UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES

PROGRAMA DE DOCTORADO DE MATEMÁTICA APLICADA

Tesis Doctoral

Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden y su aplicación al Análisis Matricial

Mª José Jiménez Jiménez

Director: Andrés M. Encinas Bachiller

Barcelona, noviembre de 2015

A todos los que confiaron en la finalización de este trabajo.
Ellos ya saben.

Índice general

Agradecimientos

Gracias a Andrés, mi director. Si con mi formación académica de ingeniera he podido dedicar mi vida profesional a las Matemáticas es gracias a que he tenido la suerte de encontrarme con estupendos docentes de esta materia, y Andrés ha sido la guinda del pastel. Es un pozo sin fondo de conocimientos, no sólo matemáticos sino en muy diversas disciplinas y temas varios, generoso compartiéndolos y acertado trasmitiéndolos. *He disfrutado mucho trabajando y debatiendo contigo. Espero que la vida me siga permitiendo compartirte.*

Gracias al resto de mi grupo de investigación. Me sigue sorprendiendo día a día que gente tan diversa pueda trabajar sin dificultades de forma tan natural. A Ángeles que fue quien me introdujo en el grupo y por ende en la Universidad, *parece que estás destinada a apadrinar muchos acontecimientos de mi vida y, por cierto, con estupendos resultados por el momento, así que espero tenerte a mi lado todo el tiempo posible*. A Enric, *benvingut, et desitjo que el teu pas pel nostre grup sigui tan plaent com ho està sent per a mi*. A Margarida, *ets encantadora així que treballar amb tu esdevé divertit i productiu, una combinació fantàstica*. A Sílvia, *has sido siempre atenta y considerada conmigo, ha resultado muy grato sentir que se preocupaban por mi*. Y a Enrique, *ya no estás en el grupo pero eras miembro cuando me incorporé, así que parte de mi progreso en él también te lo debo a ti*.

Gracias a mis compañeros en *l'Escola d'Enginyeria de Terrassa*. *Feu que treballar amb vosaltres sigui tan agradable que tot aquest procés ha estat molt més planer del que es podia esperar, especialment en aquests últims temps en els que treballar a la universitat ja no és el que era.*

Gracias a todos mis alumnos. Si he llegado hasta aquí es porque desde que recuerdo siempre he tenido vocación docente. *Aprenc de vosaltres i amb vosaltres cada dia.*

Gracias a los lectores de estas páginas. Si este documento les resulta interesante o útil, todo el trabajo habrá valido mucho más la pena.

Gracias a mis amigos. Los de verdad. Los que en estos últimos meses en los que he estado desaparecida se han percatado de mi ausencia. *M'ha fet molta il·lusió que em trobéssiu a faltar justament quan estàveu gaudint d'estones agradables. Efectivament quan això acabi, s'ha de remullar!*

Gracias a mi marido y a mis hijos, Xavi, Anna y Ramon. Sé que convivir conmigo no es tarea fácil, y mucho menos lo habrá sido en la etapa final de este trabajo. *Xavi, no podía estar mejor acompañada en todo este proceso*. *Anna, muchos de los mejores paréntesis en mi trabajo me los han aportado tus espectáculos, ni te imaginas lo que disfruto como espectadora*. *Ramon, que a pesar de ser tan joven seas una persona tan sensata me resulta muy útil siempre, pero lo ha sido especialmente en estos días*. *Us estimo.*

Gracias a mis dos hermanos, y a toda su familia que se han ido incorporando a la nuestra. *Que hayáis sido pacientes y no presionar durante la elaboración de este trabajo ha sido de gran ayuda.*

Gracias a mi madre, que decidió desde un primer momento dar en herencia a sus hijos una carrera universitaria. La vida no había sido muy generosa con ella y se empeñó en conseguir que sí lo fuera con su familia. *Estoy aquí por mi dedicación, pero impulsada por tu determinación y tus sacrificios.*

Y finalmente, gracias a mi padre, allí donde esté. *Esperemos que este esfuerzo invertido por todos culmine en que haya una doctora en la familia como tu deseabas. Ya sé que no es exactamente a lo que te referías, pero seguro que me lo habrías perdonado.*

Introducción

Las ecuaciones en diferencias juegan un importante papel en variados problemas científicos y de ingeniería. Sin embargo, mientras que la expresión de las soluciones cuando los coeficientes de las ecuaciones son constantes es ampliamente conocida, no ocurre lo mismo para coeficientes variables, excepto en el caso más simple de las ecuaciones de primer orden.

En este trabajo presentamos un estudio de las ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden, en los casos infinito, semi–infinito y finito. También, para las ecuaciones en diferencias de segundo orden en el caso finito, estudiamos los problemas de contorno asociados. Nuestro objetivo es desarrollar técnicas que sean análogas a aquellas que se usan en el análisis de las ecuaciones diferenciales y, para el caso finito, las utilizadas en problemas de contorno.

A pesar de que nuestras técnicas, con las convenientes modificaciones, también se ajustan al caso complejo, en este trabajo tratamos principalmente el caso real, es decir, el caso en el que todas las funciones involucradas toman valores en el cuerpo de los números reales. Estudiamos en primer lugar el caso de coeficientes constantes, presentando primero los resultados conocidos para acabar describiendo las múltiples relaciones de las ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes con los polinomios de Chebyshev. Dichas relaciones nos permiten el cálculo de sus soluciones de forma más directa y sencilla, sin necesidad de imponer condiciones sobre los valores de los coeficientes de la ecuación.

Una ventaja añadida de resolver las ecuaciones con coeficientes constantes utilizando su relación con los polinomios de Chebyshev, es que se puede extender la misma estrategia a las ecuaciones con coeficientes variables, pudiendo expresar también sus soluciones en términos de las que denominamos funciones de Chebyshev de dos argumentos. De esta forma, conseguimos una fórmula cerrada y de cálculo directo.

En el caso particular de ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes variables que satisfacen propiedades de periodicidad, desarrollamos un procedimiento que reduce la ecuación en diferencias con esta clase de coeficientes a otra ecuación del mismo tipo pero de coeficientes constantes, así que, de nuevo pueden expresarse sus soluciones en términos de polinomios de Chebyshev. Además, la relación entre estos polinomios y las ecuaciones en diferencias con coeficientes periódicos puede también emplearse para caracterizar la existencia de soluciones periódicas, con el fin de plantear la Teoría de Floquet correspondiente a estas ecuaciones discretas.

Dada la estrecha relación entre las ecuaciones en diferencias de segundo orden en el caso finito y la inversión de matrices tridiagonales, en el último capítulo presentamos la aplicación de los resultados antes mencionados para determinar la invertibilidad de dichas matrices y, en ese caso, obtener explícitamente sus inversas.

Capítulo 1

Ecuaciones en diferencias lineales irreducibles y de segundo orden

1. Preliminares

A lo largo de este trabajo $\mathbb{R}$ denota el conjunto de los números reales, $\mathbb{Z}$ el de números enteros, $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, y $\mathbb{R}^*$ y $\mathbb{N}^*$ los conjuntos $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, respectivamente. Además, $\mathbf{I}$ denota bien $\mathbb{Z}$, el conjunto de los números enteros, o bien $\mathbb{N}$ o también el conjunto $\{0, \ldots, n+1\}$ para un cierto $n \in \mathbb{N}^*$ y, entonces, nos referimos a $\mathbf{I}$ como al dominio infinito, semi–infinito o finito, respectivamente. Por tanto, $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ es el conjunto $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^*$ o $\{1, \ldots, n\}$, y $\delta(\mathbf{I})$ es el conjunto $\emptyset$, $\{0\}$ o $\{0, n+1\}$, respectivamente. Las diferentes situaciones quedan resumidas en la tabla siguiente:

Dominio	$\mathbf{I}$	$\overset{\circ}{\mathbf{I}}$	$\delta(\mathbf{I})$
Infinito	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\emptyset$
Semi-Infinito	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^*$	$\{0\}$
Finito	$\{0, \ldots, n+1\}$	$\{1, \ldots, n\}$	$\{0, n+1\}$

En particular, siempre ocurre que $0 \in \mathbf{I}$.

El espacio vectorial de las funciones con valor en $\mathbb{R}$ y variable en un conjunto arbitrario H lo denotamos por $\mathcal{C}(\mathrm{H})$ y, en particular, como $\mathcal{C}(\mathbf{I})$ si la variable está en $\mathbf{I}$. Claramente, dada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, el conjunto $u(\mathbf{I}) = \{u(k) : k \in \mathbf{I}\} \subset \mathbb{R}$ es numerable. Para cualquier $F \subset \mathbf{I}$, $\varepsilon_{_F}$ denota su *función característica*. En particular, la función característica de $\mathbf{I}$ será denotada simplemente por ε, mientras que para cualquier $m \in \mathbf{I}$, ε_m representará la función característica del conjunto $\{m\}$. Asimismo, 0 representa a la función constante cuyo valor es 0 en todo $k \in \mathbf{I}$.

Si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, el *soporte de* u es el conjunto $\mathsf{supp}(u) = \big\{k \in \mathbf{I} : u(k) \neq 0\big\}$. Si $F \subset \mathbf{I}$, denotaremos por $\mathcal{C}(F)$ al conjunto de funciones cuyo soporte está contenido en F y por $\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ al conjunto de funciones cuyo soporte es $\mathbf{I}$; es decir, $\mathcal{C}^*(\mathbf{I}) = \big\{u \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) : u(k) \neq 0 \text{ para todo } k \in \mathbf{I}\big\}$, y por $\Omega(\mathbf{I})$ el subconjunto de $\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ formado por las funciones positivas. Los elementos de $\Omega(\mathbf{I})$ se denominan usualmente *pesos*.

Dado $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $\sigma \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, denotamos por $\sigma\mathcal{A} = \big\{\sigma u : u \in \mathcal{A}\big\}$.

El subespacio de $\mathcal{C}(\mathbf{I})$ formado por las funciones que se anulan en $\delta(\mathbf{I})$, se denota por $\mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$.

Consideramos la *función signo*, $\mathfrak{s}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $\mathfrak{s}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$. En consecuencia, $\mathfrak{s}(x) = |x|^{-1}x = x^{-1}|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$ y $\mathfrak{s}(x) = -\mathfrak{s}(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Además, a lo largo de este trabajo, usamos el convenio habitual por el que el valor de sumatorios vacíos y productorios vacíos valen 0 y 1 respectivamente; es decir, $\sum\limits_{s=k}^{m} a_s = 0$ y $\prod\limits_{s=k}^{m} a_s = 1$ cuando $m < k$.

Dada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $k, m \in \mathbf{I}$, definimos *la integral de* u *entre* k *y* m como el valor

$$\int_k^m u(s)ds = \mathfrak{s}(m-k) \sum_{s=\min\{k,m\}+1}^{\max\{k,m\}} u(s)\,. \tag{1}$$

Por tanto, tenemos $\displaystyle\int_k^k u(s)ds = 0$, $\displaystyle\int_k^{k+1} u(s)ds = u(k+1)$ y $\displaystyle\int_k^{k-1} u(s)ds = -u(k)$ para cualquier $k \in \mathbf{I}$. Más generalmente, para cualquier $k, m \in \mathbf{I}$ tenemos $\displaystyle\int_k^m u(s)ds = -\int_m^k u(s)ds$, y para cualquier $k, m, r \in \mathbf{I}$

$$\int_k^m u(s)ds + \int_m^r u(s)ds = \int_k^r u(s)ds. \tag{2}$$

Por otro lado, la integral definida es una aplicación lineal y monótona, ya que para cualquier $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y para cualquier $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\int_k^m \big(\alpha u(s)+\beta v(s)\big)ds = \alpha\int_k^m u(s)ds+\beta\int_k^m v(s)ds \quad \text{y} \quad \left|\int_k^m u(s)ds\right| \le \left|\int_k^m |u(s)|ds\right|. \tag{3}$$

Si consideramos $U(x) = \displaystyle\int_k^x u(s)d(s)$, entonces

$U(x+1)-U(x) = u(x+1)$ y $U(x)-U(x-1) = u(x)$, para todo $x \in \mathbf{I}$ tal que $x+1, x-1 \in \mathbf{I}$. De forma inversa, obtenemos la siguiente versión del *Teorema Fundamental del Cálculo*.

PROPOSICIÓN 1.1 (TFC). *Dada* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, entonces* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *satisface que* $u(k)-u(k-1) = f(k)$ *para cualquier* $k \in \mathring{\mathbf{I}}$ *sii existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$u(k) = \alpha + \int_0^k f(s)ds, \qquad k \in \mathbf{I}.$$

Demostración. El lado izquierdo de la igualdad $u(k)-u(k-1) = f(k)$ define una sucesión telescópica y, por tanto, para cualquier $k \in \mathbf{I}$

$$\begin{aligned}\int_0^k f(s)ds &= \mathfrak{s}(k) \sum_{s=\min\{k,0\}+1}^{\max\{k,0\}} f(s) = \mathfrak{s}(k) \sum_{s=\min\{k,0\}+1}^{\max\{k,0\}} \big(u(s)-u(s-1)\big)\\ &= \mathfrak{s}(k)\Big[u\big(\max\{k,0\}\big) - u\big(\min\{k,0\}\big)\Big] = u(k)-u(0) = u(k)-\alpha,\end{aligned}$$

donde $\alpha = u(0)$. □

COROLARIO 1.2. *Dado* $\beta \in \mathbb{R}$*, entonces* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *satisface* $u(k)-u(k-1) = \beta$ *para cualquier* $k \in \mathring{\mathbf{I}}$ *sii existe* $\alpha \in \mathbb{R}$ *tal que* $u(k) = \alpha+\beta k$ *para cualquier* $k \in \mathbf{I}$.

COROLARIO 1.3 (Integración por partes). *Dadas* $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, entonces para cualquier* $k \in \mathbf{I}$ *se verifica que*

$$\int_0^k u(s-1)\big(v(s)-v(s-1)\big)ds = u(k)v(k)-u(0)v(0)-\int_0^k v(s)\big(u(s)-u(s-1)\big)ds.$$

Demostración. En primer lugar, observamos que para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ se cumple

$$(uv)(k) - (uv)(k-1) = \big(u(k) - u(k-1)\big)v(k) + \big(v(k) - v(k-1)\big)u(k-1)$$

. Aplicando el TFC para cualquier $k \in \mathbf{I}$, obtenemos que

$$\int_0^k u(s-1)\big(v(s) - v(s-1)\big)ds = u(k)v(k) - u(0)v(0) - \int_0^k v(s)\big(u(s) - u(s-1)\big)ds.$$

□

NOTA 1.4. En [**49**], se introduce una definición ligeramente diferente de la Integral definida (1), en concreto, se define como $\displaystyle\int_k^m u(s)ds = \mathfrak{s}(m-k) \sum_{s=\text{mín}\{k,m\}}^{\text{máx}\{k,m\}-1} u(s)$. No obstante, ambas definiciones conducen a resultados equivalentes.

2. Problemas de valor inicial

Dadas las funciones $a, b, c \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, para cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ una *ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes* a, b, c *y dato* f es de la forma

(4) $$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

y se trata de encontrar todas las funciones $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ que verifican la identidad.

Se denomina *solución de la ecuación en diferencias* a cada función $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ que satisface la identidad anterior.

Claramente, las soluciones no dependen del valor de los coeficientes a, b y del dato f en $\delta(\mathbf{I})$. Por tanto, podemos suponer, sin perdida de generalidad, que $f \in \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$. Asimismo, cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, los valores de c en n y $n+1$ no tienen ninguna influencia en la Ecuación (4) y podemos imponer que $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$, identidades que asumiremos satisfechas en lo sucesivo cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$. En la próxima sección explicamos el porqué de esta imposición, que como se ha señalado no tiene ningún efecto en la Ecuación (4).

El coeficiente a de la Ecuación (4) se denomina usualmente *coeficiente principal*. En las próximas secciones mostraremos que juega un papel primordial en el estudio de las ecuaciones en diferencias de segundo orden. La Ecuación (4) se denomina *explícita o escrita en forma normal* si y solo si su coeficiente principal vale 1; es decir, $a(k) = 1$ para cualquier $k \in \mathbf{I}$.

La ecuación

(5) $$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

que corresponde a considerar dato nulo en la Ecuación (4) se denomina *homogénea* y nos referimos a ella como la ecuación homogénea asociada a (4).

NOTA 2.1. Supongamos que $\mathbf{I} = \{0, \dots, n+1\}$ y para algún $1 \le m \le n$ se satisface que $a(m) = 0$. Entonces, $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es solución de la Ecuación (4) sii

$$\begin{aligned} a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) &= f(k), \quad 1 \le k \le m-1, \\ -b(m)u(m) + c(m-1)u(m-1) &= f(m), \\ a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) &= f(k), \quad m+1 \le k \le n. \end{aligned}$$

Consideremos los conjuntos $\mathbf{I}_1 = \{0, \dots, m\}$, $\mathbf{I}_2 = \{0, \dots, n-m+1\}$ y las funciones $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{f} \in \mathcal{C}(\mathbf{I}_2)$ definidas como $\hat{a}(k) = a(m+k)$, $\hat{b}(k) = b(m+k)$, $\hat{c}(k) = c(m+k)$, $\hat{f}(k) = f(m+k)$, para cualquier $k = 0, \dots, n-m+1$. Entonces, $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es una solución de la Ecuación (4) sii $u(k) = v_1(k)$, $k = 0, \dots, m$ y $u(k) = v_2(k-m)$, $k = m+1, \dots, n+1$, donde $v_1 \in \mathcal{C}(\mathbf{I}_1)$ y $v_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{I}_2)$ son soluciones de las ecuaciones

$$a(k)v_1(k+1) - b(k)v_1(k) + c(k-1)v_1(k-1) = f(k), \qquad 1 \le k \le m-1,$$
$$\hat{a}(k)v_2(k+1) - \hat{b}(k)v_2(k) + \hat{c}(k-1)v_2(k-1) = \hat{f}(k), \qquad 1 \le k \le n-m,$$

que satisfacen $-b(m)v_1(m) + c(m-1)v_1(m-1) = f(m)$ y, además, que $v_2(0) = v_1(m)$ cuando $c(m) \neq 0$.

Por tanto, cuando $a(m) = 0$, la Ecuación (4) se puede reducir a dos ecuaciones en diferencias, que satisfacen condiciones adicionales, final e inicial, respectivamente. Las mismas consideraciones se verifican cuando $c(m) = 0$, y también son ciertas en los casos infinito y semi–infinito. En consecuencia, un estudio general de las ecuaciones en diferencias sólo requiere analizar el caso, llamado *irreducible*, en el que los coeficientes $a, c \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ son no nulos en cada nodo de $\mathbf{I}$, es decir, $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$. Por tanto, en lo sucesivo consideraremos los coeficientes $a, b, c \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ donde $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y, además, $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$ cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$.

El primer resultado de esta sección establece las principales cuestiones sobre existencia y unicidad respecto las ecuaciones en diferencias de segundo orden. En particular, concluye que cualquier solución está completamente determinada por su valor en dos nodos consecutivos.

PROPOSICIÓN 2.2. *Dados* $m \in \mathring{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *y* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, *para cualquier* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *la ecuación en diferencias de segundo orden*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \qquad k \in \mathring{\mathbf{I}},$$

tiene una única solución $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *tal que* $u(m) = x_0$, $u(m+1) = x_1$.

Demostración. Claramente, una función $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es solución de la ecuación en diferencias con dato f sii

$$u(k+1) = \frac{b(k)}{a(k)}\,u(k) - \frac{c(k-1)}{a(k)}\,u(k-1) + \frac{f(k)}{a(k)},$$
$$u(k-1) = \frac{b(k)}{c(k-1)}\,u(k) - \frac{a(k)}{c(k-1)}\,u(k+1) + \frac{f(k)}{c(k-1)}$$

para cualquier $k \in \mathring{\mathbf{I}}$. En particular,

$$u(m+2) = \frac{b(m+1)}{a(m+1)}\,x_1 - \frac{c(m)}{a(m+1)}\,x_0 + \frac{f(m+1)}{a(m+1)},$$
$$u(m-1) = \frac{b(m)}{c(m-1)}\,x_0 - \frac{a(m)}{c(m-1)}\,x_1 + \frac{f(m)}{c(m-1)}.$$

Razonando inductivamente, tanto regresiva como progresivamente, obtenemos que los valores de $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ están determinados unívocamente por x_0, x_1 y f. $\square$

El problema consistente en obtener la solución única de la Ecuación (4) que satisface las condiciones de la anterior proposición, se conoce como *el problema de valor inicial para la Ecuación* (4) *en* m. Por tanto, acabamos de demostrar que cualquier problema de valor inicial para la Ecuación (4) tiene solución y es única. Naturalmente, si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es solución de la Ecuación (4) y consideramos $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y los valores $x_0 = u(m)$ y $x_1 = u(m+1)$, entonces u es la única solución de este problema de valor inicial. De este modo, determinar la solución de cualquier problema de valor inicial es equivalente a obtener todas las soluciones de la Ecuación (4).

COROLARIO 2.3. *Dada* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *que satisface*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

entonces $u = 0$ *sii existe* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *tal que* $u(m) = u(m+1) = 0$.

A partir de ahora denotaremos con $\mathcal{S}$ el conjunto de soluciones de la ecuación homogénea asociada a (4) y llamaremos *trivial* a su solución nula. Por otro lado, para cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ denotaremos por $\mathcal{S}(f)$ al conjunto de soluciones de la Ecuación (4) con dato f.

COROLARIO 2.4. *El conjunto* $\mathcal{S}$ *es un espacio vectorial de dimensión 2, mientras que para cualquier* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *se verifica* $\mathcal{S}(f) \neq \emptyset$ *y dada* $u \in \mathcal{S}(f)$*, se cumple* $\mathcal{S}(f) = u + \mathcal{S}$.

Nuestro próximo objetivo es caracterizar cuándo dos soluciones de la ecuación en diferencias homogénea forman una base de $\mathcal{S}$. Esto es posible gracias a los siguientes conceptos.

DEFINICIÓN 2.5. *Llamamos* wronskiano *a la aplicación* $w\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \times \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *que asigna a cualquier* $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *la función* $w[u,v] \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *definida como*

$$w[u,v](k) = \det \begin{bmatrix} u(k) & v(k) \\ u(k+1) & v(k+1) \end{bmatrix} = u(k)v(k+1) - u(k+1)v(k), \quad \textit{si} \;\; k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\},$$

y como $w[u,v](n+1) = w[u,v](n)$*, cuando* $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$.

Dadas $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, la función* $w[u,v]$ *se denomina* wronskiano de u y v.

El wronskiano es una aplicación bilineal antisimétrica. Por otro lado, para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y cualesquiera $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, se cumple que

$$w[u,v](k) = \det \begin{bmatrix} u(k) & v(k) \\ u(k+1) - u(k) & v(k+1) - v(k) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u(k+1) & v(k+1) \\ u(k+1) - u(k) & v(k+1) - v(k) \end{bmatrix}.$$

PROPOSICIÓN 2.6. *Dadas* $u, v \in \mathcal{S}$*, entonces o bien* $w[u,v] = 0$ *o bien* $w[u,v] \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*. Es más,* u *y* v *son linealmente dependientes sii* $w[u,v] = 0$.

Demostración. Cuando u y v son linealmente dependientes, es obvio que $w[u,v] = 0$. Asumimos ahora que existe $m \in \mathbf{I}$ tal que $w[u,v](m) = 0$. Si $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$ y $m = n+1$, entonces $w[u,v](n) = w[u,v](m) = 0$, por consiguiente podemos asumir que $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$. Si $v = 0$, entonces $w[u,v] = 0$ y u y v son linealmente dependientes. Entonces, podemos suponer que v es no nula y, por lo tanto, el Corolario 2.3 implica que los valores $v(m)$ y $v(m+1)$ no pueden ser simultáneamente nulos. Así que la hipótesis $w[u,v](m) = 0$ significa que los vectores $\big(v(m+1), -v(m)\big)$ y $\big(u(m), u(m+1)\big)$ son ortogonales y, por tanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u(m) = \alpha v(m)$ y $u(m+1) = \alpha v(m+1)$. En ese caso, la función $z = u - \alpha v$ satisface que $z \in \mathcal{S}$ y, además, $z(m) = z(m+1) = 0$, lo que según el Corolario 2.3 implica que $z = 0$. En consecuencia u y v son linealmente dependientes y esto, además, supone que $w[u,v]$ sea nulo. $\square$

En la próxima sección demostraremos un resultado más preciso acerca de los valores del wronskiano.

La noción de wronskiano nos permite expresar la solución de cualquier problema de valor inicial para la ecuación homogénea de forma cerrada en términos de una base dada de $\mathcal{S}$.

COROLARIO 2.7. *Dada* $\{u, v\}$ *una base de* $\mathcal{S}$*, entonces para cualquier* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *y para cualesquiera* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$*, la única solución de la Ecuación en diferencias homogénea (5) que satisface* $z(m) = x_0$ *y* $z(m+1) = x_1$ *viene dada por*

$$z(k) = \frac{1}{w[u,v](m)} \Big[\big(x_0 v(m+1) - x_1 v(m)\big) u(k) + \big(x_1 u(m) - x_0 u(m+1)\big) v(k) \Big], \quad k \in \mathbf{I}.$$

Demostración. Naturalmente, $z = a\,u + b\,v$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$. Por otra parte, z satisface las referidas propiedades sii a y b son las soluciones del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} u(m) & v(m) \\ u(m+1) & v(m+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, según la Proposición 2.6 obtenemos

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{w[u,v](m)} \begin{bmatrix} v(m+1) & -v(m) \\ -u(m+1) & u(m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{w[u,v](m)} \begin{bmatrix} x_0 v(m+1) - x_1 v(m) \\ x_1 u(m) - x_0 u(m+1) \end{bmatrix}$$

de donde se obtiene el resultado. □

3. La ecuación adjunta

La ecuación en diferencias homogénea

$$c(k)u(k+1) - b(k)u(k) + a(k-1)u(k-1) = 0, \qquad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \tag{6}$$

se denomina *ecuación en diferencias adjunta asociada a* (4). En particular, la Ecuación (4) se denomina *autoadjunta* cuando $c = a$ (recordemos que cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$ suponemos que $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$); es decir, cuando las Ecuaciones (5) y (6) son iguales. El espacio de soluciones de la ecuación adjunta se indica con $\mathcal{S}^*$.

Naturalmente, la ecuación adjunta de la Ecuación (6) es la ecuación homogénea asociada a la Ecuación (4), lo que implica $\mathcal{S}^{**} = \mathcal{S}$. Además, cuando la Ecuación (4) es autoadjunta entonces $\mathcal{S} = \mathcal{S}^*$. Más generalmente, como ilustraremos a continuación, los espacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^*$ están fuertemente relacionados. Para demostrarlo, resulta útil introducir la *función de acompañamiento* $\rho \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ definida para cualquier $k \in \mathbf{I}$ como

$$\rho(k) = \left[\prod_{s=\min\{k,0\}}^{\max\{k,0\}-1} \frac{a(s)}{c(s)} \right]^{\mathfrak{s}(k)}. \tag{7}$$

Por tanto, $\rho(0) = 1$, $\rho(k) = \displaystyle\prod_{s=0}^{k-1} \frac{a(s)}{c(s)}$ cuando $k > 0$ y $\rho(k) = \displaystyle\prod_{s=k}^{-1} \frac{c(s)}{a(s)}$ cuando $k < 0$. Por otro lado, cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, entonces ρ no depende de los valores de las funciones a y c en el nodo $n+1$.

Obsérvese que si ρ^* denota la función de acompañamiento para la ecuación adjunta de (4), entonces $\rho^* = \rho^{-1}$.

La principal propiedad de la función de acompañamiento se muestra en el siguiente resultado, cuya demostración es sencilla.

LEMA 3.1. *Se satisface que* $\rho(k)a(k) = \rho(k+1)c(k)$*, para cualquier* $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$*. Además la Ecuación* (4) *es autoadjunta sii* $\rho(k) = 1$ *para cualquier* $k \in \mathbf{I}$*.*

Tal y como anunciamos en la sección precedente, vamos a hacer más preciso el resultado de la Proposición 2.6. En primer lugar, cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, entonces $a(n+1) = c(n)$ y, por lo tanto,

$$a(n+1)\rho(n+1) = a(n+1)\prod_{s=0}^{n}\frac{a(s)}{c(s)} = a(n)\prod_{s=0}^{n-1}\frac{a(s)}{c(s)} = a(n)\rho(n),$$

que a su vez implica que $\rho(n+1)a(n+1)w[u,v](n+1) = \rho(n)a(n)w[u,v](n)$. Ahora demostraremos que las igualdades anteriores son ciertas para cualquier $k \in \mathbf{I}$ cuando $u, v \in \mathcal{S}$.

PROPOSICIÓN 3.2. *Dadas* $u, v \in \mathcal{S}$*, entonces* $a(k)w[u,v](k) = c(k-1)w[u,v](k-1)$ *para cualquier* $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$*. Por tanto, la función* $\rho\, a\, w[u,v]$ *es constante en* $\mathbf{I}$ *y vale* 0 *sii* u *y* v *son linealmente dependientes.*

Demostración. Como $u, v \in \mathcal{S}$, entonces

$$a(k)u(k+1) = b(k)u(k) - c(k-1)u(k-1) \quad \text{y} \quad a(k)v(k+1) = b(k)v(k) - c(k-1)v(k-1),$$

para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ y

$$\begin{aligned} a(k)w[u,v](k) &= u(k)\Big[b(k)v(k) - c(k-1)v(k-1)\Big] - v(k)\Big[b(k)u(k) - c(k-1)u(k-1)\Big] \\ &= c(k-1)\Big[v(k)u(k-1) - u(k)v(k-1)\Big] = c(k-1)w[u,v](k-1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, multiplicando por $\rho(k)$ ambos lados de la igualdad anterior y aplicando el Lema 3.1, obtenemos que $\rho\, a\, w[u,v]$ es constante en $\overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y, por tanto, en $\mathbf{I}$. □

Ahora estamos preparados para obtener la anunciada relación entre los espacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}^*$.

COROLARIO 3.3. $\mathcal{S}^* = \rho\,\mathcal{S}$ *y, además,* $\{u, v\}$ *es una base de* $\mathcal{S}$ *sii* $\{\rho u, \rho v\}$ *es una base de* $\mathcal{S}^*$*.*

Demostración. Si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, entonces $u \in \mathcal{S}$ sii

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

o, equivalentemente, sii

$$\rho(k)a(k)u(k+1) - \rho(k)b(k)u(k) + \rho(k)c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\,.$$

Definiendo $\hat{u} = \rho u$, la anterior identidad es equivalente a

$$\frac{\rho(k)a(k)}{\rho(k+1)}\,\hat{u}(k+1) - b(k)\hat{u}(k) + \frac{\rho(k)c(k-1)}{\rho(k-1)}\,\hat{u}(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\,.$$

Del Lema 3.1 tenemos que $\rho(k-1)a(k-1) = \rho(k)c(k-1)$ para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ y, por tanto, la identidad anterior es equivalente a

$$c(k)\hat{u}(k+1) - b(k)\hat{u}(k) + a(k-1)\hat{u}(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}};$$

es decir, equivalente a $\hat{u} \in \mathcal{S}^*$.

Finalmente, dadas $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, entonces para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, se verifica

$$w[\rho u, \rho v](k) = \rho(k)\rho(k+1)w[u,v](k).$$

Por tanto, $w[\rho u, \rho v](k) = 0$ sii $w[u,v](k) = 0$, verificándose la última afirmación del enunciado. □

Puesto que la función de acompañamiento que corresponde a la ecuación adjunta es ρ^{-1}, dados $u, v \in \mathcal{S}$, entonces $\rho^{-1} c\, w[\rho u, \rho v]$ es constante en $\mathbf{I}$. De hecho, en la demostración del anterior corolario hemos comprobado que

$$\rho\, a\, w[u,v] = \rho^{-1} c\, w[\rho u, \rho v], \qquad \text{para cualquier } u, v \in \mathcal{S}. \tag{8}$$

4. Función de Green y fórmula de Lagrange

Si conocemos una base del espacio de soluciones de la Ecuación en diferencias homogénea (5), a partir del Corolario 2.4 y dado $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, para obtener todas las soluciones de la Ecuación (4) es suficiente con obtener una solución particular. Más específicamente, como cada solución de la Ecuación (4) puede considerarse como la única solución de un problema de valor inicial dado, si fijamos $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, los valores $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, podemos fácilmente hacer más preciso el resultado del Corolario 2.4.

PROPOSICIÓN 4.1 (Principio de Superposición). *Si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es la única solución del problema de valor inicial*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k); \;\; k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \qquad u(m) = x_0, \;\; u(m+1) = x_1,$$

entonces $u = z + v$ donde z es la única solución del problema de valor inicial para la ecuación homogénea

$$a(k)z(k+1) - b(k)z(k) + c(k-1)z(k-1) = 0; \;\; k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \qquad z(m) = x_0, \;\; z(m+1) = x_1,$$

y v es la única solución del problema de valor inicial

$$a(k)v(k+1) - b(k)v(k) + c(k-1)v(k-1) = f(k); \;\; k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \qquad v(m) = v(m+1) = 0.$$

Nuestro próximo objetivo es para cada dato $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ dado y fijado $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, obtener la única solución del último problema de valor inicial. El próximo concepto es la clave para alcanzar este propósito.

DEFINICIÓN 4.2. *Llamamos* función de Green para la Ecuación en diferencias (4) *a la función $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I} \times \mathbf{I})$ definida para cualquier $s \in \mathbf{I}$ como $g(\cdot, s)$ la única solución de la Ecuación en diferencias homogénea* (5) *que satisface $g(s,s) = 0$ para cualquier $s \in \mathbf{I}$ y $g(s+1, s) = \dfrac{1}{a(s)}$ cuando $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ o $g(n, n+1) = -\dfrac{1}{a(n+1)}$ cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$.*

La importancia de la función de Green reside en que nos permite obtener una solución particular de la Ecuación (4) con dato f para cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$.

PROPOSICIÓN 4.3. *Dados* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *y* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$*, entonces la función*

$$u(k) = \int_m^k g(k,s) f(s) ds, \qquad k \in \mathbf{I},$$

es la única solución de la Ecuación (4) *que satisface* $u(m) = u(m+1) = 0$.

Demostración. Obviamente, $u(m) = 0$ y $u(m+1) = g(m+1, m+1) f(m+1) = 0$. Por otro lado, dado $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$, aplicando la aditividad de la integral, es decir, la Identidad (2), obtenemos

$$a(k) \int_m^{k+1} g(k+1,s) f(s) ds - b(k) \int_m^k g(k,s) f(s) ds + c(k-1) \int_m^{k-1} g(k-1,s) f(s) ds$$

$$= \int_m^{k-1} \Big[a(k) g(k+1,s) - b(k) g(k,s) + c(k-1) g(k-1,s) \Big] f(s) ds$$

$$+ \int_{k-1}^{k} \Big[a(k) g(k+1,s) - b(k) g(k,s) \Big] f(s) ds + a(k) \int_k^{k+1} g(k+1,s) f(s) ds$$

$$= \Big[a(k) g(k+1,k) - b(k) g(k,k) \Big] f(k) + a(k) g(k+1,k+1) f(k+1) = f(k). \qquad \square$$

Dado que $g(\cdot, s) \in \mathcal{S}$ para cada $s \in \mathbf{I}$, la función de Green puede obtenerse a partir de una base $\mathcal{S}$, el espacio de soluciones de la ecuación homogénea.

PROPOSICIÓN 4.4. *Dada* $\{u, v\}$ *una base de* $\mathcal{S}$*, entonces*

$$g(k,s) = \frac{-1}{a(s) w[u,v](s)} \Big[v(s)\, u(k) - u(s)\, v(k) \Big], \qquad k, s \in \mathbf{I}.$$

Por consiguiente, $g(s, s+1) = -\dfrac{1}{c(s)}$ *para cualquier* $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$.

Demostración. La primera parte, es una consecuencia directa del Corolario 2.7 cuando $x_0 = 0$ y $x_1 = \dfrac{1}{a(s)}$, para $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y cuando $x_0 = \dfrac{-1}{a(n+1)}$ y $x_1 = 0$ cuando $s = n+1 \in \delta(\mathbf{I})$. Por otra parte, a partir de la expresión obtenida, para cualquier $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, se cumple

$$g(s,s+1) = \frac{-\big[v(s+1)\, u(s) - u(s+1)\, v(s) \big]}{a(s+1) w[u,v](s+1)} = \frac{-w[u,v](s)}{a(s+1) w[u,v](s+1)} = -\frac{1}{c(s)},$$

donde hemos tenido en cuenta que, por la Proposición 3.2, $c(k-1) w[u,v](k-1) = a(k) w[u,v](k)$ para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$. $\square$

Teniendo ahora en cuenta el Principio de Superposición, el Corolario 2.7 y la Proposición anterior, obtenemos a continuación la expresión de la solución única de cada problema de valor inicial para la Ecuación (4).

TEOREMA 4.5 (Fórmula de Lagrange). *Fijados* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$*,* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ *y* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, la única solución de la Ecuación* (4) *que satisface* $y(m) = x_0$ *y* $y(m+1) = x_1$ *está determinada por la* *expresión*

$$y(k) = z(k) + \int_m^k g(k,s)f(s)ds, \quad k \in \mathbf{I},$$

donde $z \in \mathcal{S}$ *satisface que* $z(m) = x_0$ *y* $z(m+1) = x_1$. *Además, si* $\{u, v\}$ *es una base de* $\mathcal{S}$, *entonces*

$$y(k) = \frac{a(m)\rho(m)}{a(0)w[u,v](0)}\Big[\big(x_0 v(m+1) - x_1 v(m)\big)u(k) + \big(x_1 u(m) - x_0 u(m+1)\big)v(k)\Big]$$

$$- \frac{1}{a(0)w[u,v](0)}\left[u(k)\int_m^k v(s)\rho(s)f(s)ds - v(k)\int_m^k u(s)\rho(s)f(s)ds\right], \qquad k \in \mathbf{I}.$$

Demostración. Basta observar que dada $\{u, v\}$ una base de $\mathcal{S}$, la función $\rho\, a\, w[u, v]$ es constante en $\mathbf{I}$. $\square$

Aunque en la Proposición 4.4 y en el Corolario 2.7 hemos utilizado una base específica de $\mathcal{S}$, $\{u, v\}$, para obtener tanto la función de Green como la única solución de cualquier problema de valor inicial para la ecuación homogénea asociada a la Ecuación (4), naturalmente ambas, y, por tanto, la función dada en la Fórmula de Lagrange no dependen de la base escogida. Por otro lado, podemos usar también la base $\{u, v\}$ para obtener la relación entre la función de Green para la Ecuación (4) y la de su adjunta.

PROPOSICIÓN 4.6. *Si* g *y* g^* *denotan las funciones de Green para las Ecuaciones* (4) *y* (6)*, respectivamente, entonces*

$$g^*(k,s) = -g(s,k), \quad \textit{para cualquier } k, s \in \mathbf{I}.$$

Demostración. Si consideramos $\{u, v\}$ una base de $\mathcal{S}$, entonces según el Corolario 3.3 sabemos que $\{\rho u, \rho v\}$ es una base de $\mathcal{S}^*$. Además, conforme a la Proposición 4.4 y teniendo en cuenta la Identidad (8), para cualquier $k, s \in \mathbf{I}$ se obtiene que

$$g^*(k,s) = \frac{-\rho(s)\rho(k)}{c(s)w[\rho u, \rho v](s)}\Big[v(s)\,u(k) - u(s)\,v(k)\Big] = \frac{-\rho(k)}{\rho(s)a(s)w[u,v](s)}\Big[v(s)\,u(k) - u(s)\,v(k)\Big]$$

$$= \frac{\rho(k)}{\rho(k)a(k)w[u,v](k)}\Big[u(s)\,v(k) - v(s)\,u(k)\Big] = -g(s,k),$$

donde hemos considerado que $\rho(s)a(s)w[u,v](s) = \rho(k)a(k)w[u,v](k)$. $\square$

5. Solución de ecuaciones desacopladas

Aunque en las secciones anteriores se ha descrito la estructura del conjunto de soluciones de una ecuación en diferencias lineal de segundo orden e irreducible, en general no es sencillo encontrar explícitamente tales soluciones. De hecho, uno de los objetivos de este trabajo es precisamente el determinar fórmulas cerradas para las soluciones de estas ecuaciones y a ello dedicaremos varios capítulos. No obstante, existen ecuaciones para las que la determinación de una base de soluciones de la ecuación homogénea no requiere de técnicas adicionales. Nos ocuparemos a continuación de uno de estos tipos de situaciones. Recordemos que una vez determinada una base de soluciones de la ecuación homogénea, podemos determinar la función de Green del problema y, por tanto, la única solución para cada problema de valor inicial.

En esta sección analizaremos la estructura de las soluciones de las ecuaciones denominadas *desacopladas* que son las ecuaciones de la forma (4) en las que el coeficiente b es nulo; es decir, las ecuaciones

$$a(k)u(k+1)+c(k-1)u(k-1)=f(k), \quad k\in\overset{\circ}{\mathbf{I}}, \tag{9}$$

donde $a,c\in\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y $f\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$.

Antes de probar el resultado fundamental de esta sección, recordemos que para $x\in\mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor$ es el mayor entero no superior a x y $\lceil x\rceil$ es el menor entero no inferior a x. Recordemos también que la función de acompañamiento de la ecuación es

$$\rho(k)=\left[\prod_{s=\text{mín}\{k,0\}}^{\text{máx}\{k,0\}-1}\frac{a(s)}{c(s)}\right]^{\mathfrak{s}(k)}, \quad k\in\mathbf{I}.$$

Para simplificar la presentación, definimos las funciones $\phi,\psi\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$

$$\begin{aligned}\phi(k)&=\frac{1}{2}\Big[1+(-1)^k\Big](-1)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\left[\prod_{s=\text{mín}\{\lceil\frac{k}{2}\rceil,0\}}^{\text{máx}\{\lceil\frac{k}{2}\rceil,0\}-1}\frac{c(2s)}{a(2s+1)}\right]^{\mathfrak{s}(k)}, \quad k\in\mathbf{I},\\ \psi(k)&=\frac{1}{2}\Big[1-(-1)^k\Big](-1)^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}\left[\prod_{s=\text{mín}\{\lceil\frac{k}{2}\rceil,1\}}^{\text{máx}\{\lceil\frac{k}{2}\rceil,1\}-1}\frac{c(2s-1)}{a(2s)}\right]^{\mathfrak{s}(k)}, \quad k\in\mathbf{I}.\end{aligned}\tag{10}$$

Observar que si $k\in\mathbf{I}$, entonces $\psi(k)=0$ sii k es par, mientras que $\phi(k)=0$ sii k es impar. Por otra parte, $\phi(0)=\psi(1)=1$, lo que implica que $w[\phi,\psi](0)=1$.

PROPOSICIÓN 5.1. *Dadas $a,c\in\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, el conjunto $\{\phi,\psi\}$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea $a(k)u(k+1)+c(k-1)u(k-1)=0$, $k\in\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ y, además, $\rho(k)a(k)w[\phi,\psi](k)=a(0)$. En particular, la función de Green de la ecuación está determinada por la identidad*

$$g(k,s)=\frac{\rho(s)}{a(0)}\begin{cases}\phi(s)\psi(k), & k,s\in\mathbf{I},\ k \textit{ impar y } s \textit{ par},\\ -\psi(s)\phi(k), & k,s\in\mathbf{I},\ k \textit{ par y } s \textit{ impar},\\ 0, & k,s\in\mathbf{I},\ k,s \textit{ de la misma paridad}.\end{cases}$$

Aplicaremos ahora la Fórmula de Lagrange para determinar la expresión de las soluciones de los problemas de valor inicial para las ecuaciones desacopladas.

TEOREMA 5.2. *Dados $m\in\overset{\circ}{\mathbf{I}}\cup\{0\}$, $x_0,x_1\in\mathbb{R}$ y $f\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$, la única solución del problema de valor inicial*

$$a(k)u(k+1)+c(k-1)u(k-1)=f(k),\quad k\in\overset{\circ}{\mathbf{I}},\quad u(m)=x_0,\ u(m+1)=x_1,$$

está dada, para cada $k\in\mathbf{I}$, por

$$\begin{aligned}u(k)&=\frac{1}{a(0)}\left[\psi(k)\int_m^k\phi(s)\rho(s)f(s)ds-\phi(k)\int_m^k\psi(s)\rho(s)f(s)ds\right]\\ &+\frac{a(m)\rho(m)}{a(0)}\begin{cases}x_0\psi(m+1)\phi(k)+x_1\phi(m)\psi(k), & m \textit{ par},\\ -\big(x_0\phi(m+1)\psi(k)+x_1\psi(m)\phi(k)\big), & m \textit{ impar}.\end{cases}\end{aligned}$$

Como caso particular, describiremos las soluciones en el caso de ecuaciones desacopladas con coeficientes constantes. En capítulos posteriores obtendremos esta misma expresión como aplicación de la teoría general de resolución de ecuaciones en diferencias de segundo orden y con coeficientes constantes.

COROLARIO 5.3. *Supongamos que* $a(k) = a$ *y* $c(k) = c$*, para cada* $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$*, entonces las funciones*

$$\phi(k) = \frac{1}{2}\Big[1 + (-1)^k\Big](-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left[\frac{c}{a}\right]^{\lceil \frac{k}{2} \rceil}, \quad \psi(k) = \frac{1}{2}\Big[1 - (-1)^k\Big](-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left[\frac{c}{a}\right]^{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1}, \quad k \in \mathbf{I},$$

son base de soluciones de la ecuación desacoplada $au(k+1) + cu(k-1) = 0$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$*. En particular, la función de Green de la ecuación está determinada por la identidad*

$$g(k,s) = \frac{1}{a}\begin{cases} (-1)^{\frac{s}{2}}(-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \left[\frac{a}{c}\right]^s \left[\frac{c}{a}\right]^{\frac{s}{2}} \left[\frac{c}{a}\right]^{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1}, & k,s \in \mathbf{I},\ k \text{ impar y } s \text{ par}, \\ -(-1)^{\frac{k}{2}}(-1)^{\lfloor \frac{s}{2} \rfloor} \left[\frac{a}{c}\right]^s \left[\frac{c}{a}\right]^{\lceil \frac{s}{2} \rceil - 1} \left[\frac{c}{a}\right]^{\frac{k}{2}}, & k,s \in \mathbf{I},\ k \text{ par y } s \text{ impar}, \\ 0, & k,s \in \mathbf{I},\ k,s \text{ de la misma paridad.} \end{cases}$$

Además, para cada $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *y* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ *y* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, la única solución del problema de valor inicial*

$$a(k)z(k+1) + c(k-1)z(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad z(m) = x_0, \ z(m+1) = x_1,$$

está dada, para cada $k \in \mathbf{I}$*, por*

$$z(k) = \left[\frac{a}{c}\right]^m \begin{cases} x_0(-1)^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} \left[\frac{c}{a}\right]^{\lceil \frac{m+1}{2} \rceil - 1} \phi(k) + x_1(-1)^{\frac{m}{2}} \left[\frac{c}{a}\right]^{\frac{m}{2}} \psi(k), & m \text{ par}, \\ -\Big(x_0(-1)^{\frac{m+1}{2}} \left[\frac{c}{a}\right]^{\frac{m+1}{2}} \psi(k) + x_1(-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left[\frac{c}{a}\right]^{\lceil \frac{m}{2} \rceil - 1} \phi(k)\Big), & m \text{ impar}. \end{cases}$$

6. Ecuaciones en diferencias semejantes y congruentes

Cualquier ecuación en diferencias (irreducible) determina su espacio de soluciones $\mathcal{S}$. Equivalentemente, dados $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ que satisfacen $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$ cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, el espacio $\mathcal{S}$ está completamente determinado. El principal objetivo de esta sección es estudiar si el espacio $\mathcal{S}$ determina o no la Ecuación homogénea (5). Esta cuestión motiva los siguientes conceptos respecto de la relación entre ecuaciones homogéneas.

Consideramos $b, \hat{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, $a, \hat{a}, c, \hat{c} \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ tales que $a(n+1) = c(n)$, $c(n+1) = a(n)$, $\hat{a}(n+1) = \hat{c}(n)$ y $\hat{c}(n+1) = \hat{a}(n)$ cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, las ecuaciones en diferencias homogéneas

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \tag{11}$$

$$\hat{a}(k)u(k+1) - \hat{b}(k)u(k) + \hat{c}(k-1)u(k-1) = 0, \tag{12}$$

para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ y $\mathcal{S}$ y $\widehat{\mathcal{S}}$ sus correspondientes espacios de soluciones.

DEFINICIÓN 6.1. *Las ecuaciones* (11) *y* (12) *se denominan* semejantes *si* $\widehat{\mathcal{S}} = \mathcal{S}$*, y* congruentes *si existe una función* $\sigma \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ *tal que* $\widehat{\mathcal{S}} = \sigma\mathcal{S}$ *y, en tal caso, la Ecuación* (12) *se denomina* σ–congruente *a la Ecuación* (11).

Naturalmente, ambas definiciones, semejanza y congruencia, establecen una relación de equivalencia en el conjunto de las ecuaciones en diferencias irreducibles. Por otra parte, cada clase de equivalencia de tal relación de equivalencia tiene un representante autoadjunto; es decir, cualquier ecuación en diferencias de segundo orden irreducible es semejante a una ecuación autoadjunta. De manera más precisa, tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 6.2. *La Ecuación homogénea* (5) *es semejante a la ecuación autoadjunta*

$$\rho(k)a(k)u(k+1) - \rho(k)b(k)u(k) + \rho(k-1)a(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

donde ρ es la función de acompañamiento. Además, si g es la función de Green de la Ecuación (4)*, entonces la función de Green de la ecuación en diferencias autoadjunta semejante está dada por $g(k,s)\rho(s)^{-1}$ para cualquier $k, s \in \mathbf{I}$.*

Demostración. Como $\rho \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ para cualquier $k \in \mathbf{I}$, $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es una solución de la Ecuación (4) sii

$$\rho(k)a(k)u(k+1) - \rho(k)b(k)u(k) + \rho(k)c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

y se obtiene el primer resultado teniendo en cuenta que según el Lema 3.1 $\rho(k-1)a(k-1) = \rho(k)c(k-1)$ para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Como dos ecuaciones semejantes tienen el mismo espacio de soluciones, la relación entre las funciones de Green está determinada por el resultado de la Proposición 4.4 $\square$

El Corolario 3.3 determina que cualquier ecuación en diferencias es congruente a su ecuación adjunta, o de forma más precisa, que su ecuación adjunta es ρ–congruente a la ecuación homogénea dada.

Nuestro objetivo es caracterizar cuándo las dos Ecuaciones en diferencias (11) y (12) son semejantes o congruentes. Para conseguirlo, primero demostraremos que el espacio de soluciones de una ecuación en diferencias homogénea determina los coeficientes de la ecuación salvo multiplicación por funciones de $\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$.

PROPOSICIÓN 6.3. *Consideramos $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tales que $w[u,v] \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$. Entonces, dados $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ tales que $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$ cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, el conjunto $\{u, v\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea*

$$a(k)z(k+1) - b(k)z(k) + c(k-1)z(k-1) = 0, \quad \textit{para cualquier } k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$$

sii

$$\frac{b(k)}{a(k)} = \frac{\big[u(k-1)v(k+1) - u(k+1)v(k-1)\big]}{w[u,v](k-1)} \quad \textit{y} \quad \frac{c(k-1)}{a(k)} = \frac{w[u,v](k)}{w[u,v](k-1)}$$

para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Demostración. Obviamente, u y v son soluciones de la ecuación homogénea sii

$$\begin{bmatrix} u(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \frac{1}{a(k)} \begin{bmatrix} u(k) & -u(k-1) \\ v(k) & -v(k-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(k) \\ c(k-1) \end{bmatrix}$$

para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ o, equivalentemente, sii

$$\begin{bmatrix} b(k) \\ c(k-1) \end{bmatrix} = \frac{a(k)}{w[u,v](k-1)} \begin{bmatrix} -v(k-1) & u(k-1) \\ -v(k) & u(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix}. \quad \square$$

COROLARIO 6.4. *Las Ecuaciones* (11) *y* (12) *son semejantes sii existe* $\nu \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ *tal que* $\hat{a} = \nu a$, $\hat{b} = \nu b$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *y, además,* $\hat{c}(k-1) = \nu(k)c(k-1)$ *para cualquier* $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$*. En particular, cada ecuación en diferencias es semejante a una única, ecuación autoadjunta, salvo constante multiplicativa.*

Demostración. Si existe $\nu \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ que satisfaga la propiedades enunciadas, entonces ambas ecuaciones son claramente semejantes.

Recíprocamente, sea $\{u, v\}$ una base de $\mathcal{S} = \widehat{\mathcal{S}}$. Por la Proposición 6.3 sabemos que

$$\frac{b(k)}{a(k)} = \frac{\hat{b}(k)}{\hat{a}(k)} = \frac{\big[u(k-1)v(k+1) - u(k+1)v(k-1)\big]}{w[u,v](k-1)} \quad \text{y} \quad \frac{c(k-1)}{a(k)} = \frac{\hat{c}(k-1)}{\hat{a}(k)} = \frac{w[u,v](k)}{w[u,v](k-1)}$$

para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$. Entonces, basta con considerar $\nu = a^{-1}\hat{a}$.

Asumamos ahora que las ecuaciones (11) y (12) son semejantes y autoadjuntas. Entonces, $a = c$, $\hat{a} = \hat{c}$ y, por tanto,

$$\nu(k-1)a(k-1) = \hat{a}(k-1) = \hat{c}(k-1) = \nu(k)c(k-1) = \nu(k)a(k-1), \quad \text{para cualquier } k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

lo que implica que ν es constante en $\overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$. □

El siguiente resultado, de gran utilidad, es una consecuencia directa del anterior Corolario.

COROLARIO 6.5. *Cualquier ecuación en diferencias es semejante a una ecuación explícita y, además, existe exactamente una ecuación en diferencias explícita en cada clase de equivalencia de la relación de equivalencia. Por otro lado, cualquier par de funciones* $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *tales que* $w[u,v] \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ *determinan una única ecuación en diferencias escrita en forma normal. Además, dado* $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*, existe una única ecuación en diferencias cuyo coeficiente principal es* a *en cada clase de equivalencia de la relación de equivalencia.*

COROLARIO 6.6. *La Ecuación* (12) *es* σ*–congruente a* (11) *sii es semejante a la ecuación*

$$\frac{\sigma(k)}{\sigma(k+1)}\, a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + \frac{\sigma(k)}{\sigma(k-1)}\, c(k-1)u(k-1) = 0 \;\; \textit{para cualquier } k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}.$$

Demostración. Sabemos que $u \in \widehat{\mathcal{S}}$ sii $\sigma^{-1}u \in \mathcal{S}$ y, por tanto, sii para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ se satisface

$$a(k)\frac{u(k+1)}{\sigma(k+1)} - b(k)\frac{u(k)}{\sigma(k)} + c(k-1)\frac{u(k-1)}{\sigma(k-1)} = 0\,,$$

obteniéndose el resultado multiplicando esta igualdad por $\sigma(k)$. □

Según la Proposición 4.4, la función de Green para una ecuación en diferencias homogénea dada es determinada por una base del espacio de sus soluciones, así que de los resultados anteriores podemos obtener fácilmente la relación entre las funciones de Green de ecuaciones semejantes o congruentes.

PROPOSICIÓN 6.7. *Supongamos que* $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I} \times \mathbf{I})$ *es la función de Green de una ecuación en diferencias explícita. Entonces, el conjunto de funciones de Green para todas sus ecuaciones en diferencias semejantes viene dado por* $g(k,s)a(s)^{-1}$, $k, s \in \mathbf{I}$*, donde* $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ *es el coeficiente principal de la ecuación semejante. Por otra parte, si* $\sigma \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*, la función de Green de una ecuación* σ*–congruente cuyo coeficiente principal es* a *viene dada por* $\sigma(k)g(k,s)a(s)^{-1}\sigma(s+1)^{-1}$, $k \in \mathbf{I}$, $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *y por* $\sigma(k)g(k, n+1)a(n+1)^{-1}\sigma(n)^{-1}$, $k \in \mathbf{I}$*, cuando* $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$.

Demostración. Sea $\{u, v\}$ una base de $\mathcal{S}$, el espacio de soluciones de la ecuación en diferencias explícita. De acuerdo con la Proposición 4.4, $g(k,s) = \dfrac{-1}{w[u,v](s)}\big[v(s)u(k) - u(s)v(k)\big]$, mientras que la función de Green para la ecuación en diferencias semejante cuyo coeficiente principal es a viene dada por $g(k,s)a(s)^{-1}$.

Por otro lado, puesto que $\{\sigma u, \sigma v\}$ es una base de soluciones de cualquier ecuación σ–congruente, entonces si a es el coeficiente principal de dicha ecuación, su función de Green es

$$\begin{aligned} g_\sigma(k,s) =& \frac{-1}{a(s)w[\sigma u, \sigma v](s)}\big[\sigma(s)v(s)\sigma(k)u(k) - \sigma(s)u(s)\sigma(k)v(k)\big] \\ =& \frac{-\sigma(k)}{\sigma(s+1)a(s)w[u,v](s)}\big[v(s)u(k) - u(s)v(k)\big], \quad k \in \mathbf{I},\ s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \end{aligned}$$

mientras que cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, obtenemos

$$\begin{aligned} g_\sigma(k,n+1) =& \frac{-1}{a(n+1)w[\sigma u, \sigma v](n+1)}\big[\sigma(n+1)v(n+1)\sigma(k)u(k) - \sigma(n+1)u(n+1)\sigma(k)v(k)\big] \\ =& \frac{-\sigma(k)}{\sigma(n)a(n+1)w[u,v](n+1)}\big[v(n+1)u(k) - u(n+1)v(k)\big], \end{aligned}$$

ya que

$$w[\sigma u, \sigma v](n+1) = w[\sigma u, \sigma v](n) = \sigma(n)\sigma(n+1)w[u,v](n) = \sigma(n)\sigma(n+1)w[u,v](n+1). \quad \square$$

7. Caracterización de las funciones de Green

En las secciones anteriores hemos demostrado que cualquier ecuación en diferencias (irreducible) determina su función de Green. Equivalentemente, dados $a, b, c \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tales que $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y que satisfacen $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$ cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, existe una única función de Green de la ecuación en diferencias cuyos coeficientes son a, b y c. El principal objetivo de esta sección es mostrar que, recíprocamente, dada $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I} \times \mathbf{I})$ que satisface unas determinadas propiedades, entonces existe una única ecuación en diferencias tal que g es su función de Green. Equivalentemente, demostraremos que la función de Green determina completamente los coeficientes de la ecuación en diferencias.

Recordemos que en la sección anterior demostramos que si se conoce una base del espacio de soluciones, queda determinada una única ecuación en diferencias explícita y homogénea. Puesto que la expresión de la función de Green está relacionada con el coeficiente principal, esperamos que toda función de Green sea capaz de fijar su ecuación en diferencias. Por otro lado, nos será útil utilizar que si para ciertos $m, \hat{m} \in \mathbf{I}$ las funciones $g(\cdot, m), g(\cdot, \hat{m})$ son linealmente independientes, entonces para cualquier $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ la función $g(\cdot, s)$ puede expresarse como una combinación lineal de $g(\cdot, m)$ y $g(\cdot, \hat{m})$. En primer lugar analizamos cuándo estas funciones son linealmente independientes.

LEMA 7.1. *Si $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I} \times \mathbf{I})$ es la función de Green de una ecuación en diferencias de segundo orden, entonces dados $m, \hat{m} \in \mathbf{I}$ las funciones $g(\cdot, m)$ y $g(\cdot, \hat{m})$ son linealmente independientes sii $g(m, \hat{m}) \neq 0$. En particular, $g(\cdot, s)$ y $g(\cdot, s+1)$ son linealmente independientes para cualquier $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$.*

Demostración. Sean $x = g(\cdot,m)$ y $z = g(\cdot,\hat{m})$. Si a es el coeficiente principal y $\{u,v\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación en diferencias homogénea, por la Proposición 4.4 sabemos que

$$x = \frac{-1}{a(m)w[u,v](m)}\big[v(m)u - u(m)v\big] \quad \text{y} \quad z = \frac{-1}{a(\hat{m})w[u,v](\hat{m})}\big[v(\hat{m})u - u(\hat{m})v\big];$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} w[x,z] =& \frac{-v(m)u(\hat{m})w[u,v] - u(m)v(\hat{m})w[v,u]}{a(m)a(\hat{m})w[u,v](m)w[u,v](\hat{m})} = \frac{\big(u(m)v(\hat{m}) - v(m)u(\hat{m})\big)}{a(m)a(\hat{m})w[u,v](m)w[u,v](\hat{m})}\, w[u,v] \\ =& \frac{-g(m,\hat{m})}{a(m)w[u,v](m)}\, w[u,v], \end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que el wronskiano es bilineal y antisimétrico. El resultado es consecuencia de la Proposición 2.6. □

El siguiente resultado nos permite caracterizar qué funciones son funciones de Green de alguna ecuación en diferencias y, cuando se satisfacen las condiciones, determinar la única ecuación en diferencias de la cual la función dada es su función de Green.

TEOREMA 7.2. *Dada $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I}\times\mathbf{I})$, entonces g es una función de Green sii satisface las siguientes propiedades:*

(i) $w[g(\cdot,0), g(\cdot,1)] \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$.

(ii) $g(k+1,k) \neq 0$ *para cualquier* $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\cup\{0\}$ *y* $g(n,n+1) \neq 0$ *cuando* $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$.

(iii) $g(k,s) = \dfrac{g(s+1,s)}{w[g(\cdot,0),g(\cdot,1)](s)}\Big[g(s,0)g(k,1) - g(s,1)g(k,0)\Big]$, *para cualquier* $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\cup\{0\}$ *y cualquier* $k \in \mathbf{I}$.

(iv) $g(k,n{+}1) = \dfrac{g(n,n+1)}{w[g(\cdot,0),g(\cdot,1)](n+1)}\Big[g(n{+}1,1)g(k,0) - g(n{+}1,0)g(k,1)\Big]$ *para cualquier* $k \in \mathbf{I}$, *cuando* $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$.

Además, $g(k,k+1) \neq 0$ *para cualquier* $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\cup\{0\}$ *y* g *es la función de Green de la ecuación en diferencias con coeficientes* $a,b,c \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *definidos como*

$$a(k) = \frac{1}{g(k+1,k)}, \quad \textit{para cualquier } k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\cup\{0\}$$

y por

$$b(k) = \frac{g(k+1,k-1)}{g(k+1,k)g(k,k-1)} \;\; \textit{y} \;\; c(k) = \frac{-1}{g(k,k+1)}, \quad \textit{para cualquier } k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}.$$

Demostración. La Definición 4.2 de función de Green, la Proposición 4.4 y el anterior Lema 7.1 determinan que si g es una función de Green, entonces debe satisfacer todas las propiedades enunciadas.

Recíprocamente, si g satisface (i)–(iv), entonces definiendo $u = g(\cdot,0)$ y $v = g(\cdot,1)$, u y v satisfacen la hipótesis de la Proposición 6.3 y, en consecuencia, $\{u,v\}$ es una base del espacio de soluciones de una ecuación homogénea

$$a(k)z(k+1) - b(k)z(k) + c(k-1)z(k-1) = 0, \quad \text{para cualquier } k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

donde

$$\frac{b(k)}{a(k)} = \frac{\big[u(k-1)v(k+1) - u(k+1)v(k-1)\big]}{w[u,v](k-1)} \quad \text{y} \quad \frac{c(k-1)}{a(k)} = \frac{w[u,v](k)}{w[u,v](k-1)}$$

para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Ya que (iii) y (iv) enuncian que para cualquier $s \in \mathbf{I}$, $g(\cdot, s)$ es una combinación lineal de u y v, concluimos que $g(\cdot, s)$ es una solución de la ecuación anterior y, además, satisface que $g(s, s) = 0$.

Además, cuando $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, el valor del lado derecho de la Identidad (iii) en $k = s + 1$ coincide con $g(s + 1, s)$, mientras que cuando $n + 1 \in \delta(\mathbf{I})$, el valor del lado derecho de la Identidad (iv) en $k = n$ coincide con $g(n, n+1)$. Por tanto, según la Proposición 6.7, las expresiones a la derecha de (iii) y (iv) determinan la función de Green cuyo coeficiente principal viene dado por $a(k) = \dfrac{1}{g(k + 1, k)}$ para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y, por consiguiente, los coeficientes de la ecuación en diferencias vienen expresados por

$$\begin{aligned} b(k) &= \frac{a(k)\big[u(k-1)v(k+1) - u(k+1)v(k-1)\big]}{w[u, v](k-1)} \\ &= \frac{\big[g(k-1, 0)g(k+1, 1) - g(k+1, 0)g(k-1, 1)\big]}{g(k+1, k)w[u, v](k-1)} \\ &= \frac{g(k+1, k-1)}{g(k, k-1)g(k+1, k)}, \\ c(k-1) &= \frac{a(k)w[u, v](k)}{w[u, v](k-1)} = \frac{w[u, v](k)}{g(k+1, k)w[u, v](k-1)} = \frac{-1}{g(k-1, k)}, \end{aligned}$$

para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$. $\square$

COROLARIO 7.3. *Dada $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I} \times \mathbf{I})$, entonces g es la función de Green de una ecuación en diferencias autoadjunta sii satisface las siguientes propiedades:*

(i) $w[g(\cdot, 0), g(\cdot, 1)] \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$.

(ii) $g(k + 1, k) \neq 0$ *y* $g(k + 1, k) = -g(k, k + 1)$ *para cualquier* $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$

(iii) $g(n, n + 1) \neq 0$ *cuando* $n + 1 \in \delta(\mathbf{I})$.

(iv) $g(k, s) = \dfrac{g(s + 1, s)}{w[g(\cdot, 0), g(\cdot, 1)](s)}\Big[g(s, 0)g(k, 1) - g(s, 1)g(k, 0)\Big]$, *para cualquier* $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *y cualquier* $k \in \mathbf{I}$.

(v) $g(k, n+1) = \dfrac{g(n, n + 1)}{w[g(\cdot, 0), g(\cdot, 1)](n + 1)}\Big[g(n+1, 1)g(k, 0) - g(n+1, 0)g(k, 1)\Big]$ *para cualquier* $k \in \mathbf{I}$, *cuando* $n + 1 \in \delta(\mathbf{I})$.

Por otro lado, cuando esto ocurre g es antisimétrica.

PROPOSICIÓN 7.4. *Si $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I} \times \mathbf{I})$ es la función de Green de una ecuación en diferencias de segundo orden, entonces la función de acompañamiento para la ecuación viene dada por*

$$\rho(k) = (-1)^k \left[\prod_{s=\min\{k,0\}}^{\max\{k,0\}-1} \frac{g(s, s+1)}{g(s+1, s)}\right]^{\mathfrak{s}(k)}, \quad \textit{para cualquier } k \in \mathbf{I}$$

y, además, $\rho(s)g(s, k) = -\rho(k)g(k, s)$, para cualquier $k, s \in \mathbf{I}$. En particular, los valores de la función de Green para $k < s+1$ dependen solo de los valores de la función de Green para $k > s+1$.

Demostración. La expresión precedente de la función de acompañamiento se obtiene a partir de su Definición (7) teniendo en cuenta que $a(k) = \dfrac{1}{g(k+1,k)}$ y $c(k) = -\dfrac{1}{g(k,k+1)}$ para cualquier $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$.

Por otra parte, si $\{u,v\}$ es una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea, entonces

$$g(k,s) = \frac{-\big[v(s)\,u(k) - u(s)\,v(k)\big]}{a(s)w[u,v](s)} = \frac{\rho(s)\big[u(s)\,v(k) - v(s)\,u(k)\big]}{\rho(k)a(k)w[u,v](k)} = -\frac{\rho(s)}{\rho(k)}\,g(s,k), \quad k,s \in \mathbf{I},$$

donde hemos aplicado que $\rho\,a\,w[u,v]$ es constante. □

Concluiremos este capítulo mostrando que el Lema 7.1, junto con el Teorema 7.2, permite obtener las soluciones de cada problema de valor inicial directamente desde la función de Green. Concretamente, tenemos la siguiente versión de la Fórmula de Lagrange.

TEOREMA 7.5. *Si $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I}\times\mathbf{I})$ es la función de Green de una ecuación en diferencias de segundo orden, entonces para cada $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, la única solución de la ecuación en diferencias con dato f que satisface $y(m) = x_0$ y $y(m+1) = x_1$ está determinada por la expresión*

$$y(k) = \frac{x_1}{g(m+1,m)}\,g(k,m) + \frac{x_0}{g(m,m+1)}\,g(k,m+1) + \int_m^k g(k,s)f(s)ds, \quad k \in \mathbf{I}.$$

Apéndice: Ecuaciones en diferencias lineales irreducibles de primer orden

Aunque el objetivo de este trabajo es el análisis de las ecuaciones lineales de segundo orden, describiremos a continuación la expresión de las soluciones de las ecuaciones lineales irreducibles de primer orden. De hecho, alguno de los resultados que obtendremos a continuación ya han sido utilizados implícitamente, especialmente al describir la expresión de la función de acompañamiento, que está caracterizada como la única solución de un problema de valor inicial para una ecuación de primer orden.

En esta sección seguiremos un tratamiento similar al efectuado en las secciones anteriores para ecuaciones de segundo orden, lo que nos permitirá no mencionar las motivaciones de las definiciones.

Dadas las funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, para cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ una *ecuación en diferencias de primer orden con coeficientes a, c y dato f* es de la forma

$$a(k)u(k) - c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \tag{13}$$

y se trata de encontrar todas las funciones $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ que verifican la identidad.

Se denomina *solución de la ecuación en diferencias* a cada función $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ que satisface la identidad anterior.

Al igual que para ecuaciones de segundo orden, las soluciones no dependen del valor del coeficiente a y del dato f en $\delta(\mathbf{I})$. Asimismo, cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, los valores de c en n y $n+1$ no tienen ninguna influencia en la Ecuación (13) y podemos imponer que $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$, identidades que asumiremos satisfechas en lo sucesivo cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$.

La Ecuación (13) se denomina *explícita o escrita en forma normal* si y solo si $a(k) = 1$ para cualquier $k \in \mathbf{I}$.

La ecuación

$$a(k)u(k) - c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \tag{14}$$

que corresponde a considerar dato nulo en la Ecuación (13) se denomina *homogénea* y nos referimos a ella como la ecuación homogénea asociada a (13).

El siguiente resultado muestra que cualquier solución de la Ecuación 13 está completamente determinada por su valor en un nodo. En definitiva, mostramos que cada problema de valor inicial para una ecuación lineal irreducible y de primer orden tiene una única solución.

PROPOSICIÓN 7.6. *Dados* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *y* $x_0 \in \mathbb{R}$*, para cualquier* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *la ecuación en diferencias de primer orden*

$$a(k)u(k) - c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

tiene una única solución $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *tal que* $u(m) = x_0$*. En particular, si* $f = 0$*, es decir, si* u *es solución de la ecuación homogénea asociada, entonces* $u = 0$ *sii existe* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *tal que* $u(m) = 0$*.*

DEFINICIÓN 7.7. *Llamamos* función de Green para la Ecuación en diferencias (13) *a la función* $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I} \times \mathbf{I})$ *definida para cualquier* $s \in \mathbf{I}$ *como* $g(\cdot, s)$ *la única solución de la Ecuación en diferencias homogénea* (14) *que satisface* $g(s,s) = \dfrac{1}{a(s)}$ *para cualquier* $s \in \mathbf{I}$*.*

Es muy sencillo obtener la función de Green para una ecuación lineal de primer orden. Concretamente, tenemos que

$$g(k,s) = \frac{1}{a(s)} \left[\prod_{j=\min\{k,s\}}^{\max\{k,s\}-1} \frac{c(j)}{a(j+1)} \right]^{\mathfrak{s}(k-s)}, \quad k, s \in \mathbf{I}. \tag{15}$$

TEOREMA 7.8 (Fórmula de Lagrange). *Para cada* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$*, cada* $x_0 \in \mathbb{R}$ *y cada* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, la única solución del problema de valor inicial*

$$a(k)u(k) - c(k-1)u(k-1) = f(k); \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad u(m) = x_0,$$

está determinada por la identidad

$$u(k) = x_0 \left[\prod_{j=\min\{k,m\}}^{\max\{k,m\}-1} \frac{c(j)}{a(j+1)} \right]^{\mathfrak{s}(k-m)} + \int_m^k \frac{f(s)}{a(s)} \left[\prod_{j=\min\{k,s\}}^{\max\{k,s\}-1} \frac{c(j)}{a(j+1)} \right]^{\mathfrak{s}(k-s)} ds, \quad k \in \mathbf{I}.$$

Observar que cuando $a(k) = c(k) = 1$, la ecuación (13) se reduce a $u(k) - u(k-1) = f(k)$, $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$, cuya función de Green es $g(k,s) = 1$, $k, s \in \mathbf{I}$, de manera que dado $x_0 \in \mathbb{R}$, la única solución del problema de valor inicial $u(0) = x_0$ está determinada por

$$u(k) = x_0 + \int_0^k f(s)ds,$$

expresión que coincide con la proporcionada por el Teorema Fundamental del Cálculo.

Finalizaremos la seción con la particularización del resultado anterior al caso en el que los coeficientes son constantes en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$; es decir, cuando $a(k) = a$, $c(k) = c$ para cada $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$, donde $a, c \in \mathbb{R}^*$.

COROLARIO 7.9. *Si* $a, c \in \mathbb{R}^*$*, para cada* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$*, cada* $x_0 \in \mathbb{R}$ *y cada* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, entonces la única solución del problema de valor inicial*

$$au(k) - cu(k-1) = f(k); \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad u(m) = x_0,$$

está determinada por la identidad

$$u(k) = \left[\frac{c}{a}\right]^k \left[x_0 \left[\frac{a}{c}\right]^m + \frac{1}{a}\int_m^k f(s)\left[\frac{a}{c}\right]^s ds\right], \quad k \in \mathbf{I}.$$

Capítulo 2

Operadores y ecuaciones de Schrödinger en un camino

1. Operadores Laplaciano y de Schrödinger en un camino

En este capítulo analizamos las ecuaciones en diferencias lineales e irreducibles de segundo orden desde una perspectiva diferente que en el anterior. Adoptamos ahora una visión funcional en vez de la algebraica que hemos desarrollado en el capítulo anterior. Además, este punto de vista ilustra por qué nuestro análisis de las ecuaciones en diferencias de segundo orden discurre en paralelo al estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Cuando los coeficientes a y c de la Ecuación (4) son positivos, la parte principal del operador en diferencias asociado es un operador elíptico, ver [**18**] y, entonces, este análisis funcional puede concretarse en el uso de las técnicas provenientes de la Teoría del Potencial, ver por ejemplo [**4, 16**].

Empezamos definiendo el análogo discreto a un intervalo continuo, es decir, el dominio equivalente al de los coeficientes de una ecuación diferencial ordinaria. Por supuesto, el análogo discreto de un intervalo continuo es la noción de camino, que pertenece al campo de la combinatoria. Además, el papel del coeficiente principal de una ecuación diferencial ordinaria lo representa la conductancia del camino, que lo convierte en lo que en combinatoria se denomina camino pesado y, en general, dirigido.

A lo largo de este capítulo utilizaremos la notación del capítulo anterior y consideramos fijo el *camino cuyo conjunto de vértices es* $\mathbf{I}$ *y donde dos vértices son adyacentes si y solo si son consecutivos*; es decir, $k \sim m$ sii o bien $m = k-1$ o bien $m = k+1$, o de manera equivalente sii $|k-m| = 1$. El camino es el camino infinito cuando $\mathbf{I} = \mathbb{Z}$, el semi–infinito cuando $\mathbf{I} = \mathbb{N}$ y el camino de $n+2$ vértices cuando $\mathbf{I} = \{0, \dots, n+1\}$. De este modo, si definimos el *grado de un vértice* como el número de vértices adyacentes a él, tenemos que el grado de cualquier vértice en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ es 2, mientras que el grado de cualquier vértice en $\delta(\mathbf{I})$, cuando esta frontera es no vacía, es 1. En lo sucesivo, asumiremos la anterior relación de adyacencia e identificaremos $\mathbf{I}$ con el camino y nos referiremos a él como el *camino subyacente*.

Si $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, podemos considerar el operador lineal denominado *diagonal*, $\mathcal{D}_q \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$, que a cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ le asigna $\mathcal{D}_q(u) = qu$. En particular, $\mathcal{D}_q$ es un isomorfismo sii $q \in \Omega(\mathbf{I})$ y, en este caso, $\mathcal{D}_q^{-1} = \mathcal{D}_{q^{-1}}$. Es claro que $\mathcal{C}(\mathbf{I})$ puede ser identificado con la clase de operadores diagonales y $\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ con la clase de operadores diagonales e invertibles.

Si $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, denotaremos por $u \otimes v$ a la función $u \otimes v \colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $k, m \in \mathbf{I}$ le asigna el valor $(u \otimes v)(k,m) = u(k)v(m)$.

Denotamos por $\mathcal{C}_0(\mathbf{I})$ el subespacio de $\mathcal{C}(\mathbf{I})$ formado por las funciones con soporte finito. Naturalmente, $\mathcal{C}_0(\mathbf{I}) = \mathcal{C}(\mathbf{I})$ cuando $\mathbf{I} = \{0, \dots, n+1\}$, pero $\mathcal{C}_0(\mathbf{I}) \subset \mathcal{C}(\mathbf{I})$ en otro caso.

