_j \quad \text{para cada} \quad j \neq i$$

entonces

$$\phi_i[v_q] \geq \phi_i[v'_q]$$

para cada $q \in [0, T)$.

(b) Para cada $i = 1, \ldots, n$, si

$$\phi_i[v_q] \geq \phi_i[v'_q]$$

casi por todo $q \in [0, T)$ entonces

$$w_i \geq w'_i\,.$$

Demostración. (a) Será suficiente con ver que, dada una permutación cualquiera ν de N, si el jugador i es pivote en el primer juego entonces lo es también en el segundo.

Así, si P es su conjunto de predecesores respecto de la permutación ν en el primer juego entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{j \in P} w_j \leq q \qquad \text{y} \qquad w_i + \sum_{j \in P} w_j > q\,.$$

Por ser

$$\sum_{j \in P} w_j - \sum_{j \in P} w'_j = \sum_{j \in P} (w_j - w'_j) \leq \sum_{j \neq i} (w_j - w'_j) = \sum_{j \neq i} w_j - \sum_{j \neq i} w'_j = w'_i - w_i$$

resulta

$$\sum_{j \in P} w'_j \leq \sum_{j \in P} w_j \leq q \qquad \text{y} \qquad w'_i + \sum_{j \in P} w'_j \geq w_i + \sum_{j \in P} w_j > q$$

y por tanto, el jugador i es también pivote en el segundo juego.

(b) Puesto que, por 4.12,

$$w_i = \int_0^T \phi_i[v_q]\, dq \geq \int_0^T \phi_i[v'_q]\, dq = w'_i$$

para cada $i = 1, \ldots, n$. □

4.2 Suma de juegos de mayoría ponderada

Para abordar adecuadamente la relación entre los diferentes conceptos de sistemas electorales y de juegos de mayoría ponderada relacionados con la suma de sistemas electorales, introducimos una operación entre juegos de mayoría ponderada que denominamos suma.

Una de las razones que justifican el uso de cuotas estrictas es que, por ejemplo, la *mayoría simple* se describe más fácilmente puesto que entonces la cuota estricta es sencillamente la mitad de los pesos y se trata, por tanto, de superar dicha cuota y no sólo de igualarla.

Definición 4.16 Se denomina **suma** de los p juegos de mayoría ponderada estricto

$$(q_1;\, w_1^1, \ldots, w_n^1), \ldots, (q_p;\, w_1^p, \ldots, w_n^p)$$

al también juego de mayoría ponderada estricto

$$(q_1;\, w_1^1, \ldots, w_n^1) + \ldots + (q_p;\, w_1^p, \ldots, w_n^p) = (q_1 + \ldots + q_p;\, w_1^1 + \ldots + w_1^p, \ldots, w_n^1 + \ldots + w_n^p)\,.$$

Observación 4.17 La definición anterior no es consistente respecto a la proporcionalidad arbitraria de cada uno de los juegos pero sí lo es respecto a la misma constante de proporcionalidad para todos ellos.

Ejemplo 4.18 Dados los juegos de mayoría ponderada

$$[31;\, 24, 18, 12, 6] \qquad \text{y} \qquad [21;\, 8, 12, 16, 4]$$

sumando término a término se obtendría

$$[52;\, 32, 30, 28, 10]$$

cuando en realidad la cuota debería ser 51. En cambio, si escribimos los juegos de mayoría ponderada utilizando cuotas estrictas tenemos

$$(30;\, 24, 18, 12, 6) + (20;\, 8, 12, 16, 4) = (50;\, 32, 30, 28, 10)\,,$$

que sí se corresponde con el hecho de que la mayoría simple se obtiene superando la cuota 50. Y esto es igualmente válido si consideramos, por ejemplo, ambos juegos de mayoría ponderada multiplicados por 2:

$$(60;\, 48, 36, 24, 12) + (40;\, 16, 24, 32, 8) = (100;\, 64, 60, 56, 20)\,.$$

Dados pesos $0 < u_1, \ldots, u_p < 1$ tales que $u_1 + \ldots + u_p = 1$ y juegos de mayoría ponderada normalizados estrictos

$$(q_1;\, w_1^1, \ldots, w_n^1), \ldots, (q_p;\, w_1^p, \ldots, w_n^p)\,,$$

como éstos son equivalentes a los juegos de mayoría ponderada normalizados estrictos

$$(u_1 q_1;\, u_1 w_1^1, \ldots, u_1 w_n^1), \ldots, (u_p q_p;\, u_p w_1^p, \ldots, u_p w_n^p)$$

y

$$u_1 w_1^1 + \ldots + u_p w_1^p + \ldots + u_1 w_n^1 + \ldots + u_p w_n^p =$$
$$u_1(w_1^1 + \ldots + w_n^1) + \ldots + u_p(w_1^p + \ldots + w_n^p) = u_1 + \ldots + u_p = 1\,,$$

consideraremos que su juego de mayoría ponderada normalizado suma estricto es el

$$(u_1 q_1 + \ldots + u_p q_p;\, u_1 w_1^1 + \ldots + u_p w_1^p, \ldots, u_1 w_n^1 + \ldots + u_p w_n^p)\,.$$

Ejemplo 4.19 Consideremos los juegos de mayoría ponderada estrictos

$$\left(\frac{1}{2};\, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1\right) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{1}{2};\, 0.2, 0.3, 0.4, 0.1\right)$$

y supongamos que los pesos respectivos son

$$u_1 = 0.6 \qquad \text{y} \qquad u_2 = 0.4\,.$$

Entonces, el juego suma es

$$\left(\frac{1}{2};\, 0.32, 0.30, 0.28, 0.10\right)\,.$$

Observación 4.20 Es falso que el índice de poder de Shapley–Shubik del juego de mayoría ponderada suma coincida con el promedio de los índices de poder de Shapley–Shubik de los juegos de mayoría ponderada iniciales, como se puede ver en el siguiente contraejemplo.

Contraejemplo 4.21 El último jugador no es nulo en ninguno de los juegos de mayoría ponderada estrictos del ejemplo 4.19 pero sí lo es en el juego de mayoría ponderada estricto suma.

Observación 4.22 En particular, el contraejemplo anterior muestra también que un jugador puede no ser nulo en los juegos de mayoría ponderada estrictos iniciales y sí serlo en el juego de mayoría ponderada estricto suma.

Representaremos por

$$W_1, \ldots, W_p \qquad \text{y} \qquad W$$

las familias de coaliciones ganadoras de los juegos simples

$$v_1, \ldots, v_p \qquad \text{y} \qquad v$$

asociados a cada juego de mayoría ponderada estricto y a su suma respectivamente, y añadiremos el superíndice m para referirnos a sus coaliciones minimales.

Proposición 4.23 $W_1 \cap \ldots \cap W_p \subseteq W \subseteq W_1 \cup \ldots \cup W_p$.

Demostración. Puesto que si

$$S \in W_1 \cap \ldots \cap W_p$$

entonces

$$\sum_{i \in S} w_i^j > q$$

para cada $j = 1, \ldots, p$, por lo que

$$\sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{p} w_i^j > q$$

y, por consiguiente,

$$S \in W\,.$$

Y por otra parte, si

$$S \notin W_1 \cup \ldots \cup W_p$$

entonces

$$S \notin W_j$$

para cada $j = 1, \ldots, p$ y por tanto,

$$\sum_{i \in S} w_i^j \leq q$$

para cada $j = 1, \ldots, p$, de lo que se deduce que

$$\sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{p} w_i^j \leq q$$

y en consecuencia,

$$S \notin W$$

efectivamente. □

Corolario 4.24 $W_1^m \cap \ldots \cap W_p^m \subseteq W^m$.

Demostración. Ya que si

$$S \in W_1^m \cap \ldots \cap W_p^m$$

entonces

$$S \in W$$

por la proposición anterior.

Y por otra parte, para cada $T \subset S$, se tiene que

$$T \notin W_j$$

para cada $j = 1, \ldots, p$, es decir,

$$T \notin W_1 \cup \ldots \cup W_p$$

y por tanto,

$$T \notin W$$

con lo que

$$S \in W^m$$

efectivamente. □

Corolario 4.25 *Si un jugador es dictador de los juegos simples $W_1, \ldots, W_p$ entonces lo es también del juego simple W.*

Demostración. Por la proposición anterior, si i es el jugador dictador entonces

$$\{i\} \in W^m .$$

Pero además, tenemos que

$$N - \{i\} \notin W_j$$

para cada $j = 1, \ldots, p$, lo cual implica en particular que

$$N - \{i\} \notin W$$

efectivamente. □

4.3 Convergencia de juegos de mayoría ponderada

Una de las cuestiones más importantes de los sistemas electorales es la de su convergencia. A fin de poder relacionar la convergencia de los sistemas electorales con la de los juegos de mayoría ponderada estrictos que se le asocian, es necesario poder considerar la noción de convergencia de juegos de mayoría ponderada. Sin embargo, su definición, para que sea precisa, requiere de una situación más general, la de los juegos cooperativos, que presentamos a continuación.

Sabemos que el espacio vectorial de los juegos cooperativos tiene dimensión $2^n - 1$, siendo n el cardinal del conjunto de jugadores N. Esto permite identificarlo con el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{2^n-1}$. Podemos, por tanto, transportar la estructura euclídea al espacio vectorial de los juegos cooperativos sobre N. Así, por ejemplo, el producto escalar y su norma asociada son

$$v \cdot w = \sum_{S \subseteq N} v(S) \cdot w(S) \qquad \text{y} \qquad \|v\| = \sqrt{\sum_{S \subseteq N} [v(S)]^2},$$

respectivamente.

Proposición 4.26 *La sucesión de juegos cooperativos*

$$(v_k)_{k \geq 1}$$

converge al juego cooperativo v si, y sólo si, para cada $S \subseteq N$ la sucesión de números reales

$$(v_k(S))_{k \geq 1}$$

converge al número real $v(S)$.

Demostración. Sólo hay que tener en cuenta que en el espacio euclídeo una sucesión es convergente si, y sólo si, lo es cada una de sus sucesiones componentes. □

Proposición 4.27 *(a) El límite de la suma de dos sucesiones de juegos cooperativos convergentes es la suma de los límites de cada una de las sucesiones.*

(b) El límite del producto de dos sucesiones de juegos cooperativos convergentes es el producto de los límites de cada una de las sucesiones.

Demostración. Consecuencia inmediata de la proposición anterior y de las propiedades de los límites de sucesiones de números reales. □

Proposición 4.28 *Una sucesión de juegos cooperativos* $(v_k)_{k\geq 1}$ *converge a otro juego cooperativo* v

$$(v_k)_{k\geq 1} \longrightarrow v$$

si, y sólo si, la sucesión de juegos duales $(v_k^*)_{k\geq 1}$ *converge al juego dual* v^*

$$(v_k^*)_{k\geq 1} \longrightarrow v^* \,.$$

Demostración. Por una parte, tenemos

$$v_k^*(S) = v_k(N) - v_k(N - S)$$

que converge a

$$v(N) - v\,(N - S) = v^*(S)\,.$$

Y, por otra, usando precisamente este resultado, tenemos que

$$(v_k^*)^* = v_k$$

converge a

$$(v^*)^* = v\,,$$

puesto que el bidual de un juego coincide con el propio juego. □

Proposición 4.29 *Una sucesión de juegos cooperativos* $(v_k)_{k\geq 1}$ *converge a otro juego cooperativo juego* v

$$(v_k)_{k\geq 1} \longrightarrow v$$

si, y sólo si, para cada $S \subseteq N$ *la sucesión de juegos restringidos* $(v_{k_{|S}})_{k\geq 1}$ *converge al juego restringido* $v_{|S}$

$$(v_{k_{|S}})_{k\geq 1} \longrightarrow v_{|S}\ .$$

Demostración. Si $S \subseteq T$, entonces

$$v_{k|S}\,(T) = v_k\,(T)$$

que converge a

$$v\,(T) = v_{|S}\,(T)\ .$$

Y para el recíproco de la afirmación basta con tomar $S = N$. □

Proposición 4.30 *Una sucesión de juegos cooperativos $(v_k)_{k\geq 1}$ converge a otro juego cooperativo v*

$$(v_k)_{k\geq 1} \longrightarrow v$$

si, y sólo si, para cada $M \supseteq N$ la sucesión de extensiones nulas $\left(v_k^M\right)_{k\geq 1}$ converge a la extensión nula v^M

$$(v_k^M)_{k\geq 1} \longrightarrow v^M \, .$$

Demostración. Para toda coalición $S \subseteq M$, se tiene que

$$v_k^M(S) = v_k(S \cap M) \, ,$$

que tiende a

$$v(S \cap M) = v^M(S) \, .$$

El recíproco se obtiene, asimismo, tomando $M = N$. □

Proposición 4.31 *Una sucesión de juegos cooperativos $(v_k)_{k\geq 1}$ converge a otro juego cooperativo v*

$$(v_k)_{k\geq 1} \longrightarrow v$$

si, y sólo si, para cada estructura de coaliciones $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_z\}$ de N la sucesión de juegos cocientes $(v_k^{\mathcal{B}})_{k\geq 1}$ converge al juego cociente $v^{\mathcal{B}}$

$$(v_k^{\mathcal{B}})_{k\geq 1} \longrightarrow v^{\mathcal{B}} \, .$$

Demostración. Sea T una coalición arbitraria del conjunto cociente $N/\mathcal{B}$.

Entonces, si consideramos la proyección canónica de N en $N/\mathcal{B}$

$$\pi : N \longrightarrow N/\mathcal{B}$$

tenemos que

$$v_k^{\mathcal{B}}(T) = v_k\left[\pi_{\mathcal{B}}^{-1}(T)\right]$$

y su límite es

$$v\left[\pi_{\mathcal{B}}^{-1}(T)\right] = v^{\mathcal{B}}(T) \, .$$

Y aplicando la misma afirmación al caso $\mathcal{B} = \{N\}$ se obtiene el recíproco. □

Proposición 4.32 *El límite de una sucesión de juegos cooperativos monótonos es monótono.*

Demostración. Si S y T son coaliciones y $S \subseteq T$, entonces

$$v_k(S) \leq v_k\,(T)$$

para cada k, de lo que se deduce que

$$v(S) \leq v\,(T)$$

tomando límites. □

Proposición 4.33 *El límite de una sucesión de juegos cooperativos superaditivos es superaditivo.*

Demostración. Si S y T son coaliciones disjuntas, entonces

$$v_k\,(S \cup T) \geq v_k(S) + v_k\,(T)$$

para cada k, de donde

$$v\,(S \cup T) \geq v(S) + v\,(T)$$

tomando asimismo límites. □

Proposición 4.34 *Si una sucesión de juegos cooperativos*

$$(v_k)_{k \geq 1}$$

converge a otro juego cooperativo v entonces, para cada jugador $i \in N$:

(a) la sucesión de valores de Shapley de cada v_k

$$(\phi_i[v_k])_{k \geq 1}$$

converge al valor de Shapley de v

$$\phi_i[v]\,;$$

(b) para cada estructura de coaliciones $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_z\}$ de N, la sucesión de valores coalicionales de cada v_k

$$(\phi_i\,[v_k; \mathcal{B}])_{k \geq 1}$$

converge al valor coalicional de v

$$\phi_i\,[v; \mathcal{B}]\ .$$

Demostración. Puesto que el límite de la suma es la suma de sus límites, etc. □

Proposición 4.35 *Una sucesión de juegos simples es convergente si, y sólo si, es quasiconstante.*

Demostración. Puesto que el conjunto de los juegos simples se identifica con el subconjunto del conjunto de vectores del espacio euclídeo cuyas componentes son 0 o 1

$$\{(x_1, \ldots, x_{2^n-1}) \in \mathbb{R}^{2^n-1} : x_i = 0 \quad \text{o} \quad x_i = 1 \quad \text{para cada} \quad i = 1, \ldots, 2^n - 1\}$$

y, en consecuencia, tiene la topología discreta como topología inducida por la del espacio euclídeo. □

Observación 4.36 La proposición anterior equivale a decir que el conjunto de coaliciones ganadoras

$$(W_k)_{k \geq 1}$$

de los juegos de la sucesión es quasiconstante y que, entonces, el conjunto de coaliciones ganadoras W del juego límite es, precisamente, dicho conjunto constante.

Corolario 4.37 *Si una sucesión de juegos simples $(v_k)_{k\geq 1}$ es convergente a un juego simple v*

$$(v_k)_{k\geq 1} \longrightarrow v$$

entonces, para cada jugador $i \in N$:

(a) la sucesión de índices de poder de Shapley–Shubik de cada v_k

$$(\phi_i[v_k])_{k\geq 1}$$

converge al índice de poder de Shapley–Shubik de v

$$\phi_i[v]$$

y, además, es quasiconstante;

(b) para cada estructura de coaliciones $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_z\}$ de N, la sucesión de valores coalicionales de cada v_k

$$(\phi_i\,[v_k; \mathcal{B}])_{k\geq 1}$$

converge al valor coalicional de v

$$\phi_i\,[v; \mathcal{B}]$$

y, además, es quasiconstante.

Teorema 4.38 *Sean v y v_k los juegos simples de los juegos de mayoría ponderada estrictos*

$$(q;\, w_1, \ldots, w_n) \qquad y \qquad (q;\, w_1^k, \ldots, w_n^k)$$

para cada $k \geq 1$, respectivamente. Si

$$\lim_{k \to +\infty} w_i^k = w_i$$

para cada $i \in N$ y

$$\sum_{i \in S} w_i \neq q$$

para cada $S \subseteq N$, entonces

$$\lim_{k \to +\infty} v_k = v\,.$$

Demostración. Sean W y W_k el conjunto de coaliciones ganadoras de v y v_k y

$$a = \min\left\{\sum_{i \in S} w_i : S \in W\right\} > q \qquad y \qquad b = \max\left\{\sum_{i \in S} w_i : S \notin W\right\} < q\,.$$

Entonces, para cada $i = 1, \ldots, n$ existen k_i^1 y k_i^2 tales que para cada $k \geq k_i^1$ y cada $k \geq k_i^2$

$$|w_i^k - w_i| < \frac{a-q}{n} \qquad \text{y} \qquad |w_i^k - w_i| > \frac{q-b}{n}\,.$$

Dada una coalición arbitraria S, sean s su cardinal y $k_0 = \max\{k_1^1, \ldots, k_n^1, k_1^2, \ldots, k_n^2\}$.

