

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CATALUNYA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TELEMÁTICA



TESIS DOCTORAL

**Topologías para la distribución de
contenidos en redes de comunicación**

Autor:
Sergio MACHADO

Director:
Dr. Javier OZÓN

NOVIEMBRE, 2015

A Meri, por su infinita paciencia
A Eva, Marta, Alba y Óscar, por poner a prueba mi infinita paciencia
A Javi, liróforo celeste, a quien púberes canéforas ofrendan el acanto

AGRADECIMIENTOS

Quisiera en primer lugar agradecer a Javier Ozón su dedicación e implicación en el trabajo presentado en esta tesis y, sobre todo, que la haya dejado libre de anacolutos. También a Francisco Barceló, que me abrió las puertas del grupo de investigación *Grup de Recerca en Xarxes de Comunicacions Cel·lulars i Ad-hoc* y que ha sido un acicate para acabar la tesis. Igualmente a mis compañeros de grupo Enrica Zola, Israel Martín, Alfonso Rojas y José Yúfera. A este último doblemente puesto que con él compartí la primera asignatura que impartí como profesor de la entonces EPSC, así como horas de cafés y comidas y puesto que con él he formado una red de distribución de contenidos *peer-to-peer*. En general, para no dejarme a nadie, a todos mis compañeros de la EETAC. Por último a Meri, mi mujer, por presionarme para que acabara la tesis de una (irreproducible) vez. Ahora que la acabo me tendré que ir buscando otra excusa para escaquearme de cumpleaños y otros eventos sociales. Otra línea futura.

Abstract

The *peer-to-peer* (P2P) overlay networks are distribution topologies that take advantage of the ability that their nodes have to forward the information that they receive. For the particular case of video transmission using P2P networks, known as streaming P2P, there are implementations based on BitTorrent protocol data dissemination for files downloading. These networks use a pseudorandom topology which makes difficult to determine both the size of the network –defined as the maximum number of nodes which can receive information with a given quality of service– and the distribution delay. Despite this lack of definition, in the current thesis we present a structured network in which the nodes establish both incoming and outgoing connections according to a deterministic joining algorithm. That topology allows to calculate exactly the number of nodes that may join the network and that in stable conditions may get the flow with guaranteed quality of service, and also one very fitted bound for the total distribution delay.

In our case, we have defined networks which contain a single source node with a bandwidth greater than the bandwidth of the information flow, and also a set of nodes with a bandwidth lower than the bandwidth of the flow. This constraint is used to distinguish the high capacity nodes from the terminal nodes which either have physical limitations due to their access link bandwidth or do not consider to allocate all their bandwidth to the forwarding of the information flow. In fact, high capacity nodes can be considered sources either because they produce the flow physically or because, receiving it from another distribution network, they forward it as source to the low bandwidth nodes that belong to the P2P network.

Once the distribution topology is described, we define the mathematical model for its analysis. With this purpose, we normalize the flow bandwidth and we define a network joining algorithm with the aim of optimizing distribution delay. Following, the network topology is characterized by means of three parameters: the number of nodes that can be served directly by the source, the number of download connections that must arrive to a node to guarantee the reception at unitary rate, and the maximum number of upload connections that a node can establish. Likewise, the information flow is segmented into generic information units called objects, which are transmitted into the network by means of a certain set of dissemination trees. The number of dissemination trees corresponds to the number of download connections of a node. With this background material, we calculate

the maximum number of peers which can be connected, under stable conditions, to the network, and also a very fitted bound for the transmission delay. Besides, we present a simulation that allows to evaluate the performance of the described topology in the field of VANET networks. Finally, in the last chapter we present a proposal for application-layer multicast distribution network which can be used to send the information flow from the node that initially produces it to the source nodes of the P2P distribution network that we have described.

Resumen

Las redes superpuestas *peer-to-peer* (P2P) son topologías de distribución que aprovechan la capacidad que tienen sus nodos de retransmitir a otros nodos la información que reciben. En el caso particular de la transmisión de vídeo mediante redes P2P, conocida como *streaming* P2P, existen implementaciones basadas en la diseminación de datos del protocolo BitTorrent de descarga de ficheros. Estas redes emplean una topología pseudoaleatoria que hace difícilmente caracterizable tanto el tamaño que puede tener la red –entendido como el máximo número de nodos a los que se puede garantizar una calidad de servicio determinada– como el retardo de distribución. Frente a esta falta de definición, en el presente trabajo se presenta una red estructurada en la que los nodos establecen conexiones tanto de recepción como de retransmisión según un algoritmo de ingreso determinista. Dicha topología permite calcular exactamente el número máximo de nodos que pueden formar la red y que, en condiciones de estabilidad, reciben el flujo con garantías de calidad, así como una cota muy ajustada del retardo total de distribución.

En nuestro caso, hemos definido redes formadas por un único nodo fuente con una capacidad mayor que el ancho de banda de la transmisión del flujo, así como por una serie de nodos cuya capacidad es inferior al ancho de banda de dicho flujo. Esta restricción sirve para separar los nodos de alta capacidad de los nodos terminales que o bien tienen limitaciones físicas debido a la capacidad de su enlace o bien no quieren destinar toda su capacidad a la retransmisión del flujo de información. De hecho, los nodos de alta capacidad pueden considerarse fuentes o bien porque generan físicamente el flujo o bien porque, recibéndolo a través de otra red de distribución, lo retransmiten como fuente a los nodos de baja capacidad que conforman la red P2P.

Una vez descrita la topología de distribución, se define el modelo matemático para su análisis. Para ello se normaliza el ancho de banda del flujo y se propone un algoritmo de ingreso de nodos en la red con el objeto de optimizar el retardo de distribución. A continuación, se caracteriza la topología de la red mediante tres parámetros: el número de nodos a los que puede servir el nodo fuente, el número de conexiones de descarga que deben llegar a un nodo para recibir el flujo a tasa unitaria y el número máximo de conexiones de subida que puede establecer un nodo. Asimismo, se segmenta el flujo de información en unidades genéricas, denominadas objetos, que se diseminan en la red a través de un determinado conjunto de árboles de difusión. El número de árboles de difusión

se corresponde con el número de conexiones de descarga de los nodos. Todo esto permite obtener una expresión del número de nodos que, en condiciones de estabilidad, pueden conectarse a la red, así como una cota muy ajustada del retardo total de transmisión. Presentamos además una simulación que permite evaluar el rendimiento de la topología descrita en el entorno de redes VANET. De forma complementaria, en el último capítulo se presenta una propuesta de distribución multicast en la capa de aplicación que puede emplearse para transmitir el flujo de información desde el nodo que lo produce inicialmente hasta los nodos fuentes de las redes P2P de distribución.

Índice general

Abstract	7
Resumen	9
Índice general	11
Índice de figuras	13
Índice de cuadros	17
1. Introducción	19
2. Redes estructuradas para la distribución de vídeo	25
2.1. Modelo matemático	25
2.2. Algoritmo de ingreso	29
2.3. Planificación y retardo de distribución	36
3. Análisis del grafo de distribución de capacidad mínima	57
3.1. Grafo de distribución de capacidad mínima	57
3.2. Cotas del número de niveles H	62
3.3. Orden del grafo de distribución de capacidad mínima	72
3.4. Número de niveles del grafo de distribución de capacidad mínima	77
3.5. Hijos ganancia del grafo de distribución de capacidad mínima	83
3.6. Nuevo cálculo del orden del grafo de distribución de capacidad mínima	86
4. Análisis del grafo de distribución general	95
4.1. Construcción del grafo de distribución	95
4.2. Orden del grafo de distribución	97
4.3. Cotas de la longitud del grafo de distribución	99
4.3.1. Primera cota de la longitud del grafo de distribución	105
4.3.2. Segunda cota de la longitud del grafo de distribución	111
4.3.3. Tercera cota de la longitud del grafo de distribución	117
4.4. Evaluación de la cota de la longitud del grafo de distribución	124

5. Simulación en redes VANET	131
5.1. Configuración de la simulación	132
5.1.1. Simulación de la transmisión de vídeo	133
5.1.2. Implementación del protocolo de transmisión	135
5.1.3. Simulación de la movilidad de los nodos	137
5.1.4. Simulación del flujo de vídeo	138
5.2. Resultados de la simulación	140
6. Distribución multicast	157
6.1. Modelo del sistema de paso de mensajes	157
6.2. Algoritmo multicast para la distribución de un mensaje	159
6.3. Algoritmo multicast para un flujo de mensajes	166
6.4. Algoritmo MSM-s con restricción temporal	167
6.5. Análisis de MSM-s	169
6.5.1. Retardo de multicast	169
6.5.2. Cotas analíticas para M_1	171
6.5.3. Cota inferior y superior del retardo en MSM-s	175
6.5.4. Cota general para M_σ	177
6.5.5. Fiabilidad de MSM-s	177
7. Conclusiones y líneas futuras	181
7.1. Conclusiones	181
7.2. Líneas futuras	183
Bibliografía	187

Índice de figuras

2.1. Grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ and $u = 2$	32
2.2. Grafos de distribución para $\alpha = 9$, $K = 2$ and $u = 1$	34
2.3. Distribución de los objetos en el grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ y $u = 2$	37
2.4. Los $K = 3$ árboles por los cuáles se distribuye cada uno de los subflujos en $G_{4,3,2} = (V, E)$	38
2.5. Cronograma de la distribución de los primeros K objetos en $G_{4,3,2} = (V, E)$	40
2.6. Nueva distribución de los objetos en el grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ y $u = 2$	41
2.7. Los $K = 3$ árboles por los cuales se distribuye cada uno de los subflujos en $G_{4,3,2} = (V, E)$ con la planificación de la Figura 2.6.	42
2.8. Cronograma de la distribución de los primeros K objetos en $G_{4,3,2} = (V, E)$ con la planificación de la Figura 2.6.	43
2.9. Grafo de distribución para $\alpha = 6$, $K = 5$ and $u = 3$	44
2.10. Distribución de objetos para $G_{6,5,3} = (V, E)$ en el nodo final utilizando la planificación simple del Cuadro 2.1.	45
2.11. Distribución de objetos para $G_{6,5,3} = (V, E)$ en el nodo final utilizando la planificación del Cuadro 2.2, que aprovecha los dobles saltos $9 \rightarrow 12$ y $11 \rightarrow 13$	48
2.12. Distribución de objetos para $G_{6,5,3} = (V, E)$ en el nodo final utilizando la planificación del Cuadro 2.3, que aprovecha los dobles saltos $6 \rightarrow 10$ y $11 \rightarrow 13$	49
3.1. Grafo de capacidad mínima para $\alpha = 11$, $K = 3$	60
3.2. Grafo de distribución de capacidad mínima $G_{7,2,1} = (V, E)$	61
3.3. Grafo de distribución de capacidad mínima para $\alpha = 10$, $K = 2$	68
3.4. Grafo de distribución de capacidad mínima para $\alpha = 10$, $K = 3$	69
3.5. Grafos que muestran que $H = H_t + 1$ si el único nodo del último nivel es un hijo ganancia o que H_t en caso contrario.	70
3.6. Aparición del primer hijo ganancia en un nivel l	78
3.7. Aparición de dos hijos ganancia consecutivos en los niveles $l - 1$ y l	79
4.1. Grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ and $u = 2$	96
4.2. Orden como función de α para diferentes valores de K y u	99
4.3. Grafo de distribución para $\alpha = 11$, $K = 7$ y $u = 4$	105

4.4.	Cálculo del número máximo de nodos a partir del nivel L_t	107
4.5.	Crecimiento logarítmico de la longitud en función de α . La función se calcula para diferentes valores de u y K	115
4.6.	Grafo de distribución para $\alpha = 12$, $K = 10$ y $u = 7$	121
4.7.	Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 1$ y $K = 4$ en función del valor de α	125
4.8.	Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 1$ y $K = 3$ en función del valor de α	125
4.9.	Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 1$ y $K = 2$ en función del valor de α	126
4.10.	Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 5$ y $K = 8$ en función del valor de α	127
4.11.	Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 2$ y $K = 3$ en función del valor de α	128
4.12.	Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 3$ y $K = 4$ en función del valor de α	128
5.1.	Patrón de GOP del flujo de vídeo simulado.	139
5.2.	Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 2$, $u = 1$	141
5.3.	Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 3$, $u = 1$	141
5.4.	Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 4$, $u = 1$	141
5.5.	Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 3$, $u = 2$	142
5.6.	Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 4$, $u = 3$	143
5.7.	Retardo de distribución por nivel para $\alpha = 10$ y diferentes valores de K y u	144
5.8.	Pérdidas de paquetes para $\alpha = 10$ y diferentes valores de K y u	144
5.9.	Retardo teórico en el grafo $G_{10,2,1}$ considerando un tiempo de transmisión de 3,73 ms. Las aristas rojas representan el flujo f_0 y las aristas azules el flujo f_1	147
5.10.	Flujo de transmisión desde el nodo $\alpha = 10$ en $G_{10,4,3}$. Las etiquetas en cada enlace indican los flujos, numerados del f_0 al f_3 , que cada nodo envía a sus hijos. Las etiquetas en rojo indican los flujos degradados heredados del nodo 10.	150
5.11.	Porcentaje de pérdida de paquetes para $\{K, u\} \in \{\{3, 2\}, \{4, 3\}\}$	151
5.12.	Efecto de la pérdida de un cuadro en la decodificación del flujo.	152
5.13.	Tiempo medio no decodificable en $G_{10,3,2}$ debido a las pérdidas.	154
5.14.	Tiempo medio no decodificable en $G_{10,2,1}$ debido a las pérdidas.	154
6.1.	Árboles de transmisión	158
6.2.	El modelo postal. La latencia \mathcal{L}_{pq} es igual al tiempo de transmisión μ_p más el retardo de comunicación entre p and q	159

-
- 6.3. Ejemplo de una red en que el modelo $EMPS(n, \mathcal{L}, \mu)$ no se corresponde con el problema del árbol generador mínimo. La etiqueta de cada arista representa la latencia \mathcal{L}_{pq} de comunicación entre los nodos p y q unidos por la arista. El tiempo de transmisión es $\mu = 1$ en toda la red. Para cada nodo, se muestra entre paréntesis el tiempo multicast, es decir, el tiempo en que el nodo recibe el mensaje. 160
- 6.4. Ejemplo de la aplicación del algoritmo SMM en un grafo completo. 164
- 6.5. Ejemplo de una red en que SMM no es óptimo. El tiempo de transmisión es 1 para todos los nodos. A la izquierda se aplica SMM con un retardo total de 7 y a la derecha otro orden de transmisión con un retardo final igual a 5. 165
- 6.6. El límite s_q de retransmisiones del nodo q puede ser diferente para cada nodo q , en función del tiempo de transmisión de los nodos. 168
- 6.7. Ejemplo de una red donde $s_r(\sigma) \geq s_r(\sigma + 1)$. En particular se tiene que $s_r(3) = 3$ y $s_r(4) = 2$ 171
- 6.8. El árbol de Fibonacci. Cada nodo reenvía el mensaje dos veces. 175
- 6.9. Árbol multicast para el cálculo de la fiabilidad de MSM-s. 178

Índice de cuadros

2.1.	Distribución de objetos hasta el último nodo 13 en $G_{6,5,3} = (V, E)$ con la planificación simple de la Figura 2.10.	46
2.2.	Distribución de objetos hasta el último nodo 13 en $G_{6,5,3} = (V, E)$ con la planificación de la Figura 2.11.	47
2.3.	Distribución de objetos hasta el último nodo 13 en $G_{6,5,3} = (V, E)$ con la planificación de la Figura 2.12.	47
3.1.	Valores de $ G_{\text{mín}} $ y N'_{min} para distintos grafos de distribución de capacidad mínima.	73
4.1.	Valores del grafo de distribución $G_{4,3,2}$	96
5.1.	Configuración de un nodo en Ns-2	133
5.2.	Valores típicos del exponente de pérdidas de camino, β	134
5.3.	Valores típicos de la desviación de <i>shadowing</i> , σ_{dB} (dB)	134
5.4.	Atributos del agente	136
5.5.	Atributos del agente	136
5.6.	Configuración del modelo espacial en VanetMobiSim	137
5.7.	Configuración de la movilidad en VanetMobiSim	138
5.8.	Estadísticas del tamaño de cuadro del flujo de vídeo de la simulación.	140
5.9.	Estadísticas de la tasa de bit del flujo de vídeo de la simulación.	140
5.10.	Orden y longitud de los grafos de la simulación.	140
5.11.	Nodos por nivel para $\alpha = 10, K = 4, u = 3$	142
6.1.	$N(t)$ vs. La serie de Fibonacci.	174
6.2.	Número medio de nodos que reciben el mensaje para MSM-1 en función de n y P_c	180

Capítulo 1

Introducción

Las redes superpuestas de tipo *peer-to-peer* (P2P) [1] ofrecen una alternativa en internet a la transmisión de información desde una única fuente a un determinado número de receptores denominados *peers* o *nodos*. A esta solución se le suele denominar *streaming* P2P. El objetivo principal de los mecanismos de *streaming* P2P es proporcionar un flujo de calidad a los nodos individuales de modo escalable. Para conseguir la escalabilidad un mecanismo de *streaming* P2P tiene que utilizar eficientemente los recursos que proporcionan los nodos participantes, principalmente el ancho de banda de subida.

Teóricamente, una solución P2P puede definirse sobre cualquier tipo de red y potencialmente sobre diferentes capas de la pila de protocolos. Sin embargo, la mayoría de implementaciones P2P y su investigación asociada se ha centrado en redes superpuestas sobre la capa de aplicación. Las redes IP, y muy en particular Internet, constituyen mayoritariamente la red subyacente a las redes P2P.

Las topologías de P2P *streaming* –es decir, las estructuras dibujadas por la conexión de los distintos nodos de la red– propuestas en la literatura se subdividen en dos clases principales. Un primer tipo organiza los nodos en múltiples árboles superpuestos que distribuyen cada uno de los subflujos en que se divide el flujo principal. El contenido de cada subflujo se envía por el correspondiente árbol desde la fuente al resto de nodos de la red. El segundo tipo lo conforman las topologías basadas en mallas. En estas redes, los nodos participantes forman una malla y reclaman el contenido que les falta a los nodos con los que tienen conexión en un orden pseudoaleatorio y, potencialmente, a distintas tasas de transmisión.

Las topologías basadas en árboles existentes en la literatura [2, 3] utilizan un flujo codificado con técnicas de *Multiple Description Coding* (MDC) que crea tantos árboles de distribución como subflujos genera la codificación MDC. Esta codificación es una técnica que fragmenta un flujo de vídeo en n subflujos ($n \geq 2$) a los que se denomina *descriptores*. A cada subflujo o descriptor se le asigna un árbol de distribución. Para descodificar el flujo se puede utilizar cualquier descriptor. Sin embargo, la calidad aumenta con el número

de descriptores que un nodo puede recibir en paralelo. En las topologías con ese tipo de codificación, los nodos se van uniendo a los diversos árboles en función de su capacidad de descarga.

La transmisión de los paquetes en este tipo de topología es simple: cada nodo reenvía a todos sus hijos cualquier paquete recibido desde el descriptor correspondiente al árbol o árboles a los que está conectado como hijo. Tanto [2] como [3] siguen una estrategia similar para la construcción de los diferentes árboles. Cada nodo ingresa como nodo interno –es decir, como un nodo que reenvía paquetes– en solo uno de los árboles y como nodo hoja –es decir, como nodo que sólo recibe paquetes– en el resto de árboles. Cuando un nodo ingresa en el sistema contacta con un nodo de arranque para identificar a sus padres en un determinado número de árboles (número que depende de su capacidad de descarga).

Con el fin de mantener balanceado el número de nodos internos en cada uno de los árboles, el nodo que ingresa se añade como nodo interno en el árbol formado por un menor número de nodos. Para mantener árboles con el menor diámetro posible, el ingreso como nodo interno se hace asignándolo como hijo de un nodo interno que pueda admitir un nodo más al que dar servicio o que tenga como hijo a un nodo hoja. En este último caso, el nuevo nodo reemplaza al nodo hijo y este tiene que reingresar nuevamente como nodo hoja en el árbol. Cuando un nodo interno egresa del árbol, tanto cada uno de sus hijos como los subárboles con raíz en ellos quedan desconectados del árbol original y, por lo tanto, deben volver a unirse al árbol. Los nodos del subárbol desconectado esperan un tiempo a que el nodo raíz del subárbol pueda reingresar como nodo interno en el árbol. En caso de que este nodo no pueda reingresar, todos los nodos reintentarán un ingreso para mantenerse en el árbol con la misma categoría, es decir, como nodos internos o como nodos hoja, que ya tenían en el momento de la desconexión del subárbol.

En las topologías basadas en mallas [4, 5] los nodos participantes dibujan aleatoriamente una topología conectada que forma la malla. Cada nodo intenta mantener un cierto número de padres, es decir, nodos que le sirven datos, y a su vez sirve a un determinado número de nodos hijos, pudiendo establecerse además una relación bidireccional, esto es, un nodo que es padre de otro nodo puede ser hijo del otro. A la hora de ingresar, tal y como sucede en las topologías basadas en árboles, un nodo contacta con un nodo de arranque que le proporciona un conjunto de nodos ingresados que le pueden servir potencialmente como padres. La elección de estos nodos se realiza de modo aleatorio. Pese a que la relación entre nodos puede ser bidireccional en el sentido que un nodo puede servir a otro del que a su vez recibe datos, se han presentado resultados que sostienen que las topologías basadas en malla ofrecen un mejor rendimiento cuando las relaciones padre-hijo son unidireccionales [5].

La distribución del contenido se basa en una diseminación de datos muy similar a la política de BitTorrent para el intercambio de archivos P2P. Los datos se empaquetan en unidades denominadas segmentos. Los nodos informan periódicamente a sus hijos de los segmentos de los que disponen y estos piden a sus padres los segmentos que aún no han recibido según un algoritmo de planificación específico. Si las topologías basadas en árbol se fundamentan en la construcción topológica de los árboles, las topologías basadas en

mallas tienen como pieza principal el algoritmo de planificación que persigue dos objetivos fundamentales: por un lado, utilizar de modo eficiente el ancho de banda de todos los nodos padres y, por otro, garantizar la llegada a tiempo de los paquetes transmitidos.

Debido a la habitual diseminación de datos y a la redundancia de conexiones padre-hijo que proporcionan las topologías basadas en mallas, estas suelen considerarse más robustas. Sin embargo, estas redes presentan determinados inconvenientes. En primer lugar, un excedente de tráfico debido a la necesidad de informar periódicamente a los hijos de la disponibilidad de datos. Además, los datos no se tratan como el flujo continuo que caracteriza las transmisiones en *streaming* sino como una partición de vídeo en segmentos de longitud fija, tal y como ocurre en la segmentación de archivos en BitTorrent. Los algoritmos de planificación gestionan los segmentos mediante una ventana deslizante, lo que provoca un retardo adicional en la transmisión de datos. Por último, la imposibilidad de caracterizar en términos de orden y diámetro el grafo que resulta de estas topologías malladas –cuyos enlaces son construidos aleatoriamente– hace que no se pueda acotar ni la capacidad de la red ni tampoco el retardo en la distribución de un paquete desde que se emite hasta que se recibe en todos los nodos de la red.

En el presente trabajo proponemos y analizamos en términos de orden y longitud una topología basada en un multigrafo dirigido, que denominamos *grafo de distribución*. Sobre el grafo de distribución se dibuja un determinado número de árboles de distribución. El número de árboles depende del ancho de banda de los nodos de la red y se define como un parámetro de diseño del sistema. A diferencia de las propuestas citadas, nuestro estudio se basa en la existencia de un nodo fuente que dispone de un ancho de banda mayor a la tasa del vídeo transmitida mediante *streaming* P2P y que constituye la raíz de los árboles construidos, mientras que el resto de nodos de la red disponen de una capacidad de transmisión menor a la tasa de transmisión de vídeo. Esta menor capacidad se puede interpretar como una imposibilidad física debida al tipo de enlace o también como una restricción que disminuye el consumo de ancho de banda de subida de los nodos conectados a la red.

Aunque en términos globales esta última restricción significa la pérdida de capacidad disponible en la red, garantiza un consumo restringido del ancho de banda de subida de los nodos, contrariamente a lo que ocurre en los sistemas de *streaming* P2P basados en malla. En el caso en que se consideren nodos con un ancho de banda superior al de la tasa de transmisión de vídeo, estos pueden constituirse en nodos fuentes de nuevos grafos de distribución para el mismo flujo de información. Esta idea no es nueva en sistemas P2P. El protocolo FastTrack, por ejemplo, considera unos nodos especiales, denominados *supernodos*, encargados de aliviar la carga de los servidores de su sistema de distribución de ficheros.

De esta forma, los nodos de alta capacidad pueden considerarse fuentes o bien porque generan físicamente el flujo de la información o bien porque, recibéndolo a través de otra red de distribución, lo retransmiten como fuente a los nodos de baja capacidad que conforman la red P2P. La distribución del flujo original hasta cada uno de esos supernodos o nodos

fuente de los grafos de distribución está fuera del propósito de este estudio. Como posible solución, con todo, puede plantearse una distribución multicast IP o alguna de las soluciones de multicast P2P sobre el nivel de aplicación propuestas en la literatura [6], entre las que se cuenta la que aquí se expone en el Capítulo 6.

A diferencia de las anteriores topologías, nuestra propuesta teórica considera que todos los nodos son homogéneos, es decir, que todos tienen la misma capacidad. Esto no supone una restricción para la participación de nodos de distintas capacidades, puesto que un nodo puede ingresar en la red haciendo uso de un ancho de banda menor al de su capacidad real e idéntico al del resto de nodos. Igualmente, en caso de que se permitiese la formación de redes heterogéneas, es decir, compuestas de nodos conectados con distintos anchos de banda, los resultados calculados sobre grafos homogéneos pueden emplearse como cotas de los parámetros de funcionamiento de la red heterogénea.

En nuestro caso, hemos considerado como parámetro de referencia del grafo la *longitud* en vez del *diámetro*. Recuérdese que la *distancia* entre dos nodos se define como la longitud del camino más corto que los une –es decir, como el mínimo número de aristas que hay que recorrer para llegar de un nodo a otro– y que el diámetro mide la mayor de las distancias entre dos nodos del grafo, es decir, el camino más corto que une los dos nodos más distantes entre sí del grafo.

Por otro lado, dado un nodo fuente, se define la *profundidad* de un nodo como la longitud del camino más largo que une el nodo fuente con el nodo. Asimismo, se define la *longitud* del grafo como la mayor profundidad de todos los nodos del grafo. De este modo, la longitud representa el camino más largo que une el nodo fuente con el resto de nodos del grafo. En nuestro caso la longitud resulta más relevante que el diámetro dado que, como se especifica con más detalle en el Capítulo 2 de la presente memoria, el camino dominante que marca el retardo de la transmisión es el camino de mayor longitud entre la fuente y cada nodo.

Nuestra propuesta no establece tampoco ningún requisito sobre la codificación del flujo de vídeo. Para ello, se define una unidad de transmisión general denominada *objeto* que puede vincularse con cualquier tipo de codificación y que puede consistir en una simple segmentación de los datos, tal y como hacen los sistemas de malla anteriormente descritos. Con todo, como en nuestro trabajo presentamos una simulación sobre redes VANET (*Vehicular Ad Hoc Networks*), más adelante se ha relacionado la definición de objeto con el codificador de vídeo empleado en tales redes.

Este trabajo de tesis se divide de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presenta el modelo de transmisión y se describen los grafos de distribución formados mediante el correspondiente algoritmo de ingreso. Se explica también la planificación y se determina la longitud de los grafos así como el retardo de emisión. En el Capítulo 3 se analiza en detalle un tipo particular de grafos de distribución al que denominamos grafo de distribución de capacidad mínima. En este escenario, se han calculado los valores exactos del orden y longitud. El Capítulo 4 analiza el caso general de los grafos de distribución en que se obtiene el valor exacto del orden y una cota superior de la longitud. El estudio de la

simulación sobre redes VANET se describe en el Capítulo 5. De forma complementaria, en el Capítulo 6 se describe una topología de distribución multicast. Por último, en el Capítulo 7 se presentan las conclusiones así como un apartado de líneas futuras.

Capítulo 2

Redes estructuradas para la distribución de vídeo

En el siguiente capítulo se define una topología capaz de transmitir información en tiempo real mediante enlaces con un ancho de banda menor a la tasa de transmisión. Para ello, cada nodo recibirá datos de forma simultánea a través de más de un nodo. De este manera, en cada nodo se sumarán las capacidades de distintos enlaces hasta obtener el ancho de banda necesario para recibir la información en tiempo real. Aunque el modelo se define de forma general, se empleará para caracterizar una topología para la distribución de vídeo en una red P2P basada en árboles.

2.1. Modelo matemático

Denotamos por r una fuente que genera objetos a una tasa de λ objetos por segundo, en donde un *objeto* es la unidad mínima de información transmitida a través de la red. A continuación definimos una unidad de tiempo u.t. como:

$$1 \text{ u.t.} = \frac{1}{\lambda}$$

De este modo, la fuente tarda una unidad de tiempo en enviar cada objeto y resulta una tasa unitaria de transmisión, con la consiguiente simplificación de los cálculos. Particularizando a una transmisión de vídeo, cada objeto podría definirse como cada uno de los cuadros individuales que conforman el flujo de vídeo y la tasa de generación de objetos se correspondería con a la tasa de cuadros por segundo a la que ha sido codificado el vídeo. Esta asignación podría aplicarse asimismo sobre una longitud fija de datos del flujo.

Modelamos la red de distribución de objetos mediante el multigrafo dirigido $G = (V, E)$, donde el nodo fuente $r \in V$. Un vértice $v \in V - \{r\}$ representa un nodo que puede recibir

objetos de cualquier otro nodo de la red, incluido el nodo fuente, y que además es capaz de reenviar a otros nodos los objetos que recibe. Una arista $e = (u, v) \in E$ modela una conexión unidireccional de la capa de transporte que conecta el nodo u con el nodo v . Cada arista tiene asociado un ancho de banda de $1/K$ objetos por unidad de tiempo, con $K \geq 2$, $K \in \mathbb{Z}$. De este modo, el tiempo de transmisión de un objeto a través de una arista es de K unidades de tiempo. Considerando que K es mucho mayor que el retardo de propagación y obviando las latencias de la red, el retardo total de transmisión de un objeto entre los nodos u y v es de K unidades de tiempo.

Obsérvese que K es mayor o igual a 2, es decir, cada arista tiene un ancho de banda menor a la tasa impuesta por la fuente, que es la condición bajo la que se definen las redes en el presente capítulo. Como, por otro lado, un nodo tiene que recibir objetos a tasa unitaria (i.e. debe recibir un objeto cada u.t.), debe disponer de K conexiones de descarga –cada una de ellas de ancho de banda $1/K$ – para garantizar la recepción a tasa unitaria. Como queda dicho, con este modelo se pretende representar redes en las que los nodos o bien no tienen el ancho de banda suficiente para retransmitir el flujo que reciben o bien sólo participan en la distribución con una capacidad menor al ancho de banda del flujo.

Desde el punto de vista del nodo u , la arista $e = (u, v)$ modela una conexión de subida de ancho de banda $1/K$, esto es, u envía objetos a v a tasa $1/K$, mientras que desde el punto de vista de v la arista es una conexión de descarga, es decir, v recibe objetos de u a tasa $1/K$. Si hay suficiente ancho de banda entre u y v ambos pueden establecer hasta un máximo de K conexiones entre ellos, cada una modelada por una arista de ancho de banda $1/K$ (medido siempre en objetos por u.t.). Se define el *máximo grado de salida* de u , denotado por $d_{up,m\acute{a}x}(u)$, como el número máximo de conexiones de subida que u puede establecer con cualquier otro nodo $v \in V - \{r\}$, con $d_{up,m\acute{a}x}(u) \geq 1$, $\forall u \in V$. Con esto, cada nodo debe tener, como mínimo, una conexión de ancho de banda $(1/K)$ para ser admitido en la red de distribución. Denotando por $U_{bw}(u)$ el ancho de banda de subida del nodo u , medido en objetos por u.t., tenemos que:

$$d_{up,m\acute{a}x}(u) = K \cdot U_{bw}(u)$$

Por definición, la fuente tiene un ancho de banda de α objetos por u.t., con lo que su grado de subida máximo es:

$$d_{up,m\acute{a}x}(r) = K \cdot \alpha$$

Es decir, la fuente puede servir o mandar la información directamente a α nodos según el paradigma cliente-servidor.

Se define el grado de entrada del nodo $v \in V - \{r\}$, denotado por $d_{down}(v)$, como el número de conexiones de descarga que el nodo v tiene establecidas. Dado que cada nodo debe recibir a tasa unitaria, tenemos que:

$$d_{down}(v) = K \quad \forall v \in V - \{r\}$$

y como el nodo fuente no descarga de ningún otro nodo:

$$d_{down}(r) = 0$$

Un grafo de distribución $G = (V, E)$ modela una red de distribución a la que se ha conectado el máximo número posible de nodos. Se define el *grafo de distribución general* para α , K y u , denotado por $G_{\alpha, K, u} = (V, E)$ como el grafo máximo tal que:

$$d_{up, \max}(v) = u, \quad 1 \leq u < K \quad \forall v \in V - \{r\}$$

Recuérdese que α representa el ancho de banda de la fuente y que cada arista tiene un ancho de banda igual a $1/K$. Además, u es estrictamente menor que K puesto que en nuestro modelo los nodos disponen de una capacidad de subida menor que la tasa a la que la fuente genera información. En general, podemos suponer también que $\alpha > K/u$ puesto que en otro caso, como se verá, solo tendríamos nodos en un único nivel inferior al nodo fuente y la arquitectura resultante no sería una red P2P sino un modelo cliente-servidor.

Definimos el *grafo de distribución de capacidad mínima* $G_{\alpha, K, 1} = (V, E)$ para α y K como el grafo de distribución tal que $u = 1$, esto es, el grafo de distribución máximo donde todos los nodos, excepto la fuente, tienen el ancho de banda mínimo requerido para ingresar en la red:

$$U_{bw}(v) = 1/K \quad \forall v \in V - \{r\}$$

El orden de los grafos de distribución es finito porque cuando un nodo se une a la red consume una unidad de ancho de banda –o lo que es lo mismo, K aristas de bajada– y sólo aporta u/K unidades de ancho de banda –es decir, u aristas de subida– en donde por definición $u < K$ y por tanto $u/K < 1$. Recuérdese que por definición el ancho de banda de cara arista del grafo es de $1/K$ unidades de ancho de banda. De este modo, cada vez que un nodo ingresa en la red el ancho de banda total disponible disminuye en una cantidad igual a $u/K - 1$ objetos por unidad de tiempo. Como se especifica más adelante, si se parte del ancho de banda inicial de la fuente de α unidades de ancho de banda, podremos seguir agregando nodos en el grafo siempre y cuando el ancho de banda disponible sea superior a una unidad.

Obsérvese que, desde el punto de vista del análisis, un grafo de distribución con $K = 2$ y $u = 1$ es equivalente a un grafo de distribución con $K = 4$ y $u = 2$. En el segundo caso, si unimos cada par de aristas entre el nodo u y el nodo v en una única arista del doble de capacidad, se obtiene un grafo de distribución equivalente para $K = 2$ y $u = 1$ con idéntica

topología. Este argumento se repite para todos los casos en los que K y u tienen divisores comunes. Por tanto, a partir de ahora supondremos que K y u son coprimos. Igualmente, aunque por definición trabajaremos siempre con multigrafos dirigidos, por simplicidad y dada la falta de ambigüedad, nos referiremos a ellos como *grafos*.

Considérese la existencia de un algoritmo de ingreso tal que empezando con $V = \{r\}$ resulta el grafo de distribución general $G_{\alpha, K, u} = (V, E)$ tras $|V| - 1$ ingresos. Definimos el conjunto de *aristas suministradoras* del nodo v , denotado por $\mathbb{S}_e(v)$, como el conjunto de aristas de entrada incidentes en v , es decir, si $s_e \in \mathbb{S}_e(v)$ existe al menos un vértice u tal que $s_e = (u, v) \in E$. Dado que un nodo requiere K conexiones de descarga, el cardinal del conjunto $\mathbb{S}_e(v)$ es:

$$|\mathbb{S}_e(v)| = K \quad \forall v \in V - \{r\}$$

Se define el conjunto \mathbb{S} de *padres* del nodo v como el conjunto de nodos que envían objetos a v , esto es, si $u \in \mathbb{S}(v)$ entonces existe al menos una arista $e = (u, v) \in \mathbb{S}_e$. Si $u = 1$ el nodo v recibe K aristas de ancho de banda $1/K$ desde K nodos distintos y por tanto:

$$|\mathbb{S}_e(v)| = |\mathbb{S}(v)| = K$$

Esta expresión no es válida para aquellos nodos que reciben el flujo directamente de la fuente, en cuyo caso:

$$|\mathbb{S}(v)| = 1$$

En el caso general tenemos:

$$1 \leq |\mathbb{S}(v)| \leq K$$

Del mismo modo, definimos el conjunto $\mathbb{C}_e(u)$ de aristas de suministro del nodo u como el conjunto de aristas de salida que unen el nodo u a otro nodo de la red. Por construcción del grafo, todos los nodos que hayan agotado su ancho de banda de subida para permitir el ingreso de nuevos nodos, cumplen:

$$|\mathbb{C}_e(u)| = d_{up, \text{máx}}(u)$$

Por otro lado, conforme se completa el orden máximo del grafo, aparecen nodos que no agotan su capacidad –dado que no hay otros nodos que consuman ese ancho de banda– para los cuales:

$$|\mathbb{C}_e(u)| < d_{up, \text{máx}}(u)$$

Por definición, para la fuente se cumple:

$$|\mathbb{C}_e(r)| = \alpha \cdot K$$

Se define el conjunto $\mathbb{C}(u)$ de *hijos* del nodo u como el conjunto de nodos que reciben objetos desde u , es decir, si $v \in \mathbb{C}(u)$, entonces existe la arista $c_e = (u, v) \in \mathbb{C}_e(u)$. Como se verá más adelante, el cardinal de dicho parámetro varía de un nodo a otro a lo largo del grafo. Para el nodo fuente se tiene:

$$|\mathbb{C}(r)| = \alpha$$

Se denota por $\mathbb{P}(v)$ el conjunto de caminos que van desde la fuente r al nodo v . Sea $p_{rv} \in \mathbb{P}(v)$ uno de esos caminos y $|p_{rv}|$ el número de aristas del camino p_{rv} , definimos el *nivel* del nodo $v \in V - \{r\}$ en el grafo de distribución G como:

$$l(v) = \text{máx}\{|p_{rv}|, \forall p_{rv} \in \mathbb{P}(v)\} - 1$$

Obsérvese que, por definición, un nodo v tal que $\mathbb{S}(v) = \{r\}$ tendrá un nivel $l(v) = 0$.

2.2. Algoritmo de ingreso

A un nodo que ingresa en el grafo de distribución se le deben asignar K aristas suministradoras. Para ello consideramos el siguiente algoritmo de ingreso: inicialmente, el algoritmo asigna al nivel 0 los primeros α nodos que ingresan. Estos nodos están directamente servidos por la fuente y se denominan *hijos del nodo fuente*. Una vez obtenido el nivel 0, el siguiente nivel 1 se forma agrupando las αu aristas de salida de los nodos del nivel 0 en conjuntos de K aristas y asignando a cada uno un nodo que será de nivel 1. Obsérvese que si αu no es un múltiplo de K , entonces quedarán $(\alpha u \bmod K)$ aristas libres de nodos de nivel 0.

Una vez ingresados los nodos del nivel 1, el primer nodo del nivel 2 se añade utilizando el remanente de $(\alpha u \bmod K)$ aristas que quedan libres en el nivel 0 más $K - (\alpha u \bmod K)$ aristas del nivel 1. Los siguientes nodos del nivel 2 ingresan consumiendo cada uno K aristas de nodos del nivel 1, hasta que queden menos de K aristas libres. Para ingresar los nodos del nivel 3, se empezará por utilizar el remanente de aristas libres de nodos de nivel 1 y posteriormente aristas de nodos de nivel 2 y así sucesivamente para el resto de nodos de siguientes niveles hasta que no queden más de $K - 1$ aristas libres.

Obsérvese que, conforme se ha definido el algoritmo de ingreso, un nodo del nivel l sólo puede tener hijos en los niveles $l + 1$ y $l + 2$ ya que si un nodo le sobra alguna arista tras haber sido empleado como padre para ingresar un nodo en el nivel $l + 1$, el resto de aristas se utilizarán para ingresar el siguiente nodo que necesariamente tendrá que tener aristas que provienen de algún nodo de nivel $l + 1$ y, por lo tanto, pertenecerá al nivel $l + 2$.

Proposición 1. *Existe al menos un camino de longitud $l + 1$ entre la fuente y cada nodo del nivel l .*

Demostración. Todos los nodos tienen al menos un padre en el nivel anterior o, dicho de otra forma, los padres de un nodo del nivel l no pueden pertenecer solo al nivel $l - 2$, de forma que alguno de ellos ha de pertenecer al nivel $l - 1$. En efecto, tal y como se ha definido el algoritmo de ingreso, si todos los padres de un nodo de nivel l pertenecieran al nivel $l - 2$ el hijo se habría formado en el nivel consecutivo siguiente, es decir, en el nivel $l - 1$.

De este modo, como todos los nodos de un nivel l tienen un padre en el nivel anterior $l - 1$, puede trazarse al menos un camino desde la fuente a cada nodo perteneciente al nivel l que pase por todos los niveles anteriores a l . Dado que el nivel formado por los hijos del nodo fuente se ha numerado como nivel 0, este camino que pasa por todos los niveles desde el nodo fuente a cada nodo del nivel l tiene longitud $l + 1$.

□

Se define la *profundidad* de un nodo como la longitud del camino más largo que une la fuente con dicho nodo. En nuestro caso consideramos la profundidad en vez de la distancia, que mide el camino más corto, dado que el camino dominante que marca el retardo de la transmisión es el camino de mayor longitud entre la fuente y cada nodo.

Del mismo modo, se define la *longitud* del grafo de distribución como la mayor de las profundidades de los distintos nodos del grafo. De este modo, la longitud del grafo se corresponde con el camino más largo que une dos nodos del grafo, en nuestro caso particular, el nodo fuente con alguno de los nodos del último nivel.

Proposición 2. *La longitud del grafo de distribución es equivalente al número de niveles H del grafo.*

Demostración. Si numeramos el último nivel por $H - 1$, el número de niveles es H puesto que consideramos al nodo fuente fuera de la clasificación de niveles y el primer nivel, formado por los hijos del nodo fuente, es por definición el nivel 0. Por otro lado, según la Proposición 1 existe como mínimo un camino de longitud H del nodo fuente a cada uno de los nodos del último nivel. Cada uno de estos caminos, como se ha descrito en la anterior demostración, pasa por todos los niveles y es por tanto un camino de longitud máxima. Por tanto, su longitud equivale a la longitud del grafo.

□

Algoritmo 2.1 Algoritmo de ingreso en el grafo de distribución $G_{\alpha,K,u} = (V, E)$

Entrada: $v, G_{\alpha,K,u} = (V, E)$

Salida: $G_{\alpha,K,u} = (V, E)$

```

1: si  $S.size < K$  entonces
2:   devolver  $(V, E)$ 
3: fin si
4: para  $i = 0$  to  $i = K - 1$  hacer
5:    $s \leftarrow S.elimina(0)$ 
6:    $S_e(v) \leftarrow S_e(v) \cup \{(s, v)\}$ 
7:   si  $s \notin S(v)$  entonces
8:      $S(v) \leftarrow S(v) \cup \{s\}$ 
9:   fin si
10:   $C_e(s) \leftarrow C_e(s) \cup \{(s, v)\}$ 
11:  si  $v \notin C(s)$  entonces
12:     $C(s) \leftarrow C(s) \cup \{v\}$ 
13:  fin si
14:   $E \leftarrow E \cup \{(s, v)\}$ 
15:   $i \leftarrow i + 1$ 
16: fin para
17: para  $i = 0$  to  $i = u - 1$  hacer
18:    $S.encola(v)$ 
19:    $i \leftarrow i + 1$ 
20: fin para
21:  $V \leftarrow V \cup \{v\}$ 
22: devolver  $(V, E)$ 

```

De esta forma, denotamos por H la longitud del grafo. Como esta longitud equivale, como acabamos de ver, al número de niveles del grafo, de aquí en adelante, nos referiremos indistintamente tanto a la longitud como al número de niveles del grafo de distribución.

A partir de los anteriores resultados, en el Teorema 3 se demuestra que la topología obtenida mediante el referido algoritmo de ingreso es óptima, en el sentido de que proporciona la mínima longitud posible, es decir, la menor profundidad entre la fuente y el resto de nodos del grafo. En términos prácticos, esto se traduce en retardos mínimos de transmisión dado que se ha definido la profundidad de un nodo como la longitud del camino más largo que une la fuente con el nodo.

El Algoritmo 2.1 detalla en pseudocódigo la ejecución del algoritmo de ingreso que acabamos de especificar. Sea v el nodo que queremos unir al grafo de distribución $G_{\alpha,K,u}$. Denotamos por \mathbf{S} un vector que contiene, en orden, los nodos que se pueden usar como suministradores de una arista de ancho de banda $1/K$. Este vector se inicializa con $\alpha \cdot K$ elementos iguales al nodo fuente, puesto que un nodo aparece tantas veces en \mathbf{S} como aristas

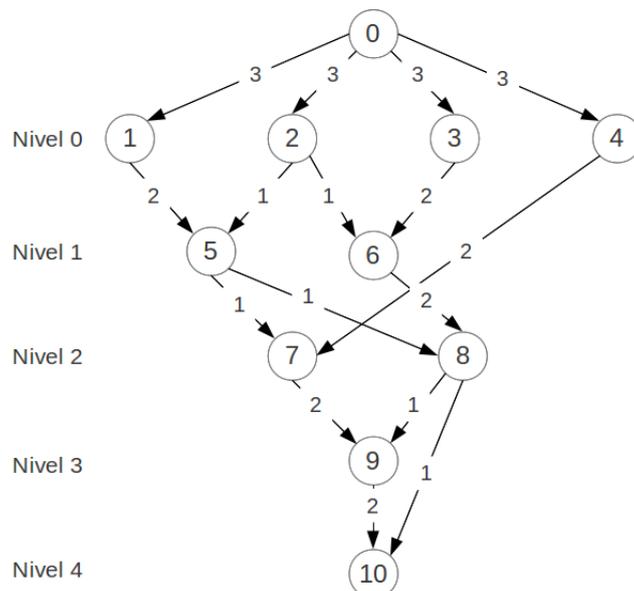


Figura 2.1: Grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ and $u = 2$.

disponibles tiene. Inicialmente el algoritmo comprueba en la cláusula **si** de la línea 1 si hay suficientes aristas suministradoras como para ingresar al nodo v , y si no las hay el algoritmo acaba sin ingresar al nodo v . En caso contrario, el bucle **para** de las líneas 4-16 va asignando al nodo v sus nodos suministradores.

En cada iteración se le asigna al nodo v el primer elemento del vector \mathbf{S} , denotado por s , que además es eliminado de él. Este primer elemento es el nodo origen de la nueva arista (s, v) . Se actualiza el conjunto de aristas suministradoras del nodo v , $\mathbb{S}_e(v)$, y el conjunto de aristas de suministro del nodo s , $\mathbb{C}_e(s)$, así como el conjunto de padres del nodo v , $\mathbb{S}(v)$, y el conjunto de hijos del nodo s , $\mathbb{C}(s)$. Por último, se actualiza el conjunto E de aristas del grafo con la nueva arista. Después se añade al nodo v que ya ha obtenido sus K aristas de entrada como potencial nuevo suministrador de u aristas en el bucle **para** de las líneas 17-20. Finalizamos actualizando el conjunto V de vértices del grafo de distribución.

La Figura 2.1 muestra el grafo de distribución resultante cuando se aplica el algoritmo de ingreso al grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ and $u = 2$. Por simplicidad, una arista etiquetada con el número i representa, de acuerdo con la definición realizada, i aristas de ancho de banda $1/K$. Así, por ejemplo, el nodo 2 tiene una arista de subida al nodo 5 de ancho de banda $1/3$ y otra al nodo 6, mientras que el nodo 3 tiene dos aristas de subida de $1/3$ de ancho de banda al nodo 6. Por simplicidad, a cada nodo se le asigna un identificador correlativo al orden de su ingreso en el grafo de distribución. Así, al nodo fuente se le asigna el identificador 0, al primer nodo del primer nivel se le asigna el identificador 1, al segundo el 2 y así sucesivamente.

La construcción del grafo de distribución según el algoritmo especificado se ha realizado de la siguiente manera. El nodo fuente, dado su ancho de banda de $\alpha \cdot K = 12$ objetos/u.t.,

sirve directamente a los 4 primeros nodos que ingresan y que forman el nivel 0. En este nivel disponemos ahora de 4 nodos cada uno de ellos con dos aristas que pueden ser utilizadas para ingresar nuevos nodos, lo que da un total de 8 aristas.

Dado que cada nodo necesita $K = 3$ aristas de entrada podremos ingresar $\lfloor 8/3 \rfloor = 2$ nodos en el nivel 1. De este modo, quedan $(8 \bmod 3) = 2$ aristas libres que no se usan para ingresar un nodo en el nivel 1. En este punto disponemos de esas 2 aristas que no se han usado del nodo 4 más las aristas de los dos nodos de nivel 1, lo que nos da un total de 6 aristas que permiten el ingreso de $\lfloor 6/3 \rfloor = 2$ nodos más. El primer nodo que ingresa, nodo 7, toma dos aristas del nodo 4 de nivel 0 y una arista del nodo 5 de nivel 1. Se trata, por tanto, de un nodo de nivel 2. El siguiente nodo 8 toma la arista que aún no ha sido usada del nodo 5 y las dos aristas del nodo 6, ambos de nivel 1. De este modo, el nodo 8 también pertenece al nivel 2.

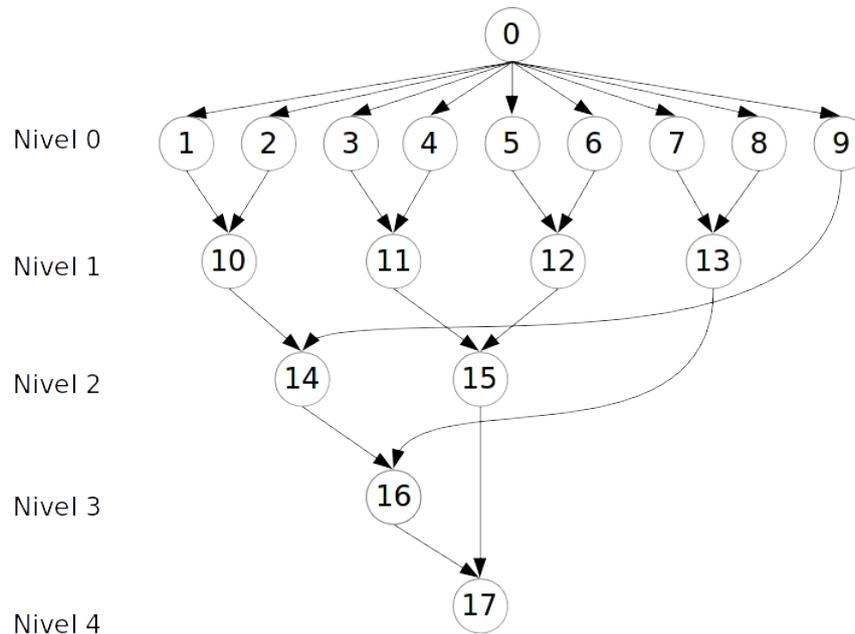
Disponemos ahora de $2 \cdot 2 = 4$ aristas que pueden ingresar $\lfloor 4/3 \rfloor = 1$ nodo más y que dejarán sin usar $(4 \bmod 3) = 1$ arista. Así pues, el nodo 9 ingresa tomando dos aristas del nodo 7 y una del nodo 8, lo que da un nodo de nivel 3. Ahora disponemos de un total de tres aristas libres, la arista que no se ha usado del nodo 8 y las dos que aporta el nodo 9 recién ingresado. Con estas 3 aristas podemos ingresar $\lfloor 3/3 \rfloor = 1$ nodo más de nivel 4. Como ahora tenemos un total de 2 aristas libres, ya no se podrá añadir un nuevo nodo puesto que $2 < K = 3$. En este punto se alcanza el número máximo de nodos que pueden ingresar en el grafo de distribución.