Si $u \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$, el valor $\displaystyle\sum_{s \in \mathbf{I}} u(s)$ se denota tanto por $\displaystyle\int_{\mathbf{I}} u$ como por $\displaystyle\int_{\mathbf{I}} u(s)ds$. La aplicación

$$
\begin{aligned}
\langle \cdot, \cdot \rangle \colon \mathcal{C}_0(\mathbf{I}) \times \mathcal{C}_0(\mathbf{I}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(u,v) &\longrightarrow \int_{\mathbf{I}} uv
\end{aligned} \tag{16}
$$

determina un producto interno en $\mathcal{C}_0(\mathbf{I})$. Es más, la expresión $\displaystyle\int_{\mathbf{I}} uv$ tiene también sentido cuando sólo una de las entradas pertenece a $\mathcal{C}_0(\mathbf{I})$, mientras que la otra está en $\mathcal{C}(\mathbf{I})$

NOTA 1.1. Si $\mathbf{I} = \{0, \dots, n+1\}$, para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ no debe confundirse $\displaystyle\int_{\mathbf{I}} u$ con $\displaystyle\int_0^{n+1} u$ ya que se tiene la siguiente relación

$$\int_{\mathbf{I}} u = u(0) + \int_0^{n+1} u.$$

Si $\mathcal{F} \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es un operador lineal, la función $K \colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $K(k,s) = \langle \varepsilon_k, \mathcal{F}(\varepsilon_s) \rangle$ se denomina *Núcleo del operador* y, claramente, $\mathcal{F}(u)(k) = \displaystyle\int_{\mathbf{I}} K(k,s)u(s)ds$, para cada $k \in \mathbf{I}$ y cada $u \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$. Recíprocamente, cada $K \colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ define un operador lineal $\mathcal{F} \colon \mathcal{C}_0(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ cuyo núcleo es K. Además, si para cada $k \in \mathbf{I}$ se satisface que $K(k, \cdot) \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$, entonces su operador lineal asociado puede definirse en $\mathcal{C}(\mathbf{I})$. En particular, si $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, el núcleo del operador diagonal $\mathcal{D}_q$ está determinado por $K(k,s) = q(k)\varepsilon_s(k)$ para cada $k, s \in \mathbf{I}$ y, claramente, para cada $k \in \mathbf{I}$ satisface que $K(k, \cdot) \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$.

El operador lineal $\mathcal{F} \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ se denomina *local* si $\mathcal{F}(u) \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$ para cada $u \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$. Si K es el núcleo de $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es local sii $K(\cdot, s) \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$, para cada $s \in \mathbf{I}$. Claramente, $\mathcal{D}_q$ es un operador local para cada $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$.

Supongamos ahora que $\mathcal{F} \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es un operador lineal que satisface que $\displaystyle\int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}(u)v = 0$ para cada $u \in \mathcal{C}(V)$ y cualquier $v \in \mathcal{C}_0(V)$. Entonces, si para cada $k \in \mathbf{I}$ consideramos $v = \varepsilon_k$, la identidad anterior implica que $0 = \displaystyle\int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}(u)\varepsilon_k = \mathcal{F}(u)(k)$ y, en definitiva, que $\mathcal{F}$ es el operador nulo. Esta propiedad justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.2. *Si $\mathcal{F} \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es un operador lineal, denominamos* adjunto *de $\mathcal{F}$ al operador lineal $\mathcal{F}^* \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ caracterizado por la siguiente identidad*

$$\int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}(v)u = \int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}^*(u)v, \quad \textit{para todo } u \in \mathcal{C}(V) \textit{ y cualquier } v \in \mathcal{C}_0(V).$$

Diremos que $\mathcal{F}$ es autoadjunto *si $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}$.*

Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ son operadores lineales, entonces $\big(\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2\big)^* = \mathcal{F}_2^* \circ \mathcal{F}_1^*$. Además, para cada $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ el operador $\mathcal{D}_q$ es autoadjunto. Por otra parte, si K y K^* son los núcleos de $\mathcal{F}$ y de $\mathcal{F}^*$, aplicando la identidad de la definición a $u = \varepsilon_s$ y a $v = \varepsilon_k$, $k, s \in \mathbf{I}$, resulta que

$$K^*(k,s) = \int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}^*(\varepsilon_s)\varepsilon_k = \int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}(\varepsilon_k)\varepsilon_s = K(s,k). \tag{17}$$

Después del comentario precedente a la definición anterior, es claro que si existe el adjunto de un operador, entonces es único. Además, la bilinealidad de la aplicación (16) y la linealidad de $\mathcal{F}$

implican que $\mathcal{F}^*$ es lineal y, además, que la igualdad $\displaystyle\int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}^*(u)v = \int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}(v)u$ se satisface para cualquier $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $v \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$ sii

$$\mathcal{F}^*(u)(k) = \int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}^*(u)\varepsilon_k = \int_{\mathbf{I}} \mathcal{F}(\varepsilon_k)u, \quad \text{para todo } u \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) \text{ y cualquier } k \in \mathbf{I}. \tag{18}$$

En particular, la anterior identidad muestra que todo operador local tiene adjunto.

DEFINICIÓN 1.3. *Llamamos* conductancia (en el camino $\mathbf{I}$), *a cualquier función* $\gamma\colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\gamma(k,s) \neq 0$ *sii* $|k-s| = 1$. *El conjunto de conductancias en el camino se denota con* $\Gamma(\mathbf{I})$.

Si $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, *denominamos* adjunta de γ *a la conductancia* γ^* *definida como* $\gamma^*(k,s) = \gamma(s,k)$ *para cualquier* $k,s \in \mathbf{I}$. *Además,* γ *se denomina* simétrica *cuando* $\gamma^* = \gamma$. *El conjunto de conductancias simétricas se denota como* $\Gamma^s(\mathbf{I})$.

Una conductancia γ *se denomina no–negativa sii* $\gamma(k,s) > 0$ *cuando* $|k-s| = 1$. *El conjunto de conductancias no–negativas se denota con* $\Gamma_+(\mathbf{I})$ *mientras que el conjunto de conductancias simétricas y no–negativas se denota como* $\Gamma^s_+(\mathbf{I})$.

Para cada $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, *el par* $(\mathbf{I},\gamma)$ *se denomina* camino pesado, dirigido y con conductancia γ. *Cuando* $\gamma \in \Gamma^s(\mathbf{I})$, *el par* $(\mathbf{I},\gamma)$ *se denomina* camino pesado, no dirigido y con conductancia γ.

Si $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, *la función* $\kappa_\gamma \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *definida como* $\kappa_\gamma(k) = \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)$ *se denomina* grado asociado a γ.

Observar que

$$\kappa_\gamma(k) = \begin{cases} \gamma(0,1), & \text{si } k = 0 \text{ y } 0 \in \delta(\mathbf{I}), \\ \gamma(k,k-1) + \gamma(k,k+1), & \text{si } k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \\ \gamma(n+1,n), & \text{si } k = n+1 \text{ y } n+1 \in \delta(\mathbf{I}). \end{cases} \tag{19}$$

En todo el trabajo denotaremos por τ a la conductancia simétrica definida como $\tau(k,s) = 1$ cuando $|k-s| = 1$. En combinatoria, el par $(\mathbf{I},\tau)$ se denomina simplemente *camino no dirigido* y suele denominarse *grafo*. Además, $\kappa_\tau(k) = 2$ si $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$, mientras que $\kappa_\tau(k) = 1$ si $k \in \delta(\mathbf{I})$.

Como veremos a lo largo de este capítulo, las conductancias que se expresan básicamente como producto tensorial de funciones tienen un papel relevante en el estudio de operadores Laplacianos en el camino. Este tipo de conductancias están definidas de la siguiente manera: Si $\mu,\nu \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, entonces $\gamma = \tau \cdot (\mu \otimes \nu) \in \Gamma(\mathbf{I})$. Más generalmente, si $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, entonces $\alpha = \gamma \cdot (\mu \otimes \nu) \in \Gamma(\mathbf{I})$ para cada $\mu,\nu \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$. Además, si $\gamma \in \Gamma^s(\mathbf{I})$, entonces $\alpha \in \Gamma^s(\mathbf{I})$ sii $\mu = \lambda\nu$, con $\lambda \neq 0$.

NOTA 1.4. En este trabajo, consideramos el concepto conductancia en sentido genérico, ya que no imponemos a priori ni que sea simétrica ni que sea no–negativa. En combinatoria, el concepto habitual de conductancia y, por tanto, de los correspondientes caminos pesados y dirigidos, remite a las conductancias no–negativas, o incluso al caso más específico de conductancias simétricas y no–negativas y, por tanto, a caminos pesados no dirigidos. De hecho, la mayor parte de las citas de este trabajo en este ámbito, se refieren a este último caso y habitualmente omiten la expresión no dirigido, [**4**] parece ser la única notable excepción. En definitiva, en este trabajo, la apelación a caminos pesados se referirá siempre al caso en el que la conductancia es simétrica y no–negativa.

Definiremos a continuación los operadores lineales básicos asociados a cada conductancia sobre el camino. Este tipo de operadores constituyen nuestro principal objeto de estudio y representan una generalización, en el sentido apuntado en la Nota anterior, de los considerados habitualmente en el tratamiento de redes o grafos pesados, ver por ejemplo, [**8, 9, 13, 21, 22, 29, 30, 48, 50**].

DEFINICIÓN 1.5. *Dada una conductancia $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, el* Laplaciano *determinado por γ es el operador lineal $\mathcal{L}^\gamma\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$, que a cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ le asigna la función $\mathcal{L}^\gamma(u)$ definida como*

$$\mathcal{L}^\gamma(u)(k) = \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)\big(u(k)-u(s)\big) = \kappa_\gamma(k)u(k) - \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)u(s), \quad k \in \mathbf{I}.$$

Para cualquier $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ llamamos operador de Schrödinger asociado a γ y con potencial q*, al operador $\mathcal{L}_q^\gamma\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ que a cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ le asigna la función $\mathcal{L}_q^\gamma(u) = \mathcal{L}^\gamma(u) + qu$.*

Por analogía con la terminología de operadores en derivadas parciales, en ocasiones nos referiremos a $\mathcal{L}^\gamma$ como *la parte principal del operador de Schrödinger $\mathcal{L}_q^\gamma$*. Por tanto, el Laplaciano $\mathcal{L}^\gamma$ corresponde al operador de Schrödinger $\mathcal{L}_q^\gamma$ con potencial nulo.

En la definición de operador de Schrödinger, cada potencial $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ está implicitamente identificado con el operador diagonal $\mathcal{D}_q\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y, por tanto, $\mathcal{L}_q^\gamma = \mathcal{L}^\gamma + \mathcal{D}_q$.

Por otra parte, el núcleo determinado por el del operador de Schrödinger con parte principal $\mathcal{L}^\gamma$ y potencial $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ está determinado por las identidades $K(k,s) = -\gamma(k,s)$ si $k,s \in \mathbf{I}$ con $k \neq s$ y $K(k,k) = q(k) + \kappa_\gamma(k)$ para cada $k \in \mathbf{I}$. En consecuencia, $K(k,\cdot), K(\cdot,k) \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$, para cada $k \in \mathbf{I}$, lo que, en particular, implica que $\mathcal{L}_q^\gamma$ es un operador local.

NOTA 1.6. Puesto que utilizamos el concepto de conductancia en sentido genérico, el concepto de Laplaciano se presenta aquí en sentido amplio, ya que γ puede tomar valores negativos. Sin embargo, si asumimos que $\gamma \in \Gamma_+(\mathbf{I})$, entonces tenemos una conductancia en sentido estricto y, por tanto, el concepto habitual de Laplaciano para un camino pesado y dirigido. Si además la conductancia es simétrica, es decir, $\gamma \in \Gamma_+^s(\mathbf{I})$, entonces obtenemos el concepto común de Laplaciano de caminos pesados y no dirigidos.

LEMA 1.7. *Si $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, entonces $\mathcal{L}^\gamma$ es singular, concretamente, $\mathcal{L}^\gamma(\varepsilon) = 0$. Además,*

$$\mathcal{L}^\gamma(\varepsilon_k) = \begin{cases} \gamma(0,1)\varepsilon_0 - \gamma(1,0)\varepsilon_1, & \text{si } k=0 \text{ y } 0 \in \delta(\mathrm{I}),\\ \kappa_\gamma(k)\varepsilon_k - \gamma(k-1,k)\varepsilon_{k-1} - \gamma(k+1,k)\varepsilon_{k+1}, & \text{si } k \in \mathring{\mathbf{I}},\\ \gamma(n+1,n)\varepsilon_{n+1} - \gamma(n,n+1)\varepsilon_n, & \text{si } k = n+1 \text{ y } n+1 \in \delta(\mathbf{I}).\end{cases}$$

En particular, dado $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, se satisface que $\mathcal{L}_q^\gamma = 0$ sii $\gamma = 0$ y $q = 0$.

Demostración. Las expresiones para $\mathcal{L}^\gamma(\varepsilon)$ y $\mathcal{L}^\gamma(\varepsilon_k)$, $k \in \mathbf{I}$ son prácticamente inmediatas de la definición del Laplaciano.

Por otra parte, es claro que si $\gamma = 0$ y $q = 0$, entonces $\mathcal{L}_q^\gamma = 0$. Recíprocamente, si $\mathcal{L}_q^\gamma = 0$, entonces $0 = \mathcal{L}_q^\gamma(\varepsilon) = q\varepsilon = q$. Asimismo, para cada $k \in \mathring{\mathbf{I}}$, resulta que

$$0 = \mathcal{L}^\gamma(\varepsilon_k) = \big(\gamma(k,k-1) + \gamma(k,k+1)\big)\varepsilon_k - \gamma(k-1,k)\varepsilon_{k-1} - \gamma(k+1,k)\varepsilon_{k+1},$$

de manera que $\gamma(k-1,k) = \gamma(k+1,k) = 0$ para cada $k \in \mathring{\mathbf{I}}$, lo que concluye la demostración para el caso infinito. Si el camino es semi–infinito, entonces $0 \in \delta(\mathbf{I})$, lo que implica que

$$0 = \mathcal{L}^\gamma(\varepsilon_0) = \gamma(0,1)\varepsilon_0 - \gamma(1,0)\varepsilon_1 = -\gamma(1,0)\varepsilon_1,$$

de manera que también $\gamma(1,0) = 0$. Un razonamiento análogo muestra que cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, entonces $\gamma(n,n+1) = 0$, lo que concluye la demostración para el caso finito. $\square$

El resultado anterior implica que los operadores de Schrödinger y, por tanto, los Laplacianos están completamente caracterizados por su potencial y su conductancia. Concretamente, si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\mathbf{I})$, $q_1, q_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, como $\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1} - \mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2} = \mathcal{L}_{q_1-q_2}^{\gamma_1-\gamma_2}$, del lema anterior obtenemos que $\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1} = \mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2}$ sii $\gamma_1 = \gamma_2$ y $q_1 = q_2$.

Como cada operador de Schrödinger es local, tiene adjunto. Para determinarlo, será conveniente introducir previamente algunos conceptos.

DEFINICIÓN 1.8. *Dada* $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$*, el* potencial asociado a γ *es la función* $p_\gamma = \kappa_\gamma - \kappa_{\gamma^*}$*, mientras que* la función de acompañamiento asociada a γ *es* $\rho_\gamma \in \Omega(\mathbf{I})$ *definida como*

$$\rho_\gamma(k) = \left[\prod_{s=\text{mín}\{k,0\}}^{\text{máx}\{k,0\}-1} \frac{\gamma(s,s+1)}{\gamma(s+1,s)}\right]^{\mathfrak{s}(k)}, \quad k \in \mathbf{I}.$$

La conductancia simetrizada de γ *es* $\check{\gamma} \in \Gamma(\mathbf{I})$ *definida como* $\check{\gamma}(k,s) = \rho_\gamma(k)\gamma(k,s)$*, para cada* $k, s \in \mathbf{I}$.

Las siguientes propiedades, relativas a las funciones que acabamos de definir, son de comprobación prácticamente inmediata.

LEMA 1.9. *Si* $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$*, entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $p_{\gamma^*} = -p_\gamma$ *y, además,* $p_\gamma = 0$ *sii* $\gamma \in \Gamma^s(\mathbf{I})$.
(ii) $\rho_{\gamma^*} = \rho_\gamma^{-1}$ *y, además,* $\rho = \varepsilon$ *sii* $\gamma \in \Gamma^s(\mathbf{I})$.
(iii) $\rho_\gamma = \rho_{\gamma(\omega\otimes\omega)}$ *para cada* $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$.
(iv) $\check{\gamma} \in \Gamma^s(\mathbf{I})$ *y, en particular,* $\check{\gamma} = \gamma$ *sii* $\gamma \in \Gamma^s(\mathbf{I})$*. Además,* $\check{\gamma}^*(k,m) = \gamma(m,k)\rho_\gamma(k)^{-1}$ *para cada* $k, m \in \mathbf{I}$.
(v) $\mathcal{L}^{\check{\gamma}} = \mathcal{D}_{\rho_\gamma} \circ \mathcal{L}^\gamma = \rho_\gamma \mathcal{L}^\gamma$.

A continuación mostraremos que el adjunto de un operador Laplaciano es, en general, un operador de Schrödinger y determinaremos su expresión.

PROPOSICIÓN 1.10. *Si* $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$*, entonces*

$$(\mathcal{L}^\gamma)^* = \mathcal{L}_{p_\gamma}^{\gamma^*} = \mathcal{D}_{\rho_\gamma} \circ \mathcal{L}^\gamma \circ \mathcal{D}_{\rho_\gamma}^{-1} = \mathcal{L}^{\check{\gamma}} \circ \mathcal{D}_{\rho_\gamma}^{-1}.$$

En particular, $(\mathcal{L}^\gamma)^{**} = \mathcal{L}^\gamma$ *y* $\mathcal{L}^\gamma$ *es autoadjunto sii* $\gamma \in \Gamma^s(\mathbf{I})$.

Demostración. Por la Identidad (18), para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y cada $k \in \mathbf{I}$

$$(\mathcal{L}^\gamma)^*(u)(k) = \int_{\mathbf{I}} \mathcal{L}^\gamma(\varepsilon_k)u.$$

Teniendo en cuenta las identidades del Lema 1.7, para cualquier $v \in \mathcal{C}(V)$ obtenemos que

$$\int_{\mathbf{I}} \mathcal{L}^\gamma(\varepsilon_0)u = \gamma(0,1)u(0) - \gamma(1,0)u(1) = \gamma(1,0)\big(u(0) - u(1)\big) + p_\gamma(0)u(0),$$

cuando $0 \in \delta(\mathbf{I})$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{I}} \mathcal{L}^\gamma(\varepsilon_k)u &= \kappa_\gamma(k)u(k) - \gamma(k-1,k)u(k-1) - \gamma(k+1,k)u(k+1) \\ &= \gamma(k-1,k)\big(u(k) - u(k-1)\big) + \gamma(k+1,k)\big(u(k) - u(k+1)\big) + p_\gamma(k)u(k),\end{aligned}$$

cuando $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$, mientras que

$$\int_{\mathbf{I}} \mathcal{L}^\gamma(\varepsilon_{n+1})u = \gamma(n+1,n)u(n+1) - \gamma(n,n+1)u(n) = \gamma(n,n+1)\big(u(n+1)-u(n)\big) + p_\gamma(n+1),$$

cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, lo que, claramente, implica que $(\mathcal{L}^\gamma)^* = \mathcal{L}^{\gamma^*}_{p_\gamma}$. Además, $\mathcal{L}^\gamma$ es autoadajunto sii $\mathcal{L}^\gamma = (\mathcal{L}^\gamma)^*$, lo que aplicando nuevamente el Lema 1.7, ocurre sii $\gamma = \gamma^*$; es decir, sii $\gamma \in \Gamma^s(\mathbf{I})$.

En particular, si consideramos la conductancia $\check{\gamma}$, obtenemos que

$$\mathcal{D}_{\rho_\gamma} \circ \mathcal{L}^\gamma = \mathcal{L}^{\check{\gamma}} = (\mathcal{L}^{\check{\gamma}})^* = (\mathcal{L}^\gamma)^* \circ \mathcal{D}_{\rho_\gamma},$$

lo que implica que $(\mathcal{L}^\gamma)^* = \mathcal{D}_{\rho_\gamma} \circ \mathcal{L}^\gamma \circ \mathcal{D}^{-1}_{\rho_\gamma}$. Finalmente, las identidades anteriores implican, a su vez, que $(\mathcal{L}^\gamma)^{**} = \big(\mathcal{L}^{\check{\gamma}} \circ \mathcal{D}^{-1}_{\rho_\gamma}\big)^* = \mathcal{D}^{-1}_{\rho_\gamma} \circ \mathcal{L}^{\check{\gamma}} = \mathcal{L}^\gamma$. □

NOTA 1.11. Obsérvese que el adjunto del Laplaciano asociado con la conductancia γ no coincide, salvo que ésta sea simétrica, con el Laplaciano asociado con la conductancia adjunta γ^*, ya que el primero es, de hecho, un operador de Schrödinger con potencial p_γ. Recordemos que esto ocurre también en el caso diferencial: Si $L(u) = au'' + bu' + cu$, entonces

$$L^*(u) = (au)'' - (bu)' + cu = au'' + (2a' - b)u' + (a'' - b' + c)u,$$

ver por ejemplo [**23**]. Por tanto, para operadores diferenciales de segundo orden, el adjunto implica también la modificación del coeficiente de orden 0, excepto cuando $b = a'$ que es precisamente la condición necesaria y suficiente para que L sea autoadjunto.

Finalizamos esta sección mostrando la versión discreta de una identidad popular en el ámbito diferencial y que no representa más que la generalización de la Fórmula de Integración por Partes.

PROPOSICIÓN 1.12 (Identidad de Green). *Sean $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$ y $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$. Entonces, para cada $k \in \mathbf{I}$, $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ tales que $k \le m$ y cada $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ se satisface que*

$$\begin{aligned}\int_k^m v\mathcal{L}^\gamma_q(u) - \int_k^m u(\mathcal{L}^\gamma_q)^*(v) &= \gamma(m+1,m)w[u,v](m) - \gamma(k+1,k)w[u,v](k)\\ &\quad + \big(\gamma(m+1,m) - \gamma(m,m+1)\big)v(m)u(m+1)\\ &\quad - \big(\gamma(k+1,k) - \gamma(k,k+1)\big)v(k)u(k+1)\end{aligned}$$

y, por tanto, $\displaystyle\int_k^m u\mathcal{L}^\gamma_q(v) = \int_k^m v(\mathcal{L}^\gamma_q)^*(u)$ *si, además,* $u(k) = v(k) = u(m+1) = v(m+1) = 0$.

Demostración. Claramente, se satisface que

$$\int_k^m v\mathcal{L}^\gamma_q(u) - \int_k^m u(\mathcal{L}^\gamma_q)^*(v) = \int_k^m v\mathcal{L}^\gamma(u) - \int_k^m u(\mathcal{L}^\gamma)^*(v),$$

de manera que podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $q = 0$. Además, podemos suponer también que $k < m$, pues cuando $k = m$ ambos lados de las identidades coinciden con 0 y, por tanto, que $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Si $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, teniendo en cuenta que para cada $s \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\gamma(u)(s) &= \big(\gamma(s,s-1) + \gamma(s,s+1)\big)u(s) - \gamma(s,s-1)u(s-1) - \gamma(s,s+1)u(s+1),\\ (\mathcal{L}^\gamma)^*(v)(s) &= \big(\gamma(s,s-1) + \gamma(s,s+1)\big)v(s) - \gamma(s-1,s)v(s-1) - \gamma(s+1,s)v(s+1),\end{aligned}$$

resulta que

$$
\begin{aligned}
\int_k^m v\mathcal{L}^\gamma(u) = & \sum_{s=k+1}^{m} \big(\gamma(s,s-1)+\gamma(s,s+1)\big)v(s)u(s) - \sum_{s=k+1}^{m}\gamma(s,s+1)v(s)u(s+1)\\
- & \sum_{s=k+1}^{m}\gamma(s,s-1)v(s)u(s-1)\\
= & \sum_{s=k+1}^{m} \big(\gamma(s,s-1)+\gamma(s,s+1)\big)v(s)u(s) - \sum_{s=k+2}^{m+1}\gamma(s-1,s)v(s-1)u(s)\\
- & \sum_{s=k}^{m-1}\gamma(s+1,s)v(s+1)u(s)\\
= & \int_k^m u(\mathcal{L}^\gamma)^*(v) - \gamma(m,m+1)v(m)u(m+1) + \gamma(k,k+1)v(k)u(k+1)\\
- & \ \gamma(k+1,k)v(k+1)u(k) + \gamma(m+1,m)v(m+1)u(m)\\
= & \int_k^m u(\mathcal{L}^\gamma)^*(v) + \gamma(m+1,m)w[u,v](m) - \gamma(k+1,k)w[u,v](k)\\
+ & \ \big(\gamma(m+1,m)-\gamma(m,m+1)\big)u(m+1)v(m)\\
- & \ \big(\gamma(k+1,k)-\gamma(k,k+1)\big)u(k+1)v(k).
\end{aligned}
$$

El resto de conclusiones se deducen inmediatamente de la primera identidad. □

NOTA 1.13. Observar que la igualdad de la Proposición anterior también puede expresarse como

$$
\begin{aligned}
\int_k^m v\mathcal{L}_q^\gamma(u) - \int_k^m u(\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v) = & \ \gamma(m,m+1)w[u,v](m) - \gamma(k,k+1)w[u,v](k)\\
& + \big(\gamma(m+1,m)-\gamma(m,m+1)\big)u(m)v(m+1)\\
& - \big(\gamma(k+1,k)-\gamma(k,k+1)\big)u(k)v(k+1).
\end{aligned}
$$

COROLARIO 1.14. *Sean* $\gamma \in \Gamma^s(\mathbf{I})$ *y* $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$. *Entonces, para cada* $k \in \mathbf{I}$, $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *tales que* $k \le m$ *y cada* $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *se satisface que*

$$
\int_k^m v\mathcal{L}_q^\gamma(u) - \int_k^m u\mathcal{L}_q^\gamma(v) = \gamma(m,m+1)w[u,v](m) - \gamma(k,k+1)w[u,v](k)
$$

y, por tanto, $\displaystyle\int_k^m u\mathcal{L}_q^\gamma(v) = \int_k^m v\mathcal{L}_q^\gamma(u)$ *si, además,* $u(k)=v(k)=u(m+1)=v(m+1)=0$.

2. Potenciales y Transformaciones de Doob

En el tratamiento de los operadores de Schrödinger que hemos realizado en la sección anterior, no se ha exigido ninguna propiedad sobre los potenciales. En esta sección introduciremos una clase específica de tales funciones, concretamente, para las ecuaciones de Laplace, que corresponden a potencial nulo, se puede generalizar al caso en el que el potencial está asociado con una función que toma un valor no nulo en cada nodo. Específicamente, dada una función $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, definimos *el potencial determinado por ω, respecto de γ* como la función $q^\gamma_\omega = -\omega^{-1}\mathcal{L}^\gamma(\omega)$; es decir, la función dada por

$$q^\gamma_\omega(k) = -\kappa_\gamma(k) + \frac{1}{\omega(k)}\sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma(k,s)\omega(s), \quad k\in\mathbf{I}, \tag{20}$$

o, más explícitamente, como

$$q^\gamma_\omega(k) = \begin{cases} \dfrac{\gamma(0,1)}{\omega(0)}\big(\omega(1)-\omega(0)\big), & \text{si } k=0\in\delta(\mathbf{I}),\\[2mm] -\kappa_\gamma(k) + \dfrac{1}{\omega(k)}\Big[\gamma(k,k+1)\omega(k+1)+\gamma(k,k-1)\omega(k-1)\Big], & \text{si } k\in\overset{\circ}{\mathbf{I}},\\[2mm] \dfrac{\gamma(n+1,n)}{\omega(n+1)}\big(\omega(n)-\omega(n+1)\big), & \text{si } k=n+1\in\delta(\mathbf{I}).\end{cases}$$

Un potencial $q\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$ se denomina *potencial de Doob, respecto de γ* si existe $\omega\in\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ tal que $q = q^\gamma_\omega$; es decir, si q es el potencial determinado por una función de $\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$.

Aunque el resultado que mostramos a continuación es habitual en el caso continuo y en el contexto de *Formas de Dirichlet*, en el ámbito discreto apareció por vez primera en [**9**] y está aún lejos de ser una herramienta de uso común a pesar de la repercusión de sus aplicaciones. Por ejemplo, fue una herramienta clave en la caracterización de las matrices simétricas e invertibles como inversas resistivas, ver [**11**], resultado que generaliza los obtenidos por M. Fiedler, ver [**33**]. Hemos introducido aquí la novedad importante de definir potenciales de Doob asociados a funciones de $\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, ya que hasta la fecha este tipo de potenciales sólo se había asociado a pesos y, de hecho, a pesos normalizados; es decir, a funciones positivas en cada vértice y normalizadas para que la integral de su cuadrado sea igual a 1. Como en este trabajo permitimos caminos infinitos o semi–infinitos, no utilizaremos una normalización de estas características.

PROPOSICIÓN 2.1 (Transformación de Doob). *Si $\omega\in\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, entonces*

$$\mathcal{L}^\gamma_{q^\gamma_\omega} = \mathcal{D}^{-1}_\omega \circ \mathcal{L}^{\gamma(\omega\otimes\omega)}\circ\mathcal{D}^{-1}_\omega.$$

Demostración. De las definiciones de Laplaciano y potencial de Doob, resulta que para cada $k\in\mathbf{I}$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^\gamma_{q^\gamma_\omega}(u)(k) &= \kappa_\gamma(k)u(k) - \sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma(k,s)u(s) - \kappa_\gamma(k)u(k) + \frac{u(k)}{\omega(k)}\sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma(k,s)\omega(s)\\ &= \sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma(k,s)\Big(\frac{\omega(s)}{\omega(k)}u(k)-u(s)\Big) = \sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma(k,s)\omega(s)\Big(\frac{u(k)}{\omega(k)}-\frac{u(s)}{\omega(s)}\Big)\\ &= \sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma(k,s)\omega(s)\Big(\frac{u(k)}{\omega(k)}-\frac{u(s)}{\omega(s)}\Big) = \frac{1}{\omega(k)}\sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma(k,s)\omega(k)\omega(s)\Big(\frac{u(k)}{\omega(k)}-\frac{u(s)}{\omega(s)}\Big);\end{aligned}$$

es decir, $\mathcal{L}^\gamma_{q^\gamma_\omega}(u)(k) = \big(\mathcal{D}^{-1}_\omega\circ\mathcal{L}^{\gamma(\omega\otimes\omega)}\circ\mathcal{D}^{-1}_\omega\big)(u)(k)$. $\square$

La transformación de Doob permite reducir el estudio de las propiedades de los operadores de Schrödinger con potenciales de Doob al de operadores Laplacianos. Es de interés por tanto, determinar qué potenciales son potenciales de Doob. La resolución completa de esta cuestión, en los términos en los que está planteada, excede los objetivos de este trabajo. En secciones posteriores de este capítulo detallaremos tal caracterización al menos para el caso finito y con condciones para el resto.

Nos limitaremos ahora a describir algunas propiedades relevantes de los potenciales de Doob y de su relación con el núcleo de los correspondientes operadores de Schrödinger.

Observemos primero que si $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, entonces $\mathcal{L}^{\gamma}_{q^{\gamma}_{\omega}}$ es singular y, además, $\mathcal{L}^{\gamma}_{q^{\gamma}_{\omega}}(\omega) = 0$. Por tanto, si $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, entonces q es un potencial de Doob, respecto de γ, si y sólo si existe $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ tal que $q = q^{\gamma}_{\omega}$; es decir, sii el operador de Schrödinger $\mathcal{L}^{\gamma}_{q}$ es singular y, además, $\mathcal{L}^{\gamma}_{q}(\omega) = 0$. En definitiva, los potenciales de Doob aparecen asociados a los operadores de Schrödinger singulares tales que poseen autofunciones, respecto del autovalor 0, que no se anulan en ningún vértice del camino.

NOTA 2.2. Para cada conductancia $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$ se satisface que $q^{\gamma}_{\varepsilon} = 0$ y, si consideraremos la función $\bar{\varepsilon}$ definida como $\bar{\varepsilon}(k) = (-1)^k$, para cada $k \in \mathbf{I}$, también que $q^{\gamma}_{\bar{\varepsilon}} = -2\kappa_{\gamma}$. Además, es claro que dados $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ y $\hat{\omega} = \lambda\omega$, entonces $q^{\gamma}_{\hat{\omega}} = q^{\gamma}_{\omega}$. Por otra parte, si $\omega, \mu \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, entonces aplicando la Transformación de Doob tenemos que

$$\mathcal{L}^{\gamma(\mu\otimes\mu)}\Big(\frac{\omega}{\mu}\Big) = \mu\mathcal{L}^{\gamma}_{q^{\gamma}_{\mu}}(\omega) = \mu\mathcal{L}^{\gamma}(\omega) + \mu q^{\gamma}_{\mu}\omega = \omega\mu(q^{\gamma}_{\mu} - q^{\gamma}_{\omega}) \tag{21}$$

y, por tanto, $q^{\gamma}_{\mu} = q^{\gamma}_{\omega}$ sii $\mathcal{L}^{\gamma(\mu\otimes\mu)}(\mu^{-1}\omega) = 0$ o, equivalentemente, sii $\mathcal{L}^{\gamma(\omega\otimes\omega)}(\omega^{-1}\mu) = 0$. Obsérvese que la identidad (21), también implica que

$$q^{\gamma(\mu\otimes\mu)}_{\mu^{-1}\omega} = \mu^2(q^{\gamma}_{\omega} - q^{\gamma}_{\mu}). \tag{22}$$

3. Operadores Laplaciano y de Schrödinger generalizados en un camino

En la primera sección de este capítulo hemos introducido los operadores lineales básicos en un camino, desde el punto de vista del Cálculo discreto aunque, de hecho, el tipo de operador analizado representaba ya una generalización respecto de los habitualmente utilizados en el ámbito discreto, ya sea en el caso de redes finitas como infinitas. Esta generalidad provenía de la consideración de conductancias en sentido amplio y, por tanto, no necesariamente no–negativas. A pesar de ello, el tratamiento formal de los operadores involucrados era idéntico al que habitualmente se utiliza para analizar tanto el Laplaciano como los operadores de Schrödinger correspondientes. Sin embargo, este tipo de generalizaciones no son las únicas que pueden considerarse. Desde hace aproximadamente dos décadas se ha hecho un intensivo estudio sobre el denominado *Laplaciano sin signo de un grafo o una red*, ver por ejemplo [**25**]. Comenzaremos esta sección presentando una generalización de este operador similar a la efectuada en la sección anterior para el Laplaciano.

DEFINICIÓN 3.1. *Dada una conductancia $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, el* Laplaciano sin signo *determinado por γ es el operador lineal $\mathcal{Q}_{\gamma}\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$, que a cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ le asigna la función $\mathcal{Q}^{\gamma}(u)$ definida como*

$$\mathcal{Q}^{\gamma}(u)(k) = \sum_{m\in\mathbf{I}} \gamma(k,m)\big(u(k) + u(m)\big), \quad k \in \mathbf{I}.$$

Como vemos, en la definición del Laplaciano sin signo aparecen con signo positivo todos los sumandos que en el Laplaciano aparecían con signo negativo. Así pues, su núcleo es la función $K_S\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $K_S(k,m) = \gamma(k,m)$ si $k,m \in \mathbf{I}$ con $k \neq m$ y $K_S((k,k) = \kappa_{\gamma}(k)$ para cada $k \in \mathbf{I}$. En general, el análisis de este tipo de operadores es radicalmente diferente del correspondiente al Laplaciano. Por ejemplo es conocido, ver [**18**], que a diferencia del Laplaciano, el Laplaciano sin signo no es necesariamente singular, a menos que el grafo subyacente a la red sea bipartito. Como un camino es un grafo bipartito, en nuestro caso esa diferencia entre ambos operadores no es detectable.

Si analizamos las expresiones tanto del Laplaciano como del Laplaciano sin signo observamos que han sido construidos asignado un signo, negativo en el caso del Laplaciano y positivo en el del Laplaciano sin signo, a cada rama, es decir, a cada par $\{k, s\}$ de vértices adyacentes, del grafo. Podemos generalizar esta situación asignando a cada rama del camino un signo positivo o negativo independientemente del asignado a otra rama. En este sentido el Laplaciano y el Laplaciano sin signo representan los casos extremos de estas asignaciones. El primer análisis sistemático de esta generalización se realizó en [**18**], trabajo que ha inspirado algunas de las técnicas desarrolladas aquí.

Para asignar un signo a cada rama del camino introduciremos un tipo concreto de conductancias que denominaremos ley de signos. Como veremos, en el caso de caminos este tipo de conductancias están íntimamente relacionadas con las denominadas funciones de partición.

DEFINICIÓN 3.2. *Diremos que* $\sigma \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *es una* función de partición en el camino *si satisface que* $\sigma^2 = \varepsilon$ *y, además,* $\sigma(0) = 1$. *Denotaremos por* $\mathcal{C}^P(\mathbf{I})$ *al conjunto de funciones de partición en el camino.*

Es claro que $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$ sii $\sigma \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y, además, $\sigma(0) = 1$ y $\sigma^{-1} = \sigma$.

Obsérvese que en el caso finito; es decir, cuando $n + 1 \in \delta(\mathbf{I})$ y, por tanto, $\mathbf{I}$ tiene $n + 2$ vértices, existen exactamente 2^{n+1} funciones de partición diferentes en el camino. En los casos infinito o semi–infinito, existe una cantidad no numerable de funciones de partición en $\mathbf{I}$.

Las funciones de partición fueron introducidas en [**18**] en un contexto más general, aunque allí no se impuso condición alguna sobre el valor en ningún vértice. Su denominación está justificada por el siguiente resultado.

LEMA 3.3. *La función* $\sigma \in C(\mathbf{I})$ *es una función de partición sii existen* $\mathbf{I}_0, \mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}$ *tales que* $0 \in \mathbf{I}_0$, $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \cup \mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_0 \cap \mathbf{I}_1 = \emptyset$ *y, además,* $\sigma = \varepsilon_{\mathbf{I}_0} - \varepsilon_{\mathbf{I}_1}$.

Claramente, $\varepsilon \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$ y está caracterizada por ser la única función de partición en la que $\mathbf{I}_1 = \emptyset$, y $\bar{\varepsilon} \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$ y, además, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_{\mathbf{I}_0} - \varepsilon_{\mathbf{I}_1}$ donde $\mathbf{I}_0 = \{k \in \mathbf{I} : \text{par}\}$ y $\mathbf{I}_1 = \{k \in \mathbf{I} : \text{impar}\}$, que no hace más que reconocer el carácter bipartito del camino.

DEFINICIÓN 3.4. *Una* ley de signos en el camino *es cualquier conductancia simétrica que sólo toma los valores* $-1, 0, 1$*; es decir,* $\theta \in \Gamma^s(\mathbf{I})$ *tal que* $\theta^2 = \tau$. *Si* θ *es una ley de signos, definimos* $\varepsilon_\theta \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ *como*

$$\varepsilon_\theta(k) = \prod_{j=\text{mín}\{k,0\}}^{\text{máx}\{k,0\}-1} \theta(j, j+1), \quad k \in \mathbf{I}. \tag{23}$$

Obsérvese que $\varepsilon_\tau = \varepsilon$, $\varepsilon_{-\tau} = \bar{\varepsilon}$ y que para cada ley de signos, θ, se satisface que $\varepsilon_\theta \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$, motivo por el que se la denomina *función de partición de* θ. De hecho, tenemos la siguiente caracterización.

LEMA 3.5. *Si* $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$*, entonces* $\theta = \tau \cdot (\sigma \otimes \sigma)$ *es una ley de signos cuya función de partición es* σ. *Recíprocamente, si* θ *es una ley de signos, entonces* $\theta = \tau \cdot (\varepsilon_\theta \otimes \varepsilon_\theta)$. *En particular, el conjunto de leyes de signos en un camino está identificado con* $\mathcal{C}^P(\mathbf{I})$*, el conjunto de funciones de partición.*

Demostración. Si $\sigma \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, entonces $\theta = \tau \cdot (\sigma \otimes \sigma)$ es una conductancia simétrica en el camino, cuya expresión está determinada por la identidad

$$\theta(k, m) = \begin{cases} \sigma(k)\sigma(m), & \text{si } |k - m| = 1, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Claramente, θ es una ley de signos cuando $\sigma^2 = \varepsilon$, pues entonces $\theta^2 = \tau^2(\sigma^2 \otimes \sigma^2) = \tau \cdot (\varepsilon \otimes \varepsilon) = \tau$. Además, como $\sigma(0) = 1$,

$$\varepsilon_\theta(k) = \prod_{j=\text{mín}\{k,0\}}^{\text{máx}\{k,0\}-1} \sigma(j)\sigma(j+1) = \sigma(k), \quad k \in \mathbf{I}.$$

Recíprocamente, si θ es una ley de signos, entonces $\tau \cdot (\varepsilon_\theta \otimes \varepsilon_\theta)(k,m) = 0$ si $|k-m| \neq 1$, mientras que

$$\tau \cdot (\varepsilon_\theta \otimes \varepsilon_\theta)(k,k-1) = \varepsilon_\theta(k)\varepsilon_\theta(k-1) = \prod_{j=\text{mín}\{k,0\}}^{\text{máx}\{k,0\}-1} \theta(j,j+1) \prod_{j=\text{mín}\{k-1,0\}}^{\text{máx}\{k-1,0\}-1} \theta(j,j+1).$$

Si $k = 0$, el término de la derecha se reduce a $\theta(-1,0) = \theta(0,-1)$. Si $k \geq 1$, el término de la derecha se expresa como

$$\prod_{j=0}^{k-1} \theta(j,j+1) \prod_{j=0}^{k-2} \theta(j,j+1) = \theta(k-1,k) = \theta(k,k-1),$$

mientras que si $k < 0$, entonces el término de la derecha queda

$$\prod_{j=k}^{-1} \theta(j,j+1) \prod_{j=k-1}^{-1} \theta(j,j+1) = \theta(k-1,k) = \theta(k,k-1).$$

Un razonamiento análogo prueba que $\tau \cdot (\varepsilon_\theta \otimes \varepsilon_\theta)(k,k+1) = \theta(k,k+1)$, para cada $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$. $\square$

Claramente, cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, existen exactamente 2^{n+1} leyes de signos diferentes sobre el camino, mientras que en los casos infinito o semi-infinito, existe una cantidad no numerable de leyes de signos en $\mathbf{I}$.

DEFINICIÓN 3.6. *Dada una conductancia* $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$*, un* Laplaciano generalizado asociado con γ *es cualquier operador lineal* $\mathcal{L}^{\gamma,\theta} \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, que a cada* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *le asigna la función* $\mathcal{L}^{\gamma,\theta}(u)$ *definida como*

$$\mathcal{L}^{\gamma,\theta}(u)(k) = \sum_{s \in \mathbf{I}} \gamma(k,s)\big(u(k) - \theta(k,s)u(s)\big), \quad k \in \mathbf{I},$$

donde θ *es una ley de signos en el camino.*

Por otro lado, para cualquier $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *llamamos* operador de Schrödinger generalizado asociado con γ, con parte principal $\mathcal{L}^{\gamma,\theta}$ y potencial q*, al operador* $\mathcal{L}_q^{\gamma,\theta} \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *que asigna a cualquier* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *la función* $\mathcal{L}_q^{\gamma,\theta}(u) = \mathcal{L}^{\gamma,\theta}(u) + qu$*.*

Nuevamente, identificando el potencial con un operador diagonal tenemos que $\mathcal{L}_q^{\gamma,\theta} = \mathcal{L}^{\gamma,\theta} + \mathcal{D}_q$. Asimismo, es claro que los operadores de Schrödinger generalizados son *operadores locales*.

Observamos que la elección $\theta = \tau$, o lo que es equivalente $\sigma = \varepsilon$, corresponde al Laplaciano determinado por γ, mientras que la elección $\theta = -\tau$ o, equivalentemente, $\sigma = \bar{\varepsilon}$, corresponde al Laplaciano sin signo determinado por γ. Cualquier otro Laplaciano generalizado asociado a la conductancia γ corresponde a diferentes elecciones de la función de partición y, como vemos a continuación, puede considerarse como una cierta *combinación* del Laplaciano y del Laplaciano sin signo:

para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y para cada $k \in \mathbf{I}$ tenemos que

$$\mathcal{L}^{\gamma,\theta}(u)(k) = \sum_{\substack{s\in\mathbf{I}\\ \theta(k,s)=1}} \gamma(k,s)\big(u(k)-u(s)\big) + \sum_{\substack{s\in\mathbf{I}\\ \theta(k,s)=-1}} \gamma(k,s)\big(u(k)+u(s)\big), \quad k\in\mathbf{I}, \tag{24}$$

de manera que el Laplaciano corresponde a no considerar ningún sumando de la derecha, mientras que el Laplaciano sin signo corresponde a no considerar ningún sumando de la izquierda.

Debido a la equivalencia entre leyes de signos y funciones de partición, cualquier Laplaciano generalizado asociado con γ puede expresarse como

$$\mathcal{L}^{\gamma,\sigma}(u)(k) = \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)\big(u(k)-\sigma(k)\sigma(s)u(s)\big), \quad k\in\mathbf{I}, \tag{25}$$

donde $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$, de hecho, $\sigma = \varepsilon_\theta$. Así pues, cada Laplaciano generalizado está caraterizado por su conductancia y su función de partición, de manera que cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, existen exactamente 2^{n+1} Laplacianos generalizados diferentes asociados con γ. En el resto del trabajo, utilizaremos esta última expresión para los Laplacianos generalizados y sus correspondientes operadores de Schrödinger, donde la conductancia y la función de partición están claramente identificadas.

De la identidad (25), deducimos que para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y cada $k \in \mathbf{I}$, tenemos que

$$\mathcal{L}^{\gamma,\sigma}(u)(k) = \gamma(k,k+1)\big(u(k)-\sigma(k)\sigma(k+1)u(k+1)\big) + \gamma(k,k-1)\big(u(k)-\sigma(k)\sigma(k-1)u(k-1)\big)$$

para cada $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$, mientras que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\gamma,\sigma}(u)(0) &= \gamma(0,1)\big(u(0)-\sigma(0)\sigma(1)u(1)\big), && \text{si } 0\in\delta(\mathbf{I}),\\ \mathcal{L}^{\gamma,\sigma}(u)(n+1) &= \gamma(n+1,n)\big(u(n+1)-\sigma(n)\sigma(n+1)u(n)\big), && \text{si } n+1\in\delta(\mathbf{I}). \end{aligned}$$

LEMA 3.7. *Todos los Laplacianos generalizados en un camino son singulares. Concretamente, si $\mathcal{L}^{\gamma,\sigma}$ es el Laplaciano generalizado asociado con γ y la función de partición σ, entonces $\mathcal{L}^{\gamma,\sigma}(\sigma) = 0$.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbf{I}$ tenemos que

$$\mathcal{L}^{\gamma,\sigma}(\sigma)(k) = \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)\big(\sigma(k)-\sigma(k)\sigma^2(s)\big) = \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)\big(\sigma(k)-\sigma(k)\big) = 0.$$

□

Como una consecuencia del resultado anterior, obtenemos que el Laplaciano sin signo asociado a la conductancia γ es singular. Concretamente, como $\mathcal{Q}^\gamma = \mathcal{L}^{\gamma,\bar{\varepsilon}}$, resulta que $\mathcal{Q}^\gamma(\bar{\varepsilon}) = 0$, propiedad que también puede probarse directamente.

Como veremos a continuación, si permitimos conductancias generalizadas, es decir, no necesariamente no–negativas, entonces podemos reducir el estudio de Laplacianos u operadores de Schrödinger generalizados al de operadores de Schrödinger. Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.8. *Si $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$ y $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$, entonces para cada $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ se satisface que*

$$\mathcal{L}_q^{\gamma,\sigma} = \mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{L}_q^\gamma \circ \mathcal{D}_\sigma = \mathcal{L}_{q-q_\sigma^\gamma}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}.$$

En particular, para cada $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, tenemos que

$$\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma,\sigma} = \mathcal{L}_{q_\omega^\gamma - q_\sigma^\gamma}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)} = \mathcal{L}_{q_{\sigma\omega}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}.$$

Demostración. Como $\sigma^2 = \varepsilon$, si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, entonces para cada $k \in \mathbf{I}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\gamma,\sigma}(u)(k) &= \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)\big(u(k) - \sigma(k)\sigma(s)u(s)\big) = \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)\big(\sigma(k)^2u(k) - \sigma(k)\sigma(s)u(s)\big)\\ &= \sigma(k)\sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)\big(\sigma(k)u(k) - \sigma(s)u(s)\big) = \big(\mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{L}^\gamma \circ \mathcal{D}_\sigma\big)(u)(k).\end{aligned}$$

Además, como $\mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{D}_q \circ \mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_{q\sigma^2} = \mathcal{D}_q$, resulta que $\mathcal{L}_q^{\gamma,\sigma} = \mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{L}_q^\gamma \circ \mathcal{D}_\sigma$.

Por otra parte, aplicando la Transformación de Doob, resulta que

$$\mathcal{L}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)} = \mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{L}^\gamma_{q_\sigma^\gamma} \circ \mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{L}^\gamma \circ \mathcal{D}_\sigma + \mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{D}_{q_\sigma^\gamma} \circ \mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{L}^\gamma \circ \mathcal{D}_\sigma + \mathcal{D}_{q_\sigma^\gamma},$$

lo que implica que

$$\mathcal{L}_q^{\gamma,\sigma} = \mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{L}_q^\gamma \circ \mathcal{D}_\sigma = \mathcal{D}_\sigma \circ \mathcal{L}^\gamma \circ \mathcal{D}_\sigma + \mathcal{D}_q = \mathcal{L}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)} - \mathcal{D}_{q_\sigma^\gamma} + \mathcal{D}_q = \mathcal{L}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}_{q - q_\sigma^\gamma}.$$

Finalmente, si $q = q_\omega^\gamma$ con $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, aplicando la identidad (22), resulta que $q_\omega^\gamma - q_\sigma^\gamma = q_{\sigma\omega}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}$, con lo que se concluye. $\square$

Observar que tomando $\omega = \varepsilon$, la identidad $q_\omega^\gamma - q_\sigma^\gamma = q_{\sigma\omega}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}$ concluye que $q_\sigma^\gamma = -q_\sigma^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}$ y, por tanto, que $\mathcal{L}^{\gamma,\sigma} = \mathcal{L}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}_{q_\sigma^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}}$. El siguiente resultado engloba los resultados sobre la singularidad de Laplacianos y Laplacianos generalizados expresados en los Lemas 1.7 y 3.7 y, también, en el comentario posterior a la Transformación de Doob.

COROLARIO 3.9. *Dados $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$ y $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, el operador $\mathcal{L}^{\gamma,\sigma}_{q_\omega^\gamma}$ es singular, concretamente, $\mathcal{L}^{\gamma,\sigma}_{q_\omega^\gamma}(\sigma\omega) = 0$.*

El comentario posterior al Lema 1.7, establece que todo operador de Schrödinger está completamente caracterizado por su conductancia y su potencial. Como la proposición anterior reduce el estudio de los operadores de Schrödinger generalizados a operadores de Schrödinger, tiene sentido plantearse si aquéllos también pueden caracterizarse completamente por su conductancia, su función de partición y su potencial. Veremos a continuación que tal caracterización no es posible, excepto que se introduzcan hipótesis adicionales sobre la igualdad de o bien las conductancias, o bien las funciones de partición, o bien los potenciales.

PROPOSICIÓN 3.10. *Consideremos $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\mathbf{I})$ dos conductancias sobre el camino, σ_1, σ_2 dos funciones de partición y $q_1, q_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ dos potenciales. Entonces, son equivalentes*

(i) $\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1,\sigma_1} = \mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2,\sigma_2}$.

(ii) $\gamma_1(\sigma_1\otimes\sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2\otimes\sigma_2)$ *y, además,* $q_1 - q_2 = \kappa_{\gamma_2} - \kappa_{\gamma_1}$.

Demostración. Aplicando la Proposición 3.8, sabemos que $\mathcal{L}_{q_i}^{\gamma_i,\sigma_i} = \mathcal{L}^{\gamma_i(\sigma_i\otimes\sigma_i)}_{q_i - q_{\sigma_i}^{\gamma_i}}$, $i = 1,2$. Aplicando el comentario al último resultado del Lema 1.7, resulta que $\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1,\sigma_1} = \mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2,\sigma_2}$ sii $\gamma_1(\sigma_1\otimes\sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2\otimes\sigma_2)$ y, además, $q_1 - q_2 = q_{\sigma_1}^{\gamma_1} - q_{\sigma_2}^{\gamma_2}$. Teniendo en cuenta la identidad (20) y que $\gamma_1(\sigma_1\otimes\sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2\otimes\sigma_2)$, para cada $k \in \mathbf{I}$ se satisface que

$$\begin{aligned}q_{\sigma_2}^{\gamma_2}(k) &= -\kappa_{\gamma_2}(k) + \sigma_2(k)\sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma_2(k,s)\sigma_2(s) = -\kappa_{\gamma_2}(k) + \sigma_1(k)\sum_{s\in\mathbf{I}}\gamma_1(k,s)\sigma_1(s)\\ &= -\kappa_{\gamma_2}(k) + \kappa_{\gamma_1}(k) + q_{\sigma_1}^{\gamma_1}(k);\end{aligned}$$

es decir, $q_{\sigma_1}^{\gamma_1} - q_{\sigma_2}^{\gamma_2} = \kappa_{\gamma_2} - \kappa_{\gamma_1}$. $\square$

COROLARIO 3.11. *Consideremos* $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma(\mathbf{I})$ *dos conductancias sobre el camino,* σ_1, σ_2 *dos funciones de partición y* $q_1, q_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *dos potenciales. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Si* $\sigma_1 = \sigma_2$*, entonces* $\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1,\sigma_1} = \mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2,\sigma_2}$ *sii* $\gamma_1 = \gamma_2$ *y* $q_1 = q_2$.
(ii) *Si* $\gamma_1 = \gamma_2$*, entonces* $\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1,\sigma_1} = \mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2,\sigma_2}$ *sii* $\sigma_1 = \sigma_2$ *y* $q_1 = q_2$.
(iii) *Si el camino es semi–infinito o finito y* $q_1 = q_2$*, entonces* $\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1,\sigma_1} = \mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2,\sigma_2}$ *sii* $\sigma_1 = \sigma_2$ *y* $\gamma_1 = \gamma_2$.

Demostración. Recordemos que la Proposición 3.10 determina que $\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1,\sigma_1} = \mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2,\sigma_2}$ sii $\gamma_1(\sigma_1 \otimes \sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$ y, además, $q_1 - q_2 = \kappa_{\gamma_2} - \kappa_{\gamma_1}$.

(i) Si $\sigma_1 = \sigma_2$, la primera igualdad implica que $\gamma_1 = \gamma_2$, que a su vez implica que $\kappa_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_2}$ y, por tanto, que $q_1 = q_2$.

(ii) Si $\gamma_1 = \gamma_2$, entonces $\kappa_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_2}$ y, por tanto, $q_1 = q_2$. Por otra parte, la identidad $\gamma_1(\sigma_1 \otimes \sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$ implica que $\sigma_1 \otimes \sigma_1 = \sigma_2 \otimes \sigma_2$ o, equivalentemente, que $\sigma_2 = \lambda \sigma_1$ y, necesariamente, $\lambda = 1$ ya que $\sigma_1(0) = \sigma_2(0) = 1$.

(iii) Si $q_1 = q_2$, entonces $\kappa_{\gamma_1} = \kappa_{\gamma_2}$. Como en ambos casos, finito y semi–infinito, sabemos que $0 \in \delta(\mathbf{I})$, la igualdad $\kappa_{\gamma_1}(0) = \kappa_{\gamma_2}(0)$ es equivalente a la igualdad $\gamma_1(0,1) = \gamma_2(0,1)$. Entonces, evaluando la identidad $\gamma_1(\sigma_1 \otimes \sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$ en $(0,1)$, obtenemos que $\sigma_1(1) = \sigma_2(1)$ y, por tanto, evaluando ahora la identidad $\gamma_1(\sigma_1 \otimes \sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$ en $(1,0)$, resulta que $\gamma_1(1,0) = \gamma_2(1,0)$.

Sea $k \geq 0$ y supongamos que para cada $0 \leq j \leq k$ se satisface que

$$\gamma_1(j,j+1) = \gamma_2(j,j+1),\ \ \gamma_1(j+1,j) = \gamma_2(j+1,j),\ \ \sigma_1(j) = \sigma_2(j) \text{ y } \sigma_1(j+1) = \sigma_2(j+1).$$

Si $k+1 \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$, la igualdad $\kappa_{\gamma_1}(k+1) = \kappa_{\gamma_2}(k+1)$, junto con la hipótesis de inducción, implica que $\gamma_1(k+1,k+2) = \gamma_2(k+1,k+2)$. Evaluando la identidad $\gamma_1(\sigma_1 \otimes \sigma_1) = \gamma_2(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$ en $(k+1,k+2)$ y aplicando la hipótesis de inducción, obtenemos que $\sigma_1(k+2) = \sigma_2(k+2)$ y evaluando ahora la identidad en $(k+2,k+1)$, obtenemos que $\gamma_1(k+2,k+1) = \gamma_2(k+2,k+1)$. $\square$

4. Ecuaciones de Schrödinger en un camino

En esta sección reescribimos los resultados principales del Capítulo 1 en un marco funcional; es decir, en el lenguaje de los operadores de Schrödinger.

DEFINICIÓN 4.1. *Dado* $\mathcal{F}$ *un operador de Schrödinger generalizado, para cualquier* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *llamamos* ecuación de Poisson en $\mathbf{I}$ con dato f*, a la identidad* $\mathcal{F}(u) = -f$*. En particular, la ecuación* $\mathcal{F}(u) = 0$*, se denomina* ecuación de Poisson homogénea en $\mathbf{I}$.

Llamamos solución de la ecuación de Poisson*, respectivamente* solución de la ecuación de Poisson homogénea*, a cualquier función* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *que satisface* $\mathcal{F}(u) = -f$ *en* $\mathbf{I}$*, respectivamente* $\mathcal{F}(u) = 0$ *en* $\mathbf{I}$.

El análisis de las ecuaciones de Poisson cuando $\delta(\mathbf{I}) \neq \emptyset$, será abordado en secciones posteriores de este trabajo, en el marco del estudio de los *Problemas de Contorno*. En esta sección estaremos interesados en el siguiente problema.

DEFINICIÓN 4.2. *Dado* $\mathcal{F}$ *un operador de Schrödinger generalizado, para cualquier* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *llamamos* ecuación de Schrödinger en $\mathbf{I}$, asociada a $\mathcal{F}$ y con dato f*, a la identidad* $\mathcal{F}(u) = -f$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$*. En particular, la ecuación* $\mathcal{F}(u) = 0$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$*, se denomina* ecuación de Schrödinger homogénea, asociada a $\mathcal{F}$, en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Llamamos solución de la ecuación de Schrödinger, *respectivamente* solución de la ecuación de Schrödinger homogénea, *a cualquier función* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *que satisface* $\mathcal{F}(u) = -f$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$*, respectivamente* $\mathcal{F}(u) = 0$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$*. Si el potencial de* $\mathcal{F}$ *es nulo, entonces* $\mathcal{F}$ *es un Laplaciano generalizado y, entonces, las correspondientes ecuaciones se denominan* ecuaciones de Laplace *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Denotaremos por $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ *al conjunto de soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea asociada a* $\mathcal{F}$ *y llamaremos trivial a su solución nula. Por otro lado, para cualquier* $f \in \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$ *denotaremos por* $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}(f)$ *al conjunto de soluciones de la ecuación de Schrödinger asociada a* $\mathcal{F}$ *y con dato* f*. Si* $\mathcal{F} = \mathcal{L}_q^{\gamma,\sigma}$*,* $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ *será denotado por* $\mathcal{S}_q^{\gamma,\sigma}$ *y para cada* $f \in \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$*,* $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}(f)$ *será denotado por* $\mathcal{S}_q^{\gamma,\sigma}(f)$*.*

Nuestro próximo objetivo es relacionar las ecuaciones de Schrödinger y las ecuaciones en diferencias. Como muestra de esta relación, mencionamos la siguiente versión del Corolario 2.4 del Capítulo 1: El conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ es un espacio vectorial, mientras que para cualquier $f \in \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$ se verifica $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}(f) \neq \emptyset$ y dada $u \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}(f)$, se cumple $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}(f) = u + \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$.

Para nuestros propósitos será útil definir los siguientes conceptos.

DEFINICIÓN 4.3. *Consideremos* $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$ *y* $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$*. Denominaremos* coeficientes de la conductancia γ, respecto de la función de partición σ, *a las funciones* $a^{\gamma,\sigma}, c^{\gamma,\sigma} \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ *definidas como*

$$a^{\gamma,\sigma}(k) = \gamma(k,k+1)\sigma(k)\sigma(k+1) \;\; y \;\; c^{\gamma,\sigma}(k) = \gamma(k+1,k)\sigma(k)\sigma(k+1), \quad si \;\; k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\},$$

y como $a^{\gamma,\sigma}(n+1) = c^{\gamma,\sigma}(n)$ *y* $c^{\gamma,\sigma}(n+1) = a^{\gamma,\sigma}(n)$*, cuando* $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$*. Cuando* $\sigma = \varepsilon$*, omitiremos el superíndice relativo a* σ*.*

Para cada $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, denominaremos* coeficiente del potencial q, respecto de la conductancia γ, *a* $b_q^{\gamma} = q + \kappa_{\gamma}$.

Observar que la función de acompañamiento asociada a γ se expresa como

$$\rho_\gamma(k) = \left[\prod_{s=\min\{k,0\}}^{\max\{k,0\}-1} \frac{\gamma(s,s+1)}{\gamma(s+1,s)}\right]^{\mathfrak{s}(k)} = \left[\prod_{s=\min\{k,0\}}^{\max\{k,0\}-1} \frac{a^{\gamma,\sigma}(s)}{c^{\gamma,\sigma}(s)}\right]^{\mathfrak{s}(k)} = \left[\prod_{s=\min\{k,0\}}^{\max\{k,0\}-1} \frac{a^{\gamma}(s)}{c^{\gamma}(s)}\right]^{\mathfrak{s}(k)}, \quad k \in \mathbf{I}.$$

El siguiente resultado establece la relación entre las ecuaciones de Schrödinger y las ecuaciones en diferencias, y descubre un escenario funcional para estudiar este tipo de problemas.

PROPOSICIÓN 4.4. *Las ecuaciones de Schrödinger determinan todas las ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden e irreducibles y la misma relación se satisface para las correspondientes ecuaciones homogéneas. Además, si* $\mathcal{F}$ *es el operador de Schrödinger generalizado cuya ecuación de Schrödinger determina una ecuación en diferencias dada, la ecuación adjunta es la ecuación en diferencias determinada por* $\mathcal{F}^*$*.*

Demostración. Si $\mathcal{F}$ es un operador de Schrödinger generalizado, existen $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$ y $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tales que $\mathcal{F} = \mathcal{L}_q^{\gamma,\sigma}$, lo que significa que para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y cada $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_q^{\gamma,\sigma}(u)(k) &= \kappa_\gamma(k)u(k) - \sum_{s\in\mathbf{I}} \gamma(k,s)\sigma(k)\sigma(s)u(s) + q(k)u(k)\\ &= b_q^{\gamma}(k)u(k) - a^{\gamma,\sigma}(k)u(k+1) - c^{\gamma,\sigma}(k-1)u(k-1),\end{aligned}$$

que implica que la ecuación de Schrödinger $\mathcal{L}_q^{\gamma,\sigma}(u) = -f$ es la ecuación en diferencias lineal, de segundo orden e irreducible:

$$a^{\gamma,\sigma}(k)u(k+1) - b_q^{\gamma}(k)u(k) + c^{\gamma,\sigma}(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\,.$$

Recíprocamente, consideremos $a, b, c \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tales que $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y, además, $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$ cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, y la ecuación en diferencias irreducible y de segundo orden

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\,.$$

La anterior ecuación es equivalente a

$$a(k)\big(u(k)-u(k+1)\big) + \big(b(k)-a(k)-c(k-1)\big)u(k) + c(k-1)\big(u(k)-u(k-1)\big) = -f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\,.$$

Por tanto, si definimos $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $\gamma\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$q(k) = \begin{cases} b(0)-a(0), & \text{si } k = 0,\\ b(k)-a(k)-c(k-1), & \text{si } k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},\\ b(n+1)-c(n), & \text{si } k = n+1 \in \delta(\mathbf{I}); \end{cases} \qquad \gamma(k,s) = \begin{cases} a(k), & \text{si } s = k+1,\\ c(k-1), & \text{si } s = k-1,\\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

entonces la ecuación en diferencias coincide con la ecuación de Schrödinger $\mathcal{L}_q^{\gamma}(u) = -f$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Aplicando el resultado de la Proposición 1.10, tenemos que $(\mathcal{L}_q^{\gamma})^* = \mathcal{L}_{q+p_\gamma}^{\gamma^*}$, cuyos coeficientes están determinados por las identidades

$$\begin{aligned} a^{\gamma^*}(k) &= \gamma^*(k,k+1) = \gamma(k+1,k) = c^{\gamma}(k), && k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\},\\ c^{\gamma^*}(k) &= \gamma^*(k+1,k) = \gamma(k,k+1) = a^{\gamma}(k), && k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\},\\ b_{q+p_\gamma}^{\gamma^*}(k) &= q(k) + p_\gamma(k) + \kappa_{\gamma^*}(k) = q(k) + \kappa_\gamma(k) = b_q^{\gamma}(k), && k \in \mathbf{I}, \end{aligned}$$

y por $a^{\gamma^*}(n+1) = c^{\gamma^*}(n) = a^{\gamma}(n) = c^{\gamma}(n+1)$ y $c^{\gamma^*}(n+1) = a^{\gamma^*}(n) = c^{\gamma}(n) = a^{\gamma}(n+1)$, cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, que resultan ser los coeficientes de la ecuación adjunta a la de coeficientes a, b, c. $\square$

Ahora podemos reproducir los principales resultados respecto existencia y unicidad de las soluciones para las ecuaciones en diferencias dados en la Proposición 2.2 y el Corolario 2.3 del Capítulo 1 en términos de las ecuaciones de Schrödinger.

PROPOSICIÓN 4.5. *Si $\mathcal{F}$ es un operador de Schrödinger generalizado,* $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{F}} = 2$ *y dados* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *y* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$*, para cualquier* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, existe una única* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *tal que* $\mathcal{F}(u) = -f$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *y, además,* $u(m) = x_0$*,* $u(m+1) = x_1$*. En particular, si* $\mathcal{F}(u) = 0$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$*, entonces* $u = 0$ *sii existe* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ *tal que* $u(m) = u(m+1) = 0$.

Si denotamos por $\mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$ al espacio de funciones con soporte en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ y consideramos $\mathcal{F}$ un operador de Schrödinger generalizado, entonces $\mathcal{F}$ determina el homomorfismo $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$ que a cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ le asigna la restricción de $\mathcal{F}(u)$ a $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

La existencia de soluciones de la ecuación de Schrödinger descrita en la Proposición 4.5, implica que el homomorfismo anterior es sobreyectivo y, por otra parte, su núcleo coincide con $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ que no es más que el espacio de soluciones de la correspondiente ecuación homogénea.

Para cada $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ consideraremos el subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\mathbf{I})$ definido como

$$\mathcal{V}_m = \big\{u \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) : u(m) = u(m+1) = 0\big\}.$$

LEMA 4.6. *Si $\mathcal{F}$ es un operador de Schrödinger generalizado, entonces para cada $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ se satisface que*

$$\mathcal{C}(\mathbf{I}) = \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \oplus \mathcal{V}_m$$

y, por tanto, $\mathcal{F}\colon \mathcal{V}_m \longrightarrow \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$ es un isomorfismo.

Demostración. La unicidad de solución de cada problema de valores iniciales para la ecuación de Schrödinger; es decir, la última parte de la Proposición 4.5 determina que $\mathcal{S}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$.

Si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y consideramos $f = -\mathcal{F}(u)_{|\overset{\circ}{\mathbf{I}}}$, $x_0 = u(m)$ y $x_1 = u(m+1)$, entonces u es la única solución de la ecuación de Schrödinger $\mathcal{F}(u) = -f$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ que satisface que $u(m) = x_0$ y $u(m+1) = x_1$. El Principio de Superposición, Proposición 4.1 del Capítulo 1, determina que $u = z+v$, donde $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ y $v \in \mathcal{V}_m$. □

DEFINICIÓN 4.7. *Si $\mathcal{F}$ es un operador de Schrödinger generalizado, para cada $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ denominaremos* operador de Green del problema de valores iniciales en m *al operador* $\mathcal{G}_m = \big(\mathcal{F}_{|\mathcal{V}_m}\big)^{-1}$.

Si consideramos $g\colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de Green del problema de valores iniciales para la ecuación en diferencias cuyos coeficientes son los coeficientes del operador $\mathcal{F}$, entonces para cada $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ tenemos que

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{G}_m\colon & \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}}) & \longrightarrow & \mathcal{V}_m \\ & f & \longrightarrow & \displaystyle\int_m^k g(k,s)\, f(s)\, ds. \end{array} \tag{26}$$

Observar que, tanto en el caso infinito como en el semi–infinito, cada operador de Green $\mathcal{G}_m$ no es local: Si $u = \mathcal{G}_m(f) \in \mathcal{C}_0(\mathbf{I})$, entonces $u(k) = u(k+1) = 0$ para algún $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, lo que implicaría que $u = 0$ y, por tanto, que $f = 0$.

Por otra parte, en cualquier caso, infinito, semi–infinito o finito, como fijado $k \in \mathbf{I}$, sabemos que $g(k,\cdot)$ es solución de la ecuación homogénea, por la misma razón anterior, resulta que $g(k,\cdot)$ no puede anularse en dos índices consecutivos. En definitiva, mientras que los operadores de Schrödinger generalizados son locales, lo que es coherente con ser el análogo de un operador diferencial, sus correspondientes operadores de Green no lo son, y representan el análogo discreto de operadores integrales, de hecho, de operadores de Volterra de primera especie, cuyo núcleo es el opuesto a la función de Green del problema de valores iniciales.

La relación entre la función de Green para el problema de valores iniciales y la correspondiente a la ecuación adjunta, determina que dado $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{G}^*_m\colon & \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}}) & \longrightarrow & \mathcal{V}_m \\ & f & \longrightarrow & -\displaystyle\int_m^k g(s,k)\, f(s)\, ds \end{array} \tag{27}$$

y, en particular, que $\mathcal{G}_m$ es autoadjunto sii g es antisimétrica.

5. Ecuaciones de Schrödinger con potenciales de Doob

En esta sección abordaremos la resolución de las ecuaciones de Schrödinger en el caso especial en el que el potencial es un potencial de Doob. Equivalentemente, resolveremos un tipo específico de ecuaciones en diferencias lineales e irreducibles de segundo orden, para las cuales hay una relación concreta entre el coeficiente b y los coeficientes a y c.

En la sección consideraremos fijada una conductancia $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y, también, la función $\zeta_\omega^\gamma \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ definida como

$$\zeta_\omega^\gamma(k) = \int_0^k \frac{ds}{\rho_\gamma(s-1)\gamma(s-1,s)\omega(s-1)\omega(s)}, \quad k \in \mathbf{I}. \tag{28}$$

Consideraremos también la correspondiente función de acompañamiento de γ; es decir,

$$\rho_\gamma(k) = \left[\prod_{s=\min\{k,0\}}^{\max\{k,0\}-1} \frac{\gamma(s,s+1))}{\gamma(s+1,s)}\right]^{\mathfrak{s}(k)}, \quad k \in \mathbf{I}.$$

Nuestra intención en esta sección es, para cada $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$, resolver la ecuación de Schrödinger $\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma;\sigma}(u) = -f$ en $\mathring{\mathbf{I}}$, donde $f \in \mathcal{C}(\mathring{\mathbf{I}})$. De acuerdo con los resultados previos, es preciso determinar previamente una base de soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea y, entonces, construir la función de Green para el problema de valores iniciales, correspondiente a la ecuación en diferencias equivalente a la ecuación de Schrödinger dada.

Proposición 5.1. *Para cada $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathbf{I})$ el conjunto $\{\sigma\omega, \sigma\omega\zeta_\omega^\gamma\}$ es una base de soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea*

$$\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma;\sigma}(u) = 0, \quad \textit{en } \mathring{\mathbf{I}}.$$

Demostración. Observemos primero que

$$\zeta_\omega^\gamma(0) = 0 \ \text{ y } \ \zeta_\omega^\gamma(1) = \frac{1}{\gamma(0,1)\omega(0)\omega(1)},$$

lo que implica que $w[\sigma\omega, \sigma\omega\zeta_\omega^\gamma](0) = \sigma(1)\gamma(0,1)^{-1}$, de manera que si $\sigma\omega$ y $\sigma\omega\zeta_\omega^\gamma$ son soluciones de la ecuación de Schrödinger en $\mathring{\mathbf{I}}$, necesariamente son base de soluciones.

Por otra parte, aplicando la Proposición 3.8 y, posteriormente, la Transformación de Doob resulta que

$$\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma,\sigma} = \mathcal{L}_{q_{\sigma\omega}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)}}^{\gamma(\sigma\otimes\sigma)} = \mathcal{D}_{\sigma\omega}^{-1} \circ \mathcal{L}^{\gamma(\omega\otimes\omega)} \circ \mathcal{D}_{\sigma\omega}^{-1},$$

donde hemos hecho uso de la identidad $\gamma(\sigma\otimes\sigma)(\sigma\omega\otimes\sigma\omega) = \gamma(\omega\otimes\omega)$, puesto que $\sigma^2 = \varepsilon$. Por tanto, $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ satisface que $\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma;\sigma}(u) = 0$ en $\mathring{\mathbf{I}}$ sii $u = \sigma\omega v$, donde $v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ satisface que $\mathcal{L}^{\gamma(\omega\otimes\omega)}(v) = 0$ en $\mathring{\mathbf{I}}$ o, equivalentemente,

$$0 = \check{\gamma}(k,k+1)\big(v(k) - v(k+1)\big) + \check{\gamma}(k-1,k)\big(v(k) - v(k-1)\big), \quad k \in \mathring{\mathbf{I}},$$

donde $\check{\gamma}(k,s) = \rho_\gamma(k)\gamma(k,s)\omega(k)\omega(s)$, para cada $k, s \in \mathbf{I}$.

Si definimos $\Phi \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ como $\Phi(k) = \check{\gamma}(k,k+1)\big(v(k) - v(k+1)\big)$ para cualquier $k \in \mathring{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y por $\Phi(n+1) = \Phi(n)$ cuando $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$, entonces la ecuación anterior se expresa como

$$\Phi(k) - \Phi(k-1) = 0, \quad k \in \mathring{\mathbf{I}}.$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que Φ es constante y, por tanto, que existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que $\Phi(k) = -\beta$ para cada $k \in \mathbf{I}$ o, equivalentemente,

$$v(k) - v(k+1) = -\frac{\beta}{\check{\gamma}(k,k+1)}, \quad k \in \mathbf{I};$$

es decir,

$$v(k) - v(k-1) = \frac{\beta}{\check{\gamma}(k-1,k)}, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} .$$

Aplicando nuevamente el Teorema Fundamental del Cálculo, resulta que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$v(k) = \alpha + \beta \int_0^k \frac{ds}{\check{\gamma}(s-1,s)} = \alpha + \beta \int_0^k \frac{ds}{\rho_\gamma(s-1)\gamma(s-1,s)\omega(s-1)\omega(s)}, \quad k \in \mathbf{I},$$

y, por tanto, $u = \alpha\sigma\omega + \beta\sigma\omega\zeta_\omega^\gamma$. □

COROLARIO 5.2. *Si el camino es finito o semi–infinito, entonces $\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma,\sigma}(u) = 0$ en $\mathbf{I}$ sii $u = \alpha\sigma\omega$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Si $\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma,\sigma}(u) = 0$ en $\mathbf{I}$, entonces u es solución de la ecuación de Schrödinger en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ y, por tanto, $u = \sigma\omega\big[\alpha + \beta\zeta_\omega^\gamma\big]$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En consecuencia, como $u(0) = \alpha\omega(0)$ y $u(1) = \sigma(1)\Big[\alpha\omega(1) + \dfrac{\beta}{\gamma(0,1)\omega(0)}\Big]$, resulta que

$$\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma,\sigma}(u)(0) = \frac{\gamma(0,1)}{\omega(0)}\big(\omega(1)u(0) - \sigma(1)\omega(0)u(1)\big) = -\frac{\beta}{\omega(0)},$$

de manera que $\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma,\sigma}(u)(0) = 0$ sii $\beta = 0$ y, por tanto, sii $u = \alpha\sigma\omega$. El Corolario 3.9, determina que si $n+1 \in \delta(\mathbf{I})$ también se satisface que $\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma,\sigma}(u)(n+1) = 0$. □

Teniendo presente la Fórmula de Lagrange, podemos caracterizar completamente las soluciones de las ecuaciones de Schrödinger con potenciales de Doob.