Primer caso: Si $S \in W$ entonces $S \in W_k$ para cada $k \geq k_0$, puesto que

$$\sum_{i \in S} w_i^k > \sum_{i \in S}\left(w_i - \frac{a-q}{n}\right) = \sum_{i \in S} w_i - s \cdot \frac{a-q}{n} > a - n \cdot \frac{a-q}{n} = q\,.$$

Segundo caso: Si $S \notin W$ entonces $S \notin W_k$ para cada $k \geq k_0$, puesto que

$$\sum_{i \in S} w_i^k < \sum_{i \in S}\left(w_i + \frac{q-b}{n}\right) = \sum_{i \in S} w_i + s \cdot \frac{q-b}{n} < b + n \cdot \frac{q-b}{n} = q\,.$$

Por tanto, $W = W_k$ para cada $k \geq k_0$, por lo que

$$(v_k)_{k \geq 1}$$

es quasiconstante igual a v de lo que, por 4.36, se deduce la afirmación del enunciado. $\square$

Observación 4.39 El teorema anterior es igualmente válido para los juegos de mayoría ponderada usuales.

5

Sistemas de poder

Entre los objetivos del presente trabajo se encuentra el de relacionar los sistemas electorales con la Teoría de Juegos. Para ello, nos basamos en la interpretación de los votos y el número de representantes de cada candidatura como juegos de mayoría ponderada una vez fijada una cuota.

Comenzamos introduciendo el concepto de sistema de poder a partir de la consideración de los índices de poder de Shapley–Shubik de los juegos de mayoría ponderada obtenidos con una cuota previamente fijada y los representantes de las candidaturas. Seguidamente, continuamos con las nociones de monotonía, superaditividad, estabilidad y, en particular, de mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder, análogas a sus homónimas para sistemas electorales, pero referidas a los índices de poder. A continuación, introducimos la noción de expectativa de poder y estudiamos su estabilidad y, en particular, los casos particulares de mayoría, proporcionalidad e igualdad parciales en poder referidos a las expectativas de poder en lugar de a las expectativas electorales. Finalmente, hacemos lo propio con la expectativa de poder media y las propiedades de estabilidad, mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder y media.

5.1 Sistemas de poder

Fijada una cuota, podemos considerar el índice de poder de cada candidatura del juego de mayoría ponderada normalizado dado por dicha cuota y los representantes de cada candidatura. El objetivo de la sección es "valorar"el efecto que tiene un sistema electoral sobre las diferentes candidaturas en términos de poder en lugar de hacerlo por su número de representantes.

Definición 5.1 Se denomina **sistema de poder** asociado al sistema electoral R –o sistema de poder ρ simplemente si no hay peligro de confusión– a la terna $(N, \aleph, \rho)$, donde ρ es la familia

$$(\rho^{q,u})_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}$$

de aplicaciones

$$\rho^{q,u} : W_n^p \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definidas para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$ por

$$\rho^{q,u}(w,k) = (\phi_1(q;\, r_1^u(w,k), \ldots, r_n^u(w,k)), \ldots, \phi_n(q;\, r_1^u(w,k), \ldots, r_n^u(w,k)))\ .$$

Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos las aplicaciones

$$\rho^{q,u,k} : W_n^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definidas para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$ por

$$\rho_i^{q,u,k}(w) = \rho_i^{q,u}(w,k)\,.$$

$\rho^{q,u}$ y $\rho^{q,u,k}$ se denominan, respectivamente, **reglas de poder** y **leyes de poder**.

Proposición 5.2 $\rho^{q,u,k}$ *es un vector aleatorio.*

Demostración. Puesto que tanto $r^{u,k}$ como ϕ son vectores aleatorios. □

Proposición 5.3 *(a) Para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $k \in \mathbb{N}$, si $w_i = (0, \ldots, 0)$ entonces*

$$\rho_i^{q,u}(w,k) = 0\,.$$

(b) Para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $k \in \mathbb{N}$, si $w_i = (1, \ldots, 1)$ entonces

$$\rho_i^{q,u}(w,k) = 1\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.20. □

Proposición 5.4 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$*

$$r_i^u(w,k) = \int_0^1 \rho_i^{q,u}(w,k)\, dq\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 4.12. □

Observación 5.5 Por tanto, la familia de reglas electorales relativas

$$(r^u)_{u\in\overline{U_p}}$$

determina la familia

$$(\rho^{q,u})_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}\;.$$

Y, recíprocamente, la familia

$$(\rho^{q,u})_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}$$

determina la familia de reglas electorales relativas

$$(r^u)_{u\in\overline{U_p}}$$

del sistema electoral.

Ejemplo 5.6 Consideremos el caso del sistema electoral simple definido para $n = 4$ candidaturas y con $k = 4$ representantes a elegir que otorga 3 y 1 representantes respectivamente a la candidatura de mayor voto y a la siguiente de voto mayor –salvo cuando la primera tenga voto 1, en cuyo caso obtiene los 4–. Entonces, dada la tabla de votos

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

y la cuota $q = \dfrac{1}{2}$, el juego de mayoría ponderada es

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, 0\right)$$

que se corresponde con la dictadura del primer jugador

$$\rho^{1/2}\left((0.4, 0.3, 0.2, 0.1), 4\right) = (1, 0, 0, 0)\,.$$

Proposición 5.7 *Si ρ' es el sistema de poder asociado al sistema electoral inducido R' de R*

$$(\rho')_i^{q,u}(w,k) = \rho_i^{q,u}(w',k)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_{n'}^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ya que, por 1.189, para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $i \in N$

$$(\rho')^{q,u}(w,k) = \phi_i(q;\, (r')_1^u(w,k), \ldots, (r')_n^u(w,k)) =$$

$$\phi_i(q;\, r_1^u\,(w',k)\,, \ldots, r_n^u\,(w',k)) = \rho^{q,u}(w',k)$$

para cada $w \in W_{n'}^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 5.8 *En los sistemas ordinales, si w_i es el h_i–ésimo voto de w*

$$\rho_i^q(w,k) = \phi_i\left(q;\, \frac{c_{h_1}(k)}{k}, \ldots, \frac{c_{h_n}(k)}{k}\right)\,,$$

para cada cada $q \in [0,1)$, $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.35. □

Corolario 5.9 *(a) En el sistema mayoritario puro,*

$$\rho_i^q(w,k) = \begin{cases} 1\,, & si\ \ w_i > w_j\ \ para\ cada\ \ h \neq i\,, \\ 0\,, & si\ \ w_h < w_i\ \ para\ algún\ \ h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

(b) En el sistema igualitario puro, si $B_i = 1$ o $B_i = 0$ según w_i sea uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores o no respectivamente

$$\rho_i^q(w,k) = \phi_i\left(q;\, \frac{\left[\dfrac{k}{n}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\dfrac{k}{n}\right] + B_n}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Observación 5.10 Los índices de poder del sistema de poder mayoritario puro no dependen ni de q ni de k.

Proposición 5.11 *En los sistemas de cuotas con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, si $B_i = 1$ o $B_i = 0$ según $\frac{w_i}{q_k} - \left[\frac{w_i}{q_k}\right]$ sea uno de los mayores restos o no respectivamente*

$$\rho_i^q(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{\left[\dfrac{w_1}{q_k}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\dfrac{w_n}{q_k}\right] + B_n}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.47. □

Corolario 5.12 *En el sistema de los mayores restos, si $B_i = 1$ o $B_i = 0$ según $kw_i - [kw_i]$ sea uno de los mayores restos o no respectivamente*

$$\rho_i^q(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{[kw_1] + B_1}{k}, \ldots, \frac{[kw_n] + B_n}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Proposición 5.13 *En los sistemas de divisores con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que*

$$\rho_i^q(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{\left[g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x_0}\right)\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[g^{-1}\left(\dfrac{w_n}{x_0}\right)\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.64. □

Corolario 5.14 *En los sistemas de divisores lineales con $g_d = d + s$ y $s > -1$, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que*

$$\rho_i^q(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{\left[\dfrac{w_1}{x_0} - s\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[\dfrac{w_n}{x_0} - s\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n$.

Proposición 5.15 *Si $\hat{\rho}$ es el sistema de poder asociado a la extensión media $\hat{R}$ de R*

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \rho_i^{q,u+}(\hat{w}^*,k)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Ya que, por 1.91, para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $i \in N$

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \phi_i(q;\, \hat{r}_1^u(w,k),\ldots,\hat{r}_n^u(w,k)) = \phi_i(q;\, r_1^{u+}(\hat{w}^*,k),\ldots,r_n^{u+}(\hat{w}^*,k)) = \rho_i^{q,u+}(\hat{w}^*,k)$$

para cada $w \in W_n^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Corolario 5.16 *Si $\hat{\rho}$ es el sistema de poder asociado al sistema de poder medio $\hat{R}$ de R*

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \rho_i^{q}(\hat{w},k)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.17 *En los sistemas ordinales medios, si $\hat{w}_i$ es el h_i–ésimo mayor voto del vector $\hat{w}$*

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\, \frac{c_{h_1}(k)}{k},\ldots,\frac{c_{h_n}(k)}{k}\right),$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.8 y 5.16. □

Corolario 5.18 *(a) En el sistema mayoritario puro medio,*

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{w}_i > \hat{w}_h \text{ para cada } h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{w}_i < \hat{w}_h \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

(b) En el sistema igualitario puro medio, si $B_i = 1$ o $B_i = 0$ según $\hat{w}_i$ sea uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos medios mayores o no respectivamente

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\, \frac{\left[\frac{k}{n}\right] + B_1}{k},\ldots,\frac{\left[\frac{k}{n}\right] + B_n}{k}\right),$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Observación 5.19 Los índices de poder del sistema de poder mayoritario puro medio no dependen ni de q ni de k.

Proposición 5.20 *En los sistemas de cuotas medios con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$*, si* $B_i = 1$ *o* $B_i = 0$ *según* $\frac{\hat{w}_i}{q_k} - \left[\frac{\hat{w}_i}{q_k}\right]$ *sea uno de los mayores restos o no respectivamente*

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \phi_i \left(q; \frac{\left[\frac{\hat{w}_1}{q_k}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{\hat{w}_n}{q_k}\right] + B_n}{k} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.11 y 5.16. □

Corolario 5.21 *En el sistema de los mayores restos medio, si* $B_i = 1$ *o* $B_i = 0$ *según* $k\hat{w}_i - [k\hat{w}_i]$ *sea uno de los mayores restos o no respectivamente*

$$\rho_i^q(w,k) = \phi_i \left(q; \frac{[k\hat{w}_1] + B_1}{k}, \ldots, \frac{[k\hat{w}_n] + B_n}{k} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n$*.*

Proposición 5.22 *En los sistemas de divisores medios con* $(g_d)_{q \geq 1}$ *estrictamente creciente, existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \phi_i \left(q; \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{w}_1}{x_0}\right)\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{w}_n}{x_0}\right)\right]}{k} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.13 y 5.16. □

Corolario 5.23 *En los sistemas de divisores lineales medios con* $g_d = d + s$ *y* $s > -1$*, existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\hat{\rho}_i^{q,u}(w,k) = \phi_i \left(q; \frac{\left[\frac{\hat{w}_1}{x_0} - s\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{\hat{w}_n}{x_0} - s\right]}{k} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $i \in N$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$*.*

Por 4.20, no podemos determinar el índice de poder de Shapley–Shubik de la suma como promedio de los índices de poder de los juegos iniciales. Pero sí podemos hacerlo directamente.

Proposición 5.24 *En los sistemas ordinales suma, si w_i^j es el h_i^j–ésimo voto del vector w^j para cada $j \in P$*

$$(\rho^+)_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_1^j}(R_j^0(u,k))}{k}, \ldots, \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_n^j}(R_j^0(u,k))}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.156. □

Corolario 5.25 *(a) En el sistema mayoritario puro suma, si H_i es el conjunto de circunscripciones en las que w_i^j es el voto mayor de w^j para cada $j \in P$*

$$(\rho^+)_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{\displaystyle\sum_{j \in H_1} R_j^0(u,k)}{k}, \ldots, \frac{\displaystyle\sum_{j \in H_n} R_j^0(u,k)}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

(b) En el sistema igualitario puro suma, si hay h_i circunscripciones donde w_i^j es uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de w^j para cada $j \in P$

$$(\rho^+)_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{h_1 + p\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right]}{k}, \ldots, \frac{h_n + p\left[\frac{R_j^0(u,k)}{n}\right]}{k}\right),$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Proposición 5.26 *En los sistemas de cuotas suma con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, si hay h_i circunscripciones donde $\frac{w_i^j}{q_{r_j^0(u,k)}} - \left[\frac{w_i^j}{q_{r_j^0(u,k)}}\right]$ es uno de los mayores restos*

$$(\rho^+)_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{h_1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_1^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}, \ldots, \frac{h_n + \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_n^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $i \in N$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.160. □

Corolario 5.27 *En el sistema de los mayores restos suma, si hay* h_i *circunscripciones donde* $R_j^0(u,k)w_i^j - [R_j^0(u,k)w_i^j]$ *es uno de los mayores restos*

$$(\rho^+)_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{h_1 + \sum_{j=1}^{p}\left[R_j^0(u,k)w_1^j\right]}{k}, \dots, \frac{h_n + \sum_{j=1}^{p}\left[R_j^0(u,k)w_n^j\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $i \in N$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$.

Proposición 5.28 *En los sistemas de divisores suma con* $(g_d)_{d\geq 1}$ *estrictamente creciente, existe* $x_0^j \in (0,1)$ *para cada* $j \in P$ *tal que*

$$(\rho^+)_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[g^{-1}\left(\frac{w_1^j}{x_0^j}\right)\right]}{k}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[g^{-1}\left(\frac{w_n^j}{x_0^j}\right)\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $i \in N$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.164. □

Corolario 5.29 *En los sistemas de divisores lineales suma con* $g_d = d + s$ *y* $s > -1$, *existe* $x_0^j \in (0,1)$ *para cada* $j \in P$ *tal que*

$$(\rho^+)_i^{q,u}(w,k) = \phi_i\left(q;\ \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_1^j}{x_0^j} - s\right]}{k}, \dots, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_n^j}{x_0^j} - s\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $i \in N$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_n^p$.

Dada una una estructura de coaliciones $\mathcal{B} = \{N_1, \ldots, N_z\}$ y fijada una cuota estricta $q \in [0, 1)$, podemos comparar los índices de poder de Shapley–Shubik de los juegos de mayoría ponderada normalizados dados por los representantes obtenidos por cada una de las coaliciones una vez efectuada la suma de sus votos y los de la suma de los representantes de cada coalición por separado.

El caso particular más importante es, nuevamente, el de alianza. Así, dado un subconjunto $0 = \{1, \ldots, a\}$ de N, tenemos los juegos

$$\big(q;\ (r')^u_0(w_0, k), (r')^u_{a+1}(w_0, k), \ldots, (r')^u_n(w_0, k)\big)$$

y

$$\big(q;\ r^u_1(w, k) + \ldots + r^u_a(w, k), r^u_{a+1}(w, k), \ldots, r^u_n(w, k)\big)\ .$$

Ejemplo 5.30 Consideremos el sistema electoral simple mayoritario del ejemplo 1.212 que otorga $c_1\,(4) = 3$ representantes a la candidatura de mayor voto y $c_2\,(4) = 1$ a la siguiente. Entonces, dada la cuota $q = \frac{1}{2}$ y la tabla de votos

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

si se unen los dos primeros, se tiene la nueva tabla de votos

i=0	i=3	i=4
0.7	0.2	0.1

con lo que se obtienen las tablas de representantes siguientes, según se sumen los representantes inicialmente sin alianza alguna o bien después de producirse la correspondiente alianza

i=0	i=3	i=4
4	0	0

y

i=0	i=3	i=4
3	1	0

En consecuencia, los juegos obtenidos respectivos son

$$\left(\frac{1}{2};\ 1, 0, 0\right) \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)\ .$$

5.2 Superaditividad en poder

Análogamente al concepto de superaditividad, se puede considerar la misma idea de gobernabilidad pero con los índices de poder de Shapley–Shubik en lugar de los representantes de cada candidatura.

Definición 5.31 Diremos que un sistema electoral R es q–**superaditivo en poder** si, y sólo si, para cada subconjunto $A = \{1, \ldots, a\}$ de N

$$\phi_0\left(q;\ (r')^u_0(w_0,k), (r')^u_{a+1}(w_0,k), \ldots, (r')^u_n(w_0,k)\right) \geq$$

$$\phi_0\left(q;\ r^u_1(w,k) + \ldots + r^u_a(w,k), r^u_{a+1}(w,k), \ldots, r^u_n(w,k)\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_n$.

Y diremos que es **superaditivo en poder** si y, sólo si, es q–superaditivo en poder para cada $q \in [0,1)$.

Observación 5.32 Por el axioma de imparcialidad, es claro que las definiciones anteriores son igualmente válidas para cualquier subconjunto A de N.

Obsérvese que exigimos que las condiciones se verifiquen salvo conjuntos de probabilidad cero. Ello se debe a que es posible que en los casos en que se produzcan empates dichas condiciones dejen de cumplirse.

Proposición 5.33 *(a) La superaditividad estricta implica la superaditividad en poder.*

(b) La superaditividad en poder casi por todo $q \in [0,1)$ implica la superaditividad.

Demostración. Consecuencia inmediata de 4.15. □

Proposición 5.34 *(a) El sistema mayoritario puro es superaditivo en poder.*

(b) Los sistemas de divisores subaditivos son superaditivos en poder.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.217, 1.223 y 5.33. □

Observación 5.35 La superaditividad en poder no se hereda a los subconjuntos, ya que el hecho que se verifique casi seguro $w \in W_n^p$ no implica que se verifique también casi seguro $w \in W_{n'}^p$.

Proposición 5.36 *La extensión media de un sistema electoral q–superaditivo en poder es q–superaditiva en poder.*

DEMOSTRACIÓN. Ya que para cada subconjunto $0 = \{1, \ldots, a\}$ de N, por 5.15 y ser R q–superaditivo en poder,

$$\phi_0\left(q;\ (\hat{r}')_0^u(w_0,k), (\hat{r}')_{a+1}^u(w_0,k), \ldots, (\hat{r}')_n^u(w_0,k)\right) =$$

$$\phi_0\left(q;\ (r')_0^{u+}(\hat{w_0}^*,k), (r')_{a+1}^{u+}(\hat{w_0}^*,k), \ldots, (r')_n^{u+}(\hat{w_0}^*,k)\right) \geq$$

$$\phi_0(q;\ r_1^{u+}(\hat{w}^*,k) + \ldots + r_a^{u+}(\hat{w}^*,k), r_{a+1}^{u+}(\hat{w}^*,k), \ldots, r_n^{u+}(\hat{w}^*,k)) =$$

$$\phi_0(q;\ \hat{r}_1^u(w,k) + \ldots + \hat{r}_a^u(w,k), \hat{r}_{a+1}^u(w,k), \ldots, \hat{r}_n^u(w,k))$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Corolario 5.37 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–superaditivos en poder son q–superaditivos en poder.*

Proposición 5.38 *(a) El sistema mayoritario puro medio es superaditivo en poder.*

(b) Los sistemas de divisores subaditivos medios son superaditivos en poder.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 5.34 y 5.37. □

Si bien la suma de sistemas electorales q–superaditivos en poder no tiene porqué ser q–superaditiva en poder, podemos estudiar los ejemplos conocidos a partir del hecho que la superaditividad estricta implica la superaditividad en poder.