Una de las principales ventajas de este modelo es que la mayor parte de los nodos contribuyen con sus enlaces de subida a la transmisión de datos. En La Figura 2.1, solamente el nodo 10 no utiliza completamente su ancho de banda de subida. El resto de los nodos emplea toda su capacidad para construir la topología P2P.

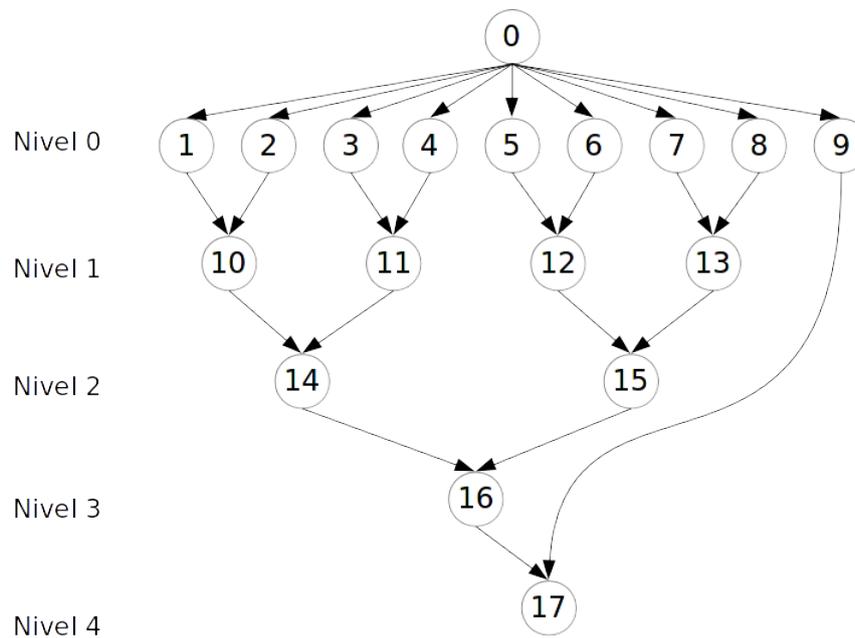
El Algoritmo 2.1 ingresa el primer nodo de un nivel l cuando en los niveles $l-2$ y $l-3$ no hay al menos K aristas libres y, por tanto, es preciso utilizar aristas de nodos de nivel $l-1$. Existen, con todo, otras posibilidades. En este caso puede definirse un nuevo algoritmo de ingreso que añada nodos en el nivel l usando primero las aristas disponibles del nivel $l-1$ —en vez de comenzar con las aristas libres del nivel $l-2$ como hace el Algoritmo 2.1— y que emplee aristas de niveles anteriores a $l-1$ solo cuando haya agotado las del nivel $l-1$.

Considérense los grafos de la Figura 2.2 que son dos construcciones distintas del grafo de distribución para $\alpha = 9$, $K = 2$ and $u = 1$. El grafo de distribución representado en la Figura 2.2a ha sido construido utilizando el Algoritmo 2.1. El grafo de la Figura 2.2a ha sido construido conforme el segundo algoritmo. De este modo, añade los nodos del nivel l utilizando en primer lugar aristas de nivel $l-1$. En particular, el nodo 17 del nivel 4 tiene un padre en el nivel 3 y otro en el nivel 0. Como se observa en las figuras, el segundo algoritmo no deja de ser una reordenación de aristas del grafo construido mediante el Algoritmo 2.1. De este modo, ambos grafos tienen el mismo número de niveles y, por tanto, la misma longitud, 4 en su caso.

En el siguiente teorema se demuestra que el Algoritmo 2.1 permite construir el grafo de



(a) Grafo de distribución para $\alpha = 9$, $K = 2$ and $u = 1$ construido con el Algoritmo 2.1.



(b) Grafo de distribución para $\alpha = 9$, $K = 2$ and $u = 1$ construido según un nuevo algoritmo de ingreso.

Figura 2.2: Grafos de distribución para $\alpha = 9$, $K = 2$ and $u = 1$.

distribución de longitud mínima.

Teorema 3. *El grafo de distribución construido mediante el Algoritmo 2.1 tiene longitud mínima.*

Demostración. Considérese en primer lugar que, conforme la Proposición 2, la longitud del grafo es H cuando los niveles del grafo de distribución se numeran de 0 al $H - 1$, en donde el nivel cero se corresponde con el nivel formado por los hijos del nodo fuente. De este modo, el grafo de longitud mínima se corresponde con el grafo que tiene un menor número de niveles. Recuérdese asimismo que por definición la longitud viene determinada por el camino más largo que puede trazarse entre el nodo fuente y el resto de nodos de la red.

Procedemos por construcción. En un principio, mientras solo tenemos el nodo fuente y nodos en el nivel 0, tanto el número de niveles como la longitud valen 1 y, por tanto, son mínimos (recuérdese además que se considera que el nodo fuente no pertenece a ningún nivel). Esto es así hasta el ingreso en el grafo del nodo α , que se corresponde con el $(\alpha + 1)$ -ésimo nodo del grafo dado que la fuente lleva el identificador 0.

Cuando a continuación se trata de añadir el nodo $\alpha + 1$, la fuente ha agotado su ancho de banda y por tanto el nuevo nodo debe colgar de nodos del nivel 0. El nuevo nodo pertenece por tanto al nivel 1 y su distancia a la fuente es 2, lo que constituye la nueva longitud de la red. Esta longitud no puede ser menor puesto que para obtener una longitud menor el nuevo nodo debería colgar de la fuente, lo que no es posible dado que ha agotado su ancho de banda.

Si a continuación vamos añadiendo nuevos vértices en el nivel 1, la longitud del grafo continúa siendo 2, es decir, el mínimo posible según se ha explicado en el anterior párrafo. Esta situación se prolonga hasta el momento en que haya que formar un nuevo nivel. Esto sucede cuando el ancho de banda disponible en los nodos del nivel 0 es menor a K unidades.

En este caso, como ha sucedido en el salto de nivel anterior, el algoritmo de ingreso ha de emplear ancho de banda de nodos del nivel 1 para añadir un nuevo nodo que, por tanto, pertenece al nivel 2 y está a distancia 3 del nodo fuente, lo que determina que la nueva longitud del grafo sea 3.

Ahora, lo mismo que antes, tampoco es posible obtener una longitud menor que 3 puesto que eso nos llevaría a una longitud 2, lo que nos obligaría a que el nuevo nodo colgase únicamente de nodos del nivel 0, lo cual no es posible ya que no disponemos de ancho de banda.

Repitiendo este argumento cada vez que se forma un nuevo nivel, se demuestra que el grafo de distribución tiene el mínimo número posible de niveles y que, por tanto, su longitud es mínima.

□

Existen, con todo, otros algoritmos de ingreso capaces de obtener la longitud mínima. Según se observa en la Figura 2.2, el segundo algoritmo definido obtiene, por construcción, el mismo número de niveles que el Algoritmo 2.1 y por tanto obtiene también la longitud mínima. Más en general, la longitud mínima puede garantizarse mediante cualquier algoritmo de ingreso que respete la distribución de los nodos en distintos niveles del Algoritmo 2.1, es decir, que dibuje los mismos niveles, con los mismos nodos cada uno, que dicho algoritmo.

2.3. Planificación y retardo de distribución

El propósito principal de una topología estructurada para la distribución de contenido en tiempo real es simplificar la petición de objetos a los nodos suministradores. Dado que cualquier nodo establece K conexiones simultáneas de descarga, una ejecución del algoritmo de planificación resulta en la demanda de un *segmento* de K objetos consecutivos. En este caso, el conjunto de los nodos suministradores debe haber recibido (y almacenado) los K objetos resultantes de la petición. En el presente apartado se analiza la transmisión de los primeros K objetos, puesto que el esquema de transmisión se repite más tarde con los siguientes K objetos y así sucesivamente durante el resto de la transmisión.

El nodo fuente tiene un ancho de banda normalizado de α objetos/u.t. de tal forma que puede enviar simultáneamente cualquier objeto a α nodos en 1 u.t. En consecuencia, los α nodos del nivel 0 recibirán el primer objeto entre 0 y 1, el segundo objeto entre 1 y 2 y así sucesivamente. Expresamos este esquema con el vector de tiempos de llegada $t_0 = [1, 2, \dots, K]$ que indica que el i -ésimo objeto llega a un nodo del nivel 0 en el instante $t_0[i]$. De este modo, el primer objeto llega en el instante 1, el segundo objeto en el instante 2 y así sucesivamente hasta el objeto K , que llega en el instante K .

Conforme acaba de verse, en el nivel cero tenemos α veces cada uno de los objetos generados cada unidad de tiempo. Dado que en el nivel 1 necesitamos recibir $\lfloor \alpha u / K \rfloor < \alpha$ veces cada objeto (una vez por cada nodo de nivel 1), tenemos todos los objetos necesarios para ser servidos a los nodos del nivel 1. En este caso, la planificación que definimos es simple: un nodo de nivel 1 pide a sus nodos suministradores objetos por orden de identificador.

En la Figura 2.3 se muestra la distribución de objetos en el grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ y $u = 2$. El flujo original se subdivide en K subflujos denotados cada uno de ellos por f_i o también, por coherencia con la notación de las figuras, por $\{i\}$ con $1 \leq i \leq K$. El flujo $\{1\}$ transmite los objetos 1, $1 + K$, $1 + 2K$ y así sucesivamente. De forma más general, el flujo $\{i\}$ transmite los objetos i , $i + K$, $i + 2K$, etc. Como se ha dicho, en la Figura 2.3 se representa como $\{i\}$ el envío de cada uno de estos subflujos. Cada nodo recibe los objetos individuales de cada subflujo por una única arista e igualmente reenvía un subflujo distinto por cada una de sus aristas de salida. Así, por ejemplo, el nodo 7 recibe

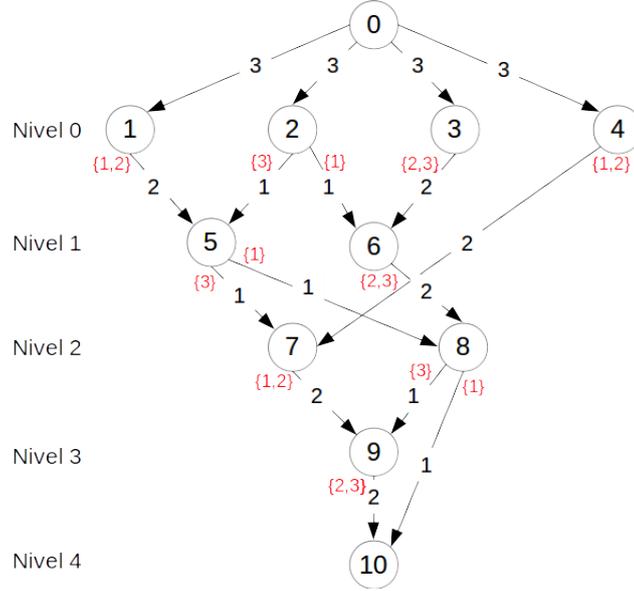


Figura 2.3: Distribución de los objetos en el grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ y $u = 2$.

los flujos $\{1\}$ y $\{2\}$ del nodo 4 y el flujo $\{3\}$ del nodo 5 y a su vez retransmite los flujos $\{1\}$ y $\{2\}$ al nodo 9.

Como $K = 3$ en este caso tenemos tres flujos. Nótese además que cada nodo recibe K subflujos –tres en el ejemplo– de los cuales solo retransmite u subflujos –dos en el ejemplo– dado que no emplea el mismo ancho de banda de bajada que de subida. Así pues, dentro del grafo de distribución se forman K subárboles de distribución para cada uno de los K subflujos, tal y como se observa en la Figura 2.4 para el caso del grafo de distribución con $\alpha = 4$, $K = 3$ y $u = 2$.

Dado que en el modelo todos los nodos del nivel 0 disponen de un nuevo objeto cada unidad de tiempo no se producen tiempos de espera. Por lo tanto, todos los nodos del nivel 1 reciben el primer objeto entre 1 y $K + 1$, ya que cada arista que conecta dos niveles distintos tiene un ancho de banda de $1/K$ y el tiempo de transmisión de un objeto por dichas aristas es igual a K u.t. Asumimos que un nodo comienza el reenvío de un objeto una vez que este ha sido completamente recibido. Igualmente, el segundo objeto se recibe en los nodos del primer nivel en $K + 2$ y así sucesivamente. Así pues, para todos los nodos del nivel 1, el vector de tiempos de llegada es $t_1 = [K + 1, K + 2, \dots, 2K]$.

Repetiendo la misma argumentación para los nodos del nivel 2, tenemos que el vector de tiempos de llegada vale $t_2 = [2K + 1, 2K + 2, \dots, 3K]$. Más en general, el vector de tiempos de llegada para el nivel l es $t_l = [lK + 1, lK + 2, \dots, (l + 1)K]$. Hemos denotado el último nivel del grafo de distribución como $H - 1$. Por tanto, el máximo número de saltos desde el nodo fuente hasta cualquier otro nodo en el último nivel es H . De ahí que el vector de tiempos de llegada para el último nivel sea $t_{H-1} = [(H - 1)K + 1, (H - 1)K + 2, \dots, HK]$.

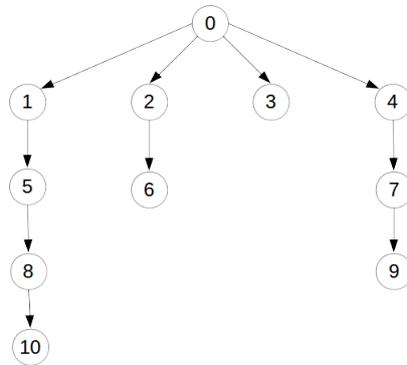
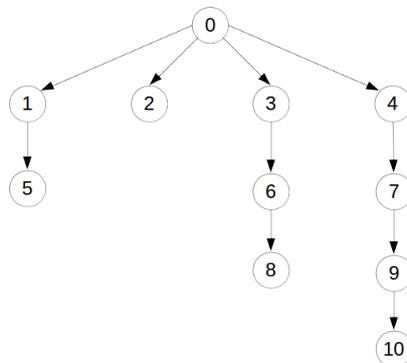
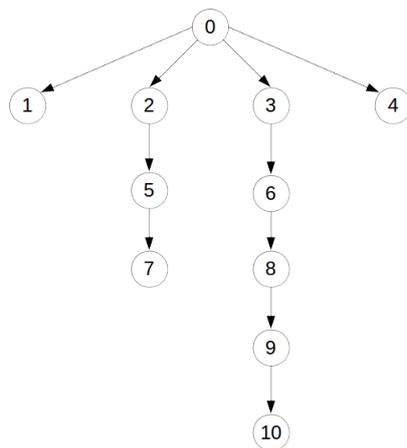
(a) Subflujo f_1 .(b) Subflujo f_2 .(c) Subflujo f_3 .

Figura 2.4: Los $K = 3$ árboles por los cuáles se distribuye cada uno de los subflujos en $G_{4,3,2} = (V, E)$.

Puesto que por construcción, según el algoritmo de ingreso definido, un nodo puede enviar objetos a un nodo situado dos niveles por debajo, algunos de esos tiempos de llegada pueden reducirse en algunos nodos de nivel $l \geq 2$. En este caso, los vectores de retardo anteriores pueden emplearse como cotas del retardo real. En un escenario así, se puede retrasar K unidades de tiempo el envío de un objeto cuando este se transmite desde un nodo suministrador a un hijo situado dos niveles por debajo, con el objeto de que todos los nodos de un mismo nivel tengan los mismos tiempos de recepción. Ahora bien, aunque esta operación uniformizaría los vectores de retardo de un mismo nivel, no tendría ninguna consecuencia práctica en la transmisión de objetos.

Se define el *tiempo total de distribución* de un segmento de K objetos, Δ_o , como el tiempo que transcurre desde el instante en que el segmento está disponible para su envío en la fuente r y el instante en que es recibido por todos los nodos que forman parte del grafo de distribución.

Lema 1. *Sea $G_{\alpha,K,u} = (V, E)$ un grafo de distribución y H el número de niveles de G . El tiempo total de distribución de un segmento de K objetos es:*

$$\Delta_o \leq K \cdot H \quad (2.1)$$

Demostración. El último objeto del segmento enviado por la fuente llega a todos los nodos del nivel 0 en el instante K . Por otro lado, a partir de ahí dicho objeto tarda K unidades de tiempo en transmitirse desde un suministrador u hasta un receptor v a través de la arista suministradora (u, v) . Por otro lado, dicho objeto será retransmitido como máximo $H - 1$ veces a partir de un nodo del nivel 0, de donde resulta la expresión de la Ecuación 2.1. \square

Nótese que finalmente se obtiene un retardo máximo $\Delta_o \leq K \cdot H$ que puede considerarse muy bueno puesto que por un lado, tal y como se prueba en los siguientes capítulos, el número H de niveles puede acotarse logarítmicamente en función de los parámetros del grafo y, por otro lado, K no puede ser arbitrariamente grande dado que $1/K$ representa el ancho de banda de cada conexión y, por tanto, no puede ser a su vez indefinidamente pequeño.

Como ejemplo del cálculo del retardo de distribución, la Figura 2.5 presenta el cronograma de la transmisión de los primeros $K = 3$ objetos en el grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ y $u = 2$, tal y como se representa en la Figura 2.3. Recuérdese que la transmisión de los segmentos siguientes –de $K = 3$ objetos cada uno– repite el mismo esquema añadiendo cada vez un retardo de K u.t.

Inicialmente, la fuente envía simultáneamente a los $\alpha = 4$ nodos del nivel 0 los tres primeros objetos, numerados secuencialmente desde 1 hasta $K = 3$, por aristas de ancho de banda unitario, por lo que estos tardan 1 u.t. en ser recibidos por los nodos de nivel 1.

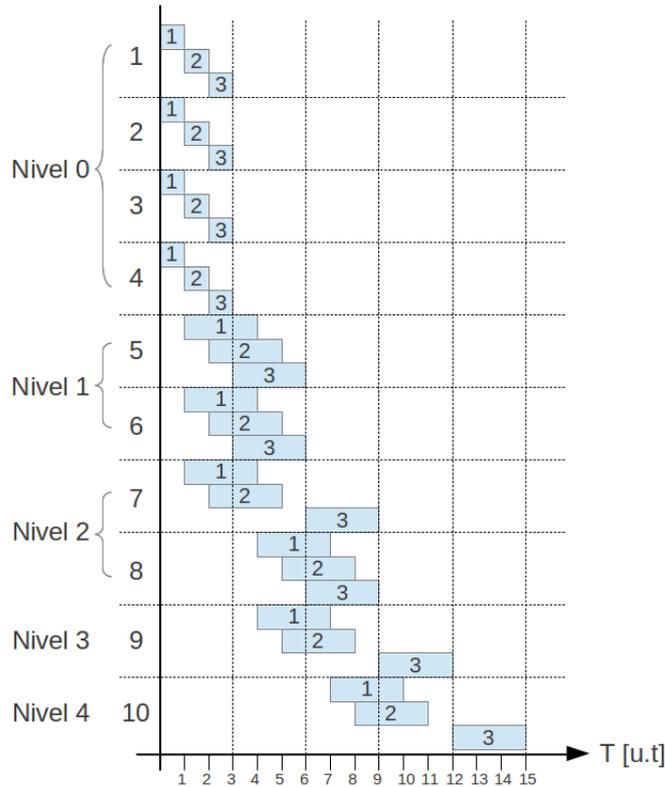


Figura 2.5: Cronograma de la distribución de los primeros K objetos en $G_{4,3,2} = (V, E)$.

Los nodos 5 y 6 del nivel 1 tienen a todos sus padres en el nivel 0 y reciben los objetos en los tiempos indicados por el vector $t_1 = [4, 5, 6]$.

Los nodos de nivel 2 tienen el vector de tiempos $t_2 = [7, 8, 9]$ que son, precisamente, los tiempos en los que recibe el nodo 8 ya que sus padres son los nodos 5 y 6, ambos de nivel 1. Ahora bien, el nodo 7 del nivel 2 recibe los objetos $\{1\}$ y $\{2\}$ desde el nodo 4 del nivel 0, que está dos niveles por encima. En este caso el nodo 7 recibe esos objetos antes que el tiempo indicado por el vector de tiempos t_2 . Obsérvese que el objeto $\{1\}$ se recibe en $t = 4 < t_2[1] = 7$ y el objeto $\{2\}$ se recibe en $t = 5 < t_2[2] = 8$.

El nodo 9 también recibe los objetos $\{1\}$ y $\{2\}$ en $t = 7$ y $t = 8$, respectivamente, antes de lo indicado por el vector de tiempos $t_3 = [10, 11, 12]$, ya que ambos objetos se reciben en el nodo 7 –que es el encargado de reenviárselos– antes de lo que indica el vector de tiempos t_2 . Por otro lado, el objeto $\{3\}$ se recibe en $t = 12 = t_3[3]$ ya que en el camino de distribución de este subflujo entre la fuente y el nodo 9 no se produce ningún salto de dos niveles.

El último nodo, nodo 10 de nivel 4, tiene el vector de tiempos $t_4 = [13, 14, 15]$. Los objetos $\{1\}$ y $\{2\}$ se reciben en $t = 10 < t_4[1] = 13$ y $t = 11 < t_4[2] = 14$, respectivamente, ya que en el primer caso proviene del nodo 8, dos niveles por encima, y en el otro proviene

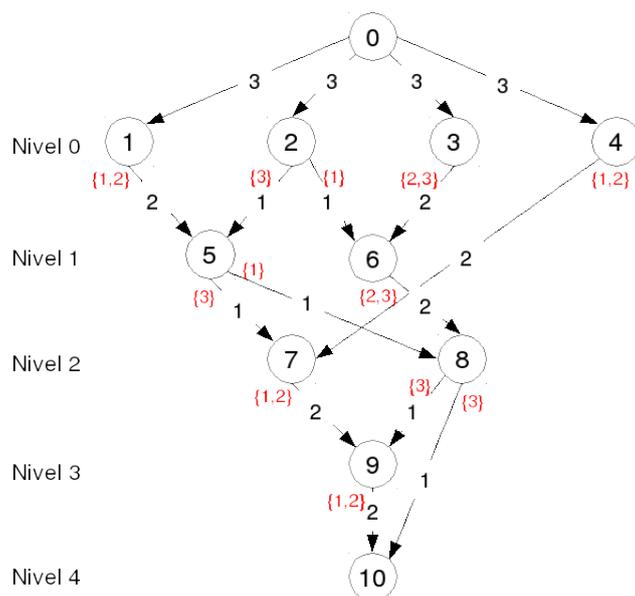


Figura 2.6: Nueva distribución de los objetos en el grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ y $u = 2$.

de un camino en el que hubo un salto de dos niveles en el envío desde el nodo 4 al nodo 7. En este nodo, el objeto $\{3\}$ se recibe también desde el nodo 9, pero a diferencia del objeto $\{1\}$ en su camino de distribución no se produce ningún salto doble. Obsérvese que según el árbol de distribución del subflujo $\{3\}$ en la Figura 2.4c, el camino desde la fuente hasta el nodo 10 no contiene saltos dobles y tiene por tanto una longitud igual a 5, que coincide con el número de niveles del grafo de distribución $G_{4,3,2} = (V, E)$. Así pues, el retardo de distribución en el grafo con esta planificación resulta $\Delta_o = K \cdot H = 15$, es decir, la igualdad expresada en la Ecuación 2.1.

La planificación propuesta resulta simple ya que la retransmisión de flujos se realiza siguiendo el orden que marca el identificador de cada nodo del grafo de distribución. Así, en la Figura 2.3 puede verse como el nodo 1 retransmite los flujos $\{1\}$ y $\{2\}$. A continuación el nodo 2 retransmite el flujo $\{3\}$ que queda pendiente para el nodo 5 y el flujo $\{1\}$ al nodo 6. A continuación, se asigna al nodo 3 la retransmisión de los flujos $\{2\}$ y $\{3\}$ y así consecutivamente. Recuérdese que como $u = 2$ cada nodo retransmite dos flujos. Según esta planificación, todos los nodos de los árboles de distribución –exceptuando siempre el nodo fuente– de cada uno de los subflujos tienen grado de salida igual a 1, tal y como se observa en la Figura 2.4.

En algunas topologías, con todo, pueden encontrarse planificaciones distintas capaces de reducir el retardo total de distribución. En el ejemplo que acabamos de ver para el grafo de distribución con $\alpha = 4$, $K = 3$ y $u = 2$, puede proponerse otra planificación más rápida, según se muestra en la Figura 2.6. En este caso, la planificación es la misma que la de la Figura 2.3 excepto dos salvedades.

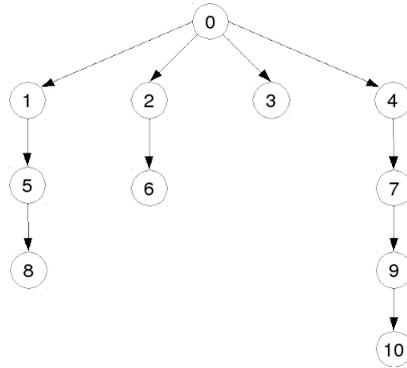
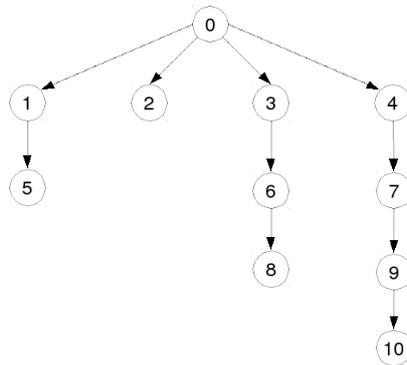
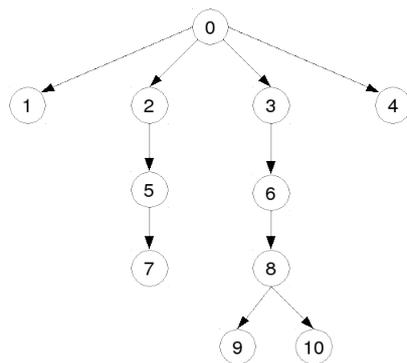
(a) Subflujo f_1 .(b) Subflujo f_2 .(c) Subflujo f_3 .

Figura 2.7: Los $K = 3$ árboles por los cuales se distribuye cada uno de los subflujos en $G_{4,3,2} = (V, E)$ con la planificación de la Figura 2.6.

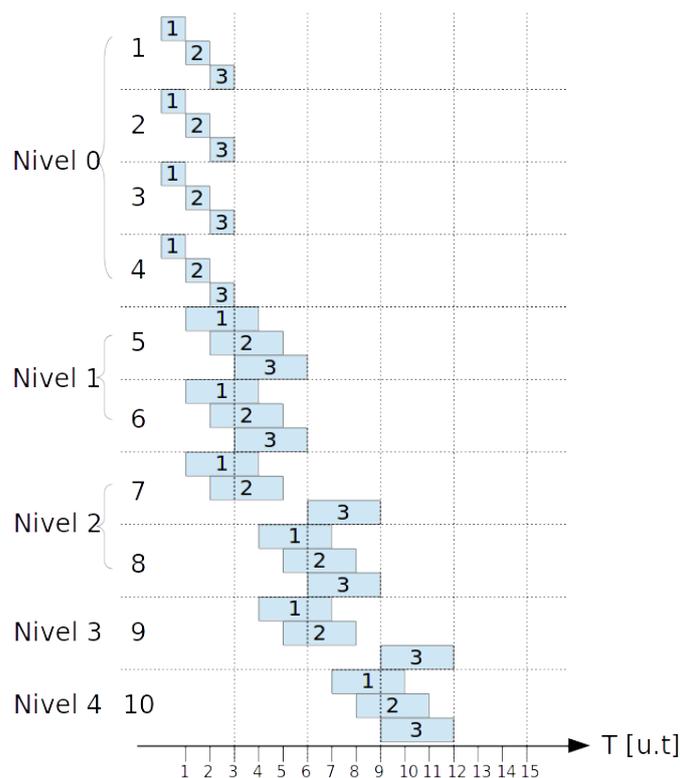


Figura 2.8: Cronograma de la distribución de los primeros K objetos en $G_{4,3,2} = (V, E)$ con la planificación de la Figura 2.6.

En primer lugar, el nodo 8 no envía el subflujo $\{1\}$ sino el subflujo $\{3\}$ al nodo 10 que se recibe en $t = 12$. Igualmente, el nodo 9 no envía al nodo 10 los flujos $\{2\}$ y $\{3\}$ sino los flujos $\{1\}$ y $\{2\}$, que siguen siendo recibidos en $t = 10$ y $t = 11$. De este modo, con estos cambios se obtiene un retardo de distribución total de $\Delta_o = 12 < K \cdot H = 15$. El cronograma correspondiente a esta planificación se representa en la Figura 2.8.

Esta reducción del retardo total es posible dado que ahora los $K = 3$ subflujos, es decir, todos los objetos que llegan al único nodo del último nivel, el nodo 10, han dado por lo menos un salto de dos niveles, lo que significa un ahorro de $K = 3$ unidades de tiempo en el retardo total. En la Figura 2.7 se observa que estos saltos dobles se producen del nodo 4 al nodo 7 para los flujos $\{1\}$ y $\{2\}$ y del nodo 8 al nodo 10 para el flujo $\{3\}$. Igualmente, en la Figura 2.7c se observa que en este caso el nodo 8 tiene un grado de salida igual a 2 para el árbol de distribución del subflujo $\{3\}$, ya que el nodo 8 envía este subflujo tanto al nodo 9 como al nodo 10.

Lema 2. Sean $T_i = (V, E)$, $1 \leq i \leq K$, cada uno de los subárboles definidos para la distribución de los K subflujos en el grafo de distribución $G_{\alpha, K, u} = (V, E)$ y sea H_i la longitud del árbol T_i , entonces el tiempo total de distribución de un segmento de K objetos

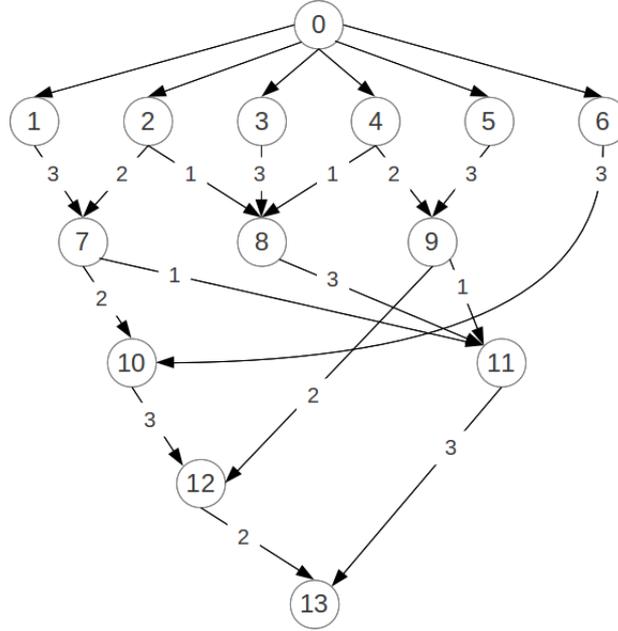


Figura 2.9: Grafo de distribución para $\alpha = 6$, $K = 5$ and $u = 3$.

es:

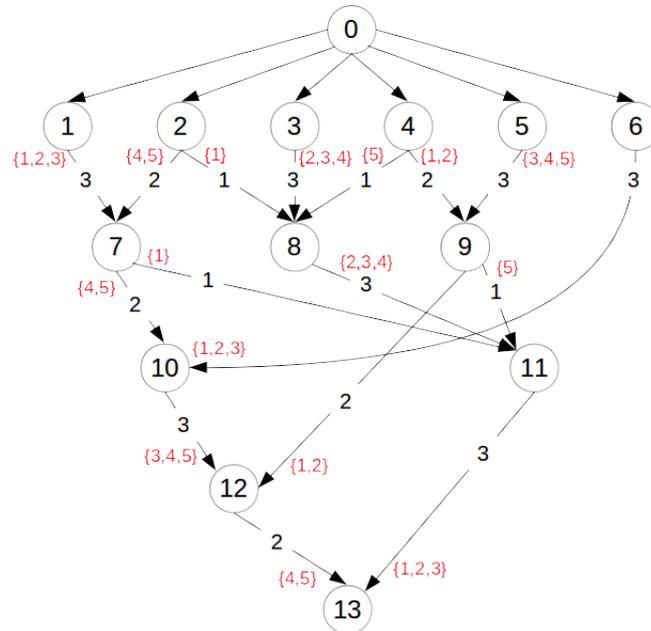
$$\Delta_o = \max\{i + (K - 1)H_i\} \quad i \in \{1, \dots, K\} \quad (2.2)$$

Demostración. Como se ha visto, el objeto i del segmento llega a todos los nodos del nivel 0 en el instante i . Por otro lado, a partir de ese nivel, cada objeto tarda K unidades de tiempo en transmitirse completamente desde un suministrador u hasta un receptor v a través de la arista suministradora (u, v) del árbol T_i . Como a partir del nivel 0 un objeto se retransmite $H_i - 1$ veces en el árbol de distribución T_i , el retardo total resultante de cada flujo $\{i\}$ es $i + (K - 1)H_i$ y, en consecuencia, el retardo total de distribución es el mayor de estos retardos para todos los posibles valores de i , tal y como se expresa en la Ecuación 2.2.

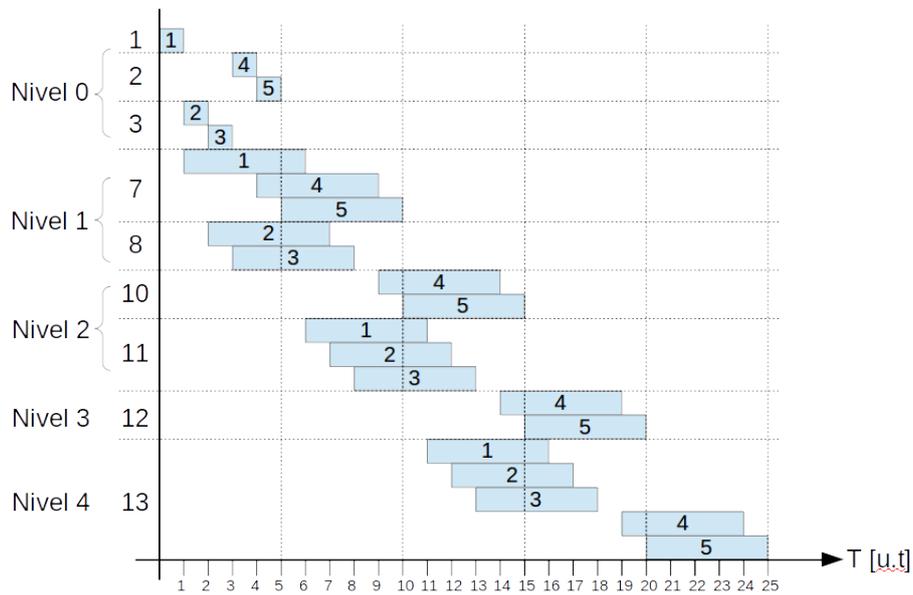
□

Nótese que, conforme la construcción del grafo de distribución, tenemos $H_i \leq H$ para $1 \leq i \leq K$. Esto significa que el retardo de distribución está acotado por la longitud del grafo que, como se ha visto, es una expresión que crece logarítmicamente en función de los parámetros del grafo.

A continuación se analiza otro caso en el que puede obtenerse un retardo de distribución $\Delta_o < K \cdot H$ con dos planificaciones alternativas. Considérese el grafo de distribución para $\alpha = 6$, $K = 5$ y $u = 3$ representado en la Figura 2.9. En la Figura 2.10a se representa la distribución de los K objetos de un segmento aplicando la planificación simple en la que los nodos piden consecutivamente los objetos a sus suministradores según el orden de su



(a) Distribución de los $K = 5$ primeros objetos desde el nodo fuente hasta el nodo 13 en el último nivel.



(b) Cronograma de la distribución.

Figura 2.10: Distribución de objetos para $G_{6,5,3} = (V, E)$ en el nodo final utilizando la planificación simple del Cuadro 2.1.

Objeto	Camino
1	1 → 7 → 11 → 13
2	3 → 8 → 11 → 13
3	3 → 8 → 11 → 13
4	2 → 7 → 10 → 12 → 13
5	2 → 7 → 10 → 12 → 13

Cuadro 2.1: Distribución de objetos hasta el último nodo 13 en $G_{6,5,3} = (V, E)$ con la planificación simple de la Figura 2.10.

identificador. En el Cuadro 2.1 se resume la distribución de los objetos hasta el último nodo 13. La flecha corta (\rightarrow) representa una arista entre dos nodos con una diferencia de nivel igual a 1, y la flecha extendida (\longrightarrow) una arista entre dos nodos con una diferencia de nivel igual a 2.

En la Figura 2.10b se puede observar el cronograma de dicha distribución desde el nodo fuente hasta el único nodo del último nivel, esto es, el nodo 13. Por simplicidad, en el cronograma solo se representan los retardos de los nodos que aparecen en el Cuadro 2.1, es decir, los nodos que intervienen en la transmisión de al menos un objeto desde el nodo fuente al nodo 13 que forma el último nivel del grafo. Además, para cada uno de estos nodos solo se representa el retardo de los objetos que desde tales nodos se retransmiten hacia el último nodo 13.

Como puede observarse, el retardo de distribución es $\Delta_o = K \cdot H = 5 \cdot 5 = 25$ u.t., es decir, el retardo de distribución máximo. El vector de tiempos del nivel 4 es $t_4 = [21, 22, 23, 24, 25]$. Obsérvese que los objetos $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$ llegan antes de lo indicado por el vector de tiempos ya que en su distribución desde el nodo fuente hasta el nodo 13 se produce un doble salto en el envío desde el nodo 11 al nodo 13. Sin embargo, en la distribución de los objetos $\{4\}$ y $\{5\}$ no hay ningún doble salto, de forma que la longitud del camino recorrido por tales objetos es igual al número de niveles $H = 5$ del grafo $G_{6,5,3} = (V, E)$. Esto puede verse igualmente en el Cuadro 2.1, en donde los objetos $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$ recorren cuatro nodos para llegar al nodo 13 mientras que los objetos $\{4\}$ y $\{5\}$ deben recorrer un nodo más, es decir, cinco nodos, dado que no efectúan ningún salto doble de nivel. De este modo, el retardo de distribución alcanza la igualdad en la Ecuación 2.1.

En la Figura 2.11a se ha representado la distribución de los K objetos con una planificación alternativa que arroja un retardo de distribución $\Delta_o = 20 < K \cdot H = 5 \cdot 5 = 25$, tal y como se puede observar en el cronograma de la Figura 2.11b. En este caso, el nodo 12 recibe del nodo 9 los objetos $\{4, 5\}$ en vez de los objetos $\{1, 2\}$ que recibe con el algoritmo de planificación simple. De este modo, en el árbol de distribución del flujo $\{5\}$ el nodo 9 tiene grado 2.

El grafo de distribución $G_{6,5,3} = (V, E)$ presenta tres saltos de dos niveles: del nodo 6 al nodo 10, del nodo 9 al 12 y del nodo 11 al nodo 13. En la planificación de la Figura 2.11a

Objeto	Camino
1	1 → 7 → 11 →→ 13
2	3 → 8 → 11 →→ 13
3	3 → 8 → 11 →→ 13
4	5 → 9 →→ 12 → 13
5	5 → 9 →→ 12 → 13

Cuadro 2.2: Distribución de objetos hasta el último nodo 13 en $G_{6,5,3} = (V, E)$ con la planificación de la Figura 2.11.

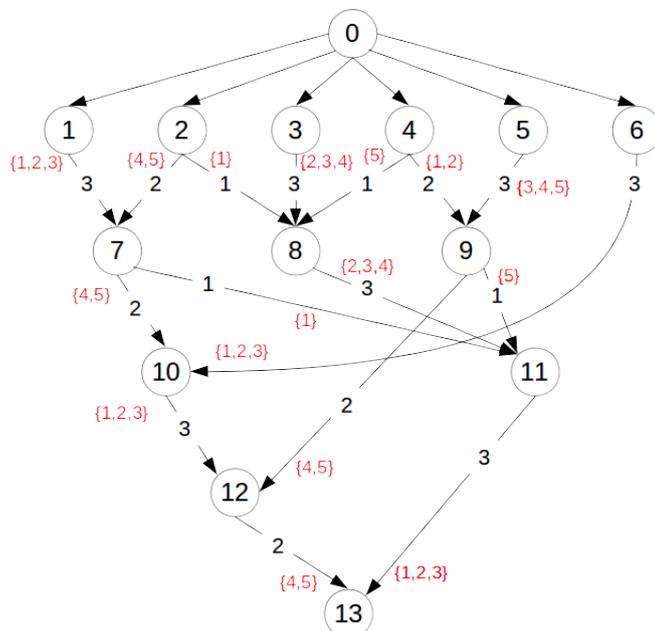
Objeto	Camino
1	6 →→ 10 → 12 → 13
2	6 →→ 10 → 12 → 13
3	3 → 8 → 11 →→ 13
4	3 → 8 → 11 →→ 13
5	5 → 9 → 11 →→ 13

Cuadro 2.3: Distribución de objetos hasta el último nodo 13 en $G_{6,5,3} = (V, E)$ con la planificación de la Figura 2.12.

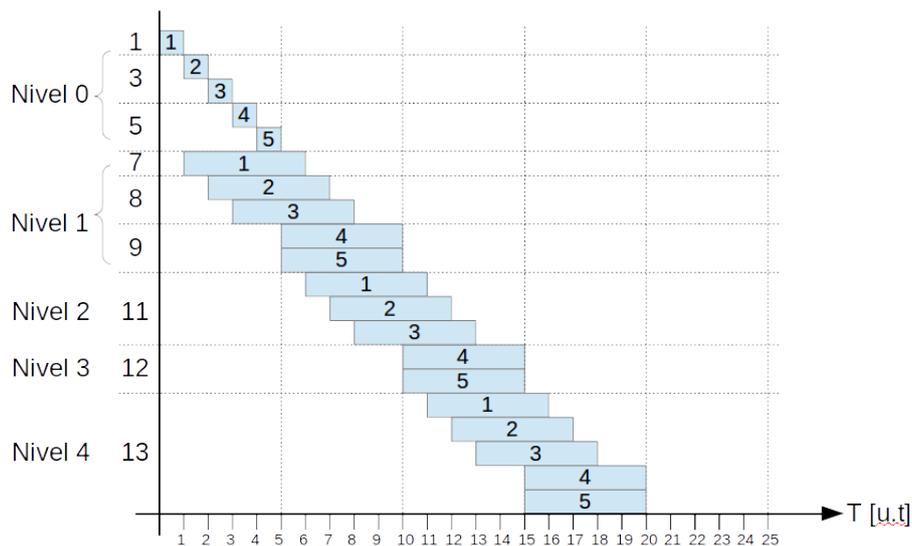
se aprovechan dos saltos de dos niveles para reducir el retardo de transmisión: del nodo 9 al nodo 12 y del nodo 11 al nodo 13. En el Cuadro 2.2, que resume la distribución de los objetos hasta el último nodo 13, se observa cómo cada objeto da un salto doble –señalado en el Cuadro con una flecha extendida– en su camino desde el nodo fuente al nodo del último nivel. Debido a este cambio en la planificación se garantiza que todos los objetos recibidos en el último nodo 13 hayan realizado un salto de dos niveles y que, por tanto, el retardo final se haya recortado en $K = 5$ unidades de tiempo.

Por último, en la Figura 2.12a se representa una tercera distribución de los K objetos con otra planificación alternativa que también obtiene un retardo de distribución $\Delta_o = 20 < K \cdot H = 5 \cdot 5 = 25$, tal y como muestra el cronograma de la Figura 2.12b. En este caso, y a diferencia del anterior, se ha aprovechado el doble salto del nodo 6 al nodo 10 y el doble salto del nodo 11 al nodo 13. La distribución de los objetos con esta planificación se resume en el Cuadro 2.3, en donde puede comprobarse que cada objeto efectúa un salto doble en su trayecto desde la fuente hasta el nodo del último nivel.

Aunque en los casos anteriores el ahorro en el retardo debido a los saltos dobles ha sido siempre de K unidades de tiempo, esto se debe a que por motivos de claridad hemos dibujado grafos con un orden reducido, es decir, con un número reducido de nodos. En un caso general, con todo, es posible construir grafos en los que el ahorro sea mayor a K unidades de tiempo. Para ello deben acumularse en cada árbol de flujo –como los que se dibujan en las figuras 2.4 y 2.7 o también en los cuadros 2.1, 2.2 y 2.3– dos o más saltos dobles en cada uno de los caminos que comunican el nodo fuente con cada uno de los

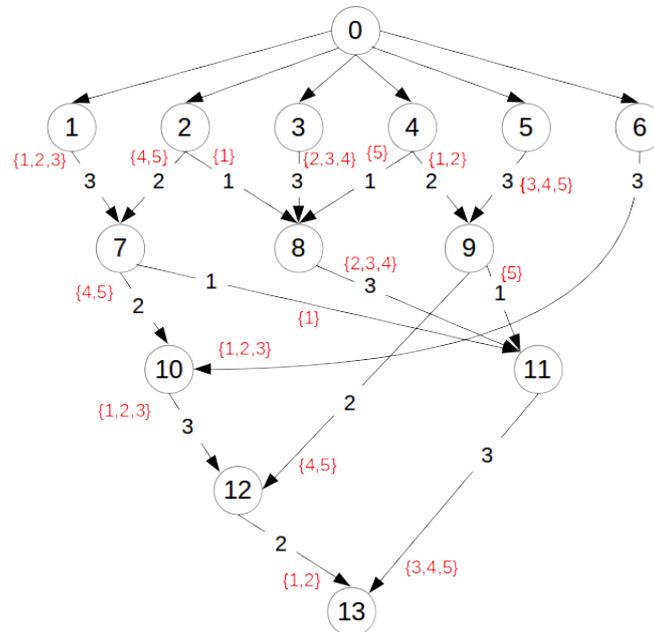


(a) Distribución de los $K = 5$ primeros objetos desde el nodo fuente hasta el nodo 13 en el último nivel.

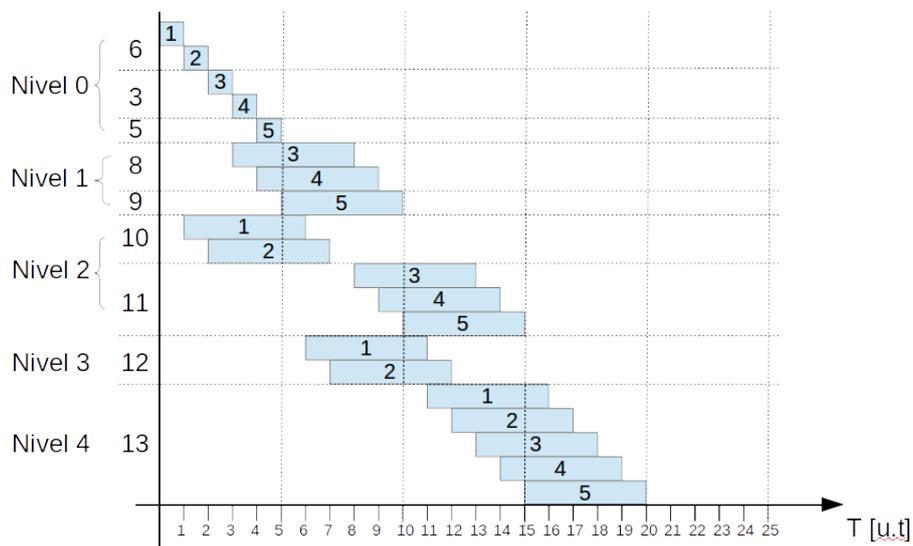


(b) Cronograma de la distribución.

Figura 2.11: Distribución de objetos para $G_{6,5,3} = (V, E)$ en el nodo final utilizando la planificación del Cuadro 2.2, que aprovecha los dobles saltos $9 \rightarrow 12$ y $11 \rightarrow 13$.



(a) Distribución de los $K = 5$ primeros objetos desde el nodo fuente hasta el nodo 13 en el último nivel.



(b) Cronograma de la distribución.

Figura 2.12: Distribución de objetos para $G_{6,5,3} = (V, E)$ en el nodo final utilizando la planificación del Cuadro 2.3, que aprovecha los dobles saltos $6 \rightarrow 10$ y $11 \rightarrow 13$.

nodos pertenecientes al último nivel, así como uno o más saltos dobles en cada uno de los caminos que comunican el nodo fuente con los nodos del penúltimo nivel. Queda pendiente, con todo, la definición general de una planificación óptima, es decir, una planificación capaz de obtener en cada caso el retardo mínimo de transmisión.

Es importante subrayar, tal y como se ha visto en las planificaciones anteriores, que cuando un nodo recibe un objeto que ha de retransmitir a un nodo de nivel inferior, dicha retransmisión comienza en el instante mismo en que termina de recibirse el objeto. Además, conforme la primera planificación propuesta, cada nodo retransmite un determinado objeto a lo sumo a otro nodo de nivel inferior. Es decir, aunque un nodo pueda efectuar u retransmisiones a través de sus u enlaces de subida, siempre retransmitirá u objetos distintos –un objeto a través de cada enlace– a uno o varios nodos de nivel inferior. Esto significa que cada objeto se retransmitirá una única vez desde un determinado nodo –siempre exceptuando el nodo raíz– y que además el objeto se retransmitirá en cuanto termine de ser recibido. Todo esto supone una considerable ventaja, puesto que la topología definida no requerirá buffers para la transmisión de datos.

Esto es asimismo válido para las otras planificaciones descritas en la presente sección. Así, aunque en la planificación de la Figura 2.7 el nodo 8 retransmita dos veces el objeto $\{3\}$, una al nodo 9 y otra al nodo 10, ambas transmisiones se harán de forma simultánea –cada una a través de cada una de las dos aristas de salida del nodo 8– y por tanto tampoco será necesario el empleo de un buffer.

Por otro lado, para que un grafo presente un retardo de distribución $\Delta_o < K \cdot H$, es condición necesaria, como se ha visto, que existan nodos cuyos padres estén dos niveles por encima del suyo. Aunque en la mayoría de grafos de distribución se dará esta circunstancia, existen casos restringidos en los que no existen tales nodos, es decir, saltos dobles en que una arista une un nivel l con el nivel $l + 2$. En estos casos, el vector de tiempos de llegada t_l indicará los tiempos de recepción de cada uno de los objetos para todos los nodos que forman el nivel l y por tanto $\Delta_o = K \cdot H$. Las Proposiciones 4 y 5, que enunciamos a continuación, especifican las condiciones que deben darse para la existencia de estos casos particulares.

Proposición 4. *Sea $G_{\alpha,K,u}$ el grafo de distribución, para α, K, u . Si el número de nodos del primer nivel es $\alpha = a \cdot K^i$, donde $a, i \in \mathbb{Z}$ con $a \geq 1$ y con $i \geq 0$, y se cumple que $a \cdot u^{i+1} < K$, entonces $G_{\alpha,K,u}$ no tiene saltos dobles, es decir, no contiene aristas entre nodos de un nivel l y nodos del nivel $l + 2$.*

Demostración. Para evitar la aparición de saltos dobles cada vez que los nodos de un nivel l forman los nodos del nivel inferior $l + 1$, no pueden quedar aristas libres. Recuérdese que conforme se han definido los algoritmos de ingreso, son estas aristas las que forman saltos dobles.

Denotamos por $n(l)$ el número de nodos que hay en el nivel l del grafo de distribución y por $e(l) = n(l) \cdot u$ el número de aristas disponibles en el nivel l . Igualmente, denotamos

por Φ_l el número de aristas de nodos de nivel l que no forman hijo en el nivel $l + 1$. Por construcción del grafo tenemos:

$$\Phi_l = e(l) \bmod K = (n(l) \cdot u) \bmod K$$

Se ha de demostrar que en este caso $\Phi_l = 0$, $\forall 0 \leq l < i$. Esto significa que en todos los niveles, excepto en el último, el número $e(l) = n(l) \cdot u$ de aristas disponibles debe ser múltiplo de K .