TEOREMA 5.3. *Para cada $\sigma \in \mathcal{C}^P(\mathrm{I})$ la función de Green para la ecuación en diferencias equivalente a la ecuación de Schrödinger en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ está determinada por la identidad*

$$g(k,s) = \sigma(k)\omega(k)\sigma(s)\omega(s)\rho_\gamma(s) \int_{s-1}^{k-1} \frac{dt}{\rho_\gamma(t)\gamma(t,t+1)\omega(t)\omega(t+1)}, \quad k,s \in \mathbf{I}.$$

Por tanto, dados $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, la única solución del problema de valor inicial

$$\mathcal{L}_{q_\omega^\gamma}^{\gamma,\sigma}(u) = -f \ \text{en}\ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \ \ u(m) = x_0, \ u(m+1) = x_1,$$

está dada por

$$\begin{aligned} u(k) = \sigma(k)\omega(k)\Bigg[& x_1 \frac{\sigma(m+1)}{\omega(m+1)} \\ &+ \rho_\gamma(m)\gamma(m,m+1)\big(x_1\sigma(m+1)\omega(m) - x_0\sigma(m)\omega(m+1)\big) \int_m^{k-1} \frac{dt}{\rho_\gamma(t)\gamma(t,t+1)\omega(t)\omega(t+1)} \\ &+ \int_m^k \left(\sigma(s)\omega(s)\rho_\gamma(s)f(s) \int_{k-1}^{s-1} \frac{dt}{\rho_\gamma(t)\gamma(t,t+1)\omega(t)\omega(t+1)}\right) ds\Bigg], \quad k \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Demostración. Como $\{\sigma\omega, \sigma\omega\zeta_\omega^\gamma\}$ es una base de soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea, y teniendo en cuenta que $\rho_\gamma(s)a^{\gamma,\sigma}(s)w[\sigma\omega, \sigma\omega\zeta_\omega^\gamma](s)$ es constante, por la Proposición 4.4 del Capítulo 1 obtenemos que

$$\begin{aligned} g(k,s) &= \frac{\rho_\gamma(s)}{\gamma(0,1)\sigma(1)w[\sigma\omega,\sigma\omega\zeta_\omega^\gamma](0)}\Big[\sigma(s)\omega(s)\sigma(k)\omega(k)\zeta_\omega^\gamma(k) - \sigma(s)\omega(s)\zeta_\omega^\gamma(s)\sigma(k)\omega(k)\Big] \\ &= \sigma(k)\omega(k)\sigma(s)\omega(s)\rho_\gamma(s)\int_s^k \frac{dt}{\rho_\gamma(t-1)\gamma(t-1,t)\omega(t-1)\omega(t)} \\ &= \sigma(k)\omega(k)\sigma(s)\omega(s)\rho_\gamma(s)\int_{s-1}^{k-1} \frac{dt}{\rho_\gamma(t)\gamma(t,t+1)\omega(t)\omega(t+1)}. \end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando el Corolario 2.7 del Capítulo 1 resulta que la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ que satisface las condiciones iniciales es

$$\begin{aligned} z(k) =& \rho_\gamma(m)\gamma(m,m+1)\sigma(k)\omega(k)\Big[x_0\sigma(m)\omega(m+1)\zeta_\omega^\gamma(m+1) - x_1\sigma(m+1)\omega(m)\zeta_\omega^\gamma(m) \\ &+ \big(x_1\sigma(m+1)\omega(m) - x_0\sigma(m)\omega(m+1)\big)\zeta_\omega^\gamma(k)\Big] \\ =& \rho_\gamma(m)\gamma(m,m+1)\sigma(k)\omega(k)\Big[x_0\sigma(m)\omega(m+1)\big(\zeta_\omega^\gamma(m+1) - \zeta_\omega^\gamma(k)\big) \\ &+ x_1\sigma(m+1)\omega(m)\big(\zeta_\omega^\gamma(k) - \zeta_\omega^\gamma(m)\big)\Big] \\ =& \rho_\gamma(m)\gamma(m,m+1)\sigma(k)\omega(k)\Big[\big(x_1\sigma(m+1)\omega(m) - x_0\sigma(m)\omega(m+1)\big)\big(\zeta_\omega^\gamma(k) - \zeta_\omega^\gamma(m+1)\big) \\ &+ \frac{x_1\sigma(m+1)\omega(m)}{\rho_\gamma(m)\gamma(m,m+1)\omega(m)\omega(m+1)}\Big], \qquad k \in \mathbf{I}. \end{aligned}$$

El resultado se concluye con la aplicación del Principio de Superposición. □

Concluiremos esta sección analizando cuándo los potenciales de Doob, respecto de la conductancia γ, están caracterizados por la función $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ que los determina, una cuestión que dejamos pendiente cuando introdujimos estos potenciales.

COROLARIO 5.4. *Si $\mu \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, entonces $q_\mu^\gamma = q_\omega^\gamma$ sii $\mu = \big[\alpha + \beta\zeta_\omega^\gamma\big]\omega$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y, además, se satisface una de las condiciones siguientes.*

(i) *Si $0 \in \delta(\mathbf{I})$; es decir, cuando el camino es finito o semi–infinito, necesariamente $\beta = 0$.*

(ii) *Si $0 \notin \delta(\mathbf{I})$; es decir, cuando el camino es infinito o bien $\beta = 0$ o bien $\beta \neq 0$ y $-\alpha\beta^{-1} \notin \zeta_\omega^\gamma(\mathbb{Z})$.*

Demostración. Basta aplicar la Proposición 5.1 y el Corolario 5.2 a la Identidad (21). □

Observar que cuando $\mathbf{I} = \mathbb{Z}$, como $\zeta_\omega^\gamma(\mathbb{Z}) = \{\zeta_\omega^\gamma(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es numerable, siempre existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta \neq 0$ tales que $-\alpha\beta^{-1} \notin \zeta_\omega^\gamma(\mathbb{Z})$.

La ambigüedad que se muestra en la caracterización del potencial de Doob a partir de la función $\omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ que lo determina, puede evitarse normalizando ω. En el caso del camino finito es habitual tomar funciones unitarias respeto de la norma inducida por el producto interno (16). Tal y como comentamos en su momento, esa normalización no es en general posible cuando el camino es semi infinito o infinito, motivo por lo que normalizaremos las funciones imponiendo que $\omega(0) = 1$ cuando $0 \in \delta(\mathbf{I})$, es decir, cuando el camino es o bien finito o bien semi infinito, o que $\omega(0) = \omega(1) = 1$ cuando $0 \notin \delta(\mathbf{I})$; es decir, cuando el camino sea infinito.

Supongamos $\mu, \omega \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ son tales que $q_\mu^\gamma = q_\omega^\gamma$, $\mu(0) = \omega(0) = 1$ y, además, $\mu(1) = \omega(1) = 1$ cuando $0 \notin \delta(\mathbf{I})$. Entonces, si $0 \in \delta(\mathbf{I})$, necesariamente $\mu = \alpha\omega$ y, por tanto, $\mu = \omega$, mientras que si $0 \notin \delta(\mathbf{I})$, necesariamente $\mu = \big[\alpha + \beta\zeta_\omega^\gamma\big]\omega$ y, por tanto, $\alpha = 1$ y, además, $1 = \alpha + \beta\zeta_\omega^\gamma(1) = 1 + \beta\zeta_\omega^\gamma(1)$, lo que implica que $\beta = 0$.

Obviamente, un operador de Schrödinger generalizado cuyo potencial es un potencial de Doob coincide con el Laplaciano combinatorio si y solo si el potencial es nulo. A continuación hacemos una relectura del Corolario anterior para describir cuándo se verifica esta propiedad.

COROLARIO 5.5. *Un potencial de Doob, respecto de γ, es nulo en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ sii está determinado por $\omega = \alpha + \beta\sigma$ donde $|\alpha| + |\beta| > 0$ y $-\beta^{-1}\alpha \notin \zeta_\omega^\gamma(\mathbf{I})$ cuando $\beta \neq 0$. Además, cuando $0 \in \delta(\mathbf{I})$, el potencial es nulo en $\mathbf{I}$ sii $\beta = 0$; es decir, sii ω es constante.*

Capítulo 3

Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes

1. Caracterización y ejemplos de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes

En este capítulo nos centraremos en el estudio de la Ecuación (4) cuando sus coeficientes son constantes y, en consecuencia, $\mathbf{I} = \mathbb{Z}$. Por supuesto, siempre asumimos que la ecuación es irreducible. Naturalmente, si consideramos la ecuación de Schrödinger equivalente a (4), entonces la hipótesis de coeficientes constantes es equivalente a considerar que el potencial q es constante y que la conductancia γ es constante en el sentido de que existen $a^\gamma, b^\gamma, c^\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma(k, k+1) = a^\gamma$, $\gamma(k+1, k) = c^\gamma$ y $q = b^\gamma - \kappa_\gamma$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Nótese que cuando los coeficientes de la ecuación homogénea asociada con la Ecuación (4) son constantes, entonces u es una solución de la ecuación

$$a_0 u(k+1) - b_0 u(k) + c_0 u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $b_0 \in \mathbb{R}$ y $a_0, c_0 \in \mathbb{R}^*$ si y solo si para cualquier $a \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ u es una solución de la ecuación

$$a(k)a_0 u(k+1) - a(k)b_0 u(k) + a(k)c_0 u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

El razonamiento precedente motiva la siguiente definición que identifica las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes con sus ecuaciones equivalentes con coeficientes variables.

DEFINICIÓN 1.1. *Consideramos $a, b, c \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ tales que $a(k), c(k) \neq 0$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, la ecuación en diferencias irreducible homogénea*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y el espacio de sus soluciones $\mathcal{S}$. Entonces, la ecuación anterior tiene coeficientes constantes *cuando se verifica la siguiente propiedad: $u \in \mathcal{S}$ sii*

$$a(0)u(k+1) - b(0)u(k) + c(0)u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tras la definición anterior, estamos preparados para caracterizar las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes en términos de las traslaciones de sus soluciones. Específicamente, dada $v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ para cualquier $s \in \mathbb{Z}$ consideramos su *s–traslación*; es decir, $v_s \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ definida como $v_s(k) = v(k+s)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 1.2. *Consideramos $a, b, c \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ tales que $a(k), c(k) \neq 0$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, la ecuación en diferencias irreducible homogénea*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y el espacio de sus soluciones $\mathcal{S}$. Entonces, la ecuación tiene coeficientes constantes sii para cualquier $v \in \mathcal{S}$, se satisface $v_s \in \mathcal{S}$ para cualquier $s \in \mathbb{Z}$.

Demostración. En primer lugar, recordemos que $v \in \mathcal{S}$ sii

$$v(k+1) = \frac{b(k)}{a(k)} v(k) - \frac{c(k-1)}{a(k)} v(k-1), \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z}.$$

Si suponemos que para cualquier $v \in \mathcal{S}$ su (-1)–traslación satisface $v_{-1} \in \mathcal{S}$, entonces

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v_{-1}(k+2) &&= \frac{b(k+1)}{a(k+1)}\, v_{-1}(k+1) - \frac{c(k)}{a(k+1)}\, v_{-1}(k) = \\ & &&= \frac{b(k+1)}{a(k+1)}\, v(k) - \frac{c(k)}{a(k+1)}\, v(k-1), \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$0 = v(k)\left[\frac{b(k+1)}{a(k+1)} - \frac{b(k)}{a(k)}\right] + v(k-1)\left[\frac{c(k-1)}{a(k)} - \frac{c(k)}{a(k+1)}\right], \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z}.$$

Consideramos $m \in \mathbb{Z}$ y $u, z \in \mathcal{S}$ caracterizados por satisfacer $u(m-1) = 1$, $u(m) = 0$, $z(m-1) = 0$ y $z(m) = 1$, respectivamente. Entonces, aplicando la identidad anterior obtenemos que

$$0 = \frac{b(m+1)}{a(m+1)} - \frac{b(m)}{a(m)} = \frac{c(m-1)}{a(m)} - \frac{c(m)}{a(m+1)}$$

y, por tanto, $b(k) = \dfrac{b(0)}{a(0)}\, a(k)$ y $c(k) = \dfrac{c(-1)}{a(0)}\, a(k+1)$. En consecuencia, existe $b_0 \in \mathbb{R}$ y $c_0 \in \mathbb{R}^*$ tales que $b(k) = b_0 a(k)$, $c(k) = c_0 a(k+1)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Puesto que $v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ obtenemos que

$$a(k)v(k+1) - b(k)v(k) + c(k-1)v(k-1) = a(k)\big[v(k+1) - b_0 v(k) + c_0 v(k-1)\big], \qquad k \in \mathbb{Z},$$

y, entonces, $v \in \mathcal{S}$ sii $v(n+1) - b_0 v(n) + c_0 v(n-1) = 0$ para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Tomando $n = k+s$ obtenemos que $v \in \mathcal{S}$ sii $v_s \in \mathcal{S}$. $\square$

Una de las consecuencias inmediatas del resultado anterior es que para conocer la única solución de cada problema de valores iniciales de una ecuación de Schrödinger homogénea que satisface las hipótesis precedentes, basta resolver el mismo problema de valores iniciales en $k = 0$ y $k = 1$. Desde otro punto de vista, la ecuación de Schrödinger puede considerarse como el homólogo discreto de una ecuación diferencial autónoma.

COROLARIO 1.3. *Supongamos que existen $q_0 \in \mathbb{R}$ y $a_0, k > 0$ tales que $a^\gamma(n) = a_0 k^n$ y $q(n) = q_0 k^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. En particular, fijados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, si $v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea que satisface que $v(0) = x_0$ y $v(1) = x_1$, entonces para cada $s \in \mathbb{Z}$, la función definida como $z(n) = v(n-s)$, $n \in \mathbb{Z}$, es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea que satisface que $z(s) = x_0$ y $z(s+1) = x_1$.*

Si tenemos en cuenta la definición de la función de Green para los problemas de valor inicial, resulta que con las hipótesis anteriores es muy sencillo determinar tal función.

DEFINICIÓN 1.4. *Supongamos que existen $q_0 \in \mathbb{R}$ y $a_0, k > 0$ tales que $a^\gamma(n) = a_0 k^n$ y $q(n) = q_0 k^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea tal que $\phi(0) = 0$ y $\phi(1) = 1$ se denomina* Solución Fundamental de la Ecuación de Schrödinger.

COROLARIO 1.5. *Supongamos que existen $q_0 \in \mathbb{R}$ y $a_0, k > 0$ tales que $a^\gamma(n) = a_0 k^n$ y $q(n) = q_0 k^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos ϕ la solución fundamental de la ecuación de Schrödinger. Entonces, la función de Green del problema de valores iniciales cuyos coeficientes son los del operador de Schrödinger es $g_q(n,s) = \dfrac{1}{a_0 k^s}\, \phi(n-s)$.*

Finalizamos esta sección con el análogo discreto de la *Fórmula de Lagrange para ecuaciones lineales de segundo orden y con coeficientes constantes*.

TEOREMA 1.6. *Supongamos que existen $q_0 \in \mathbb{R}$ y $a_0, k > 0$ tales que $a^\gamma(n) = a_0 k^n$ y $q(n) = q_0 k^n$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos ϕ la solución fundamental de la ecuación de Schrödinger y $\{z, v\}$ una base de soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea. Dados $m \in \mathbb{Z}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, entonces $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ definida para cada $n \in \mathbb{Z}$ como*

$$\begin{aligned} u(n) = \; & \frac{1}{w[z,v](m)}\Big[\Big(x_0 v(m+1) - x_1 v(m)\Big) z(n) + \Big(x_1 z(m) - x_0 z(m+1)\Big) v(n)\Big] \\ & + \frac{1}{a_0}\int_m^n \phi(n-s) k^{-s} f(s) ds, \end{aligned}$$

es la única función de $\mathcal{C}(\mathbb{Z})$ que satisface $\mathcal{L}_q^\gamma(u) = -f$ y $u(m) = x_0$, $u(m+1) = x_1$.

A partir del Teorema 7.5 del Capítulo 1, la Fórmula de Lagrange obtenida puede escribirse en términos de g_q la función de Green y, por tanto, también en función de ϕ la solución fundamental de la ecuación de Schrödinger

$$\begin{aligned} u(n) &= \frac{x_1}{g_q(m+1,m)}\, g_q(n,m) + \frac{x_0}{g_q(m,m+1)}\, g_q(n,m+1) + \int_m^n g_q(n,s) f(s) ds \\ &= \frac{x_1}{\phi(1)}\, \phi(n-m) + \frac{x_0}{\phi(-1)}\, \phi(n-m-1) + \frac{1}{a_0}\int_m^n \phi(n-s) k^{-s} f(s) ds. \end{aligned}$$

Las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes aparecen frecuentemente en muchas aplicaciones, principalmente relacionadas con una clase especial de polinomios ortogonales que analizaremos en una próxima sección. Finalizamos ésta presentando a continuación algunas ecuaciones con coeficientes constantes de tipo especial. Por ejemplo, cuando la Ecuación (4) tiene coeficientes constantes y es autoadjunta, es decir, cuando c = a, entonces se denomina ecuación de Chebyshev. Por otro lado, cuando c=-a, entonces la Ecuación (4) con coeficientes constantes se denomina ecuación de Fibonacci.

A las ecuaciones de Chebyshev les dedicamos en próximas secciones un estudio pormenorizado, pero adelantamos aquí algunas de sus características que nos permitirán presentar algunos ejemplos más de ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes.

Una *sucesión de Chebyshev* es una sucesión de polinomios $\{Q_n(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ que satisface la recurrencia

$$Q_{n+1}(x) = 2xQ_n(x) - Q_{n-1}(x), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

La recurrencia (29) es una ecuación en diferencias de segundo orden, en concreto, la ecuación de Chebyshev que hemos mencionado arriba, y sus coeficientes son constantes en el sentido de que no dependen de n. Además esta recurrencia muestra que cualquier sucesión de Chebyshev está unívocamente determinada por la elección de los correspondientes polinomios de orden cero y orden uno, Q_0 y Q_1 respectivamente. En particular, las sucesiones $\{T_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ y $\{U_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ denotan *los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie* y se obtienen cuando se elige $T_0(x) = U_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $U_1(x) = 2x$.

De hecho, la recurrencia de Chebyshev (29) abarca todas las recurrencias de segundo orden con coeficientes constantes, véase [**2**], tal como abordaremos más detalladamente en la penúltima sección de este capítulo. No obstante, podemos considerar otras recurrencias particulares, como los *números de Horadam* $\{H_n(r,s)\}_{n=0}^{\infty}$, donde $r, s \in \mathbb{R}$ y $s \neq 0$, definidos como la solución de la recurrencia

$$H_{n+2} = rH_{n+1} + sH_n, \quad H_0 = 0, \;\; H_1 = 1,$$

y que, además, están relacionados con otras sucesiones notables. Nótese que para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n(1,1) = F_n$, el enésimo *número de Fibonacci*, $H_n(2,1) = P_n$, el enésimo *número de Pell*, $H_n(1,2) = J_n$, el enésimo *número de Jacobsthal*, y $H_n(2,-1) = U_{n-1}(1) = n$.

2. Ecuaciones en diferencias de segundo orden autoadjuntas con coeficientes constantes

La ecuación en diferencias autoadjunta asociada a (4) con coeficientes $a, b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, donde $a(k) \neq 0$ para cualquier $k \in \mathbf{I}$, se denomina *ecuación en diferencias con coeficientes constantes* cuando $\mathbf{I} = \mathbb{Z}$ y las funciones a y b son constantes; es decir, cuando existen $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$, tales que para cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, la ecuación autoadjunta asociada a (4) se expresa como

$$a\, u(k+1) - b\, u(k) + a\, u(k-1) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{30}$$

Equivalentemente, si consideramos $q = 2a - b$, entonces para cualquier dato $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, la Ecuación (30) puede reescribirse como

$$-a\big(u(k) - u(k+1)\big) - a\big(u(k) - u(k-1)\big) + q\, u(k) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{31}$$

y, por tanto, puede considerarse como la ecuación de Schrödinger en el camino infinito con coeficientes y potencial constantes.

NOTA 2.1. En ese caso, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, la positividad del coeficiente a; es decir, que $a > 0$ y, por consiguiente, la ecuación anterior viene dada por el operador de Schrödinger en sentido estricto.

En esta sección consideramos fijados $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $a > 0$, y la ecuación en diferencias homogénea $a\, u(k+1) - b\, u(k) + a\, u(k-1) = 0$. Naturalmente, si consideramos el valor $p = \dfrac{b}{2a}$, entonces $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la anterior ecuación en diferencias homogénea si y solo si satisface que

$$u(k+1) = 2p\, u(k) - u(k-1), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{32}$$

Y por esa razón denotamos por $\mathcal{S}_p$ al espacio de sus soluciones.

LEMA 2.2. *Si $u \in \mathcal{S}_p$, entonces para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ se satisface que*

$$\frac{1}{2}\big[u(k) - u(k-2)\big] = u(k) - p\, u(k-1) = p\, u(k-1) - u(k-2).$$

El siguiente resultado, cuya demostración se obtiene de forma directa, aplica la propiedad característica de las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes mostrada en la Proposición 1.2, que es la clave para el análisis de este tipo de ecuaciones.

PROPOSICIÓN 2.3. *Dada $u \in \mathcal{S}_p$, entonces para cualquier $s \in \mathbb{Z}$, la función $v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ dada por $v(k) = u(k-s)$ satisface que $v \in \mathcal{S}_p$. En particular, fijados $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, la única solución del problema de valor inicial*

$$2p\, v(k) - v(k-1) - v(k+1) = 0, \quad v(m) = x_0, \;\; v(m+1) = x_1,$$

viene dada por $v(k) = u(k-m)$, donde $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es la única solución del problema de valor inicial

$$2p\, u(k) - u(k-1) - u(k+1) = 0, \quad u(0) = x_0, \;\; u(1) = x_1.$$

Visto que la propiedad anterior caracteriza las ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes, la peculiaridad de ser autoadjunta queda determinada por cumplirse $u(k-m) \in \mathcal{S}_p$ para cualquier $u \in \mathcal{S}_p$ y cualquier $m \in \mathbb{Z}$.

COROLARIO 2.4. *Se consideran $u, v \in \mathcal{S}_p$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. Entonces,*

$$u(n)v(n+1+m) - u(n+1)v(n+m) = u(0)v(m+1) - u(1)v(m).$$

En particular,

$$u(n)v(n) - u(n+1)v(n-1) = u(0)v(0) - u(1)v(-1)$$

y, por tanto,

$$u(n)^2 - u(n+1)u(n-1) = u(0)^2 - u(1)u(-1).$$

Demostración. Si consideramos $z \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ dada por $z(k) = v(k+m)$, entonces $z \in \mathcal{S}_p$ y, por tanto,

$$u(0)v(m+1) - u(1)v(m) = w[u, z](0) = w[u, z](n) = u(n)v(n+1+m) - u(n+1)v(n+m).$$

La segunda hipótesis se obtiene tomando $m = -1$ y la última ecuación, imponiendo además $v = u$. □

A la vista de la Proposición 2.3, introducimos el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 2.5. *La única solución del problema de valor inicial*

$$2p\, u(k) - u(k-1) - u(k+1) = 0, \quad u(0) = 0, \;\; u(1) = 1,$$

se llama solución fundamental y se denota con ϕ_p.

LEMA 2.6. *La solución fundamental se caracteriza por ser la única solución del problema de valor inicial*

$$2p\, u(k) - u(k-1) - u(k+1) = 0, \quad u(1) = 1, \;\; u(2) = 2p.$$

Por otro lado, $\phi_p(-k) = -\phi_p(k)$ y $\phi_p(k)^2 - \phi_p(k-1)\phi_p(k+1) = 1$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Puesto que $a\phi_p(2) = b\phi_p(1) - a\phi_p(0) = b$, obtenemos $\phi_p(2) = 2p$. Por otro lado, $a\phi_p(-1) = b\phi_p(0) - a\phi_p(1) = -a$, lo que implica que $\phi_p(-1) = -1$. Además, si consideramos $u(k) = \phi_p(-k)$, se satisface que $u \in \mathcal{S}_p$ y, también, $u(1) = -1$ y $u(0) = 0$. La unicidad de la solución de cada problema de valor inicial implica que $u = -\phi_p$, y la última identidad del Corolario 2.4 implica la última hipótesis. □

La última identidad implica que si consideramos $\hat{\phi}_p \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ definida como $\hat{\phi}_p(k) = \phi_p(k-1)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\{\phi_p, \hat{\phi}_p\}$ es una base de $\mathcal{S}_p$. Por lo tanto, obtenemos la siguiente versión de la Fórmula de Lagrange.

TEOREMA 2.7 (Fórmula de Lagrange para ecuaciones autoadjuntas con coeficientes constantes). *Para cualesquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, cualquier $m \in \mathbb{Z}$ y cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, la única solución del problema de valor inicial*

$$a\, u(k+1) - b\, u(k) + a\, u(k-1) = f(k), \quad u(m) = x_0, \;\; u(m+1) = x_1,$$

viene dada por

$$u(k) = x_1\phi_p(k-m) - x_0\phi_p(k-1-m) + \frac{1}{a}\int_m^k \phi_p(k-s)f(s)ds, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Según el Corolario 1.5, la función de Green para la ecuación de Schrödinger es $g(k,s)=\dfrac{1}{a}\phi_p(k-s)$. Por otro lado, si $z(k)=\phi_p(k)$ y $v(k)=\phi_p(k-1)$, entonces $w[z,v](k)=w[z,v](0)=1$, lo que implica que $\{z,v\}$ es una base de $\mathcal{S}_p$. Además está claro que $y(k)=x_1\phi_p(k)-x_0\phi_p(k-1)$ es la única solución del problema de valor inicial

$$-b\,y(k)+a\,y(k-1)+a\,y(k+1)=0,\quad y(0)=x_0,\ \ y(1)=x_1,$$

y, por tanto, el resultado se obtiene aplicando la Proposición 2.3 y la Fórmula de Lagrange. □

Algunas soluciones de la ecuación en diferencias homogénea, distintas de la fundamental, son también de interés. Por ejemplo, llamamos *solución secundaria* a φ_p la única solución del problema de valor inicial

$$2p\,u(k)-u(k-1)-u(k+1)=0,\quad u(0)=1,\ \ u(1)=p.$$

Entonces, $\varphi_p(-k)=\varphi_p(k)$ para cualquier $k\in\mathbb{Z}$ y, además, $w[\phi_p,\varphi_p](0)=-1$, lo que implica que $\big\{\phi_p,\varphi_p\big\}$ es una base de $\mathcal{S}_p$. Entonces, la Fórmula de Lagrange puede reescribirse como

$$u(k)=x_0\varphi_p(k-m)+(x_1-px_0)\phi_p(k-m)+\frac{1}{a}\int_m^k\phi_p(k-s)f(s)ds,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

El polinomio

$$P_p(x)=ax^2-bx+a=a\big[(x-p)^2+1-p^2\big]\tag{33}$$

se denomina *polinomio característico* de la Ecuación (30). Como mostramos más adelante, sus raíces están fuertemente relacionadas con la solución de la ecuación homogénea y, en particular, con la solución fundamental ϕ_p y la secundaria φ_p. Para comprobarlo, consideramos la función $\theta\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida como

$$\theta(x)=\begin{cases}\operatorname{arc\,cosh}(|x|)\in[0,+\infty), & \text{cuando } |x|\ge 1,\\ \arccos(x)\in(0,\pi), & \text{cuando } |x|<1,\end{cases}\tag{34}$$

y, también, la función $r\colon\mathbb{R}\setminus(-1,1)\longrightarrow[1,+\infty)$ definida como

$$r(x)=|x|+\sqrt{x^2-1}.\tag{35}$$

Cuando $|x|\ge 1$, entonces $r(x)^{-1}=|x|-\sqrt{x^2-1}$ y, en particular, $r(x)=1$ sii $|x|=1$. Además, $r(x)=\cosh\big(\theta(x)\big)+\sinh\big(\theta(x)\big)$ y $\theta(x)=\ln\big(r(x)\big)$, puesto que $2|x|=r(x)+r(x)^{-1}=2\cosh\big(\ln(r(x))\big)$.

LEMA 2.8. *Cuando $|b|\ge 2a$, las raíces de P_p son $\mathfrak{s}(p)r(p)$ y $\mathfrak{s}(p)r(p)^{-1}$; es decir, $\mathfrak{s}(p)[\cosh\big(\theta(p)\big)\pm\sinh\big(\theta(p)\big)]$, mientras que cuando $-2a<b<2a$, las raíces de P_p son $\cos\big(\theta(p)\big)\pm i\sin\big(\theta(p)\big)$.*

A continuación mostramos la relación antes mencionada entre las raíces del polinomio característico y la ecuación de Schrödinger homogénea.

PROPOSICIÓN 2.9. *Se verifican las siguientes propiedades:*

i) *Cuando* $|b| > 2a$*, entonces* $\big\{\mathfrak{s}(p)^k r(p)^k, \mathfrak{s}(p)^k r(p)^{-k}\big\}$ *es una base de* $\mathcal{S}_p$ *y, además,*

$$\phi_p(k) = \mathfrak{s}(p)^{k-1}\left[\frac{r(p)^k - r(p)^{-k}}{r(p) - r(p)^{-1}}\right] = \mathfrak{s}(p)^{k-1}\frac{\sinh\big(k\theta(p)\big)}{\sinh\big(\theta(p)\big)},$$

$$\varphi_p(k) = \frac{\mathfrak{s}(p)^k}{2}\big[r(p)^k + r(p)^{-k}\big] = \mathfrak{s}(p)^k \cosh\big(k\theta(p)\big).$$

ii) *Cuando* $|b| = 2a$*, entonces* $\{p^k, kp^k\}$ *es una base de* $\mathcal{S}_p$ *y, además,* $\phi_p(k) = kp^{k-1}$*,* $\varphi_p(k) = p^k$*.*

iii) *Cuando* $|b| < 2a$*, entonces* $\big\{\sin\big(k\theta(p)\big), \cos\big(k\theta(p)\big)\big\}$ *es una base de* $\mathcal{S}_p$ *y, además,*

$$\phi_p(k) = \frac{\sin\big(k\theta(p)\big)}{\sin\big(\theta(p)\big)} \;\; y \;\; \varphi_p(k) = \cos\big(k\theta(p)\big).$$

Finalizamos esta sección obteniendo algunas relaciones útiles entre ϕ_p y φ_p. En primer lugar, observamos que cuando $p = 0$, es decir, cuando la Ecuación (30) corresponde a una ecuación *desacoplada* con coeficientes constantes y de valor uno, entonces $\varphi_0(k) = \phi_0(k+1)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, ya que ambas funciones tienen el mismo valor en $k = 0$ y en $k = 1$, y podemos comprobar directamente que además $\phi_0(k) = \dfrac{1}{2}(-1)^{\lfloor \frac{k}{2}\rfloor}\big[1 - (-1)^k\big]$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. En particular, $\phi_0(2k) = \varphi_0(2k-1) = 0$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

PROPOSICIÓN 2.10. *Dado* $p \in \mathbb{R}$*, entonces* $u \in \mathcal{S}_p$ *sii* $\breve{u} \in \mathcal{S}_{-p}$*, donde* $\breve{u} \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ *se define como* $\breve{u}(k) = (-1)^k u(k)$ *para cualquier* $k \in \mathbb{Z}$*. En particular,* $\phi_{-p}(k) = (-1)^{k-1}\phi_p(k)$ *y* $\varphi_{-p}(k) = (-1)^k\varphi_p(k)$*, para cualquier* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Demostración. Naturalmente, $u \in \mathcal{S}_p$ sii par cualquier $k \in \mathbb{Z}$ se satisface que

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{k+1}\big[2pu(k) - u(k+1) - u(k-1)\big] \\ &= -2p(-1)^k u(k) - (-1)^{k+1}u(k+1) - (-1)^{k-1}u(k-1) \\ &= 2(-p)\breve{u}(k) - \breve{u}(k+1) - \breve{u}(k-1) \end{aligned}$$

y, por tanto, $\breve{u} \in \mathcal{S}_{-p}$.

Por otro lado, $\breve{\varphi}_p(0) = \varphi_p(0) = 1$, $\breve{\varphi}_p(1) = -\varphi_p(1) = -p$, $\breve{\phi}_p(0) = \phi_p(0) = 0$ y $\breve{\phi}_p(1) = -\phi_p(1) = -1$, lo que implica que $\varphi_{-p} = \breve{\varphi}_p$ y que $\phi_{-p} = -\breve{\phi}_p$. ☐

COROLARIO 2.11. *Cuando* $p = \pm 1$*, entonces* $\phi_p(k) = kp^{k-1}$ *y* $\varphi_p(k) = p^k$ *para cualquier* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Demostración. Resultado directo de la Proposición 2.10, demostrando previamente que $\phi_1(k) = k$ y $\varphi_1(k) = 1$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$, lo que se obtiene después de una simple verificación. ☐

PROPOSICIÓN 2.12. *Las siguientes identidades se verifican para cualesquiera* $k, m \in \mathbb{Z}$*:*

$$\begin{aligned} 2\varphi_p(k)\varphi_p(m) &= \varphi_p(k+m) + \varphi_p(k-m), \\ 2\varphi_p(k)\phi_p(m) &= \phi_p(k+m) - \phi_p(k-m), \\ 2(p^2-1)\phi_p(k)\phi_p(m) &= \varphi_p(k+m) - \varphi_p(k-m). \end{aligned}$$

En particular, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ *obtenemos*

$$2\varphi_p(k) = \phi_p(k+1) - \phi_p(k-1) \quad y \quad 2(p^2-1)\phi_p(k) = \varphi_p(k+1) - \varphi_p(k-1).$$

Demostración. Fijado $m \in \mathbb{Z}$, consideramos $u, v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ definidas como $u(k) = 2\varphi_p(k)\varphi_p(m)$ y $v(k) = \varphi_p(k+m) + \varphi_p(k-m)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, $u, v \in \mathcal{S}_p$ y, además,

$$\begin{aligned} v(0) &= \varphi_p(m) + \varphi_p(-m) = \varphi_p(m) + \varphi_p(m) = 2\varphi_p(m) = u(0), \\ v(1) &= \varphi_p(1+m) + \varphi_p(1-m) = \varphi_p(m+1) + \varphi_p(m-1) = 2p\varphi_p(m) = u(1), \end{aligned}$$

lo que implica que $u = v$ y demuestra la primera identidad. La demostración de la segunda identidad se obtiene aplicando un argumento análogo, teniendo en cuenta que $\phi_p(-k) = -\phi_p(k)$. Para la tercera identidad, se considera $w \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ definida como $w(k) = \varphi_p(k+1) - \varphi_p(k-1)$. Entonces, $w(0) = 0$, $w(1) = \varphi_p(2) - 1 = 2p\varphi_p(1) - 2 = 2(p^2-1)$, lo que, en particular, demuestra la última igualdad. Si consideramos ahora $z \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ definida como $z(k) = \varphi_p(k+m) - \varphi_p(k-m)$, entonces

$$\begin{aligned} z(0) &= \varphi_p(m) - \varphi_p(-m) = \varphi_p(m) - \varphi_p(m) = 0 = 2(p^2-1)\phi_p(0)\phi_p(m), \\ z(1) &= \varphi_p(1+m) - \varphi_p(1-m) = \varphi_p(m+1) - \varphi_p(m-1) = 2(p^2-1)\phi_p(m) = \\ &\quad = 2(p^2-1)\phi_p(1)\phi_p(m), \end{aligned}$$

lo que implica que $z(k) = 2(p^2-1)\phi_p(k)\phi_p(m)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

La penúltima identidad para φ_p es una consecuencia directa de la segunda igualdad, teniendo en cuenta que $\phi_p(1) = 1$. $\square$

3. Ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ donde $a, c \neq 0$, y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ una ecuación en diferencias *(irreducible) de segundo orden con coeficientes (constantes)* a, b, c *y dato* f es de la forma

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{36}$$

y se trata de encontrar todas las funciones $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ que satisfacen la identidad.

Claramente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a > 0$, así que en lo sucesivo asumimos esta hipótesis. Sabemos que la Ecuación (36) es equivalente a una ecuación en diferencias autoadjunta. Específicamente si consideramos $\rho \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ la *función de acompañamiento* definida en la Ecuación 7 del primer capítulo, entonces (36) es equivalente a la ecuación

$$a\rho(k)u(k+1) - b\rho(k)u(k) + c\rho(k)u(k-1) = \rho(k)f(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

en el sentido que ambas tienen las mismas soluciones. La ecuación anterior es autoadjunta puesto que $c\rho(k) = a\rho(k-1)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, obtenemos el siguiente resultado general, cuya demostración es directa.

PROPOSICIÓN 3.1. *La Ecuación* (36) *tiene las mismas soluciones que la ecuación autoadjunta*

$$a\rho(k)u(k+1) - b\rho(k)u(k) + a\rho(k-1)u(k-1) = \rho(k)f(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Evidentemente la principal dificultad para aplicar el resultado anterior es que esta nueva ecuación en diferencias equivalente no tiene coeficientes constantes. No obstante, mostramos a continuación como transformar la Ecuación (36) en otra ecuación en diferencias con coeficientes constantes cuyas soluciones pueden relacionarse fácilmente con las de la ecuación original. Para hacer esto, consideramos los valores $r = \sqrt{\dfrac{|c|}{a}}$ y $p = \dfrac{b}{2\sqrt{a|c|}}$.

PROPOSICIÓN 3.2. *La función $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la ecuación* (36) *sii $u(k) = r^{k-1}v(k)$, donde $v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la ecuación en diferencias con coeficientes constantes*

$$v(k+1) - 2p\,v(k) + \mathfrak{s}(c)\,v(k-1) = a^{-1}r^{-k}f(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. De la proposición anterior, sabemos que $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la Ecuación (36) sii satisface

$$a\rho(k)u(k+1) - b\rho(k)u(k) + a\rho(k-1)u(k-1) = \rho(k)f(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $\rho(k) = (c^{-1}a)^k = \mathfrak{s}(c)^k r^{-2k}$; es decir, multiplicando por $\mathfrak{s}(c)^{-k}r^k$, sii

$$ar^{-k}u(k+1) - br^{-k}u(k) + \mathfrak{s}(c)ar^{2-k}u(k-1) = r^{-k}f(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

o, equivalentemente, sii

$$av(k+1) - br^{-1}v(k) + \mathfrak{s}(c)av(k-1) = r^{-k}f(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $v(k) = r^{1-k}u(k)$ y hemos tenido en cuenta que $br^{-1} = 2ap$. □

COROLARIO 3.3. *Cuando $c > 0$, entonces $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la Ecuación* (36) *sii $u(k) = r^{k-1}v(k)$, donde $v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la ecuación autoadjunta con coeficientes constantes*

$$v(k+1) - 2p\,v(k) + v(k-1) = a^{-1}r^{-k}f(k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

En particular, la solución del problema de valor inicial

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0, \quad u(0) = 0, \;\; u(1) = 1,$$

es $u(k) = r^{k-1}\phi_p(k)$, mientras que la solución del problema de valor inicial

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0, \quad u(0) = 1, \;\; u(1) = rp,$$

es $u(k) = r^k\varphi_p(k)$.

Basta ahora aplicar el Teorema 2.7 para obtener la Fórmula de Lagrange cuando $c > 0$.

COROLARIO 3.4. *Cuando $c > 0$, para cualesquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, cualquier $m \in \mathbb{Z}$ y cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, la única solución del problema de valor inicial*

$$a\,u(k+1) - b\,u(k) + c\,u(k-1) = f(k), \quad u(m) = x_0, \;\; u(m+1) = x_1,$$

viene dada por

$$u(k) = x_1 r^{k-m-1}\phi_p(k-m) - x_0 r^{k-m}\phi_p(k-1-m) + \frac{r^{k-1}}{a}\int_m^k \phi_p(k-s)r^{-s}f(s)ds, \quad k \in \mathbb{Z},$$

o, equivalentemente,

$$u(k) = x_0 r^{k-m}\varphi_p(k-m) + r^{k-m-1}(x_1 - rpx_0)\phi_p(k-m) + \frac{r^{k-1}}{a}\int_m^k \phi_p(k-s)r^{-s}f(s)ds, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Como muestra el Corolario 3.3, el método seguido en la Proposición 3.2 solo funciona cuando los coeficientes a y c tienen el mismo signo; es decir, cuando $c > 0$. Cuando $c < 0$ la ecuación equivalente tiene coeficientes constantes pero no es autoadjunta. Sin embargo, la técnica anterior puede adaptarse fácilmente para obtener otras ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes que sean autoadjuntas, pero con coeficientes complejos. Aunque este proceso nos conduciría a identidades muy interesantes, en este trabajo nos restringimos a tratar solo con coeficientes reales. Por tanto, cuando $c < 0$ seguiremos otro camino para determinar las soluciones de la Ecuación (36), usando únicamente funciones reales. Para ello mostramos a continuación que se puede obtener la expresión de cualquier solución determinando separadamente su expresión para índices pares y para índices impares. Además esta técnica también funciona cuando $c > 0$ y, en consecuencia, definimos el valor $\hat{p} = 2p^2 - \mathfrak{s}(c)$.

PROPOSICIÓN 3.5. *Si $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la Ecuación (36), entonces para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ se satisface que*

$$\begin{aligned} u(2k) &= r^{2k}\Big[\big(|c|^{-1}bu(1) - \mathfrak{s}(c)u(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k) - u(0)\phi_{\hat{p}}(k-1)\Big] \\ &= r^{2k}\Big[u(0)\varphi_{\hat{p}}(k) + \big(|c|^{-1}bu(1) - 2p^2u(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k)\Big], \\ u(2k-1) &= r^{2k}\Big[|c|^{-1}au(1)\phi_{\hat{p}}(k) - c^{-1}\big(bu(0) - au(1)\big)\phi_{\hat{p}}(k-1)\Big] \\ &= r^{2k}c^{-1}\Big[\big(bu(0) - au(1)\big)\varphi_{\hat{p}}(k) + \big(2ap^2u(1) - b\hat{p}u(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k)\Big]. \end{aligned}$$

Demostración. Por la Proposición 3.2, $u \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la ecuación homogénea asociada a la Ecuación (36) sii $u(k) = r^{k-1}v(k)$, donde $v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la ecuación en diferencias con coeficientes constantes

$$v(k+1) - 2pv(k) + \mathfrak{s}(c)\,v(k-1) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Cuando $p \neq 0$, es evidente que $v \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$ es una solución de la ecuación anterior sii

$$v(k) = \frac{1}{2p}\big[v(k+1) + \mathfrak{s}(c)\,v(k-1)\big] \qquad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z}.$$

Si para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ definimos $z(k) = v(2k)$ y $w(k) = v(2k-1)$, entonces obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= 2pv(2k) - v(2k+1) - \mathfrak{s}(c)\,v(2k-1) \\ &= 2pv(2k) - \frac{1}{2p}\big[v(2k+2) + \mathfrak{s}(c)\,v(2k)\big] - \frac{\mathfrak{s}(c)}{2p}\big[v(2k) + \mathfrak{s}(c)\,v(2k-2)\big] \\ &= \frac{1}{2p}\Big[\big(4p^2 - 2\mathfrak{s}(c)\big)v(2k) - v(2k+2) - v(2k-2)\Big] = \frac{1}{2p}\Big[2\hat{p}z(k) - z(k+1) - z(k-1)\Big] \end{aligned}$$

y, análogamente,

$$0 = 2pv(2k-1) - v(2k) - \mathfrak{s}(c)\,(2k-2) = \frac{1}{2p}\Big[2\hat{p}w(k) - w(k+1) - w(k-1)\Big].$$

Por tanto, $z, w \in \mathcal{S}_{\hat{p}}$ y, además, están caracterizadas por satisfacer las condiciones iniciales siguientes

$$z(0) = v(0) = ru(0), \qquad z(1) = v(2) = r^{-1}u(2) = \frac{1}{ar}\big(bu(1) - cu(0)\big),$$

$$w(0) = v(-1) = r^2u(-1) = \frac{|c|}{ac}\big(bu(0) - au(1)\big), \qquad w(1) = v(1) = u(1),$$

así que, según la Fórmula de Lagrange obtenemos,

$$\begin{aligned} z(k) &= \frac{1}{ar}\big(bu(1) - cu(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k) - ru(0)\phi_{\hat{p}}(k-1) \\ &= ru(0)\varphi_{\hat{p}}(k) + \frac{1}{ar}\big(bu(1) - (c + |c|\hat{p})u(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k), \\ w(k) &= u(1)\phi_{\hat{p}}(k) - \frac{|c|}{ac}\big(bu(0) - au(1)\big)\phi_{\hat{p}}(k-1) \\ &= \frac{|c|}{ac}\big(bu(0) - au(1)\big)\varphi_{\hat{p}}(k) + \frac{1}{ac}\big((ac + a|c|\hat{p})u(1) - \hat{p}b|c|u(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k). \end{aligned}$$

En consecuencia, aplicando la Fórmula de Lagrange, se obtiene

$$\begin{aligned} v(2k) &= \frac{1}{ar}\Big[\big(bu(1) - cu(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k) - |c|u(0)\phi_{\hat{p}}(k-1)\Big] \\ &= \frac{1}{ar}\Big[|c|u(0)\varphi_{\hat{p}}(k) + \big(bu(1) - 2|c|p^2u(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k)\Big], \\ v(2k-1) &= \frac{1}{ac}\Big[acu(1)\phi_{\hat{p}}(k) - |c|\big(bu(0) - au(1)\big)\phi_{\hat{p}}(k-1)\Big] \\ &= \frac{|c|}{ac}\Big[\big(bu(0) - au(1)\big)\varphi_{\hat{p}}(k) + \big(2ap^2u(1) - b\hat{p}u(0)\big)\phi_{\hat{p}}(k)\Big]. \end{aligned}$$

Cuando $b = 0$, entonces $p = 0$, $\hat{p} = -\mathfrak{s}(c)$, por el Corolario 2.11 $\varphi_{\hat{p}}(k) = \hat{p}^k$ y la formula pasa a ser

$$u(2k) = r^{2k}u(0)\varphi_{\hat{p}}(k) = \left[\frac{\hat{p}|c|}{a}\right]^k u(0) \;\; \text{y} \;\; u(2k-1) = -r^{2k}c^{-1}au(1)\varphi_{\hat{p}}(k) = \left[\frac{\hat{p}|c|}{a}\right]^{k-1} u(1).$$

Por otro lado, cuando $b = 0$, entonces u es una solución de la ecuación homogénea asociada a la Ecuación (36) sii

$$u(k+1) = -a^{-1}cu(k-1) = -\mathfrak{s}(c)r^2u(k-1) = \hat{p}r^2u(k-1), \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z},$$

lo que implica que $u(2k) = \hat{p}^k r^{2k}u(0)$ y que $u(2k-1) = \hat{p}^{k-1}r^{2(k-1)}u(1)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. □

COROLARIO 3.6. *La solución única del problema de valor inicial*

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0, \qquad u(0) = 0, \;\; u(1) = 1,$$

viene dada por

$$\begin{aligned} u(2k) &= 2\,r^{2k-1}\,p\,\phi_{\hat{p}}(k), \\ u(2k-1) &= r^{2(k-1)}\Big[\phi_{\hat{p}}(k) + \mathfrak{s}(c)\phi_{\hat{p}}(k-1)\Big] = r^{2(k-1)}\mathfrak{s}(c)\Big[2p^2\phi_{\hat{p}}(k) - \varphi_{\hat{p}}(k)\Big], \end{aligned}$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. En particular, cuando $c > 0$, entonces

$$\phi_p(2k) = 2\,p\,\phi_{2p^2-1}(k) \;\; \textit{y} \;\; \phi_p(2k-1) = \phi_{2p^2-1}(k) + \phi_{2p^2-1}(k-1), \;\; \textit{para cualquier } k \in \mathbb{Z},$$

mientras que cuando $c < 0$,

$$\phi_{ip}(2k) = 2(-1)^{k+1}i\,p\,\phi_{2p^2-1}(k) \;\; \textit{y} \;\; \phi_{ip}(2k-1) = (-1)^{k-1}\Big[\phi_{2p^2-1}(k) - \phi_{2p^2-1}(k-1)\Big],$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

COROLARIO 3.7. *Cuando* $|c| = a$*, la solución única del problema de valor inicial*

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0, \quad u(0) = 1, \;\; u(1) = p,$$

viene dada por

$$\begin{aligned} u(2k) &= \hat{p}\phi_{\hat{p}}(k) - \phi_{\hat{p}}(k-1) = \varphi_{\hat{p}}(k), \\ u(2k-1) &= p\Big[\phi_{\hat{p}}(k) - \mathfrak{s}(c)\phi_{\hat{p}}(k-1)\Big] \\ &= p\,\mathfrak{s}(c)\Big[\varphi_{\hat{p}}(k) - 2\big(p^2 - \mathfrak{s}(c)\big)\phi_{\hat{p}}(k)\Big], \;\; \textit{para cualquier } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

En particular, cuando $c > 0$*, entonces*

$$\varphi_p(2k) = \varphi_{2p^2-1}(k) \;\; y \;\; \varphi_p(2k-1) = p\Big[\phi_{2p^2-1}(k) - \phi_{2p^2-1}(k-1)\Big], \;\; \textit{para cualquier } k \in \mathbb{Z},$$

minetras que cuando $c < 0$*,*

$$\varphi_{ip}(2k) = (-1)^k\varphi_{2p^2-1}(k) \;\; y \;\; \varphi_{ip}(2k-1) = (-1)^k ip\Big[\phi_{2p^2-1}(k) + \phi_{2p^2-1}(k-1)\Big]$$

para cualquier $k \in \mathbb{Z}$*.*

4. Polinomios de Chebyshev

Nuestra intención en esta sección es describir las propiedades fundamentales de los polinomios de Chebyshev, que serán útiles en la resolución de los problemas que involucren ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes. La relación entre las ecuaciones en diferencias y los polinomios de Chebyshev está determinada por la ley recurrente de tres términos que verifican estos polinomios. Por tanto, esta relación recurrente será la clave en todo nuestro análisis, razón por la cual nos hemos centrado en el estudio de las propiedades que pueden deducirse directamente de dicha relación. No hacemos por tanto referencia a otras cuestiones importantes relacionadas con este tipo de polinomios como pueden ser la descripción de sus ceros, sus extremos, así como su aplicación a problemas de interpolación y aproximación, o incluso a los desarrollos de Fourier tomando estas funciones como base. Para estas cuestiones puede consultarse [**42**], que es también nuestra referencia fundamental, así como los trabajos allí citados.

La principal novedad de nuestro planteamiento consiste en considerar las sucesiones de polinomios subindexadas no sólo en los números naturales sino en los enteros. Como veremos esta iniciativa no introduce dificultades, ni formales ni prácticas y permite un tratamiento más ágil de los problemas.

DEFINICIÓN 4.1. *Una sucesión* $\{P_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}[x]$ *se denomina sucesión de Chebyshev si satisface la ley de recurrencia*

$$P_{n+2}(x) = 2\,xP_{n+1}(x) - P_n(x), \;\; \textit{para cada} \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Para cada $n \in \mathbb{Z}$*, el elemento* P_n *de la sucesión anterior será denominado Polinomio de Chebyshev de orden* n*.*

Es claro que la recurrencia en la Definición 4.1 puede expresarse de manera equivalente como

$$P_n(x) = 2\,xP_{n+1}(x) - P_{n+2}(x), \;\; \text{para cada} \;\; n \in \mathbb{Z}, \tag{37}$$

que incorporada a la de la Definición 4.1 puede subindexarse en $\mathbb{N}$ de la manera siguiente:

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) - P_n(x) \text{ y } P_{-(n+1)}(x) = 2xP_{-n}(x) - P_{-(n-1)}(x), \;\; \text{para cada } n \in \mathbb{N}. \tag{38}$$

Las primeras propiedades de los polinomios de Chebyshev son una consecuencia directa de la fórmula de recurrencia que los determina.

LEMA 4.2. *Si* $\{P_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ *es una sucesión de polinomios de Chebyshev, entonces para cada* $n\in\mathbb{Z}$ *y cada* $x\in\mathbb{C}$*, se satisface que* $P_{n+2}(x)+P_n(x)=2xP_{n+1}(x)$ *y, por tanto, para cada* $k\in\mathbb{Z}$*, se tiene que*

$$P_k(x)-xP_{k+1}(x)=\frac{1}{2}\Big[P_k(x)-P_{k+2}(x)\Big] \;\text{ y }\; P_k(x)-xP_{k-1}(x)=\frac{1}{2}\Big[P_k(x)-P_{k-2}(x)\Big].$$

Demostración. La primera identidad es una consecuencia directa de la identidad en la Definición 4.1. Aplicando dicha identidad a $n=k$ y $n=k-2$, obtenemos que

$$x\,P_{k+1}(x)=\frac{1}{2}\Big[P_{k+2}(x)+P_k(x)\Big] \;\text{ y }\; x\,P_{k-1}(x)=\frac{1}{2}\Big[P_k(x)+P_{k-2}(x)\Big],$$

de donde deducimos las otras dos identidades propuestas. □

LEMA 4.3. *Sean* $\{P_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ *y* $\{Q_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ *dos sucesiones de Chebyshev y* $P,Q\in\mathbb{C}[x]$*. Fijados* $k,m\in\mathbb{Z}$*, si para cada* $n\in\mathbb{Z}$ *consideramos el polinomio* $R_n=PP_{k+n}+QQ_{m+n}$*, entonces la sucesión* $\{R_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ *es de Chebyshev.*

Demostración. Basta observar que para cada $n\in\mathbb{Z}$ se satisface que

$$\begin{aligned}R_{n+2}(x)&=P(x)P_{k+n+2}(x)+Q(x)Q_{m+n+2}(x)\\&=P(x)[2xP_{k+n+1}-P_{m+n}(x)]+Q(x)[2xQ_{m+n+1}(x)-Q_{m+n}(x)]\\&=2x[P(x)P_{k+n+1}+Q(x)Q_{m+n+1}]-[P_{k+n}(x)+Q_{m+n}(x)]=2xR_{n+1}(x)-R_n(x).\end{aligned}$$ □

La relación de recurrencia de la Definición 4.1 muestra, claramente, que cualquier sucesión de Chebyshev está unívocamente determinada por la elección de los polinomios de Chebyshev de órdenes cero y uno. En particular, la paridad o imparidad de cada polinomio de la sucesión puede deducirse de la de los de orden n, con $n=0,1$.

LEMA 4.4. *Si* $\{P_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ *es una sucesión de polinomios de Chebyshev tal que* $P_0(-x)=P_0(x)$ *y* $P_1(-x)=-P_1(x)$*, respectivamente tal que* $P_0(-x)=-P_0(x)$ *y* $P_1(-x)=P_1(x)$ *para cada* $x\in\mathbb{C}$*, entonces* $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$*, respectivamente* $P_n(-x)=(-1)^{n+1}P_n(x)$*, para cada* $n\in\mathbb{Z}$ *y cada* $x\in\mathbb{C}$*.*

Demostración. Las demostraciones de ambos resultados son análogas, así que sólo demostraremos el primer caso. Como $P_n(x)=(-1)^nP_n(x)$ si $n=0,1$, supuesto que $P_n(-x)=(-1)^nP_n(x)$ y que $P_{-n}(-x)=(-1)^{-n}P_{-n}(x)$ para $n\ge 1$, resulta que

$$\begin{aligned}P_{n+1}(-x)&=-2xP_n(-x)-P_{n-1}(-x)=-2x(-1)^nP_n(x)-(-1)^{n-1}P_{n-1}(x)\\&=(-1)^{n+1}[2xP_n(x)-P_{n-1}(x)]=(-1)^{n+1}P_{n+1}(x),\\P_{-(n+1)}(-x)&=-2xP_{-n}(-x)-P_{-(n-1)}(-x)=-2x(-1)^{-n}P_{-n}(x)-(-1)^{1-n}P_{-(n-1)}(x)\\&=(-1)^{-(n+1)}[2xP_{-n}(x)-P_{-(n-1)}(x)]=(-1)^{-(n+1)}P_{-(n+1)}(x).\end{aligned}$$ □

DEFINICIÓN 4.5. *Una sucesión de Chebyshev* $\{P_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}\subset\mathbb{C}[x]$ *se denomina normalizada si satisface que* $P_0(x)=1$ *y* $\partial^o P_1=1$*.*

Si $\{P_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ es una sucesión de Chebyshev normalizada, entonces $\partial^{\rm o} P_n = n$ si $n = 0, 1$ y supuesta esta propiedad cierta para $n \in \mathbb{N}^*$, de la relación de recurrencia de la Definición 4.1, tenemos que $\partial^{\rm o}(xP_n) = n+1$ y como $\partial^{\rm o} P_{n-1} = n-1$, necesariamente

$$\partial^{\rm o} P_{n+1} = \partial^{\rm o}(2xP_n - P_{n-1}) = \partial^{\rm o}(xP_n) = n+1.$$

Así pues, si $\{P_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ es una sucesión de Chebyshev normalizada, entonces $\{P_n\}_{n=0}^{+\infty}$ es simple, es decir, $\partial^{\rm o} P_n = n$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, es claro que una sucesión de Chebyshev normalizada está unívocamente determinada por la elección del polinomio de Chebyshev de primer orden.

DEFINICIÓN 4.6. *Denominaremos sucesiones de Polinomios de Chebyshev de primera, segunda, tercera y cuarta especie y las denotaremos por $\{T_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{U_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $\{V_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ y $\{W_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, respectivamente a las sucesiones de Chebyshev normalizadas correspondientes a las siguientes elecciones del polinomio de orden 1:*

$$T_1(x) = x, \quad U_1(x) = 2x, \quad V_1(x) = 2x-1 \quad y \quad W_1(x) = 2x+1.$$

PROPOSICIÓN 4.7. *Para cada $x \in \mathbb{C}$ y cada $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que*

$$T_{-n}(x) = T_n(x), \;\; U_{-n}(x) = -U_{n-2}(x), \;\; V_{-n}(x) = V_{n-1}(x) \;\; y \;\; W_{-n}(x) = -W_{n-1}(x)$$

y, en particular, $T_{-1}(x) = x$, $U_{-1}(x) = 0$, $V_{-1}(x) = 1$ y $W_{-1}(x) = -1$.

Demostración. Es sencillo comprobar que basta demostrar las identidades sólo para $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, si $\{P_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ es una sucesión de polinomios de Chebyshev normalizada, entonces aplicando la Identidad (37) a $n=-1$ y teniendo en cuenta que $P_0(x) = 1$, resulta que $P_{-1}(x) = 2x - P_1(x)$. Por tanto, $T_{-1}(x) = x = T_1(x)$, $U_{-1}(x) = 0$, $V_{-1}(x) = 1 = V_0(x)$ y $W_{-1}(x) = -1 = -W_0(x)$, es decir las identidades son válidas para $n = 1$. Supuestas ciertas para $n \geq 1$, aplicando la segunda Identidad de (38), tenemos que

$$\begin{aligned}
T_{-(n+1)}(x) &= 2xT_{-n} - T_{-(n-1)}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) = T_{(n+1)}(x),\\
U_{-(n+1)}(x) &= 2xU_{-n} - U_{-(n-1)}(x) = -[2xU_{n-2}(x) - U_{n-3}(x)] = -U_{(n-1)}(x),\\
V_{-(n+1)}(x) &= 2xV_{-n} - V_{-(n-1)}(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x) = V_n(x),\\
W_{-(n+1)}(x) &= 2xW_{-n} - W_{-(n-1)}(x) = -[2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x)] = -W_n(x). \qquad \square
\end{aligned}$$

Los polinomios de Chebyshev de primera segunda, tercera y cuarta especie no son independientes, sino que están relacionados entre sí, de manera que pueden obtenerse fácilmente unos de otros. A continuación detallaremos las relaciones más importantes.

PROPOSICIÓN 4.8. *Para cada $x \in \mathbb{C}$ y cada $n \in \mathbb{Z}$ se tienen las siguientes relaciones:*

1. $T_n(x) = \frac{1}{2}\big[U_n(x) - U_{n-2}(x)\big] = U_n(x) - xU_{n-1}(x) = xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$.
2. $T_n(x) = \frac{1}{2}\big[V_n(x) + V_{n-1}(x)\big] = \frac{1}{2}\big[W_n(x) - W_{n-1}(x)\big]$ *y* $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$.
3. $U_n(x) = \frac{1}{2}\left[V_n(x) + W_n(x)\right] = \frac{1}{2}\left[W_{n+1}(x) - V_{n+1}(x)\right]$ *y* $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$.
4. $(x-1)U_n(x) = \frac{1}{2}[V_{n+1}(x) - V_n(x)]$, $(x+1)U_n(x) = \frac{1}{2}[W_{n+1}(x) + W_n(x)]$ *y, también,* $(x^2-1)U_n(x) = T_{n+2}(x) - xT_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left[T_{n+2}(x) - T_n(x)\right]$.
5. $V_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x) = T_{n+1}(x) - (x-1)U_n(x)$ *y* $V_n(-x) = (-1)^n W_n(x)$.
6. $W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x) = T_n(x) + (x+1)U_{n-1}(x)$ *y* $W_n(x) = (-1)^n V_n(x)$.

Demostración. En todos los casos, el Lema 4.3 asegura que los polinomios que aparecen a los dos lados de las igualdades determinan una sucesión de Chebyshev, por lo que bastará comprobar que los correspondientes polinomios de órdenes cero y uno coinciden. Para ello también haremos uso de los resultados de la Proposición 4.7.

1. Si $P_n = \frac{1}{2}[U_n - U_{n-2}]$, entonces $P_0 = \frac{1}{2}[U_0 - U_{-2}] = U_0 = 1 = T_0$, mientras que $P_1(x) = \frac{1}{2}[U_1(x) - U_{-1}(x)] = x = T_1(x)$. Además, la segunda y tercera identidades son consecuencia directa del Lema 4.2.

2. Si definimos $P_n(x) = \frac{1}{2}\big[V_n(x) + V_{n-1}(x)\big]$ y $Q_n(x) = \frac{1}{2}\big[W_n(x) - W_{n-1}(x)\big]$, entonces $P_0 = \frac{1}{2}\big[V_0 + V_{-1}\big] = V_0 = T_0 = W_0 = \frac{1}{2}\big[W_0 - W_{-1}\big]$. Además,

$$P_1(x) = \tfrac{1}{2}\big[V_1(x) + V_0(x)\big] = \tfrac{1}{2}\big[2x - 1 + 1\big] = x = T_1(x),$$

$$Q_1(x) = \tfrac{1}{2}\big[W_1(x) - W_0(x)\big] = \tfrac{1}{2}\big[2x + 1 - 1\big] = x = T_1(x).$$

Finalmente, la identidad $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$ es consecuencia directa del Lema 4.4.

3. Si definimos $P_n(x) = \frac{1}{2}[V_n(x) + W_n(x)]$ y $Q_n(x) = \frac{1}{2}[W_{n+1}(x) - V_{n+1}(x)]$, entonces $P_0 = \frac{1}{2}\big[V_0 + W_0\big] = 1 = U_0$, mientras que

$$Q_0(x) = \frac{1}{2}\big[W_1(x) - V_1(x)\big] = \frac{1}{2}\big[2x - 1 - 2x + 1\big] = 1 = U_0(x).$$

Además, $P_1(x) = \frac{1}{2}\big[V_1(x) + W_1(x)\big] = \frac{1}{2}\big[2x - 1 + 2x + 1\big] = 2x = U_1(x)$, mientras que $Q_1(x) = \frac{1}{2}\big[W_2(x) - V_2(x)\big] = \frac{1}{2}\big[2xW_1(x) - 1 - 2xV_1(x) + 1\big] = x[2x + 1 - 2x + 1] = 2x = U_1(x)$. Finalmente, la identidad $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$ es consecuencia directa del Lema 4.4.

4. Consideremos los polinomios $P_n(x) = \frac{1}{2}[V_{n+1}(x) - V_n(x)]$, $Q_n(x) = \frac{1}{2}[W_{n+1}(x) + W_n(x)]$ y $R_n(x) = T_{n+2}(x) - xT_{n+1}(x)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= \tfrac{1}{2}[V_1(x) - V_0(x)] = \tfrac{1}{2}[2x - 1 - 1] = x - 1 = (x-1)U_0(x),\\
Q_0(x) &= \tfrac{1}{2}[W_1(x) + W_0(x)] = \tfrac{1}{2}[2x + 1 + 1] = x + 1 = (x+1)U_0(x),\\
R_0(x) &= T_2(x) - xT_1(x) = xT_1(x) - T_0(x) = x^2 - 1 = (x^2-1)U_0(x),\\
P_1(x) &= \tfrac{1}{2}[V_2(x) - V_1(x)] = \tfrac{1}{2}[(2x-1)V_1(x) - 1]\\
&= \tfrac{1}{2}[(2x-1)^2 - 1] = (x-1)2x = (x-1)U_1(x),\\
Q_1(x) &= \tfrac{1}{2}[W_2(x) + W_1(x)] = \tfrac{1}{2}[(2x+1)W_1(x) - 1]\\
&= \tfrac{1}{2}[(2x+1)^2 - 1] = (x+1)2x = (x+1)U_1(x),\\
R_1(x) &= T_3(x) - xT_2(x) = xT_2(x) - T_1(x) = 2x^2T_1(x) - xT_0(x) - T_1(x)\\
&= 2x(x^2-1) = (x^2-1)U_1(x).
\end{aligned}$$

Finalmente, la segunda identidad es nuevamente consecuencia directa del Lema 4.2.

5. Consideremos $P_n(x) = U_n(x) - U_{n-1}(x)$ y $Q_n(x) = T_{n+1}(x) - (x-1)U_n(x)$. Entonces, $P_0 = U_0 - U_{-1} = U_0 = 1 = V_0$, mientras que $P_1(x) = U_1(x) - U_0(x) = 2x - 1 = V_1(x)$. Por otra

parte, $Q_0 = T_1(x) - (x-1)U_0 = x - (x-1) = 1 = V_0$, mientras que

$$Q_1(x) = T_2(x) - (x-1)U_1(x) = 2xT_1(x) - T_0(x) - 2x(x-1) = V_1(x).$$

Finalmente, como $V_n(-x) = U_n(-x) - U_{n-1}(-x)$, aplicando la última igualdad del apartado 3, obtenemos que $V_n(-x) = (-1)^n U_n(x) - (-1)^{n-1}U_{n-1}(x) = (-1)^n[U_n(x) + U_{n-1}(x)]$, de manera que la última identidad de este apartado estará demostrada en cuanto probemos la primera del siguiente.

6. Consideremos $P_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x)$ y $Q_n(x) = T_n(x) + (x+1)U_{n-1}(x)$. Entonces, $P_0 = U_0 + U_{-1} = U_0 = 1 = W_0$, mientras que $P_1(x) = U_1(x) + U_0(x) = 2x + 1 = W_1(x)$. Por otra parte, $Q_0 = T_0(x) + (x+1)U_{-1} = 1 = W_0$, mientras que

$$Q_1(x) = T_1(x) + (x+1)U_0(x) = x + (x+1) = 2x + 1 = W_1(x).$$

Finalmente, como $W_n(x) = U_n(x) + U_{n-1}(x)$, aplicando nuevamente la última igualdad del apartado 3, obtenemos que

$$W_n(-x) = (-1)^n U_n(x) + (-1)^{n-1}U_{n-1}(x) = (-1)^n[U_n(x) - U_{n-1}(x)] = (-1)^n V_n(x). \qquad \square$$

COROLARIO 4.9. *Para cada $x \in \mathbb{C}$ y cada $n \in \mathbb{Z}$ se tienen las siguientes relaciones:*

1. $T_{2n}(0) = U_{2n}(0) = V_{2n}(0) = W_{2n}(0) = W_{2n+1}(0) = -V_{2n+1}(0) = (-1)^n$ *y, además,* $T_{2n+1}(0) = U_{2n+1}(0) = 0$.
2. $T_n(1) = V_n(1) = 1$, $U_n(1) = n+1$ *y* $W_n(1) = 2n+1$.
3. $T_n(-1) = W_n(-1) = (-1)^n$, $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$ *y* $V_n(-1) = (-1)^n(2n+1)$.
4. $T_n'(1) = n^2$, $U_n'(1) = \dfrac{1}{3}\, n(n+1)(n+2)$, $V_n'(1) = n(n+1)$ *y* $W_n'(1) = \dfrac{1}{3}\, n(n+1)(2n+1)$.
5. $T_n'(-1) = (-1)^{n+1}n^2$, $U_n'(-1) = \dfrac{1}{3}\,(-1)^{n+1}n(n+1)(n+2)$, $W_n'(-1) = (-1)^{n+1}n(n+1)$ *y* $V_n'(-1) = (-1)^{n+1}\dfrac{1}{3}\, n(n+1)(2n+1)$.

Demostración.

1. Las últimas igualdades de los apartados 1 y 3 de la proposición anterior, implican directamente que $T_{2n+1}(0) = U_{2n+1}(0) = 0$. Por otra parte, la segunda identidad de 1 muestra que $T_n(0) = U_n(0)$, mientras que la tercera de 4 implica que $U_n(0) = -T_{n+2}(0)$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y, en particular, que $T_{2n}(0) = U_{2n}(0) = -T_{2(n+1)}(0)$. Como $T_0(0) = 1$, es sencillo concluir que $T_{2n}(0) = (-1)^n$. Finalmente, de las identidades de los apartados 5 y 6 de la proposición anterior, obtenemos que

$$V_{2n}(0) = U_{2n}(0) - U_{2n-1}(0) = (-1)^n, \quad V_{2n+1}(0) = U_{2n+1}(0) - U_{2n}(0) = (-1)^{n+1},$$
$$W_{2n}(0) = U_{2n}(0) + U_{2n-1}(0) = (-1)^n, \quad W_{2n+1}(0) = U_{2n+1}(0) + U_{2n}(0) = (-1)^n.$$

2. Desde luego $T_0(1) = T_1(1) = 1$ y supuesto que $T_n(1) = 1$ para $n \ge 1$, resulta que $T_{n+1}(1) = 2T_n(1) - T_{n-1}(1) = 2 - 1 = 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, si $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $T_{-n}(1) = T_n(1) = 1$.

Por otra parte $U_0(1) = 1$, $U_1(1) = 2$ y supuesto que $U_n(1) = 1$ para $n \ge 1$, resulta que $U_{n+1}(1) = 2U_n(1) - U_{n-1}(1) = 2(n+1) - n = n+2$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Además, si $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $U_{-n}(1) = -U_{n-2}(1) = -(n-1) = -n+1$.

Finalmente los valores $V_n(1)$ y $W_n(1)$ se deducen directamente del correspondiente a $U_n(1)$ y de las primeras identidades de los apartados 5 y 6 de la proposición anterior.

3. Teniendo en cuanta los resultados del apartado 1, las igualdades son consecuencia directa de la aplicación a $x = -1$ de las últimas identidades de los apartados 1,3, 5 y 6 de la proposición anterior.

4. Demostraremos primero las identidades para los polinomios de Chebyshev de primera y de segunda especie. Para ello, observemos que si $\{P_n\}$ es una sucesión de polinomios de Chebyshev normalizada, entonces $P_0'(x) = 0$ y, teniendo en cuenta las identidades (38), resulta que para cada $n \in \mathbb{N}^*$ y cada $x \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$P_{n+1}'(x) = 2P_n(x) + 2xP_n'(x) - P_{n-1}'(x)$$

y, por tanto, $P_{n+1}'(1) = 2P_n(1) + 2P_n'(1) - P_{n-1}'(1)$.

Como $T_1'(1) = 1$, $U_1'(1) = 2$, se satisfacen las dos primeras igualdades para $n = 0, 1$. Supuesto cierto que para cada $n \geq 1$ se satisface que $T_n'(1) = n^2$ y $U_n'(1) = \dfrac{1}{3}\, n(n+1)(n+2)$, resulta que, teniendo en cuenta que $T_n(1) = 1$ y $U_n(1) = n + 1$,

$$\begin{aligned} T_{n+1}'(1) &= 2 + 2n^2 - (n-1)^2 = (n+1)^2, \\ U_{n+1}'(1) &= 2(n+1) + \frac{2}{3}\, n(n+1)(n+2) - \frac{1}{3}\,(n-1)n(n+1) \\ &= \frac{(n+1)}{3}\,[6 + n(n+5)] = \frac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3), \end{aligned}$$

de manera que las identidades son ciertas para $n \in \mathbb{N}$. Además, aplicando la Proposición 4.7, resulta que

$$\begin{aligned} T_{-n}'(1) &= T_n'(1) = n^2 = (-n)^2, \\ U_{-n}'(1) &= -U_{n-2}'(1) = -\frac{1}{3}\,(n-2)(n-1)n = \frac{1}{3}\,(-n)(-n+1)(-n+2), \end{aligned}$$

de manera que el resultado es cierto para $n \in \mathbb{Z}$. Finalmente, aplicando las primeras identidades de los apartados 5 y 6 de la proposición anterior, tenemos que para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} V_n'(1) &= U_n'(1) - U_{n-1}'(1) = \frac{1}{3}\,[n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1)] = n(n+1), \\ W_n'(1) &= U_n'(1) + U_{n-1}'(1) = \frac{1}{3}\,[n(n+1)(n+2) + (n-1)n(n+1)] = \frac{1}{3}\, n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

5. Las identidades son consecuencia directa de los resultados del apartado anterior junto con las últimas identidades de los apartados 1, 3, 5 y 6 de la proposición anterior. $\square$

Todas las identidades anteriores de relación entre los polinomios implican, en particular, que para determinar la expresión en potencias de la variable x de los polinomios de Chebyshev de primera, segunda, tercera y cuarta especie y de cualquier orden, es suficiente obtener la correspondiente a los de primera y segunda especie de orden $n \in \mathbb{N}$. Además, utilizando las fórmulas recurrentes (38), no es difícil obtener, ver [**42**], que

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k}{n-k} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k} \quad \text{y} \quad U_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}. \tag{39}$$

A continuación nos preocuparemos de describir las relaciones entre productos de polinomios de Chebyshev.

Proposición 4.10. *Para cada $n, m \in \mathbb{Z}$ y cada $x \in \mathbb{C}$ se satisfacen las siguientes identidades:*

1. $2\, T_n(x)\, T_m(x) = T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x)$.

2. $2\,T_n(x)\,U_m(x) = U_{n+m}(x) + U_{m-n}(x)$.
3. $2(x^2-1)\,U_n(x)\,U_m(x) = T_{n+m+2}(x) - T_{n-m}(x)$.
4. $(x+1)\,V_n(x)\,V_m(x) = T_{n+m+1}(x) + T_{n-m}(x)$.
5. $(x-1)\,W_n(x)\,W_m(x) = T_{n+m+1}(x) - T_{n-m}(x)$.

Demostración. En todos los casos consideraremos $m \in \mathbb{Z}$ arbitrario pero fijado y demostraremos las identidades para $n \in \mathbb{Z}$. Como en la Proposición 4.8 tendremos en cuenta que aplicando el Lema 4.3, los polinomios que aparecen a los dos lados de las igualdades determinan una sucesión de Chebyshev. Así pues, bastará comprobar que los correspondientes polinomios de órdenes cero y uno coinciden, o lo que es equivalente, que las identidades son ciertas para $n = 0, 1$. Para ello también haremos uso de los resultados de la Proposición 4.7.

1. Como $T_{-m}(x) = T_m(x)$ y $T_0 = 1$, la identidad es cierta para $n = 0$. Por otra parte, como $T_1(x) = x$, tenemos que $T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x) = 2T_1(x)T_m(x) - T_{m-1}(x)$, es decir, $2xT_m(x) = T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x)$, de manera que la identidad también es cierta para $n = 1$.

2. Como $T_0(x) = 1$, la identidad es obvia si $n = 0$. Como $T_1(x) = x$, nuevamente tenemos que $2xU_m(x) = U_{m+1}(x) + U_{m-1}(x)$, de manera que la identidad también es cierta para $n = 1$.

3. Aplicando la última igualdad del apartado 4 de la Proposición 4.8, tenemos la identidad $2(x^2-1)\,U_m(x) = T_{m+2}(x) - T_m(x)$ y como $T_m = T_{-m}$ y $U_0 = 1$, el resultado es cierto para $n = 0$. Por otra parte, $2(x^2-1)\,U_1(x)U_m(x) = 2xT_{m+2}(x) - 2xT_m(x)$, de manera que teniendo en cuenta que por la relación de recurrencia de la Definición 4.1, $2xT_k(x) = T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x)$, resulta que

$$2xT_{m+2}(x) - 2xT_m(x) = T_{m+3}(x) + T_{m+1}(x) - T_{m+1}(x) - T_{m-1}(x) = T_{m+3}(x) - T_{1-m}(x),$$

con lo que la identidad es también válida para $n = 1$.

4. Como para cada $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que $V_k = U_k - U_{k-1}$, aplicando la identidad del apartado 3, obtenemos que para cada $n, m \in \mathbb{Z}$ se satisface que

$$\begin{aligned} 2(x^2-1)V_n(x)V_m(x) &= 2(x^2-1)U_n(x)U_m(x) - 2(x^2-1)U_n(x)U_{m-1}(x) \\ &\quad - 2(x^2-1)U_{n-1}(x)U_m(x) + 2(x^2-1)U_{n-1}(x)U_{m-1}(x) \\ &= T_{n+m+2}(x) - T_{n-m}(x) - T_{n+m+1}(x) + T_{n-m+1}(x) \\ &\quad - T_{m+n+1}(x) + T_{n-m-1}(x) + T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2(x^2-1)V_n(x)V_m(x) &= T_{n+m+2}(x) + T_{n+m}(x) - 2T_{n+m+1}(x) \\ &\quad + T_{n-m+1}(x) + T_{n-m-1}(x) - 2T_{n-m}(x) \\ &= 2(x-1)T_{n+m+1}(x) + 2(x-1)T_{n-m}(x) \\ &= 2(x-1)[T_{n+m+1}(x) + T_{n-m}(x)], \end{aligned}$$

de donde se deduce la identidad propuesta para cada $x \neq 1$ y, por tanto, también para $x = 1$.