Proposición 5.39 *(a) El sistema mayoritario puro suma es superaditivo en poder.*

(b) Los sistemas de divisores subaditivos suma son superaditivos en poder.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 1.217, 1.223 y 5.33. □

5.3 Monotonía en poder

Como en la monotonía, podemos considerar la misma idea sustituyendo la condición correspondiente sobre los representantes por la análoga sobre los índices de poder de Shapley–Shubik.

Definición 5.40 Diremos que un sistema electoral R es q–**fuertemente monótono en poder** si, y sólo si, para cada $h, i \in N$ la condición

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i$$

implica

$$\rho_h^{q,u}(w,k) \leq \rho_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

Y diremos que es **fuertemente monótono en poder** si es q–fuertemente en poder para cada $q \in [0,1)$.

Definición 5.41 Diremos que el sistema electoral R es q–**débilmente monótono en poder** si, y sólo si, para cada $h, i \in N$ la condición

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p$$

implica

$$\rho_h^{q,u}(w,k) \leq \rho_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

Y diremos que es **débilmente monótono en poder** si es q–débilmente en poder cada $q \in [0,1)$.

En el caso de los sistemas electorales simples, es claro que las condiciones

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i \qquad \text{y} \qquad w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p$$

se reducen a

$$w_h < w_i$$

ambas y se habla, en tal caso, de q–**monotonía en poder** y de **monotonía en poder**, respectivamente.

Proposición 5.42 *(a) Si un sistema electoral R es q–fuertemente monótono en poder entonces, para cada $h, i \in N$*

$$\phi_h(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n) < \phi_i(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n)$$

implica

$$\rho_h^{q,u}(w,k) \leq \rho_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

(b) Si un sistema electoral R es q–débilmente monótono en poder entonces, para cada $h, i \in N$

$$\phi_h(q;\, w_1^1, \ldots, w_n^1) < \phi_i(q;\, w_1^1, \ldots, w_1^n), \ldots, \phi_h(q;\, w_1^p, \ldots, w_n^p) < \phi_i(q;\, w_1^p, \ldots, w_n^p)$$

implica

$$\rho_h^{q,u}(w,k) \leq \rho_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

Demostración. (a) Ya que si $h, i \in N$ son tales que

$$\phi_h(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n) < \phi_i(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n)$$

entonces

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i$$

ya que es el contrarrecíproco de una conocida propiedad del índice de poder de Shapley–Shubik. Y en consecuencia, por ser R q–fuertemente monótono en poder,

$$\rho_h^{q,u}(w,k) \leq \rho_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$.

(b) Puesto que si $h, i \in N$ son tales que

$$\phi_h(q;\, w_1^1, \ldots, w_n^1) < \phi_i(q;\, w_1^1, \ldots, w_1^n), \ldots, \phi_h(q;\, w_1^p, \ldots, w_n^p) < \phi_i(q;\, w_1^p, \ldots, w_n^p)$$

entonces

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p$$

por la misma razón del apartado anterior. Y en consecuencia, por ser R q–débilmente en poder,

$$\rho_h^{q,u}(w,k) \leq \rho_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$. □

Corolario 5.43 *Si un sistema electoral simple R es q–monótono entonces, para cada $h, i \in N$*

$$\phi_h(q;\, w_1, \ldots, w_n) < \phi_i(q;\, w_1, \ldots, w_n)$$

implica

$$\rho_h^q(w, k) \leq \rho_i^q(w, k)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n$.

Proposición 5.44 *La q–monotonía fuerte en poder implica la q–monotonía débil en poder.*

Demostración. Puesto que si para cada $h, i \in N$

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p$$

entonces

$$\hat{w}_i = u_1 w_i^1 + \ldots + u_p w_i^p < u_1 w_h^1 + \ldots + u_p w_h^p = \hat{w}_h$$

y, por ser R q–fuertemente monótono en poder,

$$\rho_h^{q,u}(w, k) \leq \rho_i^{q,u}(w, k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^p$. □

Proposición 5.45 *(a) La monotonía fuerte equivale a la monotonía fuerte en poder.*

(b) La monotonía débil equivale a la monotonía débil en poder.

Demostración. Consecuencia inmediata de 4.14. □

Corolario 5.46 *La monotonía equivale a la monotonía en poder.*

Proposición 5.47 *(a) Los sistemas ordinales son monótonos en poder.*

(b) Los sistemas de cuotas son monótonos en poder.

(c) Los sistemas de divisores son monótonos en poder.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.237, 1.238, 1.239 y 5.46. □

Proposición 5.48 *(a) La extensión media de un sistema electoral q–fuertemente monótono en poder es q–fuertemente monótona en poder.*

(b) La extensión media de un sistema electoral q–débilmente monótono en poder es q–débilmente monótona en poder.

Demostración. (a) Puesto que si

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i$$

entonces, por 1.72,

$$u_+ \cdot \hat{w}_h^* = \hat{w}_h < \hat{w}_i = u_+ \cdot \hat{w}_i^*$$

y, por tanto, por ser R q–fuertemente monótono en poder,

$$\hat{\rho}_h^{q,u}(w,k) = \rho_h^{q,u_+}(\hat{w}^*,k) \leq \rho_i^{q,u_+}(\hat{w}^*,k) = \hat{\rho}_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^{zp}$.

(b) Ya que si

$$w_h^1 < w_i^1, \ldots, w_h^p < w_i^p, \ldots, w_h^{(z-1)p+1} < w_i^{(z-1)p+1}, \ldots, w_h^{zp} < w_i^{zp}$$

entonces, para cada $j \in P$

$$(\hat{w}^*)_h^j = u_j^* \, w_h^j + \ldots + u_{(z-1)p+j}^* \, w_h^{(z-1)p+j} < u_j^* \, w_i^j + \ldots + u_{(z-1)p+j}^* \, w_i^{(z-1)p+j} = (\hat{w}^*)_i^j$$

y, por tanto, por ser R q–débilmente monótono en poder,

$$\hat{\rho}_h^{q,u}(w,k) = \rho_h^{q,u_+}(\hat{w}^*,k) \leq \rho_i^{q,u_+}(\hat{w}^*,k) = \hat{\rho}_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Corolario 5.49 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–monótonos en poder son q–fuertemente monótonos en poder.*

Proposición 5.50 *(a) Los sistemas ordinales medios son fuertemente monótonos en poder.*

(b) Los sistemas de cuotas medios son fuertemente monótonos en poder.

(c) Los sistemas de divisores medios son fuertemente monótonos en poder.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.47 y 5.49. □

Proposición 5.51 *(a) Los sistemas ordinales suma son débilmente monótonos en poder.*

(b) Los sistemas de cuotas suma son débilmente monótonos en poder.

(c) Los sistemas de divisores suma son débilmente monótonos en poder.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.245 y 5.45. □

Proposición 5.52 *(a) La q–monotonía fuerte en poder es hereditaria.*

(b) La q–monotonía débil en poder es hereditaria.

Demostración. (a) Puesto que si $h, i \in N'$ y

$$\hat{w}_h < \hat{w}_i$$

entonces, por 1.168,

$$\hat{w}'_h = \hat{w}_h < \hat{w}_i = \hat{w}'_i$$

de donde, por ser R q–fuertemente en poder,

$$(\rho')^{q,u}_h(w,k) = \rho^{q,u}_h(w',k) \leq \rho^{q,u}_i(w',k) = (\rho')^{q,u}_i(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W^p_{n'}$.

(b) Ya que si $h, i \in N'$ y

$$w^1_h < w^1_i, \ldots, w^p_h < w^p_i$$

entonces

$$(w')^1_h = w^1_h < w^1_i = (w')^1_i$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(w')^p_h = w^p_h < w^p_i = (w')^p_i$$

de donde, por ser R q–débilmente en poder,

$$(\rho')^{q,u}_h(w,k) = \rho^{q,u}_h(w,k) \leq \rho^{q,u}_i(w,k) = (\rho')^{q,u}_i(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $w \in W^p_{n'}$. □

Corolario 5.53 *La q–monotonía en poder es hereditaria.*

5.4 Estabilidad en poder

De nuevo de forma análoga al caso de estabilidad, obtenemos el concepto de estabilidad en poder al considerar la misma condición pero referida a los índices de poder de Shapley–Shubik. Y, en particular, obtenemos asimismo los conceptos de mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder.

Definición 5.54 Diremos que un sistema electoral R es q**–estable en poder** si, y sólo si, para cada $i \in N$ existe

$$\lim_{k\to\infty} \rho_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$. Y, en tal caso, a dichos límites los denominaremos **índices de estabilidad en poder** de $i \in N$ y los denotaremos

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w)\,.$$

Y diremos que es **estable en poder** si,y sólo si, es q–estable en poder para cada $q \in [0,1)$.

Observación 5.55 Obsérvese que la estabilidad en poder equivale simplemente a la convergencia de los vectores aleatorios discretos

$$\rho^{q,u,k} : W_n^p \longrightarrow \mathbb{R}^n\,.$$

Y, en tal caso, queda definida la aplicación

$$\bar{\rho}^{q,u} : W_n^p \longrightarrow \mathbb{R}^n\,.$$

Proposición 5.56 *(a) Si R es un sistema electoral q–estable en poder, para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$, si $w_i = (0,\ldots,0)$ entonces*

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = 0\,.$$

(b) Si R es un sistema electoral q–estable en poder, para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$, si $w_i = (1,\ldots,1)$ entonces

$$\bar{\rho}_h^{q,u}(w) = 1\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 5.56. □

Proposición 5.57 *La estabilidad equivale a la estabilidad en poder casi por todo $q \in [0,1)$.*

Y, en tal caso, los índices de estabilidad en poder para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $w \in W_n^p$ y casi por todo $q \in [0,1)$ son

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \phi_i(q;\, \bar{r}_1^u(w), \ldots, \bar{r}_n^u(w))\,;$$

y los índices de estabilidad para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^p$ son

$$\bar{r}_i^u(w) = \int_0^1 \rho_i^{q,u}(w,k)\,.$$

Demostración. Ya que, por 4.37 y 4.38 y ser R estable, para cada $i \in N$

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \lim_{k\to\infty} \rho^{q,u}(w,k) = \lim_{k\to\infty} \phi_i(q;\, r_1^u(w,k), \ldots, r_n^u(w,k)) = \phi_i(q;\, \bar{r}_1^u(w), \ldots, \bar{r}_n^u(w))$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$ y también casi por todo $q \in [0,1)$, ya que el conjunto $\{w \in W_n^p : \sum_{i\in S} \bar{r}_i(w) = q \text{ para algún } S \subseteq N\}$ es de probabilidad cero.

Y, recíprocamente, por 5.4 y ser R q–estable en poder casi por todo $q \in [0,1)$,

$$\bar{r}_i^u(w) = \lim_{k\to\infty} r_i^u(w,k) = \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \phi_i(q;\, r_1^u(w,k), \ldots, r_n^u(w,k))\,dq =$$

$$\int_0^1 \lim_{k\to\infty} \phi_i(q;\, r_1^u(w,k), \ldots, r_n^u(w,k))\,dq = \int_0^1 \rho_i^{q,u}(w,k)$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$. □

Observación 5.58 Por tanto, si un sistema electoral es estable en poder la familia de aplicaciones

$$(\bar{r}^u)_{u\in\overline{U_p}}$$

determina casi seguro $w \in W_n^p$ la familia de aplicaciones

$$(\bar{\rho}^{q,u})_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}\,.$$

Y, recíprocamente, si un sistema electoral es estable en poder la familia de aplicaciones

$$(\bar{\rho}^{q,u})_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}$$

determina casi seguro $w \in W_n^p$ la familia de reglas relativas

$$(\bar{r}^u)_{u\in\overline{U_p}}\,.$$

Proposición 5.59 *Los sistemas ordinales asintóticos son estables en poder casi por todo $q \in [0, 1)$ y los índices de estabilidad en poder son*

$$\bar{\rho}_i^q(w) = \phi_i\left(q; \bar{c}_{h_1}, \ldots, \bar{c}_{h_n}\right) ,$$

donde h_i es el orden del voto w_i entre los votos del vector w.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.270 y 5.57. □

Proposición 5.60 *Los sistemas de cuotas son estables en poder casi por todo $q \in [0, 1)$ y los índices de estabilidad en poder son*

$$\bar{\rho}_i^q(w) = \phi_i\left(q; w_1, \ldots, w_n\right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.272 y 5.57. □

Proposición 5.61 *Los sistemas de divisores t–asintóticos son estables en poder casi por todo $q \in [0, 1)$ y los índices de estabilidad en poder son*

$$\bar{\rho}_i^q(w) = \phi_i\left(q; \frac{w_1^{1/t}}{w_1^{1/t} + \ldots + w_n^{1/t}}, \ldots, \frac{w_n^{1/t}}{w_1^{1/t} + \ldots + w_n^{1/t}}\right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.278 y 5.57. □

Ejemplo 5.62 Consideremos de nuevo el sistema electoral simple de los divisores con

$$g_d = d^2$$

para $n = 4$ candidaturas correspondiente al ejemplo 1.280. Como vimos en dicho ejemplo, los índices de estabilidad correspondientes a la tabla de valores

i=1	i=2	i=3	i=4
0.4	0.3	0.2	0.1

eran 0.325, 0.282, 0.230 y 0.163, respectivamente. Por tanto, dada la cuota $q = \frac{1}{2}$ por ejemplo –que no es la suma de ninguna combinación de los índices de estabilidad–, los índices de estabilidad en poder correspondientes a la tabla de valores anterior son

$$\phi\left(\frac{1}{2}; 0.325, 0.282, 0.230, 0.163\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) .$$

Proposición 5.63 *La extensión media de un sistema electoral q–estable en poder es q–estable en poder y los índices de estabilidad en poder son*

$$\overline{\widehat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \overline{\rho}_i^{q,u_+}(\hat{w}^*)$$

Demostración. Ya que, por 5.15 y ser R q–estable en poder,

$$\overline{\widehat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \lim_{k\to\infty} \overline{\widehat{\rho}}^{q,u}(w,k) = \lim_{k\to\infty} \overline{\rho}^{q,u_+}(\hat{w}^*,k) = \overline{\rho}_i^{q,u_+}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{zp}$. □

Corolario 5.64 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–estables en poder son q–estables en poder y los índices de estabilidad en poder son*

$$\overline{\widehat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \overline{\rho}_i^{q}(\hat{w})\,.$$

Proposición 5.65 *Los sistemas ordinales medios asintóticos son estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad son*

$$\overline{\widehat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \phi_i\left(q;\, \bar{c}_{h_1}, \ldots, \bar{c}_{h_n}\right)\,.$$

donde h_i es el orden del voto $\hat{w}_i$ entre los votos del vector $\hat{w}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.59 y 5.64. □

Proposición 5.66 *Los sistemas de cuotas medios son estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad son*

$$\overline{\widehat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \phi_i\left(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n\right)\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.60 y 5.64. □

Proposición 5.67 *Los sistemas de divisores medios t–asintóticos son estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad son*

$$\overline{\widehat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \phi_i\left(q;\, \frac{\hat{w}_1^{1/t}}{\hat{w}_1^{1/t} + \ldots + \hat{w}_n^{1/t}}, \ldots, \frac{\hat{w}_n^{1/t}}{\hat{w}_1^{1/t} + \ldots + \hat{w}_n^{1/t}}\right)\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.61 y 5.64. □

Proposición 5.68 *Los sistemas ordinales suma asintóticos respecto de uno simple estable son estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder son*

$$\overline{\rho^+}_i^{q,u}(w) = \phi_i\left(q;\, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, \bar{c}^j_{h_1^j}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, \bar{c}^j_{h_1^j}\right)\,,$$

si w_i^j es el h_i^j–ésimo voto del vector w^j para cada $j \in P$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.290 y 5.57. □

Proposición 5.69 *Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple estable son estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder son*

$$\overline{\rho^+}_i^{q,u}(w) = \phi_i\left(q;\, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, w_1^j, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, w_n^j\right)\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.291 y 5.57. □

Proposición 5.70 *Los sistemas de divisores suma t–asintóticos respecto de uno simple estable son estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder son*

$$\overline{\rho^+}_i^{q,u}(w) = \phi_i\left(q;\, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\cdot \frac{{w_1^j}^{1/t}}{{w_1^j}^{1/t} + \ldots + {w_n^j}^{1/t}}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\cdot \frac{{w_n^j}^{1/t}}{{w_1^j}^{1/t} + \ldots + {w_n^j}^{1/t}}\right)\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.292 y 5.57. □

Proposición 5.71 *La q–estabilidad en poder es hereditaria y los índices de estabilidad en poder son*

$$\overline{\rho'}_i^{q,u}(w) = \bar{\rho}_i^{q,u}(w')$$

para cada $i \in N'$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W^p_{n'}$.

Demostración. Ya que, por 5.7 y ser R q–estable en poder, para cada $i \in N' \subseteq N$,

$$\overline{\rho'}_i^{q,u}(w) = \lim_{k\to\infty} (\rho')_i^{q,u}(w,k) = \lim_{k\to\infty} \rho_i^{q,u}(w',k) = \bar{\rho}_i^{q,u}(w')$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W^p_{n'}$. □

5.4.1 Mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder

Definición 5.72 Diremos que un sistema electoral R es q–**mayoritario en poder** si, y sólo si,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{w}_i > \hat{w}_h \text{ para cada } h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{w}_i < \hat{w}_h \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in U_p$, cada $i \in N$ y cada $w \in \widehat{W_n^p}$.

Y diremos que es **mayoritario en poder** si es q–mayoritario en poder para cada $q \in [0,1)$.

Observación 5.73 Es interesante observar que los valores del caso de mayoría en poder definido anteriormente son los índices de poder del sistema mayoritario puro medio vistos en 5.18 que, como se observó en 5.19, no dependían de k.

Definición 5.74 Diremos que un sistema electoral R es q–**proporcional en poder** si, y sólo si,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \phi_i(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n)$$

para cada $u \in U_p$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^p$.

Y diremos que es **proporcional en poder** si es q–proporcional en poder para cada $q \in [0,1)$.

Definición 5.75 Diremos que un sistema electoral R es q–**igualitario en poder** si, y sólo si,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in U_p$, cada $i \in N$ y cada $w \in \overline{W_n^p}$.

Y diremos que es **igualitario en poder** si es q–igualitario en poder para cada $q \in [0,1)$.