Nótese que si $i = 0$ resulta $\alpha = a$ y $\alpha \cdot u = a \cdot u < K$. En consecuencia, el grafo de distribución solo se forma con el nodo fuente y sus nodos hijos y por tanto no pueden formarse saltos dobles.

Por otro lado, si $i \geq 1$ entonces, como $n(0) = \alpha = a \cdot K^i$ tenemos $l(0) = a \cdot K^i \cdot u$. De este modo, como el número de aristas disponibles es múltiplo de K y los nodos del nivel 1 se forman tomando las aristas de $l(0)$ en grupos de K aristas, una vez formado el nivel 1 no quedan aristas libres en el nivel 0 y, por tanto, $\Phi_0 = 0$. El número de nodos del siguiente nivel vale:

$$n(1) = \left\lfloor n(0) \cdot \frac{u}{K} \right\rfloor = \left\lfloor a \cdot K^i \cdot \frac{u}{K} \right\rfloor = a \cdot K^{(i-1)} \cdot u$$

Como cada uno de estos nodos dispone de u aristas de subida, tenemos:

$$l(1) = a \cdot K^{(i-1)} \cdot u^2$$

Si $i = 1$ ya no aparecen nuevos niveles puesto que según el enunciado de la proposición resulta $l(1) = a \cdot K^{(i-1)} \cdot u^2 = a \cdot u^2 < K$. De este modo, el grafo de distribución se completa sin saltos dobles.

De otro modo, si $i \geq 1$, el número de aristas disponibles $l(1)$ vuelve a ser múltiplo de K y por tanto puede repetirse el anterior argumento según el cual una vez formado el nivel siguiente 2 no quedan aristas libres en el nivel 1 y por tanto $\Phi_1 = 0$. Ahora obtenemos:

$$n(2) = \left\lfloor n(1) \cdot \frac{u}{K} \right\rfloor = \left\lfloor a \cdot K^{(i-1)} \cdot u \cdot \frac{u}{K} \right\rfloor = a \cdot K^{(i-2)} \cdot u^2$$

Y por tanto:

$$l(2) = a \cdot K^{(i-2)} \cdot u^3$$

Si $i = 2$ ya no aparecen nuevos niveles puesto que según el enunciado de la proposición resulta $l(2) = a \cdot K^{(i-2)} \cdot u^3 = a \cdot u^3 < K$. Por tanto, el grafo de distribución se completa sin saltos dobles.

Por otra parte, si $i \geq 2$, el número de aristas disponibles en el nivel 2 vuelve a ser múltiplo de K , de forma que tampoco quedan aristas libres tras formarse el siguiente nivel. Este argumento puede repetirse para todos los niveles anteriores al nivel i , de forma que en ninguno de ellos aparecen aristas de doble salto. Finalmente, si se generalizan las anteriores expresiones, en el nivel i obtenemos el siguiente valor del número de nodos:

$$n(i) = a \cdot u^i$$

Y el número de aristas disponibles es por tanto:

$$l(i) = a \cdot u^{i+1}$$

Ahora bien, como conforme el enunciado de la proposición se cumple que $a \cdot u^{i+1} < K$ resulta $l(i) = a \cdot u^{i+1} < K$. De este modo, a partir de i no pueden añadirse nuevos nodos puesto que el grafo no dispone de suficiente ancho de banda. Además, i es el último nivel del grafo y por tanto $i = H - 1$ y la longitud del grafo es $H = i + 1$.

De este modo, a lo largo de la formación de los distintos niveles para $0 \leq l < i$ no ha quedado ninguna arista libre en el nivel l tras formar el nivel $l + 1$ y por tanto ninguna arista de un nodo del nivel l se comunica con un nodo del nivel $l + 2$, lo que significa, como queríamos demostrar, que no existen saltos dobles.

□

Si tomamos $a = 3$, $i = 2$ y $u = 2$ como ejemplo particular de la Proposición 4, entonces el número de nodos en el último nivel vale:

$$n(i) = n(2) = a \cdot u^i = 3 \cdot 2^2 = 12$$

Por otro lado, puesto que se debe cumplir $a \cdot u^{i+1} = 3 \cdot 2^3 = 24 < K$, tomamos un valor de K igual al menor entero que cumple la restricción, esto es $K = 25$.

En este escenario, en el primer nivel tenemos el siguiente número de nodos:

$$n(0) = \alpha = a \cdot K^i = 3 \cdot 25^2 = 1875$$

Para formar el segundo nivel disponemos de $\alpha \cdot u = 1875 \cdot 2 = 3750$ aristas que tomadas de $K = 25$ en $K = 25$ nos dan un número de nodos en el segundo nivel de:

$$n(1) = \frac{\alpha \cdot u}{K} = \frac{3750}{25} = 150$$

Y ello sin que sea necesario redondear ni quede ninguna arista libre, dado que 3750 es múltiplo de 25. Igualmente, en el siguiente y último nivel tenemos, como se ha calculado con anterioridad:

$$n(2) = \frac{n(1) \cdot u}{K} = \frac{150 \cdot 2}{25} = 12$$

De nuevo, tampoco queda ninguna arista libre del segundo nivel. Además, como $l(2) = n(2) \cdot u = 12 \cdot 2 = 24 < K = 25$ ya no podemos ingresar ningún nodo más en el grafo de distribución de forma que, tal y como se ha visto en la demostración de la Proposición 4, el valor i se corresponde con el último nivel.

Para evitar saltos dobles, en la Proposición 4 hemos supuesto que al formar los nuevos niveles no quedan aristas libres. Esta restricción ha sido además impuesta a todos los niveles excepto el último, que hemos llamado i . Este resultado, con todo, se generaliza en la siguiente Proposición en la que se permite que queden aristas libres tanto en el último como en el penúltimo nivel.

Proposición 5. *Sea $G_{\alpha, K, u}$ el grafo de distribución, para α, K, u . Si el número de nodos del primer nivel es $\alpha = a \cdot K^i$, donde $a, i \in \mathbb{Z}$ con $a \geq 1$ y con $i \geq 0$, y se cumple la condición $a \cdot u^{i+1} - \left\lfloor \frac{a \cdot u^{i+1}}{K} \right\rfloor (K - u) < K$, entonces $G_{\alpha, K, u}$ no tiene saltos dobles, es decir, no contiene aristas entre nodos de un nivel l y nodos del nivel $l + 2$.*

Demostración. La demostración repite la prueba de la Proposición 4 paso por paso hasta el nivel i . Recuérdese que en todos los niveles anteriores a i no han quedado aristas libres tras formar cada nivel consecutivo. En este caso vamos a suponer que el nivel i es el último o penúltimo nivel del grafo. De esta forma, como en los niveles anteriores no quedan aristas libres y a lo sumo se van a añadir dos niveles más –el nivel i y optativamente un nivel $i + 1$ posterior– el grafo no podrá contener saltos dobles. En efecto, si quedase alguna arista libre en el nivel i , cosa que ahora vamos a permitir, no podría dar un salto doble puesto que la condición $a \cdot u^{i+1} - \left\lfloor \frac{a \cdot u^{i+1}}{K} \right\rfloor (K - u) < K$, como se ve a continuación, no permite la existencia del nivel $i + 2$.

Obsérvese que la diferencia con respecto a la Proposición 4 es que en este caso permitimos que en el penúltimo nivel queden aristas libres, punto posible ya que tales aristas, como hemos visto, no pueden dar saltos dobles puesto que no existe un nivel dos unidades por debajo de ellas.

Recuérdese que según la demostración de la proposición anterior, en el nivel i tendemos el siguiente número de aristas disponibles:

$$l(i) = a \cdot u^{i+1}$$

En este caso no vamos a exigir que no se forme un nuevo nivel sino que no se formen dos niveles adicionales. Para ello hemos de asegurarnos que si se forma un nuevo nivel, el

grafo no disponga de un número de aristas libres mayor o igual a K . Por otro lado, en el nivel $i + 1$ el número de aristas disponibles es igual a las $l(i) = a \cdot u^{i+1}$ aristas disponibles en i menos las aristas consumidas por los nodos del nivel $i + 1$ más las aristas aportadas por tales nodos. Recuérdese el número de nodos del nivel $i + 1$ es:

$$n(i + 1) = \left\lfloor \frac{a \cdot u^{i+1}}{K} \right\rfloor$$

De modo que, dado que cada nodo consume K aristas y aporta u aristas, resulta:

$$l(i + 1) = a \cdot u^{i+1} - \left\lfloor \frac{a \cdot u^{i+1}}{K} \right\rfloor (K - u)$$

Si, como hemos dicho, no queremos que existan nuevos niveles a partir de $i + 1$, el ancho de banda disponible en $i + 1$ ha de ser menor a K , que es el ancho de banda que necesita un nodo para ingresar en el grafo. De este modo, se obtiene la condición del enunciado:

$$l(i + 1) = a \cdot u^{i+1} - \left\lfloor \frac{a \cdot u^{i+1}}{K} \right\rfloor (K - u) < K$$

En este caso, i puede resultar tanto el último como el penúltimo nivel del grafo. En caso de que sea el último tenemos, como en la anterior proposición, que $i = H - 1$ y la longitud del grafo es $H = i + 1$. Si, por el contrario, i constituye el penúltimo nivel entonces $i = H - 2$ y la longitud del grafo vale $H = i + 2$ en donde, por definición, denotamos por $H - 1$ el último nivel del grafo.

□

Nótese, que la Proposición 4 es un caso particular de la Proposición 5 dado que si se cumple la condición de la primera:

$$a \cdot u^{i+1} < K$$

Entonces, como ambas expresiones son positivas, tenemos:

$$\left\lfloor \frac{a \cdot u^{i+1}}{K} \right\rfloor = 0$$

Y por tanto también se cumple la condición de la Proposición 5:

$$a \cdot u^{i+1} - \left\lfloor \frac{a \cdot u^{i+1}}{K} \right\rfloor (K - u) = a \cdot u^{i+1} < K$$

De este modo, si se cumple la condición de la Proposición 5 sabemos que i es el último o penúltimo nivel del grafo. Para resolver esta indeterminación, puede aplicarse la condición de la Proposición 4. Si se cumple, entonces se trata del último nivel. Si no se cumple, i es el penúltimo nivel.

Veamos, a continuación, un caso sin saltos dobles que cumple las condiciones de la Proposición 5 y que no cumple las de la Proposición 4. Para ello, volvemos a considerar los valores $a = 3$, $i = 2$ y $u = 2$ pero ahora tomamos $K = 21$. En este caso, no se cumple la condición de la Proposición 4 puesto que $a \cdot u^{i+1} = 3 \cdot 2^3 = 24$ no es menor que $K = 21$.

Sin embargo, los anteriores parámetros sí cumplen la condición de la Proposición 5:

$$a \cdot u^{i+1} - \left\lfloor \frac{a \cdot u^{i+1}}{K} \right\rfloor (K - u) = 3 \cdot 2^3 - \left\lfloor \frac{3 \cdot 2^3}{21} \right\rfloor (21 - 2) = 24 - 19 = 5 < 21 = K$$

De esta forma puede predecirse que el grafo no contiene saltos dobles y que solo quedan aristas libres en los dos últimos niveles, que han de ser los niveles $i = 2$ e $i + 1 = 3$.

Todo esto puede comprobarse calculando el número de nodos desde el primer nivel. Así, en el primer nivel hay un número de nodos igual a:

$$n(0) = \alpha = a \cdot K^i = 3 \cdot 21^2 = 1323$$

El número de nodos en el segundo nivel es:

$$n(1) = \frac{\alpha \cdot u}{K} = \frac{1323 \cdot 2}{21} = 126$$

Además, puesto que la fracción es entera, no quedan aristas libres en el nivel 0, como ya se había previsto. En el nivel 2 resulta un número de nodos igual a:

$$n(2) = \frac{n(1) \cdot u}{K} = \frac{126 \cdot 2}{21} = 12$$

En este caso la fracción también es exacta y por tanto no quedan aristas libres en el nivel 1.

Por otro lado, como $l(2) = n(2) \cdot u = 12 \cdot 2 = 24 > K = 21$, puede añadirse un nuevo nivel con un número de nodos igual a:

$$n(3) = \left\lfloor \frac{n(2) \cdot u}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{12 \cdot 2}{21} \right\rfloor = 1$$

En este caso sobran $(n(2) \cdot u) \bmod K = (12 \cdot 2) \bmod 21 = 3$ aristas del nivel 2. Estas 3 aristas sumadas a las 2 aristas aportadas por el nuevo nodo del nivel 3 no son suficientes para permitir el ingreso de un nuevo nodo. Por tanto, como establecen las anteriores proposiciones, el grafo de distribución no contiene dobles saltos y además quedan aristas libres en los dos últimos niveles. En particular, tenemos 3 aristas libres en el penúltimo nivel $i = 2$ y dos aristas libres en el último nivel $i + 1 = 3$.

Capítulo 3

Análisis del grafo de distribución de capacidad mínima

Tal y como se ha visto en el capítulo anterior, el retardo de transmisión Δ_o de un grafo de distribución está acotado por el producto de K , que define el ancho de banda de subida de los nodos de la red, y el número de niveles H del grafo, que es una propiedad topológica del mismo determinada por la política de ingreso de los nodos. En este capítulo se analiza el caso particular de los grafos de distribución en que el número máximo de aristas de salida de los nodos del grafo, exceptuando el nodo fuente, es $u = 1$. Denominamos a esta topología *grafo de distribución de capacidad mínima*, ya que los nodos contribuyen a la capacidad total del sistema con el ancho de banda de subida mínimo, esto es, $1/K$ objetos/u.t.

3.1. Grafo de distribución de capacidad mínima

Se define el *grafo de distribución de capacidad mínima* como el grafo de distribución $G_{\alpha,K,1} = (V, E)$, es decir, el grafo de distribución en que $u = 1$. De este modo, exceptuando la fuente, todos los nodos de $G_{\alpha,K,1}$ pueden establecer una única conexión de salida de ancho de banda $1/K$. Por simplicidad, en ocasiones nos referiremos al grafo de distribución de capacidad mínima como *grafo mínimo de distribución*.

Para la formación del grafo de distribución de capacidad mínima, consideraremos el siguiente algoritmo de ingreso. Inicialmente, el algoritmo asigna en el nivel 0 los primeros α nodos, que de esta forma se convierten en *hijos* del nodo fuente r . Una vez ingresados todos los nodos del nivel 0, el siguiente nivel 1 se forma agrupando los nodos del nivel 0 de K en K y asignando a cada grupo un hijo en el nivel 1.

Obsérvese que si $\alpha \bmod K$ es distinto de 0, entonces quedan $\alpha \bmod K$ nodos del nivel 0 sin hijos en el nivel 1. Para un nivel genérico $l > 1$, el algoritmo procede de igual modo: forma grupos de K nodos que serán los nodos suministradores, o padres, de un nodo en el

nivel $l + 1$. Sólo cuando en un nivel l no quedan grupos de K nodos, el algoritmo puede recuperar nodos de niveles anteriores que no han formado hijo para añadir un nuevo hijo en el nivel $l + 1$. En este caso en que un nodo tiene al menos un padre en el nivel $l - 1$ y al menos otro en un nivel $l' < l - 1$, decimos que se trata de un *nodo ganancia*. Nótese que, por construcción, solo pueden aparecer nodos ganancia a partir del nivel 2.

El algoritmo de ingreso difiere ligeramente del Algoritmo 2.1 definido en la Sección 2.2. Mientras que el algoritmo original utiliza inmediatamente las aristas sobrantes de los nodos de un nivel l en la formación del nivel $l + 2$, en este caso estas aristas sobrantes no se utilizan hasta que los nodos de nivel l no pueden agregar nodos en el nivel $l + 1$ sin recurrir a aristas de nodos de nivel $l' < l$.

Este cambio en el algoritmo de ingreso –que como se explica a continuación no es más que una reordenación de las aristas que unen nodos de distintos niveles y que no afecta por tanto a la distribución en niveles de los nodos del grafo– se ha realizado con el fin de simplificar el análisis del número de niveles H del grafo mínimo de distribución. Esto es de vital importancia dado que los resultados expuestos en las siguientes páginas son, por tanto, aplicables tanto a los grafos construidos según el nuevo algoritmo de ingreso como a los grafos resultantes de emplear el Algoritmo 2.1.

Como se ha dicho, el nuevo algoritmo no cambia el patrón conforme el cual los distintos nodos se distribuyen en los sucesivos niveles que conforman el grafo. Esto es así dado que en ambos casos no se forma un nuevo nivel hasta haber agotado el ancho de banda disponible de los nodos que ya han ingresado en el grafo de distribución. Es decir, una vez se ha creado el nivel l , solo se forma un nuevo nivel $l + 1$ cuando el ancho de banda disponible de los nodos situados en los niveles anteriores a l es menor que K .

Como esta política se aplica en ambos algoritmos de ingreso, la distribución de nodos en distintos niveles es en ambos casos la misma. Es decir, en ambos grafos se obtienen los mismos niveles y en cada nivel el número de nodos también es el mismo en cada grafo. Más en general, esta afirmación es válida para cualquier otro algoritmo de ingreso que no forme un nivel $l + 1$ hasta haber agotado el ancho de banda disponible de los nodos situados en niveles anteriores al nivel l .

Tal y como se vio en el anterior capítulo, el nivel de los nodos, por definición, es el máximo nivel de todos sus nodos suministradores más una unidad. Un nodo de nivel l siempre tiene, además, al menos un nodo suministrador en el nivel $l - 1$. Por simplicidad, no se considera el nivel que forma el nodo fuente, de forma que el primer nivel etiquetado –que además lleva el identificador 0– es el que forman los nodos hijos del nodo fuente.

En la Figura 3.1 se representa el grafo de distribución de capacidad mínima para $\alpha = 11$ y $K = 3$ según el Algoritmo 2.1 de ingreso (Figura 3.1a) y también según el algoritmo de ingreso que acabamos de exponer (Figura 3.1b). En el grafo de la Figura 3.1a el nodo 15 de nivel 2 tiene dos nodos suministradores –los nodos 10 y 11– en el nivel 0, es decir, dos niveles arriba.

Contrariamente, en la Figura 3.1b es el nodo 16 el que recibe aristas de nodos situados dos o más niveles por encima suyo. En efecto, mientras que con el primer algoritmo los nodos 10 y 11 se asignan tan pronto como se puede como nodos suministradores, con el segundo algoritmo sólo cuando el nodo 15 de nivel 3 no puede agregar un nodo en colaboración con otros nodos de su mismo nivel, se recurre a los nodos 10 y 11 que todavía no se han empleado como nodos suministradores.

Tal y como se especificó en el anterior capítulo, en el grafo de distribución formado según el Algoritmo 2.1, un nodo de nivel l tiene al menos un nodo padre en el nivel $l - 1$, mientras que el resto de nodos padres pertenecen al nivel $l - 1$ o $l - 2$. Dicho de otra forma, el salto máximo que puede dar una arista es de dos niveles. Con el nuevo algoritmo de ingreso, este salto máximo es de l niveles, puesto que tal y como se muestra en la Figura 3.1b, un nodo del nivel l puede tener nodos suministradores en el nivel 0.

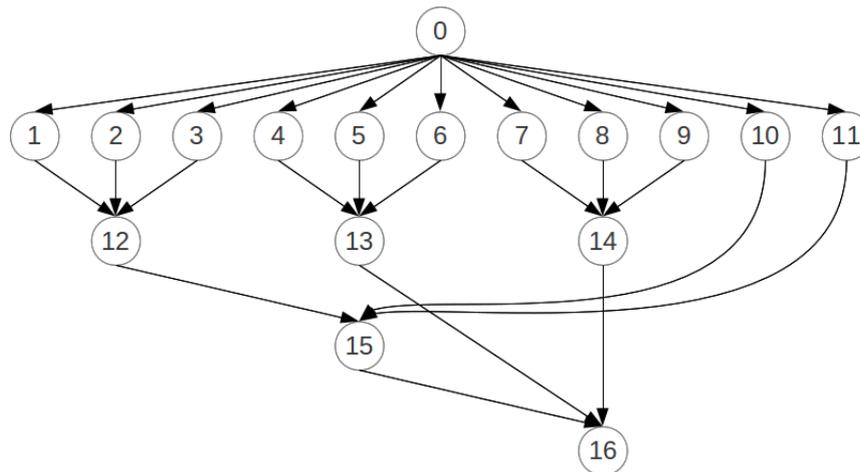
Conforme el nuevo algoritmo de ingreso, cada vez que no se pueden agrupar K nodos de un mismo nivel para formar un hijo, se toman nodos que han quedado libres, i.e. sin hijos, en niveles anteriores. Llegados a este punto, se amplía la definición de *hijo ganancia* a todos aquellos nodos cuyos padres pertenecen a distintos niveles o que tienen entre sus padres –o entre los padres de sus padres y así sucesivamente– un hijo ganancia.

Para evitar la aparente recursividad de la definición, puede empezar por definirse el conjunto de los *hijos directos*. Se dice que un nodo del nivel l es *hijo directo* cuando todos sus padres pertenecen al mismo nivel $l - 1$, y lo mismo los padres de sus padres pertenecen todos al nivel $l - 2$ y así sucesivamente hasta llegar a la fuente. De este modo, un nodo es un *hijo ganancia* cuando no se trata de un *hijo directo*, es decir, cuando en algún momento de su formación –lo que incluye los padres y los padres de los padres, etc.– el algoritmo ha empleado nodos que habían quedado previamente sin hijos en niveles superiores.

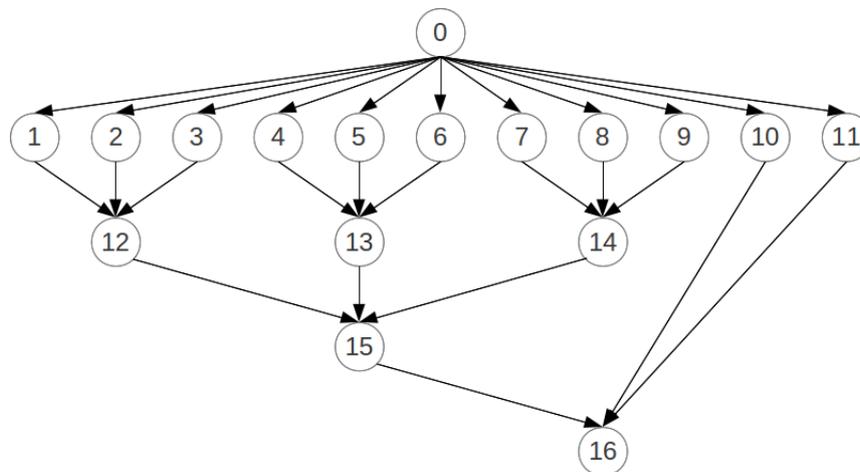
En la Figura 3.2 se representa el grafo de distribución de capacidad mínima $G_{7,2,1}$. En este caso, los dos padres del nodo 13 pertenecen al nivel inmediatamente superior y, sin embargo, el nodo 13 es un hijo ganancia puesto que uno de sus padres, el nodo 12, es un hijo ganancia. En efecto, el nodo 12 tiene un padre en el nivel inmediatamente anterior, el nodo 10, y otro padre dos niveles por encima, el nodo 7. En lo sucesivo, se considera que el algoritmo de ingreso utilizado para formar el grafo de distribución de capacidad mínima es el expuesto en este capítulo.

Lema 3. *Si existe un hijo ganancia en el nivel l , entonces se trata del único hijo ganancia del nivel l . Además, si v es el primer hijo ganancia del grafo de distribución de capacidad mínima y pertenece al nivel l , como máximo $K - 1$ de sus padres pertenecen al nivel $l - 1$ y, al menos, otro de sus padres pertenece a un nivel $l' < l - 1$.*

Demostración. Primero se demuestra la segunda parte del Lema. Si v es el primer hijo ganancia del grafo de distribución de capacidad mínima, entonces todos sus padres son hijos directos. Supongamos que v aparece en el nivel l , entonces tenemos como máximo $K - 1$ padres de v en el nivel $l - 1$ –si se tuviera un número mayor, formarían un hijo



(a) Grafo de capacidad mínima para $\alpha = 11$, $K = 3$ con el Algoritmo 2.1 de ingreso.



(b) Grafo de capacidad mínima para $\alpha = 11$, $K = 3$ con el nuevo algoritmo de ingreso.

Figura 3.1: Grafo de capacidad mínima para $\alpha = 11$, $K = 3$.

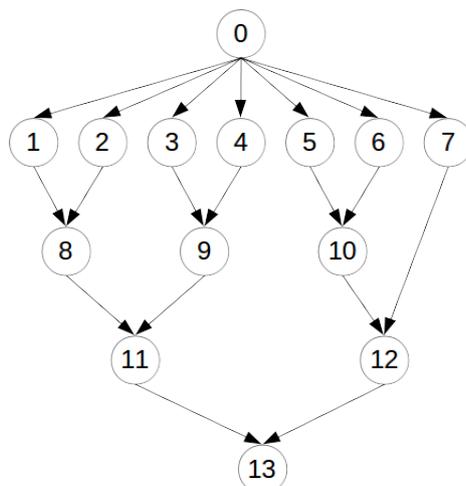


Figura 3.2: Grafo de distribución de capacidad mínima $G_{7,2,1} = (V, E)$.

directo— y además un máximo de $K - 1$ padres en niveles superiores, puesto que si fueran más, el primer hijo ganancia habría aparecido antes del nivel l .

De este modo, quedan un total de $2 \cdot (K - 1)$ padres potenciales en niveles previos a l . Dado que cada nuevo nodo que ingresa requiere K padres, en el nivel l sólo podemos formar un hijo ganancia —para formar dos necesitamos al menos $2K$ padres— que tiene un máximo de $K - 1$ padres en el nivel $l - 1$ y, consecuentemente, al menos un padre en un nivel previo a $l - 1$.

Supóngase a continuación que el segundo hijo ganancia aparece en el nivel l' . Si en el nivel $l' - 1$ no tenemos un hijo ganancia, en los niveles anteriores a $l' - 1$ podemos tener un máximo de $K - 1$ padres potenciales, incluido el primer hijo ganancia, según la argumentación del párrafo anterior. Del mismo modo, en el nivel $l' - 1$ puede haber como máximo $K - 1$ hijos directos que aún no han formado hijo. De este modo como máximo quedan $2 \cdot (K - 1)$ padres potenciales y sólo puede formarse un hijo ganancia en el nivel l' .

Por otro lado, si el primer hijo ganancia se encontrara en el nivel $l' - 1$, entonces en los niveles anteriores a $l' - 2$ sólo podríamos tener $K - 2$ padres potenciales. Esto es así porque inicialmente, antes de formar el primer hijo ganancia en el nivel $l' - 1$ no hubiésemos podido tener más de $K - 1$ hijos ganancia por encima de $l' - 2$ puesto que entonces el primer hijo ganancia habría aparecido en $l' - 2$ o antes.

Después de formar el primer hijo ganancia en el nivel $l' - 1$ y suponiendo que hasta el nivel $l' - 2$ tuviéramos inicialmente el máximo número de padres potenciales sin hijo directo, que es $K - 1$, nos quedan finalmente como máximo $K - 2$ padres potenciales por encima del nivel $l' - 2$, es decir, los $K - 1$ iniciales menos, como mínimo, el nodo empleado para formar el primer hijo ganancia en $l' - 1$.

De este modo, finalmente tenemos como máximo los siguientes padres potenciales hasta

el nivel $l' - 1$ para formar el segundo hijo ganancia en el nivel l' . En primer lugar, los $K - 2$ padres potenciales que se encuentran por encima del nivel $l' - 2$, como queda demostrado. En segundo lugar, un máximo de $K - 1$ nodos formados en el nivel $l' - 1$ que son hijos directos pero que no son suficientes para formar un hijo directo en el nivel l' . Y, por último, el primer nodo ganancia formado en el nivel $l' - 1$. Obsérvese que en el nivel $l' - 2$ no consideramos la posibilidad de posibles padres dado que se han empleado en el ingreso del primer nodo ganancia de $l' - 1$.

Esto hace un total de $(K - 1) + (K - 2) + 1 = 2(K - 1)$ padres potenciales. De este modo, en el nivel l' sólo puede haber de nuevo un hijo ganancia. Entonces, recursivamente se repite el argumento para los siguientes hijos ganancia, considerando que en niveles previos sólo puede haber un hijo ganancia.

□

3.2. Cotas del número de niveles H

En esta sección se calculan una cota superior y una cota inferior del número H de niveles del grafo de distribución de capacidad mínima. Recuérdese que los niveles del grafo de distribución se numeran desde el nivel 0, correspondiente al nivel que forman los nodos hijos del nodo fuente, hasta el último nivel, que por definición es el nivel $H - 1$. De este modo, como no consideramos que el nodo fuente pertenezca a un nivel de distribución, el número total de niveles del grafo de distribución es H .

Para calcular la cota inferior, consideramos que cuando un nodo no ha formado un hijo directo no se utiliza con posterioridad para agregar un nuevo nodo en niveles inferiores. Con esta restricción, que desaprovecha el ancho de banda de los nodos que no forman hijo directo y que, por tanto restringe el número final de nodos y en consecuencia también el número de niveles, obtenemos una cota inferior del número de niveles del grafo, a la que llamamos H_t .

Denotamos por $n'(l)$ el número de nodos que hay en el nivel l en un grafo de distribución de capacidad mínima en cuya construcción sólo se pueden formar hijos directos. La fuente tiene un ancho de banda de $\alpha \cdot K$ con lo que en el primer nivel agrega un número de nodos igual a:

$$n'(0) = \alpha$$

Dado que en el grafo de distribución de capacidad mínima tenemos $u = 1$, son necesarios K nodos del nivel 0 para agregar un nuevo nodo en el nivel 1. Así pues:

$$n'(1) = \left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor$$

Como se ha dicho, en este caso los nodos de nivel 0 que no han formado un hijo directo en el nivel 1 no se van a emplear para agregar nodos ganancia en niveles posteriores. Así pues, disponemos de $n'(1)$ nodos para ingresar los nodos del nivel 2, por lo tanto:

$$n'(2) = \left\lfloor \frac{n'(1)}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor}{K} \right\rfloor$$

De este modo, renunciamos a la contribución de $n'(0) \bmod K$ nodos que no han podido formar hijo directo. En general, el número de nodos en el nivel $n'(l)$, $l \geq 0$ viene dado por la expresión:

$$n'(l) = \begin{cases} \alpha & \text{si } l = 0. \\ \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor}{K} \right\rfloor}{\vdots} \right\rfloor_{l \text{ veces}} & \text{si } l > 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

A partir de las expresiones del Lema 4 y del Lema 5 calculamos una expresión más simple de la Ecuación 3.1.

Lema 4. Sean α, K dos enteros tales que $0 < K \leq \alpha$, se cumple que $\forall i \geq 0$:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \dots + \alpha_i \cdot K^i < K^{i+1} \quad (3.2)$$

en donde $\alpha_i < K$ es el i -ésimo coeficiente de α expresado en base K , esto es:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \alpha_2 \cdot K^2 + \dots + \alpha_i \cdot K^i + \dots + \alpha_j \cdot K^j$$

Demostración. Demostramos el lema por inducción. Por definición, $\alpha_i \leq K - 1$. De este forma, trivialmente se tiene:

$$\alpha_0 \leq K - 1 < K$$

Para $i = 1$:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K \leq K - 1 + (K - 1) \cdot K = K^2 - 1 < K^2$$

E igualmente para $i = 2$:

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \alpha_2 \cdot K^2 \leq K^2 - 1 + (K - 1) \cdot K^2 = K^3 - 1 < K^3$$

Por hipótesis de inducción, suponemos que el enunciado del lema se cumple para $(i-1)$. De este modo:

$$\alpha_0 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot K^{i-1} < K^i$$

A continuación efectuamos el paso de inducción y se demuestra así que la expresión es válida para i :

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot K^{i-1} + \alpha_i \cdot K^i &\leq K^i - 1 + \alpha_i \cdot K^i \leq \\ K^i - 1 + (K-1) \cdot K^i &= K^{i+1} - 1 < K^{i+1} \end{aligned}$$

Lo que demuestra por inducción que $\forall i \geq 0$ se cumple la Ecuación 3.2.

□

Lema 5. Sean α, K, l enteros tales que $0 < K \leq \alpha$ y $l > 0$. Entonces:

$$\left[\begin{array}{c} \lfloor \frac{\alpha}{K} \rfloor \\ \vdots \\ K \end{array} \right]_{l \text{ veces}} = \left\lfloor \frac{\alpha}{K^l} \right\rfloor \quad (3.3)$$

Demostración. Lo mismo que en la demostración del lema anterior procedemos por inducción, ahora sobre l . Trivialmente, si $l = 1$:

$$\left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor$$

Para $l = 2$ debe demostrarse que:

$$\left[\begin{array}{c} \lfloor \frac{\alpha}{K} \rfloor \\ K \end{array} \right] = \left\lfloor \frac{\alpha}{K^2} \right\rfloor \quad (3.4)$$

En primer lugar desarrollamos el término de la derecha de la igualdad de la Ecuación 3.4. Para ello escribimos α en base K :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \alpha_2 \cdot K^2 + \cdots + \alpha_j \cdot K^j}{K^2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K}{K^2} + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-2} \right\rfloor \end{aligned}$$

Según el Lema 4, tenemos $\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K < K^2$. Como además $\sum_{i=2}^j \alpha_i \cdot K^{i-2} \in \mathbb{Z}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^2} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \alpha_2 \cdot K^2 + \cdots + \alpha_j \cdot K^j}{K^2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K}{K^2} + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \alpha_2 + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-2} \right\rfloor \\ &= \alpha_2 + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-2} \\ &= \sum_{i=2}^j \alpha_i \cdot K^{i-2} \end{aligned}$$

Del mismo modo, se calcula $\lfloor \alpha/K \rfloor$:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \alpha_2 \cdot K^2 + \cdots + \alpha_j \cdot K^j}{K} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\alpha_0}{K} + \alpha_1 + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-1} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^j \alpha_i \cdot K^{i-1} \end{aligned}$$

A continuación, se desarrolla el término de la parte izquierda de la igualdad de la Ecuación 3.4:

$$\begin{aligned} \left\lfloor \left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \cdot K + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-1}}{K} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{\alpha_1}{K} + \alpha_2 + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-2} \right\rfloor \\ &= \sum_{i=2}^j \alpha_i \cdot K^{i-2} \\ &= \left\lfloor \frac{\alpha}{K^2} \right\rfloor \end{aligned}$$

De este modo, hemos demostrado que la Ecuación 3.3 se cumple para $l = 2$. En rigor, en las anteriores expresiones se comprueba que al calcular $\lfloor \frac{\alpha}{K^2} \rfloor$ se eliminan de forma

simultánea los dos primeros dígitos α_0 y α_1 , mientras que en el cálculo de $\lfloor \frac{\lfloor \frac{\alpha}{K} \rfloor}{K} \rfloor$ se elimina en primer término el dígito α_0 y a continuación el dígito α_1 .

Seguidamente, asumimos, según la hipótesis de inducción, que la expresión se cumple para $l - 1$:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \lfloor \frac{\lfloor \frac{\alpha}{K} \rfloor}{K} \rfloor \\ \vdots \\ K \end{array} \right]_{(l-1) \text{ veces}} &= \left[\frac{\alpha}{K^{l-1}} \right] \\
 &= \left[\frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \cdots + \alpha_j \cdot K^j}{K^{l-1}} \right] \\
 &= \left[\frac{\alpha_0 + \cdots + \alpha_{l-2} \cdot K^{l-2}}{K^{l-1}} + \alpha_{l-1} + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-(l-1)} \right] \\
 &= \sum_{i=l-1}^j \alpha_i \cdot K^{i-(l-1)}
 \end{aligned}$$

Entonces, suponiendo que la expresión es válida para $l - 1$ demostramos que también lo es para l :

$$\begin{aligned}
 \left[\frac{\left[\begin{array}{c} \lfloor \frac{\lfloor \frac{\alpha}{K} \rfloor}{K} \rfloor \\ \vdots \\ K \end{array} \right]_{(l-1) \text{ veces}}}{K} \right] &= \left[\frac{\alpha}{K^l} \right] \\
 &= \left[\frac{\alpha_{l-1}}{K} + \alpha_l + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-l} \right] \\
 &= \sum_{i=l}^j \alpha_i \cdot K^{i-l}
 \end{aligned}$$

Finalmente, por otro lado:

$$\begin{aligned}
\left\lfloor \frac{\alpha}{K^l} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \cdots + \alpha_j \cdot K^j}{K^l} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \cdots + \alpha_{l-1} \cdot K^{l-1}}{K^l} + \alpha_l + \cdots + \alpha_j \cdot K^{j-l} \right\rfloor \\
&= \sum_{i=l}^j \alpha_i \cdot K^{i-l}
\end{aligned}$$

Luego, por inducción, queda demostrado el lema. En este caso general, lo mismo que para $l = 2$, se ha demostrado que en la expresión $\lfloor \frac{\alpha}{K^l} \rfloor$ se eliminan los primeros l dígitos de α_0 a α_{l-1} de forma simultánea, mientras que en la expresión recursiva primero se elimina α_0 , a continuación α_1 y así sucesivamente hasta el término α_{l-1} .

□

Ahora estamos en disposición de reescribir la Ecuación 3.1 que expresa el número de nodos $n'(l)$ pertenecientes al nivel l en un grafo de distribución de capacidad mínima en que no se forman hijos ganancia. De este modo:

$$n'(l) = \begin{cases} \alpha & \text{si } l = 0 \\ \left\lfloor \frac{\alpha}{K^l} \right\rfloor & \text{si } l > 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Sea L el último nivel del grafo de distribución de capacidad mínima sin hijos ganancia, es decir, sea L tal que $n'(l) = 0 \quad \forall l > L$. De este modo, L es el primer nivel del grafo tal que $n'(L) < K$ y por tanto no se puede formar un hijo directo en el nivel $L + 1$. Bajo esta premisa:

$$n'(L) = \left\lfloor \frac{\alpha}{K^L} \right\rfloor \leq \frac{\alpha}{K^L} < K$$

Si despejamos resulta:

$$K^{L+1} > \alpha \quad \Rightarrow \quad L + 1 > \log_K \alpha$$

Puesto que L es el primer nivel que no pueden formar hijos directos en el siguiente nivel, L ha de ser el menor número entero que cumple dicha desigualdad. De esta forma:

$$L + 1 = 1 + \lceil \log_K \alpha \rceil$$

Más adelante se ve que el número de niveles H del grafo de distribución vale H_t o $H_t + 1$. Como por otro lado la longitud, tal y como se definió en el anterior capítulo, viene dado

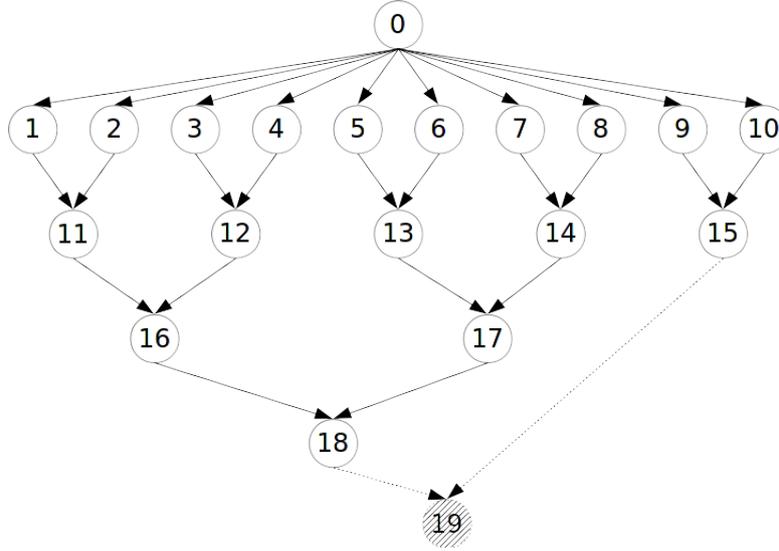


Figura 3.3: Grafo de distribución de capacidad mínima para $\alpha = 10$, $K = 2$.

por el número de niveles, el grafo de distribución de capacidad mínima tiene una longitud y , y, por tanto, un retardo de distribución, acotados logarítmicamente en función de α .

Por definición, el número de niveles en un grafo de distribución es igual al índice del último nivel más 1, en este caso $(L + 1)$. Si, como se ha dicho, denotamos por H_t el número de niveles del grafo de distribución de capacidad mínima sin hijos ganancia, se tiene:

$$H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor \quad (3.6)$$

Igualmente, a partir de la Ecuación 3.5 se puede calcular el orden del grafo de distribución de capacidad mínima sin hijos ganancia, que denotamos por N_{\min} , como:

$$N_{\min} = 1 + \alpha + \sum_{i=1}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor \quad \text{con } H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor \quad (3.7)$$

En efecto, el grafo se compone finalmente del nodo fuente, los α nodos del nivel 0, que son hijos del nodo fuente, y a partir del siguiente nivel, que es el nivel 1, los $\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \rfloor$ hijos directos de cada uno de los niveles sucesivos, como se ha probado en los anteriores párrafos.

A continuación, se comprueba la precisión de las cotas mediante un par de ejemplos. Consideramos en primer lugar el grafo de capacidad mínima para $\alpha = 10$ y $K = 2$ mostrado en la Figura 3.3. El nodo 19, que en la figura aparece sombreado, es un hijo ganancia y, por tanto, su aparición no se considera en el cálculo del número de niveles H_t . Si se aplica la Ecuación 3.6 resulta $H_t = 1 + \lfloor \log_2 10 \rfloor = 4$ que, efectivamente, es inferior al número

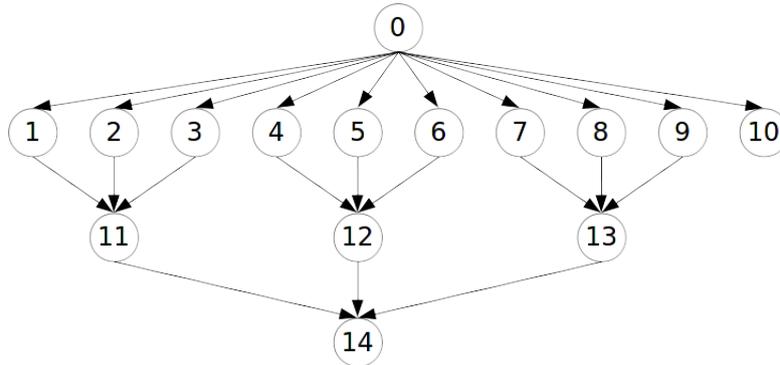


Figura 3.4: Grafo de distribución de capacidad mínima para $\alpha = 10$, $K = 3$.

de niveles del grafo de distribución con hijos ganancia. En cuanto al número de nodos, tenemos:

$$N_{\min} = 1 + 10 + \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{8} \right\rfloor = 19$$

En este caso $N_{\min} = 19$ está una unidad por debajo del número real de nodos del grafo de distribución, dado que, como se ha dicho, no considera la aparición del único hijo ganancia.

Por otro lado, en el grafo de la Figura 3.4, definido para $\alpha = 10$ y $K = 3$, no aparecen hijos ganancia y por tanto H_t coincide con el valor real H del número de niveles. En este caso $H_t = 1 + \lfloor \log_3 10 \rfloor = 3$. Por el mismo motivo, en este caso N_{\min} coincide con el número de nodos del grafo:

$$N_{\min} = 1 + 10 + \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{9} \right\rfloor = 15$$

De este modo, los grafos de distribución de capacidad mínima que, por construcción, no poseen hijos ganancia tienen un número de niveles $H = H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor$ como hemos visto para el ejemplo de la Figura 3.4 para $\alpha = 10$ y $K = 3$. En las proposiciones 4 y 5 de la sección 2.3 se especificaron las condiciones que deben darse para la existencia de estos casos particulares.

A continuación se demuestra que el número de niveles H del grafo de distribución de capacidad mínima es o bien H_t o bien $H_t + 1$. Más adelante se verá además que $H = H_t + 1$ en caso de que el último nivel del grafo mínimo de distribución esté formado por un único hijo ganancia, y ello con independencia de la existencia de hijos ganancia en niveles anteriores.

Consideremos el grafo para $\alpha = 340$ y $K = 3$ representado esquemáticamente en la Figura 3.5. En cada nivel se muestra el número de nodos que forman hijos directos en el nivel inmediatamente posterior (recordemos que consideramos que con la cota H_t no se forman hijos ganancia), así como el número de nodos que no forman hijo directo (en

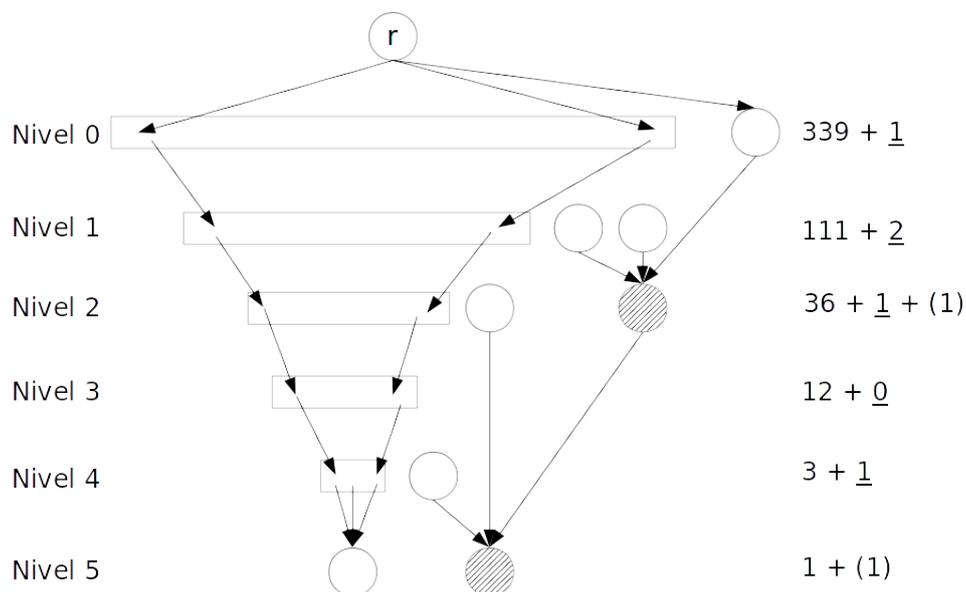
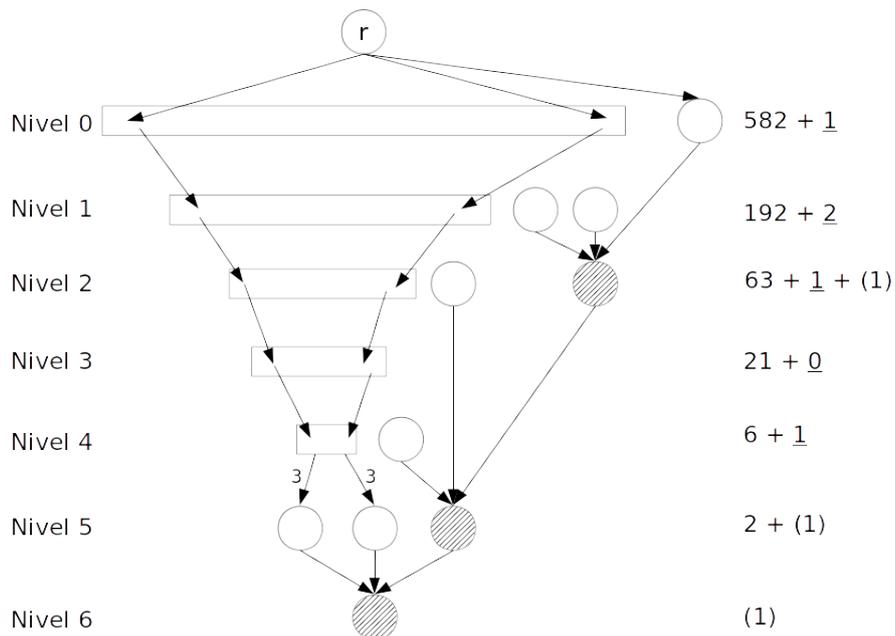
(a) Grafo de capacidad mínima para $\alpha = 340$, $K = 3$.(b) Grafo de capacidad mínima para $\alpha = 583$, $K = 3$.

Figura 3.5: Grafos que muestran que $H = H_t + 1$ si el único nodo del último nivel es un hijo ganancia o que H_t en caso contrario.

subrayado) y el posible hijo ganancia (entre paréntesis) que se formaría si se permitiera la aparición de tales nodos. En este caso los hijos ganancia se han sombreado para distinguirlos de los hijos directos.

Si se construye el grafo para $\alpha = 340$ y $K = 3$ de la Figura 3.5a sin restricciones, se forman dos hijos ganancia, uno en el nivel 2 y otro en el último nivel 5 que, sin embargo, no es el único nodo de este nivel. El número de niveles es $H = 6$ y el valor de la cota es $H_t = 1 + \lfloor \log_3 340 \rfloor = 6$. Por otro lado, si se obvia la aparición de los hijos ganancia el número de nodos N_{\min} resulta:

$$N_{\min} = 1 + 340 + \left\lfloor \frac{340}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{340}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{340}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{340}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{340}{243} \right\rfloor = 508$$

Esta cantidad es inferior al número de nodos del grafo, que es 510, puesto que como se ha visto en la sección anterior, omite el cómputo de los nodos ganancia, que en este caso son 2. De ahí la diferencia de dos unidades entre $N_{\min} = 508$ y el verdadero orden del grafo.

Por otro lado, la Figura 3.5b muestra el grafo mínimo de distribución para $\alpha = 583$ y $K = 3$. En este caso, el grafo contiene un único nodo en el último nivel que es, además, un nodo ganancia. De este modo, como habíamos dicho y se demuestra a continuación, el valor de la cota $H_t = 1 + \lfloor \log_3 583 \rfloor = 6$ está una unidad por debajo del verdadero número de niveles, que es $H = 7$. Si se obvia la aparición de los hijos ganancia, ahora el número de nodos N_{\min} resulta:

$$N_{\min} = 1 + 583 + \left\lfloor \frac{583}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{583}{9} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{583}{27} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{583}{81} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{583}{243} \right\rfloor = 872$$

Lo mismo que antes, ahora existe una diferencia respecto al verdadero orden del grafo, que es 875, debido a que en el cálculo de N_{\min} no se contabilizan los tres hijos ganancia aparecidos en los niveles 2, 5 y 6, respectivamente.

Lema 6. *Sea $G_{\alpha,K,1} = (V, E)$ el grafo de distribución de capacidad mínima para α y K y sea H su número de niveles, entonces:*

$$H_t \leq H \leq H_t + 1, \text{ con } H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor \quad (3.8)$$

Demostración. Si se considera, excepcionalmente, que el grafo no contiene ningún hijo ganancia, entonces cada nivel dispone exactamente de $\lfloor \alpha/K^l \rfloor$ nodos. Además, podremos añadir niveles mientras esta cantidad sea mayor o igual a K . De acuerdo con la definición de H_t , esto nos lleva a un último nivel $H_t - 1$ y a un número de niveles igual a $H = H_t$ dado que el primer nivel formado por los hijos de la fuente se identifica como nivel 0. En otro caso, si acumulamos al menos K potenciales suministradores sin hijos directos en el nivel $H_t - 1$, podremos añadir un nivel adicional H_t , de lo que resulta un número de niveles $H = H_t + 1$.

Por otro lado, de acuerdo con el Lema 3 en el nivel $H_t - 1$, en cualquier caso, solo podemos tener como máximo $2(K - 1)$ padres potenciales para un futuro hijo ganancia. De este modo, si se forma un hijo ganancia en el nivel añadido H_t ya no podremos formar un hijo ganancia en un nuevo nivel puesto que solo dispondremos de un total de padres potenciales menor o igual a los máximos $2(K - 1)$ de que disponíamos inicialmente menos los K consumidos para formar el hijo ganancia del nivel H_t más este último hijo ganancia, lo que da un total de $2(K - 1) - K + 1 = K - 1$ padres potenciales, que no son suficientes para formar un posible hijo ganancia adicional.