5. Teniendo en cuenta que $W_k = U_k + U_{k-1}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, aplicando nuevamente la identidad del apartado 3, obtenemos que para cada $n, m \in \mathbb{Z}$ se satisface que

$$\begin{aligned}2(x^2-1)W_n(x)W_m(x) &= 2(x^2-1)U_n(x)U_m(x) + 2(x^2-1)U_n(x)U_{m-1}(x)\\ &\quad + 2(x^2-1)U_{n-1}(x)U_m(x) + 2(x^2-1)U_{n-1}(x)U_{m-1}(x)\\ &= T_{n+m+2}(x) - T_{n-m}(x) + T_{n+m+1}(x) - T_{n-m+1}(x)\\ &\quad + T_{m+n+1}(x) - T_{n-m-1}(x) + T_{n+m}(x) - T_{n-m}(x).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}2(x^2-1)W_n(x)W_m(x) &= T_{n+m+2}(x) + T_{n+m}(x) + 2T_{n+m+1}(x)\\ &\quad - \Big(T_{n-m+1}(x) + T_{n-m-1}(x)\Big) - 2T_{n-m}(x)\\ &= 2(x+1)T_{n+m+1}(x) - 2(x+1)T_{n-m}(x)\\ &= 2(x+1)[T_{n+m+1}(x) - T_{n-m}(x)],\end{aligned}$$

de donde se deduce la identidad propuesta. □

COROLARIO 4.11. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cada $x \in \mathbb{C}$ se satisfacen las siguientes identidades*

1. $2\,T_n(x)\,T_{n-1}(x) = T_{2n-1}(x) + x$ *y* $2\,T_n(x)\,U_{n-1}(x) = U_{2n-1}(x)$.
2. $(x+1)\,V_n(x) = T_{n+1}(x) + T_n(x)$ *y* $(x-1)\,W_n(x) = T_{n+1}(x) - T_n(x)$.

Demostración. Las dos primeras identidades corresponden a las dos primeras de la Proposición 4.10 tomando $m = n-1$ y teniendo en cuenta que $T_1(x) = x$ y $U_{-1} = 0$. Las dos últimas identidades corresponden a las dos últimas de la Proposición 4.10 tomando $m = 0$ y teniendo en cuenta que $U_0 = V_0 = W_0 = 1$. □

COROLARIO 4.12. *Fijado $m \in \mathbb{Z}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ y cada $x \in \mathbb{C}$ se satisfacen las siguientes identidades*

1. $T_n(x)\,T_{m+n+1}(x) - T_{n+1}(x)\,T_{m+n}(x) = (x^2-1)U_{m-1}(x)$.
2. $T_n(x)\,U_{m+n+1}(x) - T_{n+1}(x)\,U_{m+n}(x) = T_{m+1}(x)$.
3. $T_n(x)\,V_{m+n+1}(x) - T_{n+1}(x)\,V_{m+n}(x) = (x-1)W_m(x)$.
4. $T_n(x)\,W_{m+n+1}(x) - T_{n+1}(x)\,W_{m+n}(x) = (x+1)V_m(x)$.
5. $U_n(x)\,U_{m+n+1}(x) - U_{n+1}(x)\,U_{m+n}(x) = -U_{m-1}(x)$.
6. $U_n(x)\,V_{m+n+1}(x) - U_{n+1}(x)\,V_{m+n}(x) = -V_{m-1}(x)$.
7. $U_n(x)\,W_{m+n+1}(x) - U_{n+1}(x)\,W_{m+n}(x) = W_{m-1}(x)$.
8. $V_n(x)\,V_{m+n+1}(x) - V_{n+1}(x)\,V_{m+n}(x) = 2(x-1)U_{m-1}(x)$.
9. $V_n(x)\,W_{m+n+1}(x) - V_{n+1}(x)\,W_{m+n}(x) = -2T_m(x)$.
10. $W_n(x)\,W_{m+n+1}(x) - W_{n+1}(x)\,W_{m+n}(x) = 2(x+1)U_{m-1}(x)$.

Demostración.

1. Aplicando la identidad del apartado 1 de la Proposición 4.10 y, posteriormente, la última identidad del apartado 4 de la Proposición 4.8, obtenemos que

$$T_n(x)T_{m+n+1}(x) - T_{n+1}(x)T_{m+n}(x) = \frac{1}{2}[T_{m+1}(x) - T_{m-1}(x)] = (x^2-1)U_{m-1}(x).$$

2. Aplicando el apartado 2 de la Proposición 4.10 y la primera identidad del apartado 1 de la Proposición 4.8, tenemos que

$$T_nU_{m+n+1} - T_{n+1}U_{m+n} = \frac{1}{2}[U_{m+1} - U_{m-1}] = T_{m+1}.$$

3. Aplicando primero el apartado 5 de la Proposición 4.8 y, posteriormente, el resultado del apartado anterior, obtenemos que

$$T_n V_{m+n+1} - T_{n+1} V_{m+n} = T_n U_{m+n+1} - T_{n+1} U_{m+n} - [T_n U_{m+n} - T_{n+1} U_{m+n-1}] = T_{m+1} - T_m,$$

de manera que el resultado se concluye del segundo apartado del anterior corolario.

4. Aplicando primero el apartado 6 de la Proposición 4.8 y, posteriormente, el resultado del apartado 2 anterior, obtenemos que

$$T_n W_{m+n+1} - T_{n+1} W_{m+n} = T_n U_{m+n+1} - T_{n+1} U_{m+n} + T_n U_{m+n} - T_{n+1} U_{m+n-1} = T_{m+1} + T_m,$$

de manera que el resultado se concluye del segundo apartado del anterior corolario.

5. Aplicando la identidad del apartado 3 de la Proposición 4.10 y, posteriormente, la última identidad del apartado 4 de la Proposición 4.8, obtenemos que para cada $x \neq \pm 1$,

$$U_n(x) U_{m+n+1}(x) - U_{n+1}(x) U_{m+n}(x) = \frac{-1}{2(x^2-1)} [T_{m+1}(x) - T_{m-1}(x)] = -U_{m-1}(x).$$

Por otra parte, aplicando los resultados de los apartados 2 y 3 del Corolario 4.9, obtenemos que

$$U_n(1) U_{m+n+1}(1) - U_{n+1}(1) U_{m+n}(1) = (n+1)(m+n+2) - (n+2)(n+m+1) = -m = -U_{m-1}(1),$$

mientras que

$$U_n(-1) U_{m+n+1}(-1) - U_{n+1}(-1) U_{m+n}(-1) = (-1)^m m = -U_{m-1}(-1),$$

de manera que la identidad propuesta es también válida para $x = \pm 1$.

6. Aplicando la primera identidad del apartado 5 de la Proposición 4.8 y, posteriormente, el resultado del apartado anterior, obtenemos que

$$U_n V_{m+n+1} - U_{n+1} V_{m+n} = U_n U_{m+n+1} - U_{n+1} U_{m+n} - [U_n U_{m+n} - U_{n+1} U_{m+n-1}] = U_{m-2} - U_{m-1},$$

de manera que el resultado se concluye de nuevo de la primera identidad del apartado 5 de la Proposición 4.8.

7. Aplicando la primera identidad del apartado 6 de la Proposición 4.8 y, posteriormente, el resultado del apartado 5 anterior, obtenemos que

$$U_n W_{m+n+1} - U_{n+1} W_{m+n} = U_n U_{m+n+1} - U_{n+1} U_{m+n} + U_n U_{m+n} - U_{n+1} U_{m+n-1} = U_{m-2} + U_{m-1},$$

de manera que el resultado se concluye de la primera identidad del apartado 6 de la Proposición 4.8.

8. Aplicando la primera identidad del apartado 5 de la Proposición 4.8 y, posteriormente, el resultado del apartado 6 anterior, obtenemos que

$$V_n V_{m+n+1} - V_{n+1} V_{m+n} = U_n V_{m+n+1} - U_{n+1} V_{m+n} - [U_{n-1} V_{m+n+1} - U_n V_{m+n}] = V_m - V_{m-1},$$

de manera que el resultado se concluye de la primera identidad del apartado 4 de la Proposición 4.8.

9. Aplicando la primera identidad del apartado 5 de la Proposición 4.8 y, posteriormente, el resultado del apartado 7 anterior, obtenemos que

$$V_n W_{m+n+1} - V_{n+1} W_{m+n} = U_n W_{m+n+1} - U_{n+1} W_{m+n} - [U_{n-1} W_{m+n+1} - U_n W_{m+n}] = W_{m-1} - W_m,$$

de manera que el resultado se concluye de la segunda identidad del apartado 2 de la Proposición 4.8.

10. Aplicando la primera identidad del apartado 6 de la Proposición 4.8 y, posteriormente, el resultado del apartado 7 anterior, obtenemos que

$$W_nW_{m+n+1}-W_{n+1}W_{m+n}=U_nW_{m+n+1}-U_{n+1}W_{m+n}+U_{n-1}W_{m+n+1}-U_nW_{m+n}=W_{m-1}+W_m,$$

de manera que el resultado se concluye de la segunda identidad del apartado 4 de la Proposición 4.8. □

Acabaremos esta sección evaluando las sumas de diferentes familias de polinomios de Chebyshev.

PROPOSICIÓN 4.13. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $x \in \mathbb{C}$ se satisfacen las siguientes identidades:*

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} T_{2k+1}(x)=\frac{1}{2}\,U_{2n+1}(x)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} T_{2k}(x)=\frac{1}{2}[U_{2n}(x)+1]$ *y* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} T_k(x)=\frac{1}{2}[W_n(x)+1]$.

2. $\displaystyle(x-1)\sum_{k=0}^{n} U_k(x)=\frac{1}{2}[V_{n+1}(x)-1]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k(x)=U_n(x)$ *y* $\displaystyle(x-1)\sum_{k=0}^{n} W_k(x)=T_{n+1}(x)-1$.

Demostración.

1. Como $T_1(x)=x=\frac{1}{2}\,U_1(x)$ y $T_0(x)=1=\frac{1}{2}\,[U_0(x)+1]$, las dos primeras identidades son ciertas para $n=0$. Supuestas válidas para n, aplicando la primera identidad del apartado 1 de la Proposición 4.8,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} T_{2k+1}(x)&=\tfrac{1}{2}\,U_{2n+1}(x)+T_{2n+3}(x)\\&=\tfrac{1}{2}\,U_{2n+1}(x)+\tfrac{1}{2}\,[U_{2n+3}(x)-U_{2n+1}(x)]=\tfrac{1}{2}\,U_{2n+3}(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} T_{2k}(x)&=\tfrac{1}{2}[U_{2n}(x)+1]+T_{2n+2}(x)\\&=\tfrac{1}{2}[U_{2n}(x)+1]+\tfrac{1}{2}\,[U_{2n+2}(x)-U_{2n}(x)]=\tfrac{1}{2}\,[U_{2n+2}(x)+1],\end{aligned}$$

lo que demuestra las dos primeras identidades. Por otra parte, para cada $n \in \mathbb{N}$, si tenemos en cuenta las anteriores igualdades y la primera identidad del apartado 6 de la Proposición 4.8, resulta que

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n+1} T_k(x)&=\sum_{k=0}^{n} T_{2k+1}(x)+\sum_{k=0}^{n} T_{2k}(x)=\tfrac{1}{2}\,U_{2n+1}(x)+\tfrac{1}{2}\,[U_{2n}(x)+1]=\tfrac{1}{2}\,[W_{2n+1}(x)+1],\\\sum_{k=0}^{2n} T_k(x)&=\sum_{k=0}^{n} T_{2k}(x)+\sum_{k=0}^{n-1} T_{2k+1}(x)=\tfrac{1}{2}\,[U_{2n}(x)+1]+\tfrac{1}{2}\,U_{2n-1}(x)=\tfrac{1}{2}\,[W_{2n}(x)+1],\end{aligned}$$

lo que concluye la tercera identidad.

2. Aplicando la identidad del tercer apartado de la Proposición 4.10, obtenemos que

$$2(x^2-1)\sum_{k=0}^{n} U_k(x)=\sum_{k=0}^{n} T_{k+2}(x)-\sum_{k=0}^{n} T_k(x)=T_{n+2}(x)+T_{n+1}(x)-T_0(x)-T_1(x),$$

de manera que aplicando la identidad del apartado 4 de la misma proposición,

$$2(x^2-1)\sum_{k=0}^{n} U_k(x)=(x+1)[V_{n+1}(x)-1],$$

lo que implica la identidad propuesta para $x \neq -1$. Por otra parte,

$$-2\sum_{k=0}^{n} U_k(-1) = -2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(k+1) = \frac{1}{2}[(-1)^{n+1}(2n+3)-1] = \frac{1}{2}[V_{n+1}(-1)-1],$$

lo que implica también la identidad para $x = -1$.

Además, teniendo en cuenta que $U_{-1} = 0$ y la primera identidad del apartado 5 de la Proposición 4.8, resulta que

$$\sum_{k=0}^{n} V_k(x) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x) - \sum_{k=0}^{n-1} U_k(x) = U_n(x),$$

mientras que de la primera identidad del apartado 6 de la Proposición 4.8, resulta que

$$(x-1)\sum_{k=0}^{n} W_k(x) = (x-1)\sum_{k=0}^{n} U_k(x) + (x-1)\sum_{k=0}^{n-1} U_k(x) = (x-1)U_n(x) + 2(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} U_k(x),$$

de manera que aplicando la primera identidad de este apartado y la segunda identidad del apartado 5 de la Proposición 4.8

$$(x-1)\sum_{k=0}^{n} W_k(x) = T_{n+1}(x) - V_n(x) + V_n(x) - 1 = T_{n+1}(x) - 1. \qquad \square$$

5. Teorema de Estructura

Nuestro objetivo en esta sección es mostrar la conocida relación entre los polinomios de Chebyshev y las ecuaciones en diferencias autoadjuntas con coeficientes constantes. Esta relación nos permitirá obtener expresiones unificadas de las soluciones de estas ecuaciones y, por extensión, de las soluciones de las ecuaciones con coeficientes constantes en general, es decir, expresiones que no dependan de cuando su coeficiente $|b|$ sea igual a, mayor que o menor que el coeficiente $2a$. Recíprocamente, la relación entre los polinomios de Chebyshev y las ecuaciones en diferencias nos permitirá obtener a lo largo del resto del trabajo algunas relaciones muy útiles para diversas familias de polinomios de Chebyshev.

Si consideramos el conjunto $\mathbb{K}$ que denota $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y, por tanto, $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$, una sucesión de elementos de $\mathbb{K}$ es una función $v\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{K}$ y denotamos por $\ell(\mathbb{K})$ el espacio de todas las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$. Claramente, $\ell(\mathbb{R}) = \mathcal{C}(\mathbb{Z})$.

Dados $v \in \ell(\mathbb{K})$ y $p \in \mathbb{N}^*$, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ denotamos por $v_{p,m} \in \ell(\mathbb{K})$ la subsucesión de v definida como

$$v_{p,m}(k) = v(kp+m), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Obviamente, cualquier sucesión $v \in \ell(\mathbb{K})$ está completamente determinada por los valores de las sucesiones $v_{p,j}$, para $0 \leq j \leq p-1$. En particular, $v_{1,0} = v$, mientras que $v_{2,0}$ y $v_{2,1}$ son las subsucesiones de índices pares e impares, respectivamente. Además, las subsucesiones $v_{1,m}$ son las *traslaciones* de v, ya que $v_{1,m}(k) = v(k+m)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Nótese que si permitimos $p = -1$, entonces $v_{-1,m}$ son las *traslaciones simetrizadas* de v, puesto que $v_{-1,m}(k) = v(m-k)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Recordemos que una sucesión de polinomios $\{P_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}[x]$ es una *sucesión de polinomios de Chebyshev* si satisface la siguiente recurrencia de tres términos

$$P_{k+1}(x) = 2xP_k(x) - P_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{Z},$$

y el elemento P_k de la sucesión anterior es un *polinomio de Chebyshev de grado k*.

Dado $q \in \mathbb{K}$, la ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes

$$v(k+1) - 2qv(k) + v(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{40}$$

se denomina *ecuación de Chebyshev con parámetro* q y sus soluciones se denominan *sucesiones de Chebyshev con parámetro* q. Obviamente, cualquier traslación o traslación simetrizada de una sucesión de Chebyshev es también una sucesión de Chebyshev. Además, una sucesión de Chebyshev determina su parámetro, ya que si $v \in \ell(\mathbb{K})$ es una sucesión de Chebyshev con parámetro q y $\hat{q}$, entonces

$$2qv(k) = v(k+1) + v(k-1) = 2\hat{q}v(k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

y, por tanto, $2(q - \hat{q})z = 0$, que implica que $q = \hat{q}$.

Claramente, cualquier sucesión de Chebyshev con parámetro q es de la forma $\{P_k(q)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, donde $\{P_k(x)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión de polinomios de Chebyshev. En particular, para cualquier sucesión de Chebyshev $v(k)$ existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$v(k) = \alpha U_{k-1}(q) + \beta U_{k-2}(q), \text{para cualquier } \; k \in \mathbb{Z}.$$

En consecuencia, muchas propiedades de las sucesiones de Chebyshev son consecuencia de las propiedades de los polinomios de Chebyshev y viceversa.

Ya habíamos anunciado en secciones precedentes que las *ecuaciones de Chebyshev* y los *polinomios de Chebyshev* juegan un importante papel en el estudio de las ecuaciones con coeficientes constantes, cometido que queda descrito en los siguientes resultados. Comenzamos con un resultado fácil de demostrar que involucra ecuaciones en diferencias de primer orden con coeficientes constantes.

LEMA 5.1. *Sea $r \in \mathbb{K}^*$ y se considera $q = \frac{1}{2}(r + r^{-1})$. Entonces, una función $u \in \ell(\mathbb{K})$ es una solución de la ecuación en diferencias de primer orden $u(k+1) = ru(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, sii es una solución de la ecuación de Chebyshev $v(k+1) - 2qv(k) + v(k-1) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, que satisface $v(1) = rv(0)$ o, equivalentemente, sii v es un múltiplo de $rU_{k-1}(q) - U_{k-2}(q)$.*

El segundo resultado atañe a las subsucesiones pares e impares de una sucesión de Chebyshev dada.

LEMA 5.2. *Sea $q \in \mathbb{K}$ y $v \in \ell(\mathbb{K})$ una solución de la ecuación de Chebyshev*

$$v(k+1) - 2qv(k) + v(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, la subsucesión $v_{2,m}$ es una sucesión de Chebyshev con parámetro $2q^2 - 1$.

Demostración. Cuando $q = 0$, entonces $v(k) = -v(k-2)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$; lo que implica que $v_{2,m}(k) = -v_{2,m}(k-1)$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Aplicando el Lema 5.1 obtenemos que $v_{2,m}$ es solución de la ecuación de Chebyshev con parámetro $-1 = 2q^2 - 1$. Cuando $q \in \mathbb{K}^*$, para cualquier

$k \in \mathbb{Z}$ tenemos que $v(k) = \dfrac{1}{2q}\big[v(k+1) + v(k-1)\big]$ y, por tanto,

$$\begin{aligned}
0 &= v(2k+m+1) - 2qv(2k+m) + v(2k+m-1) \\
&= \frac{1}{2q}\big[v(2k+m+2) + 2v(2k+m) + v(2k+m-2)\big] - 2qv(2k+m) \\
&= \frac{1}{2q}\big[v(2k+m+2) - 2(2q^2-1)v(2k+m) + v(2k+m-2)\big] \\
&= \frac{1}{2q}\big[v_{2,m}(k+1) - 2(2q^2-1)v_{2,m}(k) + v_{2,m}(k-1)\big],
\end{aligned}$$

verificándose el lema. □

Como mencionamos anteriormente, muchas propiedades e identidades que involucran polinomios de Chebyshev son consecuencia de ser soluciones de las ecuaciones de Chebyshev. Por ejemplo, a partir del lema anterior se obtienen las siguientes identidades clásicas, veáse (1.14) y (1.15) en [**42**],

$$U_{2k}(x) = W_k(2x^2-1) \ \text{ y } \ U_{2k+1}(x) = 2xU_k(2x^2-1), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{41}$$

que a su vez implica

$$T_{2k}(x) = T_k(2x^2-1) \ \text{ y } \ T_{2k+1}(x) = xV_k(2x^2-1), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{42}$$

A continuación presentamos el Teorema que da título a esta sección y que es su resultado principal. Muestra que cualquier ecuación en diferencias con coeficientes contantes es equivalente a una ecuación de Chebyshev. Aunque es un resultado conocido, véase [**2**, Teorema 3.1], reproducimos también su demostración.

TEOREMA 5.3 (Teorema de Estructura). *Consideramos $a, c \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ y $u \in \ell(\mathbb{K})$ una solución de la ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes*

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, $u(k) = (\sqrt{a^{-1}c})^k v(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, donde $v \in \ell(\mathbb{K})$ es una solución de la ecuación de Chebyshev

$$v(k+1) - 2qv(k) + v(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

cuyo parámetro es $q = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$. Además, si $ac > 0$, entonces $v \in \ell(\mathbb{R})$, mientras que cuando $ac < 0$ entonces, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, $u_{2,m}(k) = (a^{-1}c)^k w(k)$, donde $w \in \ell(\mathbb{R})$ es una solución de la ecuación de Chebyshev

$$w(k+2) - 2\hat{q}w(k+1) + w(k) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

cuyo parámetro es $\hat{q} = \dfrac{b^2}{2ac} - 1 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Claramente, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$0 = au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = (\sqrt{a^{-1}c})^{k-1}\Big[cv(k+1) - b\sqrt{a^{-1}c}\,v(k) + cv(k-1)\Big].$$

Entonces, $v \in \ell(\mathbb{C})$ es una solución de la ecuación en diferencias

$$0 = cv(k+1) - b\sqrt{a^{-1}c}v(k) + cv(k-1)$$

o, equivalentemente, de la ecuación de Chebyshev con parámetro $q = \dfrac{b\sqrt{a^{-1}c}}{2c} = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$. Si $ac > 0$, entonces $q \in \mathbb{R}$ y, además, $v \in \ell(\mathbb{R})$; mientras que si $ac < 0$, entonces $\hat{q} = 2q^2 - 1 = \dfrac{b^2}{2ac} - 1 \in \mathbb{R}$. Además, dado $m \in \mathbb{Z}$, $(\sqrt{a^{-1}c})^m v$ es también una solución de la ecuación de Chebyshev con parámetro q y, en consecuencia, aplicando el Lema 5.2, $w = (\sqrt{a^{-1}c})^m v_{2,m}$ es una solución de la ecuación de Chebyshev con parámetro $\hat{q} \in \mathbb{R}$. Por tanto, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ obtenemos

$$w(k) = (\sqrt{a^{-1}c})^m v(2k+m) = (\sqrt{a^{-1}c})^m (\sqrt{a^{-1}c})^{-m-2k} u(2k+m) = (a^{-1}c)^{-k} u_{2,m}(k)$$

que, en particular, implica que $w \in \ell(\mathbb{R})$ y, en consecuencia, el resultado. □

La resolución del problema de valor inicial

$$v(k+1) - 2q\, v(k) + v(k+1) = 0, \quad v(0) = 0, \;\; v(1) = 1,$$

conduce a la *solución fundamental* ϕ_q. Y puesto que cualquier sucesión de Chebyshev puede expresarse como combinación lineal de polinomios de Chebyshev de segunda especie de la forma $v(k) = \alpha U_{k-1}(q) + \beta U_{k-2}(q)$, entonces $\phi_q(k) = U_{k-1}(q)$. Por tanto, aplicando el Teorema 2.7 obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 5.4. *Para cualesquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, cualquier $m \in \mathbb{Z}$ y cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$. la única solución del problema de valor inicial*

$$v(k+1) - 2q\, u(k) + v(k-1) = f(k), \quad v(m) = x_0, \;\; v(m+1) = x_1,$$

viene dada por

$$v(k) = x_1 U_{k-m-1}(q) - x_0 U_{k-m-2}(q) + \int_m^k U_{k-s-1}(q) f(s) ds, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Y el *Teorema de Estructura* nos proporciona, finalmente, los siguientes resultados.

COROLARIO 5.5. *La única solución del problema de valor inicial*

$$a\, u(k+1) - b\, u(k) + c\, u(k-1) = f(k), \quad u(0) = 0, \;\; u(1) = 1,$$

viene dada por $u(k) = (\sqrt{a^{-1}c})^{k-1} U_{k-1}(q)$, $k \in \mathbb{Z}$, *donde* $q = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$.

Y para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, la única solución del problema de valor inicial

$$a\, w(k+1) - b\, w(k) + c\, w(k-1) = f(k), \quad w(m) = 0, \;\; w(m+1) = 1, \tag{43}$$

viene dada por $w(k) = u(k-m) = (\sqrt{a^{-1}c})^{k-m-1} U_{k-m-1}(q)$, $k \in \mathbb{Z}$.

COROLARIO 5.6 (Fórmula de Lagrange para ecuaciones con coeficientes constantes). *Para cualesquiera $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, cualquier $m \in \mathbb{Z}$ y cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, la única solución del problema de valor inicial*

$$a\, u(k+1) - b\, u(k) + c\, u(k-1) = f(k), \quad u(m) = x_0, \;\; u(m+1) = x_1,$$

viene dada por

$$\begin{aligned} u(k) &= x_1 (\sqrt{a^{-1}c})^{k-m-1} U_{k-m-1}(q) - x_0 (\sqrt{a^{-1}c})^{k-m} U_{k-m-2}(q) \\ &\quad + \frac{1}{a} \int_m^k (\sqrt{a^{-1}c})^{k-s-1} U_{k-s-1}(q) f(s) ds, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

donde $q = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$.

NOTA 5.7. En la Sección 5 del primer capítulo se determinó una base de soluciones $\{\phi, \psi\}$ de la ecuación homogénea asociada a las denominadas ecuaciones *desacopladas*, que son las ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden en las que el coeficiente b es nulo. Como caso particular se obtuvo también esa misma base de soluciones en el caso de coeficientes constantes, es decir, para las ecuaciones

$$au(k+1) + cu(k-1) = f(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

donde $a, c \in \mathbb{R}^*$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$.

También se anunció que se contrastaría los resultados obtenidos con los que determinaran la teoría presentada en este capítulo para la resolución de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes.

Con las técnicas presentadas en esta sección, la función ϕ correspondería a la solución del Problema de Valor Inicial (43) con $b = 0$ y $m = -1$; es decir, $\phi(k) = (\sqrt{a^{-1}c})^k U_k(0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Teniendo en cuenta del Corolario 4.9 que $U_{2n}(0) = (-1)^n$ y $U_{2n+1}(0) = 0$, $\phi(k) = 0$ sii k es impar y $\phi(k) = (-1)^{\frac{k}{2}}(\sqrt{a^{-1}c})^k$ para k par.

Para la función ψ tenemos que considerar $b = 0$ y $m = 0$, así que $\psi(k) = (\sqrt{a^{-1}c})^{k-1}U_{k-1}(0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, $\psi(k) = 0$ sii k es par, mientras que $\psi(k) = (-1)^{\frac{k-1}{2}}(\sqrt{a^{-1}c})^{k-1}$ para k impar.

En ambos casos, hemos obtenido idénticas soluciones a las del Capítulo 1 de forma más rápida y directa.

Finalizamos esta sección mostrando que la equivalencia entre cualquier ecuación en diferencias de segundo orden y las ecuaciones de Chebyshev dada en el Teorema 5.3, conduce también a los siguientes resultados que relacionan los polinomios de Chebyshev de segunda especie con los *números de Horadam*, los de *Fibonacci*, los de *Pell* y los de *Jacobsthal*, todos ellos presentados en la primera sección de este capítulo como ejemplos de soluciones de ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes.

LEMA 5.8. *Dados* $r, s \in \mathbb{Z}$ *y* $s \neq 0$, *se obtienen los siguientes resultados:*

(i) *Si* $s < 0$, *entonces* $H_n(r,s) = (\sqrt{-s})^{n-1}U_{n-1}\big(\frac{r}{2\sqrt{-s}}\big)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) *Si* $s > 0$, *entonces* $H_{2n}(r,s) = rs^{n-1}U_{n-1}\big(1 + \frac{r^2}{2s}\big)$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En particular, para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{2n} = U_{n-1}\big(\frac{3}{2}\big)$, $J_{2n} = 2^{n-1}U_{n-1}\big(\frac{5}{4}\big)$, *y* $P_{2n} = 2U_{n-1}(3)$. *Además,* $H_{2n}(r,r) = r^n U_{n-1}\big(1 + \frac{r}{2}\big)$ *cuando* $r > 0$ *y* $H_n(r,r) = (\sqrt{-r})^{n-1}U_{n-1}\big(\frac{\sqrt{-r}}{2}\big)$ *para* $r < 0$.

Nuestro próximo objetivo es extender el resultado principal de esta sección a todo tipo de ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden. En la siguiente sección lo hacemos para las ecuaciones con coeficientes periódicos. En el capítulo siguiente, entre otras cosas, los ampliamos para coeficientes variables en general.

6. Ecuaciones con coeficientes periódicos

En esta sección desarrollamos un procedimiento que reduce cualquier ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes periódicos a una ecuación en diferencias del mismo tipo pero con coeficientes constantes. De esta forma, las soluciones de la primera ecuación pueden ser expresadas en términos de polinomios de Chebyshev. Además, este resultado es también valido cuando los coeficientes pertenecen a un tipo mas general de sucesiones, que nosotros denominamos *sucesiones casi–periódicas*.

Recordemos que denotamos por $\ell(\mathbb{K})$ el espacio de todas las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$ y, entonces, $\ell(\mathbb{K}^*) \subset \ell(\mathbb{K})$ es el subconjunto de sucesiones $z \in \ell(\mathbb{K})$ tales que $z(k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. La sucesión nula se denota por $\mathsf{0}$.

La sucesión $z \in \ell(\mathbb{K})$ se denomina *casi–periódica con periodo* $p \in \mathbb{N}^*$ *y razón* $r \in \mathbb{K}^*$ si satisface que

$$z(p+k) = r\, z(k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

que también implica que $z(kp+m) = r^k z(m)$ para cualquier $k, m \in \mathbb{Z}$.

Claramente, una sucesión $z \in \ell(\mathbb{K})$ es periódica con periodo p si y solo si es casi–periódica con periodo p y razón $r = 1$. El conjunto de las sucesiones casi–periódicas con periodo p y razón r se denota por $\ell(\mathbb{K}; p, r)$ y definimos $\ell(\mathbb{K}^*; p, r) = \ell(\mathbb{K}; p, r) \cap \ell(\mathbb{K}^*)$. Entonces, $\ell(\mathbb{K}; p, 1)$ es el espacio de las sucesiones periódicas con periodo p, mientras que $\ell(\mathbb{K}; 1, r)$ es el conjunto de las sucesiones geométricas de razón r; es decir, si $z \in \ell(\mathbb{K}; 1, r)$, entonces $z(k) = z(0)r^k$. En particular, $\ell(\mathbb{K}; 1, 1)$ representa a todas las sucesiones constantes y se identifica con $\mathbb{K}$.

En los sucesivo omitimos el parámetro r cuando vale 1. Entonces, el espacio de las sucesiones periódicas con periodo p se denota por $\ell(\mathbb{K}; p)$ y, por tanto, $\ell(\mathbb{K}; 1)$ representa las sucesiones constantes.

Si $z \in \ell(\mathbb{K}; p, r)$ no es una sucesión nula, entonces $r = z(k_0)^{-1} z(k_0 + p)$, donde $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N} : z(k) \neq 0\}$. Entonces, si z es una sucesión casi–periódica no nula de periodo p, entonces z está determinada por los $p+1$ valores $z(j)$, $j = 0, \dots, p-1$ y r o, equivalentemente, por los valores $z(j)$, $j = 0, \dots, p$.

LEMA 6.1. *Dados* $p \in \mathbb{N}^*$ *y* $r \in \mathbb{K}^*$, *entonces* $z \in \ell(\mathbb{K}; p, r)$ *sii la subsucesión* $z_{p,m} \in \ell(\mathbb{K}; 1, r)$ *para cualquier* $m \in \mathbb{Z}$. *Además,* $\ell(\mathbb{K}; p, r) \subset \ell(\mathbb{K}; np, r^n)$ *para cualquier* $n \in \mathbb{N}^*$.

Dadas tres funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbb{Z})$ y $b \in \mathcal{C}(\mathbb{Z})$, consideramos la ecuación en diferencias irreducible de segundo orden y homogénea

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{44}$$

La Ecuación (44) tiene *coeficientes casi–periódicos con periodo* $p \in \mathbb{N}^*$ *y razón* $r \in \mathbb{R}^*$ si $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$ y $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$. Es bien conocido que cualquier ecuación en diferencias lineal y irreducible de segundo orden es equivalente a una ecuación autoadjunta. Con este fin, consideramos la *función de acompañamiento* $\rho_{a,c} \in \mathcal{C}^*(\mathbb{Z})$ definida en la Ecuación (7) del Capítulo 1.

LEMA 6.2. *Dados* $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbb{Z})$, *se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $\rho_{a,c}(k) = 1$ *para todo* $k \in \mathbb{Z}$ *sii* $a = c$.

(ii) $\rho_{a,c}(k-1)a(k-1) = \rho_{a,c}(k)c(k-1)$, $k \in \mathbb{Z}$. *Entonces,* $z \in \ell(\mathbb{K})$ *es una solución de la ecuación en diferencias cuyos coeficientes son* a, b *y* c *sii es una solución de la ecuación en diferencias autoadjunta cuyos coeficientes son* $\rho_{a,c}a$ *y* $\rho_{a,c}b$.

(iii) *Si* $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$, *entonces* $\rho_{a,c} \in \ell\big(\mathbb{R}^*; p, \rho_{a,c}(p)\big)$. *Por tanto, si* $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$, *entonces* $\rho_{a,c}b \in \ell\big(\mathbb{R}; p, r\rho_{a,c}(p)\big)$.

El siguiente resultado muestra el papel que juegan las ecuaciones de Chebyshev en la resolución de ciertos sistemas lineales de ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes. Es justamente la clave para resolver ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes casi–periódicos.

PROPOSICIÓN 6.3. *Dados $p \in \mathbb{N}^*$, $a_j \in \mathbb{R}^*$ y $b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, p-1$, consideramos las funciones $v_j \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$, $j = 0, \dots, p-1$, que satisfacen las igualdades*

$$\begin{cases} b_0 v_0(k) = a_0 v_1(k) + a_{p-1} v_{p-1}(k-1), & \\ b_j v_j(k) = a_j v_{j+1}(k) + a_{j-1} v_{j-1}(k), & j = 1, \dots, p-2, \\ b_{p-1} v_{p-1}(k) = a_{p-1} v_0(k+1) + a_{p-2} v_{p-2}(k), & \end{cases}$$

donde $v_1(k) = v_0(k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, cuando $p = 1$. Entonces, existe $q_p(a_0, \dots, a_{p-1}; b_0, \dots, b_{p-1}) \in \mathbb{R}$ tal que para cualquier $j = 0, \dots, p-1$, v_j es una solución de la ecuación de Chebyshev

$$v(k+1) - 2q_p(a_0, \dots, a_{p-1}; b_0, \dots, b_{p-1}) v(k) + v(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Se demuestra por inducción en p.

Si $p = 1$, el sistema se reduce a la ecuación $b_0 v_0(k) = a_0 v_0(k+1) + a_0 v_0(k-1)$ y, por tanto, basta con tomar $q_1(a_0; b_0) = \dfrac{b_0}{2a_0} \in \mathbb{R}$.

Si $p = 2$, entonces el sistema resulta

$$\begin{cases} b_0 v_0(k) = a_0 v_1(k) + a_1 v_1(k-1), \\ b_1 v_1(k) = a_1 v_0(k+1) + a_0 v_0(k). \end{cases}$$

Si $b_1 \neq 0$, despejando v_1 de la segunda ecuación y sustituyendo su valor en la primera, se obtiene

$$b_0 v_0(k) = \frac{1}{b_1}\Big[a_0 a_1 v_0(k+1) + (a_0^2 + a_1^2) v_0(k) + a_0 a_1 v_0(k-1)\Big],$$

que implica $q_2(a_0, a_1; b_0, b_1) = \dfrac{1}{2a_0 a_1}\big[b_0 b_1 - a_0^2 - a_1^2\big] \in \mathbb{R}$. Además, puesto que $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{R}$, obtenemos que

$$iq_2(\pm i a_0, a_1; b_0, b_1) = \frac{\pm 1}{2a_0 a_1}\big[b_0 b_1 + a_0^2 - a_1^2\big] \in \mathbb{R} \text{ y } iq_2(a_0, \pm i a_1; b_0, b_1) = \frac{\pm 1}{2a_0 a_1}\big[b_0 b_1 - a_0^2 + a_1^2\big] \in \mathbb{R}.$$

Como la anterior ecuación de Chebyshev con parámetro q_2 tiene coeficientes constantes, la función $v \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ definida para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ como $v(k) = v_0(k+1)$ es también solución de la misma ecuación. Por tanto, v_1 es también una solución ya que, de la segunda ecuación del sistema, es una combinación lineal de las funciones v y v_0.

Si $b_0 \neq 0$, entonces despejando v_0 de la primera ecuación y sustituyendo su valor en la segunda, se obtiene

$$b_1 v_1(k) = \frac{1}{b_0}\Big[a_0 a_1 v_1(k+1) + (a_0^2 + a_1^2) v_1(k) + a_0 a_1 v_1(k-1)\Big],$$

que implica nuevamente las mismas conclusiones anteriores.

Si $b_0 = b_1 = 0$, entonces $v_1(k) = r v_1(k-1)$ y $v_0(k+1) = r^{-1} v_0(k)$, donde $r = -\dfrac{a_1}{a_0}$. Entonces, aplicando el Lema 5.1, obtenemos que ambos, v_0 y v_1 son soluciones de la ecuación de Chebyshev con parámetro $\frac{1}{2}(r + r^{-1}) = q_2(a_0, a_1; 0, 0)$.

Supongamos ahora que $p \geq 3$ y que la proposición se verifica para cualquier $1 \leq \ell \leq p-1$.

Si $b_{p-1} \neq 0$, entonces de la última ecuación tenemos

$$v_{p-1}(k) = b_{p-1}^{-1} a_{p-1} v_0(k+1) + b_{p-1}^{-1} a_{p-2} v_{p-2}(k), \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z},$$

y sustituyendo el valor de $v_{p-1}(k-1)$ y de $v_{p-1}(k)$ en la primera y en la penúltima ecuación del sistema, obtenemos

$$\begin{cases} b_{p-1}^{-1}(b_0 b_{p-1} - a_{p-1}^2) v_0(k) = a_0 v_1(k) + b_{p-1}^{-1} a_{p-1} a_{p-2} v_{p-2}(k-1), & \\ b_j v_j(k) = a_j v_{j+1}(k) + a_{j-1} v_{j-1}(k), & j = 1, \dots, p-3, \\ b_{p-1}^{-1}(b_{p-2} b_{p-1} - a_{p-2}^2) v_{p-2}(k) = b_{p-1}^{-1} a_{p-2} a_{p-1} v_0(k+1) + a_{p-3} v_{p-3}(k). & \end{cases}$$

Aplicando la hipótesis de inducción y considerando

$$q_p = q_{p-1}\left(a_0, a_1, \dots, a_{p-3}, b_{p-1}^{-1} a_{p-2} a_{p-1}; b_{p-1}^{-1}(b_0 b_{p-1} - a_{p-1}^2), b_1, \dots, b_{p-3}, b_{p-1}^{-1}(b_{p-2} b_{p-1} - a_{p-2}^2)\right),$$

$q_p \in \mathbb{R}$ y para cualquier $j = 0, \dots, p-2$ se verifica que

$$2 q_p v_j(k) = v_j(k+1) + v_j(k-1), \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z}.$$

Además, como v_{p-1} es una combinación lineal de dos soluciones de la misma ecuación de Chebyshev, es también una solución de ésta. Y también, puesto que $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, p-1$, entonces $b_{p-1}^{-1} a_{p-2} a_{p-1}, b_{p-1}^{-1}(b_0 b_{p-1} - a_{p-1}^2), b_{p-1}^{-1}(b_{p-2} b_{p-1} - a_{p-2}^2) \in \mathbb{R}$ y aplicando la hipótesis de inducción podemos concluir que

$$i q_p(a_0, \dots, \pm i a_j, \dots, a_{p-1}; b_0, \dots, b_{p-1}) \in \mathbb{R},$$

para cualquier $j = 0, \dots, p-1$.

Cuando $b_0 \neq 0$, despejando v_0 de la primera ecuación y aplicando el mismo razonamiento anterior, para cualquier $j = 0, \dots, p-1$ se obtiene

$$2 q_p v_j(k) = v_j(k+1) + v_j(k-1), \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z},$$

donde

$$q_p = q_{p-1}\left(a_1, \dots, a_{p-2}, b_0^{-1} a_0 a_{p-1}; b_0^{-1}(b_0 b_1 - a_0^2), b_2, \dots, b_{p-2}, b_0^{-1}(b_0 b_{p-1} - a_{p-1}^2)\right) \in \mathbb{R}$$

y las restantes propiedades de q_p también se verifican.

Si $b_0 = b_{p-1} = 0$, entonces $v_0(k) = -a_{p-1}^{-1} a_{p-2} v_{p-2}(k-1)$ y $v_{p-1}(k) = -a_{p-1}^{-1} a_0 v_1(k+1)$ y, por tanto, sustituyendo sus valores en la segunda y en la penúltima ecuación, obtenemos

$$\begin{cases} b_1 v_1(k) = a_1 v_2(k) - a_{p-1}^{-1} a_0 a_{p-2} v_{p-2}(k-1), & \\ b_j v_j(k) = a_j v_{j+1}(k) + a_{j-1} v_{j-1}(k), & j = 2, \dots, p-3, \\ b_{p-2} v_{p-2}(k) = -a_{p-1}^{-1} a_0 a_{p-2} v_1(k+1) + a_{p-3} v_{p-3}(k). & \end{cases}$$

Aplicando nuevamente la hipótesis de inducción y tomando

$$q_p = q_{p-2}\left(a_1, \dots, a_{p-3}, -a_{p-1}^{-1} a_0 a_{p-2}; b_1, \dots, b_{p-2}\right) \in \mathbb{R},$$

entonces para cualquier $j = 1, \dots, p-2$ se verifica que

$$2 q_p v_j(k) = v_j(k+1) + v_j(k-1), \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente, como las funciones v_0 y v_{p-1} son ambas múltiplos de las soluciones de la anterior ecuación de Chebyshev, son también soluciones de ésta. Además, puesto que $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, p-1$, $-a_{p-1}^{-1} a_0 a_{p-2} \in \mathbb{R}$, y vuelve a verificarse que

$$i q_p(a_0, \dots, \pm i a_j, \dots, a_{p-1}; b_0, \dots, b_{p-1}) \in \mathbb{R}, \quad \text{para cualquier } j = 1, \dots, p-1. \quad \square$$

Estamos ya en disposición de presentar el resultado principal de esta sección.

TEOREMA 6.4. *Consideramos* $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{R}^*$, $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$, $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$, $s = \rho_{a,c}(p)$, $\gamma = (\sqrt{rs})^{-1}$ *y* $u \in \ell(\mathbb{K})$ *una solución de la ecuación con coeficientes casi–periódicos*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Entonces, existe $q_{p,r}(a; b; c) \in \mathbb{C}$ *tal que para cualquier* $m \in \mathbb{Z}$, $u_{p,m}(k) = \gamma^k v(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *donde la sucesión* $v \in \ell(\mathbb{C})$ *es una solución de la ecuación de Chebyshev*

$$v(k+1) - 2q_{p,r}(a; b; c)v(k) + v(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Además, obtenemos los siguientes resultados

(i) *Si* $rs > 0$, *entonces* $q_{p,r}(a; b; c) \in \mathbb{R}$ *y* $v \in \ell(\mathbb{R})$.

(ii) *Si* $rs < 0$, *entonces* $q_{p,r}(a; b; c)^2 \in \mathbb{R}$ *y, entonces,* $u_{2p,m}(k) = (rs)^{-k} w(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, *donde* $w \in \ell(\mathbb{R})$ *es una solución de la ecuación de Chebyshev*

$$w(k+1) - 2\big(2q_{p,r}(a; b; c)^2 - 1\big)w(k) + w(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Demostración. Dado $m \in \mathbb{Z}$, podemos considerar $m = k_0 p + j$, donde $0 \le j \le p-1$. Entonces, $u_{p,m}(k) = u_{p,j}(k + k_0)$ y, por tanto, basta con probar la hipótesis para $0 \le j \le p-1$ y tener en cuenta que si una función es solución de una ecuación en diferencias con coeficientes constantes, entonces cualquier traslación de aquélla es una solución de la misma ecuación.

Del apartado (ii) del Lema 6.2, sabemos que $u \in \ell(\mathbb{K})$ es una solución de la ecuación sii es una solución de la ecuación autoadjunta

$$\rho_{a,c}(k)a(k)u(k+1) - \rho_{a,c}(k)b(k)u(k) + \rho_{a,c}(k-1)a(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

y, además, el apartado (iii) del Lema 6.2 implica que $\rho_{a,c}a, \rho_{a,c}b \in \ell(\mathbb{R}; p, rs)$.

Puesto que los coeficientes de esta última ecuación son casi–periódicos con periodo p y razón rs, $u \in \ell(\mathbb{K})$ es una solución sii las subsucesiones $u_{p,j}$, $j = 0, \ldots, p-1$ satisfacen las igualdades

$$\begin{cases} \rho_{a,c}(0)b(0)u_{p,0}(k) = \rho_{a,c}(0)a(0)u_{p,1}(k) + \gamma^2 \rho_{a,c}(p-1)a(p-1)u_{p,p-1}(k-1), \\ \rho_{a,c}(j)b(j)u_{p,j}(k) = \rho_{a,c}(j)a(j)u_{p,j+1}(k) + \rho_{a,c}(j-1)a(j-1)u_{p,j-1}(k), \quad 1 \le j \le p-2, \\ \rho_{a,c}(p-1)b(p-1)u_{p,p-1}(k) = \rho_{a,c}(p-1)a(p-1)u_{p,0}(k+1) + \rho_{a,c}(p-2)a(p-2)u_{p,p-2}(k). \end{cases}$$

Definiendo $v_j(k) = \gamma^{-k} u_{p,j}(k)$, $j = 0, \ldots, p-1$, obtenemos

$$\begin{cases} \rho_{a,c}(0)b(0)v_0(k) = \rho_{a,c}(0)a(0)v_1(k) + \gamma \rho_{a,c}(p-1)a(p-1)v_{p-1}(k-1), \\ \rho_{a,c}(j)b(j)v_j(k) = \rho_{a,c}((j)a(j)v_{j+1}(k) + \rho_{a,c}(j-1)a(j-1)v_{j-1}(k), \quad 1 \le j \le p-2, \\ \rho_{a,c}(p-1)b(p-1)v_{p-1}(k) = \gamma \rho_{a,c}(p-1)a(p-1)v_0(k+1) + \rho_{a,c}(p-2)a(p-2)v_{p-2}(k). \end{cases}$$

Se obtiene el resultado aplicando la Proposición 6.3 y considerando

$$q_{p,r}(a; b; c) = q_p\big(\rho_{a,c}(0)a(0), \ldots, \gamma\rho_{a,c}(p-1)a(p-1); \rho_{a,c}(0)b(0), \ldots, \rho_{a,c}(p-1)b(p-1)\big).$$

Además, cuando $rs > 0$, entonces $\gamma \in \mathbb{R}$. Aplicando nuevamente la Proposición 6.3 se obtiene que $q_{p,r}(a; b; c) \in \mathbb{R}$ y $v \in \ell(\mathbb{R})$, lo que demuestra (i).

(ii) Cuando $rs < 0$, entonces $\gamma = -i(\sqrt{|rs|})^{-1}$. Por tanto, si consideramos la función $\hat{a} \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definida para cualquier $k, j \in \mathbb{Z}$ como $\hat{a}(pk+j) = a(pk+j)$ cuando $j \ne p-1$ y en el caso $j = p-1$ como $\hat{a}(pk+p-1) = (\sqrt{|rs|})^{-1}\, a(pk+p-1)$, claramente,

$$q_{p,r}(a; b; c) = q_p\big(\rho_{a,c}(0)\hat{a}(0), \ldots, -i\rho_{a,c}(p-1)\hat{a}(p-1); \rho_{a,c}(0)b(0), \ldots, \rho_{a,c}(p-1)b(p-1)\big),$$

que según la Proposición 6.3 implica que $iq_{p,r}(a; b; c) \in \mathbb{R}$ y, en consecuencia, $q_{p,r}(a; b; c)^2 \in \mathbb{R}$. Se llega a la conclusión siguiendo el mismo razonamiento del último apartado del Teorema 5.3, teniendo en cuenta que $u_{p,m}(2k) = u(2pk + m) = u_{2p,m}(k)$, mientras que $u_{p,m}(2k + 1) = u(2pk + p + m) = u_{2p,p+m}(k)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. □

Resaltamos que mientras la equivalencia entre una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes casi–periódicos y una ecuación de Chebyshev ha podido establecerse, mas o menos fácilmente, por inducción, la determinación del parámetro $q_{p,r}(a; b; c)$ de la ecuación de Chebysev equivalente es más difícil ya que involucra una recurrencia fuertemente no lineal. En el próximo capítulo resolvemos esta recurrencia obteniendo una fórmula cerrada para este parámetro en términos de los coeficientes de la ecuación de segundo orden que se pretende resolver.

Capítulo 4

Determinación de las soluciones fundamentales

1. Multi–índices binarios

El objetivo de este capítulo es, dado $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$, obtener una expresión explícita de de la solución única $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ del problema de valor inicial

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k),\ k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad x(m) = x_0,\ x(m+1) = x_1, \tag{45}$$

para cualquier dato $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, en términos de sus coeficientes $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y de las que denominamos *soluciones fundamentales*, que no son más que soluciones de su ecuación homogénea asociada que satisfacen unas determinadas condiciones iniciales. En definitiva, pretendemos determinar una fórmula cerrada para las *soluciones fundamentales* de cualquier ecuación en diferencias lineal y de segundo orden. Para alcanzar dicha meta, nos resultará útil introducir algunos conceptos y notaciones previos.

Un *multi–índice de orden* $p \in \mathbb{N}^*$ es una p-tupla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{N}^p$ y su *longitud* es $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha_j$.

Dadas p variables, $x_1, \dots, x_p$, y $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ un multi-índice de orden p, definimos el monomio de grado $|\alpha|$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p}. \tag{46}$$

Claramente, $x^\alpha \in \mathbb{Z}[x] = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_p] \subset \mathbb{R}[x_1, \dots, x_p] = \mathbb{R}[x]$ y, en consecuencia, si consideramos $a = (a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{R}^p$, entonces $a^\alpha = a_1^{\alpha_1} \cdots a_p^{\alpha_p} \in \mathbb{R}$.

Extendemos la notación anterior a $a \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$. Especificamente, si $a \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ consideramos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, un multi–índice de orden p, entonces $a^\alpha = a(1)^{\alpha_1} \cdots a(p)^{\alpha_p} \in \mathbb{R}$. Por otro lado, cuando $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ entonces $(a^{-1})^\alpha = (a^\alpha)^{-1}$ y denotamos este valor por $a^{-\alpha}$. Nótese que para $a \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $\alpha \in \mathbb{N}^p$, a^α no tiene en cuenta el valor de $a(0)$.

Dado $p \in \mathbb{N}^*$ un *multi–índice binario de orden* p es una p–tupla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ tal que $\alpha_j \in \{0, 1\}$ para cualquier $j = 1, \dots, p$. El conjunto de multi–índices binarios de orden p se denota por L_p y se verfica que su número de elementos es $|\mathsf{L}_p| = 2^p$, para cualquier $p \in \mathbb{N}$.

Dados $p \in \mathbb{N}^*$ y $\alpha \in \mathsf{L}_p$, entonces $0 \leq |\alpha| \leq p$. Es decir, $|\alpha| = m$ si y solo si exactamente m componentes de α valen 1 y $p - m$ componentes de α valen 0. Obviamente, $\alpha = (0, \dots, 0)$ es el único multi–índice binario de orden p y longitud nula. Por otra parte, denotamos por $\pi_p \in \mathsf{L}_p$ el único multi–índice binario de orden y longitud igual a p; es decir, $\pi_p = (1, \dots, 1)$. Nótese que $a^{\pi_p} = a(1) \cdots a(p)$, para cualquier $a \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$. Además definimos $a^{\pi_0} = 1$ y cuando $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, $a^{\pi_{-p}} = a(-p+1)^{-1} a(-p+2)^{-1} \cdots a(0)^{-1}$; es decir, la expresión a^{π_m} con $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y $m < 0$ corresponde al cálculo $a^{\pi_m} = a(m+1)^{-1} \cdots a(0)^{-1}$. Por tanto, si $a(0) \in \mathbb{R}^*$, entonces $a^{\pi_{-1}} = a(0)^{-1}$.

Por otra parte, si $|\alpha| = m \geq 1$, se denota por $i_1, \dots, i_m$ los índices tales que $1 \leq i_1 < \cdots < i_m \leq p$ y $\alpha_{i_j} = 1$, $j = 1, \dots, m$.

1.1. Multi–índices generales. En el caso de la resolución del Problema de Valor Inicial (45) con cualesquiera coeficientes a, b y c, estamos interesados en considerar únicamente ciertos multi–índices binarios de orden p, para cualquier $p \in \mathbb{N}$, cuya longitud es $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ como máximo. A continuación, se definen estos conjuntos de multi–índices:

(I) Para $p \in \mathbb{N}^*$, $\ell_p^0 = \Big\{\alpha \in \mathsf{L}_p : |\alpha| = 0\Big\} = \Big\{(0, \dots, 0)\Big\}$.

(II) Para $p \geq 2$, $\ell_p^1 = \Big\{\alpha \in \mathsf{L}_p : \alpha_p = 0 \text{ y } |\alpha| = 1\Big\}$.

(III) Para $p \geq 4$ y $m = 2, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, $\ell_p^m = \Big\{\alpha \in \mathsf{L}_p : \alpha_p = 0,\ |\alpha| = m \text{ y } i_{j+1} - i_j \geq 2,\ j = 1, \dots, m-1\Big\}$.

Nótese que para cualquier $m \in \mathbb{N}^*$, se obtiene $\ell_{2m}^m = \big\{(1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0)\big\}$.

Claramente, $|\ell_p^0| = 1$ para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ y $|\ell_p^1| = p - 1$ para cualquier $p \geq 2$. Por otro lado si $p \geq 4$, puesto que escoger m posiciones para los unos en $\alpha \in \ell_p^m$, $m = 2, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, implica fijar otras $m - 1$ coordenadas con ceros entre i_1 y i_m, podemos escoger m posiciones entre $p - 1 - (m - 1)$ disponibles, lo que implica que $|\ell_p^m| = \binom{p-m}{m}$. Además, esta fórmula también se verifica para $|\ell_p^0|$, $p \in \mathbb{N}^*$, y para $|\ell_p^1|$, $p \geq 2$.

Dados $p \in \mathbb{N}^*$ y $m = 0, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, para cualquier $\alpha \in \ell_p^m$, su *multi–índice binario complementario* es $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_p) \in \mathsf{L}_p$, el mult–índice binario de orden p definido como

$$\bar{\alpha}_{i_j} = \bar{\alpha}_{i_j+1} = 0, \quad j = 1, \dots, m \text{ y } \bar{\alpha}_i = 1, \quad i = 1, \dots, p,\ i \neq i_j, i_j + 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Es evidente que $|\bar{\alpha}| = p - 2m$. En particular, si $\alpha \in \ell_p^0$, $p \in \mathbb{N}^*$, entonces $\bar{\alpha} = \pi_p$, mientras que para cualquier $m \in \mathbb{N}^*$ si $\alpha \in \ell_{2m}^m$, entonces $\bar{\alpha} = (0, \dots, 0)$.

La relación entre los conjuntos ℓ_{p+1}^m, ℓ_p^m y ℓ_{p-1}^{m-1} se muestra en el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata.

LEMA 1.1. *Se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Para cualquier* $p \geq 2$ *y cualquier* $m = 1, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ *entonces*

$$\ell_{p+1}^m = \big(\ell_p^m \times \{0\}\big) \cup \big(\ell_{p-1}^{m-1} \times \{(1, 0)\}\big) = \big(\{0\} \times \ell_p^m\big) \cup \big(\{(1, 0)\} \times \ell_{p-1}^{m-1}\big).$$

(ii) *Si* $p \geq 1$ *es impar, entonces* $\ell_{p+1}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} = \ell_{p-1}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor} \times \{(1, 0)\} = \{(1, 0)\} \times \ell_{p-1}^{\lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor}$.

(iii) *Si* $\alpha = (\beta, 0)$ *con* $\beta \in \ell_p^m$, *entonces* $\bar{\alpha} = (\bar{\beta}, 1)$, *mientras que si* $\alpha = (\beta, 1, 0)$ *con* $\beta \in \ell_{p-1}^{m-1}$, *entonces* $\bar{\alpha} = (\bar{\beta}, 0, 0)$. *Análogamente, si* $\alpha = (0, \beta)$ *con* $\beta \in \ell_p^m$, *entonces* $\bar{\alpha} = (1, \bar{\beta})$, *mientras que si* $\alpha = (1, 0, \beta)$ *con* $\beta \in \ell_{p-1}^{m-1}$, *entonces* $\bar{\alpha} = (0, 0, \bar{\beta})$.

1.2. Multi–índices periódicos. En el caso que la ecuación asociada al Problema de Valor Inicial (45) tenga coeficientes casi–periódicos, podemos aprovechar esta propiedad de sus coeficientes para resolver la ecuación en diferencias homogénea mediante su equivalencia con una ecuación de Chebyshev, tal como se muestra en el Teorema 6.4 del Capítulo 3. Para la resolución de la ecuación homogénea, entonces, nos interesará encontrar una expresión explícita del parámetro $q_{p,r}(a; b; c)$, y para ello también necesitaremos utilizar multi–índices binarios $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \{0, 1\}^p$ de orden p que coincidirá con el periodo de los coeficientes de la ecuación. Nótese que en este caso el multi–índice α comienza en el elemento α_0, y no en α_1 como anteriormente. Por tanto, ahora a^α sí tendrá en cuenta el valor de $a(0)$, y los índices i_j tales que $\alpha_{i_j} = 1$, $j = 1, \cdots, m$, estarán en el rango $0 \le i_1 < \cdots < i_m \le p-1$. Además α pertenece a subconjuntos de L_p ligeramente diferentes a los ℓ_p^m mostrados hasta el momento, y que denotaremos por Λ_p^m.

Dado $p \in \mathbb{N}^*$, definimos $\Lambda_p^0 = \{(0,\dots,0)\}$ y para $p \ge 2$, $\Lambda_p^1 = \big\{\alpha \in \mathsf{L}_p : |\alpha| = 1\big\}$. Además, cuando $p \ge 4$, para cualquier $m = 2, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, se define
(47)

$$\Lambda_p^m = \Big\{\alpha \in \mathsf{L}_p : |\alpha| = m, \text{ y } i_j + 2 \le i_{j+1} \le p - 2(m-j) + \text{mín}\{i_1, 1\},\ j = 1, \dots, m-1\Big\}$$

o, equivalentemente,

$$\Lambda_p^m = \Big\{\alpha \in \mathsf{L}_p : |\alpha| = m,\ \ i_{j+1} - i_j \ge 2,\ \ j = 1, \dots, m-1 \text{ y } i_m \le p-2 \text{ cuando } i_1 = 0\Big\}.$$

Dados $p \ge 2$, $m = 1, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ y $\alpha \in \Lambda_p^m$, sean $0 \le i_1 < \cdots < i_m \le p-1$ los índices tales que $\alpha_{i_1} = \cdots = \alpha_{i_m} = 1$. Entonces, definimos el multi–índice binario complementario $\bar{\alpha}$ de orden p como

$$\bar{\alpha}_{i_j} = \bar{\alpha}_{i_j+1} = 0,\ j = 1, \dots, m, \ \text{ y } \ \bar{\alpha}_i = 1 \ \text{ en otro caso,}$$

donde si $i_m = p-1$, entonces $\bar{\alpha}_{p-1} = \bar{\alpha}_0 = 0$. Además, si $\alpha \in \Lambda_p^0$, es decir, si $\alpha = (0, \dots, 0)$, entonces se obtiene $\bar{\alpha} = \pi_p$. Evidentemente, en cualquier caso, $|\bar{\alpha}| = p - 2m$.

Dados $p \ge 2$ y $0 \le j \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, se definen los siguientes conjuntos de multi–índices binarios de orden p

$$A_p^{j,1} = \big\{\alpha \in \Lambda_p^j : \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_{p-1} = 1\big\},$$
$$A_p^{j,2} = \big\{\alpha \in \Lambda_p^j : \bar{\alpha}_0 = 0,\ \bar{\alpha}_{p-1} = 1\big\}, \qquad A_p^{j,3} = \big\{\alpha \in \Lambda_p^j : \bar{\alpha}_0 = 1,\ \bar{\alpha}_{p-1} = 0\big\},$$
$$A_p^{j,4} = \big\{\alpha \in \Lambda_p^j : \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_{p-1} = 0 \text{ y } \alpha_0 = 1\big\}, \quad A_p^{j,5} = \big\{\alpha \in \Lambda_p^j : \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_{p-1} = 0 \text{ y } \alpha_0 = 0\big\},$$

que, claramente, determinan una partición de Λ_p^j. Además, $A_p^{0,1} = \{(0,\dots,0)\}$ y $A_p^{0,2} = A_p^{0,3} = A_p^{0,4} = A_p^{0,5} = \emptyset$.

LEMA 1.2. *Dados $p \ge 4$ y $2 \le j \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, entonces $A_{p+1}^{j,3} = A_p^{j,5} \times \{0\}$ y, además,*

$$A_{p+1}^{j,1} = \big(A_p^{j,1} \times \{0\}\big) \cup \big(A_p^{j,3} \times \{0\}\big), \qquad A_{p+1}^{j,2} = \big(A_p^{j,2} \times \{0\}\big) \cup \big(A_p^{j,4} \times \{0\}\big),$$
$$A_{p+1}^{j,4} = \big(A_{p-1}^{j-1,2} \times \{(1,0)\}\big) \cup \big(A_{p-1}^{j-1,4} \times \{(1,0)\}\big), \qquad A_{p+1}^{j,5} = \big(A_p^{j-1,1} \times \{1\}\big) \cup \big(A_p^{j-1,3} \times \{1\}\big).$$

PROPOSICIÓN 1.3. *Dados $p \in \mathbb{N}^*$ y $0 \le j \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, entonces $|\Lambda_p^j| = \dfrac{p}{p-j}\dbinom{p-j}{j}$. Por tanto, para cualquier $m \in \mathbb{N}^*$ se obtiene $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} |\Lambda_{2m}^j| = 2T_m\Big(\frac{3}{2}\Big)$ y $\displaystyle\sum_{j=0}^{m} |\Lambda_{2m+1}^j| = W_m\Big(\frac{3}{2}\Big)$.*

Demostración. Sabemos que $|\Lambda_p^0| = 1$, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ y que $|\Lambda_p^1| = \big|\big\{\alpha \in \mathsf{L}_p : |\alpha| = 1\big\}\big| = p$, para cualquier $p \ge 2$.

Si $\alpha \in \Lambda_{2m}^m$, $m \in \mathbb{N}^*$, y $0 \le i_1 < \cdots < i_m \le 2m-1$ son tales que $\alpha_{i_1} = \cdots = \alpha_{i_m} = 1$, entonces $0 \le i_1 \le 1$ y

$$2 + i_j \le i_{j+1} \le 2j + \text{mín}\{i_1, 1\}, \ \ j = 1, \dots, m-1.$$

Si $i_1 = 0$, entonces $i_j = 2(j-1)$, $j = 1, \dots, m$, mientras que cuando $i_1 = 1$, entonces $i_j = 2(j-1)+1$, $j = 1, \dots, m$. En ambos casos $\bar{\alpha} = (0, \dots, 0)$ y, además, $|\Lambda_{2m}^m| = 2$.

Si $\alpha \in \Lambda_{2m+1}^m$ y $0 \le i_1 < \cdots < i_m \le 2m$ son tales que $\alpha_{i_1} = \cdots = \alpha_{i_m} = 1$, entonces $0 \le i_1 \le 2$ y

$$2 + i_j \le i_{j+1} \le 2j + 1 + \text{mín}\{i_1, 1\}, \quad j = 1, \ldots, m-1.$$

Si $i_1 = 0$, entonces o bien $i_j = 2(j-1)$, $j = 1, \ldots, m$, lo que implica que $\bar{\alpha} = (0, \ldots, 0, 1)$; o bien existe $2 \le \ell \le m$ tal que $i_j = 2(j-1)$ cuando $1 \le j < \ell$ y $i_\ell = 2\ell - 1$. Por tanto $i_j = 2j-1$, $j = \ell, \ldots, m$ y, en consecuencia, $\bar{\alpha}_{2\ell-2} = 1$ y $\bar{\alpha}_i = 0$, en otro caso. Así que, $|\{\alpha \in \Lambda_{2m+1}^m : \alpha_0 = 1\}| = m$.

Si $i_1 = 1$, entonces o bien $i_j = 2j-1$, $j = 1, \ldots, m$, lo que implica que $\bar{\alpha} = (1, 0 \ldots, 0)$; o bien existe $2 \le \ell \le m$ tal que $i_j = 2j-1$ cuando $1 \le j < \ell$ y $i_\ell = 2\ell$. Entonces, $i_j = 2j$, $j = \ell, \ldots, m$ y, por tanto, $\bar{\alpha}_{2\ell-1} = 1$ y $\bar{\alpha}_i = 0$, en otro caso. Es decir, $|\{\alpha \in \Lambda_{2m+1}^m : \alpha_0 = 0,\ \alpha_1 = 1\}| = m$.

Si $i_1 = 2$, entonces $i_j = 2j$, $j = 1, \ldots, m$ y, por tanto, $\bar{\alpha}_1 = 1$ y $\bar{\alpha}_i = 0$, en otro caso; lo que implica que $|\{\alpha \in \Lambda_{2m+1}^m : \alpha_0 = \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 1\}| = 1$.

Así que, $|\{\alpha \in \Lambda_{2m+1}^m : \alpha_1 = 1\}| = 2m+1$ y, por tanto, hemos obtenido que dado $p \in \mathbb{N}^*$, la fórmula propuesta para $|\Lambda_p^j|$ es cierta cuando $j = 0, 1$ y para $j = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$.

Asumimos ahora que la fórmula se verifica para $p \ge 2$ y $0 \le j \le \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. Entonces, dado $1 \le j \le \lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor - 1$ y aplicando el Lema 1.2, se obtiene

$$\begin{aligned}
|\Lambda_{p+1}^{j+1}| &= \sum_{i=1}^{3} |A_{p+1}^{j+1,i}| + \sum_{i=4}^{5} |A_{p+1}^{j+1,i}| = \sum_{i=1}^{5} |A_p^{j+1,i}| + |A_{p-1}^{j,2}| + |A_{p-1}^{j,4}| + |A_p^{j,1}| + |A_p^{j,3}| \\
&= |\Lambda_p^{j+1}| + |A_{p-1}^{j,2}| + |A_{p-1}^{j,4}| + |A_{p-1}^{j,1}| + |A_{p-1}^{j,3}| + |A_{p-1}^{j,5}| = |\Lambda_p^{j+1}| + |\Lambda_{p-1}^{j}| \\
&= \frac{p}{p-j-1}\binom{p-j-1}{j+1} + \frac{p-1}{p-1-j}\binom{p-1-j}{j} = \frac{p+1}{p-j}\binom{p-j}{j+1}.
\end{aligned}$$

Finalmente, de la primera identidad de la Ecuación (39) del Capítulo 3 se obtiene $T_p\left(\frac{i}{2}\right) = \dfrac{(i)^p}{2} \sum\limits_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} |\Lambda_p^j|$ para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$, que conduce, a partir de las identidades (42) del mismo capítulo y teniendo en cuenta que $T_m(-x) = (-1)^m T_m(x)$ y $V_m(-x) = (-1)^m W_m(x)$ para cualquier $m \in \mathbb{N}^*$, a las últimas fórmulas de la proposición. $\square$

Dados $\alpha \in \mathsf{L}_p$ y una sucesión $a \in \ell(\mathbb{R})$, los valores a^α y $a^{2\alpha}$ en el caso de multi–índices para ecuaciones en diferencias con coeficientes casi–periódicos, se calculan considerando las componentes α_j de α con $j = 0, \cdots, p-1$; es decir,

$$a^\alpha = \prod_{j=0}^{p-1} a(j)^{\alpha_j} \quad \text{y} \quad a^{2\alpha} = \prod_{j=0}^{p-1} a(j)^{2\alpha_j}, \tag{48}$$

respectivamente, donde se asume $0^0 = 1$. Obsérvese que $a^{\pi_p} = \prod\limits_{j=0}^{p-1} a(j)$ para cualquier $a \in \ell(\mathbb{R})$.

COROLARIO 1.4. *Dados $p, m \in \mathbb{N}^*$, se verifican las siguientes identidades*

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_p^0} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} = b^{\pi_p} = \prod_{j=0}^{p-1} b(j),$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_p^1} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} = \sum_{i=0}^{p-2} a(i)^2 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i,i+1}}^{p-1} b(j) + a(p-1)^2 \prod_{j=1}^{p-2} b(j),$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_{2m}^m} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} = \prod_{j=0}^{m-1} a(2j)^2 + \prod_{j=1}^{m} a(2j-1)^2,$$

$$\sum_{\alpha\in\Lambda_{2m+1}^m} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} = \sum_{i=0}^{m} b(2i) \prod_{j=0}^{i-1} a(2j)^2 \prod_{j=i+1}^{m} a(2j-1)^2 + \sum_{i=1}^{m} b(2i-1) \prod_{j=1}^{i-1} a(2j-1)^2 \prod_{j=i}^{m} a(2j)^2.$$

2. Construcción de las soluciones fundamentales y de la Función de Green

Dada $a \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $m \in \mathbb{Z}$, recordamos que la función a_m denota la *m-traslación de a*; es decir, $a_m(k) = a(k+m)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.

Para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$, definimos la *función de Chebyshev de grado k*, $P_k \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \times \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{R}$, de la forma

$$P_k(x,y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^m \sum_{\alpha\in\ell_k^m} x^{\bar{\alpha}} y^{\alpha}, \tag{49}$$

para cualquier $x, y \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$. También definimos $P_0(x,y) = 1$ y $P_{-1}(x,y) = 0$. Claramente, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, la función P_k no tiene en cuenta los valores de las funciones x e y en 0 y, por tanto, si $x', y' \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ son tales que $x'_1 = x_1$, $y'_1 = y_1$, entonces $P_k(x', y') = P_k(x, y)$

Nótese que $P_1(x,y) = x(1)$ ya que $\ell_1^0 = \{0\}$ y cuando $\alpha = 0$, entonces $\bar{\alpha} = 1$. Además, $P_2(x,y) = x(2)x(1) - y(1)$ puesto que $\ell_2^0 = \{(0,0)\}$ y cuando $\alpha = (0,0)$, entonces $\bar{\alpha} = (1,1)$, mientras que $\ell_2^1 = \{(1,0)\}$ y cuando $\alpha = (1,0)$, entonces $\bar{\alpha} = (0,0)$.

Para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$ tenemos

$$P_k(x,0) = x^{\pi_k} = x_1 \cdots x_k, \quad P_{2k-1}(0,y) = 0 \ \text{ y } \ P_{2k}(0,y) = (-1)^k y_1 \cdots y_{2k-1}, \tag{50}$$

ya que cuando $k \geq 1$ entonces, $\alpha \in \ell_k^m$, $m = 0, \ldots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ es tal que $\bar{\alpha} = (0, \ldots, 0)$ sii k es par y $m = \frac{k}{2}$.

PROPOSICIÓN 2.1. *Dados $x, y \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$, las funciones de Chebyshev se caracterizan por la recurrencia de tres términos*

$$P_{k+1}(x,y) = x(k+1)P_k(x,y) - y(k)P_{k-1}(x,y), \quad k \in \mathbb{N}, \quad P_{-1}(x,y) = 0, \quad P_0(x,y) = 1.$$

Demostración. Demostraremos que si la función $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ viene dada por la anterior recurrencia, entonces $P_k(x,y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^m \sum_{\alpha\in\ell_k^m} x^{\bar{\alpha}} y^{\alpha}$, para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$.

En primer lugar, para $k = 0$, la parte derecha de la recurrencia proporciona $x(1)P_0(x,y) = x(1)$ y, por tanto, para $k = 1$ se obtiene $x(2)P_1(x,y) - y(1)P_0(x,y) = x(2)x(1) - y(1)$. Así que, la proposición es cierta para $k = 1, 2$ y continuamos la demostración por inducción. Si asumimos que las identidades se verifican para cualquier $k \geq 2$, entonces

$$x(k+1)P_k(x,y) - y(k)P_{k-1}(x,y) = A_0(x,y) + A_k(x,y) + B_k(x,y),$$

donde

$$A_0(x,y) = x(k+1)\sum_{\beta\in\ell_k^0} x^{\bar{\beta}}y^{\beta},$$

$$A_k(x,y) = x(k+1)\sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m \sum_{\beta\in\ell_k^m} x^{\bar{\beta}}y^{\beta} = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m \sum_{\beta\in\ell_k^m} x(k+1)x^{\bar{\beta}}y^{\beta},$$

$$B_k(x,y) = y(k)\sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor+1}(-1)^m \sum_{\beta\in\ell_{k-1}^{m-1}} x^{\bar{\beta}}y^{\beta} = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor+1}(-1)^m \sum_{\beta\in\ell_{k-1}^{m-1}} x^{\bar{\beta}}y(k)y^{\beta}.$$

En primer lugar, puesto que para cualquier $k \geq 1$, si $\alpha \in \ell_k^0 = \{(0,\ldots,0)\}$, entonces $\bar{\alpha} = \pi_p$, se obtiene

$$A_0(x,y) = x(k+1)x(k)\cdots x(1) = \sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^0} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha}.$$

Por otra parte, del apartado (iii) del Lema 1.1, obtenemos

$$A_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m \sum_{\alpha\in\ell_k^m\times\{0\}} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha} \quad \text{y} \quad B_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor+1}(-1)^m \sum_{\alpha\in\ell_{k-1}^{m-1}\times\{(1,0)\}} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha}.$$

Cuando k es par $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor = \lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor + 1 = \lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$ y, entonces, aplicando el apartado (i) del Lema 1.1 se tiene

$$A_k(x,y) + B_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}(-1)^m \sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^m} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha}.$$

Cuando k es impar $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor = \lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor = \lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor - 1$ y, entonces, aplicando los apartados (i) y (ii) del Lema 1.1,

$$A_k(x,y) + B_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m \sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^m} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha} + (-1)^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor} \sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha} = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}(-1)^m \sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^m} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha}.$$

En cualquier caso, el resultado se verifica. $\square$

PROPOSICIÓN 2.2. *Dados $x, y \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$, las funciones de Chebyshev se caracterizan por la recurrencia de tres términos*

$$P_{k+1}(x,y) = x(1)P_k(x_1,y_1) - y(1)P_{k-1}(x_2,y_2), \quad k \in \mathbb{N}, \quad P_{-1}(x,y) = 0, \quad P_0(x,y) = 1.$$

Demostración. Demostramos que si la función $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ viene dada por la anterior recurrencia, entonces $P_k(x,y) = \sum_{m=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m \sum_{\alpha\in\ell_k^m} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha}$, para cualquier $k \in \mathbb{N}^*$.

En primer lugar, para $k = 0$, la parte derecha de la recurrencia proporciona $x(1)P_0(x,y) = x(1)$ y, por tanto, para $k = 1$ se obtiene $x(1)P_1(x_1,y_1) - y(1)P_0(x_2,y_2) = x(1)x(2) - y(1) = P_2(x,y)$. Así que, la proposición es cierta para $k = 1, 2$ y continuamos la demostración por inducción. Si asumimos que las identidades se verifican para cualquier $k \geq 2$, entonces

$$x(1)P_k(x_1, y_1) - y(1)P_{k-1}(x_2, y_2) = A_0(x, y) + A_k(x, y) + B_k(x, y),$$

donde

$$A_0(x,y) = x(1)\sum_{\beta\in\ell_k^0}(x_1)^{\bar\beta}(y_1)^{\beta}, \quad A_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m\sum_{\beta\in\ell_k^m}(x_1)^{\bar\beta}x(1)(y_1)^{\beta},$$

$$B_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor+1}(-1)^m\sum_{\beta\in\ell_{k-1}^{m-1}}y(1)(x_1)^{\bar\beta}(y_1)^{\beta}.$$

Como en la demostración de la Proposición 2.1,

$$A_0(x,y) = x(1)x_1(1)\cdots x_1(k) = x(1)x(2)\ldots x(k+1) = \sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^0}x^{\bar\alpha}y^{\alpha}.$$

Por otro lado, del apartado (iii) del Lema 1.1, se obtiene

$$A_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m\sum_{\alpha\in\{0\}\times\ell_k^m}x^{\bar\alpha}y^{\alpha} \quad \text{y} \quad B_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor+1}(-1)^m\sum_{\alpha\in\{(1,0)\}\times\ell_{k-1}^{m-1}}x^{\bar\alpha}y^{\alpha}.$$

Cuando k es par $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor = \lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor + 1 = \lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor$ y, entonces, aplicando el apartado (i) del Lema 1.1 obtenemos

$$A_k(x,y) + B_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}(-1)^m\sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^m}x^{\bar\alpha}y^{\alpha}.$$

Cuando k es impar $\lfloor\frac{k}{2}\rfloor = \lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor = \lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor - 1$ y, entonces, aplicando los apartados (i) y (ii) del Lema 1.1,

$$A_k(x,y) + B_k(x,y) = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m\sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^m}x^{\bar\alpha}y^{\alpha} + (-1)^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}\sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}}x^{\bar\alpha}y^{\alpha} = \sum_{m=1}^{\lfloor\frac{k+1}{2}\rfloor}(-1)^m\sum_{\alpha\in\ell_{k+1}^m}x^{\bar\alpha}y^{\alpha}.$$

En cualquier caso, el resultado se verifica. □

Ahora ya estamos en condiciones de establecer los resultados principales de esta sección.