Proposición 5.76 *Los sistemas electorales mayoritarios e igualitarios son estables en poder casi seguro $w \in W_n^p$; y los proporcionales, estables en poder.*

DEMOSTRACIÓN. Puesto que las condiciones anteriores se verifican en $W_n^p - \widehat{W_n^p}$, $W_n^p - \overline{W_n^p}$ y W_n^p respectivamente, y los dos primeros son de medida nula. □

Proposición 5.77 *(a) La mayoría equivale a la mayoría en poder casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) La proporcionalidad equivale a la proporcionalidad en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) La igualdad equivale a la igualdad en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

Demostración. (a) Para cada $q \in [0,1)$, por 5.57 y ser R mayoritario,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \phi_i(q;\, \bar{r}_1^u(w), \ldots, \bar{r}_n^u(w)) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \ \hat{w}_h < \hat{w}_i \ \text{ para cada } \ h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \ \hat{w}_h > \hat{w}_i \ \text{ para algún } \ h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in \widehat{W_n^p}$.

Y, recíprocamente, por 5.4 y ser R q–mayoritario en poder casi por todo $q \in [0,1)$,

$$\bar{r}_i(w) = \int_0^1 \phi_i(q;\, \bar{r}_1^u(w), \ldots, \bar{r}_n^u(w))\, dq = \begin{cases} \int_0^1 1\, dq = 1\,, & \text{si } \ \hat{w}_h < \hat{w}_i \ \text{ para cada } \ h \neq i\,, \\ \int_0^1 0\, dq = 0\,, & \text{si } \ \hat{w}_h > \hat{w}_i \ \text{ para algún } \ h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in \widehat{W_n^p}$.

(b) Para cada $q \in [0,1)$, por 5.57 y ser R proporcional,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \phi_i(q;\, \bar{r}_1^u(w), \ldots, \bar{r}_n^u(w)) = \phi_i(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n)$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_n^p$.

Y, recíprocamente, por 5.4 y ser R q–proporcional en poder casi por todo $q \in [0,1)$,

$$\bar{r}_i(w) = \int_0^1 \phi_i(q;\, \bar{r}_1^u(w), \ldots, \bar{r}_n^u(w))\, dq = \int_0^1 \phi_i(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n) \bar{r}_i^u(w)\, dq = \hat{w}_i$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^p$.

(c) Para cada $q \in [0,1)$, por 5.57 y ser R igualitario,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \phi_i(q;\, \bar{r}_1^u(w), \ldots, \bar{r}_n^u(w)) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y para cada $w \in \overline{W_n^p}$.

Y, recíprocamente, por 5.4 y ser R q–igualitario en poder casi por todo $q \in [0,1)$,

$$\bar{r}_i(w) = \int_0^1 \phi_i(q;\, \bar{r}_1^u(w), \ldots, \bar{r}_n^u(w))\, dq = \int_0^1 \frac{1}{n}\, dq = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y cada $w \in \overline{W_n^p}$. □

Proposición 5.78 *(a) Los sistemas ordinales asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son mayoritarios en poder e igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas son proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son mayoritarios en poder, proporcionales en poder e igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.299, 1.301, 1.303 y 5.77. $\square$

Corolario 5.79 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros son mayoritario en poder e igualitario en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos es proporcional en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores lineales –y, en particular, el de Hondt– son proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

Proposición 5.80 *(a) La extensión media de un sistema electoral q–mayoritario en poder es q–mayoritaria en poder.*

(b) La extensión media de un sistema electoral q–proporcional en poder es q–proporcional en poder.

(c) La extensión media de un sistema electoral q–igualitario en poder es q–igualitaria en poder.

Demostración. (a) Ya que, por 1.72 y 5.63 y ser R q–mayoritario en poder,

$$\overline{\hat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \overline{\rho}_i^{q,u_+}(\hat{w}^*) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{w}_i = u_+ \cdot \hat{w}_i^* > u_+ \cdot \hat{w}_h^* = \hat{w}_h \text{ para cada } h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{w}_i = u_+ \cdot \hat{w}_i^* < u_+ \cdot \hat{w}_h^* = \hat{w}_h \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in \widehat{W_n^{zp}}$.

(b) Dado que, por 1.72 y 5.63 y ser R q–proporcional en poder,

$$\overline{\hat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \overline{\rho}_i^{q,u_+}(\hat{w}^*) = \phi_i(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in W_n^{zp}$.

(c) Puesto que, por 5.63 y ser R q–igualitario en poder,

$$\overline{\hat{\rho}}_i^{q,u}(w) = \overline{\rho}_i^{q,u_+}(\hat{w}^*) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $i \in N$ y cada $w \in \overline{W_n^{zp}}$. □

Corolario 5.81 *(a) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–mayoritarios en poder son q–mayoritarios en poder.*

(b) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–proporcionales en poder son q–proporcionales en poder.

(c) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–igualitarios en poder son q–igualitarios en poder.

Proposición 5.82 *(a) Los sistemas ordinales medios asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son mayoritarios en poder e igualitarios en poder casi por todo $q \in [0, 1)$.*

(b) Los sistemas de cuotas medios son proporcionales en poder casi por todo $q \in [0, 1)$.

(c) Los sistemas de divisores medios 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son mayoritarios en poder, proporcionales en poder e igualitarios en poder casi por todo $q \in [0, 1)$, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.78 y 5.81. □

Corolario 5.83 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros medios son mayoritario en poder e igualitario en poder casi por todo $q \in [0, 1)$, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos medio es proporcional en poder casi por todo $q \in [0, 1)$.

(c) Los sistemas de divisores lineales medios –y, en particular, el de Hondt medio– son proporcionales en poder casi por todo $q \in [0, 1)$.

Proposición 5.84 *(a) Los sistemas ordinales suma asintóticos de mínima dispersión respecto de uno simple estable son igualitarios en poder casi por todo $q \in [0, 1)$.*

(b) Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple proporcional son proporcionales en poder casi por todo $q \in [0, 1)$.

(c) Los sistemas de divisores suma 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos respecto de uno simple proporcional y uno simple estable son proporcionales en poder e igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 1.312 y 5.77. □

Corolario 5.85 *(a) El sistema igualitario puro suma respecto de uno simple estable es igualitario en poder casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) El sistema de los mayores restos suma respecto de uno simple proporcional es proporcional en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores lineales suma –y, en particular, el de Hondt suma– respecto de uno simple proporcional son proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

Proposición 5.86 *(a) La q–mayoría en poder es hereditaria.*

(b) La q–proporcionalidad en poder es hereditaria.

Demostración. (a) Ya que, por 1.168, 5.71 y ser R q–mayoritario en poder,

$$\overline{\rho'}_i^{q,u}(w) = \bar{\rho}_i^{q,u}(w') = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{w}_i = \hat{w}'_i > \hat{w}'_h = \hat{w}_h \text{ para cada } h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{w}_i = \hat{w}'_i < \hat{w}'_h = \hat{w}_h \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \bar{U}_p$, cada $i \in N'$ y cada $w \in \widehat{W^p_{n'}}$.

(b) Puesto que, por 1.168, 5.71 y ser R q–proporcional en poder,

$$\overline{\rho'}_i^{q,u}(w) = \bar{\rho}_i^{q,u}(w') = \phi_i(q;\, \hat{w}'_1, \ldots, \hat{w}'_n) = \phi_i(q;\, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n)$$

para cada $u \in \bar{U}_p$, cada $i \in N'$ y cada $w \in W^p_{n'}$. □

Observación 5.87 La q–igualdad no es hereditaria, ya que el hecho que

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \frac{1}{n}$$

no implica que

$$\overline{\rho'}_i^{q,u}(w) = \frac{1}{n'}\,.$$

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
SUPERADITIVIDAD EN PODER	*mayoritario puro*	*ninguno*	*subaditivos*
MONOTONÍA EN PODER	*todos*	*todos*	*todos*
ESTABILIDAD EN PODER	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	0–*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD EN PODER	*ninguno*	*todos*	1–*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty$–*asintóticos*

Tabla 5.1: Propiedades de los índices de poder de los sistemas electorales simples notables.

	ORDINALES	CUOTAS	DIVISORES
SUPERADITIVIDAD EN PODER	*mayoritario puro*	*ninguno*	*subaditivos*
MONOTONÍA FUERTE EN PODER	*todos*	*todos*	*todos*
MONOTONÍA DÉBIL EN PODER	*todos*	*todos*	*todos*
ESTABILIDAD EN PODER	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	0–*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD EN PODER	*ninguno*	*todos*	1–*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty$–*asintóticos*

Tabla 5.2: Propiedades de los índices de poder de los sistemas electorales medios notables.

	Sistema electoral simple	**ORDINALES**	**CUOTAS**	**DIVISORES**
SUPERADITIVIDAD EN PODER	*arbitrario*	*mayoritario puro*	*ninguno*	*subaditivos*
MONOTONÍA FUERTE EN PODER	*arbitrario*	*ninguno*	*ninguno*	*ninguno*
MONOTONÍA DÉBIL EN PODER	*arbitrario*	*todos*	*todos*	*todos*
ESTABILIDAD EN PODER	*estable*	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER	*arbitrario*	*ninguno*	*ninguno*	*ninguno*
PROPORCIONALIDAD EN PODER	*proporcional*	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER	*estable*	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 5.3: Propiedades de los índices de poder de los sistemas electorales suma notables.

5.5 Expectativas de poder

Cuando consideramos la misma idea de expectativa electoral, pero referida a los índices de poder de Shapley–Shubik, obtenemos el concepto de expectativa de poder.

Definición 5.88 Denominamos **expectativa de poder** del vector de votos $x \in [0,1]^p$ correspondiente a la cuota $q \in [0,1)$ y el vector de pesos $u \in \overline{U_p}$ a la aplicación

$$\epsilon_x^{q,u} : W_{n-1}^p(x) \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida para cada $w \in W_{n-1}^p(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$ por

$$\epsilon_x^{q,u}(w,k) = \rho_1^{q,u}((x/w),k)\,.$$

Proposición 5.89 *Cualquier otra forma de definir*

$$\epsilon_x^{q,u}\,,$$

pero añadiendo el vector de votos x de cualquier otro modo, es igual casi seguro a la aplicación $\epsilon_x^{q,u}$ definida anteriormente.

Demostración. Por el axioma de imparcialidad. □

Fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$, obtenemos la aplicación

$$\epsilon_x^{q,u,k} : W_{n-1}^p(x) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\epsilon_x^{q,u,k}(w) = \epsilon_x^{q,u}(w,k)$$

que se obtiene a partir de $\epsilon_x^{q,u}$ fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.90 $\epsilon_x^{q,u,k}$ *es una variable aleatoria.*

Demostración. Puesto que $\rho^{u,k}$ y ϕ son vectores aleatorios y $\epsilon_x^{q,u,k} = \phi_1 \circ \rho^{u,k}$. □

Ejemplo 5.91 Si en el ejemplo 5.6 fijamos el peso $x = 0.4$, tenemos que

$$\epsilon_{0.4}^{1/2}((0.3,0.2,0.1),4) = \rho_1^{1/2}((0.4,0.3,0.2,0.1),4) = 1\,.$$

Proposición 5.92 *Para cada* $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y cada* $w \in W^p_{n-1}(x)$

$$0 \leq \epsilon^{q,u}_x(w,k) \leq 1\,.$$

Demostración. Por definición. □

Proposición 5.93 *(a) Para cada* $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y cada* $w \in W^p_{n-1}(x)$

$$\epsilon^{q,u}_{(0,\ldots,0)}(w,k) = 0\,.$$

(b) Para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$, *si* 0 *es la matriz nula*

$$\epsilon^{q,u}_{(1,\ldots,1)}(0,k) = 1\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.3. □

Proposición 5.94 *Para cada* $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $i \in N$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W^p_n$

$$\rho^{q,u}_i(w,k) = \epsilon^{q,u}_{w_i}(w_{w_i},k)\,.$$

Demostración. Ya que

$$\rho^{q,u}_i(w,k) = \rho^{q,u}_1((w_i,w_1,\ldots,w_{i-1},w_{i+1},\ldots,w_n),k) = \epsilon^{q,u}_{w_i}(w_{w_i})$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_n$. □

Observación 5.95 Por tanto, las familias de reglas de poder

$$(\rho^{q,u})_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}$$

determinan las familias de expectativas de poder

$$(\epsilon^{q,u}_x)_{(q,u,x)\in[0,1)\times\overline{U_p}\times[0,1]^p}\,.$$

Y, recíprocamente, las familias de expectativas de poder

$$(\epsilon^{q,u}_x)_{(q,u,x)\in[0,1)\times\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

determinan las familias de reglas de poder

$$(\rho^{q,u})_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}$$

casi seguro $w \in W^p_n$.

Proposición 5.96 *Para cada $q \in [0,1]$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$*

$$\epsilon^{q,u}_x(w,k) = \phi_1\left(q;\, e^u_x((w_1,w_2,\ldots,w_{n-1}),k),\ldots,e^u_{w_{n-1}}((x,w_1,\ldots,w_{n-2}),k)\right)\,.$$

Demostración. Puesto que, por 2.21,

$$\begin{aligned}\epsilon^{q,u}_x(w,k) &= \rho^{q,u}_1((x/w),k) = \phi_1(q;\, r^u_1((x/w),k),\ldots,r^u_n((x/w),k))\\ &= \phi_1\left(q;\, e^u_x((w_1,w_2,\ldots,w_{n-1}),k),\ldots,e^u_{w_{n-1}}((x,w_1,\ldots,w_{n-2}),k)\right)\end{aligned}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$. □

Proposición 5.97 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$*

$$e^u_x(w,k) = \int_0^1 \epsilon^{q,u}_x(w,k)\,dq\,.$$

Demostración. Puesto que, por 5.4,

$$e^u_x(w,k) = r^u_1((x/w),k) = \int_0^1 \rho^{q,u}_1((x/w),k)\,dq = \int_0^1 \epsilon^{q,u}_x(w,k)\,dq$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$. □

Observación 5.98 Por tanto, las familias de expectativas electorales relativas

$$(e^u_x)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

determinan las familias de expectativas de poder

$$(\epsilon^{q,u}_x)_{(q,u,x)\in[0,1)\times\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Y, recíprocamente, las familias de expectativas de poder

$$(\epsilon^{q,u}_x)_{(q,u,x)\in[0,1)\times\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

determinan las familias de expectativas electorales relativas

$$(e^u_x)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Proposición 5.99 *Para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$*

$$(\epsilon')_x^{q,u}(w,k) = \epsilon_x^{q,u}(w',k)$$

para cada $w \in W_{n'-1}^p(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que, por 2.86,

$$(\epsilon')_x^{q,u}(w,k) = (\rho')_1^{q,u}((x/w),k) = \rho_1^{q,u}((x/w)',k) = \rho_1^{q,u}((x/w'),k) = \epsilon_x^{q,u}(w',k)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $w \in W_{n'-1}^p(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Proposición 5.100 *En los sistemas ordinales, si x es el h_0–ésimo voto de (x/w)*

$$\epsilon_x^q(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{c_{h_0}(k)}{k}, \frac{c_{h_1}(k)}{k}, \ldots, \frac{c_{h_n}(k)}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 5.8. □

Corolario 5.101 *(a) En el sistema mayoritario puro,*

$$\epsilon_x^q(w,k) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > w_i \text{ para cada } i = 1,\ldots,n-1\,, \\ 0, & \text{si } x < w_i \text{ para algún } i = 1,\ldots,n-1\,, \end{cases}$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

(b) En el sistema igualitario puro, si $B_i = 1$ o $B_i = 0$ según $x, w_1, \ldots, w_{n-1}$ sean o no uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de (x/w)

$$\epsilon_x^q(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{\left[\dfrac{k}{n}\right] + B_0}{k}, \frac{\left[\dfrac{k}{n}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\dfrac{k}{n}\right] + B_{n-1}}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $x \in [0,1]$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}(x)$.

Observación 5.102 La expectativa de poder del sistema mayoritario puro no depende ni de q ni de k.

Proposición 5.103 *En los sistemas de cuotas con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$*, si* $B_i = 1$ *o* $B_i = 0$ *según* $\frac{x}{q_k} - \left[\frac{x}{q_k}\right], \frac{w_1}{k} - \left[\frac{w_1}{k}\right], \ldots, \frac{w_{n-1}}{k} - \left[\frac{w_{n-1}}{k}\right]$ *sea uno de los mayores restos o no respectivamente*

$$\epsilon_x^q(w,k) = \phi_1\left(q; \frac{\left[\dfrac{x}{q_k}\right] + B_0}{k}, \frac{\left[\dfrac{w_1}{q_k}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\dfrac{w_{n-1}}{q_k}\right] + B_{n-1}}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $x \in [0,1]$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}(x)$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.11. □

Corolario 5.104 *En el sistema de los mayores restos, si* $B_i = 1$ *o* $B_i = 0$ *según* $kx - [kx], kw_1 - [kw_1], \ldots, kw_{n-1} - [kw_{n-1}]$ *sea uno de los mayores restos o no respectivamente*

$$\epsilon_x^q(w,k) = \phi_1\left(q; \frac{[kx] + B_0}{k}, \frac{[kw_1] + B_1}{k}, \ldots, \frac{[kw_{n-1}] + B_{n-1}}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $x \in [0,1]$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}(x)$*.*

Proposición 5.105 *En los sistemas de divisores con* $(g_d)_{d\geq 1}$ *estrictamente creciente, existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\epsilon_x^q(w,k) = \phi_1\left(q; \frac{\left[g^{-1}\left(\dfrac{x}{x_0}\right)\right]}{k}, \frac{\left[g^{-1}\left(\dfrac{w_1}{x_0}\right)\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[g^{-1}\left(\dfrac{w_{n-1}}{x_0}\right)\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $x \in [0,1]$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}(x)$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.13. □

Corolario 5.106 *En los sistemas de divisores lineales con* $g_d = d+s$ *y* $s > -1$*, existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\epsilon_x^q(w,k) = \phi_1\left(q; \frac{\left[\dfrac{x}{x_0} - s\right]}{k}, \frac{\left[\dfrac{w_1}{x_0} - s\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[\dfrac{w_{n-1}}{x_0} - s\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $x \in [0,1]$*, cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}(x)$*.*

Proposición 5.107 *Para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$*

$$\hat{\epsilon}_x^{q,u}(w,k) = \epsilon_{\hat{x}^*}^{q,u_+}(\hat{w}^*),k)$$

para cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado que por 2.38, para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$

$$\hat{\epsilon}_x^{q,u}(w,k) = \hat{\rho}_1^{q,u}((x/w),k) = \rho_1^{q,u_+}(\widehat{(x/w)}^*,k) = \rho_1^{q,u_+}((\hat{x}^*/\hat{w}^*),k) = \epsilon_{\hat{x}^*}^{q,u_+}(\hat{w}^*),k)$$

para cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Corolario 5.108 *Para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$*

$$\hat{\epsilon}_x^{q,u}(w,k) = \epsilon_{\hat{x}^*}^{q}(\hat{w},k)$$

para cada $w \in W_{n-1}^{p}(x)$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.109 *En los sistemas ordinales medios, si $\hat{x}$ es el h_0–ésimo voto de $(\hat{x}/\hat{w})$*

$$\epsilon_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{c_{h_0}(k)}{k}, \frac{c_{h_1}(k)}{k}, \ldots, \frac{c_{h_n}(k)}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^{p}(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.8. $\square$

Corolario 5.110 *(a) En el sistema mayoritario puro medio,*

$$\epsilon_x^{q,u}(w,k) = \begin{cases} 1, & \text{si } \hat{x} > \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1,\ldots,n-1\,, \\ 0, & \text{si } \hat{x} < \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1,\ldots,n-1\,, \end{cases}$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^{p}(x)$.