□

3.3. Orden del grafo de distribución de capacidad mínima

Si denotamos $n(l)$ como el número de nodos en el nivel l en el grafo de distribución de capacidad mínima se tiene que:

$$n(l) \geq n'(l) = \left\lfloor \frac{\alpha}{K^l} \right\rfloor \quad 0 \leq l \leq H_t - 1 \quad (3.9)$$

Recuérdese que $H_t = 1 + \lceil \log_K \alpha \rceil$. La Ecuación 3.9 plantea una desigualdad dado que no considera todos los nodos en el nivel l , es decir, no tiene en cuenta los posibles hijos ganancia. En este análisis inicial consideramos niveles que van de 0 a $H_t - 1$ y excluimos la contabilización del posible hijo ganancia que puede aparecer en un último nivel $l = H_t$. De esta forma, puede obtenerse la siguiente cota N_{\min} del orden del grafo de distribución de capacidad mínima $|G_{\min}|$, que considera la igualdad $n(l) = \lfloor \alpha/K^l \rfloor$ de la Ecuación 3.9 y contabiliza además el nodo fuente:

$$|G_{\min}| \geq N_{\min} = 1 + \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor$$

Un primer ajuste de esta expresión puede realizar la suma sin tomar la parte entera sino el valor real de cada uno de los términos del sumatorio. De este modo, resulta:

$$N'_{\min} = 1 + \sum_{i=0}^{H_t-1} \frac{\alpha}{K^i} = 1 + \alpha \cdot \frac{1 - (1/K^{H_t})}{1 - (1/K)} \quad (3.10)$$

En este caso, no obstante, N'_{\min} no constituye una cota sino una aproximación. En efecto, si se aplica la Ecuación 3.10 al grafo de distribución de capacidad mínima para $\alpha = 10$ y $K = 2$ representado en la Figura 3.3 en el que, según vimos, se tiene $H_t = 4$ respecto a un número real de niveles $H = 5$, resulta:

(α, K)	H	H_t	$ G_{\min} $	N'_{\min}
(25, 6)	2	2	30	30,17
(26, 6)	3	2	32	31,33
(27, 6)	3	2	33	32,5
(29, 6)	3	2	35	34,83

Cuadro 3.1: Valores de $|G_{\min}|$ y N'_{\min} para distintos grafos de distribución de capacidad mínima.

$$N'_{\min} = 1 + 10 \cdot \frac{1 - 1/2^4}{1 - 1/2} = 19,75$$

El valor real del orden del grafo es $|G_{\min}| = 20$, con lo que para obtener $|G_{\min}|$ debe redondearse N'_{\min} por arriba. Como en este caso el grafo aprovecha el ancho de banda del nodo del nivel $H_t - 1$ para formar un nuevo nivel H_t , finalmente se tiene $20 = |G_{\min}| > N'_{\min} = 19,75$.

Si a continuación se aplica la Ecuación 3.10 sobre el grafo de distribución de capacidad mínima con $\alpha = 10$ y $K = 3$ representado en la Figura 3.4 en el que $H = H_t = 3$, resulta:

$$N'_{\min} = 1 + 10 \cdot \frac{1 - 1/3^3}{1 - 1/3} = 15,44$$

Como en este caso el número real de nodos es 15, para obtener $|G_{\min}|$ debe redondearse N'_{\min} por abajo. Esto es así porque la Ecuación 3.10 recoge en el cálculo de N'_{\min} anchos de banda sobrantes –en forma de cantidades decimales– que finalmente no se aprovechan en la formación de hijos ganancia y por eso $15,44 = N'_{\min} > |G_{\min}| = 15$.

De este modo, aunque N'_{\min} aproxima bien el orden del grafo mínimo de distribución, no sirve de cota puesto que su valor puede estar por encima o debajo de $|G_{\min}|$. Cabe preguntarse, con todo, si redondeando N'_{\min} por debajo podría obtenerse una cota inferior del orden del grafo tal que $|G_{\min}| \geq \lfloor N'_{\min} \rfloor$. En el Cuadro 3.1 se muestran ejemplos de grafos mínimos de distribución que cumplen la hipótesis y en los cuales se cumple también que $\lfloor N'_{\min} \rfloor = |G_{\min}|$ cuando $H = H_t$ y $\lfloor N'_{\min} \rfloor < |G_{\min}|$ cuando $H = H_t + 1$.

A continuación se demuestra que la hipótesis de que $|G_{\min}| \geq \lfloor N'_{\min} \rfloor$ es cierta.

Lema 7. Sea $G_{\alpha,K,1} = (V, E)$ el grafo de distribución de capacidad mínima para α y K y sea $H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor$, entonces:

$$|G_{\min}| \geq N_{\min,c} = 1 + \left\lfloor \sum_{i=0}^{H_t-1} \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \alpha \cdot \frac{1 - (\frac{1}{K})^{H_t}}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor \quad (3.11)$$

Demostración. Se define el sumatorio S como:

$$S = \sum_{i=0}^{H_t-1} \frac{\alpha}{K^i} = \alpha \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{K}\right)^{H_t}}{1 - \frac{1}{K}}$$

Se va a mostrar que cuando $S + 1$ es mayor que $|G_{\min}|$, la diferencia es menor que 1, lo cual demuestra el lema dado que $N_{\min,c}$ se obtiene redondeando $S + 1$ por debajo. Se puede ver que $S + 1$ es mayor que $|G_{\min}|$ en el caso en que uno o varios nodos no formen un hijo directo, ya que entonces el sumatorio S cuenta, para cada uno de esos nodos, una fracción de $1/K$ hijos para el siguiente nivel, $1/K^2$ para el siguiente y así sucesivamente. Por lo tanto, si el nodo sin hijo está a una distancia L del último nivel $H_t - 1$ está contribuyendo al sumatorio S con un número de hijos igual a:

$$\sum_{i=1}^L \frac{1}{K^i} < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{K^i} = \frac{1/K}{1 - 1/K} = \frac{1}{K - 1} \leq 1 \quad \text{para } K \geq 2$$

Sea ϵ la diferencia entre la estimación $S + 1$ y el verdadero orden del grafo $|G_{\min}|$, es decir, sea $\epsilon = S + 1 - |G_{\min}|$ y sea N el número de padres sin hijos directos acumulados hasta el nivel $H_t - 1$ inclusive. Si $N \leq K - 1$, entonces:

$$\epsilon < N \cdot \frac{1}{K - 1} \leq \frac{K - 1}{K - 1} = 1$$

Esto es así puesto que tenemos N padres que aportan al sumatorio de $S + 1$ un valor menor a $1/(K - 1)$ respecto a $|G_{\min}|$.

Cuando $N \geq K$, el algoritmo de ingreso puede usar los primeros K padres para formar un hijo ganancia que debe ser descontado en ϵ . Así, para estos K padres se tiene que:

$$\epsilon < K \cdot \frac{1}{K - 1} - 1 = \frac{1}{K - 1} \leq 1$$

En consecuencia, tenemos $N' = (N - K)$ nodos sin hijos directos. Si $N' \leq K - 2$ y contamos el exceso heredado $\epsilon < 1/(K - 1)$, resulta:

$$\epsilon < \frac{1}{K - 1} + (K - 2) \cdot \frac{1}{K - 1} = 1$$

Para $N' \geq K - 1$ podemos formar un nuevo hijo ganancia. En este caso, se necesitan sólo $K - 1$ nodos libres más el último hijo ganancia para añadir el siguiente hijo ganancia. Por lo tanto, se tiene que contar el último $\epsilon < 1/(K - 1)$ más el exceso de los nuevos $(K - 1)$ padres menos el nuevo hijo ganancia:

$$\epsilon < \frac{1}{K-1} + (K-1) \cdot \frac{1}{K-1} - 1 = \frac{1}{K-1} \leq 1$$

A partir de aquí, la argumentación se repite recursivamente hasta que no se disponga de suficientes nodos para añadir un nuevo hijo ganancia. De esta forma, queda demostrado el lema.

Existe otra posible demostración que no entra en el detalle, es decir, en la aportación en $\epsilon = S + 1 - |G_{\min}|$ de los padres de cada hijo ganancia, sino que efectúa un análisis general del grafo. Si denominamos n el número total de hijos ganancia obtenemos la inecuación $N - (K + (n-1)(K-1)) \leq K-2$. El primer término de la inecuación considera el ancho de banda disponible tras el ingreso en el grafo de los n nodos ganancia. Así, al ancho de banda disponible inicial, que es N , se le resta el ancho de banda consumido por los distintos nodos ganancia.

Obsérvese que el primer hijo ganancia consume K de los N nodos sin hijos directos iniciales, mientras que los otros $n-1$ hijos ganancia sólo necesitan $K-1$ nodos puesto que pueden aprovechar como padre el anterior hijo ganancia. Recuérdese que en este caso, como $u = 1$, una unidad de ancho de banda se equipara con el consumo de un nodo padre. Por otro lado, el ancho de banda disponible final ha de ser inferior a $K-2$ porque de otro modo se podría formar un nuevo hijo ganancia y no quedarían n sino $n+1$ hijos ganancia. Despejando la inecuación anterior se obtiene la desigualdad:

$$\frac{N}{K-1} - n \leq 1$$

Por otro lado, tenemos:

$$\epsilon < \frac{N}{K-1} - n$$

La anterior desigualdad contabiliza la contribución máxima a $S+1$ de los N nodos sin hijos directos menos los n hijos ganancia que aparecen en $|G_{\min}|$ y deben ser descontados de $\epsilon = S + 1 - |G_{\min}|$. Combinando las dos últimas inecuaciones se obtiene la expresión que se quería demostrar:

$$\epsilon < \frac{N}{K-1} - n \leq 1$$

□

En el grafo de la Figura 3.4 para $\alpha = 10$ y $K = 3$ tenemos un único nodo que no tiene hijos directos –sin considerar los nodos del último nivel– que es el nodo 10 del nivel 0. Como en este caso $H_t = 3$, en el nivel 1 estamos considerando $1/3$ de exceso y en el último

nivel $H_t - 1 = 2$ se considera $1/9$ de exceso, que sumados dan la diferencia de 0,44 que existe entre $|G_{\min}| = 15$ y $N'_{\min} = 15,44$.

Por otro lado, en el grafo reseñado en el Cuadro 3.1 para $\alpha = 25$ y $K = 6$ con $H_t = 2$, existe también un solo nodo en el primer nivel que no forma hijo. Como en este caso solo existe un nivel posterior, el cálculo de $S + 1$ sólo considera un exceso de $1/6$ que es la diferencia final que aparece en el cuadro entre $N'_{\min} = 30,17$ y $|G_{\min}| = 30$.

En el Lema 7 se ha acotado el orden del grafo mediante el cálculo del número de nodos que aparecen en cada nivel. De todos modos, puede demostrarse que el orden del grafo es independiente del número de nodos por nivel e incluso del algoritmo de admisión, puesto que el ingreso de un nodo en el grafo depende únicamente del ancho de banda disponible. Según esta consideración, el orden del grafo se puede calcular de forma exacta conforme el siguiente teorema.

Teorema 6. *El orden del grafo de distribución de capacidad mínima $G_{\alpha,K,1} = (V, E)$ es:*

$$|G_{\min}| = 2 + \left\lfloor \frac{\alpha - 1}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor \quad (3.12)$$

Demostración. Cuando únicamente tenemos al nodo raíz el ancho de banda disponible es:

$$B(1) = \alpha$$

Al ingresar el primer nodo, este agrega un ancho de banda de $1/K$ unidades y consume una unidad de ancho de banda. En consecuencia, el ancho de banda disponible resulta:

$$B(2) = \alpha + \left(\frac{1}{K} - 1\right)$$

Lo mismo ocurre cada vez que ingresa un nuevo nodo. De esta forma, cuando el número de nodos agregados es i , el ancho de banda disponible en el grafo viene dado por:

$$B(i) = \alpha + (i - 1) \cdot \left(\frac{1}{K} - 1\right)$$

Así pues, con independencia del nivel en que nos encontremos, podemos añadir un nuevo nodo siempre y cuando el ancho de banda disponible sea mayor a una unidad, ya que este es el ancho de banda necesario para agregar un nodo en el grafo. Así pues, el orden del grafo $|G_{\min}|$ se puede calcular como el mínimo entero i tal que:

$$\alpha + (i - 1) \cdot \left(\frac{1}{K} - 1\right) < 1$$

Despejando, obtenemos:

$$i > 1 + \frac{(\alpha - 1)}{1 - \frac{1}{K}}$$

Finalmente, hemos de obtener el mínimo entero i que cumple la anterior desigualdad. Nótese, en primer lugar, que no es correcto dar a $|G_{\min}|$ el valor de $1 + \lceil \frac{\alpha-1}{1-\frac{1}{K}} \rceil$ dado que en este caso, si la expresión $\frac{\alpha-1}{1-\frac{1}{K}}$ fuese un entero, los dos términos serían idénticos y no se cumpliría la desigualdad. Para resolver esta particularidad, en vez de redondear por arriba, sumamos una unidad a la expresión y redondeamos por abajo. De este modo, resulta:

$$|G_{\min}| = 2 + \left\lfloor \frac{\alpha - 1}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor$$

□

Si se compara el valor exacto de $|G_{\min}|$ de la anterior Ecuación 3.12 con la cota del Lema 7, es decir, si se plantea la desigualdad y se despeja, se obtiene la expresión $\alpha/K^{H_t-1} \geq 1$ que es coherente con la definición de H_t de la Ecuación 3.9.

3.4. Número de niveles del grafo de distribución de capacidad mínima

En el Lema 6 de la Sección 3.2 se demostró que el número de niveles del grafo de distribución de capacidad mínima puede tomar dos valores: $H = H_t$ o $H = H_t + 1$ con $H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor$. En esta sección se obtienen las condiciones que hacen que el número de niveles H adopte uno de estos dos valores.

Teorema 7. *Sea $G_{\alpha,K,1} = (V, E)$ el grafo de distribución de capacidad mínima para α y K de orden $|G_{\min}|$ acotado inferiormente por:*

$$|G_{\min}| \geq N_{min,c} = 1 + \left\lfloor \sum_{i=0}^{H_t-1} \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \alpha \cdot \frac{1 - (\frac{1}{K})^{H_t}}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor$$

En este caso:

$$|G_{min}| > N_{min,c} \iff H = H_t + 1 = 2 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor \quad (3.13)$$

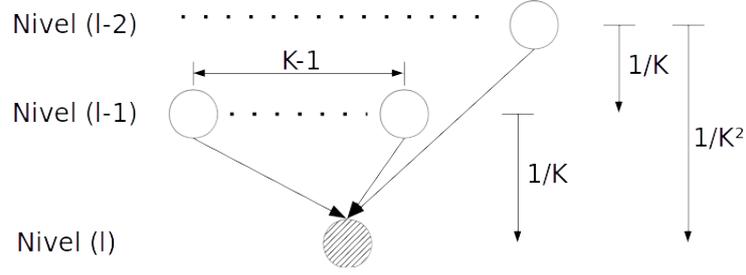


Figura 3.6: Aparición del primer hijo ganancia en un nivel l .

Demostración. En la demostración del Lema 7 se prueba que hasta el último nivel $H_t - 1$ se tiene $\epsilon < 1$. A continuación se demuestra que $\epsilon \geq 0$ si estamos en el nivel $l \leq H_t - 1$, en donde $\epsilon = S + 1 - |G_{\min}|$. Recuerdese además que el valor de S viene dado por la expresión:

$$S = \sum_{i=0}^{H_t-1} \frac{\alpha}{K^i} = \alpha \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{K}\right)^{H_t}}{1 - \frac{1}{K}}$$

Tal y como se vio en la demostración del Lema 7, en un nivel donde aún no existe un hijo ganancia se tiene que $\epsilon \geq 0$. Nótese además que $\epsilon = 0$ sólo cuando $S + 1 = |G_{\min}|$, es decir, en el caso en que no haya padres sin hijos y, por tanto, todos los nodos sean hijos directos. Cuando el primer hijo ganancia ingresa en el nivel l , sabemos por el Lema 3 que como máximo $K - 1$ padres están en el nivel $l - 1$ y al menos uno de los padres está en un nivel previo a $l - 1$.

Por tanto, $K - 1$ de los K suministradores han añadido, como mínimo, un valor de $1/K$ al sumatorio S mientras que al menos uno (el padre que está en un nivel anterior a $l - 1$) puede haber añadido como mínimo un valor de $1/K + 1/K^2$, según se representa en la Figura 3.6. Así pues, descontando la contribución del hijo ganancia tenemos:

$$\epsilon \geq K \cdot \frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} - 1 = \frac{1}{K^2} > 0$$

Para el segundo hijo ganancia, el caso de contribución mínima al sumatorio S ocurre cuando aparecen dos hijos ganancia en niveles consecutivos y, además, el segundo hijo ganancia es hijo del primero, conforme se representa en la Figura 3.7. Los padres del primer nodo ganancia están, como mínimo, dos niveles por encima y por lo tanto han contabilizado $1/K$ hijos en el nivel inferior y, como mínimo, $1/K^2$ hijos en el siguiente. El padre del primer nodo ganancia que está dos niveles por encima contribuye además al sumatorio con otro $1/K^3$. El segundo nodo ganancia sólo tiene $(K - 1)$ padres que contabilizan en S ya que el otro padre es el primer hijo ganancia. Así:

$$\epsilon \geq \left[K \cdot \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} \right) + \frac{1}{K^3} \right] + (K - 1) \cdot \frac{1}{K} - 2 = \frac{1}{K^3} > 0$$

A continuación se generaliza el mismo argumento para el caso en que se tienen l hijos ganancia y, lo mismo que antes, se considera el caso más restrictivo en que los l hijos ganancia ocupan niveles consecutivos y cada hijo ganancia tiene como suministrador el hijo ganancia anterior. Denominamos ϵ_i a la aportación de los padres de un nodo ganancia i al sumatorio $S + 1$, con $1 \leq i \leq l$. En primer lugar, para el primer nodo ganancia se tiene:

$$\epsilon_1 \geq K \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} + \dots + \frac{1}{K^l} \right) + \frac{1}{K^{l+1}}$$

En este caso se ha considerado la aportación de los K padres del primer nodo ganancia en los sucesivos niveles. El último término $1/K^{l+1}$ considera además la aportación adicional del, como mínimo, primer padre que se ha de situar al menos dos niveles por encima del primer nodo ganancia. Recuérdese que pretendemos demostrar que $\epsilon = S + 1 - |G_{\min}| \geq 0$ y que, por tanto, planteamos siempre el caso más restrictivo en que $S + 1$ es menor.

Del mismo modo, para el segundo nodo ganancia resulta:

$$\epsilon_2 \geq (K - 1) \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} + \dots + \frac{1}{K^{l-1}} \right)$$

Como ahora el segundo nodo ganancia tiene como padre el primer nodo ganancia, sólo consideramos la aportación del resto de los $K - 1$ padres. Esto mismo se repite en los nodos ganancia posteriores:

$$\epsilon_3 \geq (K - 1) \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^2} + \dots + \frac{1}{K^{l-2}} \right)$$

Y así sucesivamente hasta llegar al último nodo ganancia:

$$\epsilon_l \geq (K - 1) \frac{1}{K}$$

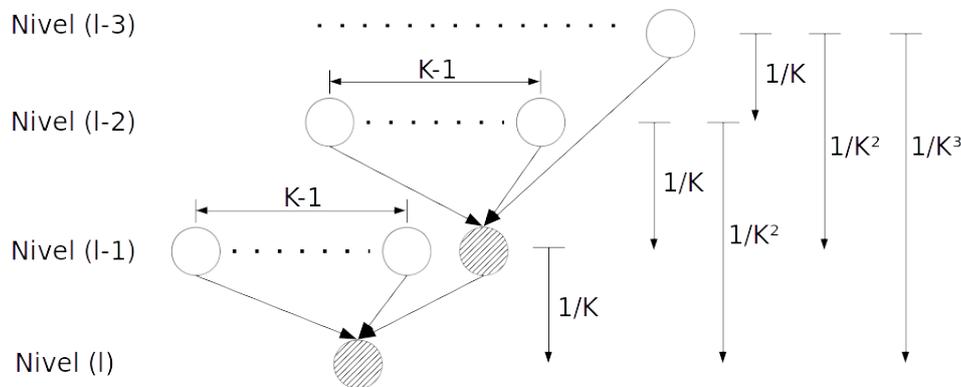


Figura 3.7: Aparición de dos hijos ganancia consecutivos en los niveles $l - 1$ y l .

De esta forma, si se suman las anteriores aportaciones para cada nodo ganancia y se descuenta la aparición de los l nodos ganancia (cantidad que ha de restarse dado que estamos obteniendo una cota de $\epsilon = S + 1 - |G_{\min}|$ y esos l nodos ganancia se reflejan en el cómputo de $|G_{\min}|$), se obtiene:

$$\epsilon = \sum_{i=1}^l \epsilon_i - l \geq K \sum_{i=1}^l \frac{1}{K^i} + \frac{1}{K^{l+1}} + (K-1) \sum_{i=1}^{l-1} \sum_{j=1}^i \frac{1}{K^j} - l$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \epsilon &\geq K \cdot \frac{1 - \frac{1}{K^l}}{K-1} + \frac{1}{K^{l+1}} + (K-1) \sum_{i=1}^{l-1} \frac{1 - \frac{1}{K^i}}{K-1} - l \\ &= K \cdot \frac{1 - \frac{1}{K^l}}{K-1} + \frac{1}{K^{l+1}} + \sum_{i=1}^{l-1} \left(1 - \frac{1}{K^i}\right) - l \\ &= K \cdot \frac{1 - \frac{1}{K^l}}{K-1} + \frac{1}{K^{l+1}} - 1 - \frac{1 - \frac{1}{K^{l-1}}}{K-1} \\ &= \frac{K - \frac{1}{K^{l-1}} - 1 + \frac{1}{K^{l-1}}}{K-1} + \frac{1}{K^{l+1}} - 1 \\ &= \frac{K-1}{K-1} + \frac{1}{K^{l+1}} - 1 = \frac{1}{K^{l+1}} \end{aligned}$$

De donde:

$$\epsilon \geq \frac{1}{K^{l+1}} > 0$$

Se ha demostrado, por tanto, que $0 \leq \epsilon < 1$ hasta el último nivel original $H_t - 1$, es decir, el último nivel en que existe por lo menos un hijo directo. Como $\epsilon = S + 1 - |G_{\min}|$, esto significa que si $H = H_t$, es decir, si el grafo se detiene en dicho nivel $H_t - 1$, entonces $S + 1 \geq |G_{\min}|$ y por tanto $N_{\min,c} = |G_{\min}|$, puesto que $N_{\min,c}$ se obtiene redondeando $S + 1$ por debajo y además se ha demostrado en el Lema 7 que hasta el último nivel $H_t - 1$ se tiene $\epsilon < 1$.

Así pues, sólo si podemos ingresar otro hijo ganancia en el nivel adicional H_t podremos tener un $\epsilon < 0$. En este caso, tendremos que descontar al exceso $0 \leq \epsilon < 1$ una unidad debido al nuevo hijo ganancia del último nivel H_t (que aparece en $|G_{\min}|$ a la vez que $S + 1$ no se modifica puesto que el sumatorio S sólo llega al nivel $H_t - 1$). De este modo, obtenemos $-1 \leq \epsilon < 0$ y entonces $N_{\min,c} < |G_{\min}|$. En este caso, y dado que se tiene un nuevo último

nivel H_t también se tiene que el número de niveles vale $H = H_t + 1 = 2 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor$, como pretendíamos demostrar.

□

Teorema 8. *Sea $G_{\alpha,K,1} = (V, E)$ el grafo de distribución de capacidad mínima para α y K de orden $|G_{\min}|$ acotado inferiormente por $N_{\min,c}$, y con un número de niveles $H = H_t + 1 = 2 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor$, entonces:*

$$|G_{\min}| = N_{\min,c} + 1 \quad (3.14)$$

Demostración. Se sabe que la diferencia entre el número real de niveles H del grafo mínimo de distribución y H_t se debe al ingreso de un hijo ganancia en el nivel H_t que no se considera cuando se calcula $N_{\min,c}$. Del Lema 3 se sabe que sólo podemos tener un hijo ganancia en este nivel. Además, de la demostración del Teorema 7 sabemos que cuando $H = H_t + 1$ tenemos que $0 \leq \epsilon < 1$ en el nivel $H_t - 1$. Por tanto, tenemos que descontar al exceso $0 \leq \epsilon < 1$ el último hijo ganancia en el nivel H_t , resultando $-1 \leq \epsilon < 0$. Dado que $\epsilon = S + 1 - |G_{\min}|$ tenemos que:

$$-1 \leq S + 1 - |G_{\min}| < 0$$

Y, por tanto:

$$|G_{\min}| - 1 \leq S + 1 < |G_{\min}|$$

Como $N_{\min,c}$ se obtiene redondeando $S+1$ por debajo, se concluye que $N_{\min,c} = \lfloor S \rfloor + 1 = |G_{\min}| - 1$ y que, por tanto, $|G_{\min}| = N_{\min,c} + 1$.

□

Como consecuencia del Teorema 7, puede calcularse el orden del grafo de distribución como:

$$|G_{\min}| = \begin{cases} 1 + \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{K^{H_t}} \\ 1 - \frac{1}{K} \end{bmatrix} & \text{si } H = H_t \\ 2 + \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{K^{H_t}} \\ 1 - \frac{1}{K} \end{bmatrix} = 1 + \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{K^{H_t}} \\ 1 - \frac{1}{K} \end{bmatrix} & \text{si } H = H_t + 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

En la Proposición 9 se demuestra que la expresión $\alpha \cdot (1 - (1/K)^{H_t}) / (1 - 1/K)$ que aparece en la anterior ecuación no es un valor entero cuando $H = H_t + 1$. De este modo, cuando se redondea por arriba en el caso en que $H = H_t + 1$ se obtiene un valor una unidad mayor que esa misma expresión cuando se redondea por abajo. De este modo, en este segundo caso en que $H = H_t + 1$ pueden considerarse las dos expresiones que aparecen en la Ecuación 3.15.

Igualmente, según argumentaciones previas, cuando $H = H_t + 1$ también puede calcularse $|G_{\min}|$ añadiendo un nivel a la progresión geométrica que define $N_{\min,c}$ y redondeando por debajo. De este modo, la Ecuación 3.15 se puede escribir también como:

$$|G_{\min}| = \begin{cases} 1 + \left[\alpha \frac{1 - \frac{1}{K^{H_t}}}{1 - \frac{1}{K}} \right] & \text{si } H = H_t \\ 1 + \left[\alpha \frac{1 - \frac{1}{K^{H_t+1}}}{1 - \frac{1}{K}} \right] & \text{si } H = H_t + 1 \end{cases} \quad (3.16)$$

En la Sección 3.5 se proporciona un criterio simple que permite determinar bajo qué condiciones $H = H_t + 1$.

Proposición 9. *La expresión $\alpha \cdot (1 - (1/K)^{H_t}) / (1 - 1/K)$ que aparece en la Ecuación 3.15 no es un valor entero cuando $H = H_t + 1$.*

Demostración. En rigor, vamos a demostrar que si la anterior expresión toma un valor entero, entonces nos hemos de encontrar necesariamente en el caso $H = H_t$. De esta forma, en el caso en que $H = H_t + 1$ dicha expresión no puede ser un entero.

En primer lugar, se ve que cuando $H_t = 1$ la expresión vale α y por tanto es un entero. En este caso nos detenemos en el nivel 0 y por lo tanto no podemos tener hijos ganancia y $H = H_t$ como queríamos demostrar. Para el caso más general $H_t \geq 2$ operamos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \frac{1 - (\frac{1}{K})^{H_t}}{1 - \frac{1}{K}} &= \alpha \cdot \frac{K^{H_t} - 1}{K^{H_t} - K^{H_t-1}} = \alpha \cdot \frac{(K - 1)(K^{H_t-1} + K^{H_t-2} + \dots + K + 1)}{K^{H_t-1}(K - 1)} = \\ &= \alpha \cdot \frac{K^{H_t-1} + K^{H_t-2} + \dots + K + 1}{K^{H_t-1}} \end{aligned}$$

El numerador y denominador de la anterior fracción son coprimos puesto que el denominador tiene un único factor múltiple K y por otro lado el numerador no es divisible por

K , puesto que la división tiene resto 1. De este modo, para que la anterior expresión sea un número entero, α ha de ser múltiplo del denominador. De este modo queda:

$$\alpha = a \cdot K^{H_t-1} \quad \text{con } a \in \mathbb{Z} \text{ y } 1 \leq a < K$$

Las cotas de a se deducen de las desigualdades que definen H_t , es decir, $\alpha/K^{H_t-1} \geq 1$ de un lado, y $\alpha/K^{H_t} < 1$ de otro. Para este valor de α es fácil comprobar que no tenemos padres sin hijos directos en ninguno de los niveles anteriores al nivel $H_t - 1$. Por otro lado, en este nivel $H_t - 1$ quedan $\alpha/K^{H_t-1} = a < K$ padres sin hijos directos, que no son suficientes para formar un nivel adicional H_t . Por eso, si suponemos que la citada expresión es un entero, el último nivel del grafo es $H_t - 1$ y nos encontraremos en el primer caso $H = H_t$ de la Ecuación 3.15. Por último, en el caso en que $H = H_t + 1$ esa misma expresión, como se ha visto y pretendíamos demostrar, no puede ser un entero. \square

3.5. Hijos ganancia del grafo de distribución de capacidad mínima

Denotamos por α_i el número de nodos sin hijos directos que hay en el nivel i . Recordemos que hemos definido un hijo ganancia como aquel que o bien tiene algún padre dos niveles, como mínimo, por encima del suyo, o bien tiene algún ancestro que es hijo ganancia. Recuértese además que según el Lema 5 puede escribirse para $l \in \mathbb{Z}$:

$$\left[\begin{array}{c} \lfloor \frac{\lfloor \frac{\alpha}{K} \rfloor}{K} \rfloor \\ \vdots \\ K \end{array} \right]_{l \text{ veces}} = \left\lfloor \frac{\alpha}{K^l} \right\rfloor$$

Teniendo esto en cuenta, α_i se puede expresar como:

$$\alpha_i = \frac{\alpha}{K^i} \bmod K$$

Se ha visto con anterioridad que cuando el número de niveles vale $H = H_t + 1$ en el último nivel sólo hay un nodo (Lema 3) y además es un hijo ganancia (Teorema 7). Por otro lado, según su definición, $0 \leq \alpha_i < K$ es el i -ésimo dígito de α en base K . De este modo, puede escribirse:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \alpha_2 \cdot K^2 + \dots + \alpha_{H_t-1} \cdot K^{H_t-1}$$

A continuación denotamos como $R(l)$ el número de nodos que no han formado hijo directo hasta el nivel l :

$$R(l) = \sum_{i=0}^l \alpha_i \quad 0 \leq l \leq H_t - 1 \quad (3.17)$$

Para formar el primer hijo ganancia necesitamos K padres libres, es decir, que aún no hayan formado hijo. No obstante, para los siguientes hijos ganancia sólo son necesarios $(K - 1)$ padres libres puesto que también adoptan como padre el anterior nodo ganancia. Por tanto, para ingresar g hijos ganancia se necesita el siguiente número de padres que no han formado hijos directos:

$$K + (K - 1)(g - 1) = Kg - (g - 1)$$

A continuación se define $g(l)$ como el número de hijos ganancia que han sido admitidos hasta el nivel $l + 1$, es decir, los hijos ganancia formados por padres presentes hasta el nivel l inclusive. De esta forma:

$$g(l) = \max\{g \in \mathbb{Z} \mid K + (g - 1) \cdot (K - 1) \leq R(l)\}$$

Si se despeja g en la anterior expresión se obtiene:

$$g \leq \frac{R(l) - 1}{K - 1}$$

Y el máximo entero que cumple la inecuación anterior es:

$$g(l) = \left\lfloor \frac{R(l) - 1}{K - 1} \right\rfloor$$

Finalmente, el número de hijos ganancia $g(l)$ admitidos hasta el nivel $l + 1$ viene dado por:

$$g(l) = \begin{cases} 0 & \text{si } R(l) = 0 \\ \left\lfloor \frac{R(l) - 1}{K - 1} \right\rfloor & \text{si } R(l) > 0 \end{cases} \quad \forall 1 \leq l \leq H_t - 1 \quad (3.18)$$

La Ecuación 3.18 está definida para $1 \leq l \leq H_t - 1$ porque solo puede haber hijos ganancia a partir del nivel 2. Recuérdese que $g(1)$ se refiere al posible hijo ganancia formado en el nivel 2 con padres de los niveles 0 y 1. De este modo, se tiene que $g(1) \leq 1$ dado que el nivel 2 es el primer nivel con un posible hijo ganancia y a lo sumo solo puede aparecer uno.

Cuando $g(1) = 1$ el primer hijo ganancia aparece en el primer nivel posible del grafo, es decir, en el nivel 2. Por otra parte, dado que en cada nivel sólo puede aparecer un hijo ganancia tenemos $g(l) = g(l-1)$ o $g(l) = g(l-1) + 1$ para $2 \leq l \leq H_t - 1$. En el primer caso no existe un hijo ganancia en el nivel $l+1$ y en el segundo caso sí aparece un hijo ganancia en el nivel $l+1$. Nótese además que por definición $g(H_t - 1)$ representa el número total de nodos ganancia del grafo. Según la Ecuación 3.18, además, esta cantidad equivale a:

$$g(H_t - 1) = \left\lfloor \frac{R(H_t - 1) - 1}{K - 1} \right\rfloor \quad (3.19)$$

Teorema 10. *El número de niveles del grafo de distribución de capacidad mínima para α y K es:*

$$H = \begin{cases} H_t + 1 & \text{si } g(H_t - 1) > g(H_t - 2) \\ H_t & \text{si } g(H_t - 1) = g(H_t - 2) \end{cases} \quad (3.20)$$

Demostración. Cuando $g(H_t - 1) > g(H_t - 2)$ la diferencia corresponde al hijo ganancia en el nivel adicional H_t y así $H = H_t + 1$. Igualmente, cuando $g(H_t - 1) = g(H_t - 2)$ no hay hijo ganancia adicional y ningún nivel adicional H_t y, por tanto, resulta $H = H_t$.

□

La Ecuación 3.20 tiene sentido si existe $g(H_t - 2)$, es decir, si α tiene, al menos, dos cifras en base K y por tanto $\alpha \geq K$. Trivialmente, cuando $\alpha = K$ resulta $H = H_t = 2$ puesto que los nodos del nivel $l = 0$ sólo pueden ingresar un único hijo directo, en el nivel $l = 1$. Por otro lado, si $\alpha < K$, entonces $H = H_t = 1$ puesto que no hay nodos suficientes en el nivel $l = 0$ para agregar ningún nodo más.

Así, por ejemplo, para el segundo grafo descrito en el Cuadro 3.1 con $\alpha = 26$ y $K = 6$ se obtiene que $H_t = 2$ y $H = H_t + 1 = 3$. En este caso, aparece un único nodo ganancia en el nivel adicional $H_t = 2$. De este modo, según las definiciones anteriores, tenemos $g(H_t - 2) = g(0) = 0$ puesto que en el nivel 1 no se ha formado un nodo ganancia y $g(H_t - 1) = g(1) = 1$ que representa al nodo hijo formado en el nivel 2 con todos los padres libres acumulados hasta el nivel 1.

A continuación se considera el número de hijos ganancia que aparecen en cada nivel, que se denota como $G(l)$. La Ecuación 3.18 proporciona el número de hijos ganancia acumulados hasta el nivel $l+1$. Así pues:

$$G(l) = \begin{cases} 0 & \text{para } l = 0, 1 \\ g(1) & \text{para } l = 2 \\ g(l-1) - g(l-2) & \text{para } 2 < l \leq H_t \end{cases}$$

En todo caso, dado que $g(0) = 0$ la anterior expresión puede simplificarse:

$$G(l) = \begin{cases} 0 & \text{para } l = 0, 1 \\ g(l-1) - g(l-2) & \text{para } 2 \leq l \leq H_t \end{cases} \quad (3.21)$$

De este modo, se puede calcular el número $n(l)$ de nodos en cada nivel como:

$$n(l) = \left\lfloor \frac{\alpha}{K^l} \right\rfloor + G(l) \quad \text{para } 1 \leq l \leq H \quad (3.22)$$

Del mismo modo, el orden del grafo de distribución de capacidad mínima puede calcularse como la suma del nodo fuente, los nodos que son hijos directos y los nodos ganancia:

$$|G_{\min}| = 1 + \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor + g(H_t - 1) = 1 + \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{R(H_t - 1) - 1}{K - 1} \right\rfloor \quad (3.23)$$

3.6. Nuevo cálculo del orden del grafo de distribución de capacidad mínima

Por construcción, una vez que todos los nodos han ingresado en el grafo, el ancho de banda disponible ha de ser insuficiente para agregar un nuevo nodo. Este ancho de banda remanente, que denotamos por B_e , puede calcularse de la siguiente forma, si se considera que el nodo fuente aporta un ancho de banda igual a α y que el resto de nodos consumen un ancho de banda de una unidad y aportan un ancho de banda de $1/K$:

$$B_e = \alpha + (|G_{\min}| - 1) \cdot \frac{1}{K} - (|G_{\min}| - 1) = \alpha - (|G_{\min}| - 1) \cdot \frac{K - 1}{K} \quad (3.24)$$

Este ancho de banda sin utilizar permite calcular el número de nodos que no tienen hijos, que denotamos por N_s :

$$N_s = \frac{B_e}{1/K} = K \cdot \alpha - (|G_{\min}| - 1) \cdot (K - 1) \quad (3.25)$$

Se define R como el número de nodos sin hijos directos hasta el nivel $l = H_t - 1$ inclusive. Como se ha visto en la Ecuación 3.17, el valor de R equivale a la suma de las cifras de α expresado en base K :

$$R \triangleq R(H_t - 1) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{H_t-1}$$

Del mismo modo, definimos g como el número total de hijos ganancia del grafo de distribución, que según la Ecuación 3.19 y la definición de R vale:

$$g \triangleq g(H_t - 1) = \left\lfloor \frac{R - 1}{K - 1} \right\rfloor$$

Cuando en el grafo de distribución de capacidad mínima hay al menos un hijo ganancia, es decir, cuando $g(H_t - 1) > 0$ el número de nodos que no tienen hijos puede calcularse de la siguiente forma. A los R nodos que sobran inicialmente se le restan los K nodos que consume el primer hijo ganancia en su ingreso. A partir de aquí, cada uno de los sucesivos $g - 1$ hijos ganancia consume en su ingreso $K - 1$ de los restantes nodos disponibles, dado que aprovecha el anterior nodo ganancia como padre. Como, además, el último hijo ganancia no forma por definición un nuevo hijo, hay que añadir una unidad a la suma final. De esta forma, resulta:

$$N_s = R - K - (g - 1)(K - 1) + 1 = R - g(K - 1) \quad (3.26)$$

Nótese, además, que la anterior ecuación también es válida en el caso trivial en que $g = 0$ y por tanto $N_s = R$. Si se igualan la Ecuación 3.25 y la Ecuación 3.26 resulta:

$$K \cdot \alpha - (|G_{\min}| - 1) \cdot (K - 1) = R - g(K - 1)$$

A continuación, se despeja en la anterior identidad $|G_{\min}|$:

$$|G_{\min}| = 1 + \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1} + g = 1 + \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1} + \left\lfloor \frac{R - 1}{K - 1} \right\rfloor \quad (3.27)$$

Nótese que la anterior ecuación expresa el orden del grafo en función de los tres tipos de nodos que hemos definido en el grafo de distribución de capacidad mínima: el nodo raíz, que es único, el número de hijos directos y el número de hijos ganancia, representado por g . De esta forma, el número de hijos directos del grafo puede calcularse como:

$$N_D = \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1} \quad (3.28)$$

Esta cantidad, por definición, ha de ser un número entero, punto que se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 11. *La expresión N_D representada en la Ecuación 3.28 es un número entero.*

Demostración. Recuérdese que $\alpha_i < K$ es el i -ésimo coeficiente de α expresado en base K y que, por definición, $H_t - 1$ es la última potencia de K que aparece en el desarrollo de α . En consecuencia:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot K + \alpha_2 \cdot K^2 + \cdots + \alpha_i \cdot K^i + \cdots + \alpha_{H_t-1} \cdot K^{H_t-1}$$

Además, como R se ha definido como la suma de las cifras de α expresado en base K resulta:

$$R = R(H_t - 1) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{H_t-1}$$

De esta forma, el numerador de N_D puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot K - R &= \alpha_0 \cdot K + \alpha_1 \cdot K^2 + \dots + \alpha_{H_t-1} \cdot K^{H_t} - (\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{H_t-1}) \\ &= (K - 1) \cdot \alpha_0 + (K^2 - 1)\alpha_1 + \dots + (K^{H_t} - 1) \cdot \alpha_{H_t-1} \end{aligned}$$

Como cualquier polinomio $K^n - 1$ es divisible entre $K - 1$ cuando $n \geq 1$, el numerador $\alpha \cdot K - R$ es múltiplo de $(K - 1)$ y, por tanto, la expresión N_D es un número entero, como queríamos demostrar.

□

Teorema 12. Sea $H_t = 1 + \lfloor \log_K(\alpha) \rfloor$ y sea $R \triangleq R(H_t - 1)$, el valor de la serie geométrica redondeada $\sum_{i=0}^{\infty} \lfloor \frac{\alpha}{K^i} \rfloor$ viene dado por:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1} = 1 + \left\lfloor \frac{\alpha - 1}{1 - 1/K} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{R - 1}{K - 1} \right\rfloor \quad (3.29)$$

Demostración. Recuérdense que por definición $\alpha/K^{H_t} < 1$. De esta forma, los dos primeros sumatorios son idénticos dado que los términos expresados se anulan a partir de $i = H_t$. Por otro lado tenemos tres expresiones de $|G_{\min}|$. La Ecuación 3.12 del Teorema 6, la Ecuación 3.23 y la Ecuación 3.27. A continuación igualamos dichas expresiones:

$$|G_{\min}| = 2 + \left\lfloor \frac{\alpha - 1}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor = 1 + \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{R - 1}{K - 1} \right\rfloor = 1 + \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1} + \left\lfloor \frac{R - 1}{K - 1} \right\rfloor$$

Si igualamos las dos últimas expresiones y despejamos los términos repetidos, resulta la primera igualdad de la proposición:

$$\sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1}$$

Finalmente, si se igualan el segundo y el tercer término y se despeja el sumatorio, queda la segunda igualdad de la proposición:

$$\sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\alpha - 1}{1 - 1/K} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{R - 1}{K - 1} \right\rfloor$$

□

El anterior teorema calcula la suma de la serie geométrica redondeada cuando el último índice es mayor o igual a $H_t - 1$. El siguiente teorema proporciona su valor cuando el índice es menor a $H_t - 1$.

Teorema 13. *Sea $l < H_t - 1$ con $H_t = 1 + \lfloor \log_K(\alpha) \rfloor$ y sea $R(l - 1) = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l-1}$ la suma de las primeras l cifras de α expresado en base K . El valor de la serie geométrica redondeada $\sum_{i=0}^l \lfloor \frac{\alpha}{K^i} \rfloor$ viene dado por:*

$$\sum_{i=0}^l \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = \left\lfloor \alpha \frac{1 - \frac{1}{K^{l+1}}}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{R(l - 1) - 1}{K - 1} \right\rfloor \quad (3.30)$$

Demostración. De un lado calculamos el número de nodos acumulados $N(l)$ hasta el nivel l como la suma del nodo fuente, más los α nodos del nivel 0, más los nodos directos del nivel 1 al nivel l , más los nodos ganancia acumulados hasta el nivel l que por definición valen $g(l - 1)$. De este modo, resulta:

$$N(l) = 1 + \alpha + \sum_{i=1}^l \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor + g(l - 1) = 1 + \sum_{i=0}^l \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{R(l - 1) - 1}{K - 1} \right\rfloor$$

Por otro lado, se puede calcular $N(l)$ a partir de los mismos argumentos empleados en las demostraciones del Teorema 7 y el Teorema 8 que dan pie a la Ecuación 3.15. En este caso, en vez de llegar al nivel $H_t - 1$ nos detenemos en el nivel l . Como se ha visto que hasta ese punto se aproxima por exceso, para calcular $N(l)$ se ha de redondear la serie geométrica por debajo, por lo que se ha de emplear la primera de las expresiones de la Ecuación 3.15. Nótese que en ese caso el último nivel es $H_t - 1$ y en la ecuación aparece H_t . Como ahora el último nivel es l en la ecuación hemos de escribir $l + 1$. De esta forma, resulta:

$$N(l) = 1 + \left\lfloor \alpha \frac{1 - \frac{1}{K^{l+1}}}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor$$

A continuación identificamos los dos valores calculados de $N(l)$ y despejamos de ambas expresiones el sumatorio, que ha de valer por tanto:

$$\sum_{i=0}^l \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = \left\lfloor \alpha \frac{1 - \frac{1}{K^{l+1}}}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{R(l-1) - 1}{K-1} \right\rfloor$$

□

Para ilustrar los anteriores resultados vamos a estudiar dos grafos de distribución de capacidad mínima. Considérese en primer lugar el grafo definido para $\alpha = 298$ y $K = 5$. Calculamos H_t como:

$$H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor = 1 + \lfloor \log_5 298 \rfloor = 4$$

Los coeficientes de $\alpha = 298$ en base $K = 5$ son $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 2$, de forma que:

$$\alpha = 298 = 3 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3$$

Calculamos $g(l)$ para $1 \leq l \leq H_t - 1 = 3$ con el objeto de determinar los niveles que contienen hijos ganancia:

$$\begin{aligned} g(1) &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 - 1}{K - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 + 4 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 1 \\ g(2) &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1}{K - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 + 4 + 1 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 1 \\ g(3) &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1}{K - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 + 4 + 1 + 2 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 2 \end{aligned}$$

De este modo, de acuerdo con la Ecuación 3.21 existen hijos ganancia en los niveles $l = 2$ y $l = 4$. Recuérdese que $g(l)$ determina el número de hijos ganancia que han aparecido hasta el nivel $l + 1$. Como $g(H_t - 2) = g(2) < g(H_t - 1) = g(3)$, en el último nivel $H_t - 1 = 3$ dispone de capacidad suficiente para formar un nuevo nodo ganancia que conforma un último nivel 4. De esta forma, el número de niveles del grafo de distribución es:

$$H = H_t + 1 = 5$$

Por otro lado, el número de nodos en cada nivel se calcula, conforme se expresa en la Ecuación 3.22, como el número de hijos directos más el número de hijos ganancia:

$$\begin{aligned}
n(0) &= \alpha = 298 \\
n(1) &= \left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{298}{5} \right\rfloor = 59 \\
n(2) &= \left\lfloor \frac{\alpha}{K^2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{298}{25} \right\rfloor + 1 = 12 \\
n(3) &= \left\lfloor \frac{\alpha}{K^3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{298}{125} \right\rfloor = 2 \\
n(4) &= 1
\end{aligned}$$

Para obtener el orden del grafo de distribución, $|G_{\min}|$, se suman las cantidades anteriores más una unidad correspondiente al nodo fuente, lo que da un total de 373 nodos repartidos en 5 niveles. Recuérdese que, por simplicidad, se considera que el nodo fuente está fuera del cómputo de los niveles. Este resultado es coherente con la expresión exacta del orden del grafo expresado en la Ecuación 3.12:

$$|G_{\min}| = 2 + \left\lfloor K \cdot \frac{\alpha - 1}{K - 1} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor 5 \cdot \frac{298 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 373$$

También se obtiene el mismo resultado aplicando la Ecuación 3.15 para el caso en que $H = H_t + 1$ con $H_t = 4$:

$$|G_{\min}| = 1 + \left\lfloor \alpha \frac{1 - \frac{1}{K^{H_t}}}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor 298 \cdot \frac{1 - \frac{1}{5^4}}{1 - \frac{1}{5}} \right\rfloor = 373$$

Del mismo modo, si aplicamos la Ecuación 3.16 considerando que $H = H_t + 1$ y $H_t = 4$ obtenemos otra vez el mismo valor:

$$|G_{\min}| = 1 + \left\lfloor \alpha \frac{1 - \frac{1}{K^{H_t+1}}}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor 298 \cdot \frac{1 - \frac{1}{5^5}}{1 - \frac{1}{5}} \right\rfloor = 373$$

Conforme el Teorema 3.29 puede calcularse además el número de hijos directos mediante una serie geométrica redondeada, para la cual el teorema ofrece asimismo la siguiente identidad:

$$\sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1}$$

Según se observa del anterior cálculo de los distintos valores de $n(l)$, el número de hijos directos del grafo es 370, que pueden calcularse también como los $|G_{\min}| = 373$ nodos del grafo menos el nodo fuente y los dos hijos ganancia. Comprobamos a continuación que dicho resultado es coherente con la expresión del Teorema 3.29:

$$370 = \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1} = \frac{5 \cdot 298 - (3 + 4 + 1 + 2)}{5 - 1} = 370$$

Si se aplica a continuación la segunda identidad propuesta por el Teorema 3.29 se vuelve a obtener la misma cantidad:

$$\begin{aligned} 370 &= \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\alpha - 1}{1 - 1/K} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{R - 1}{K - 1} \right\rfloor = \\ &1 + \left\lfloor \frac{298 - 1}{1 - 1/5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(3 + 4 + 1 + 2) - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 1 + 371 - 2 = 370 \end{aligned}$$

Veamos por último un caso en que el número de niveles es $H = H_t$. Considérese el grafo de distribución de capacidad mínima para $\alpha = 194$ y $K = 5$. Calculamos H_t como:

$$H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor = 1 + \lfloor \log_5 194 \rfloor = 4$$

Los coeficientes de $\alpha = 194$ en base $K = 5$ son $\alpha_0 = 4$, $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_3 = 1$. Así pues:

$$\alpha = 194 = 4 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3$$

Calculamos $g(l)$ para $1 \leq l \leq H_t - 1 = 3$ con el objeto de determinar los niveles en los que aparecen hijos ganancia:

$$\begin{aligned} g(1) &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 - 1}{K - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4 + 3 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 1 \\ g(2) &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 - 1}{K - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4 + 3 + 2 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 2 \\ g(3) &= \left\lfloor \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 1}{K - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4 + 3 + 2 + 1 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 2 \end{aligned}$$

De los anteriores valores se deduce que hay hijos ganancia en los niveles $l = 2$ y $l = 3$. Como $g(H_t - 2) = g(2) = g(H_t - 1) = g(3)$, el último nivel $H_t - 1 = 3$ que contiene nodos

directos no dispone de capacidad suficiente para formar un nuevo nivel. En consecuencia, $H_t - 1 = 3$ es el último nivel del grafo de distribución y el número total de niveles vale:

$$H = H_t = 4$$

El número de nodos en cada nivel puede volver a calcularse como el número de hijos directos más el número de hijos ganancia:

$$\begin{aligned} n(0) &= \alpha = 194 \\ n(1) &= \left\lfloor \frac{\alpha}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{194}{5} \right\rfloor = 38 \\ n(2) &= \left\lfloor \frac{\alpha}{K^2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{194}{25} \right\rfloor + 1 = 8 \\ n(3) &= \left\lfloor \frac{\alpha}{K^3} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{194}{125} \right\rfloor = 2 \end{aligned}$$

Del mismo modo que antes, para obtener el orden del grafo de distribución, $|G_{\min}|$, se suman las cantidades anteriores más una unidad correspondiente al nodo fuente, lo que da un total de 243 nodos repartidos en 4 niveles, puesto que ahora el grafo se completa en el nivel $H_t - 1$. Este resultado vuelve a ser coherente con la expresión obtenida en la Ecuación 3.12:

$$|G_{\min}| = 2 + \left\lfloor K \cdot \frac{\alpha - 1}{K - 1} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor 5 \cdot \frac{194 - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 243$$

Como en este caso $H = H_t = 4$, tanto la Ecuación 3.15 como la Ecuación 3.16 emplean la misma expresión para obtener el orden del grafo de distribución, que de nuevo ofrece el mismo resultado:

$$|G_{\min}| = 1 + \left\lfloor \alpha \frac{1 - \frac{1}{K^{H_t}}}{1 - \frac{1}{K}} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor 194 \cdot \frac{1 - \frac{1}{5^4}}{1 - \frac{1}{5}} \right\rfloor = 243$$

En este caso, el número de hijos directos del grafo es 240, que lo mismo que en el anterior ejemplo pueden calcularse como los $|G_{\min}| = 243$ nodos del grafo menos el nodo fuente y los dos hijos ganancia. Este resultado vuelve a ser coherente con la expresión del Teorema 3.29:

$$240 = \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = \frac{K \cdot \alpha - R}{K - 1} = \frac{5 \cdot 194 - (4 + 3 + 2 + 1)}{5 - 1} = 240$$

Por último, si se aplica la segunda identidad propuesta por el Teorema 3.29 a los parámetros del grafo, la cantidad obtenida vuelve a ser la misma:

$$\begin{aligned} 240 &= \sum_{i=0}^{H_t-1} \left\lfloor \frac{\alpha}{K^i} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{\alpha - 1}{1 - 1/K} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{R - 1}{K - 1} \right\rfloor = \\ &1 + \left\lfloor \frac{194 - 1}{1 - 1/5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{(4 + 3 + 2 + 1) - 1}{5 - 1} \right\rfloor = 1 + 241 - 2 = 240 \end{aligned}$$

Capítulo 4

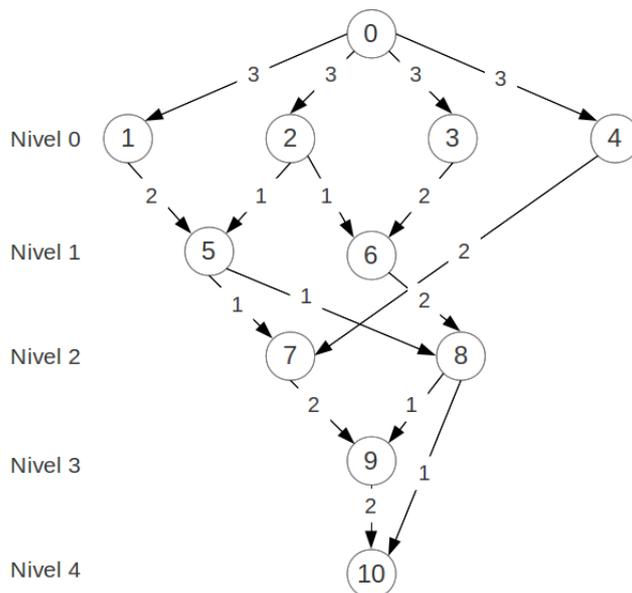
Análisis del grafo de distribución general

En este capítulo se estudia el caso general de los grafos de distribución para α , u y K , $G_{\alpha,K,u} = (V, E)$ con $1 \leq u < K$ y se obtiene su orden y una cota de la longitud H que, como se ha dicho, es equivalente al número de niveles. Esta cota sirve asimismo para acotar el retardo total de distribución Δ_o , conforme la expresión del retardo $\Delta_o \leq K \cdot H$ demostrada en el Lema 1 de la Sección 2.3. El ancho de banda de entrada de cada nodo, según se vio en el mismo Capítulo 2, vale por definición una unidad, mientras que el de salida es igual a u/K unidades. En términos de teoría de grafos, esto significa que, con la excepción del nodo fuente, el grado de entrada de los nodos del grafo es K y el grado de salida vale u , donde K y u son coprimos.