Dada la ecuación en diferencias lineal de segundo orden,

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \mathring{\mathbf{I}}, \tag{51}$$

donde $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$ cuando $n + 1 \in \delta(\mathbf{I})$, llamamos *solución fundamental de la ecuación en diferencias homogénea en m* , o bien, de forma breve, solución fundamental en m, a $v_m \in \mathcal{S}$ determinada por las condiciones iniciales $v_m(m) = 0$ y $v_m(m+1) = 1$.

PROPOSICIÓN 2.3. *Dado $m \in \mathring{\mathbf{I}} \cup \{0\}$, entonces $\{v_m, v_{m+1}\}$ es una base de $\mathcal{S}$.*

Demostración. Según la Proposición 2.5 del Capítulo 1, basta con demostrar $w[v_m, v_{m+1}](m) \neq 0$ para verificar que las soluciones fundamentales v_m y v_{m+1} forman base. Se obtiene

$$w[v_m, v_{m+1}](m) = \det \begin{bmatrix} v_m(m) & v_{m+1}(m) \\ v_m(m+1) & v_{m+1}(m+1) \end{bmatrix} = -v_{m+1}(m).$$

Como $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y $v_{m+1} \in \mathcal{S}$, tenemos que

$$0 = a(m+1)v_{m+1}(m+2) - b(m+1)v_{m+1}(m+1) + c(m)v_{m+1}(m) = a(m+1) + c(m)v_{m+1}(m)$$

y, por tanto, $v_{m+1}(m) = -c(m)^{-1}a(m+1)$, que es no nulo para cualquier $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ puesto que $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$. □

Una consecuencia de la proposición anterior es la posibilidad de expresar la solución de cualquier problema de valor inicial para la Ecuación (51) a partir de la soluciones fundamentales v_m y v_{m+1}. Empezamos por obtener la expresión para la ecuación homogénea.

COROLARIO 2.4. *Dados* $m \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$*, y* $\{v_m, v_{m+1}\}$ *una base de soluciones fundamentales* $\mathcal{S}$*, entonces para cualesquiera* $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$*, la única solución de la ecuación en diferencias homogénea asociada a* (51) *que satisface* $z(m) = x_0$ *y* $z(m+1) = x_1$ *viene dada por*

$$z(k) = x_1 v_m(k) - \frac{c(m)}{a(m+1)}\, x_0 v_{m+1}(k), \quad k \in \mathbf{I}.$$

Demostración. Basta con sustituir u por v_m y v por v_{m+1} en el Corolario 2.7 del Capítulo 1, y se obtiene el resultado. □

Según el Principio de Superposición de la Proposición 4.1 del Capítulo 1, para obtener la solución de cualquier problema de valor inicial asociado a la Ecuación (51), es necesario obtener la solución de su ecuación homogénea con idénticas condiciones iniciales y la solución del problema de valor inicial asociado también a la Ecuación (51) pero con condiciones iniciales nulas. En primer lugar, acabamos de comprobar que la única solución del problema de valor inicial para la ecuación homogénea

$$a(k)z(k+1) - b(k)z(k) + c(k-1)z(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \qquad z(m) = x_0, \;\; z(m+1) = x_1,$$

puede expresarse en función de las soluciones fundamentales v_m y v_{m+1},

$$z(k) = x_1 v_m(k) - \frac{c(m)}{a(m+1)}\, x_0 v_{m+1}(k), \quad k \in \mathbf{I}.$$

Por otro lado, la función de Green $g(\cdot, s)$ es la única solución de la anterior ecuación homogénea que satisface las condiciones iniciales $g(s,s) = 0$ y $g(s+1, s) = \dfrac{1}{a(s)}$ y, por tanto, se puede obtener la expresión de esta función también en términos de la solución fundamental,

$$g(k,s) = \frac{1}{a(s)}\, v_s(k), \quad k, s \in \mathbf{I}. \tag{52}$$

Por la Proposición 4.3 del Capítulo 1 sabemos que la única solución de la Ecuación (51) que satisface las condiciones iniciales $u(m) = u(m+1) = 0$ es

$$u(k) = \int_m^k g(k,s) f(s) ds, \qquad k \in \mathbf{I}.$$

En consecuencia, basta aplicar la fórmula de Lagrange para obtener la solución del problema de valor inicial en m con dato $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$,

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \qquad u(m) = x_0, \ u(m+1) = x_1,$$

en términos de las soluciones fundamentales v_m y v_{m+1},

$$u(k) = x_1 v_m(k) - \frac{c(m)}{a(m+1)}\, x_0 v_{m+1}(k) + \int_m^k \frac{1}{a(s)}\, v_s(k) f(s) ds, \quad k \in \mathbf{I}.$$

El siguiente resultado es la expresión de la *solución fundamental en m* de la ecuación homogénea asociada a (51) en términos de las *funciones de Chebyshev*.

TEOREMA 2.5. *Dados $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, entonces para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ la solución fundamental en m para la ecuación en diferencias homogénea*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

es

$$v_m(k) = \begin{cases} a(m) a^{\pi_{m-1}} a^{-\pi_{k-1}} P_{k-m-1}\big(b_m, a_m c_m\big), & k \geq m, \\ -a(m) c^{-\pi_{m-1}} c^{\pi_{k-1}} P_{m-k-1}\big(b_k, a_k c_k\big), & k \leq m. \end{cases}$$

En particular, la función de Green de la ecuación es

$$g(k,s) = \begin{cases} a^{\pi_{s-1}} a^{-\pi_{k-1}} P_{k-s-1}\big(b_s, a_s c_s\big), & k \geq s, \\ -c^{-\pi_{s-1}} c^{\pi_{k-1}} P_{s-k-1}\big(b_k, a_k c_k\big), & k \leq s. \end{cases}$$

Demostración. En primer lugar, nótese que v_m está definida sin ambigüedad puesto que $P_{-1} = 0$. Por otro lado, $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es una solución de la ecuación dada sii

$$(*) \qquad u(k+1) = a(k)^{-1} b(k) u(k) - a(k)^{-1} c(k-1) u(k-1)$$

o, equivalentemente, sii

$$(**) \qquad u(k-1) = c(k-1)^{-1} b(k) u(k) - c(k-1)^{-1} a(k) u(k+1),$$

para cada $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$. Usamos estas identidades para demostrar nuestro resultado.

Si consideramos $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, la función definida como

$$u(k) = \begin{cases} a(m) a^{\pi_{m-1}} a^{-\pi_{k-1}} P_{k-m-1}\big(b_m, a_m c_m\big), & k \geq m, \\ -a(m) c^{-\pi_{m-1}} c^{\pi_{k-1}} P_{m-k-1}\big(b_k, a_k c_k\big), & k \leq m, \end{cases}$$

entonces

$$u(m) = a(m) a^{\pi_{m-1}} a^{-\pi_{m-1}} P_{-1}\big(b_m, a_m c_m\big) = 0, \ u(m+1) = a(m) a^{\pi_{m-1}} a^{-\pi_m} P_0\big(b_m, a_m c_m\big) = 1$$

y, además, cuando $k = m-1$ también obtenemos

$$u(m-1) = -a(m) c^{-\pi_{m-1}} c^{\pi_{m-2}} P_0\big(b_{m-1}, a_{m-1} c_{m-1}\big) = -a(m) c(m-1)^{-1}.$$

Por tanto, u satisface las condiciones iniciales impuestas y, cuando $m \geq 1$, también verifica $(**)$ en $k = m-1$.

Si $k > m$, entonces $k-1 \geq m$ y, en consecuencia, aplicando la Proposición 2.1

$$\begin{aligned}
u(k+1) &= a(m)a^{\pi_{m-1}}a^{-\pi_k}P_{k-m}\big(b_m, a_m c_m\big)\\
&= a(m)a^{\pi_{m-1}}a^{-\pi_k}b_m(k-m)P_{k-m-1}\big(b_m, a_m c_m\big)\\
&- a(m)a^{\pi_{m-1}}a^{-\pi_k}a_m(k-m-1)c_m(k-m-1)P_{k-m-2}\big(b_m, a_m c_m\big)\\
&= a(k)^{-1}b(k)u(k) - a(k)^{-1}c(k-1)u(k-1);
\end{aligned}$$

es decir, u verifica la Identidad $(*)$ en k.

Si $k < m$, entonces $k+1 \leq m$ y, por tanto, aplicando la Proposición 2.2

$$\begin{aligned}
u(k-1) &= -a(m)c^{-\pi_{m-1}}c^{\pi_{k-2}}P_{m-k}\big(b_{k-1}, a_{k-1}c_{k-1}\big)\\
&= -a(m)c^{-\pi_{m-1}}c^{\pi_{k-2}}b_{k-1}(1)P_{m-k-1}\big(b_k, a_k c_k\big)\\
&+ a(m)c^{-\pi_{m-1}}c^{\pi_{k-2}}a_{k-1}(1)c_{k-1}(1)P_{m-k-2}\big(b_{k+1}, a_{k+1}c_{k+1}\big)\\
&= c(k-1)^{-1}b(k)u(k) - c(k-1)^{-1}a(k)u(k+1);
\end{aligned}$$

es decir, u verifica la Identidad $(**)$ en k. Por consiguiente, u es solución de la ecuación dada, así que $u = v_m$.

Para la obtención de la función de Green basta con introducir la expresión de v_s en la Ecuación (52). □

A continuación y para finalizar esta sección, aplicaremos el resultado anterior al caso en el que los coeficientes de la Ecuación (51) son constantes. Para ello, en primer lugar obtenemos la expresión de la *función de Chebyshev* cuando x e y son constantes, con $y \neq 0$,

$$P_k(x,y) = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(-1)^m \sum_{\alpha \in \ell_k^m} x^{\bar{\alpha}}y^{\alpha} = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}(-1)^m \binom{k-m}{m} x^{k-2m}y^m = y^{\frac{k}{2}}\, U_k\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right), \tag{53}$$

donde se ha tenido en cuenta que $|\ell_k^m| = \binom{k-m}{m}$ y la segunda identidad de la Ecuación (39).

Nótese que la expresión de las *funciones de Chebyshev* para $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^*$ corresponde al polinomio de Chebyshev de segunda especie que, como vimos en la Sección 5 del Capítulo 3, está relacionado con la solución fundamental de la ecuación de Chebyshev y ésta a su vez con la solución de las ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes. Podemos recuperar ahora la función v_m para estas últimas ecuaciones.

COROLARIO 2.6. *Dados $a, c \in \mathbb{R}^*$ y $b \in \mathbb{R}$, entonces para cualquier $m \in \mathbb{Z}$ la solución fundamental en m para la ecuación en diferencias homogénea*

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0, \quad k \in \mathring{\mathbf{I}},$$

es

$$v_m(k) = (\sqrt{a^{-1}c})^{k-m-1}U_{k-m-1}\big(q\big),$$

donde $q = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$. *En particular, la función de Green de la ecuación es*

$$g(k,s) = \frac{1}{a}(\sqrt{a^{-1}c})^{k-s-1}U_{k-s-1}\big(q\big).$$

Demostración. Por el Teorema 2.5 y aplicando, posteriormente, la Identidad 53 obtenemos

$$v_m(k) = \begin{cases} a^{m-k-1} P_{k-m-1}\big(b, ac\big), & k \geq m, \\ -ac^{k-m} P_{m-k-1}\big(b, ac\big), & k \leq m, \end{cases} = \begin{cases} (\sqrt{a^{-1}c})^{k-m-1} U_{k-m-1}\big(q\big), & k \geq m, \\ -(\sqrt{a^{-1}c})^{k-m-1} U_{m-k-1}\big(q\big), & k \leq m. \end{cases}$$

Si tenemos en cuenta que por la Proposición 4.7 del Capítulo 3 $U_{-(n+1)}(x) = -U_{(n-1)}(x)$, se concluye el primer resultado. Y para la función de Green, de nuevo basta con introducir la expresión de v_s en la Ecuación (52). □

Los resultados obtenidos coinciden con los presentados en el Capítulo 3 que analizaba las ecuaciones con coeficientes constantes, en concreto, en el Corolario 5.5 para la solución fundamental, y en el Corolario 5.6 para la función de Green.

3. Teoría de Floquet

La resolución de ecuaciones en diferencias con coeficientes periódicos está presente en muchos problemas científicos y de ingeniería, tales como problemas electromagnéticos [**31**]. o en el análisis de la propagación del sonido o de ciertos osciladores cuánticos [**3**]. Estos problemas se resuelven con la inversión de ciertas matrices tridiagonales, como por ejemplo las matrices k–Toeplitz, cuyas diagonales paralelas a la diagonal principal estan formadas por sucesiones periódicas de periodo k. Por tanto, las fórmulas recientes para la inversión de estas matrices estan basadas, mas o menos directamente, en la solución de ecuaciones en diferencias con coeficientes periódicos. Sin embargo, la mayoría utiliza la formulación aportada en [**39**], que en realidad no tiene en cuenta la periodicidad de los coeficientes, véase por ejemplo [**28**], y que, en cualquier caso, supone aplicar una expresión muy compleja. Como prueba de su complejidad nótese que todos los ejemplos mostrados en [**31**] tienen coeficientes constantes. En el último capítulo de este trabajo nos centraremos en la aplicación de las ecuaciones en diferencias a la invertibilidad de estas matrices tridiagonales.

Aunque en la sección precedente hemos presentado una solución para ecuaciones en diferencias con coeficientes variables, de nuevo no se tenian en cuenta características especiales de los coeficientes, como puede ser su periodicidad. Esa es la razón de mostrar en esta sección un método alternativo para estas ecuaciones concretas y que reproducimos de [**32**].

Ya mostramos en el Capítulo 3 que aprovechar la propiedad de periodicidad o casi–periodicidad de los coeficientes de la ecuación en diferencias homogénea supone obtener sus soluciones en términos de sucesiones de Chebyshev valoradas en el parámetro $q_{p,r}$. Pero de este parámetro solo se aportó una fórmula recurrente para obtener su expresión. Así que un primer objetivo de esta sección es obtener una fórmula cerrada para el parámetro $q_{p,r}$, pero también, ya que tratamos con ecuaciones en diferencias con coeficientes periódicos, plantear la Teoría de Floquet correspondiente a estas ecuaciones discretas.

La cuestión principal en el desarrollo de la Teoría de Floquet para ecuaciones homogéneas cuyos coeficientes son periódicos es encontrar bajo qué condiciones la ecuación dada tiene soluciones periódicas con el mismo periodo que sus coeficientes. Desde el punto de vista de la Teoría de Matrices, es equivalente a preguntarse bajo qué circunstancias los coeficientes de la matriz inversa son también periódicos.

En la formulación clásica de la Teoría de Floquet para ecuaciones en diferencias (o diferenciales) lineales de segundo orden, se escribe dicha ecuación como un sistema de primer orden y, entonces, el Teorema de Floquet se formula en términos de la matriz fundamental del sistema equivalente, véase por ejemplo [**1**].

Nuestra estrategia es aprovechar la equivalencia entre las ecuaciones de segundo orden con coeficientes periódicos o casi–periódicos y las ecuaciones de Chebyshev. De esa forma, la caracterización de la existencia de soluciones periódicas puede reducirse al mismo problema respecto a las ecuaciones de Chebyshev.

LEMA 3.1. *Dados $a, c \in \mathbb{K}^*$, $b \in \mathbb{K}$, y $z \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ una solución de la ecuación en diferencias*

$$az(k+1) - bz(k) + cz(k-1) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

entonces $z \in \ell(\mathbb{K}; p, r)$ sii $z(p) = r\,z(0)$ y $z(p+1) = r\,z(1)$.

PROPOSICIÓN 3.2. *Dado $q \in \mathbb{K}$, entonces para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$ la ecuación de Chebyshev con parámetro q tiene soluciones no nulas pertenecientes a $\ell(\mathbb{K}; p, r)$ sii*

$$r = T_p(q) \pm \sqrt{T_p(q)^2 - 1}.$$

En particular, se verifican los siguientes resultados:

(i) *Si $p \in \mathbb{N}^*$, la ecuación de Chebyshev con parámetro q tiene soluciones no nulas pertenecientes a $\ell(\mathbb{K}; p)$ sii $q = \cos\left(\frac{2j\pi}{p}\right)$, $j = 0, \dots, \lceil\frac{p-1}{2}\rceil$.*

(ii) *Si $r \in \mathbb{K}^*$, la ecuación de Chebyshev con parámetro q tiene soluciones no nulas pertenecientes a $\ell(\mathbb{K}; 1, r)$ sii $q = \dfrac{1}{2}(r + r^{-1})$.*

(iii) *La ecuación de Chebyshev con parámetro q tiene soluciones constantes sii $q = 1$.*

Demostración. Dada $z(k) = AU_k(q) + BU_{k-1}(q)$ una sucesión de Chebyshev no nula con parámetro q, entonces del Lema 3.1 $z \in \ell(\mathbb{K}; p, r)$ sii $z(p) = rz(0)$ y $z(p+1) = rz(1)$; es decir, sii

$$\begin{bmatrix} U_p(q) - r & U_{p-1}(q) \\ U_{p+1}(q) - 2qr & U_p(q) - r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la ecuación de Chebyshev con parámetro q tiene soluciones no nulas pertenecientes a $\ell(\mathbb{K}; p, r)$ sii el determinante de la matriz anterior vale 0; es decir, aplicando del Capítulo 3 la segunda igualdad del apartado 1 de la Proposición 4.8 y el apartado 5 del Corolario 4.12 para $m = 1$ y $n = p - 1$, sii

$$0 = r^2 + U_p^2(q) - U_{p+1}(q)U_{p-1}(q) - 2r\big[U_p(q) - qU_{p-1}(q)\big] + 1 = r^2 - 2rT_p(q) + 1.$$

(i) Cuando $z \in \ell(\mathbb{K}; p)$; es decir, cuando $r = 1$, la ecuación de arriba queda $T_p(q) = 1$, lo que implica que $q = \cos\left(\frac{2j\pi}{p}\right)$, $j = 0, \dots, \lceil\frac{p-1}{2}\rceil$, véase **[42]**.

(ii) Cuando $p = 1$, entonces la ecuación anterior resulta $r^2 - 2qr + 1 = 0$ y, por tanto, $q = \dfrac{1}{2}(r + r^{-1})$.

(iii) Es una consecuencia directa de ambos apartados anteriores, (i) o (ii). □

Ahora estamos en condiciones de deducir un teorema tipo Floquet para ecuaciones con coeficientes constantes.

COROLARIO 3.3. *Dados $a, c \in \mathbb{R}^*$ y $b \in \mathbb{R}$, la ecuación con coeficientes constantes*

$$au(k+1) - bu(k) + cu(k-1) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z},$$

tiene soluciones casi–periódicas de periodo $p \in \mathbb{N}^*$ y razón $r \in \mathbb{K}^*$ sii

$$r = \sqrt{\frac{c^p}{a^p}}\left[T_p(q) \pm \sqrt{T_p(q)^2 - 1}\right], \quad \textit{donde} \quad q = \frac{b}{2\sqrt{ac}}.$$

En consecuencia, la ecuación tiene soluciones geométricas con razón r sii $r = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y, en particular, tiene soluciones constantes sii $b = a + c$.

Demostración. Según el Teorema 5.3, la función $u \in \mathcal{C}(\mathbb{K})$ es una solución de la ecuación anterior sii la sucesión definida para cualquier $k \in \mathbb{Z}$ como $v(k) = \alpha^k u(k)$, donde $\alpha = \sqrt{ac^{-1}}$, es una sucesión de Chebyshev con parámetro $q = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}}$. Por tanto, $u \in \ell(\mathbb{K}; p, r)$ sii $v \in \ell(\mathbb{K}; p, r\alpha^p)$ y por la Proposición 3.2, esto ocurre sii

$$r\alpha^p = T_p(q) \pm \sqrt{T_p(q)^2 - 1}.$$

□

Dados $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{R}$, $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$ y $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$, el Teorema 6.4 del Capítulo 3 establece que existe $q_{p,r}(a; b; c) \in \mathbb{C}$ tal que la ecuación en diferencias

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{54}$$

es equivalente a una ecuación de Chebyshev con parámetro $q_{p,r}(a; b; c)$ que se calcula mediante una recurrencia no lineal. A continuación se obtiene la expresión $q_{p,r}(a; b; c)$ en términos de los coeficientes de la ecuación en diferencias considerada. Y como consecuencia directa, determinamos la condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones periódicas

Así que, dados $p \in \mathbb{N}^*$ y $r \in \mathbb{R}^*$, denominamos *función de Floquet de orden p y razón r*, a la función $q_{p,r} \colon \ell(\mathbb{R}^*; p, r) \times \ell(\mathbb{R}; p, r) \times \ell(\mathbb{R}^*; p, r) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para cualquier $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$ y $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$, si $u \in \ell(\mathbb{C})$ es una solución de la Ecuación (54), entonces para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, $v(k) = \gamma^{-k} u_{p,m}(k)$ es una solución de la ecuación de Chebyshev

$$v(k+1) - 2q_{p,r}(a; b; c)v(k) + v(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Comprobamos en primer lugar que es suficiente determinar la expresión del parámetro para el caso autoadjunto y de coeficientes periódicos. Específicamente, si dados $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$ y $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$, consideramos $\gamma = \left(r \displaystyle\prod_{j=0}^{p-1} \frac{a(j)}{c(j)} \right)^{-\frac{1}{2}} = (r\rho_{a,c}(p))^{-\frac{1}{2}}$, donde ρ es la *función de acompañamiento* definida en la Ecuación (7) del primer capítulo, y el par $(a_\rho, b_\rho) \in \ell(\mathbb{C}^*; p) \times \ell(\mathbb{R}; p)$ definidos como la extensión periódica de

$$\begin{aligned} &a_\rho(k) = \rho_{a,c}(k)a(k), \quad k = 0, \dots, p-2; \quad a_\rho(p-1) = \gamma \rho_{a,c}(p-1)a(p-1), \\ &b_\rho(k) = \rho_{a,c}(k)b(k), \quad k = 0, \dots, p-1, \end{aligned}$$

entonces de la demostración del Teorema 6.4 podemos deducir que $q_{p,r}(a; b; c) = q_{p,1}(a_\rho; b_\rho; a_\rho)$. Además, si consideramos la función $Q_p \colon \ell(\mathbb{C}^*; p) \times \ell(\mathbb{R}; p) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $Q_p(a; b) = q_{p,1}(a; b; a)$, entonces Q_p está determinada por la siguiente recurrencia no lineal

$$Q_1(a; b) = \frac{b(0)}{2a(0)}, \qquad Q_2(a; b) = \frac{1}{2a(0)a(1)}\Big(b(0)b(1) - a(0)^2 - a(1)^2\Big) \tag{55}$$

y

$$Q_{p+1}(a; b) = \begin{cases} Q_p(\hat{a}; \hat{b}), & b(p) \neq 0, \\ Q_p(\check{a}; \check{b}), & b(0) \neq 0, \\ Q_{p-1}(\tilde{a}; \tilde{b}), & b(p) = b(0) = 0, \end{cases} \tag{56}$$

para $p \geq 2$, donde las sucesiones periódicas $\hat{a}, \hat{b}, \check{a}, \check{b}, \tilde{a}$ y $\tilde{b}$ están definidas como las extensiones periódicas

$$
\begin{aligned}
&\hat{a}(k) = a(k), && k = 0, \ldots, p-2, && \hat{a}(p-1) = \frac{a(p-1)a(p)}{b(p)},\\
&\hat{b}(k) = b(k), && k = 1, \ldots, p-2, && \hat{b}(p-1) = \frac{b(p-1)b(p) - a(p-1)^2}{b(p)},\\
& && && \hat{b}(0) = \frac{b(0)b(p) - a(p)^2}{b(p)},\\
&\check{a}(k) = a(k+1), && k = 0, \ldots, p-2, && \check{a}(p-1) = \frac{a(0)a(p)}{b(0)},\\
&\check{b}(k) = b(k+1), && k = 1, \ldots, p-2, && \check{b}(p-1) = \frac{b(0)b(p) - a(p)^2}{b(0)},\\
& && && \check{b}(0) = \frac{b(0)b(1) - a(0)^2}{b(0)},\\
&\tilde{a}(k) = a(k+1), && k = 0, \ldots, p-3, && \tilde{a}(p-2) = -\frac{a(0)a(p-1)}{a(p)},\\
&\tilde{b}(k) = b(k+1), && k = 0, \ldots, p-2.
\end{aligned}
$$

Nótese que cuando $p = 2$, $\tilde{a}(0) = -\dfrac{a(0)a(1)}{a(2)}$. Además, las propiedades de las ecuaciones de Chebyshev y sus soluciones establecen que cuando $b(0), b(p) \neq 0$, necesariamente $Q_p(\hat{a}; \hat{b}) = Q_p(\check{a}; \check{b})$.

Ahora ya estamos en disposición de obtener una fórmula cerrada para las funciones de Floquet.

TEOREMA 3.4. *Dados* $p \in \mathbb{N}^*$ *y* $r \in \mathbb{R}^*$ *entonces para cualquier* $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$ *y* $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$*, se verifica que*

$$q_{p,r}(a; b; c) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{a^{\pi_p} c^{\pi_p}}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} r^{-\alpha_{p-1}} a^{\alpha} b^{\bar{\alpha}} c^{\alpha}.$$

Demostración. En primer lugar demostramos, por inducción en p, que para cualquier $a \in \ell(\mathbb{R}^*, p)$ y $b \in \ell(\mathbb{R}; p)$ se obtiene

$$Q_p(a; b) = q_{p,1}(a; b; a) = \frac{1}{2a^{\pi_p}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}}.$$

A partir del Corolario 1.4, para $p = 1$ la fórmula propuesta proporciona el valor $\dfrac{b(0)}{2a(0)}$, mientras que para $p = 2$ se obtiene el valor $\dfrac{1}{2a(0)a(1)}\Big(b(0)b(1) - a(0)^2 - a(1)^2\Big)$. Entonces, teniendo en cuenta las identidades (55), nuestra fórmula coincide con la expresión de Q_p para $p = 1, 2$. Asumimos ahora que es cierta para $p \geq 2$ y consideramos $a \in \ell(\mathbb{R}^*; p+1)$ y $b \in \ell(\mathbb{R}; p+1)$. Puesto que las hipótesis $b(0) \neq 0$ o $b(0) = b(p) = 0$ conducen a razonamientos análogos al caso $b(p) \neq 0$, a partir de ahora asumimos siempre que $b(p) \neq 0$ y, en consecuencia, nuestro objetivo es demostrar que $Q_p(\hat{a};\hat{b}) = Q_{p+1}(a;b)$ para cualquier $p \geq 2$.

Cuando $p = 2$, entonces

$$\begin{aligned}
Q_2(\hat{a};\hat{b}) &= \frac{b(2)}{2a(0)a(1)a(2)}\left(\frac{\big(b(0)b(2)-a(2)^2\big)\big(b(1)b(2)-a(1)^2\big)}{b(2)^2} - a(0)^2 - \frac{a(1)^2a(2)^2}{b(2)^2}\right)\\
&= \frac{1}{2a(0)a(1)a(2)}\Big(b(0)b(1)b(2) - a(1)^2b(0) - a(2)^2b(1) - a(0)^2b(2)\Big) = Q_3(a;b).
\end{aligned}$$

Cuando $p = 3$, entonces

$$\begin{aligned}
Q_3(\hat{a};\hat{b}) = \frac{b(3)}{2a(0)a(1)a(2)a(3)} &\left(\frac{b(1)\big(b(0)b(3)-a(3)^2\big)\big(b(2)b(3)-a(2)^2\big)}{b(3)^2}\right.\\
&-\frac{a(1)^2\big(b(0)b(3)-a(3)^2\big)}{b(3)} - \frac{a(2)^2a(3)^2b(1)}{b(3)^2}\\
&\left.-\frac{a(0)^2\big(b(2)b(3)-a(2)^2\big)}{b(3)}\right)\\
= \frac{1}{2a(0)a(1)a(2)a(3)}&\Big(b(0)b(1)b(2)b(3) - a(2)^2b(0)b(1) - a(3)^2b(1)b(2) - a(1)^2b(0)b(3)\\
&+a(1)^2a(3)^2 - a(0)^2b(2)b(3) + a(0)^2a(2)^2\Big) = Q_4(a;b).
\end{aligned}$$

Cuando $p \geq 4$, teniendo en cuenta que

$$b(p)\hat{a}^{\pi_p} = a^{\pi_{p+1}} \;\text{ y }\; b(p)\hat{b}^{\pi_p} = b^{\pi_{p+1}} - a(p-1)^2\prod_{j=0}^{p-2}b(j) - a(p)^2\prod_{j=1}^{p-1}b(j) + \frac{a(p-1)^2a(p)^2}{b(p)}\prod_{j=1}^{p-2}b(j),$$

las dos primeras identidades del Corolario 1.4 implican que

$$Q_p(\hat{a};\hat{b}) = \frac{1}{2a^{\pi_{p+1}}}\left[\sum_{\alpha\in\Lambda_{p+1}^0}a^{2\alpha}b^{\bar{\alpha}} - \sum_{\alpha\in\Lambda_{p+1}^1}a^{2\alpha}b^{\bar{\alpha}} + b(p)\sum_{j=2}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}(-1)^j\sum_{\alpha\in\Lambda_p^j}\hat{a}^{2\alpha}\hat{b}^{\bar{\alpha}} + R_p(a;b)\right],$$

donde

$$\begin{aligned}
R_p(a;b) &= a(p-1)^2\sum_{i=0}^{p-3}a(i)^2\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i,i+1}}^{p-2}b(j) + a(p)^2\sum_{i=1}^{p-2}a(i)^2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,i+1}}^{p-1}b(j)\\
&\quad-\frac{a(p-1)^2a(p)^2}{b(p)}\sum_{i=1}^{p-3}a(i)^2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,i+1}}^{p-2}b(j)\\
&= \sum_{\alpha\in A_{p+1}^{2,3}}a^{2\alpha}b^{\bar{\alpha}} + \sum_{\alpha\in A_{p+1}^{2,4}}a^{2\alpha}b^{\bar{\alpha}} + \sum_{\alpha\in A_{p+1}^{2,5}}a^{2\alpha}b^{\bar{\alpha}} - \frac{a(p)^2}{b(p)}\sum_{\alpha\in A_p^{2,5}}a^{2\alpha}b^{\bar{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, a partir de las dos últimas identidades del Corolario 1.4, cuando p es par entonces

$$
\begin{aligned}
b(p)\sum_{\alpha\in\Lambda_p^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}}\hat a^{2\alpha}\hat b^{\bar\alpha} &= b(p)\prod_{j=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1}a(2j)^2+\frac{a(p)^2}{b(p)}\prod_{j=1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}a(2j-1)^2\\
&=\sum_{\alpha\in A_{p+1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,1}}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}+\sum_{\alpha\in A_{p+1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,2}}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}+\frac{a(p)^2}{b(p)}\sum_{\alpha\in A_{p}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,5}}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha},
\end{aligned}
$$

puesto que $A_{p+1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,1}=\emptyset$; mientras que cuando p es impar, entonces $\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor=\lfloor\frac{p}{2}\rfloor+1$ y

$$
\begin{aligned}
b(p)\sum_{\alpha\in\Lambda_p^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}}\hat a^{2\alpha}\hat b^{\bar\alpha} &= \big(b(0)b(p)-a(p)^2\big)\prod_{j=1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}a(2j-1)^2+\big(b(p-1)b(p)-a(p-1)^2\big)\prod_{j=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1}a(2j)^2\\
&\quad+b(p)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1}b(2i)\prod_{j=0}^{i-1}a(2j)^2\prod_{j=i+1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}a(2j-1)^2\\
&\quad+\frac{a(p)^2}{b(p)}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}b(2i-1)\prod_{j=1}^{i-1}a(2j-1)^2\prod_{j=i}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}a(2j)^2\\
&=-\prod_{j=1}^{\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}a(2j-1)^2-\prod_{j=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}a(2j)^2+b(p)\sum_{i=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}b(2i)\prod_{j=0}^{i-1}a(2j)^2\prod_{j=i+1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}a(2j-1)^2\\
&\quad+\frac{a(p)^2}{b(p)}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}b(2i-1)\prod_{j=1}^{i-1}a(2j-1)^2\prod_{j=i}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}a(2j)^2\\
&=-\sum_{\alpha\in\Lambda_{p+1}^{\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}+\sum_{\alpha\in A_{p+1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,1}}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}+\sum_{\alpha\in A_{p+1}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,2}}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}+\frac{a(p)^2}{b(p)}\sum_{\alpha\in A_{p}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,5}}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}.
\end{aligned}
$$

En particular, cuando $p=4,5$ entonces $\lfloor\frac{p}{2}\rfloor=2$ obteniéndose

$$
b(4)\sum_{\alpha\in\Lambda_4^2}\hat a^{2\alpha}\hat b^{\bar\alpha}+R_4(a;b)=\sum_{\alpha\in\Lambda_5^2}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}\ \text{ y }\ b(5)\sum_{\alpha\in\Lambda_5^2}\hat a^{2\alpha}\hat b^{\bar\alpha}+R_5(a;b)=-\sum_{\alpha\in\Lambda_6^3}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}+\sum_{\alpha\in\Lambda_6^2}a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}
$$

y, en consecuencia, $Q_p(\hat a;\hat b)=Q_{p+1}(a;b)$.

Consideramos ahora $p \geq 6$ y $2 \leq j \leq \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1$. Entonces, $b(p) \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} \hat{a}^{2\alpha} \hat{b}^{\bar{\alpha}} = b(p) \sum_{i=1}^{5} \sum_{\alpha \in A_p^{j,i}} \hat{a}^{2\alpha} \hat{b}^{\bar{\alpha}}$ y, además, se obtiene

$$\begin{aligned}
b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,1}} \hat{a}^{2\alpha} \hat{b}^{\bar{\alpha}} &= b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,1}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} - a(p-1)^2 \sum_{\alpha \in A_p^{j,1}} a^{2\alpha} \prod_{i=0}^{p-2} b^{\bar{\alpha}_i} - a(p)^2 \sum_{\alpha \in A_p^{j,1}} a^{2\alpha} \prod_{i=1}^{p-1} b^{\bar{\alpha}_i} \\
&\quad + \frac{a(p-1)^2 a(p)^2}{b(p)} \sum_{\alpha \in A_p^{j,1}} a^{2\alpha} \prod_{i=1}^{p-2} b^{\bar{\alpha}_i} \\
&= \sum_{\alpha \in A_p^{j,1} \times \{0\}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} - \sum_{\alpha \in A_p^{j+1,5} \times \{0\}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} - \sum_{\alpha \in A_p^{j,1} \times \{1\}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} + \frac{a(p)^2}{b(p)} \sum_{\alpha \in A_p^{j+1,5}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}}, \\
b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,2}} \hat{a}^{2\alpha} \hat{b}^{\bar{\alpha}} &= b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,2}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} - a(p-1)^2 \sum_{\alpha \in A_p^{j,2}} a^{2\alpha} \prod_{i=0}^{p-2} b^{\bar{\alpha}_i} = \sum_{\alpha \in A_p^{j,2} \times \{0\}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} - \sum_{\alpha \in A_{p+1}^{j+1,4}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}}, \\
b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,3}} \hat{a}^{2\alpha} \hat{b}^{\bar{\alpha}} &= b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,3}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} - a(p)^2 \sum_{\alpha \in A_p^{j,3}} a^{2\alpha} \prod_{i=1}^{p-1} b^{\bar{\alpha}_i} = \sum_{\alpha \in A_p^{j,3} \times \{0\}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} - \sum_{\alpha \in A_p^{j,3} \times \{1\}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}}, \\
b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,4}} \hat{a}^{2\alpha} \hat{b}^{\bar{\alpha}} &= b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,4}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} = \sum_{\alpha \in A_p^{j,4} \times \{0\}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}}, \\
b(p) \sum_{\alpha \in A_p^{j,5}} \hat{a}^{2\alpha} \hat{b}^{\bar{\alpha}} &= \frac{a(p)^2}{b(p)} \sum_{\alpha \in A_p^{j,5}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Entonces, del Lema 1.2 obtenemos que

$$\begin{aligned}
b(p) \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} (-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} \hat{a}^{2\alpha} \hat{b}^{\bar{\alpha}} &= \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} (-1)^j \left[\sum_{\alpha \in A_{p+1}^{j,1}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} + \sum_{\alpha \in A_{p+1}^{j,2}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} \right] \\
&\quad - \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} (-1)^j \left[\sum_{\alpha \in A_{p+1}^{j+1,3}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} + \sum_{\alpha \in A_{p+1}^{j+1,4}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} + \sum_{\alpha \in A_{p+1}^{j+1,5}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} \right] \\
&\quad + \frac{a(p)^2}{b(p)} \sum_{j=2}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1} (-1)^j \left[\sum_{\alpha \in A_p^{j+1,5}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} + \sum_{\alpha \in A_p^{j,5}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} \right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha\in A^{2,1}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} + \sum_{\alpha\in A^{2,2}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} + \sum_{j=3}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1}(-1)^j \sum_{\alpha\in\Lambda^j_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}\\
&+ (-1)^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\left[\sum_{\alpha\in A^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,3}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} + \sum_{\alpha\in A^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,4}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} + \sum_{\alpha\in A^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,5}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}\right]\\
&+ \frac{a(p)^2}{b(p)}\left[\sum_{\alpha\in A^{2,5}_{p}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} - (-1)^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\sum_{\alpha\in A^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,5}_{p}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_p(a;b) &= a(p-1)^2\sum_{i=0}^{p-3} a(i)^2 \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i,i+1}}^{p-2} b(j) + a(p)^2\sum_{i=1}^{p-2} a(i)^2 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,i+1}}^{p-1} b(j)\\
&- \frac{a(p-1)^2a(p)^2}{b(p)}\sum_{i=1}^{p-3} a(i)^2 \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i,i+1}}^{p-2} b(j)\\
&= \sum_{\alpha\in A^{2,3}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} + \sum_{\alpha\in A^{2,4}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} + \sum_{\alpha\in A^{2,5}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} - \frac{a(p)^2}{b(p)}\sum_{\alpha\in A^{2,5}_{p}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha},
\end{aligned}
$$

lo que implica que

$$
\begin{aligned}
b(p)\sum_{j=2}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}(-1)^j \sum_{\alpha\in\Lambda^j_p} \hat a^{2\alpha}\hat b^{\bar\alpha} + R_p(a;b) &= \sum_{j=2}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor-1}(-1)^j \sum_{\alpha\in\Lambda^j_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}\\
&+ (-1)^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\left[\sum_{\alpha\in A^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,3}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} + \sum_{\alpha\in A^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,4}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha} + \sum_{\alpha\in A^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,5}_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}\right]\\
&+ (-1)^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}\left[b(p)\sum_{\alpha\in\Lambda^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}_p} \hat a^{2\alpha}\hat b^{\bar\alpha} - \frac{a(p)^2}{b(p)}\sum_{\alpha\in A^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor,5}_{p}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}\right].
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando la expresión para $b(p)\sum_{\alpha\in\Lambda^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}_p} \hat a^{2\alpha}\hat b^{\bar\alpha}$ en ambos casos, p par e impar, se obtiene que

$$
b(p)\sum_{j=2}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}(-1)^j \sum_{\alpha\in\Lambda^j_p} \hat a^{2\alpha}\hat b^{\bar\alpha} + R_p(a;b) = \sum_{j=2}^{\lfloor\frac{p+1}{2}\rfloor}(-1)^j \sum_{\alpha\in\Lambda^j_{p+1}} a^{2\alpha}b^{\bar\alpha}
$$

y, en consecuencia, que $Q_p(\hat a;\hat b) = Q_{p+1}(a;b)$.

Si ahora consideramos $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$, $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$, entonces $\gamma = \sqrt{\dfrac{c^{\pi_p}}{ra^{\pi_p}}}$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} q_{p,r}(a;b;c) = Q_p(a_\rho; b_\rho) &= \frac{1}{2a_\rho^{\pi_p}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} a_\rho^{2\alpha} b_\rho^{\bar{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2a^{\pi_p}\rho_{a,c}^{\pi_p}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} \gamma^{2\alpha_{p-1}-1} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} \rho_{a,c}^{2\alpha+\bar{\alpha}} \\ &= \frac{1}{2\rho_{a,c}^{\pi_p}} \sqrt{\frac{r}{a^{\pi_p}c^{\pi_p}}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} \left(\frac{c^{\pi_p}}{ra^{\pi_p}}\right)^{\alpha_{p-1}} a^{2\alpha} b^{\bar{\alpha}} \rho_{a,c}^{2\alpha+\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

El resultado se obtiene teniendo en cuenta que para cualquier $\alpha \in \Lambda_p^m$, $m = 0, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ obtenemos

$$\left(\frac{c^{\pi_p}}{a^{\pi_p}}\right)^{\alpha_{p-1}} \rho_{a,c}^{2\alpha+\bar{\alpha}} = \rho_{a,c}^{\pi_p} \frac{c^\alpha}{a^\alpha}.$$

□

Si tenemos en cuenta que a partir del Lema 6.1 del Capítulo 3, $\ell(\mathbb{R}; p, r) \subset \ell(\mathbb{R}; np, r^n)$, para cualquier $p \in \mathbb{N}^*$, cualquier $r \in \mathbb{R}^*$ y, cualquier $n \in \mathbb{N}^*$, entonces $q_{np,r^n}(a; b; c)$ tiene sentido cuando $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$ y $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$. De hecho, obtenemos la siguiente relación entre las funciones de Floquet q_{np,r^n} y $q_{p,r}$.

PROPOSICIÓN 3.5. *Dados $p \in \mathbb{N}^*$ y $r \in \mathbb{R}^*$ entonces para cualquier $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$, $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$ y $n \in \mathbb{N}^*$ se obtiene*

$$q_{np,r^n}(a;b;c) = T_n\big(q_{p,r}(a;b;c)\big).$$

Demostración. En primer lugar, suponemos que $a, c \in \mathbb{R}^*$ y $b \in \mathbb{R}$; es decir, que la Ecuación (54) tiene coeficientes constantes. Entonces, $p = r = 1$ y del Teorema 3.4 y la Proposición 1.3, para cualquier $n \in \mathbb{N}^*$ obtenemos

$$q_{n,1}(a;b;c) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{a^n c^n}} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j a^j b^{n-2j} c^j |\Lambda_n^j| = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^j \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} \Big(\frac{b}{\sqrt{ac}}\Big)^{n-2j} = T_n(q),$$

donde $q = \dfrac{b}{2\sqrt{ac}} = q_{1,1}(a; b; c)$.

Asumimos ahora que $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$ y $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$ y consideramos $u \in \ell(\mathbb{K})$ una solución de la Ecuación (54). Si $\gamma = \big(r\rho_{a,c}(p)\big)^{-\frac{1}{2}}$, entonces por el Teorema 6.4 del Capítulo 3, para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, la sucesión $v(k) = \gamma^{-k} u_{p,m}(k)$ es una solución de la ecuación de Chebyshev con parámetro $q_{p,r}(a; b; c)$.

Por otro lado, puesto que $\rho_{a,c}(np) = \rho_{a,c}(p)^n$ obtenemos que $\big(r^n \rho_{a,c}(np)\big)^{-\frac{1}{2}} = \gamma^n$ y, por tanto, el Teorema 6.4 también implica que para cualquier $m \in \mathbb{Z}$, la sucesión $w(k) = \gamma^{-nk} u_{np,m}(k)$ es una solución de la ecuación de Chebyshev con parámetro $q_{np,r^n}(a; b; c)$.

Finalmente, como $u_{np,m}(k) = u(knp + m) = u_{p,m}(nk)$, se obtiene que $w(k) = v(nk) = v_{n,0}(k)$. En consecuencia, se prueba el resultado aplicando la primera parte de esta demostración. □

La particularización de la Proposición anterior a ecuaciones de Chebyshev, conduce a la siguiente generalización del Lema 5.2 del Capítulo 3.

COROLARIO 3.6. *Dada* $v \in \ell(\mathbb{C})$ *una sucesión de Chebyshev con parámetro* $q \in \mathbb{C}$*, entonces para cualquier* $n, m \in \mathbb{N}^*$*, la subsucesión* $v_{n,m}$ *es una sucesión de Chebyshev con parámetro* $T_n(q)$*.*

Aplicando el resultado anterior junto con las identidades de los apartados 2 y 5, respectivamente, del Corolario 4.12 del Capítulo 3, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}^*$ y cualquier $k \in \mathbb{Z}$ obtenemos las siguientes relaciones entre polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie:

$$T_{kn+m}(x) = T_m(x)U_k\big(T_n(x)\big) - T_{m-n}(x)U_{k-1}\big(T_n(x)\big),$$
$$U_{kn+m}(x) = U_m(x)U_k\big(T_n(x)\big) - U_{m-n}(x)U_{k-1}\big(T_n(x)\big).$$

Tomando $k = 1$ en ambas identidades se obtienen las conocidas relaciones, véase [**42**]

$$2T_m(x)T_n(x) = T_{n+m}(x) + T_{m-n}(x) \;\text{ y }\; 2U_m(x)T_n(x) = U_{n+m}(x) + U_{m-n}(x). \tag{57}$$

Considerando $m = 0$ en la primera ecuación y $n = 2m + 2$ en la segunda y, teniendo en cuenta alguna de las identidades de las Proposiciones 4.7 y 4.8 del Capítulo 3, obtenemos las siguientes generalizaciones de las primeras identidades en (41) y (42) del Capítulo 3

$$T_{kn}(x) = T_k\big(T_n(x)\big) \;\text{ y }\; U_{2k(m+1)+m}(x) = U_m(x)W_k\big(T_{2(m+1)}(x)\big). \tag{58}$$

Por último, tomando $n = 2m$ en la primera ecuación y $m = n - 1$ en la segunda y, nuevamente, considerando las Proposiciones del Capítulo 3 anteriormente mencionadas, se obtienen las siguientes generalizaciones de las segundas identidades de (42) y de (41) del Capítulo 3, respectivamente

$$T_{m(2k+1)}(x) = T_m(x)V_k\big(T_{2m}(x)\big) \;\text{ y }\; U_{(k+1)n-1}(x) = U_{n-1}(x)U_k\big(T_n(x)\big). \tag{59}$$

Finalizamos esta sección analizando cuando una ecuación en diferencias de segundo orden con coeficientes casi–periódicos con periodo p tiene también soluciones casi–periódicas con el mismo periodo. Así que, dados $p \in \mathbb{N}^*$, $r \in \mathbb{R}^*$ y las sucesiones $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$, $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$, si $u \in \ell(\mathbb{K}; p, \hat{r})$ es una solución de la Ecuación (54), por el Lema 6.1 del Capítulo 3 sabemos que $u_{p,m} \in \ell(\mathbb{K}; 1, \hat{r})$. Además, el Teorema 6.4 del mismo capítulo establece que $u_{p,m}(k) = \gamma^k v(k)$, donde $\gamma = \sqrt{\dfrac{c^{\pi_p}}{ra^{\pi_p}}}$ y $v(k)$ es una solución de la ecuación de Chebyshev con parámetro $q_{p,r}(a; b; c)$. Por tanto, $u \in \ell(\mathbb{K}; p, \hat{r})$ sii $v \in \ell(\mathbb{K}; 1, \hat{r}\gamma^{-1})$. En consecuencia, aplicando la Proposición 3.2 obtenemos la siguiente caracterización.

TEOREMA 3.7. *Dados* $p \in \mathbb{N}^*$ *y* $r \in \mathbb{R}^*$ *entonces para cualquier* $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p, r)$ *y* $b \in \ell(\mathbb{R}; p, r)$*, la ecuación en diferencias*

$$a(k)u(k + 1) - b(k)u(k) + c(k - 1)u(k - 1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

tiene soluciones casi–periódicas con periodo p *y razón* $\hat{r} \in \mathbb{K}^*$ *sii*

$$\hat{r}a^{\pi_p} + (r\hat{r})^{-1}c^{\pi_p} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}(-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} r^{-\alpha_{p-1}} a^{\alpha} b^{\bar{\alpha}} c^{\alpha}.$$

Cuando $r = \hat{r} = 1$, el resultado anterior determina la condición necesaria y suficiente para la existencia de soluciones periódicas de las ecuaciones en diferencias con coeficientes periódicos, que representa una completa generalización del Corolario 3.3.

COROLARIO 3.8 (Floquet). *Si* $a, c \in \ell(\mathbb{R}^*; p)$ *y* $b \in \ell(\mathbb{R}; p)$*, la ecuación en diferencias*

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

tiene soluciones periódicas con periodo p *sii*

$$a^{\pi_p} + c^{\pi_p} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} (-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} a^{\alpha} b^{\bar{\alpha}} c^{\alpha}.$$

Puede compararse la condición dada en el anterior corolario con el mismo resultado en [**1**, Corolario 2.9.2], en el que se expresa la condición en función de la matriz fundamental del sistema equivalente a la ecuación en diferencias.

Capítulo 5

Problemas de contorno en un camino finito

1. Introducción

El objetivo de este capítulo es el análisis de los problemas de contorno que pueden plantearse en un camino, por lo que necesariamente nos situaremos en el caso de un camino finito. Concretamente, en todo el capítulo supondremos que $\mathbf{I}$ es el camino con $n+2$ vértices, esto es $\mathbf{I} = \{0, 1, \dots, n, n+1\}$, lo que implica que $\delta(\mathbf{I}) = \{0, n+1\}$ y que $\overset{\circ}{\mathbf{I}} = \{1, \dots, n\}$.

Seguiremos el guión que nos proporciona la teoría clásica de problemas de contorno lineales y de segundo orden, por lo que la referencia obligada es [**23**]. Por otra parte, el tratamiento que haremos en todo el capítulo representará una extensión natural del estudio realizado en [**10**] para los problemas de contorno asociados a ecuaciones de Chebyshev o, equivalentemente, para ecuaciones con coeficientes constantes. Como veremos nuestro tratamiento presenta numerosísimas analogías con el caso continuo, especialmente por lo que se refiere al tratamiento algebraico de las condiciones de contorno, pero también permitirá plantear nuevas cuestiones que parecen exclusivas del caso discreto.

Nuestro punto de partida será la Identidad de Green, Proposición 1.12 del Capítulo 2. Recordemos primero que si $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ satisfacen que $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$, podemos definir la conductancia $\gamma\colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ como $\gamma(k, k+1) = a(k)$ y como $\gamma(k+1, k) = c(k)$, para cada $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}} \cup \{0\}$ y $\gamma(k, s) = 0$ en otro caso. Si para cada $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, definimos el potencial $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ como $b - \kappa_\gamma$, entonces para cada $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, la ecuación en diferencias lineal irreducible y de segundo orden

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

coincide con la ecuación de Schrödinger $\mathcal{L}_q^\gamma(u) = -f$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$. Recíprocamente, el mismo resultado se obtiene si consideramos $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, sus coeficientes $a^\gamma, c^\gamma \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y para cada potencial $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ el coeficiente $b_q^\gamma = q + \kappa_\gamma$.

Además, si tenemos en cuenta el potencial asociado a γ; es decir, $p_\gamma = \kappa_\gamma - \kappa_{\gamma^*}$, resulta que

$$(\mathcal{L}_q^\gamma)^* = \mathcal{L}_{q+p_\gamma}^{\gamma^*} = \mathcal{D}_{\rho_\gamma} \circ \mathcal{L}_q^\gamma \circ \mathcal{D}_{\rho_\gamma}^{-1}.$$

En este capítulo, partiremos de los coeficientes $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ y $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y consideraremos $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$ y $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ la conductancia y el potencial determinados por ellos y, también, el operador de Schrödinger asociado $\mathcal{L}_q^\gamma$. Así pues, para cada $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, la ecuación en diferencias

$$a(k)u(k+1) - b(k)u(k) + c(k-1)u(k-1) = f(k), \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

y la ecuación de Schrödinger dada por $\mathcal{L}_q^\gamma(u) = -f$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ son equivalentes. Asimismo, la ecuación de Schrödinger homogénea dada por $(\mathcal{L}_q^\gamma)^*(u) = 0$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ coincide con la ecuación adjunta de la anterior,

$$c(k)u(k+1) - b(k)u(k) + a(k-1)u(k-1) = 0, \quad k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}\,.$$

DEFINICIÓN 1.1. *Si* $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*, denominamos* bilineal de contorno asociada a a y c *a la aplicación* $\mathfrak{B}_{a,c}\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \times \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que a cada* $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *le asigna el número real*

$$\mathfrak{B}_{a,c}(u,v) = a(0)u(1)v(0) - c(0)u(0)v(1) - a(n)u(n+1)v(n) + c(n)u(n)v(n+1).$$

Claramente, $\mathfrak{B}_{a,c}$ es una aplicación bilineal, con lo que el nombre está justificado y, además, $\mathfrak{B}_{a,c}(u,v) = 0$ para cada $u, v \in \mathcal{C}(\mathring{\mathbf{I}})$, mientras que para cada $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{a,c}(u,v) &= a(n)w[u,v](n) - a(0)w[u,v](0)\\ &\quad + \big(c(n) - a(n)\big)u(n)v(n+1) - \big(c(0) - a(0)\big)u(0)v(1)\\ &= c(n)w[u,v](n) - c(0)w[u,v](0)\\ &\quad + \big(c(n) - a(n)\big)v(n)u(n+1) - \big(c(0) - a(0)\big)v(0)u(1)\end{aligned}$$

Con la definición anterior, la Identidad de Green, Proposición 1.12 del Capítulo 2, puede expresarse como

$$\int_0^n \Big[\mathcal{L}^\gamma(u)v - (\mathcal{L}^\gamma)^*(v)u\Big] = \mathfrak{B}_{a,c}(u,v), \quad \text{para cada } u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) \tag{60}$$

y, en particular,

$$\int_0^n \mathcal{L}^\gamma(u)v = \int_0^n (\mathcal{L}^\gamma)^*(v)u, \quad \text{para cada } u, v \in \mathcal{C}(\mathring{\mathbf{I}}).$$

Como, para cada potencial $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ se satisface que

$$\int_0^n \Big[\mathcal{L}_q^\gamma(u)v - (\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v)u\Big] = \int_0^n \Big[\mathcal{L}^\gamma(u)v - (\mathcal{L}^\gamma)^*(v)u\Big],$$

la bilineal no cambia al considerar cualquier potencial o, equivalentemente, cualquier coeficiente b para la ecuación en diferencias.

Por otra parte, si para cada $k \in \mathbf{I}$ definimos la matriz $\mathsf{B}_{a,c}(k) = \begin{bmatrix} 0 & -a(k) \\ c(k) & 0 \end{bmatrix}$, entonces $\det \mathsf{B}_{a,c}(k) = a(k)c(k) \neq 0$ para cada $k \in \mathbf{I}$ y, además, para cada $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$,

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{a,c}(u,v) &= \big[v(0), v(1), v(n), v(n+1)\big] \begin{bmatrix} -\mathsf{B}_{a,c}(0) & 0 \\ 0 & \mathsf{B}_{a,c}(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(n) \\ u(n+1) \end{bmatrix}\\ &= \big[v(n), v(n+1)\big] \mathsf{B}_{a,c}(n) \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n+1) \end{bmatrix} - \big[v(0), v(1)\big] \mathsf{B}_{a,c}(0) \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{61}$$

Como en [**23**], la anterior identidad será clave en el análisis de los problemas de contorno, más concretamente de las condiciones de contorno. En este sentido, todo el estudio algebraico que efectuaremos sobre las condiciones de contorno para ecuaciones en diferencias de segundo orden, es totalmente válido para ecuaciones diferenciales de segundo orden.

2. Condiciones de contorno linealmente independientes y problemas de contorno

En esta sección presentaremos y estudiaremos las condiciones de contorno lineales que configuran los diferentes problemas de contorno relativos a las ecuaciones en diferencias lineales e irreducibles de segundo orden.

DEFINICIÓN 2.1. *Dados* $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ *no simultáneamente nulos, la aplicación* $\mathfrak{c}\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *determinada por la expresión*

$$\mathfrak{c}(u) = c_1 u(0) + c_2 u(1) + c_3 u(n) + c_4 u(n+1), \quad \textit{para cada } u \in \mathcal{C}(\mathbf{I}),$$

se denomina forma lineal de contorno o condición de contorno lineal*, de coeficientes* c_1, c_2, c_3 *y* c_4.

Es claro que, en las anteriores condiciones, $\mathfrak{c}$ es un funcional lineal no nulo. Además, los coeficientes de $\mathfrak{c}$ están perfectamente caracterizados ya que $\mathfrak{c}(\varepsilon_0) = c_1$, $\mathfrak{c}(\varepsilon_1) = c_2$, $\mathfrak{c}(\varepsilon_n) = c_3$ y $\mathfrak{c}(\varepsilon_{n+1}) = c_4$.

Si $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ son las condiciones de contorno de coeficientes $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}$ y $c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}$, respectivamente, entonces para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ se satisface que

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1(u) \\ \mathfrak{c}_2(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(n) \\ u(n+1) \end{bmatrix}, \tag{62}$$

y $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ se denomina *el par de condiciones de contorno determinadas por la matriz*

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R}).$$

LEMA 2.2. *Consideremos* $\mathfrak{c}_1$ *y* $\mathfrak{c}_2$ *las formas lineales de contorno determinadas por la matriz* $\mathsf{C} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ *y definamos* $\mathfrak{h}\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *como* $\mathfrak{h}(u) = \big(\mathfrak{c}_1(u), \mathfrak{c}_2(u)\big)^\top$. *Entonces, son equivalentes:*

(i) $\mathfrak{c}_1$ *y* $\mathfrak{c}_2$ *son linealmente independientes.*
(ii) $\mathfrak{h}$ *es sobreyectiva.*
(iii) $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$.

Además, si se satisface cualquiera de las condiciones anteriores, para cada $\mathsf{w} = (w_1, w_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ *existe* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *tal que* $\mathfrak{c}_1(u) = w_1$ *y* $\mathfrak{c}_2(u) = w_2$. *Concretamente, si* $\mathsf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ *es tal que* $\mathsf{C}\mathsf{v} = \mathsf{w}$*, podemos tomar* $u = v_1\varepsilon_0 + v_2\varepsilon_1 + v_3\varepsilon_n + v_4\varepsilon_{n+1}$.

Demostración. Si consideramos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno estándar en $\mathbb{R}^2$ y $\mathsf{v} = (v_1, v_2)^\top \in (\operatorname{Im} \mathfrak{h})^\perp$, entonces $\langle \mathsf{v}, \mathfrak{h}(u) \rangle = 0$ para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$; es decir, $v_1\mathfrak{c}_1(u) + v_2\mathfrak{c}_2(u) = 0$ para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$. Por tanto, $\mathsf{v} = (v_1, v_2)^\top \in (\operatorname{Im} \mathfrak{h})^\perp$ sii $v_1\mathfrak{c}_1 + v_2\mathfrak{c}_2 = 0$, lo que implica que $\mathfrak{c}_1$ y $\mathfrak{c}_2$ son linealmente independientes sii $(\operatorname{Im} \mathfrak{h})^\perp = \{0\}$, es decir, sii $\operatorname{Im} \mathfrak{h} = \mathbb{R}^2$. Así pues, hemos demostrado que (i) y (ii) son equivalentes.

Además, $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es tal que $\mathfrak{h}(u) = \mathsf{w} = (w_1, w_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ sii $\mathsf{v} = \big(u(0), u(1), u(n), u(n+1)\big)^\top$ satisface que $\mathsf{C}\mathsf{v} = \mathsf{w}$ y, en este caso, también $\hat{u} = u(0)\varepsilon_0 + u(1)\varepsilon_1 + u(n)\varepsilon_n + u(n+1)\varepsilon_{n+1}$ satisface que $\mathfrak{h}(\hat{u}) = \mathsf{w}$. Esto demuestra que (ii) y (iii) son equivalentes y la última afirmación del lema. ☐

Observar que, en las condiciones del lema anterior, es claro que $\mathcal{C}(\mathbf{I})/\ker \mathfrak{h} \simeq \mathbb{R}^2$ y, también, que $\ker \mathfrak{h} = \ker \mathfrak{c}_1 \cap \ker \mathfrak{c}_2$. De hecho, consideremos $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tales que $\mathfrak{h}(u) = (1,0)^\top$ y $\mathfrak{h}(v) = (0,1)^\top$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y tomamos $x = au + bv$, entonces $\mathfrak{h}(x) = (a,b)^\top$ y, por tanto, $x \in \ker \mathfrak{h}$ sii $a = b = 0$, lo que, en particular, implica que u y v son linealmente independientes. Por otra parte, si $x \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $\mathfrak{h}(x) = (a,b)^\top$, entonces $x - au - bv \in \ker \mathfrak{h}$, lo que implica que existe $z \in \mathfrak{h}$ tal que $x = au + bv + z$. En definitiva, $\mathcal{C}(\mathbf{I}) = \operatorname{sg}\{u, v\} \oplus \ker \mathfrak{h}$.

Presentamos a continuación el problema a cuyo análisis estará dedicado todo el capítulo. En el resto de la sección, consideraremos fijadas las funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ tales que $a(n+1) = c(n)$ y $c(n+1) = a(n)$, $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y, también, la conductancia $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, el potencial $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y el operador de Schrödinger $\mathcal{L}_q^\gamma$ determinados por ellas. Asimismo, también consideraremos fijado el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ determinado por $\mathsf{C} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ y asumiremos que ambas condiciones son linealmente independientes; es decir, que $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$.

DEFINICIÓN 2.3. *El* problema de contorno en $\mathbf{I}$ determinado por el operador de Schrödinger $\mathcal{L}_q^\gamma$ y el par de condiciones de contorno linealmente independientes $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$*, que representaremos por la tripleta* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$*, para cada dato* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, trata de determinar si existe* $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*, denominada* solución*, tal que*

$$\mathcal{L}_q^\gamma(u) = f, \ \ en \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \qquad \mathfrak{c}_1(u) = f(0) \ \ y \ \ \mathfrak{c}_2(u) = f(n+1).$$

El problema de contorno se denomina semihomogéneo *cuando* $f \in \mathcal{C}(\overset{\circ}{\mathbf{I}})$*, es decir, cuando se satisface que* $f(0) = f(n+1) = 0$*, y* homogéneo *cuando* $f = 0$*.*

El siguiente resultado, cuya demostración se reduce a una simple comprobación, muestra que podemos restringir nuestro estudio al de problemas de contorno semihomogéneos. Para ello, es clave que las condiciones de contorno sean linealmente independientes o, equivalentemente, que si el par está determinado por la matriz $\mathsf{C} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$, entonces $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$. Esto implica que dados $f(0)$ y $f(n+1)$, siempre podemos encontrar $\mathsf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^\top \in \mathbb{R}^4$ tal que $\mathsf{C}\mathsf{v} = \big(f(0), f(n+1)\big)^\top$.

LEMA 2.4. *Consideremos el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *y* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*. Si* $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}$ *son tales que*

$$c_{11}v_1 + c_{12}v_2 + c_{13}v_3 + c_{14}v_4 = f(0) \quad y \quad c_{21}v_1 + c_{22}v_2 + c_{23}v_3 + c_{24}v_4 = f(n+1)$$

y definimos $g \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *como*

$$\begin{aligned} g = f - f(0)\varepsilon_0 &+ \Big[(v_1 - v_2)c(0) - v_2\big(a(1) + q(1)\big)\Big]\varepsilon_1 + v_2 c(1)\varepsilon_2 \\ &+ v_3 a(n-1)\varepsilon_{n-1} + \Big[(v_4 - v_3)a(n) - v_3\big(c(n-1) + q(n)\big)\Big]\varepsilon_n - f(n+1)\varepsilon_{n+1} \end{aligned},$$

entonces $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *es solución del problema de contorno con dato* f *sii la función*

$$v = u - v_1\varepsilon_0 - v_2\varepsilon_1 - v_3\varepsilon_n - v_4\varepsilon_{n+1}$$

es solución del problema de contorno semihomogéneo con dato g*.*

El que el análisis de cada problema de contorno se reduzca a otro semihomogéneo motiva el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 2.5. *Si* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *y* $(\hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$ *son dos pares de condiciones de contorno linealmente independientes entre sí, diremos que son* equivalentes *si* $\ker \mathfrak{c}_1 \cap \ker \mathfrak{c}_2 = \ker \hat{\mathfrak{c}}_1 \cap \ker \hat{\mathfrak{c}}_2$*. En estas circunstancias, los problemas de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *y* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$ *se denominan también* problemas de contorno equivalentes.

La noción anterior puede extenderse de manera obvia al caso de problemas de contorno en el que los operadores de Schrödinger son semejantes: Los problemas de contorno $(\mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ y $(\mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2}, \hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$ se denominan equivalentes si los pares de condiciones de contorno son equivalentes y, asimismo, los operadores de Schrödinger son *semejantes* en el sentido de que las correspondientes ecuaciones en diferencias lo son; es decir, existe $\sigma \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ tal que $\mathcal{L}_{q_2}^{\gamma_2} = \sigma \mathcal{L}_{q_1}^{\gamma_1}$. En particular, cada problema de contorno es equivalente a otro en el que el operador es autoadjunto. No obstante, en este capítulo estaremos más interesados en describir y analizar las propiedades de las condiciones de contorno, por lo que, a menos que especifiquemos otra cosa, utilizaremos la noción de equivalencia en el sentido de la Definición 2.5.

De la definición se deduce de manera inmediata que los pares $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ y $(\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_1)$ son equivalentes. Si el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ está determinado por $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$, entonces el par $(\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_1)$ está determinado por $\widehat{\mathsf{C}} = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$. Como veremos esta propiedad es característica de los pares de condiciones equivalentes.

LEMA 2.6. *Si* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *y* $(\hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$ *son los pares de condiciones de contorno linealmente independientes determinadas por las matrices* $\mathsf{C}, \widehat{\mathsf{C}} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$*, entonces ambos pares son equivalentes sii existe una matriz no singular* $\mathsf{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *tal que* $\widehat{\mathsf{C}} = \mathsf{MC}$.

Demostración. Consideremos $\mathfrak{h}, \hat{\mathfrak{h}} \colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ las funciones definidas como $\mathfrak{h}(u) = \big(\mathfrak{c}_1(u), \mathfrak{c}_2(u)\big)^\top$ y $\hat{\mathfrak{h}}(u) = \big(\hat{\mathfrak{c}}_1(u), \hat{\mathfrak{c}}_2(u)\big)^\top$. Con estas notaciones, los pares son equivalentes sii $\ker \mathfrak{h} = \ker \hat{\mathfrak{h}}$ y, además, si $\mathsf{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{\mathsf{C}} = \mathsf{MC}$ sii $\hat{\mathfrak{h}}(u) = \mathsf{M}\mathfrak{h}(u)$, para cada $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$. Por tanto, si se satisface la identidad anterior y M es invertible, entonces $\ker \mathfrak{h} = \ker \hat{\mathfrak{h}}$.

Recíprocamente, consideremos $u, v, w, y \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tales que $[\mathfrak{h}(u), \mathfrak{h}(v)] = [\hat{\mathfrak{h}}(w), \hat{\mathfrak{h}}(y)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sabemos que u y v son linealmente independientes y que lo mismo ocurre con w e y.

Si $\hat{\mathfrak{h}}(u) = (a, b)^\top$ y $\hat{\mathfrak{h}}(v) = (c, d)^\top$, entonces existen $z_1, z_2 \in \ker \hat{\mathfrak{h}}$ tales que $u = aw + by + z_1$ y $v = cw + dy + z_2$.

Consideremos $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ y supongamos que los pares de condiciones de contorno son equivalentes. Entonces, M es no singular, pues si existieran $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tales que $\mathsf{M} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = 0$, entonces $x = \lambda u + \mu v \in \ker \hat{\mathfrak{h}} = \ker \mathfrak{h}$ y, por tanto, $\mathfrak{h}(x) = (\lambda, \mu)^\top = (0, 0)$; es decir, $\lambda = \mu = 0$.

Si $x \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y $\mathfrak{h}(x) = (\alpha, \beta)^\top$, entonces existe $\hat{z} \in \ker \mathfrak{h} = \ker \hat{\mathfrak{h}}$ tal que

$$x = \alpha u + \beta v + \hat{z} = \alpha(aw + by) + \beta(cw + dy) + \alpha z_1 + \beta z_2 + \hat{z},$$

lo que implica que $\hat{\mathfrak{h}}(x) = \mathsf{M} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathsf{M}\mathfrak{h}(x)$, puesto que $\alpha z_1 + \beta z_2 + \hat{z} \in \ker \hat{\mathfrak{h}}$. □

DEFINICIÓN 2.7. *Si* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es el par de condiciones de contorno linealmente independientes determinadas por la matriz* $\mathsf{C} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$*, diremos que el par de condiciones de contorno* $(\mathfrak{c}_1^c, \mathfrak{c}_2^c)$ *linealmente independientes determinadas por la matriz* C^c *es* complementario *del par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *sii la matriz* $\begin{bmatrix} \mathsf{C} \\ \mathsf{C}^c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ *es no singular.*

PROPOSICIÓN 2.8. *Sean* $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ *y consideremos* $\mathfrak{B}_{a,c}$ *su bilineal de contorno asociada. Entonces, para cada par de condiciones de contorno* $(\mathfrak{c}_1^c, \mathfrak{c}_2^c)$ *complementario del par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$*, existen dos pares de condiciones de contorno* $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$ *y* $\big((\mathfrak{c}_1^*)^c, (\mathfrak{c}_2^*)^c\big)$ *linealmente independientes y complementarias una de otra y tales que*

$$\mathfrak{B}_{a,c}(u, v) = \mathfrak{c}_1(u)(\mathfrak{c}_1^*)^c(v) + \mathfrak{c}_2(u)(\mathfrak{c}_2^*)^c(v) + \mathfrak{c}_1^c(u)\mathfrak{c}_1^*(v) + \mathfrak{c}_2^c(u)\mathfrak{c}_2^*(v), \quad \textit{para cada } u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I}).$$

Además, si $(\hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$ es equivalente a $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ y consideramos $\big((\hat{\mathfrak{c}}_1)^c, (\hat{\mathfrak{c}}_2)^c\big)$ cualquier par complementario, entonces si $(\hat{\mathfrak{c}}_1^*, \hat{\mathfrak{c}}_2^*)$ y $\big((\hat{\mathfrak{c}}_1^*)^c, (\hat{\mathfrak{c}}_2^*)^c\big)$ son los pares de condiciones de contorno que satisfacen la identidad anterior, resulta que $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$ es equivalente a $(\hat{\mathfrak{c}}_1^*, \hat{\mathfrak{c}}_2^*)$.

Demostración. Es idéntica a la demostración del Teorema 2.1 en [**23**, Capítulo 11]. □

DEFINICIÓN 2.9. *Denominaremos* par adjunto del par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$, respecto de $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*, a cualquier par de condiciones de contorno $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$ que satisfagan las identidades de la Proposición 2.8. Cada una de las condiciones de contorno del par $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$, se denominan* condiciones adjuntas*, respecto de $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$. Si $a = c$, diremos que el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es* autoadjunto, respecto de $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, *si es equivalente a cualquier par de condiciones adjuntas.*

Denominaremos problema de contorno adjunto de $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *al problema de contorno homogéneo determinado por la tripleta $\big((\mathcal{L}_q^\gamma)^*, \mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*\big)$. El problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ se denomina* autoadjunto *si tanto el operador $\mathcal{L}_q^\gamma$ como el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ son autoadjuntos.*

NOTA 2.10. El problema adjunto de $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es siempre un problema homogéneo. Por otra parte, si el problema $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es autoadjunto, entonces $\mathcal{L}_q^\gamma = (\mathcal{L}_q^\gamma)^*$, lo que, en particular, implica que γ es simétrica o, equivalentemente, que $a = c$.

El siguiente resultado establece una *caracterización analítica* del problema adjunto de uno dado, a partir de la Identidad de Green.

COROLARIO 2.11. *El problema de contorno $\big((\mathcal{L}_q^\gamma)^*, \mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*\big)$ es adjunto de $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ sii*

$$\int_0^n \mathcal{L}_q^\gamma(u)v = \int_0^n (\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v)u, \quad \textit{para cada } u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) \textit{ tales que } \mathfrak{c}_1(u) = \mathfrak{c}_2(u) = \mathfrak{c}_1^*(v) = \mathfrak{c}_2^*(v) = 0.$$

En particular, el problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es autoadjunto sii

$$\int_0^n \mathcal{L}_q^\gamma(u)v = \int_0^n \mathcal{L}_q^\gamma(v)u, \quad \textit{para cada } u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) \textit{ tales que } \mathfrak{c}_1(u) = \mathfrak{c}_1(v) = \mathfrak{c}_2(u) = \mathfrak{c}_2(v) = 0.$$

Concluiremos esta sección con una nueva aplicación de la identidad y de la expresión de la forma bilineal de contorno dada en la Proposición 2.8, para analizar las condiciones de resolubilidad del problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$. Consideremos, pues, $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ y planteemos el problema

$$\mathcal{L}_q^\gamma(u) = f, \ \text{ en } \ \mathring{\mathbf{I}}, \quad \mathfrak{c}_1(u) = f(0) \ \text{ y } \ \mathfrak{c}_2(u) = f(n+1).$$

Si suponemos que $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es una solución del problema anterior, entonces la Proposición 2.8 establece que necesariamente ha de satisfacerse que

$$\int_0^n fv = f(0)(\mathfrak{c}_1^*)^c(v) + f(n+1)(\mathfrak{c}_2^*)^c(v),$$

para cada $v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ solución del problema adjunto. En particular, si $f \in \mathcal{C}(\mathring{\mathbf{I}})$, es decir, si el problema es semihomogéneo, entonces si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es una solución del problema anterior, necesariamente

$$\int_0^n fv = 0 \text{ para cada } v \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) \text{ tal que } (\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v) = 0 \text{ en } \ \mathring{\mathbf{I}}, \ \ \mathfrak{c}_1^*(v) = \mathfrak{c}_2^*(v) = 0.$$

Dado que todo problema de contorno es equivalente a uno semihomogéneo, podemos investigar únicamente si la anterior condición necesaria es también suficiente. Para ello, estudiaremos con un poco más de detalle las condiciones de resolubilidad de los problemas de contorno. Concretamente, si $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, entonces el Corolario 4.1 del Capítulo 1 establece que todas las soluciones de la ecuación de Schrödinger con dato f se expresan como $u = \alpha z_1 + \beta z_2 + y_f$, donde $\{z_1, z_2\}$ es una base de la ecuación de Schrödinger homogénea, y_f es una solución particular de la ecuación de de Schrödinger con dato f y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Teniendo en cuenta que toda solución del problema de contorno es solución de la ecuación de Schrödinger, obtenemos la siguiente caracterización de resolubilidad. En lo sucesivo mantendremos fijadas $\{z_1, z_2\}$ y $\{z_1^*, z_2^*\}$, respectivamente bases de soluciones de las ecuaciones de Schrödinger homogéneas $\mathcal{L}_q^\gamma(u) = 0$ y $(\mathcal{L}_q^\gamma)^*(u) = 0$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

LEMA 2.12. *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ e y_f es una solución particular de la ecuación de Schrödinger con dato f, entonces $u = \alpha z_1 + \beta z_2 + y_f$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es solución del problema de contorno*

$$\mathcal{L}_q(u) = f \ \ \textit{en} \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad \mathfrak{c}_1(u) = f(0) \ \ \textit{y} \ \ \mathfrak{c}_2(u) = f(n+1),$$

sii α y β son soluciones del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1(z_1) & \mathfrak{c}_1(z_2) \\ \mathfrak{c}_2(z_1) & \mathfrak{c}_2(z_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) - \mathfrak{c}_1(y_f) \\ f(n+1) - \mathfrak{c}_2(y_f) \end{bmatrix}.$$

Denotaremos por $\mathcal{S}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ y por $\mathcal{S}^*_{\mathfrak{c}_1^*,\mathfrak{c}_2^*}$ a los subespacios de soluciones de los problemas de contorno homogéneo y adjunto, respectivamente.

PROPOSICIÓN 2.13. *Se satisface que* $\dim \mathcal{S}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = 2 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1(z_1) & \mathfrak{c}_1(z_2) \\ \mathfrak{c}_2(z_1) & \mathfrak{c}_2(z_2) \end{bmatrix}$, $\dim \mathcal{S}^*_{\mathfrak{c}_1^*,\mathfrak{c}_2^*} = 2 - \operatorname{rang} \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1^*(z_1^*) & \mathfrak{c}_1^*(z_2^*) \\ \mathfrak{c}_2^*(z_1^*) & \mathfrak{c}_2^*(z_2^*) \end{bmatrix}$ *y, además,* $\dim \mathcal{S}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = \dim \mathcal{S}^*_{\mathfrak{c}_1^*,\mathfrak{c}_2^*}$.

Demostración. Es idéntica a la demostración del Teorema 3.4 en [**23**, Capítulo 11]. □

TEOREMA 2.14 (Alternativa de Fredholm). *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, la condición necesaria y suficiente para que el problema de contorno semihomogéneo*

$$\mathcal{L}_q^\gamma(u) = f \ \ \textit{en} \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad \mathfrak{c}_1(u) = \mathfrak{c}_2(u) = 0,$$

tenga solución, es que

$$\int_0^n fv = 0 \ \ \textit{para cada}\ v \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) \ \ \textit{tal que} \ \ (\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v) = 0 \ \textit{en} \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \ \ \mathfrak{c}_1^*(v) = \mathfrak{c}_2^*(v) = 0.$$

Además cuando esta condición se satisface, si u_p es una solución, el conjunto de soluciones está determinado por la identidad $u = u_p + \mathcal{S}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$.