(b) En el sistema igualitario puro medio, si $B_i = 1$ o $B_i = 0$ según $\hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}$ sean o no uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de $(\hat{x}/\hat{w})$

$$\epsilon_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{\left[\frac{k}{n}\right] + B_0}{k}, \frac{\left[\frac{k}{n}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{k}{n}\right] + B_{n-1}}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^{p}(x)$.

Observación 5.111 La expectativa de poder del sistema mayoritario puro medio no depende ni de q ni de k.

Proposición 5.112 *En los sistemas de cuotas medios con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, *si* $B_i = 1$ *o* $B_i = 0$ *según* $\frac{\hat{x}}{q_k} - \left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right], \frac{\hat{w}_1}{k} - \left[\frac{\hat{w}_1}{k}\right], \ldots, \frac{\hat{w}_{n-1}}{k} - \left[\frac{\hat{w}_{n-1}}{k}\right]$ *sea uno de los mayores restos o no*

$$\epsilon_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] + B_0}{k}, \frac{\left[\frac{\hat{w}_1}{q_k}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{\hat{w}_{n-1}}{q_k}\right] + B_{n-1}}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.11. □

Corolario 5.113 *En el sistema de los mayores restos medio, si* $B_i = 1$ *o* $B_i = 0$ *según* $k\hat{x} - [k\hat{x}], k\hat{w}_1 - [k\hat{w}_1], \ldots, k\hat{w}_{n-1} - [k\hat{w}_{n-1}]$ *sea uno de los mayores restos o no*

$$\epsilon_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{[k\hat{x}] + B_0}{k}, \frac{[k\hat{w}_1] + B_1}{k}, \ldots, \frac{[k\hat{w}_{n-1}] + B_{n-1}}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 5.114 *En los sistemas de divisores medios con* $(g_d)_{d\geq 1}$ *estrictamente creciente, existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\epsilon_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{x}}{x_0}\right)\right]}{k}, \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{w}_1}{x_0}\right)\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{w}_{n-1}}{x_0}\right)\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.13. □

Corolario 5.115 *En los sistemas de divisores lineales medios con* $g_d = d + s$ *y* $s > -1$, *existe* $x_0 \in (0,1)$ *tal que*

$$\epsilon_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{\left[\frac{\hat{x}}{x_0} - s\right]}{k}, \frac{\left[\frac{\hat{w}_1}{x_0} - s\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{\hat{w}_{n-1}}{x_0} - s\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 5.116 *En los sistemas ordinales suma, si x_j es el h_0–ésimo voto de (x_j/w^j) y w_i^j el h_i–ésimo voto de (x_j/w^j) para cada $j \in P$ y cada $i = 1, \ldots, n-1$*

$$(\epsilon^+)_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_0^j}(R_j^0(u,k))}{k}, \frac{\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_1^j}(R_j^0(u,k))}{k}, \ldots, \frac{\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_{n-1}^j}(R_j^0(u,k))}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.24. □

Corolario 5.117 *(a) En el sistema mayoritario puro suma, si H_0 es el conjunto de circunscripciones donde x_j es el mayor voto de (x_j/w^j) y H_i el conjunto de circunscripciones donde w_i^j es el mayor voto de (x_j/w^j) para cada $j \in P$ y cada $i = 1, \ldots, n-1$*

$$(\epsilon^+)_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \sum_{j \in H_0} r_j^0(u,k), \sum_{j \in H_1} r_j^0(u,k), \ldots, \sum_{j \in H_{n-1}} r_j^0(u,k)\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

(b) En el sistema igualitario puro suma, si h_0 es el número de circunscripciones donde x_j es uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de (x_j/w^j) y h_i el número de circunscripciones donde w_i^j es uno de los $k - n\left[\frac{k}{n}\right]$ votos mayores de (x_j/w^j) para cada $j \in P$ y cada $i = 1, \ldots, n-1$

$$(\epsilon^+)_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{h_0 + p\left[\frac{k}{n}\right]}{k}, \frac{h_1 + p\left[\frac{k}{n}\right]}{k}, \ldots, \frac{h_{n-1} + p\left[\frac{k}{n}\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, cada $k \in \mathbb{N}$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 5.118 *En los sistemas de cuotas suma con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, si $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ son el número de circunscripciones donde $\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}} - \left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right], \frac{w_1^j}{q_{R_j^0(u,k)}} - \left[\frac{w_1^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right], \ldots, \frac{w_{n-1}^j}{q_{R_j^0(u,k)}} - \left[\frac{w_{n-1}^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]$ son uno de los mayores restos*

$$(\epsilon^+)_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{h_0 + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}, \frac{h_1 + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_1^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}, \ldots, \frac{h_{n-1} + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_{n-1}^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.26. $\square$

Corolario 5.119 *En el sistema de los mayores restos suma, si* $h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}$ *son el número de circunscripciones donde* $R_j^0(u,k)x_j - [R_j^0(u,k)x_j]$, $R_j^0(u,k)w_1^j - [R_j^0(u,k)w_1^j]$, ..., $R_j^0(u,k)w_{n-1}^j - [R_j^0(u,k)w_{n-1}^j]$ *son uno de los mayores restos*

$$(\epsilon^+)_x^{q,u}(w,k) =$$

$$\phi_1\left(q;\ \frac{h_0 + \sum_{j=1}^{p}[R_j^0(u,k)x_j]}{k}, \frac{h_1 + \sum_{j=1}^{p}[R_j^0(u,k)w_1^j]}{k}, \ldots, \frac{h_{n-1} + \sum_{j=1}^{p}[R_j^0(u,k)w_{n-1}^j]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 5.120 *En los sistemas de divisores suma con* $(g_d)_{d\geq 1}$ *estrictamente creciente, existe* $x_0^j \in (0,1)$ *para cada* $j \in P$ *tal que*

$$(\epsilon^+)_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[g^{-1}\left(\frac{x_j}{x_0^j}\right)\right]}{k}, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[g^{-1}\left(\frac{w_1^j}{x_0^j}\right)\right]}{k}, \ldots, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[g^{-1}\left(\frac{w_{n-1}^j}{x_0^j}\right)\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.28. $\square$

Corolario 5.121 *En los sistemas de divisores lineales suma con* $g_d = d^s$ *y* $s > -1$, *existe* $x_0^j \in (0,1)$ *para cada* $j \in P$ *tal que*

$$(\epsilon^+)_x^{q,u}(w,k) = \phi_1\left(q;\ \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{x_j}{x_0^j} - s\right]}{k}, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_1^j}{x_0^j} - s\right]}{k}, \ldots, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_{n-1}^j}{x_0^j} - s\right]}{k}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$, *cada* $k \in \mathbb{N}$ *y casi seguro* $w \in W_{n-1}^p(x)$.

5.6 Estabilidad en poder parcial

Como en la estabilidad parcial, si se consideran los índices de poder de Shapley–Shubik se obtienen la estabilidad, la mayoría, la proporcionalidad y la igualdad en poder parciales.

Definición 5.122 Diremos que un sistema electoral R es q–**parcialmente estable en poder** si, y sólo si, existe

$$\lim_{k\to\infty} \epsilon_x^{q,u}(w,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$. Y, en tal caso, a dicho límite lo denominaremos **índice de estabilidad en poder parcial** en x y lo denotaremos

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w)\,.$$

Y diremos que es **parcialmente estable en poder** si,y sólo si, es q–parcialmente estable en poder para cada $q \in [0,1)$.

Observación 5.123 Obsérvese que la q–estabilidad en poder parcial equivale simplemente a la convergencia de las variables aleatorias discretas

$$\epsilon_x^{q,u,k} : W_{n-1}^p(x) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Y, en tal caso, tenemos definida la aplicación

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u} : W_{n-1}^p(x) \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Proposición 5.124 $\bar{\epsilon}_x^{q,u}$ *es una variable aleatoria.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, ya que las variables aleatorias $\epsilon_x^{q,u,k}$ están acotadas entre 0 y 1 por definición. □

Proposición 5.125 *(a) Si R es q–parcialmente estable en poder, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $w \in W_{n-1}^p$*

$$\bar{\epsilon}_{(0,\ldots,0)}^{q,u}(w) = 0\,.$$

(b) Si R es q–parcialmente estable en poder, para cada $u \in \overline{U_p}$, si 0 es la matriz nula entonces

$$\bar{\epsilon}_{(1,\ldots,1)}^{q,u}(0) = 1\,.$$

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 5.93. □

Proposición 5.126 *La q–estabilidad en poder implica la q–estabilidad en poder parcial y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \bar{\rho}_1^{q,u}(x/w)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Demostración. Ya que, por ser R q–estable en poder,

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \lim_{k\to\infty} \epsilon_x^{q,u}(w,k) = \lim_{k\to\infty} \rho_1^{q,u}((x/w),k) = \bar{\rho}_1^{q,u}(x/w)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$. □

Proposición 5.127 *La q–estabilidad en poder parcial implica la q–estabilidad en poder casi seguro $w \in W_n^p$ y los índices de estabilidad en poder son*

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \bar{\epsilon}_{w^i}^{q,u}(w_{w^i})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $i \in N$ y casi seguro $w \in W_n^p$.

Demostración. Puesto que, por 5.95 y ser R q–parcialmente estable en poder,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(x/w) = \lim_{k\to+\infty} \rho_i^{q,u}((x/w),k) = \lim_{k\to+\infty} \epsilon_{w^i}^{q,u}(w_{w^i},k) = \bar{\epsilon}_{w^i}^{q,u}(w_{w^i})$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ y casi seguro $w \in W_n^p$. □

Observación 5.128 Por tanto, si un sistema electoral es estable en poder la familia de aplicaciones

$$\left(\bar{\rho}^{q,u}\right)_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}$$

determina la familia

$$\left(\bar{\epsilon}_x^{q,u}\right)_{(q,u,x)\in[0,1)\times\overline{U_p}\times[0,1]^p}\,.$$

Y, recíprocamente, si un sistema electoral es parcialmente estable en poder la familia de aplicaciones

$$\left(\bar{\epsilon}_x^{q,u}\right)_{(q,u,x)\in[0,1)\times\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

determina casi seguro $w \in W_n^p$ la familia de aplicaciones

$$\left(\bar{\rho}^{q,u}\right)_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}\,.$$

Proposición 5.129 *La estabilidad parcial implica la estabilidad en poder parcial casi por todo $q \in [0,1)$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\epsilon}^{q,u}_x(w) = \phi_1\left(q;\ \bar{e}^u_x(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}), \ldots, \bar{e}^u_{w_{n-1}}(x, w_1, \ldots, w_{n-2})\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$.

Demostración. Puesto que, por 2.21 y 5.98 y ser R parcialmente estable,

$$\bar{\epsilon}^{q,u}_x(w) = \lim_{k\to+\infty} \epsilon^{q,u}_x(w,k) =$$

$$\lim_{k\to+\infty} \phi_1\left(q;\ e^u_x((w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}), k), \ldots, e^u_{w_{n-1}}((x, w_1, \ldots, w_{n-2}), k)\right)$$

$$= \phi_1\left(q;\ \bar{e}^u_x(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}), \ldots, \bar{e}^u_{w_{n-1}}(x, w_1, \ldots, w_{n-2})\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$. □

Proposición 5.130 *La estabilidad en poder parcial implica la estabilidad parcial casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{e}^u_x(w) = \int_0^1 \bar{\epsilon}^{q,u}_x(w)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi por todo $q \in [0,1)$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$.

Demostración. Puesto que, por 5.97 y ser R parcialmente estable en poder,

$$\bar{e}^u_x(w) = \lim_{k\to+\infty} e^u_x(w) = \lim_{k\to+\infty} \int_0^1 \epsilon^{q,u}_x(w) = \int_0^1 \lim_{k\to+\infty} \epsilon^{q,u}_x(w) = \int_0^1 \bar{\epsilon}^{q,u}_x(w)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi por todo $q \in [0,1)$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$. □

Observación 5.131 Por tanto, si un sistema es parcialmente estable la familia de aplicaciones

$$\left(\bar{e}^u_x\right)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

determina casi por todo $q \in [0,1)$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ la familia de aplicaciones

$$\left(\bar{\epsilon}^{q,u}_x\right)_{(q,u,x)\in[0,1)\times\overline{U_p}\times[0,1]^p}.$$

Y, recíprocamente, si es parcialmente estable en poder entonces la familia de aplicaciones

$$\left(\bar{\epsilon}^{q,u}_x\right)_{(q,u,x)\in[0,1)\times\overline{U_p}\times[0,1]^p}$$

determina casi por todo $q \in [0,1)$ y casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ la familia de aplicaciones

$$\left(\bar{e}^u_x\right)_{(u,x)\in\overline{U_p}\times[0,1]^p}.$$

Proposición 5.132 *Los sistemas ordinales asintóticos son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\epsilon}_x^q(w) = \phi_1\left(q;\, \bar{c}_{h_1}, \ldots, \bar{c}_{h_n}\right) ,$$

donde h_1 es el orden del voto x entre los votos de (x/w).

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.59 y 5.126. □

Proposición 5.133 *Los sistemas de cuotas son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\epsilon}_x^q(w) = \phi_1\left(q;\, x_1, \ldots, x_n\right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.60 y 5.126. □

Proposición 5.134 *Los sistemas de divisores t–asintóticos son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\epsilon}_x^q(w) = \phi_1\left(q;\, \frac{x^{1/t}}{x^{1/t}+w_1^{1/t}+\ldots+w_{n-1}^{1/t}}, \frac{w_1^{1/t}}{x^{1/t}+w_1^{1/t}+\ldots+w_{n-1}^{1/t}}, \ldots, \frac{w_{n-1}^{1/t}}{x^{1/t}+w_1^{1/t}+\ldots+w_{n-1}^{1/t}}\right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.61 y 5.126. □

Ejemplo 5.135 Consideremos el ejemplo 5.62. Entonces, para el voto $x = 0.4$ y la tabla de votos

i=1	i=2	i=3
0.3	0.2	0.1

entonces, teniendo en cuenta el ejemplo 1.280, tenemos que el índice de estabilidad en poder parcial correspondiente al valor 0.1 es

$$\bar{\rho}_{0.4}(0.3, 0.2, 0.1) = \frac{1}{3} .$$

Proposición 5.136 *La extensión media de un sistema electoral q–parcialmente estable en poder es q–parcialmente estable en poder y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^u(w) = \bar{\epsilon}_{\hat{x}^*}^{u+}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$.

Demostración. Puesto que, por 2.44 y ser R parcialmente estable,

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^u(w) = \lim_{k\to\infty} \hat{\epsilon}_x^u(w,k) = \lim_{k\to\infty} \epsilon_{\hat{x}^*}^{u+}(\hat{w}^*,k) = \bar{\epsilon}_{\hat{x}^*}^{u+}(\hat{w}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$. □

Corolario 5.137 *Los sistemas electorales medios de sistemas simples q–parcialmente estables en poder son q–parcialmente estables en poder y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^u(w) = \bar{\epsilon}_{\hat{x}}(\hat{w})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$.

Proposición 5.138 *Los sistemas ordinales medios asintóticos son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y, si h_0 es el orden del voto $\hat{x}$ entre los votos de $(\hat{x}/\hat{w})$, los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^{q,u}(w) = \phi_1(q;\, \bar{c}_{h_0}, \bar{c}_{h_1}, \ldots, \bar{c}_{h_n})\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.132 y 5.137. □

Proposición 5.139 *Los sistemas de cuotas medios son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^{q,u}(w) = \phi_1\left(q;\, \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}\right)\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.133 y 5.137. □

Proposición 5.140 *Los sistemas de divisores medios t–asintóticos son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^{q,u}(w) = \phi_1\left(q;\, \frac{\hat{x}^{1/t}}{\hat{x}^{1/t}+\hat{w}_1^{1/t}+\ldots+\hat{w}_{n-1}^{1/t}}, \frac{\hat{w}_1^{1/t}}{\hat{x}^{1/t}+\hat{w}_1^{1/t}+\ldots+w_{n-1}^{1/t}}, \ldots, \frac{\hat{w}_{n-1}^{1/t}}{\hat{x}^{1/t}+\hat{w}_1^{1/t}+\ldots+\hat{w}_{n-1}^{1/t}}\right)\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.134 y 5.137. □

Proposición 5.141 *Los sistemas ordinales suma asintóticos respecto de uno estable son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$(\overline{\epsilon}^{+})_x^{q,u}(w) = \phi_1\left(q; \sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u)\, \overline{c}^j_{h_0^j}, \sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u)\, \overline{c}^j_{h_1^j}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u)\, \overline{c}^j_{h_{n-1}^j}\right),$$

si x_j es el h_0^j–ésimo voto de (x_j/w^j) para cada $j \in P$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.68 y 5.126. □

Proposición 5.142 *Los sistemas de cuotas suma respecto de uno estable son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$(\overline{\epsilon}^{+})_x^{q,u}(w) = \phi_1\left(q; \sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u)\, x_j, \sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u)\, w_1^j, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u)\, w_{n-1}^j\right).$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.69 y 5.126. □

Proposición 5.143 *Los sistemas de divisores suma t–asintóticos respecto de uno estable son parcialmente estables en poder casi por todo $q \in [0,1)$ y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$(\overline{\epsilon}^{+})_x^{q,u}(w) = \phi_1\left(q; \sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u) \cdot \frac{x_j^{1/t}}{x_j^{1/t} + {w_1^j}^{1/t} + \ldots + {w_{n-1}^j}^{1/t}},\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u) \cdot \frac{{w_1^j}^{1/t}}{x_j^{1/t} + {w_1^j}^{1/t} + \ldots + {w_{n-1}^j}^{1/t}}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \overline{r}_j^0(u) \cdot \frac{{w_{n-1}^j}^{1/t}}{x_j^{1/t} + {w_1^j}^{1/t} + \ldots + {w_{n-1}^j}^{1/t}}\right).$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.70 y 5.126. □

Proposición 5.144 *La q–estabilidad en poder parcial es hereditaria y los índices de estabilidad en poder parcial son*

$$(\overline{\epsilon}')_x^{q,u}(w) = \overline{\epsilon}_x^{q,u}(w')$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$.