4.1. Construcción del grafo de distribución

Para el análisis de la topología de los grafos de distribución en el caso general en que $1 \leq u < K$, se considera el Algoritmo 2.1 de ingreso definido en la Sección 2.2. Tómese, por ejemplo, el grafo de distribución para $\alpha = 4$, $u = 2$ y $K = 3$, $G_{4,3,2}$ mostrado en la Figura 4.1. Según el Algoritmo 2.1 de ingreso, en primer lugar se añaden al grafo los nodos $\{1, 2, 3, 4\}$ como hijos del nodo fuente –señalado como nodo 0– del que cada uno toma $K = 3$ aristas. Estos nodos forman el nivel $l = 0$. Cada uno de los nodos que ingresan posee un ancho de banda de $u/K = 2/3$ unidades, es decir, dos aristas unitarias de salida, por lo que se necesita la cooperación de dos nodos para agregar un nuevo nodo. Denotamos por BW_l el ancho de banda disponible hasta el nivel l que se emplea para formar nodos en el siguiente nivel $l + 1$. El ancho de banda que aportan los nodos del nivel $l = 0$ es:

$$BW_0 = 4 \cdot \frac{u}{K} = 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

Figura 4.1: Grafo de distribución para $\alpha = 4$, $K = 3$ and $u = 2$.

Nivel	$n(i)$	$u \cdot n(i)$	Φ_{i-1}	$e(i) = u \cdot n(i) + \Phi_{i-1}$	$BW_i = e(i)/K$
$l = 0$	4	8	0	8	$8/3 = 2 + 2/3$
$l = 1$	2	4	2	6	2
$l = 2$	2	4	0	4	$4/3 = 1 + 1/3$
$l = 3$	1	2	1	3	1
$l = 4$	1	2	0	2	$2/3$

Cuadro 4.1: Valores del grafo de distribución $G_{4,3,2}$.

Este ancho de banda se emplea para añadir dos nuevos nodos $\{5, 6\}$ en el siguiente nivel $l = 1$, que consumen un ancho de banda de dos unidades. Por tanto, quedan libres $2/3$ unidades de ancho de banda del nivel 0, que son insuficientes para agregar un nuevo nodo en el nivel $l = 1$. Recuerdese que el ancho de banda normalizado de entrada de un nodo ha de valer uno.

Así, tenemos dos nodos en el nivel $l = 1$ y un ancho de banda que aún no hemos utilizado de $2/3$, con lo que la capacidad disponible del grafo resulta:

$$BW_1 = 2 \cdot \frac{u}{K} + \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

Con esta capacidad se añaden los nodos $\{7, 8\}$ en el nivel $l = 2$ del grafo. Como el ancho disponible anteriormente se ha consumido en el ingreso de ambos nodos, la capacidad resultante ahora vale:

$$BW_2 = 2 \cdot \frac{u}{K} = 2 \cdot \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

Una unidad de este ancho de banda se consume para añadir el nodo 9 del nivel $l = 3$. Finalmente, la capacidad de $2/3$ del nodo 9 más la capacidad de $1/3$ que queda libre del nivel anterior suman un ancho de banda disponible igual a una unidad:

$$BW_3 = 1 \cdot \frac{u}{K} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Este ancho de banda permite agregar el nodo 10 en el nivel $l = 4$. Como el ancho de banda anterior se ha consumido completamente, de un lado, y este último nodo ofrece por otro un ancho de banda de $2/3$, resulta:

$$BW_4 = 1 \cdot \frac{u}{K} = \frac{2}{3}$$

De este modo, como para ingresar en el grafo un nodo requiere un ancho de banda igual a una unidad, el algoritmo no puede añadir nuevos nodos y la formación del grafo de distribución queda completado.

Denotamos por $n(i)$ el número de nodos que se forman en el nivel $l = i$ y por $e(i)$ el número de aristas disponibles en el nivel $l = i$ para el ingreso de nuevos nodos. Estas aristas son las que aportan los $n(i)$ nodos del nivel $l = i$, es decir, $n(i) \cdot u$, más las aristas que no hemos utilizado del nivel $l = i - 1$ para formar nodos en el nivel $l = i$. A este número de aristas libres lo denotamos por Φ_{i-1} . En el Cuadro 4.1 se muestran los valores de estos parámetros para el grafo de distribución $G_{4,3,2}$.

4.2. Orden del grafo de distribución

El orden del grafo de distribución indica el máximo número de nodos que pueden ingresar dentro del grafo de distribución con la condición de recibir K aristas de entrada, esto es, un ancho de banda igual a la unidad. Recuérdese que, por definición, las aristas del grafo representan conexiones de ancho de banda igual a $1/K$. Calculamos el orden G del grafo de distribución a partir de la expresión del ancho de banda disponible cada vez que un nuevo nodo ingresa en la red.

Teorema 14. *El orden G del grafo de distribución es:*

$$G = 2 + \left\lfloor \frac{K(\alpha - 1)}{K - u} \right\rfloor \quad (4.1)$$

Demostración. El ancho de banda disponible cuando el grafo está formado por i nodos, incluida la fuente, vale:

$$BW(i) = \alpha - (i - 1)\left(1 - \frac{u}{K}\right)$$

Por un lado, tenemos el ancho de banda de α objetos/u.t. que proporciona el nodo fuente. Por otro lado, los $i - 1$ nodos ingresados consumen cada uno, por definición, un ancho de banda normalizado igual a una unidad mientras ofrecen un ancho de banda normalizado de u/K unidades, correspondientes a las u aristas de salida de ancho de banda $1/K$. Si el ancho de banda disponible es mayor a la unidad, podrá añadirse un nuevo nodo al grafo de distribución. En consecuencia, el orden del grafo resultante es el mínimo entero tal que el ancho de banda disponible es menor a la unidad:

$$G = \text{mín } i \in \mathbb{Z} \mid \alpha - (i - 1)\left(1 - \frac{u}{K}\right) < 1$$

Si se tiene en cuenta que $u/K < 1$ y que por tanto $1 - u/K > 0$ y se despeja i de la desigualdad anterior, resulta:

$$\begin{aligned} \alpha - (i - 1)\left(1 - \frac{u}{K}\right) < 1 &\Rightarrow (i - 1)\left(1 - \frac{u}{K}\right) > \alpha - 1 \Rightarrow \\ i - 1 > \frac{\alpha - 1}{1 - \frac{u}{K}} &\Rightarrow i > 1 + \frac{\alpha - 1}{1 - \frac{u}{K}} \end{aligned}$$

A continuación, debe buscarse el mínimo entero i que cumpla la anterior desigualdad. Dicho valor, como se ha dicho, se corresponde con el orden G del grafo de distribución.

De forma análoga a lo que sucedía en la demostración del Teorema 6 de la Sección 3.3, no es correcto asignar a G el valor de $1 + \left\lceil \frac{\alpha - 1}{1 - \frac{u}{K}} \right\rceil$ dado que en este caso, si la expresión $\frac{\alpha - 1}{1 - \frac{u}{K}}$ fuese un entero, la desigualdad planteada se convertiría en igualdad y el resultado no sería correcto. Para resolver esta singularidad, en vez de redondear por arriba, sumamos una unidad a la expresión y redondeamos por abajo. De este modo, resulta:

$$G = 2 + \left\lfloor \frac{\alpha - 1}{1 - \frac{u}{K}} \right\rfloor = 2 + \left\lfloor \frac{K(\alpha - 1)}{K - u} \right\rfloor$$

□

Obsérvese además que la Ecuación 4.1 particularizada a $u = 1$ nos da la Ecuación 3.12 del Teorema 6 obtenida en la Sección 3.3 cuando analizamos el grafo de distribución de capacidad mínima.

Como era de esperar, el número de nodos se incrementa con α y u/K , i.e. con el ancho de banda disponible en la red. Para $K = 2$ y $u = 1$, es decir, para el caso en que todos los

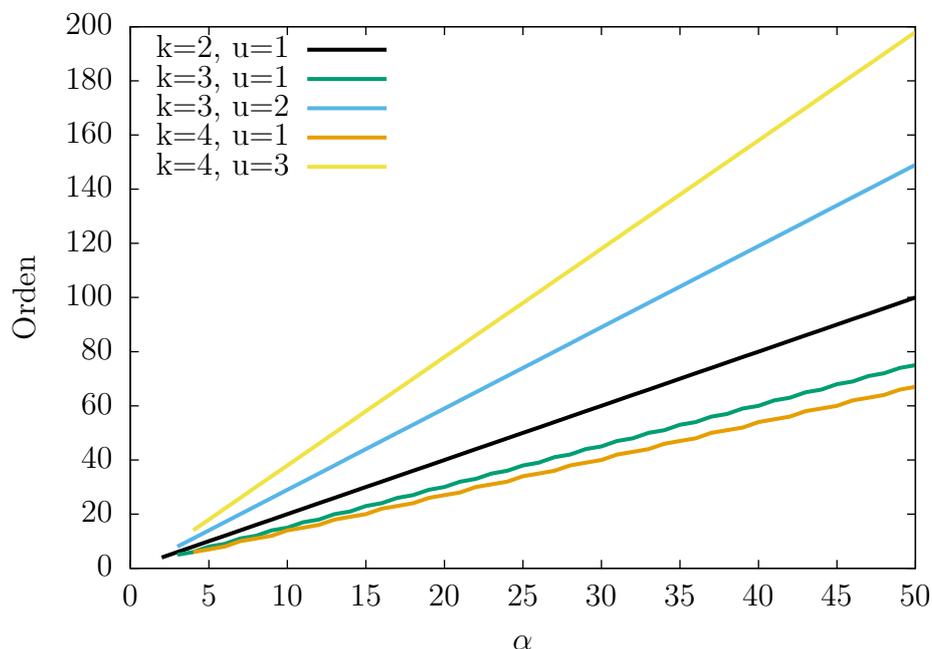


Figura 4.2: Orden como función de α para diferentes valores de K y u .

nodos excepto el nodo fuente tienen un ancho de banda igual a la mitad del ancho de banda del flujo de objetos, el orden del grafo es $G = 2\alpha$. Por lo tanto, el esquema *peer-to-peer* que establece el grafo de distribución permite doblar la capacidad de servicio respecto a un modelo cliente-servidor. Para $K = 3$ y $u = 2$ se pueden ingresar $3\alpha - 1$ nodos, es decir, prácticamente se triplica el número de nodos. Para $K = 3$ y $u = 1$ el valor exacto del orden depende del valor de α pero, en general, se pueden ingresar aproximadamente $3/2 \cdot \alpha$ nodos, un incremento aproximado del 50 %.

La Figura 4.2 muestra el crecimiento lineal del orden en función de α para algunos valores particulares de K y u . Como se ha mencionado, en las gráficas el orden aumenta conforme aumentan α y u/K , es decir, el ancho de banda disponible. En cualquier caso, se puede concluir que con la topología propuesta se puede enviar el flujo de objetos a un mayor número de nodos que con el modelo cliente-servidor y ello con un consumo de ancho de banda de cada nodo menor a la tasa del flujo de información.

4.3. Cotas de la longitud del grafo de distribución

Como se vio en la Sección 2.2, la longitud H de un grafo dirigido es la longitud máxima del camino entre cada par de nodos conectados, es decir, el número máximo de aristas que se deben atravesar para ir de un nodo a otro. En los grafos de distribución este número viene dado por el más camino largo entre el nodo fuente y los nodos del último nivel

$H - 1$. En la Proposición 2.2 de dicha sección se demostró que la longitud del grafo de distribución es equivalente al número de niveles H del grafo. Conforme esta definición, el grafo de distribución $G_{4,3,2}$ de la Figura 4.1 tiene una longitud igual al número de niveles $H = 5$ que viene dado, entre otros, por los caminos $\{0, 1, 5, 7, 9, 10\}$ y $\{0, 2, 6, 8, 9, 10\}$.

En el Lema 1 de la Sección 2.3 se ha demostrado que el retardo está acotado por el producto de K por la longitud o número de niveles H del grafo de distribución según la expresión $\Delta_o \leq K \cdot H$. En este apartado, y dado que como se ha explicado K no puede tener un valor arbitrariamente elevado, se determina una cota del número de niveles H del grafo de distribución. Como se ha dicho con anterioridad, vamos a demostrar que se trata de una cota muy ajustada, lo que garantiza un retardo de distribución reducido.

De acuerdo con el Algoritmo 2.1 de ingreso definido en la Sección 2.2, cuando se forma el nivel l podemos encontrar aristas libres en los niveles $l - 2$ y $l - 1$ pero no en niveles anteriores. Con el objeto de ampliar nuestro estudio a un caso general, vamos a relajar esta restricción, tal y como se hizo en el análisis del grafo de distribución de capacidad mínima en la Sección 3.1.

Cuando el Algoritmo 2.1 ingresa los nodos del nivel l toma como suministradores, en primer lugar, las aristas libres del nivel $l - 2$ –si las hubiere– y solo cuando se agota el nivel $l - 2$ toma como suministradores nodos del nivel $l - 1$. En la Sección 2.2, sin embargo, se presentó otro algoritmo que solo emplea las aristas libres de niveles superiores cuando los nodos del nivel $l - 1$ no pueden agregar nodos en el nivel l sin recurrir a nodos de niveles previos a $l - 1$. Nótese que por simplicidad decimos que una arista es de nivel l si su nodo de salida pertenece al nivel l .

Como se explica en la Sección 2.2, en los grafos obtenidos con ambos algoritmos se obtienen los mismos niveles y en cada nivel el número de nodos también es el mismo en cada grafo. Más en general, vamos a suponer un algoritmo de ingreso que no forme un nivel l hasta haber agotado el ancho de banda disponible de los nodos situados en niveles anteriores al nivel $l - 1$, es decir, que no empiece a formar el nivel l hasta que se vea obligado a emplear como suministradores nodos del nivel $l - 1$, todo ello con independencia del orden en que se escogen los nodos suministradores dentro de dicha restricción. Obsérvese que los dos algoritmos anteriores son casos particulares de este caso general.

Definimos a continuación $n(i)$ como el número de nodos que hay en el nivel i del grafo de distribución. Por otro lado, $e(i)$ denota el número de aristas acumuladas en el nivel i , es decir, las $n(i) \cdot u$ aristas de nodos que pertenecen al nivel i más las aristas de niveles anteriores que aún no se han empleado en el ingreso de nuevos nodos. Denotamos por Φ_{i-1} el cardinal de este conjunto de aristas no utilizadas en niveles superiores al nivel i . Por construcción del grafo de distribución tenemos $n(0) = \alpha$. Para $i \geq 1$:

$$n(i) = \left\lfloor \frac{e(i-1)}{K} \right\rfloor$$

Es decir, tomamos las aristas libres en niveles superiores al nivel i y las agrupamos de K en K para ingresar cada nuevo nodo del nivel i . De este modo, $n(i)$ se calcula como la parte entera de la división de $e(i-1)$ entre K . Dado que las aristas libres de nivel i son las aristas que no pueden ser combinadas en un grupo de K para ingresar un nuevo nodo en el nivel $i+1$, para $i \geq 0$ se tiene:

$$\Phi_i = e(i) \bmod K$$

Como Φ_i es el resto de dividir $e(i)$ entre K también puede escribirse, según la fórmula del cociente, como el dividendo menos el producto del cociente por el divisor. Así pues:

$$\Phi_i = e(i) \bmod K = e(i) - \left\lfloor \frac{e(i)}{K} \right\rfloor K$$

De este modo:

$$e(i) - \Phi_i = \left\lfloor \frac{e(i)}{K} \right\rfloor K = n(i+1)K$$

Es decir, las $n(i+1)K$ aristas usadas para ingresar los $n(i+1)$ nodos de nivel $i+1$ son iguales a las $e(i)$ aristas disponibles en el nivel i menos las Φ_i aristas que quedan libres. De la última expresión se tiene que para $i \geq 0$:

$$\left\lfloor \frac{e(i)}{K} \right\rfloor = \frac{e(i)}{K} - \frac{\Phi_i}{K} \quad (4.2)$$

Por otro lado, por construcción el número de aristas del primer nivel es $e(0) = \alpha u$. Para los siguientes niveles $i \geq 1$, como queda dicho, se tiene:

$$e(i) = n(i)u + \Phi_{i-1} = \left\lfloor \frac{e(i-1)}{K} \right\rfloor u + \Phi_{i-1}$$

De este modo, para $i \geq 1$:

$$n(i) = \left\lfloor \frac{e(i-1)}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n(i-1)u + \Phi_{i-2}}{K} \right\rfloor \quad (4.3)$$

Cada vez que un nodo ingresa en el grafo consume K aristas de entrada y ofrece u aristas de salida, de forma que la conexión de un nodo se traduce en la pérdida efectiva de $K-u$ aristas. El número de aristas disponibles en el nivel i puede calcularse en consecuencia como las aristas disponibles en el nivel $i-1$ menos las $n(i)(K-u)$ aristas que se pierden con el ingreso de los $n(i)$ nodos del nivel i :

$$e(i) = e(i-1) - n(i)(K-u) = e(i-1) - \left\lfloor \frac{e(i-1)}{K} \right\rfloor (K-u) \quad (4.4)$$

A continuación se ofrecen una serie de resultados teóricos que más adelante se emplean en el cálculo de las cotas de la longitud H del grafo de distribución de los teoremas 19, 20 y 21.

Proposición 15. *El número de nodos $n(i-1)$ en un nivel $l = i-1$ siempre es mayor o igual que el número de nodos $n(i)$ en el siguiente nivel $l = i$.*

Demostración. De la Ecuación 4.3 tenemos:

$$n(i) = \left\lfloor \frac{e(i-1)}{K} \right\rfloor$$

Del mismo modo:

$$n(i+1) = \left\lfloor \frac{e(i)}{K} \right\rfloor$$

Por otro lado, la Ecuación 4.4 establece la siguiente desigualdad con $K > u$:

$$e(i) = e(i-1) - \left\lfloor \frac{e(i-1)}{K} \right\rfloor (K-u) \leq e(i-1)$$

De donde:

$$n(i) = \left\lfloor \frac{e(i)}{K} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{e(i-1)}{K} \right\rfloor = n(i-1)$$

□

Proposición 16. *El número de aristas en el nivel $i \geq 1$ puede calcularse como:*

$$e(i) = e(0) \left(\frac{u}{K} \right)^i + \left(1 - \frac{u}{K} \right) \sum_{j=0}^{i-1} \Phi_j \left(\frac{u}{K} \right)^{(i-1)-j}$$

Demostración. Aplicamos inducción. En primer lugar, tenemos:

$$e(1) = \left\lfloor \frac{e(0)}{K} \right\rfloor u + \Phi_0$$

Si sustituimos en la anterior expresión el término $[e(0)/K]$ por su valor según la Ecuación 4.2, resulta:

$$e(1) = \left(\frac{e(0)}{K} - \frac{\Phi_0}{K}\right)u + \Phi_0 = e(0)\frac{u}{K} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\Phi_0$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} e(2) &= \left(\frac{e(1)}{K} - \frac{\Phi_1}{K}\right)u + \Phi_1 \\ &= e(1)\frac{u}{K} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\Phi_1 \\ &= \left(e(0)\frac{u}{K} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\Phi_0\right)\frac{u}{K} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\Phi_1 \\ &= e(0)\left(\frac{u}{K}\right)^2 + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\left(\frac{u}{K}\Phi_0 + \Phi_1\right) \end{aligned}$$

A continuación efectuamos el paso de inducción. Es decir, demostramos que si la expresión es válida para $i - 1$ entonces es válida para i :

$$\begin{aligned} e(i) &= \left(\frac{e(i-1)}{K} - \frac{\Phi_{i-1}}{K}\right)u + \Phi_{i-1} \\ &= e(i-1)\frac{u}{K} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\Phi_{i-1} \end{aligned}$$

Ahora aplicamos la hipótesis de inducción para $e(i - 1)$:

$$\begin{aligned} e(i) &= e(i-1)\frac{u}{K} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\Phi_{i-1} \\ &= \left[e(0)\left(\frac{u}{K}\right)^{i-1} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\sum_{j=0}^{i-2}\Phi_j\left(\frac{u}{K}\right)^{(i-2)-j}\right]\frac{u}{K} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\Phi_{i-1} \\ &= e(0)\left(\frac{u}{K}\right)^i + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\sum_{j=0}^{i-2}\Phi_j\left(\frac{u}{K}\right)^{(i-1)-j} + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\Phi_{i-1} \\ &= e(0)\left(\frac{u}{K}\right)^i + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\left(\Phi_{i-1} + \sum_{j=0}^{i-2}\Phi_j\left(\frac{u}{K}\right)^{(i-1)-j}\right) \\ &= e(0)\left(\frac{u}{K}\right)^i + \left(1 - \frac{u}{K}\right)\sum_{j=0}^{i-1}\Phi_j\left(\frac{u}{K}\right)^{(i-1)-j} \end{aligned}$$

Que es la expresión que pretendíamos demostrar.

□

Proposición 17. *En el nivel $i \geq 0$ se cumple:*

$$n(i) < \alpha \cdot \left(\frac{u}{K}\right)^i + 1$$

Demostración. Por simplicidad, demostramos la expresión para el caso $i + 1$. En primer término, tenemos:

$$n(i + 1) = \left\lfloor \frac{e(i)}{K} \right\rfloor = \frac{e(i)}{K} - \frac{\Phi_i}{K} \leq \frac{e(i)}{K}$$

A continuación se reemplaza $e(i)$ por su valor en la Proposición 16 y se considera que $e(0) = \alpha u$:

$$\begin{aligned} n(i + 1) &\leq \frac{e(i)}{K} = e(0) \left(\frac{u}{K}\right)^i \frac{1}{K} + \frac{1}{K} \left(1 - \frac{u}{K}\right) \sum_{j=0}^{i-1} \Phi_j \left(\frac{u}{K}\right)^{(i-1)-j} \\ &= \alpha \left(\frac{u}{K}\right)^{i+1} + \left(1 - \frac{u}{K}\right) \sum_{j=0}^{i-1} \frac{\Phi_j}{K} \left(\frac{u}{K}\right)^{(i-1)-j} \end{aligned}$$

Como $\Phi_j < K$ podemos acotar el sumatorio y escribir:

$$n(i + 1) \leq \frac{e(i)}{K} < \alpha \left(\frac{u}{K}\right)^{i+1} + \left(1 - \frac{u}{K}\right) \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{u}{K}\right)^{(i-1)-j}$$

A continuación, sustituimos la serie geométrica del sumatorio por su valor:

$$\begin{aligned} n(i + 1) &< \alpha \left(\frac{u}{K}\right)^{i+1} + \left(1 - \frac{u}{K}\right) \frac{1 - \left(\frac{u}{K}\right)^i}{1 - \frac{u}{K}} \\ &= \alpha \left(\frac{u}{K}\right)^{i+1} + 1 - \left(\frac{u}{K}\right)^i \\ &< \alpha \left(\frac{u}{K}\right)^{i+1} + 1 \end{aligned} \tag{4.5}$$

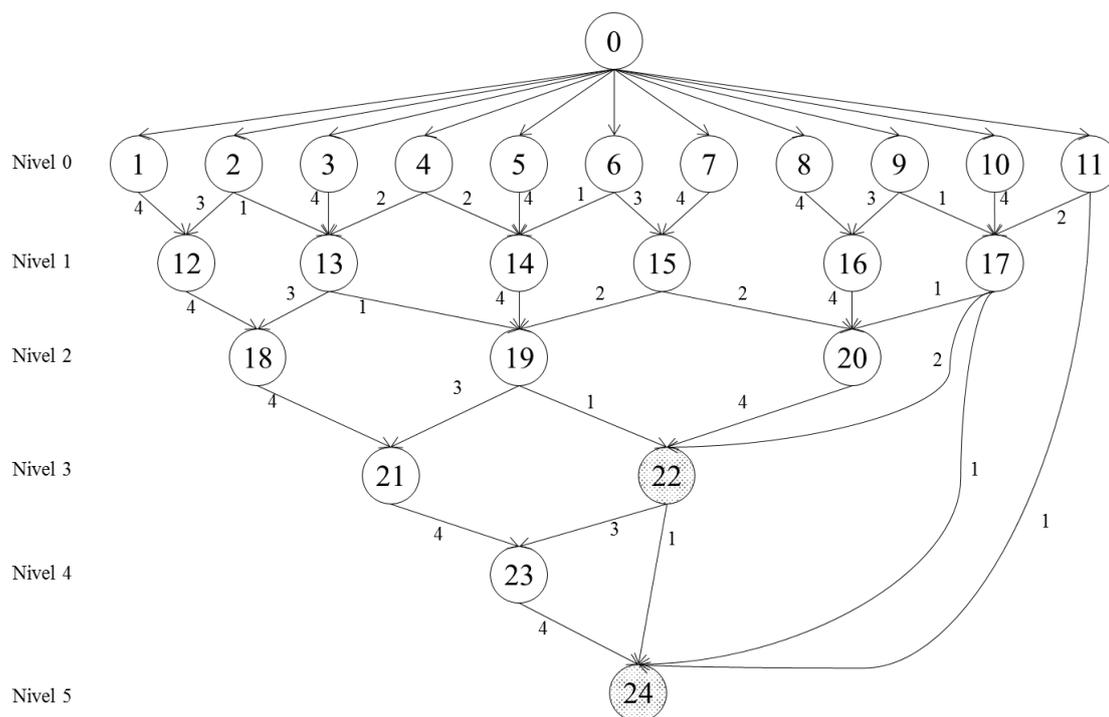


Figura 4.3: Grafo de distribución para $\alpha = 11$, $K = 7$ y $u = 4$.

Por lo tanto, como queríamos demostrar, resulta:

$$n(i+1) < \alpha \left(\frac{u}{K}\right)^{i+1} + 1$$

□

4.3.1. Primera cota de la longitud del grafo de distribución

En la presente sección se aprovechan los anteriores resultados para calcular una cota de la longitud del grafo de distribución. Con este objeto se define L_t como el primer nivel cuyos nodos no pueden formar por sí solos —es decir, sin aprovechar aristas de niveles superiores— un nuevo nodo en el nivel $L_t + 1$. La Figura 4.3 representa el grafo de distribución para $\alpha = 11$, $K = 7$ y $u = 4$ que para ingresar nodos en el nivel i emplea en primer lugar las aristas del nivel $i - 1$ y solo cuando estas se agotan recurre a aristas de niveles superiores a $i - 1$.

Obsérvese que el nodo 21, que es el primer nodo del nivel $l = 3$, emplea para su ingreso aristas de los dos primeros nodos del nivel $l = 2$, que son el nodo 18 y el nodo 19. A continuación, el nodo 22 consume la arista que queda libre del nodo 19 y las cuatro aristas

que puede ofrecerle el nodo 20, también del nivel anterior $l = 2$. Llegados a este punto, como de un lado se han agotado las aristas de los nodos del nivel $l = 2$ y, de otro, el nodo 22 no dispone de aristas suficientes para su ingreso, se toman como suministradores nodos de niveles superiores a $l = 2$. En este caso, se toman dos de las tres aristas libres que tiene el nodo 17 en el nivel 1.

El nodo 23, que es el único nodo del nivel $l = 4$, se forma tomando únicamente como suministradores los dos nodos del nivel superior $l = 3$. Finalmente, como en el nivel $l = 4$ solo tenemos un nodo, para agregar nodos en un nivel posterior es necesaria la participación de nodos situados en niveles anteriores a $l = 4$, en este caso el nodo 11 del nivel 0 y el nodo 17 del nivel 1. De este modo, $l = 4$ es el primer nivel cuyos nodos no pueden ingresar un nuevo nodo sin recurrir a nodos de niveles superiores y, por tanto, $L_t = 4$.

Dado que con las $n(L_t) \cdot u$ aristas disponibles en los nodos del nivel L_t no podemos ingresar un nuevo nodo, tenemos:

$$n(L_t) \cdot u < K$$

Y por tanto:

$$n(L_t) < \frac{K}{u}$$

Como $n(L_t)$ es un entero puede escribirse:

$$n(L_t) \leq \left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \quad (4.6)$$

Proposición 18. *Sea L_t el primer nivel cuyos nodos no pueden ingresar un nuevo nodo en el nivel $L_t + 1$ sin la contribución de aristas de niveles superiores, entonces en los niveles L_{t+j} con $j > 0$ existe como máximo un nodo.*

Demostración. Conforme la Ecuación 4.6, el número de aristas disponibles en el nivel L_t puede acotarse como:

$$\begin{aligned} e(L_t) &= n(L_t) \cdot u + \Phi_{L_t-1} \leq \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u + \Phi_{L_t-1} \\ &\leq \left\lfloor \frac{K}{u} \right\rfloor \cdot u + (K - 1) \leq 2K - 1 \end{aligned}$$

De este modo, dado que en el nivel L_t disponemos de a lo sumo $2K - 1$ aristas, en el nivel L_{t+1} podemos tener como máximo un nodo. Además, como según la Proposición 15 sabemos que $n(i+1) \leq n(i)$, en los niveles L_{t+j} con $j > 0$ sólo puede haber un nodo como máximo. \square

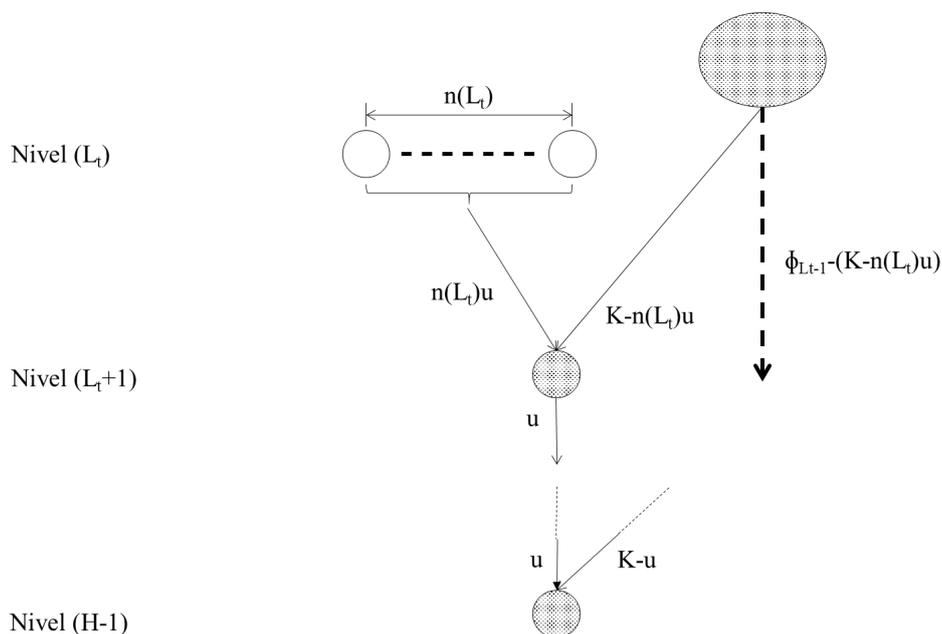


Figura 4.4: Cálculo del número máximo de nodos a partir del nivel L_t .

Nótese que, por definición, también es posible que no haya nodos después del nivel L_t .

Considérese la Figura 4.4 donde se representa esquemáticamente los niveles del grafo de distribución general $G_{\alpha, K, u}$ desde $l = L_t - 1$ hasta $l = H - 1$. En el nivel $l = L_t$ tenemos un número de nodos $n(L_t)$ que, por definición, tiene un número de aristas insuficiente para ingresar un nuevo nodo con las aristas que agregan y que, por tanto, como se ha dicho, cumple la desigualdad expresada en la Ecuación 4.6.

Cuando ingresa en el grafo de distribución, el único nodo del nivel $l = L_t + 1$ consume, de un lado, las $n(L_t) \cdot u$ aristas de los $n(L_t)$ nodos del nivel $l = L_t$ y, de otro lado, $K - n(L_t) \cdot u$ aristas de las Φ_{L_t-1} que todavía no han sido utilizadas y que pertenecen a niveles anteriores a L_t .

A continuación, calculamos el número máximo de nodos que pueden ingresar en el grafo a partir del nivel $l = L_t$. Para ello, consideramos que disponemos del máximo número posible de nodos posibles en $l = L_t$. De este modo:

$$n(L_t) = \left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1$$

Asimismo, consideramos el número máximo de aristas libres en los niveles precedentes, esto es:

$$\Phi_{L_t-1} = K - 1$$

Cada vez que un nuevo nodo ingresa en el grafo de distribución consume K aristas y aporta u aristas a su capacidad. Por tanto, si denotamos por n_t el número de nodos que pueden ingresar en el grafo del nivel L_{t+1} en adelante, tenemos que en estas condiciones n_t es el mínimo $i \in \mathbb{Z}$ que satisface:

$$\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u + K - 1 - i(K - u) < K$$

Entonces, en este caso:

$$n_t = \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 1$$

Finalmente, puesto que hemos calculado n_t cuando su valor es máximo, en un caso general puede escribirse:

$$n_t \leq \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 1 \quad (4.7)$$

La Ecuación 4.7 acota el número de nodos n_t que aparecen en los niveles posteriores a L_t . Dado que, como se ha demostrado en la Proposición 18, solo puede haber un nodo en cada uno de esos niveles, n_t es también el número de niveles del grafo posteriores a L_t .

Para un determinado valor de $K \geq 2$, el valor de n_t es máximo en el caso en que el ancho de banda de los nodos sea máximo, es decir, en que la capacidad del grafo para incorporar nuevos nodos sea máxima. Dado que por definición $1 \leq u < K$ el ancho de banda máximo se obtiene cuando $u = K - 1$ y, por tanto, $K = u + 1$. En este caso se obtiene la siguiente cota:

$$\begin{aligned} n_t &\leq \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{u+1}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - 1}{u + 1 - u} \right\rfloor + 1 \\ &= \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil 1 + \frac{1}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - 1}{1} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{\left\lceil \frac{1}{u} \right\rceil \cdot u - 1}{1} \right\rfloor + 1 = \lfloor u - 1 \rfloor + 1 = u = K - 1 \end{aligned}$$

De este modo, en ningún caso el número de nodos n_t que pertenecen al nivel L_{t+1} o a un nivel posterior es superior a $K - 1$. Esta situación en que $n_t = K - 1$ se produce además en el caso planteado en que $u = K - 1$ y el número de aristas disponibles inicialmente en L_t es máximo, es decir, $\Phi_{L_t-1} = K - 1$. En esta situación, en $L_t + 1$ se forma un nodo que emplea las $K - 1$ aristas disponibles del nodo del nivel L_t y una de las $\Phi_{L_t-1} = K - 1$ aristas libres que tenemos en un principio. A continuación se ingresa un nuevo nodo en el

nivel $L_t + 2$ que emplea las $K - 1$ aristas del nodo del nivel $L_t + 1$ más una segunda arista de las $\Phi_{L_t-1} = K - 1$ que tenemos inicialmente. Este proceso se puede repetir nivel tras nivel hasta agotar las $\Phi_{L_t-1} = K - 1$ aristas adicionales de que disponemos inicialmente. De este modo, podemos repetir el proceso $K - 1$ veces y añadir $K - 1$ nodos adicionales en $K - 1$ niveles, puesto que en cada nivel aparece un único nodo. En consecuencia, en el caso más favorable se añaden $K - 1$ nodos tras el nivel L_t y por tanto, como habíamos visto, $n_t \leq K - 1$.

Nótese además que para $u = 1$ se obtiene que $n_t \leq u = 1$ lo que significa que a partir del nivel L_t sólo podemos tener un nivel adicional. Este resultado es coherente con el Lema 6 de la Sección 3.2 en que se establece que para el grafo de distribución de capacidad mínima se tiene $H = H_t$ o bien $H = H_t + 1$. Como H_t equivale a la definición de L_t cuando $u = 1$, en el primer caso tendremos $n_t = 0$ y en el segundo $n_t = 1$ y por tanto, como acabamos de ver, cuando $u = 1$ ha de cumplirse $n_t \leq 1$.

A continuación calculamos una primera cota de la longitud H del grafo de distribución que, como se ha dicho, equivale al número de niveles del grafo y determina además el retardo total de distribución.

Teorema 19. *La longitud H del grafo de distribución $G_{\alpha,K,u} = (V, E)$ para α , u y K , está acotada por:*

$$H \leq \begin{cases} \lfloor \log_{K/u}(\alpha) \rfloor + \frac{K-1}{K-u} + 3 & \text{si } \alpha \geq K/u \\ \frac{K-1}{K-u} + 3 & \text{si } \alpha < K/u \end{cases} \quad (4.8)$$

Demostración. En la Proposición 17 demostramos que:

$$n(i) \leq \alpha \cdot \frac{u^i}{K} + 1$$

Supongamos además que se cumple la condición:

$$\alpha \cdot \frac{u^i}{K} < 1 \quad (4.9)$$

En este caso puede escribirse:

$$n(i) \leq \alpha \cdot \frac{u^i}{K} + 1 < 2$$

De este modo, puede asegurarse que si $\alpha \cdot (u/K)^i < 1$ entonces $n(i) \leq 1$ y por tanto no podemos formar nodos en un nivel inferior a i sin la contribución de aristas de niveles anteriores a i . De este modo, i ha de corresponderse con el nivel $i = L_t$ o un nivel $i > L_t$.

La condición de la Ecuación 4.9 puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\alpha \cdot \left(\frac{u}{K}\right)^i < 1 \Rightarrow i > \log_{K/u}(\alpha)$$

Si tomamos i como el menor entero que cumple la desigualdad anterior, obtenemos:

$$i = \begin{cases} \lfloor \log_{K/u}(\alpha) \rfloor + 1 & \text{si } \alpha \geq K/u \\ 1 & \text{si } \alpha < K/u \end{cases} \quad (4.10)$$

En este caso, sabemos que si i toma el valor de la Ecuación 4.10, entonces $n(i) \leq 1$ y por tanto $i \geq L_t$. De esta forma, podemos acotar L_t :

$$L_t \leq \begin{cases} \lfloor \log_{K/u}(\alpha) \rfloor + 1 & \text{si } \alpha \geq K/u \\ 1 & \text{si } \alpha < K/u \end{cases} \quad (4.11)$$

Desde el nivel $l = L_t + 1$ sabemos que vamos a tener un número de nodos igual a n_t , que viene acotado por la expresión de la Ecuación 4.7. Como a partir de L_t todos los niveles contienen un único nodo, el número de nodos coincide con el número de niveles posteriores a L_t y por tanto la cota de n_t sirve asimismo de cota del número de niveles posteriores a L_t .

Por otro lado, puesto que la longitud del grafo equivale al número total de niveles, podemos contar los niveles de 0 a L_t , que dan un total de $L_t + 1$ niveles, y a continuación sumar los niveles que vienen a continuación, que como acabamos de ver valen n_t . De este modo:

$$H = (L_t + 1) + n_t \leq \begin{cases} \left(\left(\lfloor \log_{K/u}(\alpha) \rfloor + 1 + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 1 \right) \right) & \text{si } \alpha \geq K/u \\ (1 + 1) + \left(\left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 1 \right) & \text{si } \alpha < K/u \end{cases}$$

Nótese, además, que para cualquier par de enteros $u, K \in \mathbb{Z}$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u \leq \left\lfloor \frac{K}{u} \right\rfloor \cdot u \leq K \quad (4.12)$$

Así pues, como pretendíamos demostrar, finalmente se obtiene la siguiente cota de la longitud H del grafo de distribución:

$$H \leq \begin{cases} \lfloor \log_{K/u}(\alpha) \rfloor + \frac{K-1}{K-u} + 3 & \text{si } \alpha \geq K/u \\ \frac{K-1}{K-u} + 3 & \text{si } \alpha < K/u \end{cases}$$

□

Obsérvese que el término $(K-1)/(K-u)$ de la Ecuación 4.8 alcanza su valor máximo cuando $u = K-1$ en cuyo caso vale $K-1$. Por otro lado, su valor mínimo es 1 para $u = 1$. De esta forma, como se ha mencionado en los anteriores capítulos, el incremento de la longitud H del grafo de distribución está acotado por la suma del logaritmo de α y un término que a lo sumo vale $K+2$, es decir la suma de $K-1$ más 3. De este modo, dado que el retardo de transmisión Δ_0 está acotado por la expresión $\Delta_0 \leq K \cdot H$, el grafo de distribución descrito presenta siempre retardos de distribución acotados.

En el caso en que $u = 1$, la cota de la Ecuación 4.8 puede particularizarse como:

$$H \leq \begin{cases} \lfloor \log_K(\alpha) \rfloor + 4 & \text{si } \alpha \geq K \\ 4 & \text{si } \alpha < K \end{cases}$$

Aunque no supone una mejora, esta expresión es coherente con los resultados obtenidos para el grafo de distribución de capacidad mínima en la Sección 3.2. En efecto, por un lado, según el Lema 6 de la Sección 3.2 se tiene $H = H_t$ o bien $H = H_t + 1$ y por tanto puede escribirse $H \leq H_t + 1$. Como por otro lado, la Ecuación 3.6 establece que $H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor$, resulta finalmente $H \leq \lfloor \log_K \alpha \rfloor + 2 \leq \lfloor \log_K \alpha \rfloor + 4$.

4.3.2. Segunda cota de la longitud del grafo de distribución

A continuación se ajusta la cota obtenida en la Ecuación 4.8 del Teorema 19 afinando la cota del nivel L_t . Según la Ecuación 4.5 del penúltimo paso de la demostración de la Proposición 17, tenemos que:

$$n(i) < \alpha \cdot \left(\frac{u}{K}\right)^i + 1 - \left(\frac{u}{K}\right)^{i-1} \quad (4.13)$$

Si a continuación exigimos que dicha expresión sea menor o igual que $\lceil K/u \rceil$ entonces el número $n(i)$ de nodos será menor o igual que $\lceil K/u \rceil - 1$. En la Ecuación 4.6 se ha visto además que:

$$n(L_t) \leq \left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1$$

Por lo tanto, si la expresión de la Ecuación 4.13 es menor que $\lceil K/u \rceil$, entonces el nivel i ha de corresponderse con el nivel L_t o con un nivel posterior a L_t , es decir $i \geq L_t$.

A continuación forzamos que la expresión de la Ecuación 4.13 sea menor que $\lceil K/u \rceil$:

$$\alpha \cdot \left(\frac{u}{K}\right)^i + 1 - \left(\frac{u}{K}\right)^{i-1} < \left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil \quad (4.14)$$

Si despejamos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u}{K}\right)^i \left(\alpha - \frac{K}{u}\right) &< \left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \implies \\ \left(\frac{u}{K}\right)^i &< \frac{\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1}{\alpha - \frac{K}{u}} \implies \\ \left(\frac{K}{u}\right)^i &> \frac{\alpha - \frac{K}{u}}{\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1} \implies \\ i &> \log_{K/u} \left(\frac{\alpha - \frac{K}{u}}{\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1} \right) \end{aligned}$$

A continuación tomamos i como el mínimo $i \in \mathbb{Z}$ que cumple la expresión anterior y que, como se ha visto, constituye una cota superior de L_t . De este modo, resulta:

$$L_t \leq \left\lceil \log_{K/u} \left(\frac{\alpha - \frac{K}{u}}{\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1} \right) \right\rceil + 1 \quad (4.15)$$

Nótese que dicha expresión es válida cuando $\alpha - K/u \geq \lceil K/u \rceil - 1$, es decir, cuando el logaritmo es un número positivo. En la demostración del siguiente teorema se analiza la cota de L_t en otros casos.

Teorema 20. *La longitud H del grafo de distribución $G_{\alpha,K,u} = (V, E)$ para α , u y K , cumple:*

$$H \leq \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \frac{K}{u} \\ 2 & \text{si } \alpha = \frac{K}{u} \\ \left\lfloor \frac{(\lceil \frac{K}{u} \rceil - 1) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 3 & \text{si } 0 < \alpha - K/u < \lceil K/u \rceil - 1 \\ \left\lfloor \log_{K/u} \left(\frac{\alpha - \frac{K}{u}}{\lceil \frac{K}{u} \rceil - 1} \right) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\lceil \frac{K}{u} \rceil - 1) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 3 & \text{si } \alpha - K/u \geq \lceil K/u \rceil - 1 \end{cases} \quad (4.16)$$

Demostración. Empezamos por el caso en que $\alpha - K/u \geq \lceil K/u \rceil - 1$ y repetimos el argumento empleado en la demostración del Teorema 19 con la diferencia de que ahora se recurre a la nueva cota de L_t obtenida en la Ecuación 4.15. Así pues, como la longitud del grafo equivale al número total de niveles, contamos los niveles de 0 a L_t , que dan un total de $L_t + 1$ niveles, y a continuación sumamos los n_t niveles posteriores que completan el grafo. Esta última expresión, como se ha visto, está acotada por el término de la Ecuación 4.7. En este caso, la condición $\alpha - K/u \geq \lceil K/u \rceil - 1 > 0$ asegura que el logaritmo es positivo. De este modo, se obtiene el resultado de la Ecuación 4.16:

$$\begin{aligned} H = (L_t + 1) + n_t &\leq \left(\left\lfloor \log_{K/u} \left(\frac{\alpha - \frac{K}{u}}{\lceil \frac{K}{u} \rceil - 1} \right) \right\rfloor + 1 + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{(\lceil \frac{K}{u} \rceil - 1) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= \left\lfloor \log_{K/u} \left(\frac{\alpha - \frac{K}{u}}{\lceil \frac{K}{u} \rceil - 1} \right) \right\rfloor + \left\lfloor \frac{(\lceil \frac{K}{u} \rceil - 1) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 3 \end{aligned}$$

En el caso en que $0 < \alpha - K/u < \lceil K/u \rceil - 1$ se tiene de un lado que $0 < \alpha - K/u$. De este modo $\alpha > K/u$ y por tanto $e(0) = \alpha u > K$. Por otro lado, como $\alpha - K/u < \lceil K/u \rceil - 1$ resulta:

$$\alpha < \frac{K}{u} + \left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1$$

Y por tanto:

$$\alpha \cdot u < K + \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u$$

Recuérdese además la desigualdad de la Ecuación 4.12:

$$\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u \leq \left\lfloor \frac{K}{u} \right\rfloor \cdot u \leq K$$

De esta forma, se tiene que:

$$\alpha \cdot u < K + \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u \leq K + K = 2K$$

Así, finalmente, resulta $K < e(0) = \alpha u < 2K$. En este caso, en el nivel 1 sólo existe un nodo y entonces, por definición, $L_t = 1$. Si repetimos el razonamiento del caso anterior para $L_t = 1$ obtenemos:

$$H \leq \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) u - 1}{K - u} \right\rfloor + 3$$

Por otro lado, para $\alpha = K/u$ en el nivel 0 se forman $\alpha = K/u$ nodos y, por tanto, en el nivel 1 aparece un único nodo ya que:

$$n(1) = \left\lfloor \frac{e(0)}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha \cdot u}{K} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(K/u) \cdot u}{K} \right\rfloor = 1$$

De esta forma, como en el nivel 0 no sobran aristas y en el nivel 1 solo disponemos de un nodo, ya no es posible añadir nuevos nodos. En este caso, por tanto, solo tenemos dos niveles y en consecuencia $H = 2$, como se quería demostrar. Nótese que bajo esta situación, además, el orden G del grafo de distribución es $G = \alpha + 2$ puesto que el grafo se compone del nodo fuente más los α nodos del nivel 0 más el único nodo que se forma en el nivel 1. Esta cantidad es consecuente con la que se obtiene según la expresión de la Ecuación 4.1 si se toma $\alpha = K/u$. Aunque se ha supuesto sin pérdida de generalidad que K y u son coprimos, esta condición tiene sentido en el caso en que $u = 1$.

Finalmente, para $\alpha < K/u$ la longitud es $H = 1$ ya que sólo podemos ingresar nodos en el nivel 0.

□

Lo mismo que sucede con la cota de la longitud del Teorema 19, los valores calculados en el Teorema 20 demuestran que la topología escogida presenta un incremento logarítmico de la longitud. De esta forma, cuando α aumenta, es decir, cuando el número de nodos se

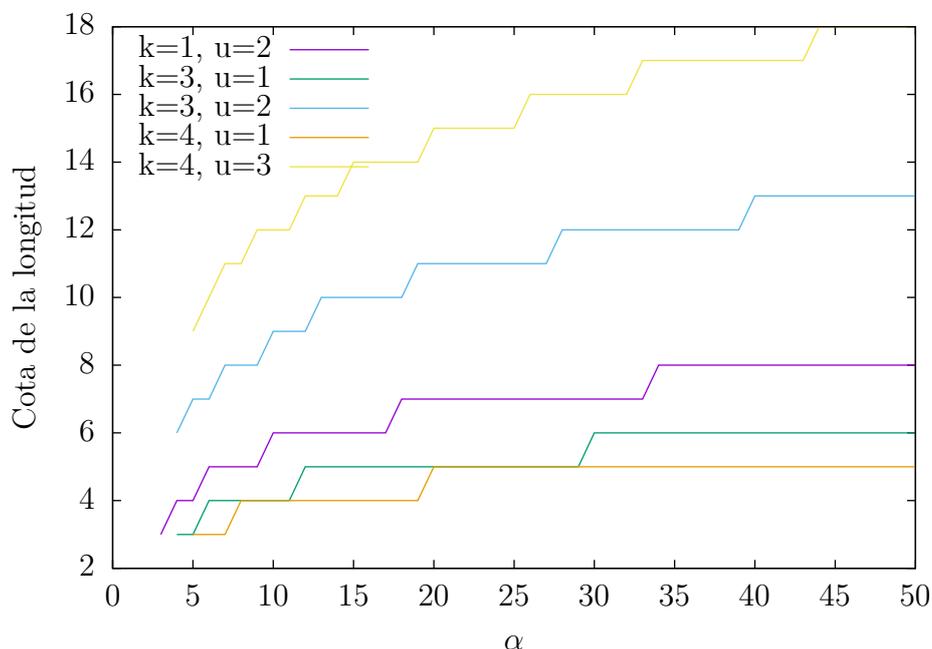


Figura 4.5: Crecimiento logarítmico de la longitud en función de α . La función se calcula para diferentes valores de u y K .

incrementa, la longitud H del grafo y en consecuencia el retardo de distribución $\Delta_0 \leq K \cdot H$ crecen logarítmicamente. Esta tendencia se representa en la Figura 4.5 para diferentes valores de u y K .