3. Clasificación de los problemas de contorno

En esta sección clasificaremos los problemas de contorno atendiendo a diferentes criterios. Los primeros de ellos se refieren fundamentalmente a qué vértices de $\delta(\mathbf{I})$ aparecen involucrados en la expresión de las condiciones de contorno. Resulta entonces que este tipo de clasificación no depende de los coeficientes del operador en diferencias considerado y, por tanto, se trata más bien de una clasificación de las propias condiciones de contorno.

Consideraremos fijado $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ el par de condiciones de contorno linealmente independientes determinado por la matriz $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$ y para cada $1 \le i < j \le 4$ definimos la matriz $\mathsf{C}_{ij} = \begin{bmatrix} c_{1i} & c_{1j} \\ c_{2i} & c_{2j} \end{bmatrix}$ y el número $d_{ij} = \det \mathsf{C}_{ij}$. Observar que como $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$, resulta que $\sum\limits_{1\le i<j\le 4} |d_{ij}| > 0$. Observar que $\mathsf{C} = [\mathsf{C}_{12}\, \mathsf{C}_{34}]$ y que $\widehat{\mathsf{C}}$ es equivalente a C sii existe $\mathsf{N} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no singular y tal que $\widehat{\mathsf{C}} = [\mathsf{N}\mathsf{C}_{12}\, \mathsf{N}\mathsf{C}_{34}]$.

Aunque como acabamos de comentar, la clasificación no depende más que de las condiciones, como en cada caso nos preocuparemos de obtener las correspondientes condiciones de contorno adjuntas, que sí dependen de los coeficientes del operador considerado, cuando sea necesario consideraremos también funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$. Comenzaremos precisamente con la *caracterización algebraica* del problema adjunto a partir del análisis de la bilineal de contorno.

PROPOSICIÓN 3.1. *Si* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es el par de condiciones de contorno determinadas por* C *y* $(\tilde{\mathfrak{c}}_1, \tilde{\mathfrak{c}}_2)$ *es el par de condiciones de contorno determinadas por* $\widetilde{\mathsf{C}}$*, entonces el segundo es adjunto del primero, respecto de* $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*, sii*

$$\mathsf{C}_{12}\mathsf{B}^{-1}_{a,c}(0)\widetilde{\mathsf{C}}^{\top}_{12} = \mathsf{C}_{34}\mathsf{B}^{-1}_{a,c}(n)\widetilde{\mathsf{C}}^{\top}_{34}.$$

En particular, si $a = c$*, el par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es autoadjunto, respecto de* a*, sii* $a(n)d_{12} = a(0)d_{34}$.

Demostración. La prueba de la primera afirmación es idéntica a la demostración del Teorema 1.1 en [**23**, Capítulo 11].

Para demostrar la segunda parte, observemos que cuando $a = c$, entonces $\mathsf{B}^{-1}_{a,c}(k) = a(k)^{-1}\mathsf{H}$, donde $\mathsf{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ y para cualquier matriz $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se tiene que $\mathsf{A}\mathsf{H}\mathsf{A}^T = (\det \mathsf{A})\mathsf{H}$. □

Tal y como han sido definidas, las condiciones de contorno involucran los valores de las funciones en los vértices $0, 1, n$ y $n + 1$. La primera clasificación atenderá precisamente al tipo de vértices que son tenidos en cuenta.

DEFINICIÓN 3.2. *Diremos que el par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es:*

(i) Exterior*, si cada condición de contorno de todo par equivalente involucra al menos un vértice de* $\delta(\mathbf{I})$.
(ii) Interior *si existe un par equivalente de condiciones de contorno que involucra sólo los vértices* 1 *y* n.
(iii) Exterior–interior *si no es de ninguno de los tipos anteriores; es decir, para cada par equivalente, una condición no involucra ningún vértice de* $\delta(\mathbf{I})$ *y la otra involucra al menos un punto de* $\delta(\mathbf{I})$.

Es claro que dos pares equivalentes de condiciones de contorno son siempre del mismo tipo, exterior, interior o exterior–interior. Por otra parte, debemos mencionar que esta clasificación de las condiciones de contorno sólo tiene sentido en el caso discreto y no es aplicable al caso continuo. La razón es que mientras en el caso discreto podríamos distinguir dos tipos de frontera, la *exterior* formada por los vértices $\{0, n+1\}$ y la *interior* formada por los vértices $\{1, n\}$, en el caso continuo ambas están identificadas. Nótese que la denominación de condiciones exteriores o interiores hace referencia a si son o no tenidos en cuenta los puntos de la frontera exterior. En el siguiente resultado se describe la clasificación de las condiciones de contorno atendiendo al criterio anterior, tal y como fue realizado en [**10**, Proposición 3.6]. Como es previsible, la información relevante sobre este criterio se encuentra en la matriz C_{14}, cuyos coeficientes son precisamente los asociados a los vértices de $\delta(\mathbf{I})$.

PROPOSICIÓN 3.3. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *El par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es exterior sii* $d_{14} \neq 0$. *En este caso, el par es equivalente al par*

$$\hat{\mathfrak{c}}_1(u) = d_{14}u(0) + d_{24}u(1) + d_{34}u(n),$$
$$\hat{\mathfrak{c}}_2(u) = d_{12}u(1) + d_{13}u(n) + d_{14}u(n+1),$$

lo que además implica que un par adjunto está determinado por

$$\mathfrak{c}_1^*(u) = a(0)d_{14}u(0) + c(0)d_{24}u(1) + a(n)d_{12}u(n),$$
$$\mathfrak{c}_2^*(u) = c(0)d_{34}u(1) + a(n)d_{13}u(n) + c(n)d_{14}u(n+1).$$

(ii) *El par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es interior sii* $\mathsf{C}_{14} = 0$, *lo que implica que es equivalente al par dado por*

$$\hat{\mathfrak{c}}_1(u) = u(1) \;\; y \;\; \hat{\mathfrak{c}}_2(u) = u(n).$$

En particular, $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es siempre su propio adjunto y, por tanto, autoadjunto si* $a = c$.

(iii) *El par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es exterior–interior, sii* $\mathsf{C}_{14} \neq 0$ *pero* $d_{14} = 0$. *Además, si* $j = 1, 2$ *es tal que* $|c_{j1}| + |c_{j4}| > 0$, *entonces el par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es equivalente al par* $(\mathfrak{c}_j, \hat{\mathfrak{c}}_j)$, *donde*

$$\hat{\mathfrak{c}}_j(u) = \begin{cases} d_{24}u(1) + d_{34}u(n), & si \;\; c_{j1} = 0, \\ d_{12}u(1) + d_{13}u(n), & si \;\; c_{j1} \neq 0, \end{cases}$$

en cuyo caso, un par adjunto está dado por $\mathfrak{c}_1^*(u) = a(0)c(0)^2 c_{j4}u(1) - a(n)^2 c(n)c_{j1}u(n)$ *y*

$$\mathfrak{c}_2^*(u) = \begin{cases} a(0)d_{34}u(0) - a(n)d_{23}u(n) - c(n)d_{24}u(n+1), & si \;\; c_{j1} = 0, \\ a(0)d_{13}u(0) + c(0)d_{23}u(1) - c(n)d_{12}u(n+1), & si \;\; c_{j1} \neq 0. \end{cases}$$

Demostración. El par es de tipo interior sii existe una matrix $\mathsf{N} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no singular y tal que $\mathsf{NC}_{14} = 0$ o, equivalentemente, $\mathcal{C}_{14} = 0$. En este caso $d_{23} \neq 0$ pues $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$, de manera que si consideramos $\mathsf{M} = \mathsf{C}_{23}^{-1}$, entonces el par determinado por MC satisface las propiedades requeridas.

Si $d_{14} \neq 0$, entonces $\det \mathsf{MC}_{14} \neq 0$ para cada $\mathsf{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ no singular, lo que implica que cada condición de contorno de cada par equivalente involucra al menos un vértice de $\delta(\mathbf{I})$. De hecho, como $\det \mathsf{MC}_{14} \neq 0$, si una de ellas involucra el vértice 0 la otra necesariamente involucra al menos al vértice $n+1$ y viceversa. En particular, la elección $\mathsf{M} = d_{14}\mathsf{C}_{14}^{-1}$ determina el par de condiciones equivalentes descritas en (i).

Finalmente, si $d_{14} = 0$ pero $\mathsf{C}_{14} \neq 0$, existe $j = 1, 2$ tal que $|c_{j1}| + |c_{j4}| > 0$. Si $j = 1$, como $d_{14} = 0$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $c_{21} = \alpha c_{11}$ y $c_{24} = \alpha c_{14}$ y si consideramos $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$, las condiciones determinadas por MC son precisamente las descritas en (iii). El razonamiento si $j = 2$, es análogo.

La comprobación de que en cada caso las condiciones son las adjuntas de las dadas, se reduce a la verificación de la identidad algebraica de la Proposición 3.1. □

La siguiente clasificación de condiciones de contorno hace referencia a si una o las dos condiciones tienen en cuenta sólo los vértices *en un lado de* $\delta(\mathbf{I})$; esto es, o bien $\{0, 1\}$ o bien $\{n, n+1\}$.

DEFINICIÓN 3.4. *Diremos que el par de condiciones de contorno* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es* unilateral, *o que las condiciones* $\mathfrak{c}_1$ y $\mathfrak{c}_2$ son unilaterales *si o bien* $\mathsf{C}_{34} = 0$, *en cuyo caso se denomina* inicial; *o bien* $\mathsf{C}_{12} = 0$, *en cuyo caso se denomina* final.

LEMA 3.5. *Supongamos que* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es un par de condiciones unilaterales. Entonces,* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es exterior–interior y todo par equivalente es también unilateral. Además, se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Si el par es inicial, entonces* $d_{12} \neq 0$ *y es equivalente al par* $(\hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$*, donde* $\hat{\mathfrak{c}}_1(u) = u(0)$ *y* $\hat{\mathfrak{c}}_2(u) = u(1)$*. Además, cualquier par de condiciones finales es adjunto de* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$*.*

(i) *Si el par es final, entonces* $d_{34} \neq 0$ *y es equivalente al par* $(\hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$*, donde* $\hat{\mathfrak{c}}_1(u) = u(n)$ *y* $\hat{\mathfrak{c}}_2(u) = u(n+1)$*. Además, cualquier par de condiciones iniciales es adjunto de* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$*.*

DEFINICIÓN 3.6. *Supongamos que el par de condiciones de contorno* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *satisface* $\mathsf{C}_{12} \neq 0$ *y* $\mathsf{C}_{34} \neq 0$*. Diremos que el par es* separable en el vértice 0 *si* $d_{34} = 0$*, respectivamente* separable en el vértice $n+1$ *si* $d_{12} = 0$*. Diremos que el par es* separable *si lo es en* 0 *y en* $n+1$*; es decir, si* $d_{12} = d_{34} = 0$*.*

Observar que la hipótesis $\mathsf{C}_{12}, \mathsf{C}_{34} \neq 0$ determina que el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ no es unilateral. Recíprocamente, si $\mathsf{C}_{12} \neq 0$ y $d_{12} = 0$, necesariamente $\mathsf{C}_{34} \neq 0$ y, análogamente, si $\mathsf{C}_{34} \neq 0$ y $d_{34} = 0$, necesariamente $\mathsf{C}_{12} \neq 0$, pues $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$. Por otra parte, si el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es separable, bien en 0, bien en $n+1$, entonces cualquier par equivalente tiene la misma propiedad.

PROPOSICIÓN 3.7. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Si* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es separable en* 0*, entonces es equivalente al determinado por una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$*, donde* $\big(|a_{11}| + |a_{12}|\big)\big(|a_{23}| + |a_{24}|\big) > 0$ *y* $a_{21} \cdot a_{22} = 0$*.*

(ii) *Si* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es separable en* $n+1$*, entonces es equivalente al determinado por una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$*, donde* $\big(|a_{11}| + |a_{12}|\big)\big(|a_{23}| + |a_{24}|\big) > 0$ *y* $a_{13} \cdot a_{14} = 0$*.*

(iii) *Si* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es separable, entonces es equivalente al determinado por una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$*, donde* $(|a_{11}| + |a_{12}|)(|a_{23} + |a_{24}|) > 0$*. En particular, el par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es autoadjunto respecto de cualquier* $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*.*

Demostración. Los razonamientos para las partes (i) y (ii) son idénticos, así que solo demostraremos el caso (i).

Si $c_{23} = c_{24} = 0$, entonces $|c_{13}| + |c_{14}| > 0$ y, además, la independencia lineal de las condiciones de contorno, obliga a que $|c_{21}| + |c_{22}| > 0$. Entonces, $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es equivalente a $(\mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_1)$, que está determinado por la matriz $\begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \end{bmatrix}$.

Si $|c_{23}| + |c_{24}| > 0$, como $d_{34} = 0$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(c_{13}, c_{14}) = \alpha(c_{23}, c_{24})$ y si consideramos $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\mathsf{MC} = \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$ y, además, $|\hat{c}_{11}| + |\hat{c}_{12}| > 0$, pues $\operatorname{rg}\mathsf{MC} = 2$.

En definitiva, el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es equivalente al determinado por una matriz de la forma

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & 0 & 0 \\ \hat{c}_{21} & \hat{c}_{22} & \hat{c}_{23} & \hat{c}_{24} \end{bmatrix}, \quad \text{donde } \big(|\hat{c}_{11}| + |\hat{c}_{12}|\big)\big(|\hat{c}_{23}| + |\hat{c}_{24}|\big) > 0.$$

Además, si cuando $\hat{c}_{11} \neq 0$ consideramos $\mathsf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\hat{c}_{21}}{\hat{c}_{11}} & 1 \end{bmatrix}$, mientras que cuando $\hat{c}_{12} \neq 0$ consideramos $\mathsf{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\hat{c}_{22}}{\hat{c}_{12}} & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} = \mathsf{N} \begin{bmatrix} \hat{c}_{11} & \hat{c}_{12} & 0 & 0 \\ \hat{c}_{21} & \hat{c}_{22} & \hat{c}_{23} & \hat{c}_{24} \end{bmatrix}$ tiene las propiedades requeridas.

(iii) Como el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es separable en 0, aplicando la parte (i), resulta que es equivalente al determinado por una matriz de la forma $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$, donde $\big(|a_{11}|+|a_{12}|\big)\big(|a_{23}|+|a_{24}|\big) > 0$ y $a_{21} \cdot a_{22} = 0$. Como además es separable en $n+1$, necesariamente $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$, lo que implica que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(a_{21}, a_{22}) = \alpha(a_{11}, a_{12})$. Si ahora consideramos la matriz $\mathsf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}$, entonces $\mathsf{M} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$ tiene las propiedades requeridas. $\square$

DEFINICIÓN 3.8. *A las condiciones separadas que están determinadas por la matriz*

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix},$$

donde $(|c_{11}| + |c_{12}|)(|c_{23}| + |c_{24}|) > 0$ *se las denomina condiciones de Sturm–Liouville.*

Las condiciones de Sturm–Liouville pueden ser de cualquiera de los tres tipos, exterior, interior o exterior–interior, dependiendo de cuáles de sus coeficientes sean no nulos. Como veremos a continuacón, este tipo de condiciones forman una clase cerrada dentro del conjunto de condiciones de contorno, en el sentido de que sus condiciones adjuntas, respecto de cualquier par de funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ son del mismo tipo, no sólo Sturm–Liouville, sino que también respetan el carácter exterior o interior.

PROPOSICIÓN 3.9. *Si* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es el par de condiciones de Sturm–Liouville determinado por la matriz*

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix},$$

donde $(|c_{11}| + |c_{12}|)(|c_{23} + |c_{24}|) > 0$*, entonces un par adjunto* $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$ *es el par de condiciones de Sturm–Liouville determinado por la matriz*

$$\mathsf{C}^* = \begin{bmatrix} a(0)c_{11} & c(0)c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(n)c_{23} & c(n)c_{24} \end{bmatrix}.$$

En particular, el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es autoadjunto respecto de cualquier* $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*. Recíprocamente, si el par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es autoadjunto respecto de cualquier función* $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*, entonces es de Sturm–Liouville y esta propiedad es equivalente a que* $d_{12} = d_{34} = 0$*.*

Demostración. La primera parte se reduce a una comprobación de la identidad de la Proposición 3.1.

Supongamos ahora que el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ está determinado por la matriz $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$ tal que $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$.

Si el par es autoadjunto respecto de cualquier función $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, aplicando la última parte de la Proposición 3.1 resulta que $a(n)d_{12} = a(0)d_{34}$ para cada $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$. En particular, tomando $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ tal que $a(0) = a(n)$, la identidad anterior implica que necesariamente $d_{12} = d_{34}$. Tomando $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ tal que $a(0) = -a(n)$, la misma identidad implica que $d_{12} = -d_{34}$, por lo que necesariamente $d_{12} = d_{34} = 0$. Por tanto, el par es autoadjunto respecto de cualquier función $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ sii $d_{12} = d_{34} = 0$, condición que satisfacen las condiciones de Sturm–Liouville.

Supongamos finalmente que $d_{12} = d_{34} = 0$. Como $\operatorname{rg}\mathsf{C} = 2$, necesariamente $\mathsf{C}_{12}, \mathsf{C}_{34} \neq 0$ y, por tanto, existen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $(|\alpha_1| + |\alpha_2|)(|\beta_1| + |\beta_2|) > 0$ y, además,

$$\alpha_1(c_{11}, c_{12}) + \alpha_2(c_{21}, c_{22}) = \beta_1(c_{13}, c_{14}) + \beta_2(c_{23}, c_{24}) = 0.$$

Si $(|c_{11}| + |c_{12}|)(|c_{23}| + |c_{24}|) = 0$, necesariamente $(|c_{21}| + |c_{22}|)(|c_{13}| + |c_{14}|) > 0$ pues en otro caso o bien $\mathsf{C}_{12} = 0$, o bien $\mathsf{C}_{34} = 0$, o bien una fila de la matriz C es nula, lo que contradice la hipótesis $\operatorname{rg}\mathsf{C} = 2$. Además, si $c_{11} = c_{12} = 0$, necesariamente $\beta_2 \neq 0$, ya que en otro caso la primera fila de C es nula, y podemos considerar la matriz $\mathsf{M} = \dfrac{1}{\beta_2}\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_2 & 0 \end{bmatrix}$, mientras que si $c_{23} = c_{24} = 0$, necesariamente $\alpha_1 \neq 0$, ya que en otro caso la segunda fila de la matriz C es nula, y podemos considerar la matriz $\mathsf{M} = \dfrac{1}{\alpha_1}\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}$. En ambos casos, tenemos que

$$\det \mathsf{M} = -1, \quad \mathsf{MC}_{12} = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathsf{MC}_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{13} & c_{14} \end{bmatrix}.$$

Si $(|c_{11}| + |c_{12}|)(|c_{23}| + |c_{24}|) > 0$, necesariamente $\beta_1\alpha_2 \neq 0$ y, además, $\alpha_1\beta_2 \neq \alpha_2\beta_1$. Es claro que esta última condición se satisface si $\alpha_1 = 0$, mientras que si $\alpha_1 \neq 0$ y $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1$, entonces $\beta_1(c_{11}, c_{12}) + \beta_2(c_{21}, c_{22}) = 0$ y, por tanto, $\beta_1(c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}) + \beta_2(c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}) = 0$, lo que contradice la hipótesis $\operatorname{rg}\mathsf{C} = 2$. Si ahora definimos $\mathsf{M} = \dfrac{1}{\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1}\begin{bmatrix} \beta_1\alpha_2 & \beta_2\alpha_2 \\ \beta_1\alpha_1 & \beta_1\alpha_2 \end{bmatrix}$, entonces

$$\det\mathsf{M} = \beta_1\alpha_2, \quad \mathsf{MC}_{12} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathsf{MC}_{34} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}.$$

□

La Proposición 3.7 muestra que cuando un par es separable es equivalente a un par en el que al menos una de las condiciones de contorno tiene una expresión simple que involucra sólo dos vértices y que es natural denominar *separada*. Con esta terminología, un par de Sturm–Liouville estará constituido por dos condiciones de contorno separadas. Determinaremos ahora el par adjunto cuando una, pero sólo una, de las condiciones es separada; es decir, el par es separado en un vértice pero no es de Sturm–Liouville.

La demostración del siguiente resultado se reduce de nuevo a una comprobación de la identidad de la Proposición 3.1.

PROPOSICIÓN 3.10. *Se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) *Si el par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es separado en* 0*; es decir, si está determinado por una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$*, donde* $\big(|c_{11}| + |c_{12}|\big)\big(|c_{23}| + |c_{24}|\big) > 0$ *y* $d_{12} \neq 0$*, entonces un par* *adjunto está determinado por la matriz*

$$\mathsf{C}^* = \begin{bmatrix} a(0)(c_{23}^2 + c_{24}^2)c_{11} & c(0)(c_{23}^2 + c_{24}^2)c_{12} & a(n)c_{24}d_{12} & -c(n)c_{23}d_{12} \\ 0 & 0 & c(n)^{-1}c_{23} & a(n)^{-1}c_{24} \end{bmatrix}.$$

En particular, las condiciones adjuntas de $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *son separables en* $n+1$.

(ii) *Si el par* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es separado en* $n+1$*; es decir, si está determinado por una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$, *donde* $\big(|c_{11}| + |c_{12}|\big)\big(|c_{23}| + |c_{24}|\big) > 0$ *y* $d_{34} \neq 0$, *entonces un par adjunto está determinado por la matriz*

$$\mathsf{C}^* = \begin{bmatrix} c(0)^{-1}c_{11} & a(0)^{-1}c_{12} & 0 & 0 \\ -a(0)c_{12}d_{34} & c(0)c_{11}d_{34} & a(n)(c_{11}^2 + c_{12}^2)c_{23} & c(n)(c_{11}^2 + c_{12}^2)c_{24} \end{bmatrix}.$$

En particular, las condiciones adjuntas de $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *son separables en* 0.

Observar que si el par es separado en 0 y, además, $d_{12} = 0$, entonces también es separado en $n+1$ y, análogamente, si es separado en $n+1$ y $d_{34} = 0$, entonces es también separado en 0 y, por tanto, en ambos casos el par sería de Sturm–Liouville. Un análisis algo más casuístico permite simplificar enormemente las expresiones para el par adjunto. Por ejemplo, si el par es separado en 0 y, además, $c_{23}c_{24} \neq 0$, asumiendo claro está que $d_{12} \neq 0$, entonces una fácil manipulación algebraica reduce la matriz C^* a su equivalente

$$\mathsf{C}^* = \begin{bmatrix} a(0)c_{11}c_{24} & c(0)c_{12}c_{24} & a(n)d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & c(n)^{-1}c_{23} & a(n)^{-1}c_{24} \end{bmatrix},$$

mientras que si $c_{23} = 0$, entonces

$$\mathsf{C}^* = \begin{bmatrix} a(0)c_{24}c_{11} & c(0)c_{24}c_{12} & a(n)d_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y, finalmente, si $c_{24} = 0$, entonces

$$\mathsf{C}^* = \begin{bmatrix} a(0)c_{23}c_{11} & c(0)c_{23}c_{12} & 0 & -c(n)d_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A continuación pondremos nombres específicos a las condiciones separadas, que por otra parte son los que aparecen más frecuentemente en la literatura.

DEFINICIÓN 3.11. *Consideremos* $\mathfrak{c}$ *la condición lineal de contorno de coeficientes* c_1, c_2, c_3 *y* c_4, *donde* $|c_1| + |c_2| + |c_3| + |c_4| > 0$.

(i) *Diremos que* $\mathfrak{c}$ *es* separada en 0 si $c_3 = c_4 = 0$. *Si, además,* $c_1 \cdot c_2 = 0$, *entonces* $\mathfrak{c}$ *se denomina* condición de Dirichlet en 0, *interior si* $c_2 \neq 0$ *y exterior si* $c_1 \neq 0$. *Si* $c_1 \cdot c_2 \neq 0$, $\mathfrak{c}$ *se denomina* condición de Robin en 0. *En particular, si* $c_2 = -c_1$, $\mathfrak{c}$, *se denomina* condición de Neumann en 0.

(ii) *Diremos que* $\mathfrak{c}$ *es* separada en $n+1$ si $c_1 = c_2 = 0$. *Si, además,* $c_3 \cdot c_4 = 0$, *entonces* $\mathfrak{c}$ *se denomina* condición de Dirichlet en $n+1$, *interior si* $c_3 \neq 0$ *y exterior si* $c_4 \neq 0$. *Si* $c_3 \cdot c_4 \neq 0$, $\mathfrak{c}$ *se denomina* condición de Robin en $n+1$. *En particular, si* $c_3 = -c_4$, $\mathfrak{c}$ *se denomina* condición de Neumann en $n+1$.

Observar que si $\mathfrak{c}$ es una condición de Dirichlet en 0, entonces es equivalente a la condición $\hat{\mathfrak{c}}(u) = u(0)$ si es exterior o a $\hat{\mathfrak{c}}(u) = u(1)$ si es interior y una situación análoga se presenta para las condiciones de Dirichlet en $n+1$. Por otra parte, si suponemos fijadas las funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, si $\mathfrak{c}$ es una condición de Robin en 0, entonces es equivalente a la condición de Robin $\hat{\mathfrak{c}}(u) = c_1 u(0) - a(0)u(1)$ y, en particular, si es una condición de Neumann en 0, es equivalente a la condición de Neumann $\hat{\mathfrak{c}}(u) = a(0)u(0) - a(0)u(1)$. Análogamente, si $\mathfrak{c}$ es una condición de Robin en $n+1$, entonces es equivalente a la condición de Robin $\hat{\mathfrak{c}}(u) = c_4 u(n+1) - c(n)u(n)$ y, en particular, si es una condición de Neumann en $n+1$, es equivalente a la condición de Neumann $\hat{\mathfrak{c}}(u) = c(n)u(n+1) - c(n)u(n)$.

En lo sucesivo, cuando nos refiramos a condiciones de Dirichlet, ya sean interiores o exteriores, estaremos asumiendo que las condiciones de Dirichlet son las que acabamos de señalar. Análogamente, cuando nos refiramos a condiciones de Robin o Neumann en cualquiera de los dos vértices de $\delta(\mathbf{I})$, también nos estaremos refiriendo a las condiones de Robin o Neumann que acabamos de describir.

En la Proposición 3.7 hemos demostrado que todo par separable de condiciones de contorno, en 0 o en $n+1$, es equivalente a uno en el que al menos una condición es separada, en 0 o en $n+1$, respectivamente. Si la condición es separada en 0, entonces o bien es equivalente a la condición de Dirichlet, o bien a la condición de Robin. Análogamente, si la condición es separada en $n+1$, entonces o bien es equivalente a la condición de Dirichlet, o bien a la condición de Robin.

Finalizaremos la clasificación de condiciones de contorno introduciendo las que denominaremos *de tipo periódico*, que como veremos en secciones posteriores, pueden interpretarse en términos de ecuaciones en diferencias definidas sobre ciclos. Este tipo de condiciones incluyen también las que, en el caso continuo, son tratadas en [**23**, Capítulo 8.3] y que nosotros tratamos aquí como un caso particular de las denominadas condiciones de tipo periódico de segunda especie.

DEFINICIÓN 3.12. *Diremos que* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es un par de* condiciones de tipo periódico *si ni es unilateral, ni separado ni en* 0 *ni en* $n+1$. *Por tanto, el par es periódico si está determinado por una matriz de la forma*

$$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix},$$

donde $d_{12} \cdot d_{34} \neq 0$. *Las condiciones se denominan* de tipo periódico de primera especie *o* de tipo periódico de segunda especie *si, además,* $d_{23} = 0$ o $d_{23} \neq 0$, *respectivamente.*

Observar que la condición $d_{12} \cdot d_{34} \neq 0$ implica, en particular, que $\mathsf{C}_{12} \neq 0$ y que $\mathsf{C}_{34} \neq 0$, por lo que las condiciones no pueden ser unilaterales. Además, como $d_{34} \neq 0$ no puede ser separado en 0 y como $d_{12} \neq 0$ tampoco puede ser separado en $n+1$. Por otra parte, como tanto los pares de condiciones unilaterales como de separables tienen adjuntos que son unilaterales o separables, respectivamente, resulta que los adjuntos de las condiciones de tipo periódico son también de tipo periódico.

LEMA 3.13. *Consideremos* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *un par de condiciones de tipo periódico.*

(i) *Si el par es de tipo periódico de primera especie, entonces es equivalente al determinado por una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \end{bmatrix}$, *donde* $a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{24} \neq 0$*; y, por tanto, su* *adjunto es el par de tipo periódico de segunda especie determinado por la matriz*

$$\begin{bmatrix} 0 & -c(0)a_{24}a_{13} & a(n)a_{21}a_{13} & -c(n)d_{24} \\ a(0)a_{13} & 0 & 0 & -c(n)a_{12} \end{bmatrix}.$$

En particular, el par es autoadjunto, respecto de $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, *sii* $a(n)a_{12}a_{21} = -a(0)a_{13}a_{24}$.

(ii) *Si el par es de tipo periódico de segunda especie, entonces es equivalente al determinado por una matriz de la forma* $\begin{bmatrix} a_{11} & -a(0) & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & -c(n) & a_{24} \end{bmatrix}$, *donde* $a_{21} \cdot a_{14} \neq 0$*; y, por tanto, su adjunto es el par de tipo periódico de primera especie determinado por la matriz*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -c(0) & 0 & a_{21} \\ a_{14} & 0 & -a(n) & a_{24} \end{bmatrix}.$$

En particular, el par es autoadjunto, respecto de $a \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, *sii* $a_{21} = a_{14}$.

4. Problemas de contorno regulares

Una vez clasificados los problemas de contorno sobre un camino finito, nuestro propósito es abordar su resolución efectiva cuando ello sea posible. Como en [**10**], nos centraremos en este trabajo en los *problemas regulares*; es decir, en aquellos problemas para los que existe una única solución. El análisis de otras situaciones, que incluyen el planteamiento del denominado *problema de autovalores*, no será abordado aquí. Nuestras técnicas están dirigidas hacia la determinación de los denominados *núcleos resolventes*. Como veremos, el tratamiento que desarrollaremos para determinar tales núcleos representa una extensión de resultados más o menos conocidos, tanto en el ámbito discreto como en el continuo, pero habitualmente referidos al tratamiento de las condiciones de Sturm–Liouville. Mostraremos aquí que el proceso de determinación de los núcleos resolventes y, por tanto, la resolución de los problemas de contorno, depende siempre de una adecuada elección de soluciones de la correspondiente ecuación de Schrödinger homogénea, por lo que los resultados de los capítulos anteriores adquieren ahora mayor relevancia. Por tanto, el planteamiento que hacemos aquí es ligeramente diferente, y más general del que se siguió en [**10**] para la determinación del *núcleo de Green de los problemas de contorno* asociados a ecuaciones con coeficientes constantes. Queremos remarcar también que nuestras técnicas son también válidas para el caso continuo y pueden utilizarse en ese contexto sin grandes modificaciones.

Recordemos que $\mathrm{I} = \{0, 1, \dots, n, n+1\}$, con lo que $\delta(\mathbf{I}) = \{0, n+1\}$ y que consideramos fijadas las funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, la función de acompañamiento ρ_γ, la conductancia $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$, el potencial y el operador de Schrödinger determinados por ellas. Asimismo, asumiremos fijado $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ el par de condiciones de contorno linealmente independientes determinado por la matriz $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$, tal que $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$, y para cada $1 \le i < j \le 4$ consideramos la matriz $\mathsf{C}_{ij} = \begin{bmatrix} c_{1i} & c_{1j} \\ c_{2i} & c_{2j} \end{bmatrix}$ y el número $d_{ij} = \det \mathsf{C}_{ij}$. Como $\operatorname{rg} \mathsf{C} = 2$, sabemos que $\sum\limits_{1 \le i < j \le 4} |d_{ij}| > 0$ y, también, que existen matrices $\widehat{\mathsf{C}} \in \mathcal{M}_{2\times 4}(\mathbb{R})$ tales que $\widehat{\mathsf{C}}^\top$ es inversa por la derecha de C; es decir,

$\mathsf{C}\widehat{\mathsf{C}}^\top = \mathsf{I}_2$, donde $\mathsf{I}_2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. Es claro que en estas circunstancias $\operatorname{rg}\widehat{\mathsf{C}} = 2$ y, además, para cada $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^2$ el vector $\mathsf{v} = \widehat{\mathsf{C}}\mathsf{b}$ satisface que $\mathsf{C}\mathsf{v} = \mathsf{b}$.

Fácilmente podemos determinar inversas por la derecha de C. Por ejemplo, si $d_{ij} \neq 0$, basta considerar $\widehat{\mathsf{C}}$, cuyas componentes son $\hat{c}_{1i} = d_{ij}^{-1}c_{2j}$, $\hat{c}_{1j} = -d_{ij}^{-1}c_{1j}$, $\hat{c}_{2i} = -d_{ij}^{-1}c_{2i}$, $\hat{c}_{2j} = d_{ij}^{-1}c_{1i}$ y 0 en otro caso.

De acuerdo con la Definición 2.3, consideraremos el problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ que para cada dato $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, trata de determinar si existe $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tal que

$$\mathcal{L}_q^\gamma(u) = f, \ \text{ en } \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad \mathfrak{c}_1(u) = f(0) \ \text{ y } \ \mathfrak{c}_2(u) = f(n+1).$$

DEFINICIÓN 4.1. *Denominamos* Wronskiano del par de condiciones de contorno $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *a la función* $W\colon \mathcal{C}(\mathbf{I}) \times \mathcal{C}(\mathbf{I}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$W[u,v] = \det\begin{bmatrix}\mathfrak{c}_1(u) & \mathfrak{c}_1(v)\\ \mathfrak{c}_2(u) & \mathfrak{c}_2(v)\end{bmatrix} = \mathfrak{c}_1(u)\mathfrak{c}_2(v) - \mathfrak{c}_1(v)\mathfrak{c}_2(u), \quad u,v \in \mathcal{C}(\mathbf{I}).$$

Claramente, W es bilineal antisimétrica y, por tanto, si $\phi = a_1u + b_1v$ y $\psi = a_2u + b_2v$, entonces

$$W[\phi,\psi] = W[u,v]\det\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}. \tag{63}$$

PROPOSICIÓN 4.2. *Si* $g\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es la función de Green de la ecuación de Schrödinger homogénea* $\mathcal{L}_q^\gamma(u) = 0$ *en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$, *entonces la función* $D\colon \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como* $D(n+1) = D(n)$ *y como*

$$D(s) = \frac{a(0)a(s)}{\rho_\gamma(s+1)}W[g(\cdot,s), g(\cdot,s+1)], \quad s = 0,\dots,n,$$

es constante y su valor está dado por

$$d_{12} + a(0)\big(d_{13}g(n,0) + d_{14}g(n+1,0)\big) + c(0)\big(d_{23}g(n,1) + d_{24}g(n+1,1)\big) + \frac{d_{34}a(0)}{a(n)\rho_\gamma(n)}.$$

Demostración. Si definimos $u = g(\cdot,0)$ y $v = g(\cdot,1)$, entonces $w[u,v](0) = a(0)^{-1}c(0)^{-1}$ y, además, las partes (iii) y (iv) del Teorema 7.2 del Capítulo 1 establecen que

$$g(\cdot,s) = \frac{1}{a(s)w[u,v](s)}\big[u(s)v - v(s)u\big] = c(0)\rho_\gamma(s)\big[u(s)v - v(s)u\big], \quad s = 0,\dots,n+1.$$

Aplicando ahora la identidad (63), resulta que

$$\begin{aligned} W[g(\cdot,s), g(\cdot,s+1)] &= c(0)^2\rho_\gamma(s+1)\rho_\gamma(s)w[u,v](s)W[u,v]\\ &= a(0)c(0)^2\rho_\gamma(s+1)a(s)^{-1}w[u,v](0)W[u,v]\\ &= c(0)\rho_\gamma(s+1)a(s)^{-1}W[u,v], \quad s = 0,\dots,n, \end{aligned}$$

y, por tanto, se satisface que

$$D(s) = a(0)c(0)W[u,v] = D(0),$$

ya que $\rho_\gamma(1) = a(0)c(0)^{-1}$. Por otra parte,

$$W[u,v] = \det\begin{bmatrix}\mathfrak{c}_1(u) & \mathfrak{c}_1(v)\\ \mathfrak{c}_2(u) & \mathfrak{c}_2(v)\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -c(0)^{-1}\\ a(0)^{-1} & 0\\ g(n,0) & g(n,1)\\ g(n+1,0) & g(n+1,1)\end{bmatrix},$$

por lo que la expresión de $D(0)$ se obtiene aplicando la Identidad de Cauchy–Binet al cálculo del determinante anterior. $\square$

DEFINICIÓN 4.3. *Denominamos* Determinante del problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *al valor*

$$\begin{aligned} D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} &= a(n)\rho_\gamma(n)d_{12} + a(0)d_{34} + a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big(d_{13}g(n,0) + d_{14}g(n+1,0)\big) \\ &\quad + c(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big(d_{23}g(n,1) + d_{24}g(n+1,1)\big). \end{aligned}$$

Comenzamos el análisis de los problemas de contorno con la siguiente noción fundamental, que nos permitirá abordar el cálculo de los núcleos resolventes.

DEFINICIÓN 4.4. *El problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *se denomina* regular *si el correspondiente problema homogéneo tiene como única solución la trivial.*

Claramente, un problema de contorno es regular sii cualquier problema equivalente lo es. Además, la Proposición 2.13 implica que un problema de contorno es regular sii su adjunto es también regular.

PROPOSICIÓN 4.5. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *El problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular.*
(ii) *Para cualquier dato* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *el correspondiente problema de contorno tiene una única solución.*
(iii) $D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} \neq 0$.

Demostración. Si $z_1 = g(\cdot,0)$ y $z_2 = g(\cdot,1)$, entonces $\{z_1, z_2\}$ es una base de soluciones de las ecuación de Schrödinger homogénea $\mathcal{L}_q^\gamma(u) = 0$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$. Si para cada $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ consideramos y_f una solución particular de la ecuación de Schrödinger con dato f, el Lema 2.12 establece que la función $u = \alpha z_1 + \beta z_2 + y_f$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es solución del problema de contorno

$$\mathcal{L}_q(u) = f, \text{ en } \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad \mathfrak{c}_1(u) = f(0) \text{ y } \mathfrak{c}_2(u) = f(n+1),$$

sii α y β son soluciones del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1(z_1) & \mathfrak{c}_1(z_2) \\ \mathfrak{c}_2(z_1) & \mathfrak{c}_2(z_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) - \mathfrak{c}_1(y_f) \\ f(n+1) - \mathfrak{c}_2(y_f) \end{bmatrix}.$$

El Lema 2.2 muestra que cuando f recorre $\mathcal{C}(\mathbf{I})$, entonces el término de la derecha del anterior sistema recorre todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto, el sistema tiene solución para cualquier $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ sii el correspondiente sistema homogéneo tiene como única solución la trivial; es decir, sii la matriz de coeficientes es no singular. Además cuando esto ocurre, la solución es única. Como el sistema homogéneo asociado al anterior determina las soluciones del problema de contorno homogéneo, resulta que el problema es regular sii el sistema homogéneo asociado al anterior tiene como única solución la trivial. Por tanto, (i) y (ii) son equivalentes y, además, equivalentes a que la matriz de coeficientes sea no singular y, por tanto, a que su determinante sea diferente de 0. Por tanto, (i) y (iii) son equivalentes. $\square$

COROLARIO 4.6. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular y* $u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *son soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$*, entonces* u *y* v *son linealmente independientes sii* $W[u,v] \neq 0$.

Demostración. Basta aplicar la equivalencia entre problema regular y la no anulación del determinante del problema de contorno y tener en cuenta tanto la Identidad (63), como la Proposición 4.2. $\square$

DEFINICIÓN 4.7. *Supongamos que el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular. Denominaremos* núcleo Resolvente del problema de contorno *a* $R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *caracterizado como*

$$\mathcal{L}_q^\gamma\big(R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = \varepsilon_s \ \ en \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \ \ \mathfrak{c}_1\big(R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = \varepsilon_s(0), \ \ \mathfrak{c}_2\big(R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = \varepsilon_s(n+1), \ \ s\in\mathbf{I}.$$

Denominaremos núcleo de Green del problema de contorno *a* $G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *caracterizado como* $G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s) = 0$ *si* $s\in\delta(\mathbf{I})$ *y como*

$$\mathcal{L}_q^\gamma\big(G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = \varepsilon_s \ \ en \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \ \ \mathfrak{c}_1\big(G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = \mathfrak{c}_2\big(G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = 0, \ \ s\in\overset{\circ}{\mathbf{I}}\,.$$

Denominaremos núcleo de Poisson del problema de contorno *a* $P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *caracterizado como* $P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s) = 0$ *si* $s\in\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *y como*

$$\mathcal{L}_q^\gamma\big(P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = 0 \ \ en \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \ \ \mathfrak{c}_1\big(P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = \varepsilon_s(0), \ \ \mathfrak{c}_2\big(P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) = \varepsilon_s(n+1), \ \ s\in\delta(\mathbf{I}).$$

Observemos que si el problema de contorno es regular, entonces existe un único núcleo resolvente, un único núcleo de Green y un único núcleo de Poisson, que se determinan fijando su segunda variable y encontrando la única solución de un determinado problema de contorno. La importancia de estos núcleos está señalada en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.8. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular y* $G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$, $P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *y* $R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *son sus núcleos de Green, de Poisson y Resolvente, respectivamente, entonces*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} + P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}.$$

Además, para cada $f\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$ *la función*

$$v(k) = \int_{\overset{\circ}{\mathbf{I}}} G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)\,f(s)ds = \int_0^n G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)\,f(s)ds, \ \ k\in\mathbf{I},$$

es la única solución del problema de contorno semihomogéneo

$$\mathcal{L}_q^\gamma(v) = f \ \ en \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \ \ \mathfrak{c}_1(v) = \mathfrak{c}_2(v) = 0,$$

la función

$$z(k) = \int_{\delta(\mathbf{I})} P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)\,f(s)ds = P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,0)\,f(0) + P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n+1)\,f(n+1), \ \ k\in\mathbf{I},$$

es la única solución del problema de contorno

$$\mathcal{L}_q^\gamma(v) = 0 \ \ en \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \ \ \mathfrak{c}_1(v) = f(0), \ \ \mathfrak{c}_2(v) = f(n+1)$$

y, por tanto, la función $u = v + z$*; es decir, la determinada por la expresión*

$$u(k) = \int_{\mathbf{I}} R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)\,f(s)ds, \ \ k\in\mathbf{I},$$

es la única solución del problema de contorno con dato f*; es decir, del problema de contorno*

$$\mathcal{L}_q^\gamma(v) = f \ \ en \ \ \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \ \ \mathfrak{c}_1(v) = f(0), \ \ \mathfrak{c}_2(v) = f(n+1).$$

Demostración. Las propiedades para z son inmediatas. Por otra parte, como

$$v(k) = \sum_{s=1}^{n} G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)\, f(s) \quad \text{para cada } k \in \mathbf{I},$$

resulta que

$$\mathfrak{c}_1(v) = \sum_{s=1}^{n} \mathfrak{c}_1\big(G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) f(s) = 0 \quad \text{y} \quad \mathfrak{c}_2(v) = \sum_{s=1}^{n} \mathfrak{c}_2\big(G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big) f(s) = 0$$

y, también, que para cada $k \in \overset{\circ}{\mathbf{I}}$

$$\mathcal{L}^{\gamma}_{q}(v)(k) = \sum_{s=1}^{n} \mathcal{L}^{\gamma}_{q}\big(G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)\big)(k) f(s) = \sum_{s=1}^{n} \varepsilon_s(k) f(s) = f(k),$$

de manera que $\mathcal{L}^{\gamma}_{q}(v) = f$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$. Las propiedades para la función u son inmediatas. $\square$

Si un problema de contorno es regular, cualquier problema equivalente también lo es. La relación entre los respectivos núcleos resolventes se establece en el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata.

LEMA 4.9. *Consideremos los problemas de contorno* $(\mathcal{L}^{\gamma}_{q}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *y* $(\mathcal{L}^{\hat{\gamma}}_{\hat{q}}, \hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$ *y supongamos que son ambos regulares y equivalentes en sentido general, es decir, existen* $\sigma \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ *y una matriz* $\mathsf{M} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *no singular tales que* $\mathcal{L}^{\hat{\gamma}}_{\hat{q}} = \sigma \mathcal{L}^{\gamma}_{q}$ *y* $\widehat{\mathsf{C}} = \mathsf{MC}$ *donde* $\mathsf{C}, \widehat{\mathsf{C}}$ *son las marices de rango* 2 *que determinan los pares* $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *y* $(\hat{\mathfrak{c}}_1, \hat{\mathfrak{c}}_2)$*, respectivamente. Entonces, se satisface que*

$$G^{\sigma a,\sigma b,\sigma c}_{\hat{\mathfrak{c}}_1,\hat{\mathfrak{c}}_2}(k,s) = G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)\sigma(s)^{-1}, \quad s =, 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots, n+1.$$

mientras que

$$\begin{bmatrix} P^{\sigma a,\sigma b,\sigma c}_{\hat{\mathfrak{c}}_1,\hat{\mathfrak{c}}_2}(k,0) \\ P^{\sigma a,\sigma b,\sigma c}_{\hat{\mathfrak{c}}_1,\hat{\mathfrak{c}}_2}(k,n+1) \end{bmatrix} = \mathsf{M} \begin{bmatrix} P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,0)\sigma(0)^{-1} \\ P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n+1)\sigma(n+1)^{-1} \end{bmatrix}, \quad k = 0, \dots, n+1.$$

Como cada problema de contorno es equivalente a uno semihomogéneo, es posible determinar el núcleo de Poisson y, por tanto, el núcleo resolvente de cada problema de contorno regular por medio del núcleo de Green. Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.10. *Supongamos que el problema de contorno* $(\mathcal{L}^{\gamma}_{q}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular y consideremos* $G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *y* $P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *sus núcleos de Green y de Poisson. Entonces, para cada* $\widehat{\mathsf{C}} = (\hat{c}_{ij}) \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$

que sea inversa por la derecha de C *resulta que*

$$\begin{aligned}
P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,0) &= \hat{c}_{11}\varepsilon_0 + \hat{c}_{21}\varepsilon_1 + \hat{c}_{31}\varepsilon_n + \hat{c}_{41}\varepsilon_{n+1}\\
&+ \Big[(\hat{c}_{11}-\hat{c}_{21})c(0) - \hat{c}_{21}\big(a(1)+q(1)\big)\Big] G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,1)\\
&+ \hat{c}_{21}c(1)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,2) + \hat{c}_{31}a(n-1)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n-1)\\
&+ \Big[(\hat{c}_{41}-\hat{c}_{31})a(n) - \hat{c}_{31}\big(c(n-1)+q(n)\big)\Big] G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n),\\
P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n+1) &= \hat{c}_{12}\varepsilon_0 + \hat{c}_{22}\varepsilon_1 + \hat{c}_{32}\varepsilon_n + \hat{c}_{42}\varepsilon_{n+1}\\
&+ \Big[(\hat{c}_{12}-\hat{c}_{22})c(0) - \hat{c}_{22}\big(a(1)+q(1)\big)\Big] G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,1)\\
&+ \hat{c}_{22}c(1)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,2) + \hat{c}_{32}a(n-1)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n-1)\\
&+ \Big[(\hat{c}_{42}-\hat{c}_{32})a(n) - \hat{c}_{32}\big(c(n-1)+q(n)\big)\Big] G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n).
\end{aligned}$$

Demostración. Basta aplicar los resultados del Lema 2.4. □

La estrecha relación entre un problema de contorno y su adjunto se traslada también a los correspondientes núcleos de Green.

PROPOSICIÓN 4.11. *Supongamos que el problema de contorno* $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular y consideremos* $G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *y* $G^{c,b,a}_{\mathfrak{c}^*_1,\mathfrak{c}^*_2}$ *los nucleos de Green de* $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *y de su problema adjunto* $\big((\mathcal{L}^\gamma_q)^*, \mathfrak{c}^*_1, \mathfrak{c}^*_2\big)$. *Entonces,*

$$G^{c,b,a}_{\mathfrak{c}^*_1,\mathfrak{c}^*_2}(k,s) = G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s,k), \quad \textit{para cada } k,s=1,\dots,n.$$

Demostración. Fijemos $k,s=1,\dots,n$ y consideremos $u = G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,k)$ y $v = G^{c,b,a}_{\mathfrak{c}^*_1,\mathfrak{c}^*_2}(\cdot,s)$. Entonces, aplicando el Corolario 2.11, tenemos que

$$\begin{aligned}
G^{c,b,a}_{\mathfrak{c}^*_1,\mathfrak{c}^*_2}(k,s) = v(k) = \int_0^n \varepsilon_k(r)v(r)dr = \int_0^n \mathcal{L}^\gamma_q(u)(r)v(r)dr = \int_0^n u(r)(\mathcal{L}^\gamma_q)^*(v)(r)dr\\
= \int_0^n u(r)\varepsilon_s(r)dr = u(s) = G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s,k).
\end{aligned}$$

□

Los resultados principales de esta sección son el cálculo de los núcleos de Green, de Poisson y resolvente para cada problema de contorno regular. Como veremos, todos ellos están totalmente determinados por las soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea y los coeficientes de las condiciones de contorno. Pero antes, será útil definir las siguientes funciones asociadas con el problema de contorno.

DEFINICIÓN 4.12. *Consideremos* $\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ *definidas como las únicas soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *determinadas por las condiciones*

$$\begin{aligned}
&\nu_1(0) = -c_{12}, \;\; \nu_1(1) = c_{11}, \qquad \nu_2(n) = -c_{14}, \;\; \nu_2(n+1) = c_{13},\\
&\mu_1(0) = -c_{22}, \;\; \mu_1(1) = c_{21}, \qquad \mu_2(n) = -c_{24}, \;\; \mu_2(n+1) = c_{23}.
\end{aligned}$$

Denominaremos soluciones fundamentales de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$, respecto de las condiciones de contorno $\mathfrak{c}_1$ y $\mathfrak{c}_2$ *o, simplemente,* soluciones fundamentales *a las funciones*

$$\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = a(n)\rho_\gamma(n)\nu_1 + a(0)\nu_2 \quad y \quad \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = a(n)\rho_\gamma(n)\mu_1 + a(0)\mu_2.$$

La importancia de las soluciones fundamentales queda reflejada en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 4.13. *Si $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ y $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ son las soluciones fundamentales de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$, respecto de las condiciones de contorno $\mathfrak{c}_1$ y $\mathfrak{c}_2$, entonces*

$$\mathfrak{c}_1(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = \mathfrak{c}_2(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = 0, \quad -\mathfrak{c}_1(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = \mathfrak{c}_2(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$$

y, además,

$$W[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}] = (D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})^2 \quad y \quad w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0) = a(n)\rho_\gamma(n) D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}.$$

Demostración. Consideremos $\{u,v\}$ la base de soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea caracterizada por satisfacer que $u(0)=1$, $u(1)=0$, $v(0)=0$ y $v(1)=1$; es decir, $u=a(0)g(\cdot,1)$ y $v=-c(0)g(\cdot,0)$. Además, $w[u,v](0)=1$, mientras que $w[u,v](n)=a(0)a(n)^{-1}\rho_\gamma(n)^{-1}$.

Si demostráramos que

$$\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = a(n)\rho_\gamma(n)\big(\mathfrak{c}_1(u)v - \mathfrak{c}_1(v)u\big) \quad \text{y} \quad \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = a(n)\rho_\gamma(n)\big(\mathfrak{c}_2(u)v - \mathfrak{c}_2(v)u\big),$$

entonces, claramente, $\mathfrak{c}_1(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = \mathfrak{c}_2(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = 0$. Por otra parte,

$$-\mathfrak{c}_1(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = \mathfrak{c}_2(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = a(n)\rho_\gamma(n)W[u,v] = a(n)\rho_\gamma(n)a(0)c(0)W[g(\cdot,0),g(\cdot,1)] = D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$$

y, además,

$$w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0) = a(n)^2\rho_\gamma(n)^2 W[u,v]w[u,v](0) = a(n)^2\rho_\gamma(n)^2 W[u,v] = a(n)\rho_\gamma(n)D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}.$$

Para demostrar que $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = a(n)\rho_\gamma(n)\big(\mathfrak{c}_1(u)v - \mathfrak{c}_1(v)u\big)$ y $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = a(n)\rho_\gamma(n)\big(\mathfrak{c}_2(u)v - \mathfrak{c}_2(v)u\big)$ observemos primero que

$$\mathfrak{c}_1(u)v - \mathfrak{c}_1(v)u = c_{11}v - c_{12}u + c_{13}\big(u(n)v - v(n)u\big) + c_{14}\big(u(n+1)v - v(n+1)u\big) = z + w,$$

donde $z = c_{11}v - c_{12}u$ y $w = c_{13}\big(u(n)v - v(n)u\big) + c_{14}\big(u(n+1)v - v(n+1)u\big)$ que, claramente, son soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$.

Como $z(0) = -c_{12}$, $z(1) = c_{11}$, $w(n) = -c_{14}w[u,v](n)$ y $w(n+1) = c_{13}w[u,v](n)$, resulta que resulta que $z=\nu_1$ y $w = w[u,v](n)\nu_2$.

Por otra parte, $\mathfrak{c}_2(u)v - \mathfrak{c}_2(v)u = \hat{z} + \hat{w}$, donde

$$\hat{z} = c_{21}v - c_{22}u \;\; \text{y} \;\; \hat{w} = c_{23}\big(u(n)v - v(n)u\big) + c_{24}\big(u(n+1)v - v(n+1)u\big),$$

son las soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ que satisfacen que $\hat{z}(0) = -c_{22}$, $\hat{z}(1) = c_{21}$, $\hat{w}(n) = -c_{24}w[u,v](n)$ y $\hat{w}(n+1) = c_{23}w[u,v](n)$, lo que implica que $\hat{z} = \mu_1$ y $\hat{w} = w[u,v](n)\mu_2$. □

COROLARIO 4.14. *El problema de contorno $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es regular sii las soluciones fundamentales son una base de soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$. Además, cuando el problema es regular, si $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ es una solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$, entonces $\mathfrak{c}_1(u) = 0$ sii $u = \lambda\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$, respectivamente $\mathfrak{c}_2(u) = 0$ sii $u = \lambda\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. La primera afirmación resulta de la expresión del wronskiano de las soluciones fundamentales.

Consideremos ahora $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tal que $\mathcal{L}^\gamma_q(u) = 0$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ y, además, $\mathfrak{c}_1(u) = 0$. Si definimos $z = \mathfrak{c}_2(u)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} - \mathfrak{c}_2(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})u$, $\mathcal{L}^\gamma_q(z) = 0$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ y, además, $\mathfrak{c}_1(z) = \mathfrak{c}_2(z) = 0$. Como el problema es regular, necesariamente $z = 0$. Si $\mathfrak{c}_2(u) = 0$, concluimos que $u = 0$ y basta tomar $\lambda = 0$. Si $\mathfrak{c}_2(u) \neq 0$; es decir, si $u \neq 0$, tomamos $\lambda = \mathfrak{c}_2(u)\mathfrak{c}_2(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})^{-1}$.

El razonamiento para la condición de contorno $\mathfrak{c}_2$ es análogo. □

DEFINICIÓN 4.15. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular, denominaremos* base fundamental para el problema de contorno *o, simplemente,* base fundamental *a la base de soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea en* $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ *dada por* $\{\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\}$.

DEFINICIÓN 4.16. *Supongamos que el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular y consideremos* $\{\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\}$ *su base fundamental. Denominamos* parámetros del problema de contorno *a los siguientes números reales:*

$$g_{11} = c_{11}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1), \quad g_{12} = c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{14}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1),$$
$$g_{21} = c_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1), \quad g_{22} = c_{23}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1).$$

LEMA 4.17. *Supongamos que el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular. Entonces, los parámetros del problema satisfacen las siguientes relaciones:*

$$g_{11} = -\big[c_{13}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{14}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big], \qquad g_{12} = -\big[c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) + D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\big],$$
$$g_{21} = D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} - \big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big], \quad g_{22} = -\big[c_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{22}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big].$$

Además, $g_{12} + g_{21} = a(n)\rho_\gamma(n)d_{12} - a(0)d_{34}$ *y, también,*

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = g_{21}D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} - d_{12}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0) = -g_{12}D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} - d_{34}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n).$$

En particular, el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Sturm–Liouville sii* $g_{11} = g_{22} = g_{12} = g_{21} = 0$.

Demostración. Para las primeras identidades, basta tener en cuenta las siguientes igualdades de la Proposición 4.13

$$\begin{aligned}
0 &= \mathfrak{c}_1(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = g_{11} + c_{13}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{14}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1),\\
D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} &= \mathfrak{c}_2(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = g_{21} + c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1),\\
-D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} &= \mathfrak{c}_1(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = g_{12} + c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1),\\
0 &= \mathfrak{c}_2(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = g_{22} + c_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{22}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
g_{12} &= w[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \nu_2](n) = a(n)\rho_\gamma(n)w[\mu_1, \nu_2](n) + a(0)w[\mu_2, \nu_2](n) = a(0)w[\mu_1, \nu_2](0) - a(0)d_{34},\\
g_{21} &= w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \mu_1](0) = a(n)\rho_\gamma(n)w[\nu_1, \mu_1](0) + a(0)w[\nu_2, \mu_1](0)\\
&= a(n)\rho_\gamma(n)d_{12} - a(0)w[\mu_1, \nu_2](0),
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $g_{12} + g_{21} = a(n)\rho_\gamma(n)d_{12} - a(0)d_{34}$. La demostración de la expresión para $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ es análoga.

Finalmente, si el problema es de Sturm–Liouville, es claro que $g_{12} = g_{21} = 0$ y, como entonces, $g_{11} = \mathfrak{c}_1(\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})$ y $g_{22} = \mathfrak{c}_2(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})$, resulta que también $g_{11} = g_{22} = 0$.

Recíprocamente, si los parámetros son nulos, las expresiones para $g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ implican que $d_{12}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0) = d_{34}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n) = 0$; es decir, que $d_{12} = d_{34} = 0$, lo que por la Proposición 3.9 es equivalente a que el par sea de Sturm–Liouville. □

TEOREMA 4.18. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es regular, el núcleo de Poisson está determinado por las identidades*

$$P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k, 0) = \frac{-a(0)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)} \quad y \quad P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k, n+1) = \frac{a(0)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)},$$

para cada $k = 0, \dots, n+1$, mientras que el núcleo de Green está determinado por las identidades

$$G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = -\frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}$$
$$-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}$$
$$-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - g_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)},$$

para cada $s = 1, \dots, n$ y cada $k = 0, \dots, n+1$.

Demostración. Observemos primero que como $w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0) = a(n)\rho_\gamma(n)D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$, resulta que $w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n) = a(0)D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$; y la función de Green de la ecuación de Schrödinger en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ está dada por la identidad

$$g(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - \phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\big], \quad k,s = 0,\dots,n+1,$$

donde hemos tenido en cuenta que $a(s)\rho_\gamma(s)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](s) = a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)$.

Si $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, aplicando el Principio de Superposición, sabemos que el conjunto de soluciones de la ecuación de Schrödinger $\mathcal{L}^\gamma_q(u) = f$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ está descrito por la identidad

$$u = \alpha\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} + \beta\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} + y, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R},$$

donde si $g_{00} = -\big(a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)\big)^{-1}$,

$$y(k) = g_{00}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\int_0^k \phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\rho_\gamma(s)f(s)ds - g_{00}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\int_0^k \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\rho_\gamma(s)f(s)ds.$$

Utilizando las propiedades de la base fundamental, descritas en la Proposición 4.13, resulta que $\mathfrak{c}_1(u) = f(0)$ y $\mathfrak{c}_2(u) = f(n+1)$ sii

$$\alpha = \frac{1}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}\big[f(n+1) - \mathfrak{c}_2(y)\big] \quad \text{y} \quad \beta = \frac{1}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}\big[\mathfrak{c}_1(y) - f(0)\big]$$

Por otra parte, como $y(0) = y(1) = 0$ y, también,

$$y(n+1) = -\int_0^n g(n+1,s)f(s)ds - g(n+1,n+1)f(n+1) = -\int_0^n g(n+1,s)f(s)ds,$$

utilizando las identidades del Lemma 4.17, resulta que

$$\mathfrak{c}_1(y) = c_{13}y(n) + c_{14}y(n+1) = g_{00}\int_0^n \big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) + g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\big]\rho_\gamma(s)f(s)ds,$$

$$\mathfrak{c}_2(y) = c_{23}y(n) + c_{24}y(n+1) = g_{00}\int_0^n \big[\big(g_{21} - D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) + g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\big]\rho_\gamma(s)f(s)ds.$$

Para determinar los núcleos de Green y de Poisson, tenemos que sustituir en las identidades anteriores el dato f por ε_s, $s = 0,\dots,n+1$.

Si consideramos $f=\varepsilon_0$, entonces $y=0$, lo que implica que $\mathfrak{c}_1(y)=\mathfrak{c}_2(y)=0$ y, por tanto, que $\alpha=0$ y $\beta=-\dfrac{1}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}$. En definitiva, tenemos que

$$P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,0)=-\frac{1}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k).$$

Si consideramos $f=\varepsilon_{n+1}$, entonces $y=0$, lo que implica que $\mathfrak{c}_1(y)=\mathfrak{c}_2(y)=0$ y, por tanto, que $\beta=0$ y $\alpha=\dfrac{1}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}$. En definitiva, tenemos que

$$P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n+1)=\frac{1}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k).$$

Si consideramos $f=\varepsilon_s$, $s=1,\dots,n$, entonces $\alpha=-\dfrac{\mathfrak{c}_2(y)}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}$, $\beta=\dfrac{\mathfrak{c}_1(y)}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}$, mientras que

$$y(k)=\begin{cases} 0, & k\le s,\\ g_{00}\rho_\gamma(s)\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)-\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big], & k\ge s,\end{cases}$$

o, de forma equivalente,

$$y(k)=-g_{00}\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+g_{00}\rho_\gamma(s)\begin{cases}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s), & k\le s,\\ \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s), & k\ge s,\end{cases}$$

es decir,

$$y(k)=g_{00}\rho_\gamma(s)\Big[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})-\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big].$$

Por otra parte, también tenemos que

$$\begin{aligned}\mathfrak{c}_1(y)&=g_{00}\rho_\gamma(s)\big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\big],\\ \mathfrak{c}_2(y)&=g_{00}\rho_\gamma(s)\big[\big(g_{21}-D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\big],\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)&=g_{00}\rho_\gamma(s)\Big[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})-\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]\\
&-\frac{g_{00}\rho_\gamma(s)}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}\Big[\big(g_{21}-D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]\\
&+\frac{g_{00}\rho_\gamma(s)}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}\Big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+g_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]\\
&=g_{00}\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})\\
&-\frac{g_{00}\rho_\gamma(s)}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}\Big[g_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]\\
&+\frac{g_{00}\rho_\gamma(s)}{D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}}\Big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+g_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big].\end{aligned}$$

$\square$

Observar que, como era de esperar, el núcleo de Poisson en cada extremo del camino, coincide esencialmente con cada una de las funciones de la base fundamental. Además, a la vista de las identidades anteriores, resulta que el núcleo de Green también está determinado por el núcleo de Poisson. Concretamente, tenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 4.19. *Si el problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es regular y $P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}$ es su núcleo de Poisson, entonces el núcleo de Green está determinado por las identidades*

$$\begin{aligned} G_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k,s) &= -\frac{\rho_\gamma(s)P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(\text{mín}\{k,s\},n+1)P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(\text{máx}\{k,s\},0)}{a(0)w[P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(\cdot,0),P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(0,n+1)](0)} \\ &+ \frac{\rho_\gamma(s)\Big[\hat{g}_{11}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k,0)P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(s,0)+\hat{g}_{22}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k,n+1)P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(s,n+1)\Big]}{a(0)w[P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(\cdot,0),P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(0,n+1)](0)} \\ &+ \frac{\rho_\gamma(s)\Big[\hat{g}_{12}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k,0)P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(s,n+1)+\hat{g}_{21}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k,n+1)P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(s,0)\Big]}{a(0)w[P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(\cdot,0),P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(0,n+1)](0)}, \end{aligned}$$

para cada $s=1,\dots,n$ y cada $k=0,\dots,n+1$, donde

$$\begin{aligned} \hat{g}_{11} &= c_{11}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(0,n+1)+c_{12}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(1,n+1), \quad \hat{g}_{12} = c_{13}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(n,0)+c_{14}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(n+1,0), \\ \hat{g}_{21} &= c_{21}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(0,n+1)+c_{22}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(1,n+1), \quad \hat{g}_{22} = c_{23}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(n,0)+c_{24}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(n+1,0). \end{aligned}$$

Demostración. En la demostración del Teorema 4.18 hemos probado que si $\left\{\phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c},\psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}\right\}$ es la base fundamental, entonces

$$\phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k) = \frac{w[\phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c},\psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}](n)}{a(0)}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k,n+1) \quad \text{y} \quad \psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k) = -\frac{w[\phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c},\psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}](n)}{a(0)}P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k,0),$$

lo que implica que

$$w[\phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c},\psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}](0) = a(0)^{-2}w[\phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c},\psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}](n)^2 w[P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(\cdot,0),P_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(0,n+1)](0).$$

Finalmente, los valores de $\hat{g}_{ij}$ son consecuencia de la definición de los valores g_{ij} y la relación entre la base fundamental y el núcleo de Poisson. $\square$

COROLARIO 4.20. *Si el problema de contorno $(\mathcal{L}_q^{\gamma}, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es regular, su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$\begin{aligned}
R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = &-\frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\\
&-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)-g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\\
&-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)-g_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\\
&-\frac{\Big[\big(a(0)+c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-c_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\varepsilon_s(0)\\
&-\frac{\rho_\gamma(n+1)\Big[c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-\big(c(n)+c_{23}\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\varepsilon_s(n+1),
\end{aligned}$$

para cada $k,s=0,\dots,n+1$.

Demostración. Como $R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}=G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}+P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$, la identidad es cierta para cada $k=0,\dots,n+1$, cuando $s=1,\dots,n$.

Consideremos ahora $A_0, A_{n+1}\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$ las funciones obtenidas permitiendo los valores $s=0$ y $s=n+1$ en la expresión del núcleo de Green; es decir,

$$\begin{aligned}
A_0(k) = &-\frac{\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\\
&-\frac{\Big[\big(g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)+g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-\big(g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)+g_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\\
=&-\frac{\Big[\big(g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)+(g_{12}+D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-\big(g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)+g_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(k) &= -\frac{\rho_\gamma(n+1)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)} \\
&\quad - \frac{\rho_\gamma(n+1)\big(g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)+g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)} \\
&\quad + \frac{\rho_\gamma(n+1)\big(g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)+g_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)} \\
&= -\frac{\rho_\gamma(n+1)\big(g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)+g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)} \\
&\quad + \frac{\rho_\gamma(n+1)\big(g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)+(g_{21}-D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)},
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}=a(0)^{-1}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)$. Teniendo en cuenta las identidades del Lema 4.17, resulta que

$$\begin{aligned}
g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)+(g_{12}+D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) &= -c_{12}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0),\\
g_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)+g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) &= -c_{22}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0),\\
(g_{21}-D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)+g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) &= -c_{23}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n),\\
g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)+g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) &= -c_{13}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n),
\end{aligned}$$

que a su vez, implican que

$$A_0(k)=-\frac{\Big[c_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}=P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,0)+\frac{\big(a(0)+c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-c_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}$$

y

$$\begin{aligned}
A_{n+1}(k) &= \frac{\rho_\gamma(n+1)\Big[c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)} \\
&= P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n+1)-\frac{a(0)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}+\frac{\rho_\gamma(n+1)\Big[c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)} \\
&= P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n+1)-\frac{a(n)\rho_\gamma(n)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}+\frac{\rho_\gamma(n+1)\Big[c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)} \\
&= P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n+1)+\frac{\rho_\gamma(n+1)\Big[c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-\big(c(n)+c_{23}\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)},
\end{aligned}$$

donde hemos tenido en cuenta que $a(n)\rho_\gamma(n)=c(n)\rho_\gamma(n+1)$. $\square$

COROLARIO 4.21. *Supongamos que el problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es regular y consideremos $G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ y $R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ sus núcleos de Green y resolvente, respectivamente. Entonces, se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $\rho_\gamma(k)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \rho_\gamma(s)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s,k)$, $k,s=1,\dots,n$, *sii* $a(n)\rho_\gamma(n)d_{12} = a(0)d_{34}$.

(ii) $\rho_\gamma(k)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \rho_\gamma(s)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s,k)$, $k,s = 0,\dots,n+1$ *sii* $a(n)\rho_\gamma(n)d_{12} = a(0)d_{34}$, $c_{12} = -a(0)$, $c_{13} = c_{22} = 0$ *y* $c_{23} = -c(n)$. *En este caso, tenemos que*

$$\begin{aligned}
R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = &-\frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\\
&-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\\
&-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - g_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}.
\end{aligned}$$

para cada $k,s = 0,\dots,n+1$.

Demostración.

(i) Se satisface que $\rho_\gamma(k)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \rho_\gamma(s)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s,k)$, para cada $k,s=1,\dots,n$ sii

$$(g_{12}+g_{21})\big(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - \phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\big) = 0, \quad k,s=1,\dots,n$$

y esto ocurre sii $g_{21} = -g_{12}$, ya que $w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}] \neq 0$. Aplicando el Lema 4.17, sabemos que $g_{12}+g_{21} = 0$ sii $a(n)\rho_\gamma(n)d_{12} = a(0)d_{34}$.

(ii) De (i) deducimos que $\rho_\gamma(k)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \rho_\gamma(s)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s,k)$, para cada $k,s=0,\dots,n+1$ sii $g_{12}+g_{21}=0$ y, además,

$$\begin{aligned}
\rho_\gamma(k)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,0) &= R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0,k), & k&=1,\dots,n,\\
\rho_\gamma(k)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,n+1) &= \rho_\gamma(n+1)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1,k), & k&=1,\dots,n,\\
\rho_\gamma(n+1)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1,0) &= R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0,n+1).
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $g_{12}+g_{21}=0$, las anteriores identidades se satisfacen sii

$$\begin{aligned}
c_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - \big(a(0)+c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) &= 0, \quad k=1,\dots,n,\\
\big(c(n)+c_{23}\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) &= 0, \quad k=1,\dots,n,
\end{aligned}$$

y, además,

$$c(n)\rho_\gamma(n{+}1)\Big[c_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n{+}1) - \big(a(0){+}c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n{+}1)\Big] = a(0)\Big[\big(c_{23}{+}c(n)\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) - c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)\Big].$$

Como $w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](k) \neq 0$, $k=1,\dots,n-1$, las dos primeras identidades se satisfacen sii $c_{13}=c_{22}=0$, $c_{12}=-a(0)$ y $c_{23}=-c(n)$, lo que supone que la tercera también se satisface. □

5. Núcleos resolventes de los problemas de contorno regulares

El propósito de esta sección es determinar los núcleos de los diferentes problemas de contorno regulares. Como los núcleos de Green y de Poisson se deducen inmediatamente de la expresión de lo núcleos resolventes, sólo describiremos estos últimos. Atendiendo a la clasificación que realizamos en la Sección 3 de este capítulo, estudiaremos problemas unilaterales, separables en uno u otro extremo del camino y, finalmente, de tipo periódico. En todos los casos estableceremos las condiciones específicas para que tales problemas sean regulares y determinaremos entonces el núcleo resolvente correspondiente.

5.1. Problemas unilaterales. Supongamos que las condiciones de contorno $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ son unilaterales iniciales; es decir, que $\mathsf{C}_{34}=0$. En este caso, con las notaciones anteriores, tenemos que $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\mathring{\mathbf{I}}$ que satisface $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)=-a(n)\rho_\gamma(n)c_{12}$ y $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)=a(n)\rho_\gamma(n)c_{11}$, mientras que $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\mathring{\mathbf{I}}$ tal que $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)=-a(n)\rho_\gamma(n)c_{22}$ y $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)=a(n)\rho_\gamma(n)c_{21}$. Como

$$w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)=a(n)^2\rho_\gamma(n)^2d_{12}\neq 0,$$

el problema es regular. En este caso, $g_{11}=g_{22}=g_{12}=0$, mientras que $g_{21}=a(n)\rho_\gamma(n)d_{12}=a(0)^{-1}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)$. Por tanto, se satisface el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 5.1. *Si el problema de contorno $(\mathcal{L}^\gamma_q,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ es unilateral inicial, entonces es regular y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$\begin{aligned}R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)&=\frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\Big[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)-\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\min\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\max\{k,s\})\Big]\\&-\frac{\Big[\big(a(0)+c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-c_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\varepsilon_s(0)+\frac{\rho_\gamma(n+1)c(n)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\varepsilon_s(n+1),\end{aligned}$$

para cada $k,s=0,\dots,n+1$.

Supongamos ahora que las condiciones de contorno $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ son unilaterales finales; es decir, que $\mathsf{C}_{12}=0$. En este caso, con las notaciones anteriores, tenemos que $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\mathring{\mathbf{I}}$ que satisface $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n)=-a(0)c_{14}$ y $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)=a(0)c_{13}$, mientras que $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\mathring{\mathbf{I}}$ tal que $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n)=-a(0)c_{24}$ y $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)=a(0)c_{23}$. Como

$$w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)=a(0)^2d_{34}\neq 0,$$

el problema es regular. En este caso, $g_{11}=g_{22}=g_{21}=0$, mientras que $g_{12}=-a(0)d_{34}$. Por tanto, se satisface el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 5.2. *Si el problema de contorno $(\mathcal{L}^\gamma_q,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ es unilateral final, entonces es regular y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$\begin{aligned}R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s)&=\frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)-\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\min\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\max\{k,s\})\Big]\\&-\frac{a(0)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\varepsilon_s(0)-\frac{\rho_\gamma(n+1)\Big[c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)-\big(c(n)+c_{23}\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\varepsilon_s(n+1),\end{aligned}$$

para cada $k,s=0,\dots,n+1$.

NOTA 5.3. Observar que en el caso de las condiciones unilaterales iniciales,

$$G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\Big[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - \phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})\Big]$$
$$= \begin{cases} 0, & \text{si } k \le s, \\ -g(k,s), & \text{si } k \ge s, \end{cases}$$

mientras que cuando las condiciones son unilaterales finales,

$$G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - \phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})\Big]$$
$$= \begin{cases} g(k,s), & \text{si } k \le s, \\ 0, & \text{si } k \ge s, \end{cases}$$

donde g es la función de Green de la ecuación de Schrödinger en $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$.

5.2. Problemas separados. Supongamos que el par $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ es separado en 0; es decir, está determinado por la matriz $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\end{bmatrix}$, donde $\big(|c_{11}|+|c_{12}|\big)\big(|c_{23}|+|c_{24}|\big) > 0$ y $c_{21}\cdot c_{22} = 0$. En este caso, tenemos que $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ que satisface $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) = -a(n)\rho_\gamma(n)c_{12}$ y $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) = a(n)\rho_\gamma(n)c_{11}$. Como

$$w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0) = -a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big],$$

resulta que $D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = -\big[c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big]$. Además, $g_{11} = g_{12} = 0$, $g_{21} = a(n)\rho_\gamma(n)d_{12}$ y $w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n) = -a(0)\big[c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big]$.

PROPOSICIÓN 5.4. *Si el problema de contorno $(\mathcal{L}^\gamma_q,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ es separado en 0, entonces es regular sii $c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq -c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)$ y, en ese caso, su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$\begin{aligned} R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) &= \frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big]} \\ &+ \frac{\rho_\gamma(s)\Big[\big(g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) + d_{12}a(n)\rho_\gamma(n)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big]^2} \\ &+ \frac{\Big[\big(a(0)+c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - c_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{a(0)\big[c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big]}\varepsilon_s(0) \\ &- \frac{\rho_\gamma(n+1)\big(c(n)+c_{23}\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big]}\varepsilon_s(n+1), \end{aligned}$$

para cada $k,s = 0,\dots,n+1$.

Supongamos que el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es separado en $n+1$; es decir, está determinado por la matriz $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$, donde $\big(|c_{11}|+|c_{12}|\big)\big(|c_{23}|+|c_{24}|\big) > 0$ y $c_{13}\cdot c_{14} = 0$. En este caso, tenemos que $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ que satisface $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) = -a(0)c_{24}$ y $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) = a(0)c_{23}$. Como

$$w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n) = a(0)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big],$$

resulta que $D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)$. Además, $g_{22} = g_{21} = 0$, $g_{12} = -a(0)d_{34}$ y $w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0) = a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]$.

PROPOSICIÓN 5.5. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es separado en* $n+1$, *entonces es regular sii* $c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) \neq -c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)$ *y, en ese caso, su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$\begin{aligned} R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = &-\frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]} \\ &- \frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - a(0)d_{34}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]^2} \\ &- \frac{\big(a(0)+c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{a(0)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]}\varepsilon_s(0) \\ &- \frac{\rho_\gamma(n+1)\Big[c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - \big(c(n)+c_{23}\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]}\varepsilon_s(n+1), \end{aligned}$$

para cada $k,s = 0,\dots,n+1$.