Demostración. Ya que, por 2.89 y ser R q–parcialmente estable en poder,

$$(\overline{\epsilon}')_x^{q,u}(w) = \lim_{k\to\infty} (\epsilon')_x^{q,u}(w,k) = \lim_{k\to\infty} \epsilon_x^{q,u}(w',k) = \overline{\epsilon}_x^{q,u}(w')$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n'-1}(x)$. □

5.6.1 Mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder parciales

Definición 5.145 Diremos que un sistema electoral R es q–**parcialmente mayoritario en poder** si, y sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overbrace{W^p_{n-1}}(x)$

$$\bar{\epsilon}^{q,u}_x(w) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{x} > \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1, \dots, n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{x} < \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1, \dots, n-1\,. \end{cases}$$

Y diremos que es **parcialmente mayoritario en poder** si, y sólo si, es q–parcialmente mayoritario en poder para cada $q \in [0,1)$.

Observación 5.146 Es interesante observar que el valor del caso de mayoría en poder parcial definido anteriormente es la expectativa de poder del sistema mayoritario puro medio vista en 5.110 que, como se observó en 5.111, no dependía de k.

Definición 5.147 Diremos que un sistema electoral R es q–**parcialmente proporcional en poder** si, y sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W^p_{n-1}(x)$

$$\bar{\epsilon}^{q,u}_x(w) = \phi_1(q;\, \hat{x}, \hat{w}_1, \dots, \hat{w}_{n-1})\,.$$

Y diremos que es **parcialmente proporcional en poder** si, y sólo si, es q–parcialmente proporcional en poder para cada $q \in [0,1)$.

Definición 5.148 Diremos que un sistema electoral R es q–**parcialmente igualitario en poder** si, y sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overline{W^p_{n-1}(x)}$

$$\bar{\epsilon}^{q,u}_x(w) = \frac{1}{n}\,.$$

Y diremos que es **parcialmente igualitario en poder** si, y sólo si, es q–parcialmente igualitario en poder para cada $q \in [0,1)$.

Proposición 5.149 *Los sistemas electorales mayoritarios e igualitarios son parcialmente estables en poder casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$; y los proporcionales, parcialmente estables en poder.*

Demostración. Puesto que las condiciones anteriores se verifican en $W^p_{n-1}(x) - \overbrace{W^p_{n-1}(x)}$, $W^p_{n-1}(x) - \overline{W^p_{n-1}(x)}$ y $W^p_{n-1}(x)$ respectivamente, y los dos primeros son de medida nula. $\square$

Proposición 5.150 *(a) La q–mayoría en poder implica la q–mayoría en poder parcial.*

(b) La q–proporcionalidad en poder implica la q–proporcionalidad en poder parcial.

(c) La q–igualdad en poder implica la q–igualdad en poder parcial.

Demostración. (a) Ya que, por 5.126 y ser R q–mayoritario en poder,

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \bar{\rho}_1^{q,u}(x/w) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{x} > \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1, \ldots, n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{x} < \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1, \ldots, n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overbrace{W_{n-1}^p(x)}$.

(b) Puesto que, por 5.126 y ser R q–proporcional en poder,

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \bar{\rho}_1^{q,u}(x/w) = \phi_1(q;\, \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n-1}^p(x)$.

(c) Dado que, por 5.126 y ser R q–igualitario en poder,

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \bar{\rho}_1^{q,u}(x/w) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overline{W_{n-1}^p(x)}$. □

Proposición 5.151 *(a) La q–mayoría en poder parcial implica la q–mayoría en poder casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) La q–proporcionalidad en poder parcial implica la q–proporcionalidad en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) La q–igualdad en poder parcial implica la q–igualdad en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

Demostración. (a) Ya que, por 5.127 y 5.95 y ser R q–parcialmente mayoritario en poder,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \bar{\epsilon}_{w^i}^{q,u}(w_{w^i}) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{w}_i > \hat{w}_h \text{ para cada } h \neq i\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{w}_i < \hat{w}_h \text{ para algún } h \neq i\,, \end{cases}$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overbrace{W_{n-1}^p}(x)$.

(b) Puesto que, por 5.127 y 5.95 y ser R q–parcialmente proporcional en poder,

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \bar{\epsilon}_{w^i}^{q,u}(w_{w^i}) = \phi(q; \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n)$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$ cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_n^p$.

(c) Dado que, por 5.127 y 5.95 y ser R (q, x)–parcialmente igualitario en poder

$$\bar{\rho}_i^{q,u}(w) = \bar{\epsilon}_{w^i}^{q,u}(w_{w^i}) = \frac{1}{n}$$

para cada $i \in N$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overline{W_n^p}$. □

Proposición 5.152 *(a) La mayoría parcial implica la mayoría en poder parcial casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) La proporcionalidad parcial implica la proporcionalidad en poder parcial casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) La igualdad parcial implica la igualdad en poder parcial casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$.

Demostración. (a) Ya que, por 5.129 y ser R parcialmente mayoritario,

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \phi_1\left(q;\ \bar{e}_x^u(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}), \ldots, \bar{e}_{w_{n-1}}^u(x, w_1, \ldots, w_{n-2})\right) =$$

$$\begin{cases} 1\,, & \text{si } \ \hat{x} > \hat{w}_i \ \text{ para cada } \ i = 1, \ldots, n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \ \hat{x} < \hat{w}_i \ \text{ para algún } \ i = 1, \ldots, n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi por todo $q \in [0,1)$ y casi seguro $w \in \overbrace{W_{n-1}^p(x)}$.

(b) Dado que, por 5.129 y ser R parcialmente proporcional,

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \phi_1\left(q;\ \bar{e}_x^u(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}), \ldots, \bar{e}_{w_{n-1}}^u(x, w_1, \ldots, w_{n-2})\right) = \phi_1(q;\ \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi por todo $q \in [0,1)$ y casi seguro $w \in W_{n-1}^p(x)$.

(c) Puesto que, por 5.129 y ser R parcialmente igualitario,

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \phi_1\left(q;\ \bar{e}_x^u(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}), \ldots, \bar{e}_{w_{n-1}}^u(x, w_1, \ldots, w_{n-2})\right) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi por todo $q \in [0,1)$ y casi seguro $w \in \overline{W_{n-1}^p(x)}$. □

Proposición 5.153 *(a) La mayoría en poder parcial implica la mayoría parcial casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) La proporcionalidad en poder parcial implica la proporcionalidad parcial casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) La igualdad en poder parcial implica la igualdad parcial casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$.

Demostración. (a) Ya que, por 5.130 y ser R parcialmente mayoritario en poder,

$$\bar{e}^u_x(w) = \int_0^1 \bar{\epsilon}^{q,u}_x(w) = \begin{cases} \int_0^1 1\,dq = 1\,, & \text{si } \hat{x} > \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1, \ldots, n-1\,, \\ \int_0^1 0\,dq = 0\,, & \text{si } \hat{x} < \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1, \ldots, n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi seguro $w \in \overbrace{W^p_{n-1}(x)}$ y casi por todo $q \in [0,1)$.

(b) Dado que, por 5.130 y ser R parcialmente proporcional en poder,

$$\bar{e}^u_x(w) = \int_0^1 \bar{\epsilon}^{q,u}_x(w) = \int_0^1 \phi_1(q;\, \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1})\,dq = \hat{x}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi seguro $w \in W^p_{n-1}(x)$ y casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Puesto que, por 5.130 y ser R parcialmente igualitario en poder,

$$\bar{e}^u_x(w) = \int_0^1 \bar{\epsilon}^{q,u}_x(w) = \int_0^1 \frac{1}{n}\,dq = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$, casi seguro $w \in \overline{W^p_{n-1}(x)}$ y casi por todo $q \in [0,1)$. □

Proposición 5.154 *(a) Los sistemas ordinales asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son parcialmente mayoritarios y parcialmente igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas son parcialmente proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son parcialmente mayoritarios en poder, parcialmente proporcionales en poder y parcialmente igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 5.78 y 5.150. □

Corolario 5.155 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros son parcialmente mayoritario en poder y parcialmente igualitario en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos es parcialmente proporcional en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores lineales –y, en particular, el de Hondt– son parcialmente proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

Proposición 5.156 *(a) La extensión media de un sistema electoral q–parcialmente mayoritario en poder es q–parcialmente mayoritaria en poder.*

(b) La extensión media de un sistema electoral q–parcialmente proporcional en poder es q–parcialmente proporcional en poder.

(c) La extensión media de un sistema electoral q–parcialmente igualitario en poder es q–parcialmente igualitaria en poder.

DEMOSTRACIÓN. (a) Ya que, por 1.72 y 5.63 y ser R q–mayoritario en poder,

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^{q,u}(w) = \bar{\rho}_{x^*}^{q,u_+}(\hat{w}^*) = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{x} = u_+ \cdot \hat{x}^* > u_+ \cdot \hat{w}_i^* = \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1, \ldots, n-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{x} = u_+ \cdot \hat{x}^* < u_+ \cdot \hat{w}_i^* = \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1, \ldots, n-1\,, \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in \overbrace{W_{n-1}^{zp}(x)}$.

(b) Dado que, por 1.72 y 5.63 y ser R q–proporcional en poder,

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^{q,u}(w) = \bar{\epsilon}_{x^*}^{q,u_+}(\hat{w}^*) = \phi_1(q;\, u_+ \cdot \hat{x}^+, u_+ \cdot \hat{w}_1^*, \ldots, u_+ \cdot \hat{w}_{n-1}^*) = \phi_1(q;\, \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1})$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in W_{n-1}^{zp}(x)$.

(c) Puesto que, por 5.63 y ser R q–igualitario en poder,

$$\bar{\hat{\epsilon}}_x^{q,u}(w) = \bar{\epsilon}_{x^*}^{q,u_+}(\hat{w}^*) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $w \in \overline{W_{n-1}^{zp}(x)}$. □

Corolario 5.157 *(a) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–parcialmente mayoritarios en poder son q–parcialmente mayoritarios en poder.*

(b) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–parcialmente proporcionales en poder son q–parcialmente proporcionales en poder.

(c) Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–parcialmente igualitarios en poder son q–parcialmente igualitarios en poder.

Proposición 5.158 *(a) Los sistemas ordinales medios asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son parcialmente mayoritarios en poder y parcialmente igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente .*

(b)Los sistemas de cuotas medios son q–parcialmente proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores medios 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son q–parcialmente mayoritarios en poder, q–parcialmente proporcionales en poder y q–parcialmente igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.154 y 5.157. □

Corolario 5.159 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros medios son parcialmente mayoritario en poder y parcialmente igualitario en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos medio es parcialmente proporcional en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores lineales medios –y, en particular, el de Hondt medio– son parcialmente proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

Proposición 5.160 *(a) Los sistemas ordinales suma asintóticos de mínima dispersión respecto de uno simple estable son parcialmente igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple proporcional son parcialmente proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores suma 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos respecto de uno simple proporcional y uno simple estable son parcialmente proporcionales en poder y parcialmente igualitarios en poder casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.84 y 5.150. □

Corolario 5.161 *(a) El sistema igualitario puro suma respecto de uno simple estable es parcialmente igualitario en poder casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) El sistema de los mayores restos suma respecto de uno simple proporcional es parcialmente proporcional en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores lineales suma –y, en particular, el de Hondt suma– respecto de uno simple proporcional son parcialmente proporcionales en poder casi por todo $q \in [0,1)$.

Proposición 5.162 *(a) La q–mayoría en poder parcial es hereditaria.*

(b) La q–proporcionalidad en poder parcial es hereditaria.

Demostración. (a) Ya que, por 1.168, 5.144 y ser R q–parcialmente mayoritario en poder,

$$(\bar{\epsilon}')_x^{q,u}(w) = \bar{\epsilon}_x^{q,u}(w') = \begin{cases} 1\,, & \text{si } \hat{x} > \widehat{w'}_i = \hat{w}_i \text{ para cada } i = 1, \ldots, n'-1\,, \\ 0\,, & \text{si } \hat{x} < \widehat{w'}_i = \hat{w}_i \text{ para algún } i = 1, \ldots, n'-1 \end{cases}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in \overbrace{W_{n'-1}^p}(x)$.

(b) Dado que, por 1.168, 5.144 y ser R q–parcialmente proporcional en poder,

$$(\bar{\epsilon}')_x^{q,u}(w) = \bar{\epsilon}_x^{q,u}(w') = \phi_1(q\,;\hat{x},\widehat{w'}_1,\ldots,\widehat{w'}_{n'-1}) = \phi_1(q\,;\hat{x},\hat{w}_1,\ldots,\hat{w}_{n'-1})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $w \in W_{n'-1}^p(x)$. □

Observación 5.163 La q–igualdad en poder parcial no es hereditaria, ya que el hecho que

$$\bar{\epsilon}_x^{q,u}(w) = \frac{1}{n}$$

no implica que

$$(\bar{\epsilon}')_x^{q,u}(w) = \frac{1}{n'}\,.$$

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
ESTABILIDAD EN PODER PARCIAL	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER PARCIAL	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	$0-$*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD EN PODER PARCIAL	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER PARCIAL	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 5.4: Propiedades de las expectativas de poder de los sistemas electorales simples notables.

	ORDINALES	CUOTAS	DIVISORES
ESTABILIDAD EN PODER PARCIAL	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER PARCIAL	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	$0-$*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD EN PODER PARCIAL	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER PARCIAL	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 5.5: Propiedades de las expectativas de poder de los sistemas electorales medios notables.

	Sistema electoral simple	**ORDINALES**	**CUOTAS**	**DIVISORES**
ESTABILIDAD EN PODER PARCIAL	*estable*	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER PARCIAL	*arbitrario*	*ninguno*	*ninguno*	*ninguno*
PROPORCIONALIDAD EN PODER PARCIAL	*proporcional*	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER PARCIAL	*estable*	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 5.6: Propiedades de las expectativas de poder de los sistemas electorales suma notables.

5.7 Expectativa de poder media

Si, como en el caso de la expectativa de poder media, consideramos la esperanza matemática de las expectativas de poder obtenemos el concepto de expectativa de poder media.

Definición 5.164 Denominamos **expectativa de poder media** del vector de votos $x \in [0,1]^p$ cuando se eligen $k \in \mathbb{N}$ representantes correspondiente a la cuota $q \in [0,1)$ y el vector de pesos $u \in \overline{U_p}$ a la esperanza matemática de la variable aleatoria discreta $\epsilon_x^{q,u,k}$

$$\epsilon^{q,u}(x,k) = \mu(\epsilon_x^{q,u,k}) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\epsilon_x^{q,u,k} = \frac{s}{n!}\right) .$$

Tenemos, así, una familia

$$\left(\epsilon^{q,u}\right)_{(q,u)\in[0,1)\times\overline{U_p}}$$

de funciones

$$\epsilon^{q,u} : [0,1]^p \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Y podemos considerar, asimismo, las funciones

$$\epsilon^{q,u,k} : [0,1]^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

obtenidas fijando el valor de $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.165 *Para cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$0 \leq \epsilon^{q,u}(x,k) \leq k .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición anterior y 5.92. □

Proposición 5.166 *(a) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $k \in \mathbb{N}$*

$$\epsilon^{q,u}\left((0,\ldots,0),k\right) = 0 \qquad y \qquad \epsilon^{q,u}\left((1,\ldots,1),k\right) = k .$$

(b) Para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \neq (1,\ldots,1)$

$$\epsilon^{q,u}(x,0) = 0 .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición anterior y 5.93. □

Proposición 5.167 *Las expectativas de poder medias de los sistemas ordinales son*

$$\epsilon^q(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_x \left(\phi_1 \left(q;\, \frac{c_{h_0}(k)}{k}, \frac{c_{h_1}(k)}{k}, \ldots, \frac{c_{h_n}(k)}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Consecuencia inmediata de 5.100. □

Proposición 5.168 *(a) La expectativa de poder media del sistema mayoritario puro es*

$$\epsilon^q(x,k) = \frac{V\left(\{w \in W_{n-1}(x) : x > w_i \quad \text{para cada } \ i = 1, \ldots, n-1\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x)^{n-2}}$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

(b) La expectativa de poder media del sistema igualitario puro es

$$\epsilon^q(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_x \left(\phi_1 \left(\frac{q;\, \left[\frac{k}{n}\right] + B_0}{k}, \frac{q;\, \left[\frac{k}{n}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{k}{n}\right] + B_{n-1}}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $x \in [0,1]$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

DEMOSTRACIÓN. (a) Puesto que, por 5.167, es

$$\epsilon^q(x,k) = \frac{V(w \in W_{n-1}(x) : \rho_1^q((x/w),k) = 1)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-x)^{n-2}}\,.$$

Pero, como el vector

$$(r_1((x/w),k), \ldots, r_n((x/w),k))$$

consta de un uno y $n-1$ ceros en el sistema mayoritario puro, se deduce que

$$\rho_1^q((x/w),k) = 1$$

si, y sólo si,

$$r_1((x/w),k) = 1\,,$$

que equivale a que

$$x > w_i$$

para cada $i = 1, \ldots, n-1$. □

Observación 5.169 La expectativa de poder media del sistema mayoritario puro no depende ni de q ni de k.