Obsérvese que en las gráficas de la figura, la longitud del grafo aumenta tanto con respecto al valor de α como con la relación entre u y K . En particular, la longitud aumenta a medida que aumenta u/K . Esto no significa necesariamente una desventaja puesto que tanto un valor de α elevado como una proporción u/K alta significan un mayor ancho de banda disponible y, en consecuencia, un mayor número de nodos a los que la red puede dar servicio. Igualmente, este incremento del orden del grafo se traduce en un mayor número de niveles y una mayor longitud del grafo. Así, el crecimiento de la longitud respecto a α y u/K simplemente refleja el incremento que en general sufre cualquier topología cuando se incrementa el número de nodos del grafo.

Análogamente a los resultados del Teorema 19, los valores de la longitud determinados en el Teorema 20 para el caso en que $u = 1$ son coherentes con los resultados obtenidos para el grafo de distribución de capacidad mínima en la Sección 3.2. Como queda dicho, en ese caso puede escribirse $H \leq H_t + 1$ en donde $H_t = 1 + \lfloor \log_K \alpha \rfloor$. De esta forma, para $u = 1$ tenemos $H \leq \lfloor \log_K \alpha \rfloor + 2$.

Si en las expresiones de la Ecuación 4.16 se sustituye por $u = 1$, la primera condición resulta $\alpha < K$ y la longitud del grafo de distribución vale $H = 1$. Efectivamente, en este

caso en que $\alpha < K$ y $u = 1$ el grafo solo contiene el nodo fuente y los $\alpha < K$ nodos del nivel 0 que son insuficientes para formar un nodo en el siguiente nivel. En consecuencia, la longitud del grafo es $H = 1$.

Para $u = 1$ la segunda condición se convierte en $\alpha = K$ y la longitud vale $H = 2$ conforme la Ecuación 4.16. Este resultado vuelve a ser correcto. En este caso el grafo está formado por el nodo fuente, los $\alpha = K$ nodos del nivel 0 y el nodo hijo que estos forman en el nivel 1. Como en el nivel 0 no sobran aristas y el único nodo del nivel 1 no puede formar hijos sin la contribución de otros nodos, el grafo no admite la formación de un nuevo nivel y, en consecuencia, su longitud vale $H = 2$.

La tercera condición para $u = 1$ puede escribirse como $K < \alpha < 2K - 1$. En este caso, según la Ecuación 4.16, resulta $H \leq \lfloor (K - 2)/(K - 1) \rfloor + 3 = 3$ que es una cota correcta puesto que $H = 2$. Ahora formamos α nodos en el nivel 0. Como $K < \alpha < 2K - 1$ puede formarse un único nodo en el nivel 1. Nótese que para formar un segundo nodo en el nivel 1 serían precisos al menos $2K$ nodos en el nivel 0. Por otro lado, como $\alpha < 2K - 1$ y hemos gastado K nodos, en el nivel 0 quedan libres $\alpha - K < K - 1$ nodos, es decir, menos de $K - 1$ nodos, por lo que ya no puede formarse un nuevo nivel 2. En efecto, para formar un nodo en el nivel 2 son precisos el nodo del nivel 1 más $K - 1$ nodos del nivel 0 que, según acabamos de ver, no tenemos disponibles. De esta forma volvemos a tener un solo nodo en el nivel 1, que es el último nodo del grafo, y por tanto $H = 2$.

Finalmente, la cuarta condición para $u = 1$ puede escribirse como $\alpha \geq 2K - 1$. En este caso la cota, a la que llamamos C_2 , es la siguiente:

$$H \leq \left\lfloor \log_K \frac{\alpha - K}{K - 1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{K - 2}{K - 1} \right\rfloor + 3 = \left\lfloor \log_K \frac{\alpha - K}{K - 1} \right\rfloor + 3 = C_2$$

Por otro lado tenemos la cota, que denotamos como C_1 , obtenida a partir de los resultados de la Sección 3.2:

$$H \leq \lfloor \log_K \alpha \rfloor + 2 = C_1$$

Dado que pretendemos demostrar que C_2 es una cota válida de H hemos de demostrar que $H \leq C_2$. En nuestro caso, vamos a probar que $C_2 \geq C_1$. De este modo tendremos que $H \leq C_1 \leq C_2$ y por tanto $H \leq C_2$. Así pues, queda:

$$\begin{aligned} C_2 \geq C_1 & \iff \\ \left\lfloor \log_K \frac{\alpha - K}{K - 1} \right\rfloor + 3 \geq \lfloor \log_K \alpha \rfloor + 2 & \iff \\ \left\lfloor \log_K \frac{\alpha - K}{K - 1} \right\rfloor \geq \lfloor \log_K \alpha \rfloor - 1 = \lfloor \log_K \alpha - 1 \rfloor = \lfloor \log_K \alpha - \log_K K \rfloor = \left\lfloor \log_K \frac{\alpha}{K} \right\rfloor \end{aligned}$$

Así pues, deseamos probar la siguiente desigualdad:

$$C'_2 = \left\lfloor \log_K \frac{\alpha - K}{K - 1} \right\rfloor \geq \left\lfloor \log_K \frac{\alpha}{K} \right\rfloor = C'_1 \quad (4.17)$$

Nótese que la anterior desigualdad no implica necesariamente la desigualdad entre los argumentos de los logaritmos. Es decir, el primer argumento puede ser menor que el segundo y cumplirse la igualdad entre las funciones suelo de los logaritmos, como sucede, por ejemplo, para $\alpha = 25$ y $K = 7$. En este caso, el primer argumento vale $(\alpha - K)/(K - 1) = 18/6 = 3$ y el segundo vale $\alpha/K = 25/7 > 3$ a pesar de lo cual se cumple la condición general dado que ambas funciones suelo valen 0. Con todo, en caso de que el primer argumento sea mayor o igual que el segundo, también lo serán sus logaritmos y por tanto sus correspondientes funciones suelo. De este modo, la desigualdad de la Ecuación 4.17 puede garantizarse en caso de que se cumpla la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - K}{K - 1} &\geq \frac{\alpha}{K} &&\iff \\ \alpha K - K^2 &\geq \alpha K - \alpha &&\iff \\ \alpha &\geq K^2 \end{aligned}$$

De esta forma, cuando $\alpha \geq K^2$ tenemos que $C'_2 \geq C'_1$ y por tanto $C_2 \geq C_1$, como pretendíamos demostrar.

Por otro lado, cuando $\alpha < K^2$ podemos escribir:

$$C'_1 = \left\lfloor \log_K \frac{\alpha}{K} \right\rfloor < \left\lfloor \log_K \frac{K^2}{K} \right\rfloor = \lfloor \log_K K \rfloor = 1$$

En consecuencia, como por definición C'_1 es un número entero, resulta $C'_1 \leq 0$. Como por otro lado estamos en el caso en que $\alpha \geq 2K - 1$ tenemos:

$$C'_2 = \left\lfloor \log_K \frac{\alpha - K}{K - 1} \right\rfloor \geq \left\lfloor \log_K \frac{2K - 1 - K}{K - 1} \right\rfloor = \left\lfloor \log_K \frac{K - 1}{K - 1} \right\rfloor = 0$$

Por lo tanto, cuando $2K - 1 \leq \alpha < K^2$ tenemos $C'_1 \leq 0$ y $C'_2 \geq 0$ y por tanto $C'_2 \geq C'_1$ y en correspondencia $C_2 \geq C_1$, como se quería demostrar.

4.3.3. Tercera cota de la longitud del grafo de distribución

En este último apartado se ofrece una tercera cota de la longitud del grafo de distribución. Para ello, se define en primer lugar el parámetro N_t como el número de nodos que

se han formado hasta el nivel $l = L_t$ inclusive. El número de aristas $e(L_t)$ disponibles en el nivel $l = L_t$ es el número de aristas que proporciona el nodo raíz menos el número de aristas netas que consumen los restantes $N_t - 1$ nodos del grafo:

$$e(L_t) = \alpha \cdot K - (N_t - 1)(K - u) \quad (4.18)$$

Este número de aristas también se puede escribir en función del número de nodos que hay en el nivel $l = L_t$ y el número de aristas que no han sido utilizadas para ingresar nodos hasta el nivel anterior:

$$e(L_t) = n(L_t) \cdot u + \Phi_{L_t-1}$$

El número de nodos en el nivel $l = L_t$ está acotado por la Ecuación 4.6:

$$1 \leq n(L_t) \leq \left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1$$

Como además sabemos que $0 \leq \Phi_{L_t-1} \leq (K - 1)$, resulta:

$$u \leq u + \Phi_{L_t-1} \leq e(L_t) \leq \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u + \Phi_{L_t-1} \leq \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u + (K - 1)$$

Sustituyendo en esta desigualdad la Ecuación 4.18 queda:

$$u \leq \alpha \cdot K - (N_t - 1)(K - u) \leq \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u + (K - 1)$$

De esta expresión podemos despejar N_t en las dos desigualdades para obtener una cota inferior y una cota superior de N_t .

Para calcular la cota superior tomamos:

$$\begin{aligned} u &\leq \alpha \cdot K - (N_t - 1)(K - u) && \iff \\ (N_t - 1)(K - u) &\leq \alpha \cdot K - u && \iff \\ N_t - 1 &\leq \frac{\alpha \cdot K - u}{K - u} && \iff \\ N_t &\leq \frac{\alpha \cdot K - u}{K - u} + 1 \end{aligned}$$

Como N_t es un número entero podemos redondear por abajo la cota superior, que de este modo resulta:

$$N_t \leq \left\lfloor \frac{\alpha \cdot K - u}{K - u} \right\rfloor + 1 \quad (4.19)$$

De forma análoga, para la cota inferior tomamos:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot K - (N_t - 1)(K - u) &\leq \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u + (K - 1) && \iff \\ (N_t - 1)(K - u) &\geq \alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - (K - 1) && \iff \\ (N_t - 1) &\geq \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} && \iff \\ N_t &\geq \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} + 1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalmente, si redondeamos se obtiene:

$$N_t \geq \left\lceil \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} \right\rceil + 1 \quad (4.21)$$

Por otro lado, el número n_t de nodos que pertenecen a niveles posteriores a $l = L_t$ puede calcularse como el número total de nodos del grafo G menos el número de nodos que se han formado hasta el nivel $l = L_t$ inclusive. De esta forma:

$$n_t = G - N_t$$

Si se toma el valor de G en la Ecuación 4.1 y la cota inferior de N_t en la Ecuación 4.20, resulta:

$$n_t \leq 2 + \left\lfloor \frac{K \cdot (\alpha - 1)}{K - u} \right\rfloor - \left(\frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} + 1 \right)$$

De donde:

$$n_t \leq 1 + \left\lfloor \frac{K \cdot (\alpha - 1)}{K - u} \right\rfloor - \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} \quad (4.22)$$

En la Ecuación 4.7 de la Sección 4.3 también se calculó una cota de n_t , determinada por:

$$n_t \leq \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1\right) u - 1}{K - u} \right\rfloor + 1$$

A continuación se comparan las dos cotas anteriores. Denotamos por n_{t_1} a la cota de la Ecuación 4.22 y n_{t_2} a la de la Ecuación 4.7.

Si desarrollamos n_{t_1} y denotamos por r_1 el resto de dividir $K \cdot (\alpha - 1)$ entre $K - u$, es decir, $r_1 = K \cdot (\alpha - 1) \bmod (K - u)$, obtenemos:

$$\begin{aligned} n_{t_1} &= 1 + \left\lfloor \frac{K \cdot (\alpha - 1)}{K - u} \right\rfloor - \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1\right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} \\ &= 1 + \frac{K \cdot (\alpha - 1)}{K - u} - \frac{r_1}{K - u} - \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1\right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} \\ &= 1 + \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1\right) \cdot u - 1}{K - u} - \frac{r_1}{K - u} \end{aligned}$$

Recuérdese que, por definición, el cociente de una división entera puede escribirse como la resta de dos divisiones: dividendo entre divisor menos resto entre divisor. Del mismo modo, si desarrollamos n_{t_2} y denotamos por r_2 el resto de dividir $(\lceil K/u \rceil \cdot u - 1)$ entre $K - u$, es decir, si $r_2 = ((\lceil K/u \rceil - 1) \cdot u - 1) \bmod (K - u)$ resulta:

$$\begin{aligned} n_{t_2} &= \left\lfloor \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1\right) \cdot u - 1}{K - u} \right\rfloor + 1 \\ &= 1 + \frac{\left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1\right) \cdot u - 1}{K - u} - \frac{r_2}{K - u} \end{aligned}$$

Así pues, ambas expresiones son idénticas salvo los respectivos términos $r_1/(K - u)$ y $r_2/(K - u)$ en donde por definición $r_1, r_2 < (K - u)$. Obsérvese además que la diferencia entre las dos cotas vale:

$$n_{t_1} - n_{t_2} = \frac{r_1 - r_2}{K - u} \quad \text{con } 0 \leq r_1, r_2 < K - u$$

De esta forma, la diferencia entre las cotas n_{t_1} y n_{t_2} ha de ser en valor absoluto menor a la unidad. Por definición n_{t_1} es un número real, i.e. no tiene por qué adoptar valores enteros,

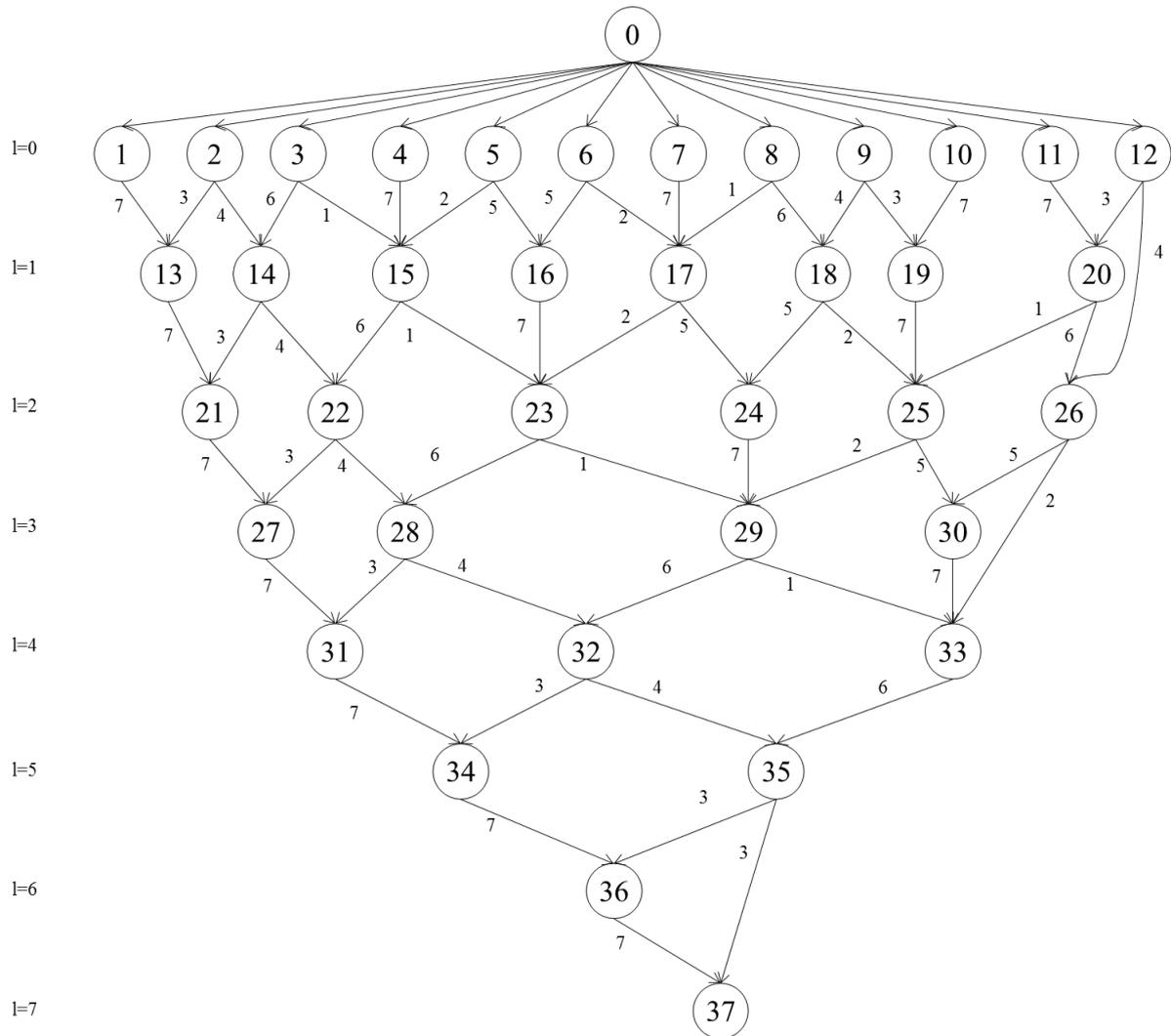


Figura 4.6: Grafo de distribución para $\alpha = 12$, $K = 10$ y $u = 7$.

y n_{t_2} es un número entero. De esta forma, si redondeamos n_{t_1} por debajo obtendremos una cota más ajustada que n_{t_2} , puesto que si $n_{t_1} < n_{t_2}$ entonces tenemos $\lfloor n_{t_1} \rfloor = n_{t_2} - 1$. Recuerdese que n_{t_2} es un valor entero y que el valor absoluto de la diferencia entre n_{t_1} y n_{t_2} es menor a la unidad. Del mismo modo, si $n_{t_1} > n_{t_2}$ entonces tenemos $\lfloor n_{t_1} \rfloor = n_{t_2}$. Así pues $\lfloor n_{t_1} \rfloor \leq n_{t_2}$.

Nótese además que tiene sentido redondear n_{t_1} por debajo puesto que es una cota del número n_t de nodos que pueden formarse por debajo del nivel $l = L_t$ que, por definición, es un número entero. De esta forma, tenemos una cota $\lfloor n_{t_1} \rfloor$ que mejora la cota n_{t_2} empleada en el anterior apartado.

Considérese por ejemplo el grafo de distribución general para $\alpha = 12$, $K = 10$ y $u = 7$ mostrado en la Figura 4.6. Por debajo del nivel $L_t = 6$ tenemos un número de nodos $n_t = 1$. Los valores de los residuos son $r_1 = 2 > r_2 = 0$ y los valores de las cotas $n_{t_1} = 2,33 < n_{t_2} = 3$. Obsérvese que, como se ha dicho, n_{t_2} siempre da un valor entero. La cota $\lfloor n_{t_1} \rfloor = 2$ indica que por debajo de L_t hay como máximo 2 nodos. Como en realidad hay un nodo, es una cota superior correcta.

A continuación, obtenemos el valor de n_{t_1} redondeado por debajo:

$$\begin{aligned} \lfloor n_{t_1} \rfloor &= \left\lfloor 1 + \left\lfloor \frac{K \cdot (\alpha - 1)}{K - u} \right\rfloor - \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lfloor \frac{K}{u} \right\rfloor - 1 \right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} \right\rfloor \\ &= 1 + \left\lfloor \frac{K \cdot (\alpha - 1)}{K - u} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lfloor \frac{K}{u} \right\rfloor - 1 \right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} \right\rfloor \end{aligned} \quad (4.23)$$

El valor máximo de n_t , es decir, el mayor aumento de la longitud que se puede producir a partir del nivel $l = L_t$, se obtiene cuando la capacidad del grafo es máxima, es decir, cuando $u = K - 1$ y por tanto $K = u + 1$. En este caso resulta $\lfloor n_{t_1} \rfloor = n_{t_1} = n_{t_2} = K - 1$. Según la Ecuación 4.6, el número de nodos en $l = L_t$ vale ahora la unidad:

$$n(L_t) \leq \left\lfloor \frac{K}{u} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{u + 1}{u} \right\rfloor - 1 = 1$$

En este caso tenemos $u = K - 1$ aristas aportadas por el nodo del nivel L_t y, como máximo, $\Phi_{L_t-1} \leq K - 1$ aristas que sobran de niveles anteriores, es decir, en niveles l tales que $l \leq L_t - 1$. De esta forma, a partir de L_t podemos añadir a lo sumo $K - 1$ nodos ya que cada vez que ingresa un nuevo nodo, este aporta $K - 1$ aristas y consume una de las $\Phi_{L_t-1} = K - 1$ aristas que como máximo sobran inicialmente. Como esta operación puede

repetirse $K - 1$ veces, al final habremos ingresado como máximo $n_t = K - 1$ nodos y, por tanto, habrán aparecido como máximo $K - 1$ niveles posteriores a $l = L_t$. Este valor es coherente con los valores encontrados de las cotas $\lfloor n_{t_1} \rfloor = n_{t_1} = n_{t_2} = K - 1$.

Así pues, como se ha dicho, $\lfloor n_{t_1} \rfloor$ proporciona una cota más ajustada que la cota n_{t_2} empleada en los resultados del Teorema 20. De esta forma, si a continuación se repiten los mismos argumentos de dicho teorema empleando el valor de $\lfloor n_{t_1} \rfloor$ en vez del valor de n_{t_2} , puede obtenerse una cota más ajustada de la longitud del grafo de distribución.

Teorema 21. *Sea $\lfloor n_{t_1} \rfloor$ la expresión determinada por la Ecuación 4.23. La longitud H del grafo de distribución $G_{\alpha, K, u} = (V, E)$ para α, u y K , cumple:*

$$H \leq \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < \frac{K}{u} \\ 2 & \text{si } \alpha = \frac{K}{u} \\ \lfloor n_{t_1} \rfloor + 2 & \text{si } 0 < \alpha - K/u < \lceil K/u \rceil - 1 \\ \left\lceil \log_{K/u} \left(\frac{\alpha - \frac{K}{u}}{\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1} \right) \right\rceil + \lfloor n_{t_1} \rfloor + 2 & \text{si } \alpha - K/u \geq \lceil K/u \rceil - 1 \end{cases} \quad (4.24)$$

Demostración. La demostración repite para cada caso los argumentos empleados en la demostración del Teorema 20, con la salvedad de que ahora hemos considerado una nueva cota, que aquí denotamos por $\lfloor n_{t_1} \rfloor$, del número n_t de nodos que pertenecen a niveles posteriores a $l = L_t$.

□

En el ejemplo del grafo de distribución para $\alpha = 12$, $K = 10$ y $u = 7$ de la Figura 4.6 nos encontramos en el cuarto caso de la Ecuación 4.24 dado que $\alpha - K/u = 12 - 10/7 \geq \lceil K/u \rceil - 1 = \lceil 10/7 \rceil - 1 = 1$. En este caso, como se ha dicho, $n_{t_1} = 2,33$ y por tanto $\lfloor n_{t_1} \rfloor = 2$. Sustituyendo por los correspondientes valores de $\alpha = 12$, $K = 10$ y $u = 7$, la parte entera del logaritmo redondeada por debajo vale $\lfloor 6,61 \rfloor = 6$. De este forma, obtenemos la cota de la longitud $H \leq 6 + 2 + 2 = 10$ que es coherente con la longitud $H = 8$ del grafo representada en la Figura 4.6.

Por otro lado, si tomamos el grafo de distribución para $\alpha = 11$, $K = 7$ y $u = 4$ de la Figura 4.3 volvemos a encontrarnos en el cuarto caso de la Ecuación 4.24 puesto que $\alpha - K/u = 11 - 7/4 \geq \lceil K/u \rceil - 1 = \lceil 7/4 \rceil - 1 = 1$. Ahora, si calculamos $\lfloor n_{t_1} \rfloor$ obtenemos $\lfloor n_{t_1} \rfloor = 1$ que es coherente con el valor de n_t del grafo que, como se observa en la Figura 4.3, es $n_t = 1$. Por otro lado, la expresión redondeada del logaritmo vale en este caso $\lfloor 3,97 \rfloor = 3$ y por tanto obtenemos la cota $H \leq 3 + 1 + 2 = 6$ que se ajusta exactamente a la longitud del grafo, que es $H = 6$.

4.4. Evaluación de la cota de la longitud del grafo de distribución

En la anterior sección se han calculado distintas cotas de la longitud del grafo de distribución. En este apartado se estudia la validez de tales cotas. Con este objeto, se contrastan los valores de la cota calculados en el Teorema 21 –que, como se ha dicho, es el que ofrece las expresiones más ajustadas– con los valores reales de la longitud en una serie de grafos de distribución.

En las gráficas de las Figuras 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 y 4.12 se representan tanto la longitud H de los grafos de distribución como la cota de dicha longitud, obtenida según las expresiones de la Ecuación 4.24 del Teorema 21. Ambos parámetros se representan en función de α y para distintos valores de u y K (cada gráfica se corresponde con un determinado par u, K). En estos casos se calcula la longitud real de los grafos H por construcción, es decir, se programa el algoritmo de ingreso y se ejecuta hasta que ya no es posible formar un nuevo nodo por falta de ancho de banda. La longitud H del grafo se calcula como la suma del índice del último nivel del grafo más una unidad.

Como puede verse en las sucesivas figuras, la cota proporcionada por la Ecuación 4.24, ajusta correctamente el valor real de la longitud H . En particular, la diferencia nunca es mayor a dos unidades, incluso cuando en las últimas figuras, que representan grafos con mayor capacidad y por tanto con mayor número de niveles, la longitud H alcanza valores próximos a 30. En muchos casos, además, la cota iguala el valor real de H .

Obsérvese que solo en el caso de la Figura 4.10 en que $u = 5$ y $K = 8$ puede parecer que existe una diferencia de tres unidades entre la cota y el valor de H debido a las oscilaciones de ambas funciones. En este caso, para estudiar con más detalle esa diferencia, hemos representado ambas curvas entre $\alpha = 1$ y $\alpha = 100$. En esta nueva reproducción se observa que las oscilaciones de ambas funciones se superponen de tal manera que cuando H oscila y disminuye una unidad también lo hace la cota, de modo que la diferencia entre ambas nunca supera, como se ha dicho, las dos unidades.

Lo mismo que en la Figura 4.10, la longitud representada en las Figuras 4.7 y 4.8 sufre, como acaba de verse, oscilaciones. Aunque en general la longitud tiene una tendencia a crecer conforme aumenta α , pueden darse casos en que el aumento de ancho de banda producido por el incremento de α en una unidad, sea aprovechado por el grafo para formar el último nodo en un nivel anterior al que se forma con $\alpha - 1$. Por este motivo, un aumento de α de una unidad puede suponer una disminución de una unidad de la longitud H del grafo.

Por otro lado, la oscilación en la cota de la longitud se debe a oscilaciones en el redondeo de las expresiones representadas en la Ecuación 4.24, lo que no deja de ser un reflejo aritmético del proceso de construcción del grafo. Nótese que en la Ecuación 4.24 se hace referencia a la Ecuación 4.23 en la que α aparece en el numerador de dos términos:

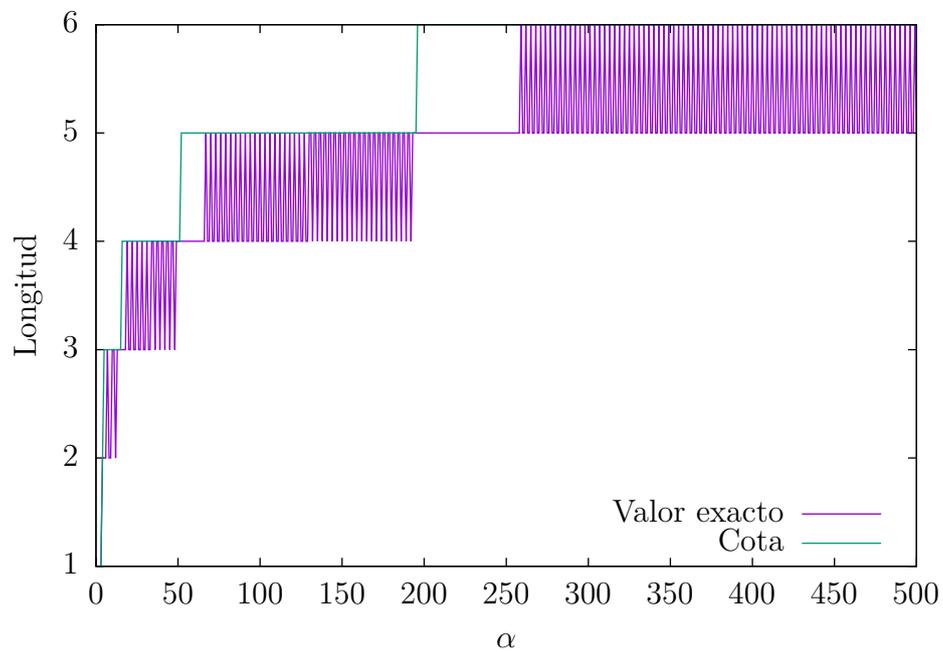


Figura 4.7: Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 1$ y $K = 4$ en función del valor de α .

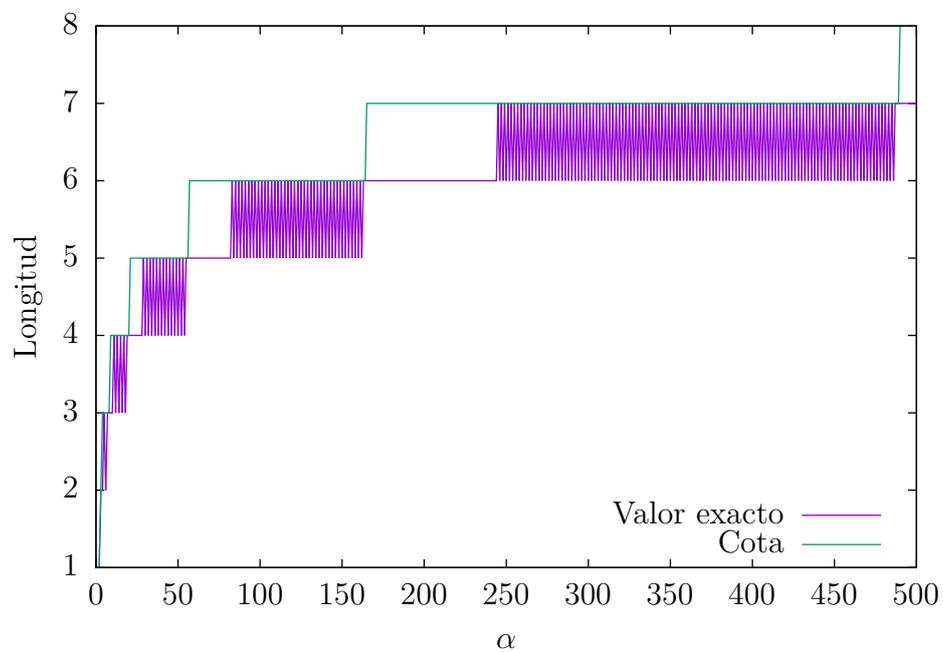


Figura 4.8: Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 1$ y $K = 3$ en función del valor de α .

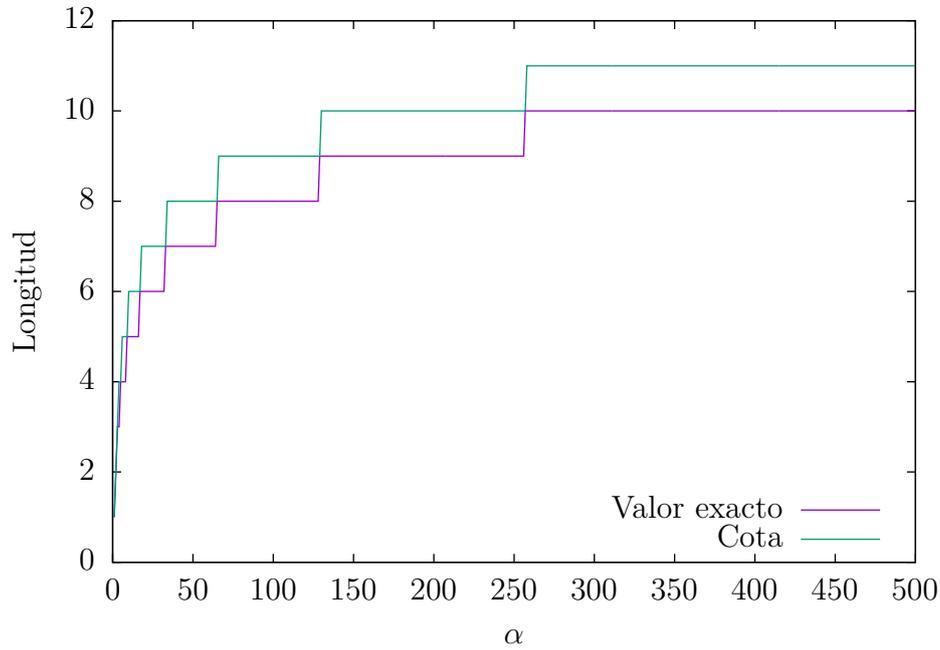


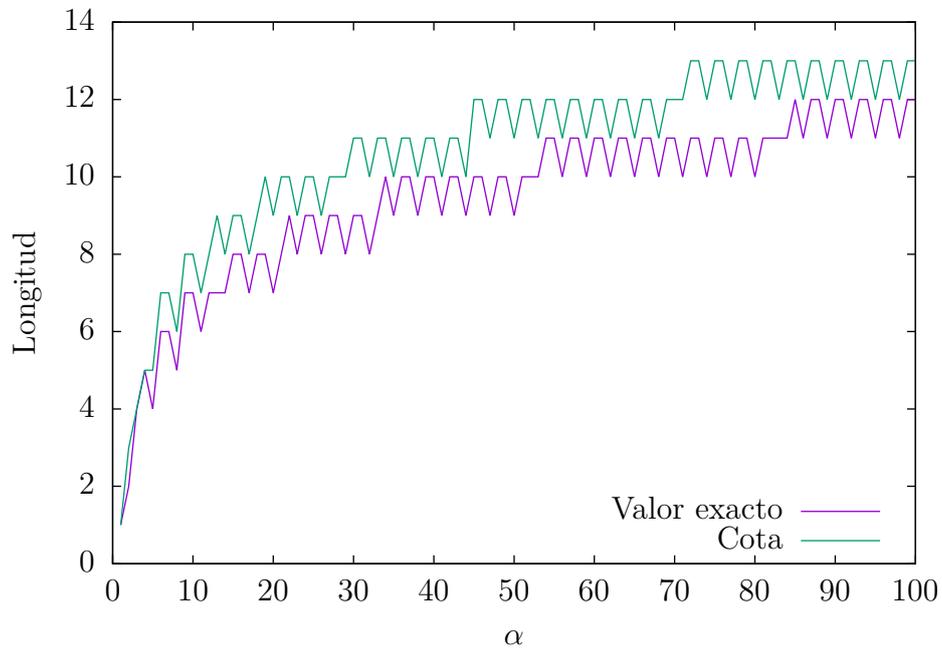
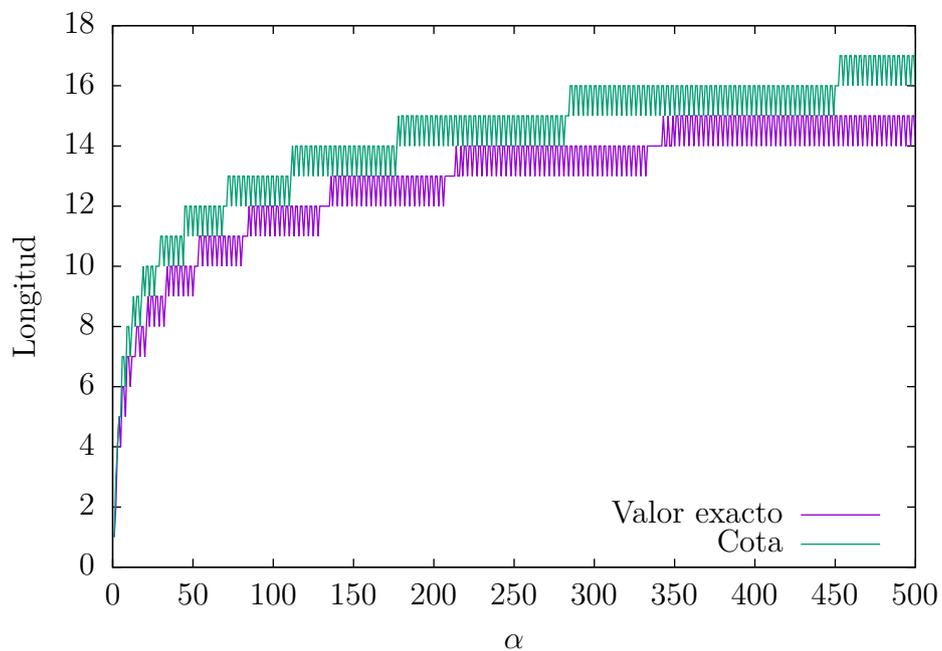
Figura 4.9: Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 1$ y $K = 2$ en función del valor de α .

$$\lfloor n_{t_1} \rfloor = 1 + \left\lfloor \frac{K \cdot (\alpha - 1)}{K - u} \right\rfloor - \left\lceil \frac{\alpha \cdot K - \left(\left\lceil \frac{K}{u} \right\rceil - 1 \right) \cdot u - (K - 1)}{K - u} \right\rceil$$

En ambos casos α aparece multiplicada por el parámetro K y dividida por $K - u$. Además, en el numerador del segundo término, dependiendo de los valores de u y K , puede restarse al producto $\alpha \cdot K$ una cantidad mayor que en el primero. Esto significa que este segundo término puede ser más sensible a los incrementos de α que el primero. Si a esto se añade que el primer término se redondea por abajo y que el segundo término se redondea por arriba y que además el segundo término se resta del primero, puede explicarse la disminución de la cota en una unidad frente a un incremento de una unidad de α .

En efecto, para algunos valores particulares de los tres parámetros, el incremento de α en una unidad puede traducirse en un aumento del redondeo del segundo término sin que se altere el redondeo del primero. De esta forma, como el segundo término se resta al cómputo general de la cota de la longitud, esta se reduciría en una unidad, tal y como puede apreciarse en la representación de la cota de la longitud de la Figura 4.10.

Como se ha dicho, en todas las gráficas se reproduce el crecimiento logarítmico de la longitud del grafo en función de α lo cual se traduce, a su vez, en un crecimiento logarítmico

(a) α de 1 a 100.(b) α de 1 a 500.Figura 4.10: Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 5$ y $K = 8$ en función del valor de α .

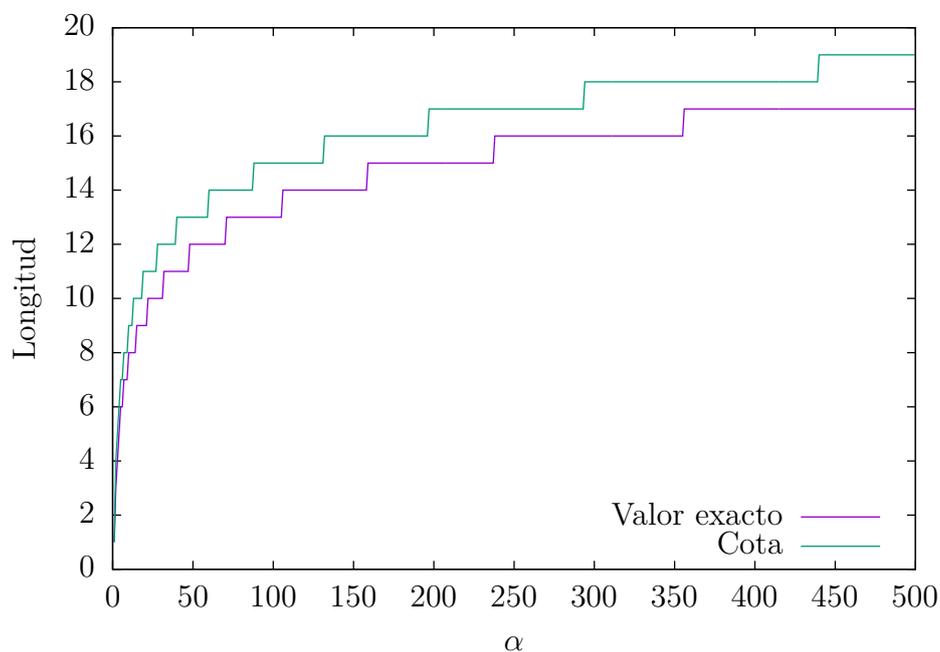


Figura 4.11: Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 2$ y $K = 3$ en función del valor de α .

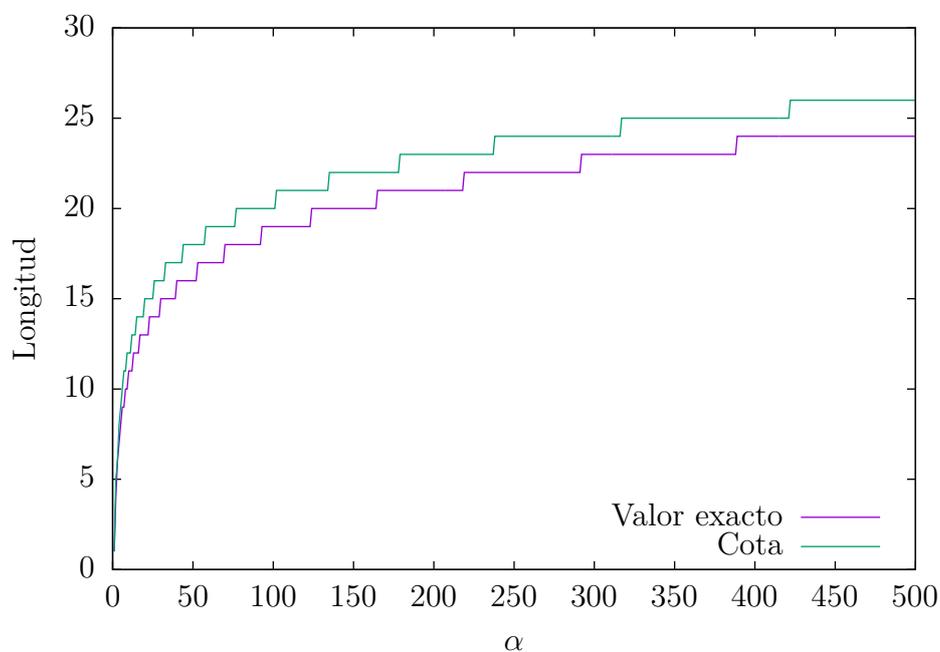


Figura 4.12: Longitud y cota de la longitud del grafo de distribución para $u = 3$ y $K = 4$ en función del valor de α .

del retardo total de distribución $\Delta_0 \leq K \cdot H$. Esta pauta se repite tanto para la cota de la longitud expresada en la Ecuación 4.24 como para el verdadero valor de la longitud, calculado por construcción.

Las gráficas se han ordenado asimismo en función de la capacidad relativa de los nodos, representada por la relación entre u y K . Recuérdese que un nodo dispone de u aristas de salida y que consume K aristas de entrada, de modo que cuanto mayor sea la proporción u/K mayor es la capacidad del grafo. Esto se refleja en un incremento de la longitud, tal y como se observa en la evolución de las gráficas conforme aumenta la relación u/K .

Así, en el primer caso de la Figura 4.7 en que $u = 1$ y $K = 4$ y por tanto $u/K = 0,25$, la longitud obtenida cuando $\alpha = 500$ vale $H = 6$. Por su lado, en el caso de la Figura 4.8 en que $u = 1$ y $K = 3$ y por tanto $u/K = 0,33$ obtenemos $H = 8$ cuando $\alpha = 500$. Para la Figura 4.9 en que $u = 1$ y $K = 2$ y por tanto $u/K = 0,5$ tenemos $H = 11$ y así sucesivamente, como hemos visto. Es decir, conforme aumenta la relación u/K aumenta la capacidad relativa de los nodos y por tanto el orden del grafo. Este incremento se traduce finalmente en un mayor número de niveles y, por tanto, en una mayor longitud, tal y como se refleja en la representación gráfica de H para distintos valores de u y K .

Capítulo 5

Simulación en redes VANET

Las redes VANET (Vehicular Ad Hoc Networks) integran redes *ad hoc* y redes LAN inalámbricas para proveer una red de comunicaciones entre vehículos. En una red VANET, los vehículos disponen de dispositivos empotrados con una gran capacidad de almacenamiento –así como de energía– para la comunicación y el procesamiento de información de vídeo. Recientes modificaciones del estándar IEEE 802.11 permiten integrar comunicaciones de vídeo sobre redes VANET [7, 8] de tal modo que los vehículos pueden enviar vídeo a otros vehículos cercanos. El estándar IEEE 802.11p [9] modifica asimismo el estándar IEEE 802.11 considerando las características y peculiaridades propias de las redes VANET. De este modo, la comunicación entre vehículos en redes VANET puede permitir aplicaciones tales como la distribución de información de tráfico o también transmisiones en tiempo real, mediante *streaming*, de vídeos de emergencia, anuncios y entretenimiento digital.

En una red VANET, la movilidad de los vehículos provoca inestabilidad en los canales inalámbricos IEEE 802.11. Además, el canal de comunicaciones entre vehículos es propenso a interferencias de radiofrecuencia y a diferentes formas de desvanecimiento, que incluyen la propagación multicamino y los desvanecimientos lentos. Como resultado de estos efectos, el canal sufre altas pérdidas tanto en el nivel de bits como en el de paquetes. Además de los errores propios de un canal inalámbrico, debemos considerar otras causas que influyen en la pérdida de paquetes como la congestión de tráfico y los retardos de paquete, que pueden provocar que un paquete correctamente recibido sea descartado por no estar disponible en el instante en que debe ser procesado. Dado que los paquetes recibidos en una transmisión de vídeo guardan una estrecha correlación y dependen secuencialmente unos de otros, la pérdida de un paquete puede tener un impacto en otros paquetes correctamente transmitidos.

En [10] los autores proponen una arquitectura para la transmisión de vídeo sobre redes VANET, pero no consideran ningún flujo real de vídeo para la simulación y sólo muestran resultados del retardo. En [11] los autores discuten dos protocolos de encaminamiento: *Source Based Forwarding* (SBF) y *Receiver Based Forwarding* (RBF) aplicados a redes

VANET. Hay que tener en cuenta que el streaming de vídeo sobre VANET está sometido a los altos errores del canal, especialmente en entornos urbanos. Las elevadas pérdidas de paquetes y el limitado rango de comunicación entre los vehículos provocan frecuentes caídas de enlace e incluso particiones de la red. Dado que nosotros definimos una red superpuesta, dependemos de la conectividad proporcionada por la red subyacente. Con estas consideraciones, asumimos que la estabilidad de la red está garantizada por protocolos de encaminamiento tales como los que se proponen en [12] y [13]. Finalmente, en [14] los autores utilizan una topología basada en mallas sobre VANET con una descomposición espacial de Multiple Description Coding (MDC) como mecanismo de resistencia a errores. En [15], los mismos autores revisan y extienden su anterior propuesta añadiendo además un protocolo de encaminamiento multicamino al que denominan Multipath-Dynamic Source Routing.

Dado que nuestra topología estructurada no incluye redundancia de conexiones es, en teoría, menos robusta que las anteriores propuestas a cambios en la red superpuesta. De todos modos, esta simplicidad la hace más eficiente en términos de señalización: no es necesario intercambiar la disponibilidad de datos entre nodos. Además, podemos crear una topología más robusta aumentando la resistencia a errores mediante un flujo codificado con MDC o, también, definiendo un protocolo de ingreso y de egreso con el objeto de conservar la conectividad cuando falla la conexión de un nodo o este abandona voluntariamente la red.

En nuestro análisis, asumimos que la red es eventualmente estable. Esto significa que ningún nodo ingresa o egresa de la red durante el tiempo de transmisión. En este contexto, definimos la transmisión de vídeo según el modelo P2P descrito en el Capítulo 2, de tal modo que los vehículos son los nodos de la red P2P. Consideramos que todos los nodos, excepto el nodo fuente, consumen un ancho de banda de subida –que es el que, por definición, se usa para retransmitir la información a otros nodos– menor que el ancho de banda del flujo de vídeo. Con esta consideración se persiguen dos objetivos. En primer lugar, se reserva parte de la capacidad de transmisión del nodo para sus propias transmisiones. Y, en segundo término, se pretende reducir la interferencia y los efectos de desvanecimiento y con ello las pérdidas de paquete. Este criterio también puede ser beneficioso en contextos en que ciertos nodos poseen dispositivos con restricciones en términos de capacidad de almacenamiento (*buffering*), ancho de banda e incluso de batería.

5.1. Configuración de la simulación

En el Capítulo 2 calculamos el retardo de transmisión bajo el supuesto de que todos los nodos en el nivel cero reciben cualquier objeto simultáneamente (primero reciben a la vez el primer objeto en una unidad de tiempo, después el segundo objeto durante la siguiente unidad de tiempo y así sucesivamente), que todos los nodos en niveles $l \geq 1$ pueden recibir K objetos simultáneamente, y que la transmisión de un objeto entre dos nodos se retrasa

Cuadro 5.1: Configuración de un nodo en Ns-2

Parámetro	Valor de configuración
Capa de canal	Channel/WirelessChannel
Modelo de propagación	Propagation/Shadowing
Capa física	Phy/WirelessPhyExt
Capa MAC	Mac/802.11Ext
Cola de mensajes	Queue/DropTail
Máx. número de paquetes en cola	50
Capa de enlace	LL
Protocolo de encaminamiento	AODV

exactamente K unidades de tiempo. También se ha supuesto que un objeto se empieza a retransmitir en el preciso instante en que ha sido recibido por completo.

Los dos primeros supuestos tienen sentido si el tamaño de los objetos es grande y la transmisión intercala los paquetes IP en los que cualquier objeto se fragmenta. El tercer supuesto, que desprecia el retardo de propagación, se satisface en el caso probable en que la tasa de transmisión de la red subyacente sea mayor o igual a la tasa de transmisión de la fuente multiplicada por el factor u/K . En cualquier caso, un escenario real resulta en general igual o mejor que el modelo teórico puesto que este es más pesimista y proporciona una cota para el retardo de transmisión total.

5.1.1. Simulación de la transmisión de vídeo

Para la simulación de la transmisión de vídeo P2P según la topología de nuestro modelo en redes VANET, utilizamos el simulador de eventos discretos ns-2 [16]. Ns-2 es un simulador de redes de código abierto, lo cual permite modificar y extender el código fuente original que se distribuye. Proporciona una herramienta de simulación en el nivel de paquete que soporta, entre otras características, una amplia variedad de protocolos de encaminamiento *ad-hoc* y modelos de propagación. También permite simular nodos móviles. La movilidad de estos nodos puede ser especificada directamente en el *script* de simulación o mediante un fichero de trazas de movilidad.

El primer paso para configurar una simulación sobre redes VANET es definir la pila de protocolos de los niveles físico, de enlace y de red. En nuestro caso, estos parámetros de configuración han sido los que se muestran en el Cuadro 5.1. El simulador ns-2 permite además configurar la capa física y MAC, que en nuestro caso hemos dejado en los valores que toman por defecto. La interfaz de red de los nodos se ha configurado como una interfaz IEEE 802.11p con una tasa de transmisión de 3 Mbps.