Supongamos finalmente que el par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es un par de Sturm–Liouville; es decir, está determinado por una matriz de la forma $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$, donde $(|c_{11}|+|c_{12}|)(|c_{23}+|c_{24}|) > 0$. En este caso, tenemos que $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ que satisface $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) = -a(n)\rho_\gamma(n)c_{12}$ y $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) = a(n)\rho_\gamma(n)c_{11}$, mientras que $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es la única solución de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ que satisface $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) = -a(0)c_{24}$ y $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) = a(0)c_{23}$. Además, $g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0$ y

$$D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = -c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) - c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) = c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1).$$

PROPOSICIÓN 5.6. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Sturm–Liouville, es regular sii* $c_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq -c_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)$ *o, equivalentemente, sii* $c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) \neq -c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$\begin{aligned} R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = &-\frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]} \\ &+ \frac{\rho_\gamma(n+1)\big[a(0)\big(c(n)+c_{23}\big)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\varepsilon_s(n+1) - c(n)\big(a(0)+c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\varepsilon_s(0)\big]}{a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]}, \end{aligned}$$

para cada $k, s = 0, \ldots, n+1$.

Obsérvese que para problemas de Sturm–Liouville, el núcleo de Green se expresa como

$$G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = -\frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]},$$

mientras que el núcleo resolvente puede expresarse como

$$\begin{aligned} R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = {} & \frac{-\rho_\gamma(s)}{a(0)a(n)\rho_\gamma(n)\big[c_{23}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\big]} \\ & \times \Big[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\}) + a(n)\rho_\gamma(n)\big(a(0)+c_{12}\big)\varepsilon_s(0)\Big] \\ & \times \Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}) - a(0)\big(c(n)+c_{23}\big)\varepsilon_s(n+1)\Big]. \end{aligned}$$

Esta última identidad motiva que nos planteemos reformular ligeramente los resultados de la proposición anterior, para obtener una expresión del núcleo resolvente completamente análoga a la de la función de Green. Para ello, consideraremos las funciones

$$\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = \big(a(n)\rho_\gamma(n)\big)^{-1}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} + \big(a(0)+c_{12}\big)\varepsilon_0 \ \text{ y } \ \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} = a(0)^{-1}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} - \big(c(n)+c_{23}\big)\varepsilon_{n+1}. \tag{64}$$

Entonces,

$$\mathcal{L}^\gamma_q(\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = -c(0)\big(a(0)+c_{12}\big)\varepsilon_1 \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^\gamma_q(\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}) = a(n)\big(c(n)+c_{23}\big)\varepsilon_n, \ \text{ en } \ \overset{\circ}{\mathbf{I}},$$

y, además,

$$\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) = a(0), \ \ \Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) = c_{11}, \ \ \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) = -c_{24}, \ \ \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) = -c(n).$$

COROLARIO 5.7. *Supongamos que el problema de contorno* $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Sturm–Liouville y consideremos* $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *y* $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *las únicas soluciones de la ecuación de Schrödinger en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *con datos* $-c(0)\big(a(0)+c_{12}\big)\varepsilon_1$ *y* $a(n)\big(c(n)+c_{23}\big)\varepsilon_n$*, respectivamente, que además satisfacen*

$$\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) = a(0), \ \ \Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) = c_{11}, \ \ \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) = -c_{24}, \ \ \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) = -c(n).$$

Entonces,

$$a(0)\Big(c_{11}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\Big) = -a(n)\rho_\gamma(n)\Big(c_{23}\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\Big)$$

el problema es regular sii $c_{11}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq -c_{12}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)\Big[c_{11}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\Big]}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \ldots, n+1$.

Demostración. Basta observar que

$$\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) = \big(a(n)\rho_\gamma(n)\big)^{-1}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) \quad \text{y} \quad \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) = a(0)^{-1}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k), \quad \text{para } k = 1, \ldots, n,$$

y aplicar los resultados de la Proposición 5.6. □

A continuación utilizaremos la expresión anterior para describir los núcleos resolventes para los problemas de Sturm–Liouville más conocidos. El caso general expresado en el Corolario 5.7, corresponde también al problema de Robin; es decir, cuando ambas condiciones son las de Robin.

COROLARIO 5.8. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Dirichlet exterior; es decir,* $\mathfrak{c}_1(u) = u(0)$ *y* $\mathfrak{c}_2(u) = u(n{+}1)$*, entonces es regular sii* $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq 0$ *o, equivalentemente, sii* $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n{+}1) \neq 0$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \dots, n+1$.

COROLARIO 5.9. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Dirichlet interior; es decir,* $\mathfrak{c}_1(u) = u(1)$ *y* $\mathfrak{c}_2(u) = u(n)$*, entonces es regular sii* $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) \neq 0$ *o, equivalentemente, sii* $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) \neq 0$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \dots, n+1$.

COROLARIO 5.10. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Dirichlet exterior–interior; es decir,* $\mathfrak{c}_1(u) = u(0)$ *y* $\mathfrak{c}_2(u) = u(n)$*, entonces es regular sii* $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq 0$ *o, equivalentemente, sii* $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) \neq 0$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \dots, n+1$.

COROLARIO 5.11. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Dirichlet interior–exterior; es decir,* $\mathfrak{c}_1(u) = u(1)$ *y* $\mathfrak{c}_2(u) = u(n+1)$*, entonces es regular sii* $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) \neq 0$ *o, equivalentemente, sii* $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) \neq 0$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \dots, n+1$.

COROLARIO 5.12. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Dirichlet exterior–Robin; es decir,* $\mathfrak{c}_1(u) = u(0)$*,* $\mathfrak{c}_2(u) = c_{23}u(n){+}c_{24}u(n{+}1)$ *con* $c_{23}c_{24} \neq 0$*, entonces es regular sii* $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq 0$ *o, equivalentemente, sii* $c_{23}\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) \neq -c_{24}\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \dots, n+1$.

COROLARIO 5.13. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Dirichlet interior–Robin; es decir,* $\mathfrak{c}_1(u) = u(1)$*,* $\mathfrak{c}_2(u) = c_{23}u(n) + c_{24}u(n+1)$ *con* $c_{23}c_{24} \neq 0$*, es regular sii* $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) \neq 0$ *o, equivalentemente, sii* $c_{23}\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) \neq -c_{24}\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \dots, n+1$.

COROLARIO 5.14. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Robin–Dirichlet exterior; es decir,* $\mathfrak{c}_1(u) = c_{11}u(0) + c_{12}u(1)$ *con* $c_{11}c_{12} \neq 0$*,* $\mathfrak{c}_2(u) = u(n+1)$*, entonces es regular sii* $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) \neq 0$*, o equivalentemente, sii* $c_{11}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq -c_{12}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = -\frac{\rho_\gamma(s)}{a(n)\rho_\gamma(n)\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \ldots, n+1$.

COROLARIO 5.15. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de Robin–Dirichlet interior; es decir,* $\mathfrak{c}_1(u) = c_{11}u(0) + c_{12}u(1)$ *con* $c_{11}c_{12} \neq 0$*,* $\mathfrak{c}_2(u) = u(n)$*, entonces es regular sii* $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) \neq 0$ *o, equivalentemente, sii* $c_{11}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq -c_{12}\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)$ *y su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = -\frac{\rho_\gamma(s)}{a(n)\rho_\gamma(n)\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n)}\,\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\}),$$

para cada $k, s = 0, \ldots, n+1$.

5.3. Problemas de tipo periódico regulares. En este caso, las condiciones bajo las cuales el problema es regular no se pueden simplificar, puesto que las funciones de la base fundamental involucran valores en ambos extremos. Por ello, asumiremos en los dos casos que el problema es regular y, bajo esa hipótesis, determinaremos el núcleo resolvente.

Supongamos primero que el par de condiciones de contorno $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ son de tipo periódico de primer especie; es decir, están determinadas por una matriz del tipo $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & 0 & 0 & c_{24} \end{bmatrix}$, donde $a_{12} \cdot a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{24} \neq 0$. En este caso,

$$g_{11} = c_{11}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) + c_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1), \quad g_{12} = c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{14}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1),$$
$$g_{21} = c_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0), \qquad g_{22} = c_{24}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1).$$

PROPOSICIÓN 5.16. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ *es de tipo periódico de primera especie y regular, su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$\begin{aligned} R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = &-\frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)} \\ &-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)} \\ &-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - g_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)} \\ &-\frac{\big(a(0)+c_{12}\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\varepsilon_s(0) - \frac{\rho_\gamma(n+1)\Big[c_{13}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - c(n)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\varepsilon_s(n+1), \end{aligned}$$

para cada $k, s = 0, \ldots, n+1$.

Supongamos ahora que el par de condiciones de contorno $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ son de tipo periódico de segunda especie; es decir, están determinadas por una matriz del tipo $\begin{bmatrix} c_{11} & -a(0) & 0 & c_{14} \\ c_{21} & 0 & -c(n) & c_{24}\end{bmatrix}$, donde $c_{21}\cdot c_{14}\neq 0$.

En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} g_{11} &= c_{11}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) - a(0)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1), & g_{12} &= c_{14}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1),\\ g_{21} &= c_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0), & g_{22} &= -c(n)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) + c_{24}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1).\end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 5.17. *Si el problema de contorno* $(\mathcal{L}^\gamma_q,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ *es de tipo periódico de segunda especie y regular, su núcleo resolvente está determinado por la identidad*

$$\begin{aligned} R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = &-\frac{\rho_\gamma(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\\ &-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\\ &-\frac{\rho_\gamma(s)\Big[g_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) - g_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)},\end{aligned}$$

para cada $k,s=0,\dots,n+1$.

6. La ecuación de Poisson

Analizamos en esta sección uno de los problemas más relevantes en el ámbito de la combinatoria o, más exactamente, en el contexto de la Teoría del Potencial en redes, en nuestro caso caminos, finitas. Mantendremos aquí las notaciones que hemos utilizado en todo el capítulo.

DEFINICIÓN 6.1. *Denominamos* ecuación de Poisson en el camino $\mathbf{I}$ con dato $f\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$*, a la ecuación*

$$\mathcal{L}^\gamma_q(u) = f, \quad \textit{en } \mathbf{I}.$$

Cada $u\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$ *que satisfaga la identidad anterior, se denomina* solución de la ecuación de Poisson en $\mathbf{I}$. *A la ecuación de Poisson con dato nulo se la denomina* ecuación de Poisson homogénea en el camino $\mathbf{I}$.

Al describir la ecuación de Poisson en cada vértice del camino observamos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\gamma_q(u)(0) &= a(0)\big(u(0)-u(1)\big) + q(0)u(0) = b(0)u(0) - a(0)u(1) = f(0),\\ \mathcal{L}^\gamma_q(u) &= f \ \text{ en } \overset{\circ}{\mathbf{I}},\\ \mathcal{L}^\gamma_q(u)(n) &= c(n)\big(u(n+1)-u(n)\big) + q(n+1)u(n+1)\\ &= b(n+1)u(n+1) - c(n)u(n) = f(n+1),\end{aligned}$$

donde $b=\kappa_\gamma+q$. Si definimos el par de condiciones de contorno $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$, como $\mathfrak{c}_1(u)=\mathcal{L}^\gamma_q(u)(0)$ y $\mathfrak{c}_2(u)=\mathcal{L}^\gamma_q(u)(n+1)$, entonces $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ es el par de Sturm–Liouville determinado por la matriz

$\mathsf{C} = \begin{bmatrix} b(0) & -a(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c(n) & b(n+1) \end{bmatrix}$, de manera que la ecuación de Poisson sobre $\mathbf{I}$ no es más que el problema de contorno de Sturm–Liouville

$$\mathcal{L}_q^\gamma(u) = f, \quad \text{en } \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \quad \mathfrak{c}_1(u) = f(0), \quad \mathfrak{c}_2(u) = f(n+1).$$

Recordemos también que el adjunto de $\mathcal{L}_q^\gamma$ es el operador de Schrödinger $\mathcal{L}_{q+p_\gamma}^{\gamma^*}$ y está caracterizado por satisfacer que

$$\int_{\mathbf{I}} v\mathcal{L}_q^\gamma(u) = \int_{\mathbf{I}} u\mathcal{L}_{q+p_\gamma}^{\gamma^*}(v), \quad \text{para cada } u, v \in \mathcal{C}(\mathbf{I}) \tag{65}$$

Como la ecuación de Poisson homogénea $(\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v) = 0$ en $\mathbf{I}$ significa que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v)(0) &= c(0)\big(v(0) - v(1)\big) + \big(q(0) + p_\gamma(0)\big)v(0) = b(0)v(0) - c(0)v(1) = 0, \\
(\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v) &= 0 \ \text{ en } \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \\
(\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v)(n) &= a(n)\big(v(n+1) - u(n)\big) + \big(q(n+1) + p_\gamma(n+1)\big)v(n+1) \\
&= b(n+1)v(n+1) - a(n)v(n) = 0,
\end{aligned}$$

si ahora definimos el par de condiciones de contorno $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$, como $\mathfrak{c}_1^*(v) = (\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v)(0)$ y como $\mathfrak{c}_2^*(v) = (\mathcal{L}_q^\gamma)^*(v)(n+1)$, entonces $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$ es el par de condiciones de Sturm–Liouville determinado por la matriz $\mathsf{C}^* = \begin{bmatrix} b(0) & -c(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(n) & b(n+1) \end{bmatrix}$, lo que implica que la anterior ecuación de Poisson homogénea sobre $\mathbf{I}$ no es más que el problema de contorno homogéneo de Sturm–Liouville $\big((\mathcal{L}_q^\gamma)^*, \mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*\big)$.

PROPOSICIÓN 6.2. *En las condiciones precedentes, $\big((\mathcal{L}_q^\gamma)^*, \mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*\big)$ es el problema adjunto del problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$, equivalente a la ecuación de Poisson $\mathcal{L}_q^\gamma(u) = f$ en $\mathbf{I}$.*

Demostración. Es suficiente probar que el par $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$ es un adjunto del par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$. Aplicando la Proposición 3.9, resulta que un par de condiciones adjuntas del par $(\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ está determinado por la matriz

$$\begin{aligned}
\mathsf{C}^* &= \begin{bmatrix} a(0)b(0) & -c(0)a(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(n)c(n) & c(n)b(n+1) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(0) & 0 \\ 0 & c(n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b(0) & -c(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(n) & b(n+1) \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

de manera que el par es equivalente al par $(\mathfrak{c}_1^*, \mathfrak{c}_2^*)$. Alternativamente, de la Identidad (65) se deduce

$$v(0)\mathfrak{c}_1(u) + v(n+1)\mathfrak{c}_2(u) + \int_0^n v\mathcal{L}_q^\gamma(u) = \int_0^n u(\mathcal{L}^\gamma)^*(v) + u(0)\mathfrak{c}_1^*(v) + u(n+1)\mathfrak{c}_2^*(v)$$

o, equivalentemente,

$$\int_0^n \Big[v\mathcal{L}_q^\gamma(u) - u(\mathcal{L}^\gamma)^*(v)\Big] = -v(0)\mathfrak{c}_1(u) - v(n+1)\mathfrak{c}_2(u) + u(0)\mathfrak{c}_1^*(v) + u(n+1)\mathfrak{c}_2^*(v),$$

se concluye también el resultado identificando $\mathfrak{c}_1^c(u) = u(0)$, $\mathfrak{c}_2^c(u) = u(n+1)$, $(\mathfrak{c}_1^*)^c(v) = -v(0)$ y $(\mathfrak{c}_2^*)^c(v) = -v(n+1)$ en la Proposición 2.8. $\square$

Aplicando ahora los resultados del Corolario 5.7, tenemos el resultado fundamental relativo a las ecuaciones de Poisson.

TEOREMA 6.3. *Consideremos* $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *y* $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ *las únicas soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea en* $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ *que satisfacen*

$$\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) = a(0), \quad \Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) = b(0), \quad \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) = -b(n+1), \quad \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) = -c(n).$$

Entonces,

$$a(0)\Big(b(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) - a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\Big) = a(n)\rho_\gamma(n)\Big(c(n)\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) - b(n+1)\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\Big),$$

el operador $\mathcal{L}^\gamma_q$ *es invertible sii* $b(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) \neq a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)$ *y, además, para cada* $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*,*

$$(\mathcal{L}^\gamma_q)^{-1}(f)(k) = -\int_{\mathbf{I}} \frac{\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})}{a(0)\Big[b(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) - a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\Big]}\,\rho_\gamma(s)f(s)ds,$$

para cada $k = 0,\dots,n+1$.

Finalizaremos la sección explicando la motivación de las condiciones de contorno de tipo periódico en términos de ecuaciones de Poisson en un ciclo de $n+1$ vértices, tal y como fue adelantado en secciones precedentes. Esta interpretación es la misma que motivó el estudio de este tipo de problemas en [**10**] y, por otra parte, es la que motiva la consideración de problemas de contorno con condiciones periódicas en el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Consideraremos ahora un ciclo de $n+1$ vértices $\hat{\mathbf{I}} = \{0,1,\dots,n\}$, donde $j \sim j+1$, $j = 1,\dots,n-1$ y, además, $n \sim 0$; es decir, los vértices 0 y n son también adyacentes. Como en el caso de un camino, podemos ahora definir una conductancia en el ciclo como $\gamma\colon \hat{\mathbf{I}} \times \hat{\mathbf{I}} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\gamma(k,s) \neq 0$ sii o bien $|k-s| = 1$ o bien $|k-s| = n$. Ahora si $q \in \mathcal{C}(\hat{\mathbf{I}})$, el operador de Schrödinger en el ciclo de conductancia $\hat{\gamma}$ y potencial $\hat{q}$, está definido como $\mathcal{L}^{\hat{\gamma}}_{\hat{q}}\colon \mathcal{C}(\hat{\mathbf{I}}) \longrightarrow \mathcal{C}(\hat{\mathbf{I}})$ que a cada $u \in \mathcal{C}(\hat{\mathbf{I}})$ le asigna la función

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\hat{\gamma}}_{\hat{q}}(u)(0) &= \hat{\gamma}(0,1)\big(u(0)-u(1)\big) + \hat{\gamma}(0,n)\big(u(0)-u(n)\big) + \hat{q}(0)u(0)\\
&= a(0)\big(u(0)-u(1)\big) + c(n)\big(u(0)-u(n)\big) + q(0)u(0),\\
&\ \vdots\\
\mathcal{L}^{\hat{\gamma}}_{\hat{q}}(u)(k) &= \hat{\gamma}(k,k+1)\big(u(k)-u(k+1)\big) + \hat{\gamma}(k,k-1)\big(u(k)-u(k-1)\big) + q(k)u(k)\\
&= a(k)\big(u(k)-u(k+1)\big) + c(k-1)\big(u(k)-u(k-1)\big) + q(k)u(k),\\
&\ \vdots\\
\mathcal{L}^{\hat{\gamma}}_{\hat{q}}(u)(n) &= \hat{\gamma}(n,0)\big(u(n)-u(0)\big) + \hat{\gamma}(n,n-1)\big(u(n)-u(n-1)\big) + \hat{q}(n)u(n)\\
&= a(n)\big(u(n)-u(0)\big) + c(n-1)\big(u(n)-u(n-1)\big) + \hat{q}(n)u(n),
\end{aligned} \tag{66}$$

donde las funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ están definidas de manera análoga al caso de un camino. Nuestro próximo objetivo es la resolución de la ecuación de Poisson en el ciclo; es decir, dada $f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ buscamos las funciones $u \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tales que $\mathcal{L}^{\hat{\gamma}}_{\hat{q}}(u) = f$ en $\mathbf{I}$. Nuestra estrategia, como en [**10**], es transformar la anterior ecuación en un problema de contorno en un camino de $n+2$ vértices. Para ello, duplicamos el vértices 0 del ciclo, dando lugar a un nuevo vértice que denotaremos como $n+1$, tal y como se representa en la siguiente figura.

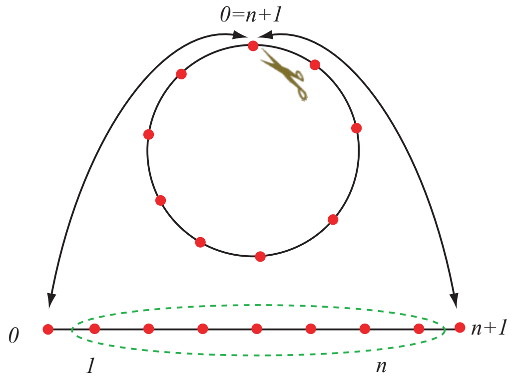

FIGURA 1. Condiciones periódicas

Definimos una conductancia $\gamma \in \Gamma(\mathbf{I})$ como $\gamma(k,s)=\hat{\gamma}(k,s)$ para cada $k,s=0,1,\dots,n$ y $\gamma(k,n{+}1)=\gamma(n{+}1,k)=0$ para cada $k=0,\dots,n{-}1$ y $\gamma(n,n{+}1)=\hat{\gamma}(n,0)$, $\gamma(n{+}1,n)=\hat{\gamma}(0,n)$. Definimos también el potencial $q\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$ como $q(k)=\hat{q}(k)$ si $k=0,\dots,n$ y $q(n+1)=\hat{q}(0)$. Debemos ahora extender u a $\mathbf{I}$ dando un valor en $n+1$ para que se satisfagan también las otras dos ecuaciones de (66). Como los vértices 0 y $n+1$ del camino representan el mismo vértice en el ciclo, impondremos que $u(n+1)=u(0)$ y denotaremos a la extensión también por u.

Si $u\in\mathcal{C}(\hat{\mathbf{I}})$, entonces satisface que $\mathcal{L}_{\hat{q}}^{\hat{\gamma}}(u)=f$ en $\hat{\mathbf{I}}$ sii satisface $\mathcal{L}_q^{\gamma}(u)=f$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}\setminus\{n\}$. Por otra parte, como $u(0)=u(n+1)$, la última identidad de (66) es equivalente a $\mathcal{L}_q^{\gamma}(u)(n)=f(n)$. Si consideramos ahora las condiciones de contorno en el camino

$$\mathfrak{c}_1(u)=b(0)u(0)-a(0)u(1)-c(n)u(n) \quad \text{y} \quad \mathfrak{c}_2(u)=u(0)-u(n+1),$$

entonces el par $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ es de tipo periódico de primera especie y la ecuación de Poisson en el ciclo es equivalente al problema de contorno en el camino

$$\mathcal{L}_q^{\gamma}(u)=f \ \text{ en } \overset{\circ}{\mathbf{I}},\quad \mathfrak{c}_1(u)=f(0),\quad \mathfrak{c}_2(u)=f(n+1),$$

donde $f(n+1)=0$. Observar que, en este caso las condiciones periódicas de primera especie están determinadas por la matriz

$$\mathsf{C}=\begin{bmatrix} b(0) & -a(0) & -c(n) & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

La aplicación de la Proposición 5.16 conduce al siguiente resultado sobre ecuaciones de Poisson en el ciclo, donde mantenemos las notaciones de la sección precedente.

PROPOSICIÓN 6.4. *El operador de Schrödinger con conductancia $\hat{\gamma}$ y potencial $\hat{q}$ en el ciclo, $\mathcal{L}_{\hat{q}}^{\hat{\gamma}}$, es invertible sii $w[\phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c},\psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}](0)\neq 0$ y, entonces, para cada $f\in\mathcal{C}(\hat{\mathbf{I}})$,*

$$(\mathcal{L}_{\hat{q}}^{\hat{\gamma}})^{-1}(f)(k)=\frac{1}{a(0)w[\phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c},\psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}](0)}\int_{\hat{\mathbf{I}}}R(k,s)\rho_\gamma(s)f(s)ds,\qquad k\in\mathbf{I},$$

donde

$$\begin{aligned}R(k,s) &= \phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{mín}\{k,s\})\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\text{máx}\{k,s\})\\ &+ \frac{a(n)\rho_\gamma(n)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\Big[\big(b(0)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)-a(0)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)\big)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]\\ &- \frac{a(n)\rho_\gamma(n)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)}\Big[c(n)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)+\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big],\end{aligned}$$

para cada $k=0,\dots,n$.

Demostración. Basta tener en cuenta que en este caso,

$$\begin{aligned} g_{11} &= b(0)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)-a(0)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1), & g_{12} &= -c(n)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n),\\ g_{21} &= \phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0), & g_{22} &= -\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1).\end{aligned}$$

□

7. Caracterización de los núcleos resolventes

Finalizaremos el capítulo mostrando que el núcleo resolvente caracteriza completamente el problema de contorno, de forma análoga a como en la Sección 7 del primer capítulo mostramos que la función de Green caracteriza la ecuación en diferencias; es decir, el operador $\mathcal{L}_q^\gamma$, tal como fue establecido en el Teorema 7.2 de ese mismo capítulo.

Supondremos que $R\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función dada y nos preocuparemos de determinar bajo qué condiciones existe un problema de contorno $(\mathcal{L}_q^\gamma,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$, donde $(\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$ tal que R es su núcleo resolvente. De hecho, nos propondremos determinar las funciones $a,c\in\mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, $b\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$ y una matriz $\mathsf{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}\end{bmatrix}$ tal que $\operatorname{rg}\mathsf{C}=2$, de manera que $R=R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$, lo que implica que $R(\cdot,s)$, $s=1,\dots,n$ describe el núcleo de Green $G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ del problema, mientras que $R(\cdot,s)$, $s=0,n+1$ es el correspondiente núcleo de Poisson, $P^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(\cdot,s)$. En realidad, tenemos que determinar sólo los valores de las funciones a,c y b que realmente están involucrados en la ecuación en diferencias; esto es, en la ecuación de Schrödinger en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$, que no son otros que $a(k)$, $k=1,\dots,n$, $c(k)$, $k=0,\dots,n-1$ y $b(k)$, $k=1,\dots,n$. Recuérdese que también asumiremos que $c(n+1)=a(n)$ y que $c(n)=a(n+1)$, aunque este último valor no necesitaremos determinarlo explícitamente.

Consideremos pues $R\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ una función y supondremos que es el núcleo resolvente del problema de contorno regular $(\mathcal{L}_q^\gamma,\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2)$. Por simplicidad en la notación, definamos $u=R(\cdot,0)$ y $v=R(\cdot,n+1)$. Entonces, como $W[u,v]=1$ resulta que $\{u,v\}$ es una base de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$; es decir, su wronskiano $w[u,v]$ es no nulo en $\mathbf{I}$.

Por tanto, aplicando la Proposición 6.3 del Capítulo 1, tenemos que

$$\frac{b(k)}{a(k)}=\frac{\big[u(k-1)v(k+1)-u(k+1)v(k-1)\big]}{w[u,v](k-1)}\quad\text{y}\quad\frac{c(k-1)}{a(k)}=\frac{w[u,v](k)}{w[u,v](k-1)},$$

para cada $k=1,\dots,n$. Por otra parte, para cada $s=1,\dots,n$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{a(s)}&=\frac{b(s)}{a(s)}R(s,s)-\frac{c(s-1)}{a(s)}R(s-1,s)-R(s+1,s)\\ &=\frac{\big[u(s-1)v(s+1)-u(s+1)v(s-1)\big]R(s,s)}{w[u,v](s-1)}-\frac{w[u,v](s)R(s-1,s)}{w[u,v](s-1)}-R(s+1,s),\end{aligned}$$

lo que implica que necesariamente

$$R(s+1,s) \neq \frac{\big[u(s-1)v(s+1)-u(s+1)v(s-1)\big]}{w[u,v](s-1)}\, R(s,s) - \frac{w[u,v](s)}{w[u,v](s-1)}\, R(s-1,s),$$

para cada $s=1,\dots,n$ y, por tanto, que

$$a(s) = \frac{w[u,v](s-1)}{\big[u(s-1)v(s+1)-u(s+1)v(s-1)\big]R(s,s) - w[u,v](s)R(s-1,s) - w[u,v](s-1)R(s+1,s)}$$

para cada $s=1,\dots,n$. En definitiva, las identidades anteriores permiten determinar de forma unívoca los valores $a(k), b(k)$, $k=1,\dots,n$ y $c(k)$, $k=0,\dots,n-1$.

A continuación identificaremos los coeficientes de la matriz C que determina las condiciones de contorno. Para ello, tendremos en cuenta las siguientes identidades en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_q^\gamma(\varepsilon_0) = -c(0)\varepsilon_1, && \mathcal{L}_q^\gamma(\varepsilon_1) = b(1)\varepsilon_1 - c(1)\varepsilon_2,\\ &\mathcal{L}_q^\gamma(\varepsilon_n) = -a(n-1)\varepsilon_{n-1} + b(n)\varepsilon_n, && \mathcal{L}_q^\gamma(\varepsilon_{n+1}) = -a(n)\varepsilon_n. \end{aligned} \tag{67}$$

que motivan la consideración de las funciones $z_j \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, $j=1,2,3,4$, definidas como

$$\begin{aligned} &z_1 = c(0)R(\cdot,1) + \varepsilon_0, && z_2 = c(1)R(\cdot,2) - b(1)R(\cdot,1) + \varepsilon_1,\\ &z_3 = a(n-1)R(\cdot,n-1) - b(n)R(\cdot,n) + \varepsilon_n, && z_4 = a(n)R(\cdot,n) + \varepsilon_{n+1}, \end{aligned}$$

que claramente satisfacen que $\mathcal{L}_q^\gamma(z_j)=0$ en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ para $j=1,2,3,4$. Como además,

$$\begin{aligned} &\mathfrak{c}_1(z_1) = c_{11}, \quad \mathfrak{c}_2(z_1) = c_{21}, \quad \mathfrak{c}_1(z_2) = c_{12}, \quad \mathfrak{c}_2(z_2) = c_{22},\\ &\mathfrak{c}_1(z_3) = c_{13}, \quad \mathfrak{c}_2(z_3) = c_{23}, \quad \mathfrak{c}_1(z_4) = c_{14}, \quad \mathfrak{c}_2(z_4) = c_{24}, \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} &z_1 = c_{11}u + c_{21}v, && z_2 = c_{12}u + c_{22}v,\\ &z_3 = c_{13}u + c_{23}v, && z_4 = c_{14}u + c_{24}v. \end{aligned}$$

Considerando ahora los valores $z_j(n)$ y $z_j(n+1)$, $j=1,2$ y los valores $z_j(0)$, $z_j(1)$, $j=3,4$, obtenemos las identidades

$$\begin{bmatrix} u(n) & v(n)\\ u(n+1) & v(n+1)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1j}\\ c_{2j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_j(n)\\ z_j(n+1)\end{bmatrix}, \qquad j=1,2,$$

$$\begin{bmatrix} u(0) & v(0)\\ u(1) & v(1)\end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1j}\\ c_{2j}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_j(0)\\ z_j(1)\end{bmatrix}, \qquad j=3,4,$$

que implican que

$$\begin{bmatrix} c_{1j}\\ c_{2j}\end{bmatrix} = \frac{1}{w[u,v](n)} \begin{bmatrix} v(n+1)z_j(n) - v(n)z_j(n+1)\\ u(n)z_j(n+1) - u(n+1)z_j(n)\end{bmatrix}, \qquad j=1,2,$$

$$\begin{bmatrix} c_{1j}\\ c_{2j}\end{bmatrix} = \frac{1}{w[u,v](0)} \begin{bmatrix} v(1)z_j(0) - v(0)z_j(1)\\ u(0)z_j(1) - u(1)z_j(0)\end{bmatrix}, \qquad j=3,4.$$

Resulta entonces que los coeficientes de las condiciones de contorno están determinados por las siguientes identidades:

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{c(0)\Big[v(n+1)R(n,1) - v(n)R(n+1,1)\Big]}{w[u,v](n)},\\
c_{21} &= \frac{c(0)\Big[u(n)R(n+1,1) - u(n+1)R(n,1)\Big]}{w[u,v](n)},\\
c_{12} &= \frac{\Big[v(n+1)\big(c(1)R(n,2) - b(1)R(n,1)\big) - v(n)\big(c(1)R(n+1,2) - b(1)R(n+1,1)\big)\Big]}{w[u,v](n)},\\
c_{22} &= \frac{\Big[u(n)\big(c(1)R(n+1,2) - b(1)R(n+1,1)\big) - u(n+1)\big(c(1)R(n,2) - b(1)R(n,1)\big)\Big]}{w[u,v](n)},\\
c_{13} &= \frac{\Big[v(1)\big(a(n-1)R(0,n-1) - b(n)R(0,n)\big) - v(0)\big(a(n-1)R(1,n-1) - b(n)R(1,n)\big)\Big]}{w[u,v](0)},\\
c_{23} &= \frac{\Big[u(0)\big(a(n-1)R(1,n-1) - b(n)R(1,n)\big) - u(1)\big(a(n-1)R(0,n-1) - b(n)R(0,n)\big)\Big]}{w[u,v](0)},\\
c_{14} &= \frac{a(n)}{w[u,v](0)}\Big[v(1)R(0,n) - v(0)R(1,n)\Big],\\
c_{24} &= \frac{a(n)}{w[u,v](0)}\Big[u(0)R(1,n) - u(1)R(0,n)\Big].
\end{aligned}
$$

En resumen, hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 7.1. *Sea* $R\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *y consideremos* $F\colon \mathring{\mathbf{I}} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$
\begin{aligned}
F(s) = {} & \big[R(s-1,0)R(s+1,n+1) - R(s+1,0)R(s-1,n+1)\big]R(s,s)\\
& - \big[R(s,0)R(s+1,n+1) - R(s+1,0)R(s,n+1)\big]R(s-1,s)\\
& - \big[R(s-1,0)R(s,n+1) - R(s,0)R(s-1,n+1)\big]R(s+1,s).
\end{aligned}
$$

Si R *es un núcleo resolvente de un problema de contorno* $(\mathcal{L}^\gamma, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$*, debe satisfacerse que*

$$R(s,0)R(s+1,n+1) \neq R(s+1,0)R(s,n+1) \quad y \quad F(s) \neq 0, \quad para\ cada \quad s = 0,\dots,n$$

y, entonces, los coeficientes a, b y c del operador $\mathcal{L}_q^\gamma$ están determinados por las identidades

$$
\begin{aligned}
a(s) &= \frac{\big[R(s-1,0)R(s,n+1) - R(s,0)R(s-1,n+1)\big]}{F(s)},\\
b(s) &= \frac{\big[R(s-1,0)R(s+1,n+1) - R(s+1,0)R(s-1,n+1)\big]}{F(s)},\\
c(s-1) &= \frac{\big[R(s,0)R(s+1,n+1) - R(s+1,0)R(s,n+1)\big]}{F(s)},
\end{aligned}
$$

para cada $s = 1, \ldots, n$, mientras que los coeficientes de las condiciones de contorno están determinados por las relaciones

$$
\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{c(0)\Big[R(n+1,n+1)R(n,1) - R(n,n+1)R(n+1,1)\Big]}{R(n,0)R(n+1,n+1) - R(n+1,0)R(n,n+1)},\\
c_{21} &= \frac{c(0)\Big[R(n,0)R(n+1,1) - R(n+1,0)R(n,1)\Big]}{R(n,0)R(n+1,n+1) - R(n+1,0)R(n,n+1)},\\
c_{12} &= \frac{\Big[R(n+1,n+1)\big(c(1)R(n,2) - b(1)R(n,1)\big) - R(n,n+1)\big(c(1)R(n+1,2) - b(1)R(n+1,1)\big)\Big]}{R(n,0)R(n+1,n+1) - R(n+1,0)R(n,n+1)},\\
c_{22} &= \frac{\Big[R(n,0)\big(c(1)R(n+1,2) - b(1)R(n+1,1)\big) - R(n+1,0)\big(c(1)R(n,2) - b(1)R(n,1)\big)\Big]}{R(n,0)R(n+1,n+1) - R(n+1,0)R(n,n+1)},\\
c_{13} &= \frac{\Big[R(1,n+1)\big(a(n-1)R(0,n-1) - b(n)R(0,n)\big) - R(0,n+1)\big(a(n-1)R(1,n-1) - b(n)R(1,n)\big)\Big]}{R(0,0)R(1,n+1) - R(1,0)R(0,n+1)},\\
c_{23} &= \frac{\Big[R(0,0)\big(a(n-1)R(1,n-1) - b(n)R(1,n)\big) - R(1,0)\big(a(n-1)R(0,n-1) - b(n)R(0,n)\big)\Big]}{R(0,0)R(1,n+1) - R(1,0)R(0,n+1)},\\
c_{14} &= \frac{a(n\Big[R(1,n+1)R(0,n) - R(0,n+1)R(1,n)\Big]}{R(0,0)R(1,n+1) - R(1,0)R(0,n+1)},\\
c_{24} &= \frac{a(n)\Big[R(0,0)R(1,n) - R(1,0)R(0,n)\Big]}{R(0,0)R(1,n+1) - R(1,0)R(0,n+1)}.
\end{aligned}
$$

Además, con las notaciones previas al Teorema anterior, el Corolario 4.20 se reformula como

$$
\begin{aligned}
R(k,s) = &-\frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)w[u,v](0)}\, v(\text{mín}\{k,s\})u(\text{máx}\{k,s\})\\
&+ \frac{\rho_\gamma(s)}{a(0)w[u,v](0)}\, \Big[\hat{g}_{11}u(k)u(s) + \hat{g}_{22}v(k)v(s) + \hat{g}_{12}u(k)v(s) + \hat{g}_{21}v(k)u(s)\Big],
\end{aligned}
$$

para cada $s = 1, \dots, n$ y cada $k = 0, \dots, n+1$, donde

$$\hat{g}_{11} = c_{11}v(0) + c_{12}v(1), \quad \hat{g}_{12} = c_{13}u(n) + c_{14}u(n+1),$$
$$\hat{g}_{21} = c_{21}v(0) + c_{22}v(1), \quad \hat{g}_{22} = c_{23}u(n) + c_{24}u(n+1),$$

lo que significa que R debe satisfacer estas relaciones para ser núcleo resolvente del problema de contorno cuyos coeficientes están determinados en el Teorema. Obsevar que el valor de $a(0)$ está indeterminado, puesto que el cociente $\dfrac{\rho_\gamma(s)}{a(0)w[u,v](0)}$ no depende de $a(0)$ ya que $\dfrac{\rho(s)}{a(0)} = \dfrac{1}{c(0)} \displaystyle\prod_{j=1}^{s-1} \dfrac{a(j)}{c(j)}$, para cada $s = 1, \dots, n$.

A la vista del Teorema 7.1, podemos preguntarnos si es posible caracterizar a través del núcleo resolvente si el problema de contorno es de algún tipo determinado. Por ejemplo, podemos preguntarnos si el problema del que R es su núcleo es unilateral y la respuesta es sumamente sencilla.

PROPOSICIÓN 7.2. *Si $R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es el núcleo resolvente del problema de contorno regular $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$, entonces el problema es unilateral inicial sii*

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0, n-1) = R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1, n-1) = R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0, n) = R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1, n) = 0$$

y unilateral final sii

$$R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n, 1) = R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1, 1) = R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n, 2) = R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1, 2) = 0.$$

Demostración. El problema es unilateral inicial sii $c_{ij} = 0$, $i = 1, 2$, $j = 3, 4$. Aplicando el Teorema 7.1 o, equivalentemente, considerando los sistemas que originaron las expresiones de los coeficientes, estas condiciones se satisfacen sii $z_3(0) = z_3(1) = z_4(0) = z_4(1) = 0$; es decir, sii

$$\begin{aligned} a(n-1)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0, n-1) - b(n)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0, n) &= a(n-1)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1, n-1) - b(n)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1, n) \\ &= a(n)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0, n) = a(n)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1, n) = 0, \end{aligned}$$

que implica el resultado. La demostración para el caso de las condiciones finales es análoga. □

Aplicar la estrategia anterior para analizar si el problema es separado; es decir, de Sturm–Liouville, conduce a expresiones complicadas, pues a diferencia de los casos anteriores esas características no conducen a la anulación de ninguna de las funciones z_j, $j = 1, 2, 3, 4$. De hecho, como veremos a continuación, la caracterización de los problemas de Sturm–Liouville desde el comportamiento del núcleo resolvente involucra una expresión complicada, cuyo origen puede situarse en los trabajos pioneros de W. W. Barrett, ver por ejemplo [**7**], sobre la caracterización de matrices inversas de matrices de Jacobi, a cuyo estudio dedicaremos el último capítulo de este trabajo.

DEFINICIÓN 7.3. *Si el problema de contorno $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es regular y $R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ es su núcleo resolvente, denominamos* función triangular *a $T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\colon \mathbf{I} \times \mathbf{I} \times \mathbf{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como*

$$T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k, m, s) = R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k, s)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m, m) - R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k, m)R^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m, s),$$

si $0 \le \min\{k, s\} \le m \le \max\{k, s\} \le n+1$ y como $T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k, m, s) = 0$, en otro caso.

PROPOSICIÓN 7.4. *Si el problema de contorno $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es regular, $\{\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\}$ es su base fundamental y ρ_γ la función de acompañamiento del operador $\mathcal{L}^\gamma_q$, entonces la función triangular del* *problema de contorno está dada por*

$$T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,s) = K^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,s)\Big(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big)$$
$$\times\begin{cases} \Big(g_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) + g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big), & s = 0,\\ \Big(\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big), & s = 1\dots,n,\\ \Big(g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) + g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big), & s = n+1,\end{cases}$$

donde $K^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\colon \mathbf{I}\times\mathbf{I}\times\mathbf{I}\longrightarrow\mathbb{R}$ *está definida como*

$$K^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,s) = \frac{-\rho_\gamma(m)\rho_\gamma(s)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)^2 w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)^2}$$
$$\times\begin{cases} -a(0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0), & \textit{si}\ \ 0 = s\le m\le k\le n+1,\\ d_{12}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n), & \textit{si}\ \ 1\le s\le m\le k\le n+1,\\ d_{34}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n), & \textit{si}\ \ 0\le k\le m\le s\le n,\\ a(0)\rho_\gamma(n+1)^{-1}w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0), & \textit{si}\ \ 0\le k\le m\le s = n+1,\\ 0, & \textit{en otro caso}.\end{cases}$$

Demostración. Como la identidad es inmediata cuando o bien $m = \min\{k,s\}$ o bien $m = \max\{k,s\}$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0\le\min\{k,s\} < m < \max\{k,s\}\le n+1$.

Si $s = 0$ y $0 < m < k\le n+1$, entonces

$$\begin{aligned} T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,0) &= -\frac{a(0)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m,m) - G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big]\\ &= K^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,0)\Big(g_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) + g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big)\\ &\times\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big].\end{aligned}$$

Si $s = n+1$, entonces $0\le k < m < n+1$ y, además,

$$\begin{aligned} T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,n+1) &= \frac{a(0)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\Big[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m,m) - G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big]\\ &= K^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,n+1)\Big(g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) + g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big)\\ &\times\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big].\end{aligned}$$

Si $k\le s\le n$, el núcleo de Green se expresa como

$$G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{-\rho_\gamma(s)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\Big[H(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) + J(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big],$$

donde

$$H(k) = g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - g_{12}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\quad\text{y}\quad J(k) = \Big[g_{21} - D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\Big]\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)$$

y, por tanto, si $k \le m \le s \le n$,

$$T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,s) = \frac{\rho_\gamma(m)\rho_\gamma(s)\Big[J(k)H(m) - J(m)H(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]$$
$$= \frac{\rho_\gamma(m)\rho_\gamma(s)\Big(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} + g_{12}D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\Big)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}$$
$$\times\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big]\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big],$$

y se obtiene la expresión para la función triangular teniendo en cuenta las identidades del Lema 4.17.

Por otra parte, si $1 \le s \le k$, entonces el núcleo de Green se expresa como

$$G^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,s) = \frac{-\rho_\gamma(s)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\Big[\widehat{H}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s) + \widehat{J}(k)\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big],$$

donde

$$\widehat{H}(k) = g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - \Big[D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2} + g_{12}\Big]\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) \quad \text{y} \quad \widehat{J}(k) = g_{21}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)$$

y, por tanto,

$$T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,s) = \frac{\rho_\gamma(m)\rho_\gamma(s)\Big[\widehat{J}(k)\widehat{H}(m) - \widehat{J}(m)\widehat{H}(k)\Big]}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]$$
$$= \frac{\rho_\gamma(m)\rho_\gamma(s)\Big(g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} - g_{21}D^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}\Big)}{w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0)w[\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2},\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](n)}$$
$$\times\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\Big]\Big[\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) - \psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m)\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(s)\Big]$$

y, nuevamente, se obtiene la expresión para la función triangular. □

COROLARIO 7.5. *Si el problema de contorno $(\mathcal{L}^\gamma_q, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2)$ es regular, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,s) = 0$*, para cada* $k,m,s = 0,\dots,n+1$.

(ii) $T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,0) = T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,n+1) = 0$*, para cada* $k,m = 0,\dots,n+1$.

(iii) $T^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k,m,s) = 0$*, para cada* $s = 1,\dots,n$ *y cada* $k,m = 0,\dots,n+1$.

(iv) *Las condiciones de contorno son de Sturm–Liouville.*

Demostración. El problema es de Sturm–Liouville sii $g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0$, de manera que (iv) implica (i) que, a su vez, implica tanto (ii) como (iii).

Por otra parte, si se satisface (iii), entonces considerando o bien $k = s-2$ y $m = s-1$ o bien $k = s+2$ y $m = s+1$, resulta que $d_{12} = d_{34} = 0$, lo que implica que el problema es de Sturm–Liouville. Finalmente, si se satisface (ii), entonces tomando o bien $k = m-1$ o bien $k = m+1$, resulta que necesariamente

$$g_{21}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) + g_{22}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) = g_{11}\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m) + g_{12}\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(m),$$

para cada $m = 1,\dots,n$. La independencia lineal de $\phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ y $\psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ concluye que, necesariamente, $g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0$; es decir, el problema es de Sturm–Liouville. □

Capítulo 6

Aplicación al estudio de las matrices de Jacobi generalizadas

1. Introducción

El objetivo del último capítulo de este trabajo está centrado en el estudio de un tipo específico de matrices que denominaremos *matrices de Jacobi generalizadas*. Bajo esta denominación se incluyen las matrices tridiagonales, tradicionalmente denominadas *matrices de Jacobi*, y también las *matrices de Jacobi periódicas*, ver [**20**]. Este tipo de matrices, que esencialmente son matrices tridiagonales (y simétricas), aparecen con frecuencia tanto en el ámbito de la Matemática general como en el de la Matemática Aplicada, ver [**28, 44**].

En todo el capítulo, para cada $m \in \mathbb{N}^*$, si $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^m$, denotaremos sus componentes por v_j, $j = 1, \dots, m$, de manera que $\mathsf{v} = (v_1, \dots, v_m)^\top$. Como es habitual, denotaremos por $\mathsf{1}$ al vector cuyas componentes son todas iguales a 1 y seguiremos denotando por $\mathsf{0}$ al vector cuyas componentes son todas iguales a 0. También $\mathsf{e} \in \mathbb{R}^m$ denota el primer vector de la base estándar de $\mathbb{R}^m$; es decir, $\mathsf{e} = (1, 0, \dots, 0)^\top$. El conjunto de matrices de orden m con coeficientes reales se denota por $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$. Finalmente $\mathsf{I}_m, \mathsf{0}_m$ y J_m denotarán la matriz identidad de orden m, la matriz cuyas componentes son todas nulas y la matriz cuyas componentes son todas iguales a 1, respectivamente.

DEFINICIÓN 1.1. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, denominamos* matriz de Jacobi generalizada de orden $n+2$ *de coeficientes $\{a_k\}_{k=1}^n$, $\{b_k\}_{k=1}^n$, $\{c_k\}_{k=0}^{n-1} \subset \mathbb{R}$, $c_{1j}, c_{2j} \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3, 4$, a la matriz $\mathsf{M} \in \mathcal{M}_{n+2}(\mathbb{R})$ cuya estructura es la siguiente:*

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{13} & c_{14} \\ -c_0 & b_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & b_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & b_n & -a_n \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}.$$

Cuando $c_{13} = c_{14} = c_{21} = c_{22} = 0$, la matriz es tridiagonal y se denomina matriz de Jacobi, *mientras que si $c_{13} = c_{22} = 0$ y $c_{14} \cdot c_{21} \neq 0$, se denomina* matriz de Jacobi periódica.

Como en [**44**], hemos escogido presentar las matrices de Jacobi con signo negativo en los coeficientes no diagonales. Esto es un mero acuerdo de conveniencia, motivado por la relación de las matrices de Jacobi y los operadores de Schrödinger en un camino.

El problema fundamental que estudiaremos aquí es el de determinar las condiciones bajo las cuales la matriz M es invertible y, entonces, nos proponemos determinar también la expresión de M^{-1}. Cuando M sea invertible, denotaremos por $\mathsf{R} = (r_{ks})$ a su inversa.

Observamos que antes de abordar el problema planteado, debemos introducir algunas hipótesis sobre los coeficientes de la matriz para evitar situaciones o bien de respuesta trivial, o bien reducibles a un problema de menor orden. Para comenzar, exigiremos que $\operatorname{rg} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} = 2$, ya que en otro caso M no puede ser invertible. Exigiremos también que $a_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n$ y que $c_k \neq 0$, $k = 0, \dots, n-1$, ya que en otro caso M es reducible y el problema de invertir M se reduce a la invertibilidad de una matriz de menor orden.

La matriz M es invertible sii para cada $\mathsf{f} \in \mathbb{R}^{n+2}$ existe $\mathsf{u} \in \mathbb{R}^{n+2}$ tal que

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \cdots & c_{13} & c_{14} \\ -c_0 & b_1 & -a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & -a_n \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \\ f_{n+1} \end{bmatrix}; \tag{68}$$

es decir, tal que

$$\begin{cases} c_{11}u_0 + c_{12}u_1 + c_{13}u_n + c_{14}u_{n+1} = f_0, \\ \qquad -a_k u_{k+1} + b_k u_k - c_{k-1}u_{k-1} = f_k, \qquad k = 1, \dots, n. \\ c_{21}u_0 + c_{22}u_1 + c_{23}u_n + c_{24}u_{n+1} = f_{n+1}. \end{cases} \tag{69}$$

Podemos reconocer en las identidades anteriores la estructura de un problema de contorno asociado a una ecuación en diferencias lineal de segundo orden o, de manera equivalente, a un operador de Schrödinger sobre el camino de vértices $\mathbf{I} = \{0, \dots, n+1\}$. Concretamente, consideramos el camino de vértices $\mathbf{I} = \{0, \dots, n+1\}$ y las funciones $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ definidas como $a(k) = a_k$, $k = 1, \dots, n$ y como $c(k) = c_k$, $k = 0, \dots, n-1$ y tales que $c(n+1) = a(n)$ y $c(n) = a(n+1)$, y la conductancia γ determinada por ellas. Consideremos también el potencial $q \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ definido como $q(k) = b_k - a_k - c_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, y las funciones $u, f \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ dadas por $f(k) = f_k$ y $u(k) = u_k$, $k = 0, \dots, n+1$. Finalmente, consideremos las formas lineales de contorno $\mathfrak{c}_1$ y $\mathfrak{c}_2$ determinadas por la matriz $\mathsf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}$. Nótese que los datos del problema no determinan ninguno de los valores $a(0), c(n), q(0)$ y $q(n+1)$. Recordemos que si escogemos $a(0), c(n) \neq 0$, la función de acompañamiento está determinada por

$$\rho_{a,c}(k) = \prod_{s=0}^{k-1} \frac{a(s)}{c(s)}, \qquad s = 0, \dots, n+1.$$

Con estas notaciones las ecuaciones (69) coinciden con el problema de contorno

$$\mathcal{L}_q^\gamma(u) = f \;\text{ en }\; \overset{\circ}{\mathbf{I}}, \;\; \mathfrak{c}_1(u) = f(0) \;\text{ y }\; \mathfrak{c}_2(u) = f(n+1), \tag{70}$$

de manera que las condiciones para la invertibilidad de M son exactamente las condiciones bajo las cuales el correspondiente problema de contorno es regular, y la determinación de la inversa se reduce, por tanto, al cálculo del núcleo resolvente. Implícita o explícitamente esta es la estrategia seguida para abordar este problema, ver por ejemplo [**17, 27, 28, 31, 35, 40, 43, 51, 52**], especialmente cuando se consideran matrices tridiagonales. Observar que en este caso el problema de contorno correspondiente es de Sturm-Liouville, y en casi todos los trabajos puede reconocerse la técnica de reducir el problema al cálculo de determinar soluciones para problemas de valor inicial o final, por ejemplo [**51**] y [**27, 28**] hacen mención explícita a este tipo de problemas. En este sentido, quizá la excepción más significativa sea el trabajo de R.K. Mallik, ver [**40**], en el que se aborda el problema de contorno directamente dando lugar a una estructura excesivamente intrincada. En todo caso, el tratamiento de la situación general aquí planteada no parece haber merecido la atención de los investigadores y, por tanto, podríamos considerar que el material relativo a esta situación es nuevo. Como comentamos en el capítulo anterior, las técnicas de resolubilidad que reducen la determinación del núcleo resolvente a la obtención de determinadas soluciones de problemas de valor inicial o final es, a nuestro juicio, una novedad y puede también exportarse al tratamiento de los problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y de segundo orden.

El contenido de este capítulo se reduce a incorporar la aplicación de la teoría de problemas de contorno en un camino desarrollada en el capítulo anterior a clases concretas de matrices. Por tanto, se trata de un material más descriptivo que el de los capítulos precedentes. Comenzaremos con el análisis de las que denominamos matrices de Jacobi generalizadas. Concluiremos el capítulo con el tratamiento de algunas matrices circulantes, caso que se aparta, al menos en su presentación inicial, de la tipología de matrices mencionadas anteriormente, aunque como veremos su análisis se reduce al caso de matrices de Jacobi asociadas a ecuaciones en diferencias con coeficientes constantes, de manera que, finalmente, representará el caso más simple de aplicación de nuestra metodología.

2. Matrices de Jacobi

Iniciamos nuestro análisis de las matrices de Jacobi generalizadas por el caso de las matrices que habitualmente son denominadas matrices de Jacobi; es decir, las matrices tridiagonales. Consideremos pues la matriz de Jacobi

$$\mathsf{M} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{13} & c_{14} \\ -c_0 & b_1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & b_2 & -a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n-1} & b_n & -a_n \\ c_{21} & c_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{23} & c_{24} \end{bmatrix}. \tag{71}$$

Si o bien $c_{12} = 0$ o bien $c_{23} = 0$, entonces M es claramente reducible. De hecho, M es irreducible sii $c_{12} \cdot c_{23} \neq 0$. Nos ocuparemos en primer lugar de este caso, por lo que asumiremos $c_{12} \cdot c_{23} \neq 0$. En estas circunstancias, definimos $a(0) = -c_{12}$ y $c(n) = -c_{23}$, $b(0) = c_{11}$ y $b(n+1) = c_{24}$, con lo que si denotamos M por $\mathsf{J}(a,b,c)$, resulta que

$$\mathsf{J}(a,b,c) = \begin{bmatrix} b(0) & -a(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c(0) & b(1) & -a(1) & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c(1) & b(2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b(n) & -a(n) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c(n) & b(n+1) \end{bmatrix} \tag{72}$$

y la matriz no es otra que la asociada al operador de Schrödinger en el camino, de manera que $\mathsf{J}(a,b,c)$ es invertible sii $\mathcal{L}_q^\gamma$ es invertible. En otras palabras, el problema de contorno correspondiente no es más que la ecuación de Poisson en el camino, que fue analizada en la Sección 6 del Capítulo 5. No obstante, antes de aplicar los resultados allí obtenidos, haremos un breve repaso a los resultados conocidos en este ámbito, que es probablemente el de mayor relevancia y el más estudiado en la literatura. Comenzaremos con algunas definiciones útiles.

DEFINICIÓN 2.1. *Si* $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$, $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$, *donde* $a(n+1) = c(n)$ *y* $c(n+1) = a(n)$, *diremos que* $\mathsf{J}(a,b,c)$ tiene coeficientes constantes *si existen* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *tales que* $a(k) = \alpha$, $b(k) = \beta$, $k = 1, \dots, n$ *y* $c(k) = \gamma$, $k = 0, \dots, n-1$, *donde* $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

El estudio de la invertibilidad de las matrices de Jacobi simétricas con coeficientes constantes fue realizado en [**10**], con las misma técnicas presentadas aquí.

DEFINICIÓN 2.2. *Diremos que* $\mathsf{D}=(d_{ij})\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *es una* matriz de tipo D *si existe un vector* $\mathsf{v}\in\mathbb{R}^m$ *tal que*

$$d_{ij}=v_{\text{mín}\{i,j\}}=\begin{cases} v_i, & \text{si } i\le j,\\ v_j, & \text{si } i\ge j.\end{cases}$$

Diremos que $\mathsf{D}=(d_{ij})\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *es una* matriz de tipo D reverso *si existe* $\mathsf{w}\in\mathbb{R}^m$ *tal que*

$$d_{ij}=w_{\text{máx}\{i,j\}}=\begin{cases} w_j, & \text{si } i\le j,\\ w_i, & \text{si } i\ge j.\end{cases}$$

Diremos que $\mathsf{R}=(r_{ij})\in\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *es una* matriz de Green *si es el* producto de Hadamard*, es decir, componente a componente, de una matriz de tipo D y otra de tipo D reverso. Equivalentemente, existen vectores* $\mathsf{v},\mathsf{w}\in\mathbb{R}^m$ *tales que*

$$r_{ij}=v_{\text{mín}\{i,j\}}w_{\text{máx}\{i,j\}}=\begin{cases} v_iw_j, & \text{si } i\le j,\\ v_jw_i, & \text{si } i\ge j.\end{cases}$$

Las matrices de tipo D, de tipo D reverso y las de Green son simétricas. Además, como la matriz J_m es de tipo D y de tipo D reverso simultáneamente, toda matriz de tipo D y toda matriz de tipo D reverso son asimismo matrices de Green, ya que ambas se obtienen realizando el producto de Hadamar de ellas mismas por la matriz J_m. Observar también que si D es la matriz de tipo D, determinada por $\mathsf{v}\in\mathbb{R}^m$, $\widehat{\mathsf{D}}$ es la matriz de tipo D reverso determinada por $\mathsf{w}\in\mathbb{R}^m$, y $\mathsf{R}=\mathsf{D}\circ\widehat{\mathsf{D}}$ es la matriz de Green determinada por ambos vectores, entonces

$$\mathsf{D}=\begin{bmatrix} v_1 & v_1 & \cdots & v_1\\ v_1 & v_2 & \cdots & v_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_1 & v_2 & \cdots & v_m\end{bmatrix},\quad \widehat{\mathsf{D}}=\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m\\ w_2 & w_2 & \cdots & w_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ w_m & w_m & \cdots & w_m\end{bmatrix}\quad \text{y}\quad \mathsf{R}=\begin{bmatrix} v_1w_1 & v_1w_2 & \cdots & v_1w_m\\ v_1w_2 & v_2w_2 & \cdots & v_2w_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ v_1w_m & v_2w_m & \cdots & v_mw_m\end{bmatrix}.$$

En particular, para que D sea invertible es necesario que $v_1\neq 0$, para que $\widehat{\mathsf{D}}$ sea invertible es necesario que $w_m\neq 0$ y para que R sea invertible es necesario que $v_1w_m\neq 0$. Además, es claro que estas condiciones necesarias no son suficientes. De hecho, las condiciones para la invertibilidad de las matrices de tipo D y de tipo D reverso están dadas en el Lemma 2.3, que veremos un poco más adelante.

La matrices de tipo D fueron introducidas por T.L. Markham en 1972, ver [**41**], para el estudio del denominado *problema inverso de M–matrices*. De hecho, las matrices que hemos presentado son las que en [**43**] se denominan *matrices de tipo D y de tipo D reverso, débiles*, ya que Markham requería que los coeficientes del vector satisficieran que $v_m > v_{m-1}\cdots > v_1 > 0$. Como en este trabajo no estamos interesados en el problema inverso de M–matrices, hemos optado por simplificar la presentación y hemos eliminado el adjetivo débil de las definiciones.

Las matrices de Green aparecieron en los trabajos de F.R. Gantmacher y M.G. Krein, ver [**35**], pero con el nombre de *matrices apareadas*. De hecho, aparecen en la literatura sobre el tema con varias otras denominaciones, como *matrices factorizables*, ver [**6**], o *matrices semiseparables*, ver [**53**] y [**54**]. Este último trabajo contiene una valiosísima reseña histórica del problema que nos ocupa.

La denominación de matrices de Green se debe a S. Karlin, ver [**38**] y es la que, probablemente, se ha hecho más popular, y la que desde luego nosotros preferimos. Esta denominación, dista mucho de ser inocente: el aspecto de las componentes de R se asemeja enormemente al de las funciones de Green para los problemas de contorno de tipo Sturm–Liouville y, por tanto, autoadjuntos en un intervalo, ver [**23**].

La relación de las matrices de tipo D y de tipo D reverso con las matrices de Jacobi se expresa en el siguiente resultado. No deja de ser curioso que a pesar de su sencillez no aparece habitualmente en la literatura, [**17**] parece ser la única excepción, ni siquiera en el trabajo pionero de Markham.

LEMA 2.3. *Si* D *es la matriz de tipo* D *determinada por* $\mathsf{v} \in \mathbb{R}^m$*, respectivamente* $\widehat{\mathsf{D}}$ *es la matriz de tipo* D *reverso determinada por* $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^m$ *y definimos* $v_0 = w_{m+1} = 0$*, entonces* D *es invertible sii* $v_i \neq v_{i+1}$*,* $i = 0, \dots, m-1$*, respectivamente* $\widehat{\mathsf{D}}$ *es invertible sii* $w_i \neq w_{i+1}$*,* $i = 1, \dots, m$*. Además, si se verifican las hipótesis, entonces*

$$\mathsf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_3 + c_2 & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{m-1} + c_m & -c_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_m & -c_m \end{bmatrix}, \quad c_j = \frac{1}{v_j - v_{j-1}}, j = 1, \dots, m,$$

mientras que

$$\widehat{\mathsf{D}}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & -\hat{c}_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\hat{c}_1 & \hat{c}_1 + \hat{c}_2 & -\hat{c}_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{c}_2 & \hat{c}_2 + \hat{c}_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \hat{c}_{m-2} + \hat{c}_{m-1} & -\hat{c}_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\hat{c}_{m-1} & \hat{c}_{m-1} + \hat{c}_m \end{bmatrix}, \quad \hat{c}_j = \frac{1}{w_j - w_{j+1}}, j = 1, \dots, m,$$

Por tanto, las matrices de tipo D y de tipo D reverso e invertibles, son las inversas de matrices tridiagonales, más concretamente, inversas de las matrices asociadas a los operadores de Schrödinger con conductancia simétrica y potencial $q = v_1^{-1}\varepsilon_0$ y $q = w_m^{-1}\varepsilon_m$, respectivamente, en el camino con m vértices. El que esta propiedad sea también cierta para matrices de Green es uno de los resultados fundamentales en el área y, en cierta medida, ha sido inspirador de parte de este trabajo. El resultado que referimos a continuación puede encontrarse tanto el trabajo original de Gantmacher y Krein, [**35**] como en numerosísimas referencias bibliográficas, ver por ejemplo [**6, 7, 17, 26, 43, 44, 45**]

TEOREMA 2.4 (Gantmacher & Krein). *Si* $\mathsf{R} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *es la matriz de Green determinada por los vectores* $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathbb{R}^m$*, entonces*

$$\det \mathsf{R} = v_1 w_m \prod_{s=2}^{m} (v_s w_{s-1} - v_{s-1} w_s).$$

Además, si R *es una matriz simétrica, irreducible e invertible, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) R *es una matriz de Green.*
(ii) R^{-1} *es una matriz tridiagonal, simétrica e irreducible.*

Estos resultados ha sido extendidos al caso de las inversas de matrices tridiagonales no simétricas (e invertibles), ver por ejemplo [**7, 27, 28, 37**].

TEOREMA 2.5. ([**37**, Teorema 2]) *Si* $\mathsf{A} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *es una matriz irreducible, tridiagonal e invertible, existen* $\mathsf{u}, \mathsf{v}, \mathsf{w}, \mathsf{z} \in \mathbb{R}^m$ *tales que si* $\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{R} = (r_{ij})$*, entonces*

$$r_{ij} = \begin{cases} v_i z_j, & si\ i \leq j, \\ u_j w_i, & si\ i \geq j, \end{cases}$$

es decir,

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 & v_1 & \cdots & v_1 \\ u_1 & v_2 & v_2 & \cdots & v_2 \\ u_1 & u_2 & v_3 & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \\ w_2 & z_2 & z_3 & \cdots & z_m \\ w_3 & w_2 & z_3 & \cdots & z_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m & w_m & w_m & \cdots & z_m \end{bmatrix}.$$

En [**37**], el anterior resultado se deduce de un caso más general aplicado a *matrices de Hessenberg*, que son aquellas matrices que, o bien tienen todas sus componentes nulas por encima de la primera superdiagonal, o bien tienen todas sus componentes nulas por debajo de la primera subdiagonal. Sin embargo, en el caso de matrices tridiagonales puede hacerse más explícito, si se tiene en cuenta la siguiente particularidad de las matrices simétricas e irreducibles: *Existe una matriz diagonal e invertible,* $\mathsf{H} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$*, tal que* HA *es simétrica.*

Podemos aplicar el Teorema de Gantmacher & Krein a la matriz HA para obtener el siguiente resultado que precisa el anterior teorema, ya que muestra que en el caso tridiagonal existe $\mathsf{h} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\mathsf{u} = \mathsf{v} \circ \mathsf{h}$ y $\mathsf{z} = \mathsf{w} \circ \mathsf{h}$.

COROLARIO 2.6. ([**43**, Teorema 3.3]) *Si* $\mathsf{R} = (r_{ij}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *es una matriz irreducible e invertible, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *Existe una matriz diagonal e invertible* H *tal que* RH^{-1} *es una matriz de Green; es decir, existen* $\mathsf{v}, \mathsf{w}, \mathsf{h} \in \mathbb{R}^m$*, donde* $h_j \neq 0$*,* $j = 1, \ldots, m$*, tales que*

$$r_{ij} = h_j v_{\text{mín}\{i,j\}} w_{\text{máx}\{i,j\}} = \begin{cases} v_i w_j h_j, & si\ i \leq j, \\ v_j h_j w_i; & si\ i \geq j, \end{cases}$$

es decir,

$$\mathsf{R} = \begin{bmatrix} v_1 & v_1 & v_1 & \cdots & v_1 \\ h_1 v_1 & v_2 & v_2 & \cdots & v_2 \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & v_3 & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 & \cdots & v_m \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} h_1 w_1 & h_2 w_2 & h_3 w_3 & \cdots & h_n w_n \\ w_2 & h_2 w_2 & h_3 w_3 & \cdots & h_m w_m \\ w_3 & w_2 & h_3 w_3 & \cdots & h_m w_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m & w_m & w_m & \cdots & h_m w_m \end{bmatrix}.$$

(ii) R^{-1} *es una matriz tridiagonal irreducible.*

Además,

$$\det \mathsf{R} = h_1 v_1 w_m \prod_{s=2}^{m} h_s (v_s w_{s-1} - v_{s-1} w_s).$$

Demostración. Si $\mathsf{A} = \mathsf{R}^{-1}$ es tridiagonal y $\mathsf{H} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ es la matriz diagonal e invertible tal que HA es simétrica, entonces $\widehat{\mathsf{R}} = (\mathsf{HA})^{-1}$ es una matriz de Green simétrica y, por tanto, existen $\mathsf{v}, \mathsf{w} \in \mathbb{R}^m$

tales que

$$\hat{r}_{ij} = v_{\text{mín}\{i,j\}} w_{\text{máx}\{i,j\}} = \begin{cases} v_i w_j, & \text{si } i \le j, \\ v_j w_i, & \text{si } i \ge j. \end{cases}$$

Si denominamos h_i, $j = 1, \dots, m$ a las componentes diagonales de H, entonces como $\mathsf{R} = \mathsf{A}^{-1} = \widehat{\mathsf{R}}\mathsf{H}$, resulta que

$$r_{ij} = h_j \hat{r}_{ij} = h_j v_{\text{mín}\{i,j\}} w_{\text{máx}\{i,j\}} = \begin{cases} v_i w_j h_j, & \text{si } i \le j, \\ v_j h_j w_i, & \text{si } i \ge j, \end{cases}$$

y, además, $\det \mathsf{R} = \det \mathsf{H} \det \widehat{\mathsf{R}}$. □

Nótese que el anterior resultado es ligeramente diferente del que aparece en [**43**, Teorema 3.3], donde se usa que si A es simétrica, también existe $\widehat{\mathsf{H}}$ diagonal con entradas no nulas y tal que $\mathsf{A}\widehat{\mathsf{H}}$ es simétrica. Preferimos utilizar aquí la versión que hemos presentado, pues es la que encaja en nuestros desarrollos.

Si bien la descripción de la inversa de una matriz tridiagonal irreducible, simétrica o no, está bien estudiada, la caracterización de aquellas matrices que son inversas de matrices tridiagonales irreducibles parece haberse reducido esencialmente al caso simétrico, con la notable excepción de [**7**].

PROPOSICIÓN 2.7. ([**7**, Teorema 1]) *Si* $\mathsf{R} = (r_{ij}) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ *es invertible y satisface que* $\prod_{j=2}^{m-1} r_{jj} \neq 0$*, entonces* R^{-1} *es tridiagonal sii* R *satisface la* Propiedad Triangular*; es decir,*

$$r_{ij} r_{kk} = r_{ik} r_{kj}, \quad \textit{para cada } i, j = 1, \dots, m \textit{ y cada } \text{mín}\{i,j\} \le k \le \text{máx}\{i,j\}.$$

Además, si $k_{ij} = r_{ii} r_{jj} - r_{ij} r_{ji}$, $i, j = 1, \dots, m$*, entonces*

$$\det \mathsf{R} = \Big(\prod_{j=2}^{m-1} r_{jj} \Big)^{-1} \prod_{j=1}^{m-1} k_{jj+1},$$

lo que implica que $d_{jj+1} \neq 0$, $j = 1, \dots, m-1$*, y si* $\mathsf{R}^{-1} = \mathsf{A} = (a_{ij})$*, entonces*

$$a_{11} = \frac{r_{22}}{d_{12}}, \quad a_{jj} = \frac{r_{jj} k_{j-1j+1}}{k_{j-1j} k_{jj+1}}, \ \textit{si } 1 < j < m, \quad a_{ij} = \frac{-r_{ij}}{k_{ij}}, \ \textit{si } |i-j| = 1, \quad a_{mm} = \frac{r_{m-1m-1}}{k_{m-1m}}.$$

Observar que la propiedad triangular implica que los coeficientes de R están determinados por las tres diagonales principales de la matriz:

$$r_{ij} = \frac{r_{i,i+1} r_{i+1,i+2} \cdots r_{j-1j}}{r_{i+1i+1} r_{i+2i+2} \cdots r_{j-1,j-1}}, \ \text{ si } i < j \quad \text{y} \quad r_{ij} = \frac{r_{i,i-1} r_{i-1,i-2} \cdots r_{j+1j}}{r_{i-1i-1} r_{i-2i-2} \cdots r_{j+1,j+1}}, \ \text{ si } i > j$$

Las condiciones de invertibilidad de $\mathsf{J}(a, b, c)$ así como la expresión de su inversa $\mathsf{R} = (r_{ij})$ están descritas en la Proposición 5.6, en el Corolario 5.7 del Capítulo 5 o, de acuerdo a su interpretación como la matriz del operador de Schrödinger, en el Teorema 6.3 del mismo capítulo. Además, incluiremos la expresión de las soluciones de los problemas de valor inicial y de valor final demostradas en el Capítulo 4. Recordemos que las *funciones de Chebyshev* han sido definidas por las Identidades (49) como

$$P_{-1}(x,y)=0, \quad P_0(x,y)=1 \quad \text{y} \quad P_k(x,y)=\sum_{m=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}(-1)^m\sum_{\alpha\in\ell_k^m}x^{\bar\alpha}y^{\alpha}, \quad k\ge 1$$

para cada $x,y\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$.

Con la ayuda de las funciones de Chebyshev podemos determinar las funciones $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ y $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ que son esenciales para el análisis del problema planteado.

En todo el capítulo consideraremos las funciones $\Phi_{_\mathsf{J}},\Psi_{_\mathsf{J}}\in\mathcal{C}(\mathbf{I})$ definidas como

$$\begin{aligned}
&\Phi_{_\mathsf{J}}(0)=1,\\
&\Phi_{_\mathsf{J}}(k)=b(0)P_{k-1}(b,ac)-a(0)c(0)P_{k-2}(b_1,a_1c_1), && k=1\dots,n+1,\\
&\Psi_{_\mathsf{J}}(k)=a(n)c(n)P_{n-k-1}(b_k,a_kc_k)-b(n+1)P_{n-k}(b_k,a_kc_k), && k=0,\dots,n,\\
&\Psi_{_\mathsf{J}}(n+1)=-1,
\end{aligned}\tag{73}$$

y el valor

$$\begin{aligned}
D_{_\mathsf{J}}&=b(0)\Big[a(n)c(n)P_{n-1}(b,ac)-b(n+1)P_n(b,ac)\Big]\\
&\quad-a(0)c(0)\Big[a(n)c(n)P_{n-2}(b_1,a_1c_1)-b(n+1)P_{n-1}(b_1,a_1c_1)\Big].
\end{aligned}$$

LEMA 2.8. *En las condiciones anteriores, se satisface que*

$$\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)=a(0)\Big(\prod_{s=0}^{k-1}a(s)\Big)^{-1}\Phi_{_\mathsf{J}}(k) \quad \text{y} \quad \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k)=c(n)\Big(\prod_{s=k}^{n}c(s)\Big)^{-1}\Psi_{_\mathsf{J}}(k), \quad k=0,\dots,n+1,$$

y, además,

$$b(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0)-a(0)\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1)=D_{_\mathsf{J}}\Big(\prod_{s=0}^{n-1}c(s)\Big)^{-1}.$$

TEOREMA 2.9. *La matriz* $\mathsf{J}(a,b,c)$ *es invertible sii* $D_{_\mathsf{J}}\neq 0$*, en cuyo caso*

$$r_{ks}=\frac{1}{D_{_\mathsf{J}}}\begin{cases}\Big(\prod\limits_{j=k}^{s-1}a(j)\Big)\Phi_{_\mathsf{J}}(k)\Psi_{_\mathsf{J}}(s), & \textit{si } 0\le k\le s\le n+1,\\[2ex] \Big(\prod\limits_{j=s}^{k-1}c(j)\Big)\Phi_{_\mathsf{J}}(s)\Psi_{_\mathsf{J}}(k), & \textit{si } 0\le s\le k\le n+1.\end{cases}$$

Además,

$$\det\mathsf{R}=-a(0)^{n+2}D_{_\mathsf{J}}^{n+1}\Big(\prod_{s=0}^{n-1}c(s)\Big)^{-(n+2)}.$$

Demostración. La primera parte es consecuencia del Teorema 6.3 del Capítulo 5, teniendo en cuenta las identidades del Lema anterior y que para cada $k, s = 0, \dots, n+1$ se tiene que

$$\frac{\rho_{a,c}(s)\Big(\prod\limits_{s=0}^{n-1} c(s)\Big)}{a(0)\Big(\prod\limits_{s=1}^{\min\{k,s\}-1} a(s)\Big)\Big(\prod\limits_{s=\max\{k,s\}}^{n-1} c(s)\Big)} = \begin{cases} \prod\limits_{j=k}^{s-1} a(j), & \text{si } k \le s, \\ \prod\limits_{j=s}^{k-1} c(j), & \text{si } k \ge s, \end{cases}$$

de donde se deduce la fórmula establecida en el enunciado.

Para demostrar la fórmula del determinante de R, haremos uso de la última parte del Corolario 2.6. En este caso $h_j = \rho_{a,c}(j)$, $v_j = \Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(j)$ y $w_j = \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(j)$, lo que implica que

$$\begin{aligned} h_s(v_s w_{s-1} - v_{s-1} w_s) &= -\rho_{a,c}(s) w[\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](s-1) \\ &= -c(s-1)^{-1} a(s-1) \rho_{a,c}(s-1) w[\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](s-1) \\ &= -c(s-1)^{-1} a(0) w[\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}, \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}](0) = c(s-1)^{-1} a(0) D_{\mathsf{J}} \Big(\prod_{s=0}^{n-1} c(s)\Big)^{-1}, \end{aligned}$$

para cada $s = 1, \dots, n+1$, de manera que

$$\det \mathsf{R} = -a(0)^{n+2} D_{\mathsf{J}}^{n+1} \Big(\prod_{s=0}^{n-1} c(s)\Big)^{-(n+2)}.$$

□

Aunque la expresión de la inversa de $\mathsf{J}(a,b,c)$ en términos de las soluciones de los problemas de valor inicial y final, es básicamente conocida, ver [**28, 40**], la que proponemos aquí tiene la novedad de considerar la expresión de tales soluciones. Por otra parte, la fórmula para el determinante de R parece ser nueva. Sorprendentemente, ha pasado desapercibida a lo largo de los años. Probablemente la explicación resida en que la mayor parte de los métodos utilizados en este área son de carácter algebraico, y este parece ser el primer estudio sistemático basado en las propiedades de las ecuaciones en diferencias. Nótese que para llegar a la expresión hemos utilizado las propiedades del wronskiano de las soluciones de las ecuaciones en diferencias homogéneas.

A continuación particularizamos el resultado anterior al caso en el que la ecuación tiene coeficientes constantes, lo que significa que $a(j) = \alpha \neq 0$, $b(j) = \beta$, $j = 1, \dots, n$, y $c(j) = \gamma \neq 0$, $j = 0, \dots, n-1$.