Proposición 5.170 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de cuotas con $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, son*

$$\epsilon^q(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_x \left(\phi_1 \left(q; \frac{\left[\frac{x}{q_k}\right] + B_0}{k}, \frac{\left[\frac{w_1}{q_k}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{w_{n-1}}{q_k}\right] + B_{n-1}}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $x \in [0,1]$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.103. □

Corolario 5.171 *La expectativa de poder media del sistema de los mayores restos es*

$$\epsilon^q(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_x \left(\phi_1 \left(q; \frac{[kx] + B_0}{k}, \frac{[kw_1] + B_1}{k}, \ldots, \frac{[kw_{n-1}] + B_{n-1}}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $x \in [0,1]$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.172 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de divisores con $(g_d)_{d\geq 1}$ estrictamente creciente, son*

$$\epsilon^q(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_x \left(\phi_1 \left(q; \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right)\right]}{k}, \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{w_1}{x_0}\right)\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{w_{n-1}}{x_0}\right)\right]}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $x \in [0,1]$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.105. □

Corolario 5.173 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de divisores lineales con $g_d = d + s$ y $s > -1$, son*

$$\epsilon^q(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_x \left(\phi_1 \left(q; \frac{\left[\frac{x}{x_0} - s\right]}{k}, \frac{\left[\frac{w_1}{x_0} - s\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{w_{n-1}}{x_0} - s\right]}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $x \in [0,1]$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.174 *Si ϵ y $\hat{\epsilon}$ son las expectativas de poder medias de un sistema electoral R y de su extensión media $\hat{R}$ entonces*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \epsilon^{q,u_+}(\hat{x}^*,k)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Puesto que

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \hat{\mathcal{P}}_{u,x}\left(\hat{\epsilon}_x^{u,k} = \frac{s}{n!}\right) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u_+,\hat{x}^*}\left(\epsilon_{\hat{x}^*}^{q,u_+,k} = \frac{s}{n!}\right) = \epsilon^{q,u_+}(\hat{x}^*,k)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_{zp}}$, cada $x \in [0,1]^{zp}$ y cada $k \in \mathbb{N}$. □

Corolario 5.175 *Si ϵ y $\hat{\epsilon}$ son las expectativas de poder medias de un sistema electoral simple R y su sistema electoral medio $\hat{R}$ entonces*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \epsilon^{q}(\hat{x},k)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.176 *Las expectativas de poder medias de los sistemas ordinales medios son*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}}\left(\phi_1\left(q;\, \frac{c_{j_0}(k)}{k}, \frac{c_{j_1}(k)}{k}, \ldots, \frac{c_{j_n}(k)}{k}\right) = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.167 y 5.175. □

Proposición 5.177 *(a) La expectativa de poder media del sistema mayoritario puro medio es*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \frac{V\left(\{\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \hat{x} > \hat{w}_i \quad \text{para cada } \; i = 1,\ldots,n-1\}\right)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

(b) La expectativa de poder media del sistema igualitario puro medio es

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}}\left(\phi_1\left(\frac{q;\, \left[\frac{k}{n}\right] + B_0}{k}, \frac{q;\, \left[\frac{k}{n}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{k}{n}\right] + B_{n-1}}{k}\right) = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_p}$, cada $x \in [0,1]^p$ y cada $k \in \mathbb{N}$.

Observación 5.178 La expectativa de poder media del sistema mayoritario puro medio no depende ni de q ni de k.

Proposición 5.179 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de cuotas medios con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$, *son*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}} \left(\phi_1 \left(q; \frac{\left[\frac{\hat{x}}{q_k}\right] + B_0}{k}, \frac{\left[\frac{\hat{w}_1}{q_k}\right] + B_1}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{\hat{w}_{n-1}}{q_k}\right] + B_{n-1}}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.170 y 5.175. □

Corolario 5.180 *La expectativa de poder media del sistema de los mayores restos medio es*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}} \left(\phi_1 \left(q; \frac{[k\hat{x}] + B_0}{k}, \frac{[k\hat{w}_1] + B_1}{k}, \ldots, \frac{[k\hat{w}_{n-1}] + B_{n-1}}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.181 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de divisores medios con* $(g_d)_{d\geq 1}$ *estrictamente creciente, son*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}} \left(\phi_1 \left(q; \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{x}}{x_0}\right)\right]}{k}, \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{w}_1}{x_0}\right)\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[g^{-1}\left(\frac{\hat{w}_{n-1}}{x_0}\right)\right]}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.172 y 5.175. □

Corolario 5.182 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de divisores lineales medios con* $g_d = d + s$ *y* $s > -1$, *son*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}} \left(\phi_1 \left(q; \frac{\left[\frac{\hat{x}}{x_0} - s\right]}{k}, \frac{\left[\frac{\hat{w}_1}{x_0} - s\right]}{k}, \ldots, \frac{\left[\frac{\hat{w}_{n-1}}{x_0} - s\right]}{k} \right) = \frac{s}{n!} \right)$$

para cada $q \in [0,1)$, *cada* $u \in \overline{U_p}$, *cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$.

Proposición 5.183 *Las expectativas de poder medias de los sistemas ordinales suma son*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot$$

$$\cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\ \frac{\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_0^j}(R_j^0(u,k))}{k}, \frac{\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_1^j}(R_j^0(u,k))}{k}, \ldots, \frac{\sum_{j=1}^{p} c^j_{h_{n-1}^j}(R_j^0(u,k))}{k}\right) = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.116. □

Corolario 5.184 *(a) La expectativa de poder media del sistema mayoritario puro suma es*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\ \sum_{j\in H_0} r_j^0(u,k), \sum_{j\in H_1} r_j^0(u,k), \ldots, \sum_{j\in H_{n-1}} r_j^0(u,k)\right) = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

(b) La expectativa de poder media del sistema igualitario puro suma es

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\ \frac{h_0 + p\left[\frac{k}{n}\right]}{k}, \frac{h_1 + p\left[\frac{k}{n}\right]}{k}, \ldots, \frac{h_{n-1} + p\left[\frac{k}{n}\right]}{k}\right) = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Proposición 5.185 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de cuotas suma con* $q_k \in \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right]$*, son*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot$$

$$\cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\ \frac{h_0 + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{x_j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}, \frac{h_1 + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_1^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}, \ldots, \frac{h_{n-1} + \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_{n-1}^j}{q_{R_j^0(u,k)}}\right]}{k}\right) = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.118. □

Corolario 5.186 *La expectativa de poder media del sistema de los mayores restos suma es*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot$$

$$\cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\ \frac{h_0 + \sum_{j=1}^{p}[R_j^0(u,k)\, x_j]}{k}, \frac{h_1 + \sum_{j=1}^{p}[R_j^0(u,k)\, w_1^j]}{k}, \ldots, \frac{h_{n-1} + \sum_{j=1}^{p}[R_j^0(u,k)\, w_{n-1}^j]}{k}\right)\right.$$

$$\left. = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Proposición 5.187 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de divisores suma con* $(g_d)_{d \geq 1}$ *estrictamente creciente, son*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot$$

$$\cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\ \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[g^{-1}\left(\frac{x_j}{x_0^j}\right)\right]}{k}, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[g^{-1}\left(\frac{w_1^j}{x_0^j}\right)\right]}{k}, \ldots, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[g^{-1}\left(\frac{w_{n-1}^j}{x_0^j}\right)\right]}{k}\right) = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Corolario 5.188 *Las expectativas de poder medias de los sistemas de divisores lineales suma con* $g_d = d + s$ *y* $s > -1$*, son*

$$\hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\ \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{x_j}{x_0^j} - s\right]}{k}, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_1^j}{x_0^j} - s\right]}{k}, \ldots, \frac{\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{w_{n-1}^j}{x_0^j} - s\right]}{k}\right) = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $q \in [0,1)$*, cada* $u \in \overline{U_p}$*, cada* $x \in [0,1]^p$ *y cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.120. $\square$

5.8 Estabilidad en poder y media

Como en el caso de la estabilidad en media, si se considera la misma idea pero con los índices de poder de Shapley–Shubik, se obtienen los conceptos de estabilidad en poder y media y, en particular, los de mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder y media.

Definición 5.189 Diremos que el sistema electoral R es q–**estable en poder y media** si, y sólo si, existe

$$\lim_{k\to\infty} \epsilon^{q,u}(x,k)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$.

Y, en tal caso, a dicho límite lo denominaremos **índice de estabilidad en poder y media** y lo denotaremos

$$\overline{\epsilon}^{q,u}(x)\,.$$

Y diremos que es **parcialmente estable en poder y media** si,y sólo si, es q–parcialmente estable en poder y media para cada $q \in [0,1)$.

En particular, si R es q–estable en poder y media queda definida la aplicación

$$\overline{\epsilon}^{q,u} : [0,1)^p \longrightarrow \mathbb{R}\,.$$

Proposición 5.190 *Si R es q–estable en poder y media entonces*

$$0 \leq \overline{\epsilon}^{q,u}(x) \leq 1\,.$$

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición anterior y de 5.165. □

Proposición 5.191 *Si R es un sistema electoral q–estable en poder y media entonces*

$$\overline{\epsilon}^{q,u}(0,\ldots,0) = 0 \qquad y \qquad \overline{\epsilon}^{q,u}(1,\ldots,1) = 1$$

para cada $u \in \overline{U_p}$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.166. □

Proposición 5.192 *La q–estabilidad en poder parcial implica la q–estabilidad en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$ es*

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \mu(\bar{\epsilon}_x^{q,u}) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\bar{\epsilon}_x^{q,u} = \frac{s}{n!}\right) .$$

Demostración. Ya que, por ser R parcialmente estable en poder,

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \lim_{k\to\infty} \epsilon^{q,u}(x,k) = \lim_{k\to\infty} \mu(\epsilon_x^{q,u,k}) = \mu\left(\lim_{k\to\infty} \epsilon_x^{q,u,k}\right) = \mu(\bar{\epsilon}_x^{q,u}) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\bar{\epsilon}_x^{q,u} = \frac{s}{n!}\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$. □

Proposición 5.193 *La q–estabilidad en poder implica la q–estabilidad en poder y media.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.126 y 5.192. □

Proposición 5.194 *Los sistemas ordinales asintóticos son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$\bar{\epsilon}^{q}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{x}\left(\phi_1\left(q;\, \bar{c}_{h_1}, \ldots, \bar{c}_{h_n}\right) = \frac{s}{n!}\right) ,$$

donde h_0 es el orden del voto x entre los votos del vector (x/w).

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.132 y 5.192. □

Proposición 5.195 *Los sistemas de cuotas son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$\bar{\epsilon}^{q}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\, x_1, \ldots, x_n\right) = \frac{s}{n!}\right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.133 y 5.192. □

Proposición 5.196 *Los sistemas de divisores t–asintóticos son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$\bar{\epsilon}^{q}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x}\left(\phi_1\left(q;\, \frac{x^{1/t}}{x^{1/t} + w_1^{1/t} + \ldots + w_{n-1}^{1/t}}, \frac{w_1^{1/t}}{x^{1/t} + w_1^{1/t} + \ldots + w_{n-1}^{1/t}}, \ldots, \frac{w_{n-1}^{1/t}}{x^{1/t} + w_1^{1/t} + \ldots + w_{n-1}^{1/t}}\right) = \frac{s}{n!}\right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.134 y 5.192. □

Proposición 5.197 *La extensión media de un sistema electoral q–estable en poder y media es q–estable en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{q,u}(x) = \bar{\epsilon}^{q,u_+}(\hat{x}^*)$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ *y cada* $x \in [0,1]^{zp}$.

Demostración. Ya que, por 5.174 y ser R estable en poder y media,

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{q,u}(x) = \lim_{k\to\infty} \hat{\epsilon}^{q,u}(x,k) = \lim_{k\to\infty} \epsilon^{q,u_+}(\hat{x}^*,k) = \bar{\epsilon}^{q,u_+}(\hat{x}^*)$$

para cada $q \in [0,1)$, cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$. □

Corolario 5.198 *Los sistemas electorales medios de sistemas electorales simples q–estables en poder y media son q–estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{u}(x) = \bar{\epsilon}(\hat{x})$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ *y cada* $x \in [0,1]^p$.

Proposición 5.199 *Los sistemas ordinales medios asintóticos son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{q,u}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}} \left(\phi_1(q;\, \bar{c}_{h_0}, q;\, \bar{c}_{h_1}, \ldots, \bar{c}_{h_n}) = \frac{s}{n!} \right) ,$$

donde h_0 *es el orden del voto* $\hat{x}$ *entre los votos del vector* $(\hat{x}/\hat{w})$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.194 y 5.198. □

Proposición 5.200 *Los sistemas de cuotas medios son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}} \left(\phi_1\left(q;\, \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}\right) = \frac{s}{n!} \right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.195 y 5.198. □

Proposición 5.201 *Los sistemas de divisores medios t–asintóticos son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$\bar{\bar{\epsilon}}^{q,u}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{\hat{x}} \left(\phi_1 \left(q;\ \frac{\hat{x}^{1/t}}{\hat{x}^{1/t} + \hat{w}_1^{1/t} + \ldots + \hat{w}_{n-1}^{1/t}}, \frac{\hat{w}_1^{1/t}}{\hat{x}^{1/t} + \hat{w}_1^{1/t} + \ldots + w_{n-1}^{1/t}}, \ldots, \frac{\hat{w}_{n-1}^{1/t}}{\hat{x}^{1/t} + \hat{w}_1^{1/t} + \ldots + \hat{w}_{n-1}^{1/t}} \right) = \frac{s}{n!} \right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.196 y 5.198. □

Proposición 5.202 *Los sistemas ordinales suma asintóticos respecto de uno simple estable son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$(\bar{\epsilon}^{+})^{q,u}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x} \left(\phi_1 \left(q;\ \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, \bar{c}^j_{h_0^j}, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, \bar{c}^j_{h_1^j}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, \bar{c}^j_{h_{n-1}^j} \right) = \frac{s}{n!} \right) ,$$

si x_j es el h_0^j–ésimo voto de (x_j/w^j) para cada $j \in P$.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.141 y 5.192. □

Proposición 5.203 *Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple estable son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$(\bar{\epsilon}^{+})^{q,u}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x} \left(\phi_1 \left(q;\ \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, x_j, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, w_1^j, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u)\, w_{n-1}^j \right) = \frac{s}{n!} \right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.142 y 5.192. □

Proposición 5.204 *Los sistemas de divisores suma t–asintóticos respecto de uno simple estable son estables en poder y media y el índice de estabilidad en poder y media es*

$$(\bar{\epsilon}^{+})^{q,u}(x) = \sum_{s=0}^{n!} \frac{s}{n!} \cdot \mathcal{P}_{u,x} \left(\phi_1 \left(q;\ \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u) \cdot \frac{x_j^{1/t}}{x_j^{1/t} + w_1^{j\,1/t} + \ldots + w_{n-1}^{j\,1/t}}, \right.\right.$$

$$\left.\left. \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u) \cdot \frac{w_1^{j\,1/t}}{x_j^{1/t} + w_1^{j\,1/t} + \ldots + w_{n-1}^{j\,1/t}}, \ldots, \sum_{j=1}^{p} \bar{r}_j^0(u) \cdot \frac{w_{n-1}^{j\,1/t}}{x_j^{1/t} + w_1^{j\,1/t} + \ldots + w_{n-1}^{j\,1/t}} \right) = \frac{s}{n!} \right) .$$

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.143 y 5.192. □

5.8.1 Mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder y media

Definición 5.205 Diremos que un sistema electoral R es q–**mayoritario en poder y media** si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \frac{V(\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \epsilon^{q}_{\hat{x}}(\hat{w}) = 1)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}\,.$$

Y diremos que es **mayoritario en poder y media** si,y sólo si, es q–mayoritario en poder y media para cada $q \in [0,1)$.

Proposición 5.206 *Un sistema electoral R es q–mayoritario en poder y media si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$*

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \frac{V(\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \bar{r}_1(\hat{x}/\hat{w}) > q \quad y \quad \bar{r}_2(\hat{x}/\hat{w}) + \ldots + \bar{r}_n(\hat{x}/\hat{w}) \leq q) = 1)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}\,.$$

Demostración. En primer lugar,

$$\epsilon^{q,u}_{\hat{x}}(\hat{w}) = 1$$

si, y sólo si,

$$\rho^{q,u}_1(\hat{x}/\hat{w}) = 1$$

que equivale a que el jugador 1 sea dictador. Esto significa que, por una parte, el jugador 1 debe ser pivote en las permutaciones en las que aparece en primer lugar, lo que implica que

$$\bar{r}_1(\hat{x}/\hat{w}) > q\,.$$

Y, por otra parte, como en las que aparece en último lugar ninguno de los otros jugadores puede ser pivote previamente, debe verificarse que

$$\bar{r}_2(\hat{x}/\hat{w}) + \ldots + \bar{r}_n(\hat{x}/\hat{w}) \leq q\,.$$

Finalmente, es obvio que si

$$\bar{r}_1(\hat{x}/\hat{w}) > q \qquad \text{y} \qquad \bar{r}_2(\hat{x}/\hat{w}) + \ldots + \bar{r}_n(\hat{x}/\hat{w}) \leq q$$

entonces el jugador 1 es pivote en todas las permutaciones. □

Definición 5.207 Diremos que un sistema electoral R es q–**proporcional en poder y media** si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \phi_1\left(q;\ \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1}\right)\ .$$

Y diremos que es **proporcional en poder y media** si,y sólo si, es q–proporcional en poder y media para cada $q \in [0,1)$.

Definición 5.208 Diremos que un sistema electoral R es q–**igualitario en poder y media** si y, sólo si, para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \frac{1}{n}\ .$$

Y diremos que es **igualitario en poder y media** si,y sólo si, es q–igualitario en poder y media para cada $q \in [0,1)$.

Proposición 5.209 *(a) La q–mayoría en poder parcial implica la q–mayoría en poder y media.*

(b) La q–proporcionalidad en poder parcial implica la q–proporcionalidad en poder y media.

(c) La q–igualdad en poder parcial implica la q–igualdad en poder y media.

Demostración. (a) Puesto que, por 5.192 y ser R q–mayoritario en poder,

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \mu(\bar{\epsilon}_x^{q,u}) = \frac{V(\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \epsilon_x^{q,u}(\hat{w}) = 1)}{\frac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1-\hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$.

(b) Dado que, por 5.192 y ser R q–proporcional en poder,

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \mu(\bar{\epsilon}_x^{q,u}) = \mu\left(\phi_1(q;\ \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, w_{n-1})\right)$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$.

(c) Puesto que, por 5.192 y ser R q–igualitario en poder,

$$\bar{\epsilon}^{q,u}(x) = \mu(\bar{\epsilon}_x^{q,u}) = \mu\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_p}$ y cada $x \in [0,1]^p$. $\square$

Proposición 5.210 *(a) La q–mayoría en poder implica la q–mayoría en poder y media.*

(b) La q–proporcionalidad en poder implica la q–proporcionalidad en poder y media.

(c) La q–igualdad en poder implica la q–igualdad en poder y media.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.150 y 5.209 □

Proposición 5.211 *(a) Los sistemas ordinales asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son mayoritarios en poder y media e igualitarios en poder y media casi por todo* $q \in [0, 1)$*, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas son proporcionales en poder y media casi por todo $q \in [0, 1)$*.*

(c) Los sistemas de divisores 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$*–asintóticos son mayoritarios en poder y media, proporcionales en poder y media e igualitarios en poder y media casi por todo* $q \in [0, 1)$*, respectivamente.*

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.154 y 5.209. □

Corolario 5.212 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros son mayoritario en poder y media e igualitario en poder y media casi por todo* $q \in [0, 1)$*, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos es proporcional en poder y media casi por todo $q \in [0, 1)$*.*

(c) Los sistemas de divisores lineales –y, en particular, el de Hondt– son proporcionales en poder y media casi por todo $q \in [0, 1)$*.*

Proposición 5.213 *(a) La extensión media de un sistema electoral q–mayoritario en poder y media es q–mayoritaria en poder y media.*

(b) La extensión media de un sistema electoral q–proporcional en poder y media es q–proporcional en poder y media.