Como modelo de propagación del canal radio, se ha escogido el denominado modelo

Cuadro 5.2: Valores típicos del exponente de pérdidas de camino, β

Entorno	β
Espacio libre	2
Entorno urbano	Entre 2,7 y 5
Línea de visión	Entre 1,6 y 1,8
Obstruido	Entre 4 y 6

Cuadro 5.3: Valores típicos de la desviación de *shadowing*, σ_{dB} (dB)

Entorno	σ_{dB}
Exteriores	Entre 4 y 12
Oficinas	Entre 7 y 9,6
Fábrica con línea de visión	Entre 3 y 6
Fábrica con obstáculos	6,8

shadowing [17], que consta de dos partes. La primera se conoce como modelo de pérdidas de camino que predice la potencia media recibida a una cierta distancia d , denotada por $\overline{P_r(d)}$ y que utiliza una distancia próxima d_0 como referencia. $\overline{P_r(d)}$ se calcula con relación a $P_r(d_0)$ mediante la expresión:

$$\frac{P_r(d_0)}{\overline{P_r(d)}} = \left(\frac{d}{d_0}\right)^\beta \iff \overline{P_r(d)} = P_r(d_0) \left(\frac{d_0}{d}\right)^\beta \quad (5.1)$$

El parámetro β se denomina exponente de pérdidas de camino y usualmente se determina mediante medidas de campo. Conforme la expresión de la Ecuación 5.1, el parámetro para la propagación en espacio libre tiene un valor de $\beta = 2$. En el Cuadro 5.2 se proporcionan valores típicos del parámetro β . Los valores mayores corresponden a mayores obstrucciones y, por tanto, un decrecimiento más rápido de la potencia media recibida. El valor $P_r(d_0)$ se puede calcular a partir de la ecuación de la potencia en espacio libre a una distancia d del transmisor:

$$P_r(d) = \frac{P_t G_t G_r \lambda^2}{(4\pi)^2 d^2 L}$$

Recuérdese que P_t es la potencia transmitida y que G_t y G_r son las ganancias de antena del transmisor y del receptor, respectivamente. L es el sistema de pérdidas y λ la longitud de onda. En ns-2 es habitual tomar valores de $G_t = G_r = 1$ y $L = 1$ para las simulaciones [18, 19, 20, 21, 22].

Las pérdidas por camino se miden habitualmente en dB. Así, a partir de la Ecuación 5.1

tenemos:

$$\left[\frac{P_r(d)}{P_r(d_0)} \right]_{dB} = -10\beta \log \left(\frac{d}{d_0} \right)$$

La segunda parte del modelo *shadowing* refleja la variación de la potencia recibida a una cierta distancia. Es una variable aleatoria log-normal, esto es, una distribución Gaussiana medida en dB. El modelo general se representa por:

$$\left[\frac{P_r(d)}{P_r(d_0)} \right]_{dB} = -10\beta \log \left(\frac{d}{d_0} \right) + X_{dB} \quad (5.2)$$

X_{dB} es una variable aleatoria Gaussiana de media cero y desviación estándar σ_{dB} . El parámetro σ_{dB} se denomina la desviación de *shadowing* y también se obtiene de modo empírico. El Cuadro 5.3 muestra valores típicos de σ_{dB} . La Ecuación 5.2 también es conocida como el modelo *shadowing* log-normal. Para nuestra simulación hemos tomado un valor de 2,7 para el exponente β de pérdidas por camino y una desviación de *shadowing* igual a 4 dB, lo que equivale a un modelo de exteriores en entorno urbano.

5.1.2. Implementación del protocolo de transmisión

Con el objeto de realizar la simulación se ha creado un nuevo *agente* ns-2. Un nodo ns-2 consta de una pila de protocolos. El nivel más alto de la capa de comunicaciones se denomina *agente*. El agente que hemos desarrollado implementa el protocolo de transmisión según la topología que hemos definido. Una vez que los nodos se han conectado entre sí según el algoritmo de ingreso, el agente se encarga de transmitir y recibir el flujo de vídeo. En el caso en que el nodo asociado al agente sea el nodo fuente, simula la transmisión de una fuente de vídeo a través de un fichero de trazas. El resto de nodos, cada vez que reciben un paquete lo retransmiten a sus hijos según establece el algoritmo de planificación y, además, simulan una descodificación del flujo de vídeo, lo cual permite analizar la calidad del vídeo que reproducirían los nodos.

Para implementar un nuevo protocolo de aplicación en ns-2 hay que definir el tipo de paquete que utiliza la aplicación e implementar el agente. En ns-2 todos los paquetes se tratan como si fuesen un simple vector de bytes. La estructura de paquete que hemos definido consta de cuatro atributos: el tiempo en que fue originalmente transmitido por la fuente (lo que permite calcular más adelante el retardo con el que cada nodo recibe el paquete), el tamaño del paquete, es decir, el número de bytes del objeto (que en nuestro caso se corresponde con el tamaño de un cuadro individual del flujo de vídeo) y, por último, el número de cuadro y su tipo, que permite simular la decodificación. El flujo de vídeo se simula mediante trazas de vídeo MPEG-4, que caracteriza los cuadros codificados, entre otros, por un parámetro llamado *tipo*.

Cuadro 5.4: Atributos del agente

Atributo	Significado
<code>video-trace</code>	Fichero de trazas de vídeo
<code>alfa</code>	Número de hijos del nodo fuente
<code>K</code>	Número de conexiones de descarga
<code>u</code>	Número de conexiones de subida
<code>root</code>	1 para el nodo fuente, 0 en otro caso
<code>received</code>	Número de objetos recibidos por un nodo
<code>sent</code>	Número de objetos enviados por el nodo fuente
<code>delay</code>	Retardo medio de los paquetes recibidos por el nodo
<code>level</code>	Nivel del nodo

Cuadro 5.5: Atributos del agente

Atributo	Significado
<code>addchild id flowid</code>	Añade como hijo al nodo <code>id</code> para enviarle el flujo <code>flowid</code>
<code>trace-recv</code>	Traza el número de objetos recibidos por flujo
<code>trace-sent</code>	Traza el número de objetos enviados por flujo
<code>trace-delay</code>	Traza el retardo promedio por flujo
<code>start</code>	Sobre el nodo fuente inicia la transmisión del flujo

El código fuente del agente se implementa en C++ y hereda de una clase base en ns-2 denominada `Agent`. La clase que implementa un agente ns-2 define típicamente una serie de atributos cuyo valor puede escribirse o leerse desde el *script* de simulación. La clase, además, sobrescribe una función `command` que permite definir comandos accesibles desde el *script* de simulación. Los atributos que hemos definido para el agente implementado se muestran en el Cuadro 5.4 y los comandos en el Cuadro 5.5.

Al invocar el comando `start` en el *script* de simulación sobre el nodo fuente, el agente lee el primer objeto del fichero de trazas, crea el paquete simulado dando el valor correspondiente a cada uno de los atributos y lo envía a sus α hijos. Después planifica la transmisión del siguiente objeto según el valor de los cuadros por segundo que se especifica en el fichero de trazas. El resto de nodos reciben los paquetes e incrementan el valor acumulado del retardo –tanto el global como el de cada flujo, que son promediados al final de la simulación–, reenvían el paquete a sus hijos, según el algoritmo de planificación simple descrito en la Sección 2.3, y consignan en un fichero si el cuadro de vídeo ha podido ser descodificado o no.

Cuadro 5.6: Configuración del modelo espacial en VanetMobiSim

Parámetros globales	
Tiempo de simulación	300 s
Dimensiones del terreno	1000 x 1000 m^2
Tipo de grafo	<i>Space graph</i> (<i>Centro urbano</i>)
Número de <i>clusters</i>	1
Densidad de intersecciones	$2 \cdot 10^{-4}$
Máx. número de semáforos	10
Intervalo entre cambio de señales en semáforos	10000 ms
Número de carriles	2
Número de vehículos	Orden del grafo

5.1.3. Simulación de la movilidad de los nodos

En la segunda parte de una simulación VANET se debe escoger un simulador que proporcione un modelo de movilidad de los nodos. El simulador elegido ha sido la herramienta VanetMobiSim [23, 24]. Este simulador incluye diferentes opciones para especificar las características de las calles o carreteras (características de macromovilidad) y el comportamiento de movilidad de los nodos (características de micromovilidad) mediante la configuración de un fichero XML. Además, la salida de esta herramienta puede configurarse para devolver un formato ns-2. La combinación de ns-2 y VanetMobiSim es la solución elegida en la mayoría de simulaciones del proyecto europeo CARLINK, cuyo objetivo principal es el desarrollo de plataformas inalámbricas inteligentes entre vehículos [25].

Para simular la movilidad de los nodos se ha configurado el modelo espacial con los parámetros que se muestran en el Cuadro 5.6. El tipo de grafo escogido para la simulación del espacio por el que se mueven los nodos es el denominado *Space Graph*. Este modelo crea un grafo aleatorio mediante una teselación de Voronoi aplicada a un conjunto de puntos (obstáculos) aleatoriamente distribuidos. Dentro de este modelo se pueden definir áreas (los denominados *clusters*) con diferentes densidades de obstáculos, lo que conforma un grafo no homogéneo. En nuestro caso, hemos definido un único *cluster* configurado, tal y como se indica en la documentación de la herramienta, para un centro urbano. En este escenario se ha tomado un valor de densidad de intersecciones (obstáculos) de $2 \cdot 10^{-4}$ obstáculos/ m^2 , lo que significa que hay, en promedio, dos intersecciones en cada cuadrado de 100 metros de lado, es decir, de $10000 m^2$ de superficie. En las calles de un *cluster* la herramienta fija por defecto una velocidad máxima de 50 km/h, valor que no hemos modificado. La herramienta permite modelar semáforos en las intersecciones pudiendo especificar, además, el tiempo que tarda en cambiar la señal.

La simulación de la movilidad de los nodos está parametrizada conforme los valores del Cuadro 5.7. La simulación se realiza utilizando el *Intelligent Driver Model with Lane*

Cuadro 5.7: Configuración de la movilidad en VanetMobiSim

IDM-LC model	
Longitud del vehículo	5 m
Velocidad mínima	3,2 m/s
Velocidad máxima	13,5 m/s
Aceleración máxima	0,6 m/s ²
Deceleración normal	0,5 m/s ²
Distancia entre coches en atasco	2 m
Tiempo de adelantamiento seguro	1,5 s
Desaceleración segura	4 m/s ²
Aceleración umbral para el cambio de carril	0,2 m/s ²

Changing (IDM-LC). Este modelo regula la velocidad de los vehículos teniendo en cuenta los movimientos de vehículos vecinos. De este modo, si un coche frena, los que van detrás también. Los vehículos reducen su velocidad al llegar a las intersecciones y obedecen a los semáforos si están definidos en la simulación. Si las calles tienen múltiples carriles, los nodos realizan cambios y adelantamientos. Todos los valores que se muestran en el Cuadro 5.7 reflejan los valores por defecto configurados para este modelo en VanetMobiSim.

5.1.4. Simulación del flujo de vídeo

Para simular el flujo de vídeo originado en la fuente y distribuido a todos los nodos a través del grafo de distribución, hemos utilizado unas trazas de vídeo MPEG-4 [26] publicadas por el grupo de investigación *Telecommunication Networks* (TKN) de la Universidad Politécnica de Berlín.

MPEG-4 proporciona una codificación eficiente de vídeo que cubre un alto rango de tasas de bit, desde tasas muy bajas aptas para la transmisión en redes móviles inalámbricas hasta tasas muy altas para sistemas de alta definición como *High Definition Television* (HDTV). Además, el estándar MPEG-4 posee mecanismos de resistencia y compensación de errores que lo convierten en un codec muy apropiado para entornos donde se producen errores frecuentes en la transmisión.

La codificación MPEG-4 sigue una estrategia basada en objetos en la que cada escena se compone de Objetos de Vídeo (*Video Objects*, VOs) que se codifican individualmente (por ejemplo, una imagen se divide en dos objetos, un presentador de televisión y el fondo). Cada uno de esos VO puede tener varias capas de escalabilidad, es decir, una capa base y un conjunto de capas de mejora que forman las Capas de Objetos de Vídeo (*Video Objects Layers*, VOLs). A su vez, cada VOL consta de una secuencia temporal de instantáneas ordenadas denominadas Planos de Objetos de Vídeo (*Video Object Planes*, VOPs). El

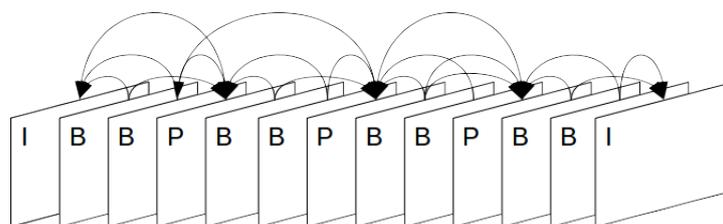


Figura 5.1: Patrón de GOP del flujo de vídeo simulado.

codificador procesa la forma, el movimiento y las texturas de cada uno de los objetos que componen el VO.

La información de forma se codifica enmarcando cada VO (es decir, cada objeto) con un rectángulo que se divide posteriormente en los denominados Macrobloques (MBs). Cada MB se clasifica según su situación respecto a un objeto como interno, externo o en el borde. Los MB que están en el borde se procesan como la forma del objeto. La codificación de las texturas, por otro lado, afecta a todos los MB del VOP, mientras que el movimiento se codifica poniendo en relación MBs de VOPs consecutivos.

Los valores absolutos de los VOP *Intracoded* (I) se codifican mediante la Transformada Discreta Coseno. El VOP I se corresponde, de forma simplificada, con la codificación de una imagen estática, que sirve de referencia para la formación de las imágenes sucesivas en movimiento. Los MB de los VOP *forward Predicted* (P) se predicen utilizando vectores de movimiento a partir del MB más cercano en el VOP I o P precedente. De este modo, los VOPs P codifican el movimiento en relación a los VOPs I o P inmediatamente precedentes. En los VOPs *Bi-direccionalmente predicted* (B) cada MB se predice a partir del VOP I o P precedente y del VOP P o I siguiente. En este caso, por tanto, el movimiento se codifica en relación tanto a los VOPs anteriores como a los posteriores. La forma de intercalar los VOP I, P y B se denomina Grupo de Imágenes (*Group of Pictures*, GOP).

Las trazas de vídeo disponibles en [26] tienen un tamaño de 176x144 píxeles con una profundidad de 8 bits por píxel. Se establece un número de VO igual a 1, es decir, la escena completa constituye el VO. EL VO se codifica en una única VOL. La tasa de cuadros del VOL, es decir, la tasa a la que se generan los VOPs, es de 25 cuadros por segundo. El patrón del GOP se establece a IBBPBBPBBPBB. En la Figura 5.1 se muestran las dependencias de decodificación de los VOPs según este patrón. Obsérvese que la pérdida de un VOP I significa que ni el resto de VOPs del GOP ni los dos VOPs B del GOP precedente se pueden decodificar. Asimismo, la pérdida de un VOP P impide decodificar tanto cada uno de los VOPs P o B siguientes como los dos VOP B precedentes dentro de su mismo GOP.

Los autores codifican cada secuencia de vídeo que proporcionan según tres perfiles: baja, media y alta calidad. Para las simulaciones hemos escogido el perfil de alta calidad. Asimismo, hemos utilizado las trazas correspondientes a la película *Star Wars* cuyas estadísticas se muestran en el Cuadro 5.8.

Cuadro 5.8: Estadísticas del tamaño de cuadro del flujo de vídeo de la simulación.

Tamaño de cuadro		
Media \hat{X} [kbyte]	CoV S_X/\hat{X}	Pico/Media $X_{\text{máx}}/\hat{X}$
1,4	0,66	6,81

Cuadro 5.9: Estadísticas de la tasa de bit del flujo de vídeo de la simulación.

Tasa de bit	
Media \hat{X}/t [Mbps]	Pico $X_{\text{máx}}/t$ [Mbps]
0,28	1,9

5.2. Resultados de la simulación

En esta sección presentamos los resultados que hemos obtenido en las diversas simulaciones realizadas con el objeto de analizar el comportamiento de la distribución de un flujo de vídeo en una red VANET. El proceso de simulación procede de la siguiente manera. En primer lugar, se realiza una simulación del movimiento de los nodos con VanetMobiSim para un número de nodos igual al orden del grafo de distribución considerado en cada caso. La salida de esta simulación se incluye dentro del *script* ns-2 que realiza propiamente la simulación de la transmisión. Cada uno de los resultados que se presentan son el promedio de 50 simulaciones, cada una de ellas sobre medidas del modelo de movimiento distintas. La duración de la simulación es de cinco minutos. Para conseguir que la movilidad de los nodos haya alcanzado el régimen permanente la transmisión de vídeo comienza a los 30 segundos, por lo que la transmisión de vídeo tiene una duración de 470 s.

Dado que la interfaz IEEE 802.11p del simulador ns-2 proporciona una velocidad nominal de transmisión de 3 Mbps y que la tasa de bit promedio del vídeo es de 0,28 Mbit/s, el número máximo de hijos a los que puede servir el nodo fuente es de 10. En esta sección analizamos el comportamiento del sistema a través de la evaluación de diferentes grafos de distribución. Como objeto seleccionamos cada uno de los cuadros individuales que componen el flujo de vídeo. Dado que, como se indica en el Cuadro 5.8, el tamaño medio de un cuadro es de 1,4 kbytes, resulta un tiempo de transmisión de 3,73 ms si se considera la

Cuadro 5.10: Orden y longitud de los grafos de la simulación.

	Orden	Longitud
$G_{10,2,1}$	20	5
$G_{10,3,1}$	15	3
$G_{10,4,1}$	14	3
$G_{10,3,2}$	29	8
$G_{10,4,3}$	38	11

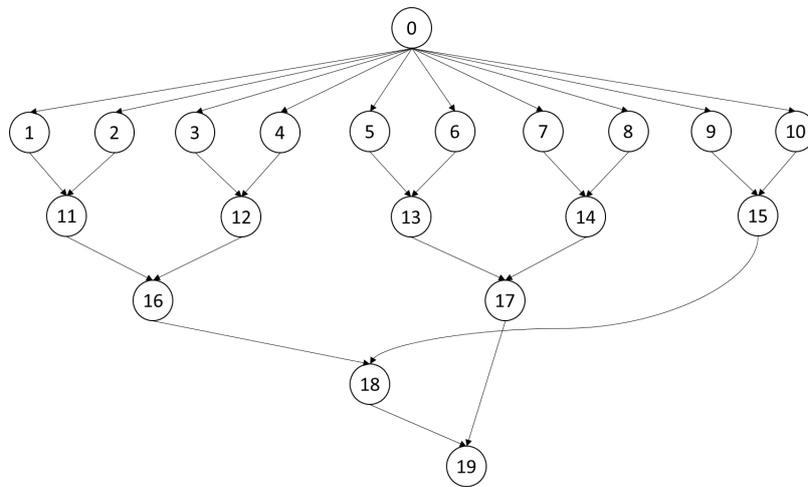


Figura 5.2: Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 2$, $u = 1$.

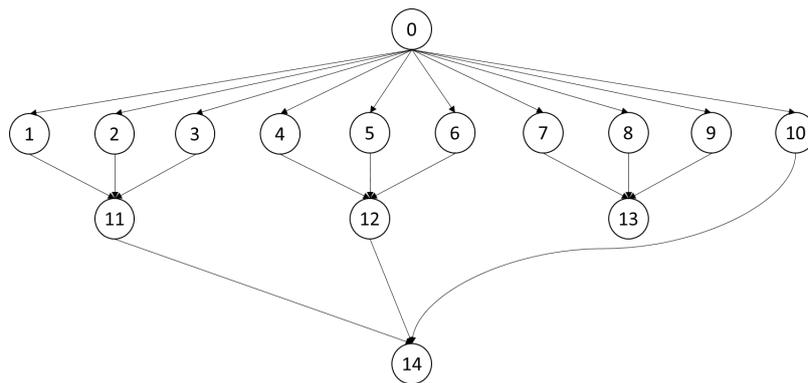


Figura 5.3: Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 3$, $u = 1$.

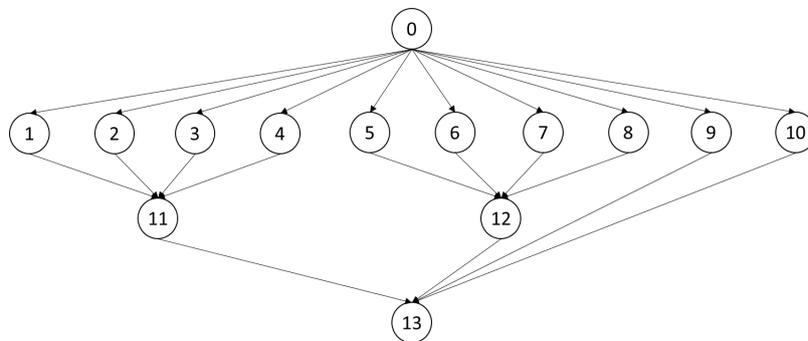


Figura 5.4: Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 4$, $u = 1$.

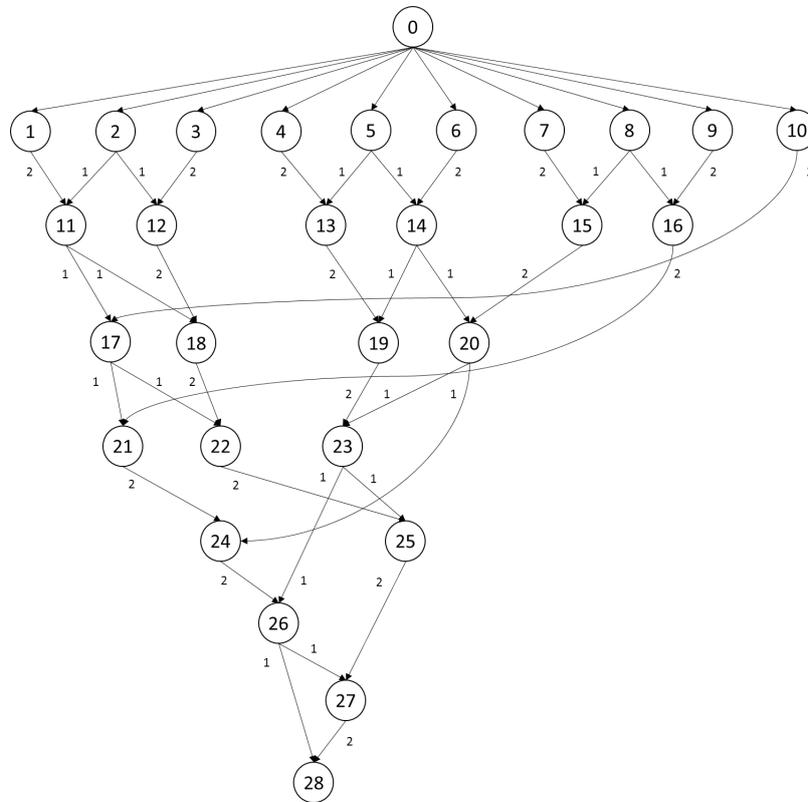


Figura 5.5: Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 3$, $u = 2$.

Cuadro 5.11: Nodos por nivel para $\alpha = 10$, $K = 4$, $u = 3$

Nivel	Número de nodos	Nodos en este nivel
0	10	[1 ... 10]
1	7	[11 ... 17]
2	5	[18 ... 22]
3	4	[23 ... 26]
4	3	[27 ... 29]
5	2	[30, 31]
6	2	[32, 33]
7	1	34
8	1	35
9	1	36
10	1	37

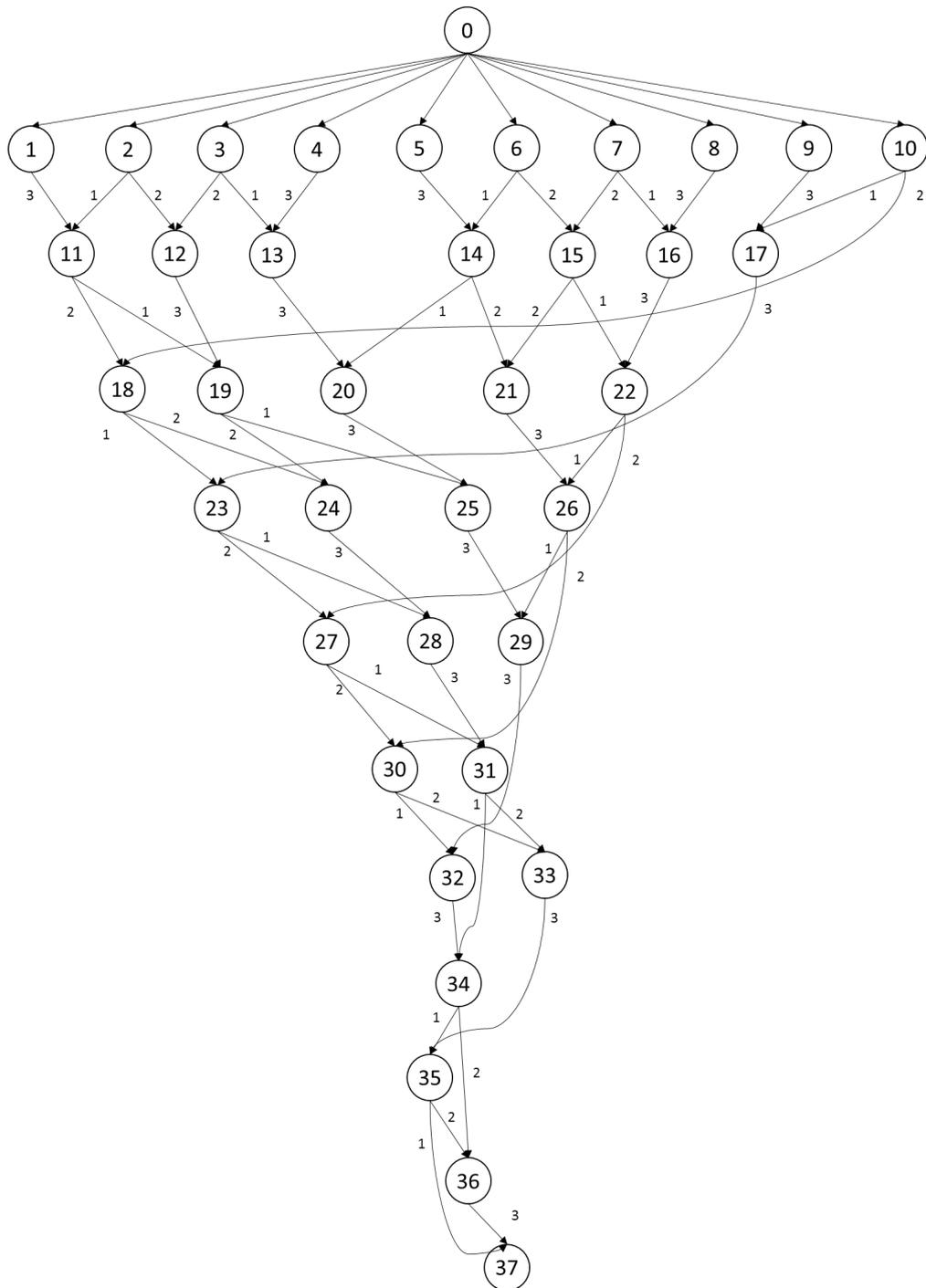


Figura 5.6: Grafo de distribución para $\alpha = 10$, $K = 4$, $u = 3$.

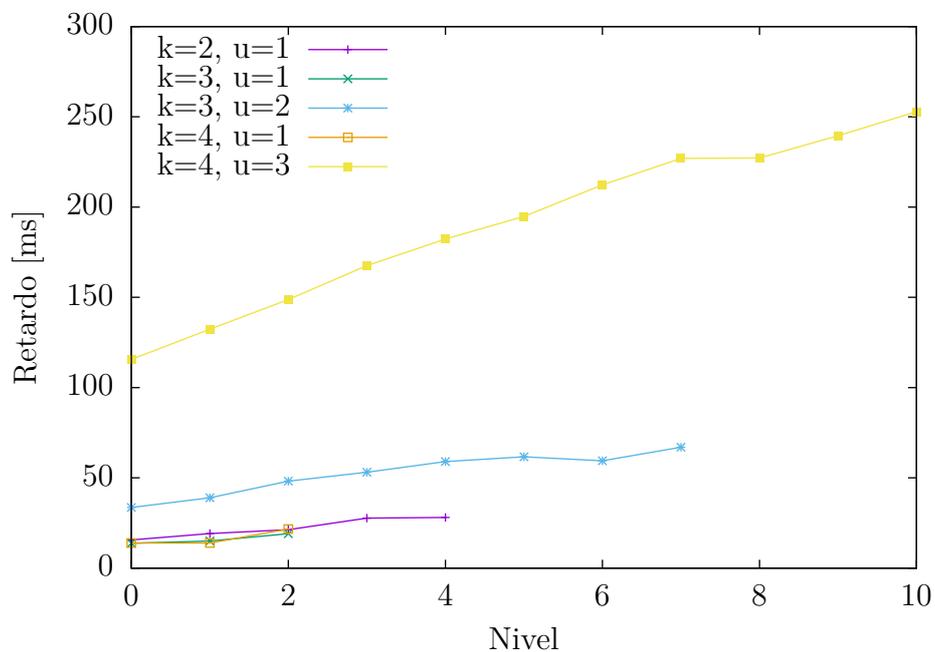


Figura 5.7: Retardo de distribución por nivel para $\alpha = 10$ y diferentes valores de K y u .

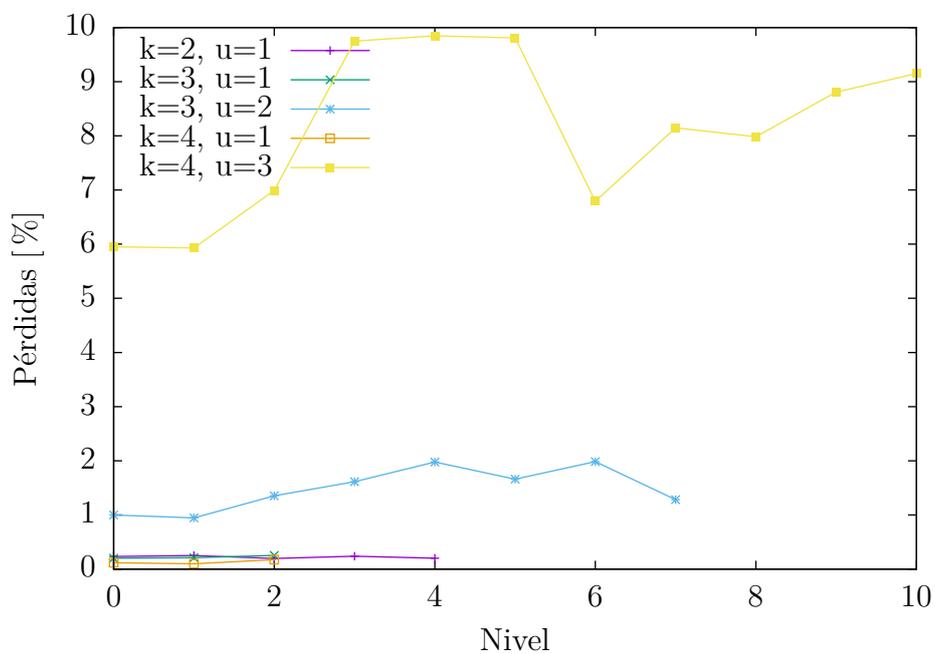


Figura 5.8: Pérdidas de paquetes para $\alpha = 10$ y diferentes valores de K y u .

tasa de transmisión máxima de los nodos. Si se desprecian los tiempos de propagación y de procesado en los nodos intermedios de la red VANET subyacente, ese valor de 3,73 ms equivale al tiempo de transmisión por salto en la red superpuesta. La política de retransmisión es simple: cuando un nodo recibe un objeto lo retransmite inmediatamente al hijo al que tiene asignado el envío. La simulación se ha realizado sobre los grafos $G_{10,2,1}$, $G_{10,3,1}$, $G_{10,4,1}$, $G_{10,3,2}$ y $G_{10,4,3}$ representados en las Figuras 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 y 5.6.

La elección del objeto como una trama individual del flujo, es decir, como una unidad de longitud reducida, pretende mantener el canal desocupado el máximo tiempo posible de forma que quede libre para otras transmisiones. Además, los protocolos inalámbricos de acceso al medio suelen utilizar un mecanismo de ventana de *backoff* de tal modo que un nodo que desea realizar la transmisión de un paquete primero escucha el medio y si este no está libre escoge un tiempo de *backoff* aleatorio del intervalo $[0, CW + 1]$, donde el valor inicial de CW es igual a un valor mínimo CW_{\min} . Recuérdese que el tiempo de *backoff* determina el intervalo de espera hasta que el nodo realiza un nuevo intento de transmisión. El tamaño del intervalo crece si el siguiente intento de transmisión falla y así hasta que CW toma un valor máximo CW_{\max} .

Una de las principales ventajas de nuestro modelo es que la participación de los nodos permite aumentar la capacidad de la red, medida aquí como el número de nodos a los que se puede enviar el flujo, en comparación con el modelo clásico cliente-servidor. Así, para los valores de $\alpha = 10$ y $\{K, u\} = \{2, 1\}$ el grafo de distribución $G_{10,2,1}$ tiene un orden igual a $|G| = 20$, lo que significa que el número de nodos que pueden recibir el flujo con calidad de servicio es 19 –todos menos la fuente, que no se considera– superior a los 10 nodos que pueden recibirlo según el modelo cliente-servidor. Además, nuestro modelo es capaz de transmitir el flujo de vídeo con unos requerimientos de ancho de banda menores al del flujo, lo que significa que ocupa el canal durante menos tiempo que una transmisión según el modelo cliente-servidor, en nuestro caso menor a 3,73 ms cada 40 ms.

En efecto, en una conexión cliente-servidor enviaríamos por cada enlace un objeto cada 40 ms y cada objeto se transmite en 3,73 ms, de forma que ocuparíamos el enlace 3,73 ms cada 40 ms. Esto da una tasa de ocupación de $\eta = 3,73/40 = 9,32\%$. En contraste, en nuestro modelo solo se envían u de cada K objetos por cada enlace, es decir, solo ocupamos el enlace $u \cdot 3,73$ ms cada $K \cdot 40$ ms, una tasa menor puesto que resulta $\eta = (u \cdot 3,73)/(K \cdot 40)$ y por definición $u < K$. En particular, para el grafo $G_{10,2,1}$ en que $\{K, u\} = \{2, 1\}$ se transmite un objeto cada 80 ms, lo que supone una tasa de ocupación $\eta = 3,73/80 = 4,66\%$, la mitad que en el modelo cliente-servidor. Este ahorro disminuye tanto los efectos de interferencia como los de colisión sin afectar a otros parámetros de calidad.

En la Figura 5.7 se presenta el retardo de distribución medio en cada nivel para cada uno de los grafos de distribución estudiados. Por otro lado, la Figura 5.8 presenta el porcentaje medio de paquetes perdidos en cada nivel. Recuérdese que un valor de $\alpha = 10$ significa que el nodo fuente tiene ancho de banda suficiente para enviar el flujo de vídeo simultáneamente a diez nodos en tiempo real. Tal y como se muestra en las figuras, para $\{K, u\} \in \{\{2, 1\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{4, 1\}\}$ tanto el retardo como la tasa de pérdida de paquete-

tes garantizan una razonable calidad de servicio si atendemos al porcentaje de pérdidas de paquetes, esto es, si obviamos que la pérdida de un objeto puede impedir la correcta recepción de otros objetos del flujo. Para el par $\{K, u\} = \{4, 3\}$, es decir, para la red de distribución con el máximo ancho de banda disponible y, por lo tanto, el mayor número de nodos conectados, se obtienen peores resultados.

Tal y como se explica en [27], el rendimiento de las redes VANET decrece con el número de vehículos. Esto se debe a que la probabilidad de colisión aumenta con el número de nodos transmisores y a que en ese caso los vehículos pasan más tiempo esperando a retransmitir (*back off*). Por este motivo, como se observa en la Figura 5.8, la tasa de pérdidas aumenta conforme aumenta la relación u/K , es decir, conforme aumenta el ancho de banda de los nodos y, por tanto, el orden del grafo. En el caso en que esta relación es máxima, es decir, cuando $\{K, u\} = \{4, 3\}$, se produce la máxima degradación del servicio.

A priori, la primera conclusión que podemos destacar es que el número máximo de nodos que pueden recibir el flujo de vídeo con una buena calidad de servicio según nuestro modelo para $\alpha = 10$ viene determinado por el grafo $G_{10,3,2}$, es decir, por el grafo de mayor orden entre los que tienen tasas de pérdidas bajas. Este número máximo de nodos es igual a 28 nodos, esto es, el orden del grafo de distribución para $\{K, u\} = \{3, 2\}$ menos uno, ya que no tenemos en cuenta el nodo fuente. Este resultado prácticamente triplica el número de nodos que pueden recibir el mensaje según el modelo clásico de cliente-servidor, restringido a la capacidad del nodo fuente para servir directamente a diez nodos. Más adelante, con todo, se demuestra que en el contexto de una red VANET el grafo $G_{10,2,1}$ proporciona una topología más robusta en términos de calidad de transmisión.

Por otro lado, es posible validar la simulación mediante el estudio teórico de la distribución del flujo en el grafo de distribución $G_{10,2,1}$ representado en la Figura 5.9. En esta figura hemos subrayado en color rojo la distribución –desde el nodo fuente hasta el último nodo del grafo– del primer objeto O_0 del segmento de $K = 2$ objetos en que dividimos el flujo, y en color azul la del segundo objeto O_1 , según el algoritmo de planificación simple de la Sección 2.3 (a la transmisión del primer objeto O_0 se le denomina flujo f_0 y a la del segundo objeto O_1 la llamamos flujo f_1). Consideramos este caso puesto que según la Figura 5.8, de los grafos que presentan un porcentaje de pérdidas menor al 3%, es el que dispone de un mayor número de nodos, es decir, el que es capaz de dar servicio a un mayor número de nodos con un porcentaje de pérdidas menor al 3%. Con este porcentaje tan pequeño se puede considerar que las pérdidas se deben a propagación y que los nodos sólo necesitan un único envío de la trama del nivel de acceso al medio para enviar el paquete.

Los retardos de distribución se denotan por t_0 para el primer objeto O_0 (que pertenece al flujo f_0) y por t_1 para el segundo objeto O_1 (que pertenece al flujo f_1). Nótese que en ambos casos medimos el retardo respecto al instante inicial en que empieza a transmitirse cada objeto, es decir, t_1 mide el tiempo en que el objeto O_1 llega al último nodo del grafo contabilizado desde el inicio de la transmisión del objeto O_1 , no del objeto O_0 . Con una velocidad de transmisión de 3 Mbps y un tamaño medio de objeto de 1,4 kbytes, el tiempo medio para la transmisión de un objeto es de 3,73 ms. Habiendo definido un objeto tan

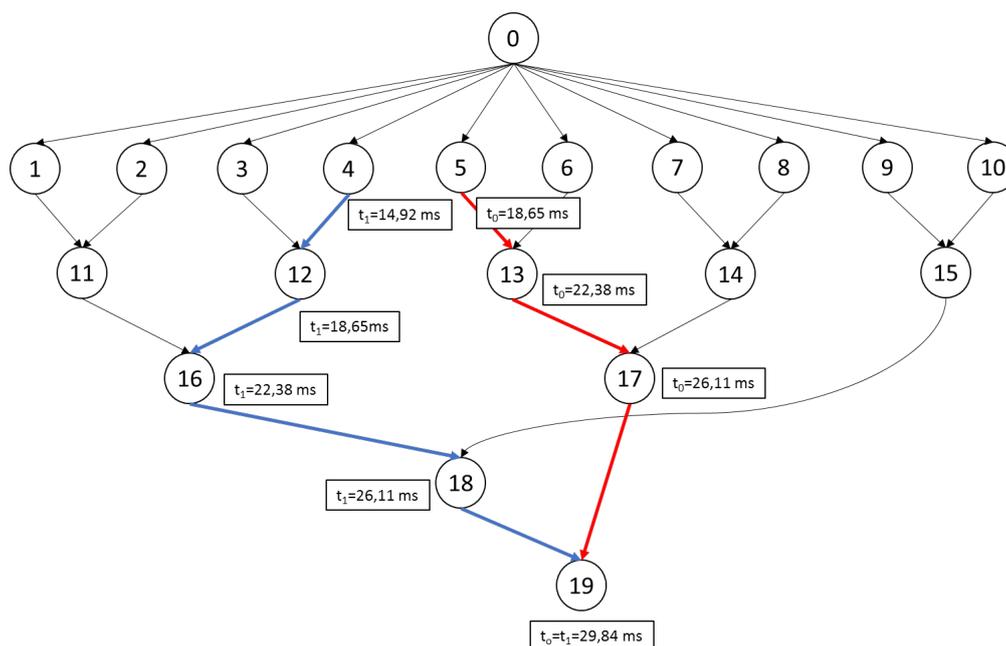


Figura 5.9: Retardo teórico en el grafo $G_{10,2,1}$ considerando un tiempo de transmisión de 3,73 ms. Las aristas rojas representan el flujo f_0 y las aristas azules el flujo f_1 .

pequeño podemos considerar que se necesita un único paquete IP para la transmisión del mismo.

Como se ha dicho, el nodo 0 transmite un objeto a sus 10 hijos. Despreciando tiempos de propagación y procesado y asumiendo que el orden de transmisión es de menor a mayor identificador (es decir, la fuente transmite un objeto en primer lugar al nodo 1, en segundo lugar al nodo 2 y así sucesivamente hasta el último nodo del nivel 0), el nodo i del nivel 0 recibe el objeto con un retardo de $t = i \cdot 3,73$ ms (medido, como se ha dicho, en relación al instante en que la fuente empieza a transmitir el objeto y válido, por tanto, para todos los objetos de la transmisión).

Según la política de transmisión descrita por nuestro modelo, un nodo retransmite un objeto en cuanto lo ha recibido. Como en cada enlace entre nodos consecutivos se produce un retardo de 3,73 ms, cada salto de nivel representa un retardo adicional de 3,73 ms para cada objeto, lo que nos da los tiempos de llegada que se muestran en la Figura 5.9. Nótese que, con respecto al modelo teórico de los anteriores capítulos, la transmisión de los dos flujos representada en la Figura 5.9 dibuja exactamente la misma topología pero unos retardos distintos. Esto es así puesto que ahora estos retardos no vienen determinados por el ancho de banda teórico (que vale en cada enlace $1/K$) sino por el ancho de banda real del enlace.

Obsérvese que tanto el objeto O_0 como el objeto O_1 llegan al nodo 19, que es el último nodo del grafo y por tanto el que determina el retardo final, con un mismo tiempo de

distribución de $t_0 = t_1 = 29,84$ ms. Esto es así puesto que el objeto O_1 llega al nodo 19 a través del nodo 4 del nivel 0, mientras que el objeto O_0 llega al nodo 19 a través del nodo 5 del nivel 0, según determina el algoritmo de planificación simple de la Sección 2.3. Esto significa que el objeto O_1 se transmite desde el nivel 0 hacia el último nodo de la red con 3,73 ms de antelación con respecto al objeto O_0 , puesto que se retransmite desde el nodo 4, que recibe cada objeto 3,73 ms antes que el nodo 5. Por otro lado, en la Figura 5.9 se observa que el árbol de distribución del flujo f_1 tiene longitud 5 mientras que el árbol de distribución del flujo f_0 tiene longitud 4 gracias al salto de dos niveles que se produce en el enlace que une el nodo 17 con el nodo 19. De esta forma, este doble salto supone un ahorro de 3,73 ms en la transmisión del objeto O_0 que compensan los 3,73 ms de retardo de ese objeto en el nivel 0 (siempre con respecto al recorrido del objeto O_1), de modo que finalmente obtenemos $t_0 = t_1 = 29,84$ ms. Este valor es coherente con el retardo de distribución de 28,88 ms proporcionado por la simulación.

Como hemos dicho, los anteriores retardos solo miden el tiempo transcurrido entre el instante en que un objeto empieza a transmitirse y el instante en que ha sido recibido en toda la red, es decir, el instante en que se recibe en el paquete más alejado de la fuente. A partir de estos retardos, puede calcularse el esquema general de transmisión. En nuestro caso tenemos un flujo de 25 cuadros/s lo que se traduce en una transmisión de 25 objetos/s dado que cada objeto representa finalmente un cuadro. De este modo, enviamos un objeto cada 40 ms. Si enviamos el objeto O_0 en $t = 0$ llega al último nodo en el instante $t = t_0 = 29,84$ ms. A continuación, 40 ms más tarde, se empieza la transmisión del objeto O_1 , que se recibe en el último nodo en el instante $t = 40 + t_1 = 69,84$ ms. El siguiente objeto O_2 , que como $K = 2$ pertenece al flujo f_0 y recorre por tanto el mismo camino que el objeto O_0 , se empieza a transmitir en $t = 80$ ms y alcanza el último nodo en $t = 80 + t_0 = 109,84$ y así sucesivamente.

Recuérdese además que, puesto que en este caso tenemos $K = 2$ y $u = 1$, en cada una de las aristas solo se transmite uno de los dos flujos, es decir, el de los objetos pares o el de los objetos impares, de tal forma que en cada caso no ocupamos el canal 3,73 ms cada 40 ms (como sucedería en un esquema clásico cliente-servidor) sino 3,73 ms cada 80 ms, dado que de cada dos objetos solo mandamos uno por cada enlace, es decir, un objeto cada 80 ms. De este modo disminuye, como se ha dicho, la ocupación de los enlaces y consecuentemente la degradación del servicio debido a interferencias o colisiones entre distintas transmisiones.

A continuación consideramos el porcentaje de pérdida de paquetes para los parámetros $\{K, u\} \in \{\{3, 2\}, \{4, 3\}\}$, que son los parámetros para los que aparecen valores altos de congestión, tal y como se muestra en la Figura 5.8. En estos casos las pérdidas se producen en la cola de transmisión del nodo fuente, que es el nodo con el máximo número de nodos hijo. Las Figuras 5.11a y 5.11b muestran la tasa de pérdida de paquetes para $\{K, u\} = \{3, 2\}$ y $\{K, u\} = \{4, 3\}$ respectivamente, en función del identificador del nodo. Este identificador se asigna correlativamente, tal y como se explicó en el Capítulo 2. De este modo, el nodo fuente se le asigna el identificador 0, al primer nodo del nivel 0 se le asigna el identificador 1 y así sucesivamente. En el Cuadro 5.11 se indica el número de nodos por

nivel así como los identificadores de los nodos que pertenecen a cada uno de los niveles para $\{K, u\} = \{4, 3\}$. Ahora analizamos sólo la transmisión del flujo para $\{K, u\} = \{4, 3\}$ desde el nodo 10 en adelante, dado que el nodo 10 es el último nodo del nivel 0 y, por tanto, el más afectado por la congestión de entre todos los nodos que reciben el flujo de vídeo directamente del nodo fuente. El análisis es equivalente para el resto de nodos y también para el grafo de distribución con $\{K, u\} = \{3, 2\}$.

Para $K = 4$ el flujo inicial se divide en cuatro flujos que denotamos por f_0, f_1, f_2 y f_3 . Identificamos cualquier objeto del flujo por O_j donde $j \geq 0$. Así, el flujo f_i está compuesto por los objetos O_j tales que $j \bmod K = i$. En nuestro caso, para $K = 4$ el flujo f_0 está compuesto por los objetos O_0, O_4, O_8, O_{12} y así sucesivamente. El flujo f_1 está compuesto por los objetos O_1, O_5, O_9, O_{13} , etcétera. Si un nodo pertenece al nivel 0 (en nuestro caso, los nodos con identificadores del 1 al 10) los cuatro flujos presentan una estadística idéntica –tal y como se puede apreciar en la Figura 5.11– dado que los cuatro llegan a ellos directamente desde el nodo fuente a través del mismo enlace de ancho de banda $K = 4$. Además, para los cuatro flujos, el porcentaje de paquetes (u objetos) perdidos se incrementa desde el nodo 1 hasta el nodo $\alpha = 10$, es decir, hasta el último nodo del nivel 0.

Esto es así ya que como el nodo 2 solo recibe el primer paquete una vez la fuente lo ha transmitido al nodo 1, las retransmisiones al nodo 1 por culpa de pérdidas pueden afectar la calidad de la recepción en el nodo 2. Del mismo nodo, la recepción en el nodo 3 puede verse afectada por las pérdidas en los nodos 1 y 2 y así sucesivamente hasta el último nodo del nivel 0, es decir, hasta el último nodo que recibe directamente los paquetes de la fuente, que es el nodo que lleva la etiqueta $\alpha = 10$. Recuérdese que la fuente tiene por definición α hijos en el nivel 0 etiquetados de 1 a α . En este caso, las sucesivas retransmisiones en los nodos anteriores pueden saturar la cola de la fuente, lo que a su vez puede traducirse en la pérdida de paquetes destinados a los nodos posteriores. Este efecto, además, se va acumulando nodo tras nodo a lo largo del nivel 0. Dicho de otra forma, dado que los paquetes que llegan más tarde a la cola de transmisión del nodo fuente son los paquetes destinados al nodo 10, tales paquetes son los que tienen una mayor probabilidad de encontrar la cola llena y perderse. Dado este efecto acumulativo y que $\sum_{i=1}^n i = n(n+1)/2 = (n^2 + n)/2$ podemos esperar un crecimiento cuadrático –o mayor si se va incrementando el valor del tiempo de *backoff* conforme se producen retransmisiones– de las pérdidas desde el nodo 1 hasta el nodo 10, es decir, desde el primer hasta el último nodo del nivel 0, tal y como se aprecia en las gráficas de la Figura 5.11.

De este modo, como los flujos degradados tienen todos su origen en el nodo 10, para seguir su rastro debe seguirse el recorrido de los flujos transmitidos desde el nodo 10 en adelante, según se representa en la Figura 5.10. Para $K = 4$ y $u = 3$ cada nodo excepto el nodo fuente recibe $K = 4$ flujos y reenvía $u = 3$ de ellos de acuerdo con el algoritmo de planificación. Recuérdese que, según dicho algoritmo, un nodo recibe objetos de sus nodos suministradores según el orden creciente de su identificador. De este modo, el nodo 10 recibe los cuatro flujos directamente del nodo fuente y reenvía el flujo f_3 al nodo 17 y los flujos f_0 y f_1 al nodo 18, tal y como se especifica en la Figura 5.10. La Figura 5.11b

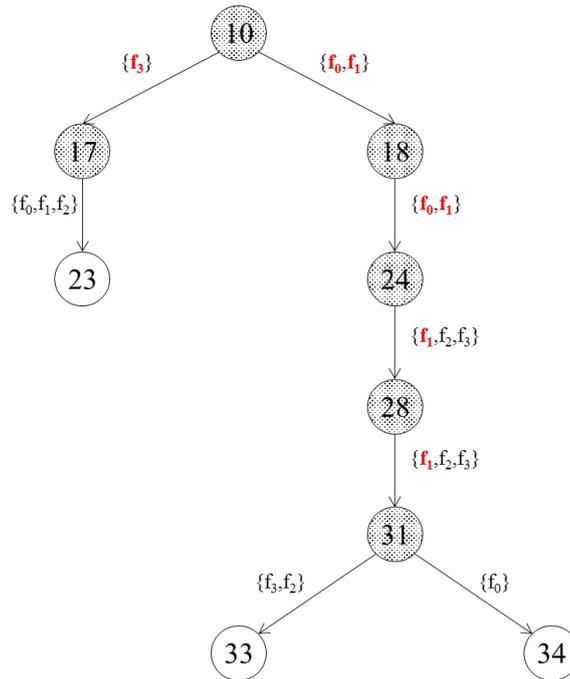
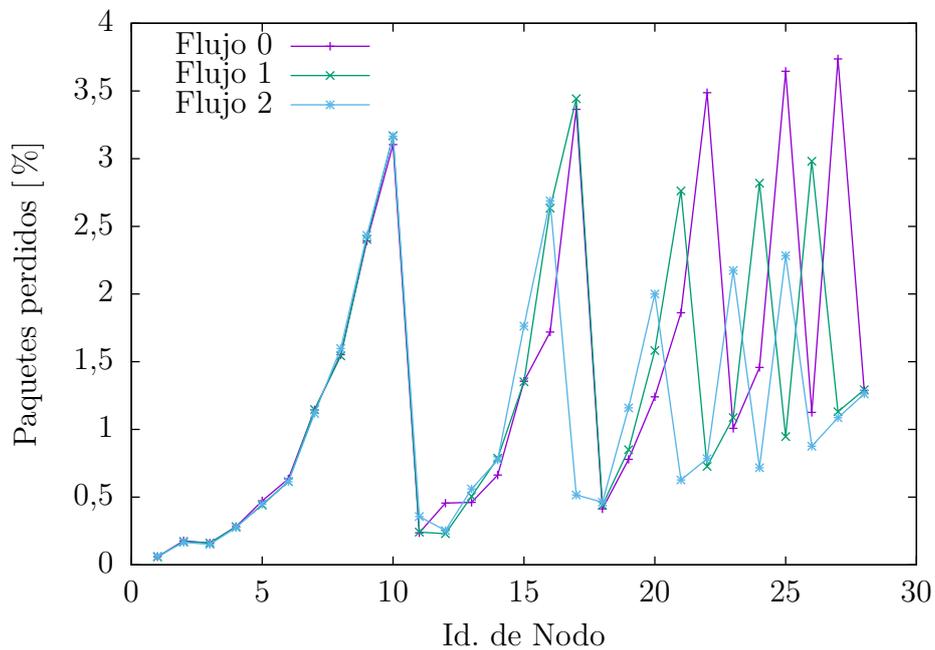


Figura 5.10: Flujo de transmisión desde el nodo $\alpha = 10$ en $G_{10,4,3}$. Las etiquetas en cada enlace indican los flujos, numerados del f_0 al f_3 , que cada nodo envía a sus hijos. Las etiquetas en rojo indican los flujos degradados heredados del nodo 10.