Recordemos que si $x(j) = x$ e $y(j) = y \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, entonces

$$P_{-1}(x,y) = 0, \quad P_0(x,y) = 1 \quad \text{y} \quad P_k(x,y) = y^{\frac{k}{2}} U_k\Big(\frac{x}{2\sqrt{y}}\Big).$$

Por tanto, si consideramos $q = \dfrac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$, entonces

$$\begin{aligned} &\Phi_{\mathsf{J}}(0) = 1, \\ &\Phi_{\mathsf{J}}(k) = (\sqrt{\alpha\gamma})^{k-2}\Big[b(0)\sqrt{\alpha\gamma}\,U_{k-1}(q) - a(0)\gamma U_{k-2}(q)\Big], && k = 1\dots, n+1, \\ &\Psi_{\mathsf{J}}(k) = (\sqrt{\alpha\gamma})^{n-k-1}\Big[c(n)\alpha U_{n-k-1}(q) - b(n+1)\sqrt{\alpha\gamma}\,U_{n-k}(q)\Big], && k = 0, \dots, n, \\ &\Psi_{\mathsf{J}}(n+1) = -1, \end{aligned} \tag{74}$$

y $D_{\mathsf{J}} = d_{\mathsf{J}}(\sqrt{\alpha\gamma})^{n-2}$ donde

$$d_{\mathsf{J}} = b(0)\sqrt{\alpha\gamma}\,\Big[c(n)\alpha U_{n-1}(q) - b(n+1)\sqrt{\alpha\gamma}\,U_n(q)\Big] - a(0)\gamma\Big[c(n)\alpha U_{n-2}(q) - b(n+1)\sqrt{\alpha\gamma}\,U_{n-1}(q)\Big].$$

En sentido estricto, las fórmulas anteriores sólo deberían ser utilizadas cuando $\alpha\gamma > 0$, mientras que para $\alpha\gamma < 0$ deberíamos hacer uso del *Teorema de Estructura* de las ecuaciones con coeficientes constantes presentado en el Capítulo 3 y considerar las subsucesiones de índices par e impar. Por no alargar y complicar innecesariamente la exposición, permitiremos valores complejos en las identidades finales. No es difícil observar que todos los resultados permanecen válidos en ese caso, incluso si los coeficientes de las matrices se permiten que sean números complejos. En el resto del capítulo seguiremos considerando que las matrices de Jacobi tienen coeficientes reales, pero cuando sea necesario, es decir, cuando $\alpha\gamma < 0$, permitiremos que las expresiones, puedan valorarse en el complejo $\sqrt{\alpha\gamma}$.

COROLARIO 2.10. *Si* $a(j) = \alpha \neq 0$*,* $b(j) = \beta$*,* $j = 1, \dots, n$*,* $c(j) = \gamma \neq 0$*,* $j = 0, \dots, n-1$*, entonces* $\mathsf{J}(a,b,c)$ *es invertible sii* $d_{\mathsf{J}} \neq 0$*, en cuyo caso*

$$r_{ks} = \frac{1}{d_{\mathsf{J}}(\sqrt{\alpha\gamma})^{n-2}}\begin{cases} a(0)\alpha^{s-1}\Phi_{\mathsf{J}}(0)\Psi_{\mathsf{J}}(s), & \textit{si } 0 = k \le s \le n+1,\\ \alpha^{s-k}\Phi_{\mathsf{J}}(k)\Psi_{\mathsf{J}}(s), & \textit{si } 1 \le k \le s \le n+1,\\ \gamma^{k-s}\Phi_{\mathsf{J}}(s)\Psi_{\mathsf{J}}(k), & \textit{si } 0 \le s \le k \le n,\\ c(n)\gamma^{n-s}\Phi_{\mathsf{J}}(s)\Psi_{\mathsf{J}}(n+1), & \textit{si } 0 \le s \le k = n+1.\end{cases}$$

Además,

$$\det \mathsf{R} = -a(0)^{n+2}\gamma^{-n(n+1)}(\sqrt{\alpha\gamma})^{(n-2)(n+1)}d_{\mathsf{J}}^{n+1}.$$

3. Matrices de Jacobi (p,r)–Toeplitz

Una *matriz de Toeplitz* es una matriz cuadrada cuyas diagonales son constantes. Por tanto, una matriz de Jacobi que además es de Toeplitz tiene las tres diagonales principales constantes y el resto nulas. Estas matrices no deben confundirse con las matrices de Jacobi con coeficientes constantes introducidas anteriormente. De hecho, una matriz de Jacobi con coeficientes constantes α, β, γ es de Toeplitz sii además $a(0) = \alpha$, $b(0) = b(n+1) = \beta$ y $c(n) = \gamma$. En esta sección trataremos con este tipo de matrices y con sus generalizaciones.

DEFINICIÓN 3.1. *Dados* $p \in \mathbb{N}^*$ *y* $r \in \mathbb{R}^*$*, diremos que la matriz de Jacobi* $\mathsf{J}(a,b,c)$*, donde* $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$*,* $b \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$*,* $a(n+1) = c(n)$ *y* $c(n+1) = a(n)$*, es una* matriz (p,r)–Toeplitz *si existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $n+2 = mp$ *y, además,*

$$a(p+j) = ra(j), \quad b(p+j) = rb(j), \quad y \quad c(p+j) = rc(j), \quad j = 0, \dots, (m-1)p.$$

NOTA 3.2. Si $r = 1$, las matrices de Jacobi $(p,1)$–Toeplitz son las matrices conocidas con el nombre de matrices tridiagonales p–Toeplitz, ver por ejemplo [**28**], cuyos coeficientes son periódicos de periodo p. Cuando $p = 1$, las matrices de Jacobi $(1,1)$–Toeplitz antes definidas no son otras que las habituales matrices tridiagonales y de Toeplitz; es decir, matrices tridiagonales, cuyas diagonales son constantes. Para el estudio de la invertibilidad de las matrices de Jacobi $(p,1)$–Toeplitz, puede consultarse por ejemplo [**27, 28**].

Obsérvese que las matrices de Jacobi que son $(1,r)$–Toeplitz son aquellas cuyas diagonales son progresiones geométricas de razón r. Más generalmente, si $\mathsf{J}(a,b,c)$ es (p,r)–Toeplitz, entonces

$$a(kp+j) = r^k a(j), \quad b(kp+j) = r^k b(j), \quad \text{y} \quad c(kp+j) = r^k c(j), \quad k = 0, \dots, m-1, \quad j = 0, \dots, p-1.$$

El primer resultado se refiere al estudio de las matrices de Jacobi $(1,1)$–Toeplitz. Naturalmente, no es más que una especialización del Corolario 2.10.

PROPOSICIÓN 3.3. *Si $\alpha\gamma \neq 0$, la matriz de Jacobi $(1,1)$–Toeplitz*

$$\mathsf{J}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma & \beta & -\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma & \beta \end{bmatrix}$$

es invertible sii

$$\beta \neq 2\sqrt{\alpha\gamma}\cos\left(\frac{k\pi}{n+3}\right), \qquad k = 1,\dots,n+2,$$

en cuyo caso,

$$r_{ks} = \frac{1}{U_{n+2}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\right)} \begin{cases} \alpha^{s-k}(\sqrt{\alpha\gamma})^{k-s-1}U_k\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\right)U_{n-s+1}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\right), & \textit{si } 0 \le k \le s \le n+1, \\ \gamma^{k-s}(\sqrt{\alpha\gamma})^{s-k-1}U_s\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\right)U_{n-k+1}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\right), & \textit{si } 0 \le s \le k \le n+1. \end{cases}$$

Además,

$$\det \mathsf{R} = (-1)^n \alpha\gamma^{-(n+1)^2}(\sqrt{\alpha\gamma})^{(n+4)(n+1)}U_{n+2}\left(\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\right)^{n+1}.$$

Demostración. Si consideramos $q = \dfrac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathsf{J}}(k) &= (\sqrt{\alpha\gamma})^{k-2}\Big[\beta\sqrt{\alpha\gamma}\,U_{k-1}(q) - \alpha\gamma U_{k-2}(q)\Big] \\ &= (\sqrt{\alpha\gamma})^{k}\Big[2qU_{k-1}(q) - U_{k-2}(q)\Big] = (\sqrt{\alpha\gamma})^{k}U_k(q), \\ \Psi_{\mathsf{J}}(k) &= (\sqrt{\alpha\gamma})^{n-k-1}\Big[\gamma\alpha U_{n-k-1}(q) - \beta\sqrt{\alpha\gamma}\,U_{n-k}(q)\Big], \\ &= (\sqrt{\alpha\gamma})^{n-k+1}\Big[U_{n-k-1}(q) - 2qU_{n-k}(q)\Big] = -(\sqrt{\alpha\gamma})^{n-k+1}U_{n-k+1}(q), \end{aligned}$$

para cada $k = 0,\dots,n+1$. Observar que como $U_0(q) = 1$, $\Phi_{\mathsf{J}}(0) = 1$, $\Psi_{\mathsf{J}}(n+1) = -1$ y pueden unificarse las dos primeras identidades y las dos últimas de (74). Por otra parte,

$$d_{\mathsf{J}} = -\alpha^2\gamma^2 U_{n+2}(q),$$

de manera que $d_{\mathsf{J}} \neq 0$ sii q no es un cero del polinomio $U_{n+2}(x)$; es decir, sii $q \neq \cos\left(\frac{k\pi}{n+3}\right)$, $k = 1,\dots,n+2$, ver [**42**]. Cuando esto ocurre $\mathsf{J}(\alpha,\beta,\gamma)$ es invertible y se tiene que

$$r_{ks} = \frac{1}{U_{n+2}(q)} \begin{cases} \alpha^{s-k}(\sqrt{\alpha\gamma})^{k-s-1}U_k(q)U_{n-s+1}(q), & \text{si } 0 \le k \le s \le n+1, \\ \gamma^{k-s}(\sqrt{\alpha\gamma})^{s-k-1}U_s(q)U_{n-k+1}(q), & \text{si } 0 \le s \le k \le n+1. \end{cases}$$

Además,

$$\det \mathsf{R} = (-1)^n \alpha\gamma^{-(n+1)^2}(\sqrt{\alpha\gamma})^{(n+4)(n+1)}U_{n+2}(q)^{n+1}.$$

□

La expresión anterior coincide con la obtenida por Fonseca y Petronilho en [**27**, Corolario 4.1] y [**28**, Ecuación 4.26].

COROLARIO 3.4. *Si $\alpha \neq 0$, la matriz de Jacobi $(1,1)$–Toeplitz simétrica*

$$\mathsf{J}(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\alpha & \beta & -\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha & \beta \end{bmatrix}$$

es invertible sii

$$\beta \neq 2\alpha \cos\left(\frac{k\pi}{n+3}\right), \qquad k = 1,\ldots,n+2,$$

en cuyo caso,

$$r_{ks} = \frac{U_{\mathrm{mín}\{k,s\}}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)U_{n-\mathrm{máx}\{k,s\}+1}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)}{\alpha U_{n+2}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)}, \quad k,s = 0,\ldots,n+1.$$

Además,

$$\det \mathsf{R} = (-1)^n \alpha^{2-3n} U_{n+2}\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^{n+1}.$$

La espresión para la inversa de una matriz de Jacobi simétrica y de Toeplitz es bien conocida, ver por ejemplo [**27**, Corolario 4.2] y las referencias citadas allí.

Como una matriz de Jacobi (p,r)–Toeplitz no deja de ser una matriz de Jacobi, las condiciones bajo las cuales es invertible y el cálculo de su inversa serán particularizaciones del resultado del Teorema 2.9. Equivalentemente, deberemos seguir los mismos pasos que en la demostración de dicho resultado, sacando provecho de la estructura adicional de las matrices. Como dicha prueba está basada en la obtención de la inversa del operador de Schrödinger en el camino, Teorema 6.3 del Capítulo 5, volvemos a tener como objetivo la determinación de las funciones $\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$ y $\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}$, las únicas soluciones de la ecuación de Schrödinger homogénea en $\overset{\circ}{\mathbf{I}}$ que satisfacen

$$\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) = a(0), \;\; \Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) = b(0), \;\; \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n) = -b(n+1), \;\; \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(n+1) = -c(n).$$

En este caso particular, la ecuación de Schrödinger tiene coeficientes casi–periódicos, podemos aplicar los resultados de la Sección 6 del Capítulo 3, correspondiente al estudio de este tipo de ecuaciones y, más concretamente, el Teorema 6.4 y, también, los de la Sección 3 del Capítulo 4, donde se desarrolló la Teoría de Floquet.

Tendremos en cuenta que si $a \in \mathcal{C}(\mathbf{I})$ tiene periodo p, entonces $a^{\pi_p} = \prod\limits_{j=0}^{p-1} a(j)$. Por tanto, si $a, c \in \mathcal{C}^*(\mathbf{I})$ son periódicas de periodo p, entonces $a^{\pi_p}c^{\pi_p} = \rho_{a,c}(p)^{-1}\prod\limits_{j=0}^{p-1} a(j)^2$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ y cada $\ell = 0,\ldots,p-1$, se tiene que $\rho_{a,c}(kp+\ell) = \rho_{a,c}(p)^k\rho_{a,c}(\ell)$.

Definimos $\theta = \sqrt{r\rho_{a,c}(p)}$ y consideraremos el número

$$q = \frac{\theta}{2\prod\limits_{j=0}^{p-1}|a(j)|}\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}(-1)^j \sum_{\alpha \in \Lambda_p^j} r^{-\alpha_{p-1}} a^{\alpha} b^{\bar{\alpha}} c^{\alpha}. \tag{75}$$

Cuando $r\rho_{a,c}(p) > 0$, q define un número real, pero cuando $r\rho_{a,c}(p) < 0$, q es imaginario puro. En este caso, según el *Teorema de Estructura* del Capítulo 3 deberíamos considerar el número real

$$\hat{q} = 2q^2 - 1 = \frac{r\rho_{a,c}(p)}{2\prod\limits_{j=0}^{p-1} a(j)^2}\Big(\sum_{j=0}^{\lfloor\frac{p}{2}\rfloor}(-1)^j\sum_{\alpha\in\Lambda_p^j} r^{-\alpha_{p-1}}a^\alpha b^{\bar{\alpha}}c^\alpha\Big)^2 - 1;$$

pero como hemos indicado anteriormente, por simplicidad no desarrollaremos ese caso y permitiremos el uso de números complejos en las expresiones de la inversa de $\mathsf{J}(a,b,c)$.

TEOREMA 3.5. *Sean $p,m \in \mathbb{N}^*$, tales que $pm = n+2$, $r \in \mathbb{R}^*$, $\mathsf{J}(a,b,c)$ una* matriz (p,r)–Toeplitz *y las funciones*

$$u(k,\ell) = \theta\Phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(p+\ell)U_{k-1}(q) - \Phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(\ell)U_{k-2}(q),$$
$$v(k,\ell) = \Psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}\big(n+2-2p+\ell\big)U_{m-k-2}(q) - \theta\Psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}\big(n+2-p+\ell\big)U_{m-k-3}(q),$$

definidas para cada $k = 0,\dots,m-1$ y cada $\ell = 0,\dots,p-1$.

Entonces, $\mathsf{J}(a,b,c)$ es invertible sii

$$b(0)v(0,0) \neq a(0)v(0,1)$$

y, además,

$$r_{kp+\ell,sp+\hat{\ell}} = \frac{\rho_{a,c}(\hat{\ell})}{a(0)r^s\theta^{k-s}\Big[b(0)v(0,0) - a(0)v(0,1)\Big]}\begin{cases} u(k,\ell)v(s,\hat{\ell}), & \textit{si } k < s,\\ u(s,\hat{\ell})v(k,\ell), & \textit{si } k < s,\\ u(s,\min\{\ell,\hat{\ell}\})v(s,\max\{\ell,\hat{\ell}\}), & \textit{si } k = s.\end{cases}$$

Demostración. El Teorema 6.4 del Capítulo 3 establece que

$$\Phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(kp+\ell) = \theta^{-k}u(k,\ell) \;\text{ y }\; \Psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(kp+\ell) = \theta^{m-k-2}v(k,\ell),$$

para cada $k = 0,\dots,m-1$ y cada $\ell = 0,\dots,p-1$. Basta ahora aplicar el Teorema 6.3 del Capítulo 5. □

Observar que los valores $\Phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k)$, $k = 1,\dots,2p-1$ necesarios para evaluar las funciones en el Teorema anterior, pueden obtenerse a partir de la fórmula

$$\Phi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(k) = \Big(\prod_{j=1}^{k-1} a(j)\Big)^{-1}\Big[b(0)P_{k-1}(b,ac) - a(0)c(0)P_{k-2}(b_1,a_1c_1)\Big], \quad k = 1\dots,2p-1,$$

mientras que los valores $\Psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(n+1-k)$, $k = 1,\dots,2p-1$ se evalúan mediante la identidad,

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}^{a,b,c}(n+1-k) = \Big(\prod_{j=n+1-k}^{n-1} c(j)\Big)^{-1}\Big[&a(n)c(n)P_{k-2}(b_{n+1-k},a_{n+1-k}c_{n+1-k})\\ &-b(n+1)P_{k-1}(b_{n+1-k},a_{n+1-k}c_{n+1-k})\Big],\end{aligned}$$

para cada $k = 1\dots,2p-1$.

Observar también que

$$\prod_{j=1}^{p-1+\ell} a(j) = r^\ell\Big(\prod_{j=1}^{p-1}a(j)\Big)\Big(\prod_{j=0}^{\ell-1}a(j)\Big) \;\text{ y }\; \prod_{j=n+1-p-\ell}^{n-1} c(j) = r^{-\ell}\Big(\prod_{j=n+1-p}^{n-1} c(j)\Big)\Big(\prod_{j=n+1-\ell}^{n} c(j)\Big),$$

para cada $\ell = 1,\dots,p-1$.

La siguiente particularización del teorema anterior, al caso de matrices tridiagonales cuyas diagonales están en progresión geométrica es, a nuestro entender, un resultado nuevo en la literatura.

COROLARIO 3.6. *Si* $r \in \mathbb{R}^*$, *la* matriz $(1, r)$–Toeplitz

$$\mathsf{J}(\alpha,\beta,\gamma;r) = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\gamma & \beta r & -\alpha r & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma r & \beta r^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta r^n & -\alpha r^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\gamma r^n & \beta r^{n+1}. \end{bmatrix}$$

es invertible sii

$$\beta\sqrt{r} \neq 2\sqrt{\alpha\gamma}\cos\left(\frac{k\pi}{n+3}\right), \qquad k = 1,\dots,n+2,$$

en cuyo caso,

$$r_{ks} = \frac{\big(\sqrt{\frac{\alpha r}{\gamma}}\big)^{s+1-k} U_{\text{mín}\{k,s\}}\big(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{r}{\alpha\gamma}}\big) U_{n+1-\text{máx}\{k,s\}}\big(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{r}{\alpha\gamma}}\big)}{\alpha r^s U_{n+2}\big(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{r}{\alpha\gamma}}\big)}.$$

Además,

$$\det \mathsf{R} = (-1)^{n+1} r^{n^2} (\sqrt{\alpha})^{n^2+5n+7} (\sqrt{\gamma})^{-(n^2+n-2)} U_{n+2}\left(\frac{\beta}{2}\sqrt{\frac{r}{\alpha\gamma}}\right)^{n+1}.$$

Demostración. En este caso $\theta = \sqrt{\dfrac{\alpha r}{\gamma}}$ y $q = \dfrac{\beta}{2}\sqrt{\dfrac{r}{\alpha\gamma}}$,

$$\begin{aligned} u(k) &= \theta\beta U_{k-1}(q) - \alpha U_{k-2}(q) = \alpha\Big[2qU_{k-1}(q) - U_{k-2}(q)\Big] = \alpha U_k(q), \\ v(k) &= -r^{n+1}\beta U_{n-k}(q) + r^n\gamma\theta U_{n-k-1}(q) \\ &= -r^n\gamma\theta\Big[2qU_{n-k}(q) - U_{n-k-1}(q)\Big] = -r^n\sqrt{\alpha\gamma r}\,U_{n+1-k}(q). \end{aligned}$$

Como

$$\Phi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) = \theta^{-k}u(k) \;\text{ y }\; \Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(k) = \theta^{n-k}v(k),$$

resulta que

$$\beta\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(0) - \alpha\Psi^{a,b,c}_{\mathfrak{c}_1,\mathfrak{c}_2}(1) = -r^n\alpha\theta^{n-1}\sqrt{\alpha\gamma r}\Big[2qU_{n+1}(q) - U_n(q)\Big] = -r^n\alpha\gamma\theta^n U_{n+2}(q)$$

y la matriz $\mathsf{J}(\alpha,\beta,\gamma;r)$ es invertible sii $U_{n+2}(q) \neq 0$ y, entonces,

$$r_{ks} = \frac{\theta^{s+1-k}U_{\text{mín}\{k,s\}}(q)U_{n+1-\text{máx}\{k,s\}}(q)}{\alpha r^s U_{n+2}(q)}.$$

□

4. Matrices circulantes

Presentamos en esta última sección las condiciones necesarias y suficientes para la invertibilidad de algunas matrices circulantes que dependen de tres parámetros y, además, calculamos explícitamente su inversa. Nuestro estudio también engloba una amplia clase de matrices circulantes simétricas. Las técnicas que usamos están relacionadas con la solución de problemas de contorno asociados a ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden. En consecuencia, reducimos el coste computacional del problema. En particular, restablecemos las inversas de conocidas matrices circulantes simétricas, aquéllas cuyos coeficientes son sucesiones aritméticas o geométricas y, también, si son números de Horadam, entre otras. También caracterizamos cuándo una matriz circulante, simétrica y tridiagonal es invertible y, en ese caso, calculamos explícitamente su inversa.

Muchos problemas científicos y de matemática aplicada conducen a la solución de sistemas lineales con coeficientes circulantes relacionados con la periodicidad de estos problemas, como los que aparecen cuando se utiliza el método de diferencias finitas para aproximar ecuaciones elípticas con condiciones de contorno periódicas, véase [**19**]. Las matrices circulantes tienen un amplio rango de aplicación en procesado de señal, tratamiento de imagen digital, pronóstico lineal, teoría de correción de errores de código, véase [**24, 55**]. En los últimos años, han aparecido varias publicaciones sobre matrices circulantes que pretenden ofrecer una expresión efectiva de su determinante, sus valores propios y la inversa de la matriz, véase por ejemplo [**34, 47, 56**].

En este capítulo, consideramos matrices circulantes del tipo $\mathsf{Circ}(a, b, c, \dots, c)$ y $\mathsf{Circ}(a, b, c, \dots, c, b)$, reproduciendo el trabajo presentado en [**14**]. Este tipo de matrices se plantean cuando se trata, por ejemplo, con diferencias finitas para resolver ecuaciones elípticas en una dimensión, o cuando se calcula la función de Green de ciertas redes que se obtienen cuando se añade un nuevo vértice a una red anterior con función de Green conocida, véase [**15**]. Aportamos una condición necesaria y suficiente para su invertibilidad. Además, como ya es conocido, su inversa es una matriz circulante y obtenemos una fórmula cerrada para la expresión de sus coeficientes.

Para un $n \in \mathbb{N}^*$ fijado, consideramos el vector $\mathbb{R}^n$ junto con el producto interno estándar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La matriz I corresponde a I_n y la matriz J a J_n, es decir, la matriz Identidad de orden n y la matriz de orden n cuyas entradas son todas uno, respectivamente.

Una matriz $\mathsf{A} = (a_{ij})$ se denomina *circulante con parámetros* $a_1, \dots, a_n$ si

$$\mathsf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{bmatrix} \tag{76}$$

o, equivalentemente, véase [**47, 56**],

$$a_{ij} = a_{1+(j-i)(\mathrm{mod}\, n)}. \tag{77}$$

Dados $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{Circ}(\mathsf{a}) = \mathsf{Circ}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es la *matriz circulante* con parámetros $a_1, \dots, a_n$. Obsérvese que $\mathsf{Circ}(\mathsf{e}) = \mathsf{I}$ y $\mathsf{Circ}(1) = \mathsf{J}$.

Sea τ una permutación del conjunto $\{1, \dots, n\}$ definida como,

$$\tau(1) = 1, \quad \tau(j) = n + 2 - j, \quad j = 2, \dots, n. \tag{78}$$

Denotamos por $\mathsf{P}_\tau \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matriz con entradas (p_{ij}), tales que para cualquier $j = 1, \dots, n$, $p_{\tau(j)j} = 1$ y $p_{ij} = 0$, en otro caso. Resulta que P_τ es invertible y se satisface $\mathsf{P}_\tau^{-1} = \mathsf{P}_\tau^\top = \mathsf{P}_{\tau^{-1}} = \mathsf{P}_\tau$.

De manera similar definimos ahora $\mathsf{a}_\tau = \mathsf{P}_\tau \mathsf{a}$; es decir, el vector cuyas componentes son $(a_\tau)_1 = a_1$ y $(a_\tau)_j = a_{n+2-j}$, $j = 2, \dots, n$. Entonces, $1_\tau = 1$ y $\langle \mathsf{a}_\tau, 1\rangle = \langle \mathsf{a}, 1\rangle$. Además,

$$\mathsf{Circ}(\mathsf{a}_\tau) = \mathsf{P}_\tau \mathsf{Circ}(\mathsf{a}) \mathsf{P}_\tau. \tag{79}$$

Para cualquier $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$, las matrices

$$\mathsf{Circ}_\tau(\mathsf{a}) = \mathsf{P}_\tau \mathsf{Circ}(\mathsf{a}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \tag{80}$$

$$\mathsf{Circ}^\tau(\mathsf{a}) = \mathsf{Circ}(\mathsf{a})\, \mathsf{P}_\tau = \begin{bmatrix} a_1 & a_n & \cdots & a_2 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_1 & \cdots & a_3 \end{bmatrix} \tag{81}$$

se denominan *circulante por la izquierda y circulante por la derecha con parámetros* $a_1, \dots, a_n$, respectivamente. Ambas matrices son simétricas y, por esta razón, las matrices $\mathsf{Circ}_\tau(\mathsf{a})$ se denominan matrices circulantes simétricas en [**55**]. Para evitar confusiones, nos referiremos a este tipo de matrices con la notación introducida arriba. Además, de la Identidad (79) obtenemos $\mathsf{Circ}^\tau(\mathsf{a}) = \mathsf{Circ}_\tau(\mathsf{a}_\tau)$ para cualquier $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Con el fin de completar la caracterización introductoria de estas matrices, enumeramos a continuación las propiedades de las matrices circulantes que son relevantes en nuestro estudio. Se puede comprobar fácilmente que todos los enunciados se verifican.

LEMA 4.1. *Dado cualquier* $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$*, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Para cualquier* $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathsf{Circ}(\alpha\mathsf{a} + \beta\mathsf{b}) = \alpha\mathsf{Circ}(\mathsf{a}) + \beta\mathsf{Circ}(\mathsf{b})$.

(ii) $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})^\top = \mathsf{Circ}(\mathsf{a}_\tau)$. *En particular,* $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ *es simétrica sii* $\mathsf{a} = \mathsf{a}_\tau$.

(iii) $\mathsf{Circ}_\tau(\mathsf{a}) = \mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ *sii* $\mathsf{Circ}^\tau(\mathsf{a}) = \mathsf{Circ}(\mathsf{a})$. *Estas igualdades se verifican sii* $\mathsf{a} = \mathsf{a}_\tau$.

(iv) $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})1 = \langle \mathsf{a}, 1\rangle\, 1$. *Además, si* $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ *es invertible, entonces* $\langle \mathsf{a}, 1\rangle \neq 0$.

(v) *Para cualquier* $\mathsf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{b} = \mathsf{Circ}(\mathsf{b}_\tau)\mathsf{a}_\tau$ *y* $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{Circ}(\mathsf{b}) = \mathsf{Circ}(\mathsf{b})\mathsf{Circ}(\mathsf{a}) = \mathsf{Circ}(\mathsf{c}_\tau)$, *donde* $\mathsf{c} = \mathsf{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{b}_\tau = \mathsf{Circ}(\mathsf{b})\mathsf{a}$.

(vi) $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ *es invertible sii el sistema lineal* $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{g} = \mathsf{e}$ *es compatible determinado. En ese caso, existe una única solución* $\mathsf{g}(\mathsf{a})$ *que además satisface* $\langle \mathsf{g}(\mathsf{a}), 1\rangle = \langle \mathsf{a}, 1\rangle^{-1}$. *En consecuencia,*

$$\mathsf{Circ}(\mathsf{a})^{-1} = \mathsf{Circ}\big(\mathsf{g}(\mathsf{a})\big)^\top \quad \text{y} \quad \mathsf{a}_\tau = \mathsf{a} \ \text{ sii } \ \mathsf{g}(\mathsf{a})_\tau = \mathsf{g}(\mathsf{a}).$$

(vii) $\mathsf{Circ}_\tau(\mathsf{a})$ *y* $\mathsf{Circ}^\tau(\mathsf{a})$ *son invertibles sii* $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ *es invertible y, en ese caso*

$$\mathsf{Circ}_\tau(\mathsf{a})^{-1} = \mathsf{Circ}_\tau\big(\mathsf{g}(\mathsf{a})\big) \ \text{ y } \ \mathsf{Circ}^\tau(\mathsf{a})^{-1} = \mathsf{Circ}^\tau\big(\mathsf{g}(\mathsf{a})\big).$$

Uno de los principales problemas en el campo de las matrices circulantes es determinar las condiciones de invertibilidad y, en ese caso, calcular la inversa. Del lema anterior, resulta que para cualquier $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$ la invertibilidad de las matrices $\mathsf{Circ}_\tau(\mathsf{a})$ y $\mathsf{Circ}^\tau(\mathsf{a})$, al igual que el cálculo de sus inversas, puede ser deducido a partir de la invertibilidad y de la matriz inversa $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$. Es más, la solución de este último problema se reduce al estudio de la compatibilidad de cierto sistema lineal y al cálculo de su solución, cuando ésta exista. Además, el problema ha sido ampliamente estudiado en la literatura utilizando la raices primitivas enésimas de la unidad y ciertos polinomios asociados con ellas, véase [**36, 47**]. Específicamente, sea $\omega = e^{\frac{2\pi}{n}i}$ la raiz primitiva enésima de la unidad. Además, se define para cada $j = 0,\dots,n-1$, el vector $\mathsf{t}_j = \big(1,\omega^j,\dots,\omega^{j(n-1)}\big)^\top \in \mathbb{R}^n$ y para cualquier $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$ el polinomio $P_{\mathsf{a}}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x^{j-1}$. Obsérvese que $\mathsf{t}_0 = 1$ y para cualquier $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$, $P_{\mathsf{a}}(1) = \langle \mathsf{a}, 1\rangle$. El siguiente lema proporciona una condición necesaria y suficiente para la invertibilidad de $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ y proporciona una fórmula para la inversa.

LEMA 4.2. *Para cualquier* $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^n$*, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})\mathsf{t}_j = P_{\mathsf{a}}(\omega^j)\mathsf{t}_j$*, para cualquier* $j = 0,\dots,n$*. En particular,* $\det \mathsf{Circ}(\mathsf{a}) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} P_{\mathsf{a}}(\omega^k)$.

(ii) $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ *es invertible sii* $P_{\mathsf{a}}(\omega^j) \neq 0$*,* $j = 0,\dots,n-1$*. En ese caso,* $\mathsf{Circ}^{-1}(\mathsf{a}) = \mathsf{Circ}(\mathsf{h}_{\mathsf{a}})$ *donde* $(h_{\mathsf{a}})_j = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^{-k(j-1)} P_{\mathsf{a}}(\omega^k)^{-1}$.

Nótese que la propiedad (i) del anterior lema implica que todas las matrices circulantes de orden n tienen los mismos autovectores pero diferentes autovalores. Aunque el problema está completamente resuelto, la complejidad de cálculo de la fórmula (ii) para la determinación de la inversa de una matriz circulante crece con el orden de la matriz, así que esta fórmula no resulta muy útil desde el punta de vista computacional. Para ilustrar este fenómeno, aplicamos el Lema 4.2 a los casos $n = 2,3$, que pueden ser resueltos directamente sin dificultad.

Para $n = 2$, $\omega = -1$ y para un vector $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^2$ dado, se tiene $P_{\mathsf{a}}(x) = a_1 + a_2 x$, y $P_{\mathsf{a}}(-1) = a_1 - a_2$. Entonces, $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ es invertible sii $(a_1 + a_2)(a_1 - a_2) \neq 0$ y

$$(h_{\mathsf{a}})_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1+a_2} + \frac{1}{a_1-a_2}\right) = \frac{a_1}{a_1^2 - a_2^2},$$

$$(h_{\mathsf{a}})_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1+a_2} - \frac{1}{a_1-a_2}\right) = \frac{a_2}{a_1^2 - a_2^2}.$$

Por otra parte, si $n = 3$, $\omega = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $\omega^2 = \overline{\omega}$ y para un vector $\mathsf{a} \in \mathbb{R}^3$ dado, se tiene $P_{\mathsf{a}}(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2$; $P_{\mathsf{a}}(\omega) = a_1 + a_2\omega + a_3\overline{\omega}$ y $P_{\mathsf{a}}(\omega^2) = \overline{P_{\mathsf{a}}(\omega)}$. Entonces, $\mathsf{Circ}(\mathsf{a})$ es invertible sii

$$P_{\mathsf{a}}(1)|P_{\mathsf{a}}(\omega)|^2 = (a_1 + a_2 + a_3)|a_1 + a_2\omega + a_3\overline{\omega}|^2 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1a_2a_3 \neq 0$$

en ese caso,

$$(h_{\mathsf{a}})_1 = \frac{1}{3P_{\mathsf{a}}(1)|P_{\mathsf{a}}(\omega)|^2}\Big(|P_{\mathsf{a}}(\omega)|^2 + 2P_{\mathsf{a}}(1)\mathbb{R}\mathrm{e}(P_{\mathsf{a}}(\omega)\Big) = \frac{a_1^2 - a_2a_3}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1a_2a_3},$$

$$(h_{\mathsf{a}})_2 = \frac{1}{3P_{\mathsf{a}}(1)|P_{\mathsf{a}}(\omega)|^2}\Big(|P_{\mathsf{a}}(\omega)|^2 + 2P_{\mathsf{a}}(1)\mathbb{R}\mathrm{e}(\omega P_{\mathsf{a}}(\omega)\Big) = \frac{a_3^2 - a_1a_2}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1a_2a_3},$$

$$(h_{\mathsf{a}})_3 = \frac{1}{3P_{\mathsf{a}}(1)|P_{\mathsf{a}}(\omega)|^2}\Big(|P_{\mathsf{a}}(\omega)|^2 + 2P_{\mathsf{a}}(1)\mathbb{R}\mathrm{e}(\overline{\omega} P_{\mathsf{a}}(\omega)\Big) = \frac{a_2^2 - a_1a_3}{a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 - 3a_1a_2a_3}.$$

Nuestro objetivo es calcular la matriz inversa de algunas matrices circulante de orden $n \geq 3$ con tres parámetros como máximo. Por ejemplo, ese tipo de matrices circulantes aparecen cuando se calcula la resistencia efectiva y el indice de Kirchhoff de una red que proviene de añadir nuevos nodos a una red ya conocida, véase [**15**]. Reducimos significativamente el coste computacional de aplicar el Lema 4.2 puesto que la clave para encontrar la matriz inversa consiste en resolver una ecuación en diferencias de como máximo orden dos.

4.1. Matrices $\mathsf{Circ}(a,b,c,\dots,c)$. Dados $a,b,c \in \mathbb{R}$, sea $\mathsf{a}(a,b,c) \in \mathbb{R}^n$ definido como $\mathsf{a}(a,b,c) = (a,b,c,\dots,c)^\top$. Entonces, $\mathsf{Circ}(a,b,c,\dots,c) = \mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)$.

Para cualquier $q \in \mathbb{R}$, también consideramos el vector $\mathsf{z}(q) = (q^{n-1}, q^{n-2}, \dots, q, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$. Se comprueba inmediatamente que $\mathsf{z}_\tau(q) = (q^{n-1}, 1, q, \dots, q^{n-2})^\top$ y $\langle \mathsf{z}(q), \mathsf{1}\rangle = \dfrac{q^n-1}{q-1}$. Observamos que la última identidad también se verifica para $q=1$, ya que $\lim\limits_{q\to 1} \dfrac{q^n-1}{q-1} = n = \langle \mathsf{z}(1), \mathsf{1}\rangle$. Remarcamos que $\mathsf{z}(1) = \mathsf{1}$ y $\mathsf{z}_\tau(-1) = \mathsf{z}(-1) = (-1,1,-1,\dots,1)^\top$, para n par.

PROPOSICIÓN 4.3. *Para cualquier $q \in \mathbb{R}$ se satisface*

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)\mathsf{z}_\tau(q) = [q^n-1]\mathsf{e}.$$

Además, se verifican las siguientes propiedades:

(i) $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)$ *es invertible sii $q^n \neq 1$, y la matriz inversa es*

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)^{-1} = (q^n-1)^{-1}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{z}(q)\big).$$

(ii) *El sistema lineal* $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(1,-1,0)\big)\mathsf{h} = \mathsf{v}$ *es compatible sii* $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 0$*. En ese caso, para cualquier $\gamma \in \mathbb{R}$ la solución única del sistema lineal que satisface $\langle \mathsf{h}, \mathsf{1}\rangle = \gamma$ es*

$$h_j = \frac{1}{n}\Big[\gamma - \sum_{i=1}^{n} i v_i\Big] + \sum_{i=j}^{n} v_i, \quad j = 1,\dots,n.$$

(iii) *Si n es par, el sistema lineal* $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(-1,-1,0)\big)\mathsf{h} = \mathsf{v}$ *es compatible sii $\langle \mathsf{v}, \mathsf{z}(-1)\rangle = 0$. En ese caso, todas las soluciones vienen dadas por*

$$h_j = (-1)^{j+1}\sum_{i=j}^{n}(-1)^i v_i + \alpha\mathsf{z}(-1), \quad j=1,\dots,n, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

y, por tanto, $2\langle \mathsf{h}, \mathsf{1}\rangle = \langle \mathsf{v}, \mathsf{1}\rangle$.

La matriz inversa de una matriz circulante cuyos parámetros son una sucesión geométrica puede calcularse como una aplicación del resultado anterior.

COROLARIO 4.4. *Para cualquier $a, r \in \mathbb{R}$, la matriz* $\mathsf{Circ}(ar^{n-1},\dots,ar,a)$ *es invertible sii $a(r^n-1) \neq 0$. En ese caso, la matriz inversa es*

$$\mathsf{Circ}(ar^{n-1},\dots,ar,a)^{-1} = \big(a(r^n-1)\big)^{-1}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(r,-1,0)\big).$$

El resultado principal de esta sección proporciona la condición necesaria y suficiente de la invertibilidad de las matrices con las que estamos tratando. Pero además, cuando la inversa existe, aportamos uan expresión simple y cerrada para sus entradas.

TEOREMA 4.5. *Para cualquier $a,b,c \in \mathbb{R}$, la matriz circulante* $\mathsf{Circ}(a,b,c,\dots,c)$ *es invertible sii*

$$\big[a+b+(n-2)c\big]\big[(a-b)^2 + \big(1-(-1)^n\big)(c-b)^2\big] \neq 0$$

y, en ese caso, $\mathsf{Circ}(a,b,c,\dots,c)^{-1} = \mathsf{Circ}\big(\mathsf{k}(a,b,c)\big)$ *donde, si $a \neq 2c-b$*

$$k_j(a,b,c) = \frac{(c-b)^{j-1}(a-c)^{n-j}}{\big((a-c)^n-(c-b)^n\big)} - \frac{c}{(a+b-2c)\big(a+b+(n-2)c\big)},$$

j=1,...,n, y

$$k_j(2c-b,b,c)=\frac{1}{n}\Big[\frac{1}{nc}+\frac{n-1}{2(c-b)}\Big]-\frac{(j-1)}{n(c-b)},\quad j=1,\dots,n.$$

Demostración. Definiendo $\alpha(n;a,b,c)=\big[a+b+(n-2)c\big]\big[(a-b)^2+\big(1-(-1)^n\big)(c-b)^2\big]$, entonces $\alpha(n;a,b,b)=0$ sii $a=b$ o $a=(1-n)b$. Además, cuando $c\neq b$, si n es impar, entonces $\alpha(n;a,b,c)=0$ sii $a=-b-(n-2)c$, mientras que si n es par, entonces $\alpha(n;a,b,c)=0$ sii o bien $a=b$ o bien $a=-b-(n-2)c$.

Según (iv) del Lema 4.1, $\langle \mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle=a+b+(n-2)c\neq 0$ es una condición necesaria para asegurar la invertibilidad de $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)$. Así que, a partir de ahora asumiremos que se satisface esa condición. Además, del Lema 4.1 (vi), $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)$ es invertible sii el sistema lineal $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}$ es compatible y, en ese caso, existe una solución única que, además, satisface $\langle\mathsf{h},\mathsf{1}\rangle=\langle\mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}$.

Por tanto, como $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)=\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a-c,b-c,0)\big)+c\mathsf{J}$, si el vector $\mathsf{h}\in\mathbb{R}^n$ verifica $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}$, entonces $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a-c,b-c,0)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}-c\langle\mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}\mathsf{1}$.

Recíprocamente, si $\mathsf{h}\in\mathbb{R}^n$ satisface $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a-c,b-c,0)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}-c\langle\mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}\mathsf{1}$, entonces

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)\mathsf{h}=\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a-c,b-c,0)\big)\mathsf{h}+c\mathsf{J}\mathsf{h}=\mathsf{e}+c\big[\langle\mathsf{h},\mathsf{1}\rangle-\langle\mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}\big]\,\mathsf{1}$$

y, por tanto, h es una solución de $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}$ sii $\langle\mathsf{h},\mathsf{1}\rangle=\langle\mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}$.

En consecuencia, hemos obtenido que

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}\ \text{sii}\ \mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a-c,b-c,0)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}-c\langle\mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}\mathsf{1}$$

y, además, $\langle\mathsf{h},\mathsf{1}\rangle=\langle\mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}$.

Si $c=b$, entonces $\langle\mathsf{a}(a,b,b),\mathsf{1}\rangle=a+(n-1)b$ y $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a-c,b-c,0)\big)=(a-b)\mathsf{I}$. Así que, el sistema $(a-b)\mathsf{I}\mathsf{h}=\mathsf{e}-b\big(a+(n-1)b\big)^{-1}\mathsf{1}$ es compatible sii $a\neq b$ y, por tanto,

$$\mathsf{h}=\frac{1}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)}\Big[\big(a+(n-1)b\big)\mathsf{e}-b\mathsf{1}\Big],$$

lo que implica que $\langle\mathsf{h},\mathsf{1}\rangle=\dfrac{\big(a+(n-1)b\big)-bn}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)}=\dfrac{1}{a+(n-1)b}=\langle\mathsf{a}(a,b,b),\mathsf{1}\rangle^{-1}$. Nótese que,

$$h_1(a,b,b)=\frac{1}{a-b}-\frac{b}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)},$$
$$h_j(a,b,b)=-\frac{b}{(a-b)\big(a+(n-1)b\big)},\quad j=2,\dots,n.$$

Para el caso $c\neq b$, consideramos $q=\dfrac{a-c}{c-b}$, entonces $\mathsf{a}(a-c,b-c,0)=(c-b)\mathsf{a}(q,-1,0)$ y, como consecuencia, el sistema $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a-c,b-c,0)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}-c\langle\mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}\mathsf{1}$ es equivalente a

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)\mathsf{h}=\frac{1}{(c-b)\big(a+b+(n-2)c\big)}\Big(\big(a+b+(n-2)c\big)\mathsf{e}-c\mathsf{1}\Big).$$

Si h es solución del sistema anterior, entonces

$$\begin{aligned}\frac{(a+b-2c)}{(c-b)\big(a+b+(n-2)c\big)} &= \langle \mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)\mathsf{h},\mathsf{1}\rangle = \langle \mathsf{h},\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}_\tau(q,-1,0)\big)\mathsf{1}\rangle\\ &= \langle \mathsf{a}(q,-1,0),\mathsf{1}\rangle\langle \mathsf{h},\mathsf{1}\rangle = \frac{(a+b-2c)}{(c-b)}\,\langle \mathsf{h},\mathsf{1}\rangle,\end{aligned}$$

lo que implica que si $a+b-2c\neq 0$,, entonces $\langle \mathsf{h},\mathsf{1}\rangle = \dfrac{1}{a+b+(n-2)c} = \langle \mathsf{a}(a,b,c),\mathsf{1}\rangle^{-1}$. Así que, si $c\neq b$ y $a+b-2c\neq 0$; es decir, si $q\neq 1$, entonces $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)\mathsf{h}=\mathsf{e}$ sii

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)\mathsf{h} = \frac{1}{(c-b)\big(a+b+(n-2)c\big)}\Big(\big(a+b+(n-2)c\big)\mathsf{e}-c\mathsf{1}\Big).$$

Para n par o n impar pero $b\neq a$; es decir, $q^n\neq 1$, según la Proposición 4.3 (i), $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(q,-1,0)\big)$ es invertible y, además,

$$\begin{aligned}\mathsf{h} &= \frac{1}{(c-b)(q^n-1)\big(a+b+(n-2)c\big)}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{z}(q)\big)\Big(\big(a+b+(n-2)c\big)\mathsf{e}-c\mathsf{1}\Big)\\ &= \frac{1}{(c-b)(q^n-1)\big(a+b+(n-2)c\big)}\Big(\big(a+b+(n-2)c\big)\mathsf{z}_\tau(q)-c\langle \mathsf{z}(q),\mathsf{1}\rangle\,\mathsf{1}\Big).\end{aligned}$$

Si n es par y $b=a$, entonces $q=-1$, $a+b+(n-2)c=2(b-c)+nc$ y

$$\langle \big(2b+(n-2)c\big)\mathsf{e}-c\mathsf{1},\mathsf{z}(-1)\rangle = -\big(2(b-c)+nc\big)\neq 0.$$

Por consiguiente, el sistema

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(-1,-1,0)\big)\mathsf{h} = \frac{1}{(c-b)\big(a+b+(n-2)c\big)}\Big(\big(a+b+(n-2)c\big)\mathsf{e}-c\mathsf{1}\Big)$$

es incompatible, así que $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(a,b,c)\big)$ no tiene inversa.

Si $c\neq b$ y $a+b-2c=0$, es decir, $q=1$, entonces $a+b+(n-2)c=nc$ y el sistema

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(1,-1,0)\big)\mathsf{h} = \frac{1}{n(c-b)}(n\mathsf{e}-\mathsf{1})$$

tiene solución. Además, por la proposición 4.3 (ii), si

$$h_1 = \frac{1}{n}\Big[\frac{1}{nc}+\frac{n-1}{2(c-b)}\Big],\quad h_j = \frac{1}{n}\Big[\frac{1}{nc}+\frac{n-1}{2(c-b)}\Big]-\frac{(n+1-j)}{n(c-b)},\quad j=2,\dots,n,$$

entonces h es la solución única del sistema lineal que satisface $\langle \mathsf{h},\mathsf{1}\rangle = \dfrac{1}{nc}$.

En todos los casos basta con tomar $\mathsf{k}=\mathsf{h}_\tau$. □

Nótese que para $a=2c-b$ en el anterior Teorema, $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(2c-b,b,c\big)$ es invertible si y solo si $c(c-b)\neq 0$ y, entonces, las entradas del vector $\mathsf{h}(2c-b,b,c)$ son los elementos de una sucesión aritmética. Por tanto, podemos dar una caracterización de la inversa de una matriz circulante cuyos parámetros están en progresión aritmética. Por supuesto, nuestros resultados coinciden con los obtenidos en [**5**] y, para matrices circulantes por la izquierda en progresión aritmética, en [**55**].

COROLARIO 4.6. *Para cualquier* $a,b\in\mathbb{R}$*, la matriz* $\mathsf{Circ}\big(a,a+b,\dots,a+(n-1)b\big)$ *es invertible sii* $\big(2a+(n-1)b\big)b\neq 0$ *y, en ese caso,*

$$\mathsf{Circ}\big(a,a+b,\dots,a+(n-1)b\big)^{-1}=\frac{2}{n^2\big(2a+(n-1)b\big)}\,\mathsf{J}-\frac{1}{nb}\,\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(1,-1,0)\big).$$

En particular, para cualquier $m\in\mathbb{Z}$ *tal que* $2m+n\neq 1$*, la matriz* $\mathsf{Circ}(m,m+1,\dots,m+n-1)$ *es invertible y su inversa es*

$$\mathsf{Circ}(m,m+1,\dots,m+n-1)^{-1}=\frac{2}{n^2(2m+n-1)}\,\mathsf{J}-\frac{1}{n}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{a}(1,-1,0)\big).$$

4.2. Matrices Circ$(a,b,c,\dots,c,b)$. Para cualquier $a,b,c\in\mathbb{R}$, sea $\mathsf{b}(a,b,c)\in\mathbb{R}^n$ definido como $\mathsf{b}(a,b,c)=(a,b,c,\dots,c,b)$. Entonces, $\mathsf{Circ}(a,b,c,\dots,c,b)=\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a,b,c)\big)$ y $\mathsf{b}_\tau(a,b,c)=\mathsf{b}(a,b,c)$, ya que la matriz $\mathsf{Circ}(a,b,c,\dots,c,b)$ es simétrica. Si consideramos el caso $\mathsf{b}(a,b,b)=\mathsf{a}(a,b,b)$, la matriz $\mathsf{Circ}(a,b,b,\dots,b,b)$ ya ha sido analizado en la sección anterior, así que a partir de ahora asumimos $c\neq b$. El caso $c=0$ ha sido analizado en [**46**] bajo el nombre de matriz tridiagonal circulante simétrica, imponiendo la condición $|a|>2|b|>0$; es decir, que $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a,b,0)\big)$ es una matriz estrictamente diagonalmente dominante.

Nótese que $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2,-1,0)\big)$ no es más que el denominado *Laplaciano combinatorio* de un ciclo de n vértices. Más generalmente, para cualquier $q\in\mathbb{R}$, $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)$ es la matriz asociada con el operador de Schrödinger en un ciclo con potencial constante $2(q-1)$ y, por tanto, su inversa es la función de Green de un ciclo de n vértices; o, equivalentemente, puede considerarse la función de Green asociada con un camino con condiciones de contorno periódicas, como vimos en el capítulo anterior. Puesto que la inversión de matrices del tipo $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)$ involucra la resolución de ecuaciones en diferencias de segundo orden con coeficientes constantes, relacionadas con los polinomios de Chebyshev mediante el *Teorema de Estructura* 5.3 del Capítulo 3, recordamos algunas de las propiedades de estos polinomios, en concreto, referentes a los de primera y segunda especie, que nos seran útiles en el desarrollo de nuestro trabajo en esta sección. Véase [**42**] para las demostraciones y detalles adicionales.

(i) Para cualquier sucesión de Chebyshev $\{Q_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que
$$Q_n(x)=\alpha U_{n-1}(x)+\beta U_{n-2}(x),\text{ para cualquier } n\in\mathbb{Z}.$$
(ii) $T_{-n}(x)=T_n(x)$ y $U_{-n}(x)=-U_{n-2}(x)$, para cualquier $n\in\mathbb{Z}$. En particular, $U_{-1}(x)=0$.
(iii) $T_{2n+1}(0)=U_{2n+1}(0)=0$, $T_{2n}(0)=U_{2n}(0)=(-1)^n$, para cualquier $n\in\mathbb{Z}$.
(iv) Dado $n\in\mathbb{N}^*$ entonces, $T_n(q)=1$ sii $q=\cos\big(\frac{2\pi j}{n}\big)$, $j=0,\dots,\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$, mientras que $U_n(q)=0$ sii $q=\cos\big(\frac{\pi j}{n+1}\big)$, $j=1,\dots,n$. En ese caso, $U_{n-1}(q)=(-1)^{j+1}$ y $U_{n+1}(q)=(-1)^j$.
(v) $T_n(1)=1$ y $U_n(1)=n+1$, mientras que $T_n(-1)=(-1)^n$ y $U_n(-1)=(-1)^n(n+1)$, para cualquier $n\in\mathbb{Z}$.
(vi) $T_n(x)=xU_{n-1}(x)-U_{n-2}(x)$ y $T_n'(x)=nU_{n-1}(x)$, para cualquier $n\in\mathbb{Z}$.
(vii) $2(x-1)\sum\limits_{j=0}^{n}U_j(x)=U_{n+1}(x)-U_n(x)-1$, para cualquier $n\in\mathbb{N}$.

Además, para cualquier $q\in\mathbb{R}$ denotamos por $\mathsf{u}(q)$, $\mathsf{v}(q)$ y $\mathsf{w}(q)$ los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuyos componentes son $u_j=U_{j-2}(q)$, $v_j=U_{j-1}(q)$ y $w_j=U_{j-2}(q)+U_{n-j}(q)$, respectivamente.

LEMA 4.7. *Para cualquier* $q\in\mathbb{R}^n$*, se satisfacen las siguientes propiedades:*

(i) $\mathsf{w}_\tau(q) = \mathsf{w}(q)$ *y* $\langle \mathsf{w}(q), 1\rangle = \dfrac{T_n(q)-1}{q-1}$. *Además,* $\mathsf{w}(1) = n1$.

(ii) $\mathsf{w}(q) = 0$ *sii* $q = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, $j = 1, \dots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. *En ese caso,* $\langle \mathsf{u}(q), 1\rangle = \langle \mathsf{v}(q), 1\rangle = 0$.

(iii) *Cuando* n *es par, entonces* $w_{2j-1}(0) = 0$ *y* $w_{2j}(0) = (-1)^{j-1}\big[1 - (-1)^{\frac{n}{2}}\big]$, $j = 1, \dots, \frac{n}{2}$.

(iv) *Cuando* n *es impar, entonces* $w_{2j-1}(0) = (-1)^{\frac{n+1}{2}+j}$, $j = 1, \dots, \frac{n+1}{2}$ *y* $w_{2j}(0) = (-1)^{j-1}$, $j = 1, \dots, \frac{n-1}{2}$.

(iv) *Cuando* n *es impar, entonces* $w_j(-1) = (-1)^{j-1}(n+2-2j)$, $j = 1, \dots, n$.

Demostración. $\mathsf{w}(q) = 0$ sii $U_{n-j}(q) = -U_{j-2}(q)$ para cualquier $j = 1, \dots, n$ y esta igualdad se verifica sii $U_{n-1}(q) = 0$ y $U_{n-2}(q) = -1$. Además, $U_{n-1}(q) = 0$ sii $q = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, $k = 1, \dots, n-1$, por tanto $U_{n-2}(q) = (-1)^{k+1}$, que conduce a $U_{n-2}(q) = -1$ sii $k = 2j$. □

NOTA 4.8. El cociente $\frac{T_n(q)-1}{q-1}$ está bien definido para $q = 1$, porque $T_n(1) = 1$, $U_n(1) = n+1$, y $T_n'(q) = nU_{n-1}(q)$, y usando la regla de l'Hôpital, $\lim\limits_{q\to 1}\langle \mathsf{w}(q), 1\rangle = nU_{n-1}(1) = n^2$. Además, para $q = 1$, se tiene $\mathsf{w}(1) = n1$ así que, $\langle \mathsf{w}(1), 1\rangle = n^2$.

PROPOSICIÓN 4.9. *Para cualquier* $q \in \mathbb{R}$,

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)\mathsf{w}(q) = 2[T_n(q)-1]\mathsf{e}$$

y se verifica:

(i) $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)$ *es invertible sii* $q \neq \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, $j = 0, \dots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, *y*

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)^{-1} = \frac{1}{2[T_n(q)-1]}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{w}(q)\big).$$

(ii) *Si* $q = 1$, *el sistema lineal* $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)\mathsf{h} = \mathsf{v}$ *es compatible sii* $\langle \mathsf{v}, 1\rangle = 0$. *En ese caso, para cualquier* $\gamma \in \mathbb{R}$ *la solución única que satisface* $\langle \mathsf{h}, 1\rangle = \gamma$ *viene dada por*

$$h_j = \frac{\gamma}{n} - \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} |j-i|(n-|i-j|)v_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

(iii) *Si* $q = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, $j = 1, \dots, \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$, *el sistema lineal* $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)\mathsf{h} = \mathsf{v}$ *es compatible sii* $\langle \mathsf{h}, \mathsf{u}(q)\rangle = \langle \mathsf{h}, \mathsf{v}(q)\rangle = 0$.

Demostración. Para demostrar (i), nótese que $\mathsf{w}(q)$ es la primera columna de la función de Green para el operador de Schrödinger de un ciclo de n vértices o, equivalentemente, para un camino de $(n+1)$ nodos con condiciones de contorno periódicas, véase [**10**, Proposición 3.12].

Para demostrar (ii), basta con ver que $\mathsf{G} = (g_{ij})$, donde $g_{ij} = \dfrac{1}{12n}\big(n^2 - 1 - 6|i-j|(n-|i-j|)\big)$, $i, j = 1, \dots, n$ es la función de Green del Laplaciano Combinatorio del ciclo, véase por ejemplo [**12**]. El tercer enunciado (iii), proviene del apartado (ii) del Lema 4.7 que establece los valores de $\mathsf{w}(q) = 0$. Además, en ese caso, $U_{n-1}(q) = 0$, $U_{n-2}(q) = -1$ y $U_n(q) = 1$. Por otro lado, los vectores $\mathsf{u}(q)$ y $\mathsf{w}(q)$ verifican

$$\begin{aligned} 2qu_1 - u_2 - u_n &= -1 - U_{n-2}(q) = 0,\\ -u_1 - u_{n-1} + 2qu_n &= -U_{n-3}(q) + 2qU_{n-2}(q) = U_{n-1}(q) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2qv_1 - v_2 - v_n &= 2q - 2q - U_{n-1}(q) = 0,\\ -v_1 - v_{n-1} + 2qv_n &= -1 - U_{n-2}(q) + 2qU_{n-1}(q) = 0,\end{aligned}$$

así que, $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)\mathsf{u}(q) = \mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)\mathsf{v}(q) = 0$. □

A continuación se presenta y se demuestra el resultado principal de este apartado. Proporcionamos las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de la inversa de la matriz $\mathsf{Circ}(a, b, c, \dots, c, b)$ y obtenemos explícitamente los coeficientes de la inversa, cuando ésta existe.

TEOREMA 4.10. *Para $a, b, c \in \mathbb{R}$, la matriz circulante $\mathsf{Circ}(a, b, c, \dots, c, b)$ es invertible sii*

$$\big(a + 2b + (n-3)c\big) \prod_{j=1}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} \left[a - c + 2(b-c)\cos\Big(\frac{2\pi j}{n}\Big)\right] \neq 0$$

y, en ese caso,

$$\mathsf{Circ}(a, b, c, \dots, c, b)^{-1} = \mathsf{Circ}\big(\mathsf{g}(a, b, c)\big),$$

donde si $a \neq 3c - 2b$,

$$g_j(a, b, c) = \frac{U_{j-2}(q) + U_{n-j}(q)}{2(c-b)[T_n(q) - 1]} - \frac{c}{(a + 2b - 3c)\big(a + 2b + (n-3)c\big)}, \quad j = 1, \dots, n,$$

con $q = \dfrac{c-a}{2(b-c)}$, mientras que

$$g_j(3c - 2b, b, c) = \frac{1}{12n(c-b)}\big(n^2 - 1 - 6(j-1)(n+1-j)\big) + \frac{1}{n^2 c}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Demostración. Del enunciado (iv) del Lema 4.1, una condición necesaria para la invertibilidad de $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a, b, c)\big)$ es $\langle \mathsf{b}(a, b, c), \mathsf{1}\rangle = a + 2b + (n-3)c \neq 0$, por tanto, asumiremos que se satisface esta condición. Además, el enunciado (vi) del mismo Lema establece que la condición necesaria y suficiente para invertir $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a, b, c)\big)$ es la compatibilidad del sistema lineal $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a, b, c)\big)\mathsf{g} = \mathsf{e}$ y, en ese caso, existe una solución única que satisface $\langle \mathsf{g}, \mathsf{1}\rangle = \langle \mathsf{b}(a, b, c), \mathsf{1}\rangle^{-1}$.

Como en el Terorema 4.5,

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a, b, c)\big)\mathsf{g} = \mathsf{e} \text{ sii } \mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a-c, b-c, 0)\big)\mathsf{g} = \mathsf{e} - c\langle \mathsf{b}(a, b, c), \mathsf{1}\rangle^{-1}\mathsf{1}$$

y, además, $\langle \mathsf{g}, \mathsf{1}\rangle = \langle \mathsf{b}(a, b, c), \mathsf{1}\rangle^{-1}$.

Puesto que $\mathsf{b}(a-c, b-c, 0) = (c-b)\mathsf{b}(2q, -1, 0)$, el sistema lineal

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a-c, b-c, 0)\big)\mathsf{g} = \mathsf{e} - c\langle \mathsf{b}(a, b, c), \mathsf{1}\rangle^{-1}\mathsf{1}$$

es equivalente al sistema

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q, -1, 0)\big)\mathsf{g} = \frac{1}{(c-b)\big(a + 2b + (n-3)c\big)}\Big(\big(a + 2b + (n-3)c\big)\mathsf{e} - c\mathsf{1}\Big).$$

Si g es una solución del sistema anterior, entonces

$$\begin{aligned}\frac{(a + 2b - 3c)}{(c-b)\big(a + 2b + (n-3)c\big)} &= \langle \mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q, -1, 0)\big)\mathsf{g}, \mathsf{1}\rangle = \langle \mathsf{g}, \mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q, -1, 0)\big)\mathsf{1}\rangle \\ &= \langle \mathsf{b}(2q, -1, 0), \mathsf{1}\rangle\langle \mathsf{g}, \mathsf{1}\rangle = \frac{(a + 2b - 3c)}{(c-b)}\,\langle \mathsf{g}, \mathsf{1}\rangle.\end{aligned}$$

Como consecuencia, si $a + 2b - 3c \neq 0$, entonces $\langle \mathsf{g}, \mathsf{1}\rangle = \dfrac{1}{a + 2b + (n-3)c} = \langle \mathsf{b}(a, b, c), \mathsf{1}\rangle^{-1}$. Bajo este supuesto; es decir, si $a \neq 3c - 2b$ o, equivalentemente, si $q \neq 1$, entonces $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a, b, c)\big)\mathsf{g} = \mathsf{e}$

sii

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)\mathsf{g} = \frac{1}{(c-b)\big(a+2b+(n-3)c\big)}\Big(\big(a+2b+(n-3)c\big)\mathsf{e}-c\mathsf{1}\Big).$$

Además, si $\prod_{j=1}^{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}\left[a-c+2(b-c)\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right]\neq 0$, entonces $q\neq\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, para cualquier $j=1,\dots,\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$. Usando el apartado (i) de la Proposición 4.9, $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2q,-1,0)\big)$ es invertible y

$$\begin{aligned}\mathsf{g} &= \frac{1}{2(c-b)\big(a+2b+(n-3)c\big)[T_n(q)-1]}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{w}(q)\big)\Big(\big(a+2b+(n-3)c\big)\mathsf{e}-c\mathsf{1}\Big)\\ &= \frac{1}{2(c-b)\big(a+2b+(n-3)c\big)[T_n(q)-1]}\Big(\big(a+2b+(n-3)c\big)\mathsf{w}(q)-c\langle\mathsf{w}(q),\mathsf{1}\rangle\,\mathsf{1}\Big).\end{aligned}$$

Si existe $j=1,\dots,\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$, tal que $a-c+2(b-c)\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)=0$, es decir, $q=\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, entonces, el apartado (ii) del Lema 4.7 asegura

$$\langle\big(a+2b+(n-3)c\big)\mathsf{e}-c\mathsf{1},\mathsf{v}(q)\rangle = \big(a+2b+(n-3)c\big)v_1(q) = a+2b+(n-3)c\neq 0,$$

así que, por el enunciado (iii) de la Proposición 4.9, el sistema lineal $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a,b,c)\big)\mathsf{g}=\mathsf{e}$ es incompatible, $\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(a,b,c)\big)$ es no invertible.

Cuando $a=3c-2b$, esto es $q=1$, entonces $a+2b+(n-3)c=nc$ y el sistema

$$\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2,-1,0)\big)\mathsf{g} = \frac{1}{n(c-b)}(n\mathsf{e}-\mathsf{1})$$

es compatible. Además, utilizando el apartado (ii) de la Proposición 4.9, el vector $\mathsf{g}\in\mathbb{R}^n$ cuyos componentes vienen dados para cualquier $j=1,\dots,n$ por

$$g_j = \frac{1}{n^2c} - \frac{1}{2n(c-b)}(j-1)\big(n-(j-1)\big) + \frac{1}{2n^2(c-b)}\sum_{i=1}^{n}|j-i|(n-|i-j|),$$

es la solución única del sistema que satisface $\langle\mathsf{g},\mathsf{1}\rangle=\dfrac{1}{nc}$. Por último, sólo tenemos que tener en cuenta que $\sum_{i=1}^{n}|j-i|(n-|i-j|)=\dfrac{n}{6}(n^2-1)$, para cualquier $j=1,\dots,n$. □

El caso $a=3c-2b$ en el anterior Teorema, involucra la función de Green de un ciclo. Los casos relacionados con este, aparecen como aplicación en el análisis de los problemas asociados a estas estructuras combinatorias.

COROLARIO 4.11. *Dados $a,b\in\mathbb{R}$, la matriz*

$$\mathsf{A}=\mathsf{Circ}\big(a,a+b(n-1),a+2b(n-2),\dots,a+jb(n-j),\dots,a+b(n-1)\big)$$

es invertible sii $\big(6a+b(n^2-1)\big)b\neq 0$ y

$$\mathsf{A}^{-1}=\frac{6}{n^2\big(6a+b(n^2-1)\big)}\,\mathsf{J}-\frac{1}{2nb}\,\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2,-1,0)\big).$$

COROLARIO 4.12. *Dados $a,b\in\mathbb{R}$, se verifican los siguientes resultados:*

(i) *Si $n=1\,\mathrm{mod}(4)$, entonces $\mathsf{A}=\mathsf{Circ}(a,a,b,b,a,a,\dots,a,a,b,b,a)$ es invertible sii $(a-b)\big(a(n+1)+b(n-1)\big)\neq 0$ y se obtiene*

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{a-b}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(0,1,0)\big) - \frac{2(a+b)}{(a-b)\big(a(n+1)+b(n-1)\big)}\,\mathsf{J}.$$

(ii) *Si* $n = 2 \bmod(4)$*, entonces* $\mathsf{A} = \mathsf{Circ}\big(\frac{a+b}{2}, a, \frac{a+b}{2}, b, \frac{a+b}{2}, \dots, \frac{a+b}{2}, b, \frac{a+b}{2}, a\big)$ *es invertible sii* $(a-b)\big(a(n+1)+b(n-1)\big) \neq 0$ *y se obtiene*

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{a-b}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(0,1,0)\big) - \frac{2(a+b)}{(a-b)\big(a(n+1)+b(n-1)\big)}\,\mathsf{J}.$$

(iii) *Si* $n = 3 \bmod(4)$*, entonces* $\mathsf{A} = \mathsf{Circ}(b, a, a, b, b, \dots, a, a, b, b, a, a)$ *es invertible sii* $(a-b)\big(a(n+1)+b(n-1)\big) \neq 0$ *y se obtiene*

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{a-b}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(0,1,0)\big) - \frac{2(a+b)}{(a-b)\big(a(n+1)+b(n-1)\big)}\,\mathsf{J}.$$

(iv) *Cuando* n *es impar, entonces*

$$\mathsf{A} = \mathsf{Circ}\big(a+nb, a-(n-2)b, \dots, a+(-1)^{j-1}(n+2-2j)b, \dots, a-(n-2)b\big)$$

es invertible sii $b(an+b) \neq 0$ *y se obtiene*

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{4b}\mathsf{Circ}\big(\mathsf{b}(2,1,0)\big) - \frac{a}{b(an+b)}\,\mathsf{J}.$$

Finalizamos esta sección deduciendo la inversa de una matriz tridiagonal circulante simétrica general, sin asumir la hipótesis de diagonal dominancia. Obsérvese la diferencia entre nuestro resultado y la metodologia numérica utilizada en [**46**].

COROLARIO 4.13. *Para* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $b \neq 0$*, la matriz circulante* $\mathsf{Circ}(a, b, 0, \dots, 0, b)$ *es invertible sii*

$$\prod_{j=0}^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} \left[a + 2b\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right] \neq 0$$

y, en ese caso

$$\mathsf{Circ}(a, b, 0, \dots, 0, b)^{-1} = \mathsf{Circ}\big(\mathsf{g}(a, b, 0)\big),$$

donde

$$g_j(a,b,0) = \frac{(-1)^j}{2b[1-(-1)^n T_n(\frac{a}{2b})]}\left[U_{j-2}\Big(\frac{a}{2b}\Big) + (-1)^n U_{n-j}\Big(\frac{a}{2b}\Big)\right], \quad j = 1, \dots, n.$$

Nótese que la hipótesis de matriz diagonalmente dominante $|a| > 2|b|$, claramente implica que $a + 2b\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \neq 0$ para cualquier $j = 0, \dots, n$.

Bibliografía

[1] R.P. Agarwal. *Difference equations and inequalities*. Marcel, 2000.

[2] D. Aharonov, A. Beardon, K. Driver. Fibonacci, Chebyshev and Orthogonal Polynomials. *Amer. Math. Monthly*, 112(7):612–630, 2005.

[3] R. Álvarez-Nodarse, J. Petronilho, N.R. Quintero. Spectral properties of certain tridiagonal matrices. *Linear Algebra Appl.*, 436:682–698, 2012.

[4] V. Anandam. *Harmonic functions and potentials on finite or infinite networks*, volume 12 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer, Heidelberg; UMI, Bologna, 2011.

[5] M. Bahsi, S. Solak. On the circulant matrices with arithmetic sequence. *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, 5(25-28):1213–1222, 2010.

[6] J. Baranger, M. Duc-Jacquet. Matrices tridiagonales symétriques et matrices factorisables. *RIRO*, 5:61–66, 1971.

[7] W.W. Barrett. A theorem on inverses of tridiagonal matrices. *Linear Algebra Appl.*, 27:211–217, 1979.

[8] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas. Solving boundary value problems on networks using equilibrium measures. *J. Funct. Anal.*, 171(1):155–176, 2000.

[9] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas. Potential Theory for Schrödinger operators on finite networks. *Revista Matemática Iberoamericana*, 21(3):771–818, 2005.

[10] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas. Eigenvalues, Eigenfunctions and Green's Functions on a Path via Chebyshev Polynomials. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 3:282–302, 2009.

[11] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas, J.M. Gesto. Characterization of symmetric M-matrices as resistive inverses. *Linear Algebra Appl.*, 430:1336–1349, 2009.

[12] E. Bendito, A. Carmona, A.M. Encinas, M. Mitjana. Generalized inverses of symmetric M-matrices. *Linear Algebra Appl.*, 432(9):2438 – 2454, 2010.

[13] T. Biyikoglu, J. Leydold, P.F. Stadler. *Laplacian eigenvectors of graphs*, volume 1915 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 2007. Perron-Frobenius and Faber-Krahn type theorems.

[14] A. Carmona, A.M. Encinas, S. Gago, M.J. Jiménez, M. Mitjana. The inverses of some circulant matrices. *Appl. Math. Comput.*, 270:785–793, 2015.

[15] A. Carmona, A.M. Encinas, S. Gago, M. Mitjana. Green operators of networks with a new vertex. Aparecerá en *Linear Algebra Appl.*, 2015.

[16] A. Carmona, A.M. Encinas, M. Mitjana. Potential Theory on Finite Networks. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 46(1):113–120, 2014.

[17] A. Carmona, A.M. Encinas, M. Mitjana. Green matrices associated with generalized linear polyominoes. *Linear Algebra Appl.*, 468:38–47, 2015.

[18] A. Carmona, A.M. Encinas, M. Mitjana. Perturbations of discrete elliptic operators. *Linear Algebra Appl.*, 468:270–285, 2015.

[19] R.H. Chan, T.F. Chan. Circulant preconditioners for elliptic problems. *J. Numer. Linear Algebra Appl.*, 1(1):77–101, 1992.

[20] Y. Chen, S. Kirkland, M. Neumann. Group generalized inverses of M-matrices associated with periodic and nonperiodic Jacobi matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 39:325–340, 1995.

[21] F. Chung, S.T. Yau. Discrete Green's functions. *J. Combin. Theory Ser. A*, 91(1-2):191–214, 2000. In memory of Gian-Carlo Rota.

[22] S.Y. Chung, C.A. Berenstein. ω-Harmonic functions and inverse conductivity problems on networks. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(4):1200–1226 (electronic), 2005.

[23] E.A. Coddington, N. Levinson. *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw Hill, 1995.

[24] I.B. Collings, I. Vaughan, L. Clarkson. A Low-Complexity Lattice-Based Low-PAR Transmission Scheme for DSL Channels. *IEEE Trans. Commun.*, 52:755 – 764, 2004.

[25] D. Cvetković, S.K. Simić. Towards a spectral theory of graphs based on the signless Laplacian. II. *Linear Algebra Appl.*, 432(9):2257–2272, 2010.

[26] C.M. da Fonseca. A note on the inversion od acyclic matrices. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 31:307–317, 2006.

[27] C.M. da Fonseca, J. Petronilho. Explicit inverse of some tridiagonal matrices. *Linear Algebra Appl.*, 325:7–21, 2001.

[28] C.M. da Fonseca, J. Petronilho. Explicit inverse of a tridiagonal k–Toeplitz matrix. *Numer. Math.*, 100:457–482, 2005.

[29] Y. Colin de Verdière. Réseaux électriques planaires. I. *Comment. Math. Helv.*, 69(3):351–374, 1994.

[30] Y. Colin de Verdière. Spectre d'opérateurs différentiels sur les graphes. In *Random walks and Discrete Potential Theory (Cortona, 1997)*, Sympos. Math., XXXIX, pages 139–164. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[31] M.A. El-Shehawey, El-Shreef, Al-Henawy. Analytical inversion of general periodic tridiagonal matrices. *J. Math. Anal. Appl.*, 345:123–134, 2008.

[32] A.M. Encinas, M.J. Jiménez. Floquet Theory for second order linear difference equations. *J. Diff. Eq. and App.*, doi: 10.1080/10236198.2015.1100609:1–23, 2015.

[33] M. Fiedler. Some characterizations of symmetric inverse M-matrices. *Linear Algebra Appl.*, 275–276:179–187, 1998.

[34] L. Fuyong. The inverse of circulant matrix. *Appl. Math. Comput.*, 217(21):8495 – 8503, 2011.

[35] F.P. Gantmacher, M.G.Krein. *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2002 (Translation based on the 1941 Russian original).

[36] R.M. Gray. Toeplitz and circulant matrices. A review. Technical report, Standford University, 2001.

[37] Y. Ikebe. On inverses of Hessenberg matrices. *Linear Algebra Appl.*, 24:93–97, 1979.

[38] S. Karlin. *Total Positivity, vol. I*. Stanford University Press, stanford, California, 3er edition, 1968.

[39] R.K. Mallik. On the solution of a second order linear homogeneous difference equation with variable coefficients. *J. Math. Anal. Appl.*, 215:32–47, 1997.

[40] R.K. Mallik. The inverse of a tridiagonal matrix. *Linear Algebra Appl.*, 325:109–139, 2001.

[41] T.L. Markham. Nonnegative matrices whose inverses are M-matrices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 36:326–330, 1972.

[42] J.C. Mason, D.C. Handscomb. *Chebyshev Polynomials*. Chapman & Hall/CRC, 2003.

[43] J.J. McDonald, R. Nabben, M. Neumann, H. Scheider, M.J. Tsatsomeros. Inverse tridiagonal Z-Matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 45:75–97, 1998.

[44] G. Meurant. A review on the inverse of symmetric tridiagonal and block tridiagonal matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13:707–728, 1992.

[45] R. Nabben. On green's matrices of trees. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 22:1014–1026, 2001.

[46] O. Rojo. A new method for solving symmetric circulant tridiagonal systems of linear equations. *Computers Math. Applic.*, 20:61–67, 1990.

[47] S.Q. Shen, J.M. Cen, Y. Hao. On the determinants and inverses of circulant matrices with Fibonacci and Lucas numbers. *App. Math. Comput.*, 217(23):9790 – 9797, 2011.

[48] Y. Shogenji, M. Yamasaki. Hardy's inequality on finite networks. *Mem. Fac. Sci. Eng. Shimane Univ. Ser. B Math. Sci.*, 32:75–84, 1999.

[49] G. Stolz, R. Weikard. Notes for the seminar on Jacobi Marices. Technical report, University of Alabama at Birmingham, 2004.

[50] H. Urakawa. Heat kernel and Green kernel comparison theorems for infinite graphs. *J. Funct. Anal.*, 146(1):206–235, 1997.

[51] R.A. Usmani. Inversion of Jacobi's tridiagonal matrix. *Computers Math. Applic.*, 27:59–66, 1993.

[52] R.A. Usmani. Inversion of a tridiagonal Jacobi matrix. *Linear Algebra Appl.*, 212/213:413–414, 1994.

[53] R. Vandebril. *Semiseparable matrices and the symmetric eigenvalue problem*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2004. Accesible en la página web de R. Vandebril.

[54] R. Vandebril, M. Van Barel, G. Golub, N. Mastronardi. A bibliography on semiseparable matrices. *Calcolo*, 42:249–270, 2005.

[55] J.Q. Wang, C.Z. Dong. Inverse matrix of symmetric circulant matrix on skew field. *Int. J. Algebra*, 1(9-12):541–546, 2007.

[56] Y. Yazlik, N. Taskara. On the inverse of circulant matrix via generalized k-Horadam numbers. *App. Math. Comput.*, 223:191–196, 2013.