(c) La extensión media de un sistema electoral q–igualitario en poder y media es q–igualitaria en poder y media.

Demostración. (a) Puesto que, por 1.72 y 5.197 y ser R q–mayoritario en poder y media,

$$\bar{\hat{\epsilon}}^{q,u}(x) = \bar{\epsilon}^{q,u_+}(\hat{x}^*) = \frac{V(u_+ \cdot \hat{w}^* \in W_{n-1}(u_+ \cdot \hat{x}^*) : \rho_1^q(u_+ \cdot \hat{x}^*/u_+ \cdot \hat{w}^*) = 1)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1 - u_+ \cdot \hat{x}^*)^{n-2}}$$
$$= \frac{V(\hat{w} \in W_{n-1}(\hat{x}) : \rho_1^q(\hat{x}/\hat{w}) = 1)}{\dfrac{\sqrt{n-1}}{(n-2)!}\,(1 - \hat{x})^{n-2}}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$.

(b) Dado que, por 1.72 y 5.197 y ser R q–proporcional en poder y media,

$$\bar{\hat{\epsilon}}^{q,u}(x) = \bar{\epsilon}^{q,u_+}(\hat{x}^*) = \phi_1(q;\, u_+ \cdot \hat{x}^*, u_+ \cdot \hat{w}_1^*, \ldots, u_+ \cdot \hat{w}_{n-1}) = \phi_1(q;\, \hat{x}, \hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_{n-1})$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$.

(c) Ya que, por 5.197 y ser R q–igualitario en poder y media,

$$\bar{\hat{\epsilon}}^{q,u}(x) = \bar{\epsilon}^{q,u_+}(\hat{x}^*) = \frac{1}{n}$$

para cada $u \in \overline{U_{zp}}$ y cada $x \in [0,1]^{zp}$. □

Corolario 5.214 *(a) Los sistemas electorales medios de sistemas simples q–mayoritarios en poder y media son q–mayoritarios en poder y media.*

(b) Los sistemas electorales medios de sistemas simples q–proporcionales en poder y media son q–proporcionales en poder y media.

(c) Los sistemas electorales medios de sistemas simples q–igualitarios en poder y media son q–igualitarios en poder y media.

Proposición 5.215 *(a) Los sistemas ordinales medios asintóticos de máxima dispersión y mínima dispersión son mayoritarios en poder y media e igualitarios en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.*

(b) Los sistemas de cuotas medios son proporcionales en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores medios 0–asintóticos, 1–asintóticos y $+\infty$–asintóticos son mayoritarios en poder y media, proporcionales en poder y media e igualitarios en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.211 y 5.214. □

Corolario 5.216 *(a) Los sistemas mayoritario e igualitario puros medios son mayoritario en poder y media e igualitario en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.*

(b) El sistema de los mayores restos medio es proporcional en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores lineales medios –y, en particular, el de Hondt medio– son proporcionales en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$.

Proposición 5.217 *(a) Los sistemas ordinales suma asintóticos de mínima dispersión respecto de uno simple estable son igualitarios en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) Los sistemas de cuotas suma respecto de uno simple proporcional son proporcionales en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores suma 1–asintóticos y ∞–asintóticos respecto de uno simple proporcional y uno simple estable son proporcionales en poder y media e igualitarios en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$, respectivamente.

Demostración. Consecuencia inmediata de 5.160 y 5.209. □

Corolario 5.218 *(a) El sistema igualitario puro suma respecto de uno simple estable es igualitario en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$.*

(b) El sistema de los mayores restos suma respecto de uno simple proporcional es proporcional en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$.

(c) Los sistemas de divisores lineales suma –y, en particular, el de Hondt suma– respecto de uno simple proporcional son proporcionales en poder y media casi por todo $q \in [0,1)$.

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
ESTABILIDAD EN PODER Y MEDIA	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER Y MEDIA	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	$0-$*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD EN PODER Y MEDIA	*ninguno*	*todos*	$1-$*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER Y MEDIA	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty-$*asintóticos*

Tabla 5.7: Propiedades de la expectativa de poder media de los sistemas electorales simples notables.

	ORDINALES	**CUOTAS**	**DIVISORES**
ESTABILIDAD EN PODER Y MEDIA	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER Y MEDIA	*asintóticos de máxima dispersión*	*ninguno*	0–*asintóticos*
PROPORCIONALIDAD EN PODER Y MEDIA	*ninguno*	*todos*	1–*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER Y MEDIA	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty$–*asintóticos*

Tabla 5.8: Propiedades de la expectativa de poder media de los sistemas electorales medios notables.

	Sistema electoral simple	**ORDINALES**	**CUOTAS**	**DIVISORES**
ESTABILIDAD EN PODER Y MEDIA	*estable*	*asintóticos*	*todos*	*asintóticos*
MAYORÍA EN PODER Y MEDIA	*arbitrario*	*ninguno*	*ninguno*	*ninguno*
PROPORCIONALIDAD EN PODER Y MEDIA	*proporcional*	*ninguno*	*todos*	1−*asintóticos*
IGUALDAD EN PODER Y MEDIA	*estable*	*asintóticos de mínima dispersión*	*ninguno*	$+\infty$−*asintóticos*

Tabla 5.9: Propiedades de la expectativa de poder media de los sistemas electorales suma notables.

Conclusiones

La creciente complejidad de las sociedades modernas ha traído consigo que dichas sociedades se hayan tenido que dotar de formas de decisión y representación diversas. Ello ha provocado el nacimiento de la Teoría de la Elección Social, el análisis formal de los sistemas electorales y la aparición de la Teoría de Juegos. Es por ello que las disciplinas anteriores presentan diversos puntos de contacto entre ellas.

Han sido precisamente los sistemas electorales y su relación con la Teoría de Juegos los temas aquí tratados. De hecho, el estudio de los sistemas electorales había sido abordado ya con anterioridad desde perspectivas diferentes, que iban desde el simple análisis descriptivo de casos prácticos hasta el de su estudio formal, basado en el método axiomático. Y es concretamente en el marco de esta última situación, con el apoyo de la Teoría de Probabilidades, donde se sitúa el presente trabajo, que nace con la voluntad de añadir un grano más de arena en tal sentido.

En este punto, cabe recordar que nos habíamos planteado una serie de objetivos a los que pretendíamos dar respuesta. Debemos analizar, por tanto, cuáles han sido dichas respuestas en cada caso, qué problemas no han sido resueltos todavía parcial o totalmente y qué posibles soluciones o alternativas prevemos que puede haber en este último caso. Asimismo, puesto que del análisis de nuevos conceptos se suele derivar el nacimiento de otros, habrá que ver cuáles son éstos y qué posibles líneas puede haber a la hora de abordarlos. Comentamos a continuación todas las cuestiones anteriores.

El primer capítulo se ocupa del análisis global de los sistemas electorales. Empezamos con su definición y la consideración de su caso particular más notable, el de los sistemas electorales simples, al que corresponden los ejemplos más importantes: los ordinales, de cuotas y de divisores. Continuamos después con la introducción de dos operaciones, la extensión media y la suma que, aplicadas a los sistemas electorales simples, dan lugar a los sistemas electorales medios y suma respectivamente y que, en particular, permiten generalizar los ejemplos anteriores de dos formas distintas. Y continuamos con el concepto de sistema electoral inducido, obtenido cuando se restringe el número de candidaturas, y analizamos su relación con la extensión media y la suma.

Finalizamos el primer capítulo con el estudio de las propiedades de superaditividad, monotonía, crecimiento y estabilidad, que incluye las de mayoría, proporcionalidad e igualdad. Caben destacar los resultados obtenidos para los diferentes ejemplos considerados, especialmente los referentes a la estabilidad y, en particular, la mayoría, proporcionalidad e igualdad. Asimismo, se analiza también el comportamiento e todas ellas respecto de la extensión media, la suma y la inducción, que permite la generalización de los resultados de los ejemplos anteriores a los casos medios y suma introducidos.

En el segundo capítulo estudiamos los sistemas electorales desde la perspectiva individual de una candidatura arbitraria en función de sus votos en cada una de las circunscripciones. Obtenemos así el concepto de expectativas electorales en un sistema electoral, destacando al respecto la equivalencia casi segura entre los sistemas electorales y la familia de expectativas electorales correspondiente. Asimismo, analizamos su relación con la extensión media, la suma y la inducción. Y es especialmente interesante el estudio del recorrido de las expectativas electorales, en el que destacan los resultados correspondientes a los diferentes ejemplos básicos considerados.

Finalmente, terminamos el capítulo con las propiedades de crecimiento y estabilidad parcial, que incluye las de mayoría, proporcionalidad e igualdad parcial. En este sentido, destaca la equivalencia casi segura también de los conceptos de crecimiento, estabilidad, mayoría, proporcionalidad e igualdad definidos en el capítulo anterior y los correspondientes conceptos parciales introducidos. También prestamos especial atención a los ejemplos básicos y a su relación con la extensión media, la suma y la inducción que, como consecuencia, permiten el análisis de las diversas generalizaciones consideradas para dichos ejemplos.

El tercer capítulo lo dedicamos a la noción de expectativa electoral media, definida a fin de poder evaluar cuantitativamente si un sistema electoral es beneficioso o perjudicial para unos vectores de votos dados de una candidatura cualquiera. En particular, analizamos su comportamiento respecto de la extensión media y la suma, destacando en este sentido el hecho de que la expectativa electoral media de la suma es igual a la suma de cada una de las expectativas electorales medias.

Terminamos el capítulo con el análisis de las propiedades de crecimiento y estabilidad en media y, en particular, las de mayoría, proporcionalidad e igualdad en media. Y se establece su relación con las de crecimiento y estabilidad definidas en el primer capítulo, así como con las diferentes operaciones introducidas.

El capítulo cuarto, por su parte, se dedica a la introducción de tres cuestiones sobre juegos de mayoría ponderada que son utilizadas posteriormente: una representación alternativa de dichos juegos basada en la consideración de cuotas estrictas, la introducción de una nueva operación entre ellos –la suma– y el análisis de su convergencia, esta última presentada y analizada desde el punto de vista más general de los juegos cooperativos.

Finalmente, en el quinto y último capítulo presentamos los sistemas de poder como aplicaciones asociadas a los sistemas electorales, consistentes en la consideración del índice de poder de Skapley–Shubik en lugar de los representantes directamente y establecemos su relación con la extensión media y la suma. Ello nos permite relacionar los sistemas electorales con la Teoría de Juegos y analizarlos desde el punto de vista de ésta. Seguimos entonces con la definición y el estudio de las propiedades de superaditividad, monotonía y estabilidad en poder y los casos particulares de mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder de esta última, todas ellas referidas al índice de poder de Shapley–Shubik.

A continuación, y de forma análoga al concepto de expectativa electoral de un sistema electoral, introducimos el de expectativa de poder de un sistema de poder y estudiamos la propiedad de estabilidad parcial en poder y, de nuevo, los casos de mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder parciales.

Finalmente, introducimos la noción de expectativa de poder media tomando nuevamente la esperanza matemática de las expectativas de poder y terminamos con las propiedades de estabilidad en poder y media y, de nuevo, con los casos particulares de mayoría, proporcionalidad e igualdad en poder y media.

Como resumen de todo lo expuesto en el presente trabajo, queremos terminar sintetizando en los puntos siguientes las principales conclusiones que de él se han derivado.

(a) El estudio de los sistemas electorales salvo conjuntos de probabilidad cero facilita su formalización y tratamiento.

(b) La imposibilidad de la proporcionalidad para valores dados del número de representantes a elegir sugiere su definición en base a la convergencia de aquéllos.

(c) La expectativa electoral media proporciona una forma de evaluar si un sistema electoral beneficia o perjudica a unos votos dados de una candidatura cualquiera.

(d) La introducción de la extensión media y la suma permite extender al caso de varias circunscripciones los ejemplos conocidos para una única circunscripción.

(e) La consideración del índice de poder de Shapley–Shubik en lugar de los representantes de cada candidatura permite abordar el estudio de los sistemas electorales desde la perspectiva de la Teoría de Juegos.

(f) Se han desarrollado técnicas de cálculo para diversos conceptos, que se han podido aplicar a los ejemplos más conocidos.

Dado que siempre quedan vías abiertas y vías por abrir, finalizaremos citando algunas de las que podrían seguirse directamente de las aquí expuestas.

- La introducción de nuevas operaciones entre sistemas electorales diferentes de la extensión media y la suma, o bien la generalización de éstas.
- La consideración de otros tipos de convergencia entre vectores aleatorios distintas de la casi segura.
- El estudio de los ejemplos básicos con otras probabilidades que no sean la uniforme, así como el análisis de otros ejemplos nuevos.
- El cálculo de la expectativa electoral media para los ejemplos más importantes y el consiguiente análisis de sus propiedades en cada uno de ellos.
- El tratamiento según la Teoría de Juegos con otros índices distintos del índice de poder de Shapley–Shubik, tales como el de Banzhaf–Coleman o los semivalores.
- El análisis de situaciones más generales, tales como elecciones indirectas, con más de una vuelta o con varios grados de conjuntos de circunscripciones.

Índice alfabético

Bibliografía

[1] **ASH, R. B.**
Real Analysis and Probability.
Academic Press Inc., 1972.

[2] **ARROW, K. J.**
Social choice and individual values, 2ª edición.
Yale University Press, 1963.

[3] **BALINSKI, M. L.; RAMIREZ, V.**
"A Case of Electoral Manipulation: The Mexican Laws of 1989 and 1994".
Electoral Studies, 1995.

[4] **BALINSKI, M. L.; YOUNG, H. P.**
Fair representation: meeting the ideal of one man one vote.
Yale University Press, 1982.

[5] **BALINSKI, M. L.; YOUNG, H. P.**
"The quota method of apportionment".
American Mathematical Monthly, núm. 82 (1982), pp. 701–729.

[6] **BANZAF, J, F.**
"Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis".
Rutgers Law Review, núm. 19 (1965), pp. 317–343.

[7] **BLACK, D.**

The theory of commitees and elections, 5ª edición.

Kluwer Academic Publishers, 1987.

[8] **BLAIS, A.**

"The classification of electoral systems".

European Journal of Political Research, núm. 16 (1988), pp. 99–111.

[9] **CARTER, C.**

"Some properties of divisor methods for legislative apportionment and proportional representation".

American Political Science Review, núm. 76 (1982), pp. 575–584.

[10] **CHESSA, M.**

A Mathematical Analysis in Conflicts of Electoral Systems.

PhD Thesis, University of Eastern Piedmont (2000).

[11] **COLEMAN, J. S.**

"Control of collectivities and the power of a collectivity to act".

Social Choice (B. Lieberman, ed.), Gordon and Breach (1971), pp. 269–300.

[12] **DAVIS, M. D.**

Game theory.

Basic Books, 1969.

[13] **ESTEBAN, J. [et al.]**

El proceso electoral.

Editorial Labor–Politeia, 1977.

[14] **FELLER, W.**

An Introduction to Probability Theory and its Applications.

John Wiley and sons, 2ª edición. (1965).

[15] **FERNÁNDEZ GARCÍA, J. R.**

Complejidad y algoritmos en juegos cooperativos.

Tesis doctoral, Universidad de Sevilla (2000).

[16] **FRAGNELLI, V.; MONELLA, G.; ORTONA, G.**
"A simulative approach for evaluating electoral systems".
Homo Oeconomicus, núm. 22 (2005), pp. 525–549.

[17] **GAMBARELLI, G.**
"Minimax apportionments".
Kluwer Academic Publishers, 1999.

[18] **GAMBARELLI, G.**
"Sistemas electorales y procesamiento de datos".
Comunicación presentada en el Congreso Iberoamericano de Informática y Derecho (Bariloche), 1994.

[19] **GIRON, F. J.**
Teoría de los Juegos.
UNED, 1977.

[20] **KELLY, J. S.**
Social choice theory.
Springer-Verlag, 1987.

[21] **LIJPHART, A.**
Electoral systems and party systems.
Oxford University Press, 1994.

[22] **LIJPHART, A.**
"The political consequences of electoral laws: 1945–1985".
American Political Science Rewiew, núm. 84 (1990), pp. 481–496.

[23] **LOÈVE, M.**
Real and Complex analysis.
Van Nostrand Reinhold Co., 1962.

[24] **MORROW, J. D.**
Game theory for political scientists.
Princeton University Press, 1984.

[25] **NUALART, D.**

"Las matemáticas en la actividad política".

Jornada Matemática en el Congreso de los Diputados de España, 2001.

[26] **NURMI, H.**

Voting paradoxes and how to deal with them.

Springer-Verlag, 1999.

[27] **ORDERSHOOK, P. C.**

Game theory and political theory.

Cambridge University Press, 1986.

[28] **OWEN, G.**

"Multilinear extensions and the Banzhaf value".

Naval Research Logistics Quarterly, núm. 22 (1975), pp. 741–750.

[29] **OWEN, G.**

Game Theory.

[Academic Press], 3ª edición. (1995).

[30] **OWEN, G.**

"Values of games with a priori unions".

Essays in Mathematical Economics and Game Theory. [Springer-Verlag.] (1977), pp. 76-88.

[31] **PELEG, B.**

Game theoretic analysis of voting in committees.

Cambridge University Press, 1984.

[32] **RAE, D.**

The political consequences of electoral laws.

Yale University Press, 1967.

[33] **RUDIN, W.**

Real and Complex Analysis.

McGraw-Hill, 2ª edición. (1974).

[34] **SEN, A. K.**
Collective choice and social welfare.
Holden-Day, 1970.

[35] **SEN, A. K.**
"The impossibility of a Paretian Liberal".
Journal of Political Economy, núm. 78 (1970), pp. 152–157.

[36] **SHAPLEY, L. S.**
"A value for n-person games".
Contributions to the theory of games II. Annals of Mathematical Studies. [Princeton University Press.] (1953), pp. 307–317.

[37] **SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M.**
"A method for evaluating the distribution of power in a commitee system".
American Political Science Rewiew. Núm. 48 (1954), pp. 787–792.

[38] **VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O.**
Theory of games and economic behavior.
Princeton University Press, 1944.

[39] **TAYLOR, A. D.**
Mathematics and politics.
Springer-Verlag, 1995.

[40] **TAYLOR, A. D.; ZWICKER, W. S.**
Simple Games: Desirability Relations, Traiding and Pseudoweightings.
Princeton University Press, 1999.

[41] **ZYCZKOWXKI, K.; STOMCZYNSKI, W.; ZASTAWNIAK, T.**
"Physics for fairer voting".
Physics World (2006), pp. 35–37.