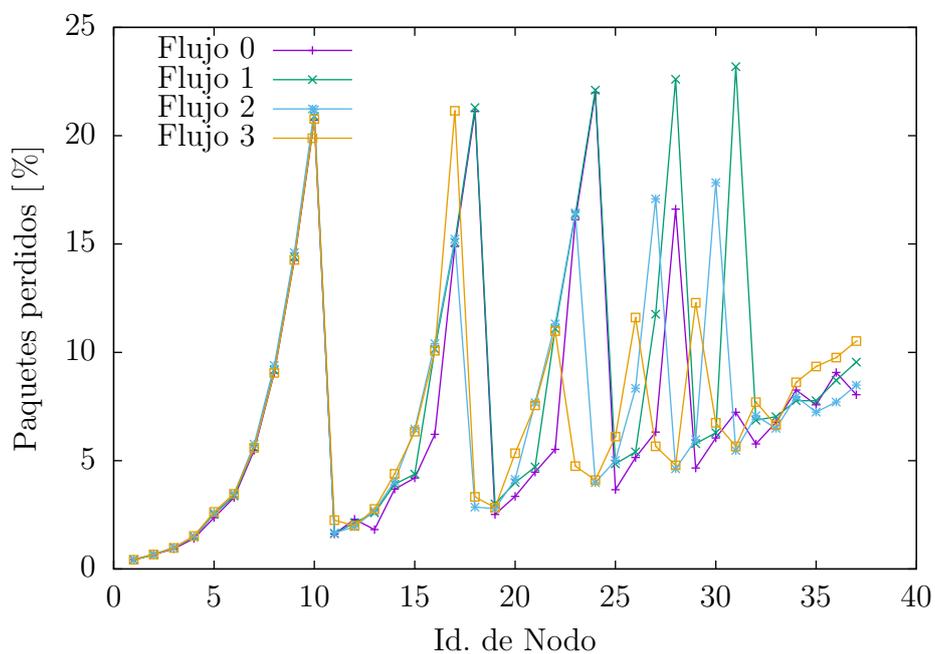
muestra que las pérdidas en los nodos 17 y 18 para esos flujos son más elevadas que las pérdidas en el nodo 10, dado que tenemos que añadir a las pérdidas que se producen en el nodo 10 las pérdidas de transmisión desde el nodo 10 hasta esos nodos 17 y 18, debidas a interferencias y colisiones. Nótese, además, que en el nodo 17 el único flujo con un pico de pérdidas es f_3 dado que los tres flujos anteriores se reciben desde el nodo 9 que sufre, como se ha explicado, menos pérdidas que el 10. En particular, en la Figura 5.11b se observa que las pérdidas de los flujos f_0 , f_1 y f_2 en el nodo 17 se corresponden con las pérdidas de tales flujos en el nodo 9 más un ligero incremento.

Por otro lado, según el algoritmo de planificación el nodo 17 reenvía los flujos f_0 , f_1 y f_2 al nodo 23. Recuérdese que, según se ha dicho en el anterior apartado, solo el flujo f_3 tiene una alta tasa de pérdida en el nodo 17 y que por tanto estos tres flujos f_0 , f_1 y f_2 no tienen picos de pérdida en el nodo 17. Así, dado que el nodo 23 no recibe el flujo f_3 del nodo 17, dicho flujo f_3 no sufre en el nodo 23 el alto porcentaje de pérdidas sufridas en el nodo 17 (heredado, a su vez, del nodo 10), ya que dicho flujo f_3 llega al nodo 23 a través de otro camino menos afectado (recuérdese además que en la Figura 5.10 se representa el recorrido de todos los flujos degradados). Esto explica asimismo por qué las pérdidas de un determinado flujo pueden decrecer de un nivel a otro inferior –en nuestro caso del nivel 1 del nodo 17 al nivel 3 del nodo 23– tal y como se observa en la Figura 5.11b.

Por su parte, el nodo 18 reenvía al nodo 24 los flujos f_0 y f_1 . De este modo en el nodo 24



(a) Porcentaje de paquetes perdidos por nodo para $\alpha = 10$, $K = 3$ y $u = 2$. Dado que $K = 3$ hay tres flujos diferentes.



(b) Porcentaje de paquetes perdidos por nodo para $\alpha = 10$, $K = 4$ y $u = 3$. Dado que $K = 4$ hay cuatro flujos diferentes.

Figura 5.11: Porcentaje de pérdida de paquetes para $\{K, u\} \in \{\{3, 2\}, \{4, 3\}\}$.

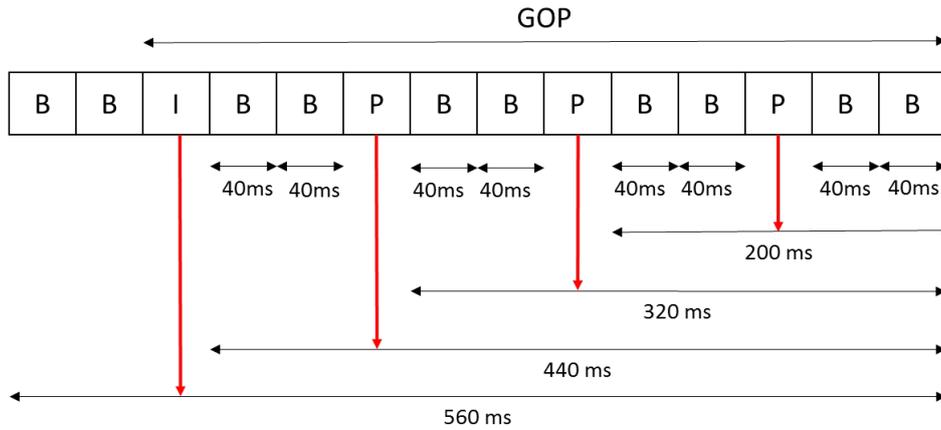


Figura 5.12: Efecto de la pérdida de un cuadro en la decodificación del flujo.

los flujos f_0 y f_1 sufren otro pico de pérdidas, de nuevo ligeramente superior a las pérdidas del nodo 10 (puesto que, como se ha dicho, a las pérdidas del nodo 10 hay que sumar las pérdidas en las transmisiones del nodo 10 al 18 y del nodo 18 al 24). Además, dado que el nodo 24 reenvía al nodo 28 los flujos f_1 , f_2 y f_3 pero no el f_0 , este flujo degradado f_0 no se propaga del nodo 28 en adelante. El nodo 28 reenvía al nodo 31 los flujos f_1 , f_2 y f_3 , de los cuales solo está degradado el flujo f_1 . Finalmente, puesto que el nodo 31 no reenvía el flujo f_1 , este es el último nodo en el grafo de distribución con una pérdida de paquetes elevada, en nuestro caso mayor al 20%. Dicho de otra forma, el nodo 31 es el último nodo del grafo que hereda el alto porcentaje de pérdida de paquetes que se produce en el nodo 10. Más en general, puede afirmarse que los únicos nodos que presentan un pico de pérdidas son los que en la Figura 5.10 heredan alguno de los flujos degradados del nodo 10, en este caso los nodos sombreados 17, 18, 24, 28 y 31. Estos nodos son, en efecto, los únicos que presentan picos de pérdidas, además del nodo 10, en la gráfica de la Figura 5.11b.

Como se ha dicho, un nivel puede presentar un porcentaje de pérdidas menor al porcentaje del nivel previo, dependiendo de la distribución de los flujos degradados que se producen en el último nodo del nivel 0. Esta distribución depende, a su vez, del algoritmo de planificación. En la Figura 5.8 se puede ver que en el caso en que $K = 4$ y $u = 3$, el porcentaje de pérdidas en el nivel 6 es menor que en el nivel 5. Es decir, los nodos 30 y 31 del nivel 5 sufren un mayor porcentaje de pérdidas que los nodos 32 y 33 del nivel 6. Esto es así puesto que, de acuerdo con nuestra política de planificación recogida en la Figura 5.10, los nodos 32 y 33 no reciben ningún flujo a través de un camino que pase previamente por el nodo 10, que es el nodo que produce la degradación de los flujos. El nodo 31, sin embargo, recibe el flujo f_1 por un camino que parte del nodo 10 y por lo tanto sufre un pico de pérdidas para dicho flujo f_1 , como puede apreciarse en la Figura 5.11b. Esto determina que, en promedio, la degradación sea mayor en el nivel 5 que en el nivel 6, tal y como se refleja en la Figura 5.8.

Con anterioridad, se ha visto en la Figura 5.8 que el grafo $G_{10,3,2}$ presenta una tasa de

pérdidas menor al 3% que, en principio, se puede considerar suficiente. En la codificación MPEG, sin embargo, la pérdida de un cuadro, equivalente a un objeto, puede impedir como se ha visto la correcta descodificación de otros cuadros correctamente recibidos. En la Figura 5.12, que es una representación en función del tiempo del esquema de la Figura 5.1, se calcula, para cada tipo de cuadro, el efecto que tiene la pérdida de un cuadro en la descodificación. Recordemos que el flujo tiene una tasa de 25 cuadros por segundo, lo que equivale a que cada cuadro tiene una duración de 40 ms.

Tal y como se ha explicado en el apartado 5.1.4, cuando se pierde un cuadro de tipo I no se pueden descodificar ningún otro de los cuadros del GOP ni los últimos dos cuadros B del GOP precedente, lo que se traduce en una pérdida efectiva de 14 cuadros, es decir, en una pérdida temporal de señal de 560 ms. Obsérvese que un GOP está formado por 12 cuadros según la secuencia de tipos IBBPBBPBBPBB. La pérdida de un cuadro B no tiene efectos en la descodificación de otros cuadros, por lo que resulta una pérdida temporal de 40 ms. La pérdida de un cuadro P no permite codificar ninguno de los cuadros posteriores del GOP ni los dos cuadros B precedentes al cuadro P que se ha perdido. De este modo, si se pierde el primer cuadro P del GOP sufrimos una pérdida temporal de 440 ms, si es el segundo de 320 ms y si es el último cuadro P del GOP, de 200 ms, correspondientes a la pérdida de 11, 8 y 5 cuadros, respectivamente.

Al final de la simulación cada nodo registra el flujo que ha recibido y, a continuación, procede a simular la descodificación. Para cada una de las simulaciones se mide el tiempo total durante el cual cada nodo no ha podido descodificar el flujo. La Figura 5.13 representa, para el grafo de distribución $G_{10,3,2}$, la duración promediada (sobre las distintas simulaciones) del tiempo durante el cual se interrumpe el flujo codificado en cada uno de los nodos del grafo. Como se puede observar, aunque el porcentaje de pérdidas de paquetes es bajo, el efecto que ha tenido en la descodificación resulta considerable, lo que degrada significativamente la calidad con que algunos nodos reproducen el flujo. Recuérdese que la duración del flujo evaluado es de 470 s de modo que los nodos más afectados por las pérdidas –que como se ha explicado son el nodo 10 y los que heredan sus flujos degradados– pueden sufrir interrupciones del flujo durante más de un 25% de la transmisión.

En la Figura 5.14 se representa la misma gráfica para el grafo de distribución $G_{10,2,1}$ que, como se ha visto en la Figura 5.8, presenta pérdidas mucho menores. En la Figura 5.9 puede verse que en $G_{10,2,1}$ solo existe un nodo que hereda uno de los flujos degradados del nodo 10. En este caso se trata del nodo 15 que hereda el flujo f_1 . Esta escasa difusión de los flujos degradados se traduce finalmente en un tasa de pérdida muy baja, como se muestra en la Figura 5.8. En este caso, puede observarse que el porcentaje de tiempo durante el cual los nodos no pueden descodificar el flujo es también mucho menor. En particular, el porcentaje de tiempo durante el que no se puede descodificar la señal es en el peor de los nodos menor a $2,75/470 = 0,58\%$. En consecuencia, el grafo $G_{10,2,1}$ ofrece una topología mucho más robusta que el grafo $G_{10,3,2}$ puesto que prácticamente no sufre interrupciones del flujo codificado. Recuérdese que, además, el grafo $G_{10,2,1}$ duplica la capacidad del sistema, es decir, el número de nodos a los que se puede transmitir el flujo,

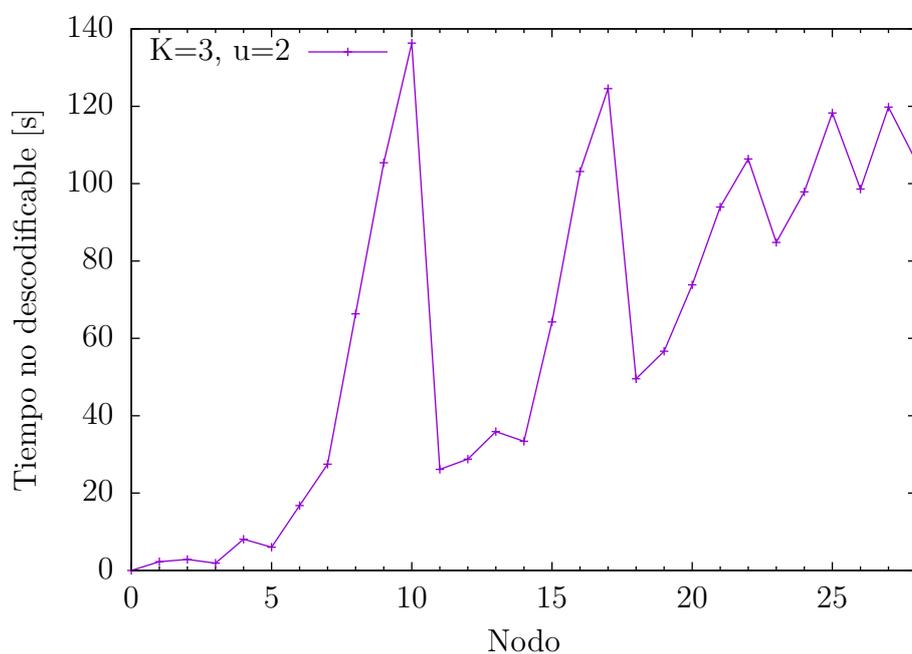


Figura 5.13: Tiempo medio no descodificable en $G_{10,3,2}$ debido a las pérdidas.

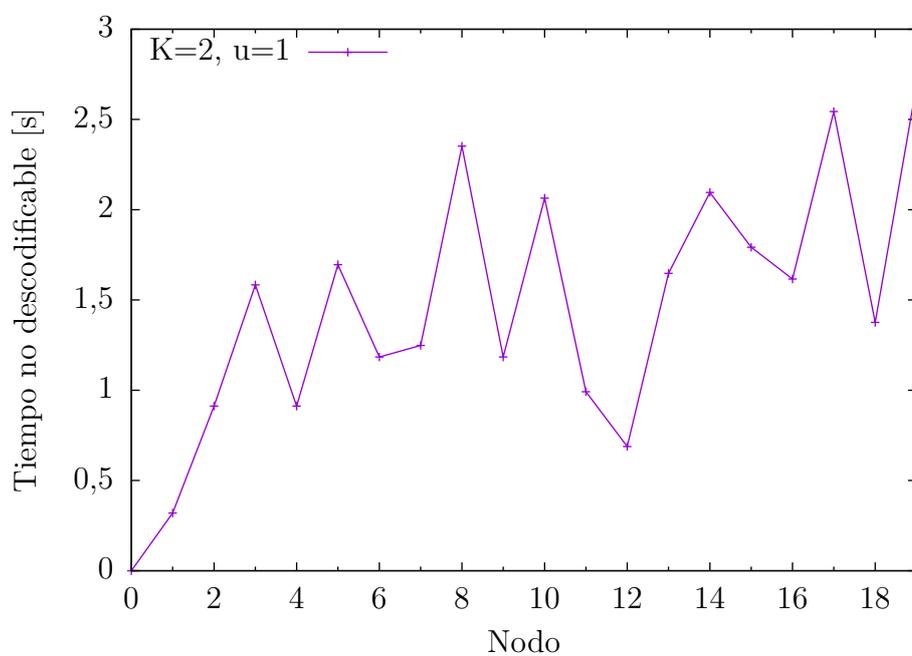


Figura 5.14: Tiempo medio no descodificable en $G_{10,2,1}$ debido a las pérdidas.

frente al modelo cliente-servidor, por lo que constituye una arquitectura apropiada en el contexto de una red VANET.

Cabe señalar, por último, que la versión 2.35 de ns-2 que hemos utilizado en las simulaciones no implementa los mecanismos de calidad de servicio definidos en el estándar IEEE 802.11p [9]. Estos mecanismos asignan a cada paquete una categoría de acceso (*Access Category*, AC) que se utiliza como criterio de prioridad de acuerdo con cuatro clases de paquetes definidas: *background* (BK), *best effort* (BE), vídeo (VI) y voz (VO). El empleo de estas clases AC puede reducir las pérdidas de paquetes y, en consecuencia, evitar la transmisión de flujos degradados desde el último nodo del nivel 0 al resto de la red. En futuros trabajos se prevé, por tanto, la posibilidad de implementar estos mecanismos de prioridad con el objeto de reducir tanto las pérdidas como los tiempos de *backoff* de la red y de aumentar, en consecuencia, el porcentaje de tiempo durante el cual el flujo codificado no se interrumpe.

Capítulo 6

Distribución multicast

En los capítulos anteriores se ha analizado una topología P2P formada por un nodo fuente de alta capacidad y un conjunto de nodos de ancho de banda restringido. Como se ha dicho, aunque en términos globales esta limitación se traduce en la pérdida de capacidad de la red, garantiza un consumo reducido del ancho de banda de subida de los nodos. En el caso en que se consideren nodos con un ancho de banda superior al de la tasa de transmisión de vídeo, estos pueden constituirse en nodos fuentes de nuevos grafos de distribución para el mismo flujo de información.

De esta forma, los nodos de alta capacidad pueden considerarse nodos fuentes por dos motivos. En primer lugar, porque generan físicamente el flujo de la información. Y, en segundo lugar, porque recibiendo dicho flujo a través de otra red de distribución, lo retransmiten como fuente a los nodos de baja capacidad que conforman la red P2P. La distribución del flujo original hasta cada uno de esos supernodos o nodos fuente de los grafos de distribución puede plantearse mediante la distribución multicast propuesta en el presente capítulo.

6.1. Modelo del sistema de paso de mensajes

Bar Noi *et al.* propusieron en [28] el *Modelo del Sistema de Paso de Mensajes*, MPS, para caracterizar sistemas que usan conmutación de paquetes. Los autores definieron un parámetro de latencia $\mathcal{L} \geq 1$ que corresponde al tiempo que transcurre desde que un nodo inicia la transmisión de un mensaje hasta que este se recibe en su totalidad en otro nodo. Así pues, la latencia puede ser calculada como la suma de los retardos de transmisión y propagación. Además, en el modelo de Noi este parámetro es constante entre cualquier par de nodos.

La idea básica del modelo presentado en [28] es usar el retardo de transmisión para enviar el mensaje a otros nodos. Esto significa que la fuente transmite el mensaje a más de

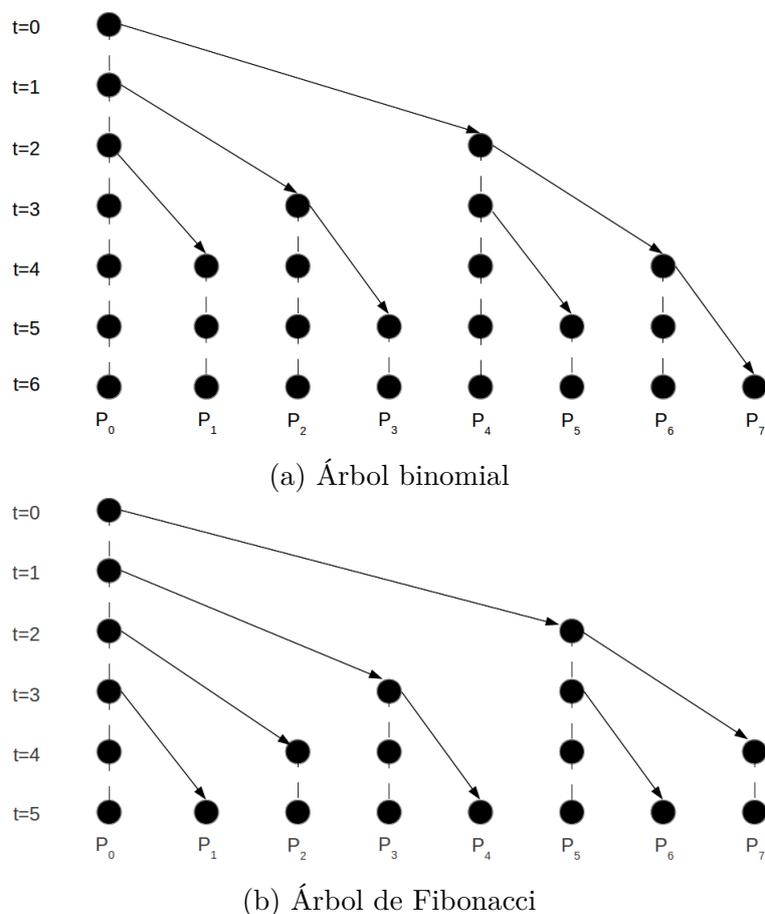


Figura 6.1: Árboles de transmisión

un nodo para inundar la red tan pronto como sea posible, en vez de permanecer inactiva tras enviar el mensaje por primera vez. Los nodos receptores del mensaje funcionan del mismo modo.

Sobre este modelo los autores construyen árboles óptimos de encaminamiento basados en Fibonacci como variante a la aproximación tradicional de construcción de árboles binomiales. La Figura 6.1 muestra la distribución de un mensaje desde el nodo P_0 , la fuente, a otros siete nodos usando un árbol binomial y un árbol de Fibonacci. El tiempo de transmisión es uno para todos los enlaces y el valor de la latencia, es decir, el tiempo necesario para la transmisión completa del mensaje entre dos nodos, es $\mathcal{L} = 2$. El árbol binomial de la Figura 6.1a necesita seis unidades de tiempo para distribuir el mensaje a todos los nodos mientras que el árbol de Fibonacci de la Figura 6.1b sólo necesita cinco unidades de tiempo.

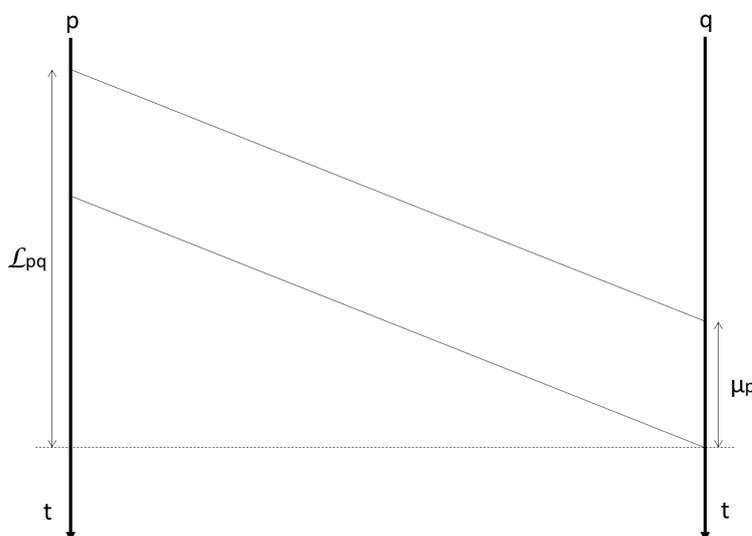


Figura 6.2: El modelo postal. La latencia \mathcal{L}_{pq} es igual al tiempo de transmisión μ_p más el retardo de comunicación entre p and q .

6.2. Algoritmo multicast para la distribución de un mensaje

En nuestro trabajo ampliamos el modelo de Bar Noi al *Modelo Extendido del Sistema de Paso de Mensajes*, $EMPS(n, \mathcal{L}, \mu)$, formado por un conjunto de n nodos $\{p_0, \dots, p_{n-1}\}$, cada uno de los cuales puede recibir y enviar un mensaje simultáneamente. El término *mensaje* hace referencia a cualquier conjunto de datos en que se puede dividir el contenido que envía un nodo a otro. Cada nodo p tiene asociado un tiempo de transmisión μ_p y para cada par de nodos (p, q) se define la *latencia de comunicación* \mathcal{L}_{pq} , de tal modo que si en el instante t el nodo p comienza a enviar un mensaje al nodo q , entonces el intervalo de tiempo en que el nodo p está ocupado transmitiendo el mensaje es $[t, t + \mu_p]$, y el nodo q recibe el mensaje durante el intervalo de tiempo $[t + \mathcal{L}_{pq} - \mu_p, t + \mathcal{L}_{pq}]$, tal y como se observa en la Figura 6.2.

El parámetro \mathcal{L}_{pq} es, de esta forma, el tiempo de transmisión μ_p del nodo p más el retardo de comunicación entre p y q . Este retardo de comunicación se define como la suma de todos los retardos de propagación, cola, procesado y transmisión existentes en el camino entre p y q . Nótese que esta latencia se define de forma genérica, sin entrar en las peculiaridades de la red de conmutación en la que se produce la transmisión. Por otro lado, suponemos que en cuanto un nodo recibe el mensaje, lo empieza a retransmitir a los nodos que tiene asignados como receptores en la tabla de encaminamiento, según se especifica en las siguientes páginas.

Por simplicidad, asumimos que la latencia es constante y consideramos la transmisión

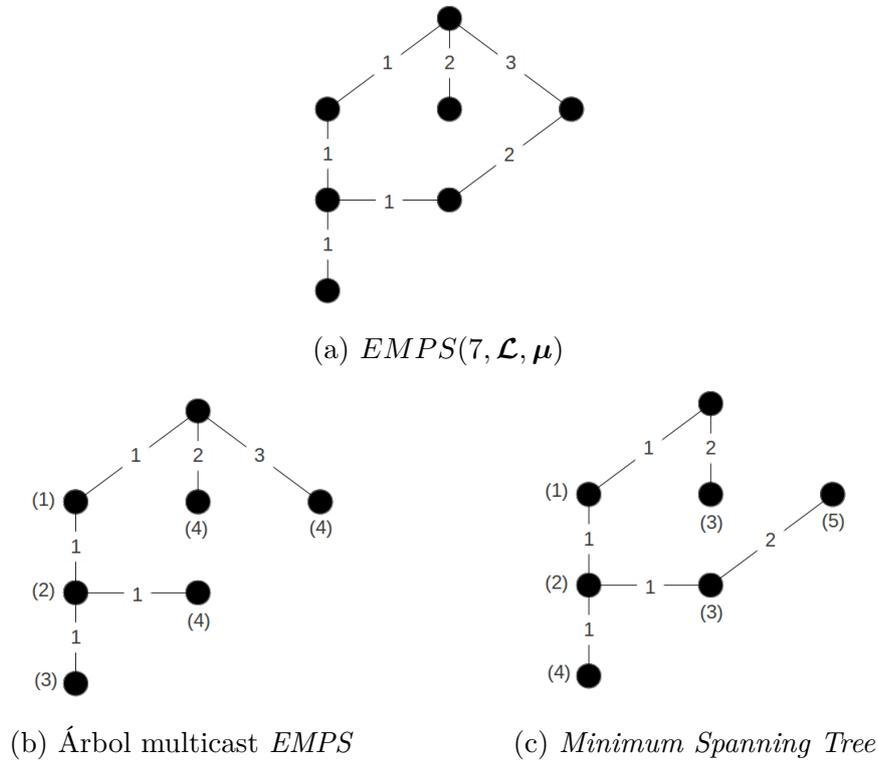


Figura 6.3: Ejemplo de una red en que el modelo $EMPS(n, \mathcal{L}, \mu)$ no se corresponde con el problema del árbol generador mínimo. La etiqueta de cada arista representa la latencia \mathcal{L}_{pq} de comunicación entre los nodos p y q unidos por la arista. El tiempo de transmisión es $\mu = 1$ en toda la red. Para cada nodo, se muestra entre paréntesis el tiempo multicast, es decir, el tiempo en que el nodo recibe el mensaje.

multicast como un problema de broadcast, en el sentido de que todos los nodos de nuestro modelo deben recibir la información. Esto no supone una pérdida de generalidad puesto que, en cualquier red, un problema de multicast (en que un conjunto de nodos ha de recibir un mensaje) puede reducirse a un problema broadcast (en que todos los nodos han de recibir el mensaje) si se restringe la topología de la red a los nodos que reciben el mensaje, es decir, si el análisis se realiza sobre una subred formada únicamente por los nodos receptores y se omiten, por tanto, los nodos que eventualmente no reciben la información.

Sea p_0 el nodo de $EMPS(n, \mathcal{L}, \mu)$ que ha de distribuir un mensaje al resto de nodos $R = \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$, buscamos un algoritmo de distribución con el fin de minimizar el *tiempo de multicast*, es decir, el tiempo invertido en mandar el mensaje a todos los nodos de R . Aunque el resultado de dicho algoritmo es un *multicast spanning tree*, el árbol es distinto al conocido *minimum spanning tree* o árbol generador de peso mínimo, tal y como muestra la Figura 6.3.

El algoritmo que proponemos, denominado *Single Message Multicast* (SMM), está de-

Algoritmo 6.1 *Single Message Multicast (SMM)***Entrada:** $EMPS(n, \mathcal{L}, \mu)$ **Salida:** routing

```

1: routing[i][j] ← 0  ∀ 0 ≤ i, j < n
2: has_message[0] ← cierto
3: has_message[i] ← falso  ∀ 0 < i < n
4: t0i = L0i  ∀ 0 < i < n
5: tij = ∞  ∀ 0 < i, j < n
6: times[i] ← 0  ∀ 0 ≤ i < n
7: sent ← 1
8: mientras sent < n hacer
9:   {s, r} ← next_sender_receiver(tij, has_message)
10:  has_message[r] ← cierto
11:  times[s] ← times[s] + 1
12:  routing[s][r] ← times[s]
13:  para i = 1 hasta n hacer
14:    si has_message[i] == falso entonces
15:      tri ← tsr + Lri
16:      tsi ← tsi + μs
17:    fin si
18:  fin para
19:  sent ← sent + 1
20: fin mientras
21: devolver routing

```

tallado en Algoritmo 6.1. Entre las líneas 1 y 7 se inicializan las variables **routing**, **has_message**, t_{ij} , **times** y **sent**. La primera representa la tabla de encaminamiento. La variable **has_message** indica si el nodo i ha recibido el mensaje. El tiempo t_{ij} determina en cada iteración el instante en que el nodo j recibiría el mensaje –medido desde el inicio de la comunicación– si este le fuera enviado desde el nodo i . Finalmente, las variables **times** y **sent** indican, respectivamente, el número de veces que el nodo i ha enviado el mensaje a otro nodo y el número de nodos que poseen el mensaje. Inicialmente sólo posee el mensaje el nodo fuente identificado por el índice 0 y ningún otro nodo ha recibido el mensaje. El algoritmo ejecuta el bucle **mientras** de las líneas 8 a 20 hasta que todos los nodos han recibido el mensaje.

En este bucle se obtiene en primer lugar el par de nodos $\{s, r\}$ mediante la función **next_sender_receiver**, que devuelve en cada iteración el nodo s que envía el mensaje y el nodo r al que se lo envía. Una vez obtenido el par $\{s, r\}$ emisor-receptor, se actualizan las distintas variables del algoritmo: se indica que el nodo r ha recibido el mensaje; se incrementa en una unidad el número de veces que el emisor s ha enviado el mensaje; se indica en la tabla de encaminamiento que el nodo s envía el mensaje al nodo r ; se recalcula,

Función 6.2 next_sender_receiver**Entrada:** t_{ij} , has_message**Salida:** $\{s, r\}$

-
- 1: $\{s, r\} \leftarrow \{i, j\} : \text{has_message}[i] == \text{cierto} \text{ y } \text{has_message}[j] == \text{falso} \text{ y } t_{ij} = \text{mín}\{t_{uv}\} \forall u, v$
 - 2: **devolver** $\{s, r\}$
-

para aquellos nodos que no han recibido el mensaje, el instante en que pueden recibirlo tanto desde r como desde s ; y, por último, se suma una unidad al número de nodos que han recibido el mensaje.

La actualización de los tiempos de recepción del resto de nodos se realiza en el bucle **para** de las líneas 13-18. Para ello se ha definido el parámetro t_{ij} que indica en cada iteración el tiempo en que el nodo j recibiría el mensaje desde el nodo i . Inicialmente los nodos pueden recibir únicamente información del nodo fuente. De este modo, en las líneas 4 y 5 este tiempo se iguala inicialmente a la latencia si el nodo origen es la fuente y a infinito si el nodo origen es cualquier otro. Posteriormente, cuando en cada iteración un nodo s envía el mensaje a un nodo r se actualizan los valores t_{si} y t_{ri} para los nodos i de la red que todavía no han recibido el mensaje (para el resto, este tiempo es irrelevante y por tanto puede omitirse). En este caso, calculamos el retardo t_{ri} en la Línea 15 como el tiempo t_{sr} en que llega el mensaje a r más la latencia \mathcal{L}_{ri} , es decir, más el tiempo que el mensaje tardaría en llegar desde el nodo r al nodo i .

Por otro lado, puesto que la siguiente transmisión de s a cualquier otro nodo sufrirá un retraso igual al tiempo de transmisión de un mensaje (debido al envío que acaba de producirse entre s y r), en la Línea 16 se suma al valor de t_{si} el tiempo de transmisión μ_s de la fuente. Dicho de otra forma, ahora la transmisión entre el nodo s y el nodo i , medida por el parámetro t_{si} , debe esperar la transmisión previa del mensaje de s a r y sufre por tanto una demora igual a μ_s , es decir, al tiempo que está ocupado el nodo s con la transmisión del mensaje al nodo r . Recuérdese que en todos estos casos el retardo t_{ij} se refiere al instante en que el nodo j recibiría el mensaje –medido desde el inicio de la transmisión– si se lo retransmitiera el nodo i . Como se ha dicho, la Línea 14 restringe el cálculo de los tiempos t_{ri} y t_{si} a los nodos i que todavía no han recibido el mensaje, puesto que este tiempo resulta irrelevante en los nodos que ya poseen el mensaje y a los que, por tanto, no se ha de enviar información.

La tabla de encaminamiento se actualiza en la Línea 12 de tal modo que al elemento perteneciente a la fila s y la columna r se le asigna un valor igual al número de veces que el emisor s ha enviado el mensaje tras esa iteración. Así pues, al finalizar el algoritmo, el elemento `routing[i][j]` de la tabla de encaminamiento es distinta de cero si el nodo i envía el mensaje al nodo j . Además, el valor de `routing[i][j]` se corresponde con el orden de transmisión del nodo i . Dicho de otra forma, si al finalizar el algoritmo se obtiene `routing[i][j] = k`, entonces la k -ésima transmisión del nodo i envía el mensaje al nodo j .

De esta forma, una vez terminada la ejecución del algoritmo, cada nodo conoce tanto los nodos a los que ha de retransmitir el mensaje como el orden en que debe hacerlo.

La función `next_sender_receiver` descrita en la Función 6.2 realiza en cada iteración el cálculo del par emisor-receptor. Esta función elige, de entre todos los posibles nodos emisores (es decir, aquellos que ya han recibido el mensaje en iteraciones anteriores) y de entre todos los posibles nodos receptores (es decir, aquellos que aún no han recibido el mensaje), el par $\{s, r\}$ que ofrece un tiempo de recepción mínimo, es decir, cuyo parámetro asociado t_{sr} es mínimo. Dicho de otra forma, de entre todos los nodos que aún no han recibido el mensaje, se escoge como nodo receptor r aquel que está en condiciones de recibirlo antes. Igualmente, como nodo transmisor s se escoge el nodo que está en condiciones de enviar a r el mensaje con el menor retardo t_{sr} posible.

De modo más descriptivo, el Algoritmo 6.1 opera de la siguiente manera: en cada iteración el algoritmo escoge, de entre todos los nodos a los que aún no ha llegado el mensaje, aquel que puede recibirlo en el menor tiempo posible. Una vez el nodo dispone del mensaje, el algoritmo recalcula los costes de transmisión (*i.e.* los retardos a cada uno de los nodos que aún no han recibido el mensaje), teniendo en cuenta que el nodo receptor puede retransmitir el mensaje a sus nodos vecinos. A continuación, el algoritmo escoge un nuevo nodo receptor según el criterio anterior y así sucesivamente hasta que el mensaje llega a todos los nodos. Asumimos que cuando un nodo acaba de retransmitir el mensaje a un nodo vecino, puede empezar una nueva retransmisión del mismo mensaje a otro vecino. El algoritmo es similar al algoritmo de Dijkstra con la diferencia de que en nuestro caso el retardo de comunicación entre dos nodos no es constante sino que puede cambiar a lo largo de la ejecución. Dicho retardo, calculado entre los nodos p y q es igual, en cada iteración, a la suma de \mathcal{L}_{pq} más el producto de μ_p por el número de retransmisiones previas realizadas por el nodo p . Esta cantidad equivale al tiempo que hemos de esperar a que el nodo p mande el mensaje a los nodos receptores previos más \mathcal{L}_{pq} , *i.e.*, más el retardo de la comunicación entre los nodos p y q .

Considérese, como ejemplo de funcionamiento del algoritmo, la red de la Figura 6.4 donde los pesos asignados a las aristas corresponden a la latencia \mathcal{L}_{pq} (tiempo de transmisión más tiempo de propagación si se desprecian los tiempos de cola y de procesado) entre dos nodos adyacentes. Por simplicidad, consideramos que todos los nodos tienen el mismo tiempo de transmisión igual a 1. El nodo p_0 es el nodo fuente de la red de distribución. El tiempo en que cada nodo recibe el mensaje se indica entre paréntesis en el árbol resultante de la transmisión. En $t = 0$ (primera iteración del Algoritmo 6.1), el nodo p_0 envía el mensaje al nodo p_1 , que lo recibe en $t = 10$.

Terminada la primera transmisión a p_1 en $t = 1$ (el resto del retardo hasta $t = 10$ se debe a la propagación y por tanto la salida de p_0 ya no está ocupada), el nodo p_0 puede volver a enviar el mensaje a cualquiera de los nodos que aún no lo han recibido. El nodo p_2 es el que está a menor distancia. Por lo tanto, lo elige y p_2 recibe el mensaje en $t = 1 + 10 = 11$. En $t = 2$ el nodo p_0 puede enviar a p_3 o p_4 el mensaje, que ahora llegaría en $t = 2 + 20 = 22$ al primero de los nodos seleccionado y en $t = 3 + 20 = 23$ al segundo. Sin embargo, el

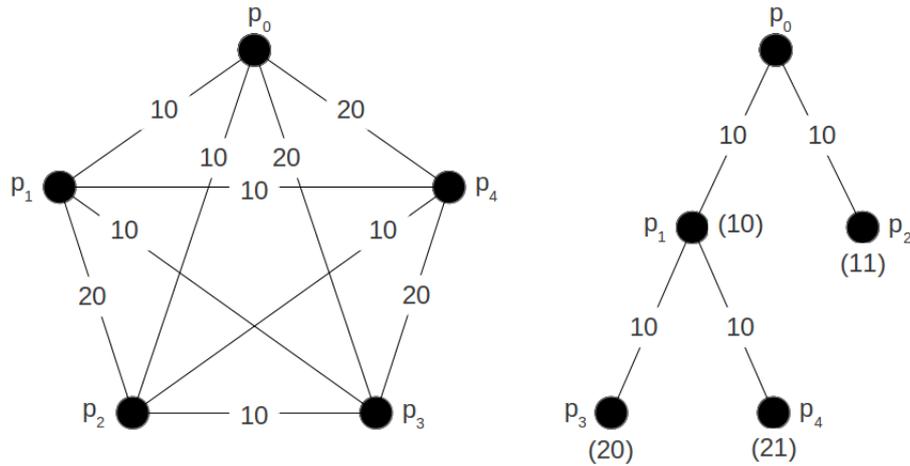


Figura 6.4: Ejemplo de la aplicación del algoritmo SMM en un grafo completo.

algoritmo elige el nodo p_1 como transmisor del mensaje a p_3 y p_4 puesto que en su caso los tiempos de recepción son $t = 10 + 10 = 20$ y $t = 10 + 1 + 10 = 21$, respectivamente, menores a los que se alcanzan enviando el mensaje desde p_0 .

Obsérvese que si el nodo p_2 enviara el mensaje a p_4 , este llegaría en $t = 11 + 10 = 21$, que es el mismo tiempo que tarda en distribuirse el mensaje si es enviado desde p_1 . La selección de p_1 o p_2 como nodo transmisor del mensaje a p_4 depende de una comparación estricta o no cuando el algoritmo escoge el siguiente nodo (*i.e.*, el uso de “ $<$ ” versus “ \leq ”). Si bien esta consideración no repercute en el tiempo de distribución del mensaje sí que tiene efectos en el grado del árbol multicast y, en consecuencia, en la carga de los nodos del árbol. Aunque este impacto no forma parte de nuestro estudio parece evidente que, en términos generales, es mejor mantener restringido el grado de los nodos, es decir, repartir la retransmisión del mensaje entre el máximo número posible de nodos de la red, punto que resulta de especial relevancia en el caso de las redes superpuestas en que los nodos se corresponden con dispositivos terminales.

El tiempo de multicast obtenido por el algoritmo SMM es mínimo cuando $\mu_p = 0$ para todos los nodos. En este caso, el retardo entre dos nodos es constante e igual a \mathcal{L}_{pq} y, por lo tanto, el algoritmo se corresponde con el algoritmo de Dijkstra, que es óptimo y tiene complejidad $O(n^2)$. En un caso general, sin embargo, el algoritmo SMM no siempre obtiene la solución óptima, tal y como se muestra en la Figura 6.5 que, como en el anterior ejemplo, señala entre paréntesis el tiempo en el que cada nodo recibe el mensaje. El tiempo de transmisión es 1 para todos los nodos. En la Figura 6.5a se emplea el algoritmo SMM, que devuelve un retardo igual a 7. En la Figura 6.5b se aplica otro orden de transmisión multicast que proporciona un retardo igual a 5. En este caso, la fuente comienza a transmitir el mensaje a p_3 (que es el nodo separado de p_0 por una mayor latencia), sigue con p_1 y termina con p_2 .

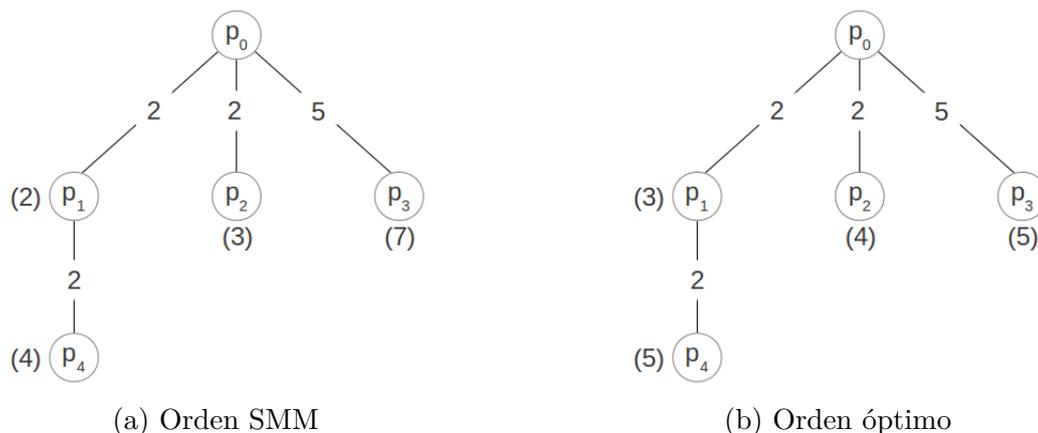


Figura 6.5: Ejemplo de una red en que SMM no es óptimo. El tiempo de transmisión es 1 para todos los nodos. A la izquierda se aplica SMM con un retardo total de 7 y a la derecha otro orden de transmisión con un retardo final igual a 5.

En el caso de las redes multicast implementadas en el nivel de aplicación se puede considerar, con todo, que los nodos terminales disponen de un ancho de banda elevado y que sus tiempos de transmisión son, en general, reducidos. En términos del modelo esto significa que $\mu_p \ll \mathcal{L}_{pq} \forall p, q$ y que, por tanto, podemos considerar $\mu_p \simeq 0$. En este caso, puede afirmarse que el algoritmo SMM es *quasi*-óptimo, dado que si $\mu_p = 0$ el algoritmo es óptimo. En el caso general en que $\mu_p \neq 0$ la solución óptima puede encontrarse mediante la redefinición del orden de transmisión para cada nodo utilizando una exploración exhaustiva, *i.e.* mediante el análisis de cada uno de los posibles árboles multicast.

En la exploración exhaustiva se selecciona en primer lugar el nodo al que el nodo fuente envía el mensaje por primera vez, lo que da $(n - 1)$ combinaciones posibles. Tras esto, se escoge el segundo nodo receptor de entre los restantes $(n - 2)$ nodos, así como el nodo que tiene que transmitir el mensaje de entre los dos nodos que ya tienen el mensaje, es decir, el nodo fuente y el primer nodo seleccionado. Así, tenemos $2 \cdot (n - 2)$ posibles combinaciones. En el siguiente paso disponemos de 3 posibles nodos transmisores y de $(n - 3)$ receptores posibles, lo que se traduce en $3 \cdot (n - 3)$ combinaciones posibles. Se repite el mismo argumento hasta la transmisión del mensaje al último nodo, instante en que disponemos de $(n - 1)$ posibles nodos transmisores y un único receptor. En consecuencia, resulta un número total de combinaciones igual a:

$$1 \cdot (n - 1) \cdot 2 \cdot (n - 2) \cdot 3 \cdot (n - 3) \dots (n - 2) \cdot 2 \cdot (n - 1) \cdot 1 = ((n - 1)!)^2$$

Dicho de otra forma, pueden formarse $((n - 1)!)^2$ árboles multicast distintos. Una vez formados todos los árboles multicast, se calcula el tiempo de distribución de cada uno de ellos y se escoge el de menor tiempo de distribución (o bien, si más de un árbol devuelve el retardo mínimo de distribución, se selecciona uno de ellos según otro criterio como, por

ejemplo, el grado máximo más restrictivo). Aunque esta estrategia obtiene en cualquier caso el árbol óptimo, la complejidad $O(n!^2)$ que presenta resulta inviable en la práctica para valores altos de n . Por ejemplo, para una red de $n = 10$ nodos se obtienen $(9!)^2 = 13,17 \cdot 10^{10}$ árboles distintos.

Proposición 22. *El algoritmo SMM para $EMPS(n, \mathcal{L}, \mu)$ tiene complejidad $O(n^2)$.*

Demostración. En cada iteración SMM busca, entre los nodos que aún no han recibido el mensaje, aquel al que se puede llegar en el menor tiempo posible. Dado que el máximo número de nodos que aun no han recibido el mensaje es $n - 1$, esta operación necesita, como máximo, $n - 2$ comparaciones. Además, el algoritmo ejecuta una iteración para cada nodo que recibe el mensaje. Así pues, tenemos $n - 1$ iteraciones y en cada una ejecutamos un máximo de $n - 2$ comparaciones más algunas operaciones básicas y acotadas, resultando una complejidad de $O(n^2)$.

□

6.3. Algoritmo multicast para un flujo de mensajes

Hasta aquí se ha definido el algoritmo SMM para la distribución multicast de un único mensaje. Sin embargo, en una distribución multicast se envía en general más de un mensaje, en donde un mensaje (o paquete, o trama, etc., según el contexto) representa cada una de las unidades independientes en que se divide la información. El algoritmo SMM puede aplicarse en aquellos casos en que el tiempo de generación entre dos mensajes es mayor que el tiempo de distribución multicast. Si, por ejemplo, consideramos la distribución de un flujo de vídeo, cada mensaje representa un cuadro de vídeo. Dos cuadros de vídeo consecutivos se generan con una diferencia de tiempo igual a la inversa de la tasa de cuadros por segundo (*frames per second*, fps) que, dependiendo de la calidad del vídeo, es un valor que oscila entre 15 y 30 fps. Así, como la fuente debe distribuir dos mensajes consecutivos con un intervalo de tiempo entre 33,33 y 66,67 ms, en el caso en que el retardo multicast de un mensaje sea menor a esos tiempos, el algoritmo SMM puede aplicarse en la transmisión de sucesivos mensajes.

En otro caso, una primera aproximación consiste en repetir un esquema análogo, es decir, en reproducir sucesivamente para cada mensaje el resultado de la tabla de encañamiento que resulta de la ejecución del algoritmo SMM. Para ello, se envía el primer mensaje a través del árbol dibujado por SMM. En el instante en que el mensaje se recibe en toda la red, se empieza a transmitir el segundo mensaje por el mismo trayecto y así sucesivamente. El retardo de multicast equivale en este caso al número M de mensajes multiplicado por el retardo de un único mensaje (contrariamente a lo que sucede en el caso anterior, en que equivale a M multiplicado por el tiempo que la fuente tarda en crear dos mensajes consecutivos). Esta solución, con todo, no resulta eficiente puesto que algunos nodos pueden permanecer inactivos después de recibir el primer mensaje, a la espera de

Función 6.3 next_sender_receiver**Entrada:** t_{ij} , has_message**Salida:** $\{s, r\}$

-
- 1: $\{s, r\} \leftarrow \{i, j\} : \text{has_message}[i] == \text{cierto} \text{ y } \text{times}[i] < s \text{ y } \text{has_message}[j] == \text{falso} \text{ y } t_{ij} = \min\{t_{uv}\} \forall u, v$
 - 2: **devolver** $\{s, r\}$
-

repetir el proceso con el segundo mensaje. Esto supone una pérdida de eficiencia, puesto que esos intervalos de inactividad pueden aprovecharse para retransmitir nuevos mensajes y disminuir así el retardo multicast. En este caso, además, la tasa de recepción viene determinada por el inverso del tiempo multicast de un mensaje, lo cual puede ser un impedimento en transmisiones en tiempo real, que requieren una tasa mínima de recepción.

De este modo, para el caso en que se ha de transmitir más de un mensaje se considera otro algoritmo. En este modelo, antes de que el primer mensaje se reciba en todos los nodos de la red, la fuente puede interrumpir su transmisión y comenzar la emisión del segundo mensaje. Con esta restricción, el tiempo de distribución de un mensaje aumenta con respecto al tiempo invertido por el algoritmo SMM, puesto que se dejan de utilizar recursos. Sin embargo, el segundo mensaje comienza a transmitirse antes, y lo mismo el tercero y así sucesivamente. Dicho de otra forma, de esta forma se aumenta la cadencia de emisión de mensajes, aunque el retardo multicast de cada mensaje aumente. Este ahorro de tiempo en el comienzo de la transmisión de dos mensajes consecutivos se va acumulando progresivamente, de modo que si el número de mensajes es suficientemente grande compensa el aumento del tiempo de multicast para un único mensaje.

En síntesis, el nuevo algoritmo que proponemos, denominado *Message Stream Multicast* (MSM-s), aplica el mismo esquema multicast para cada mensaje que el algoritmo SMM, con la particularidad de que detiene la transmisión de un mensaje en un nodo cuando ha sido enviado s veces por dicho nodo, momento en que el nodo comienza la retransmisión del siguiente mensaje del flujo y así sucesivamente. La única variante respecto al Algoritmo 6.1 se aplica en la función `next_sender_receiver`, que ahora escoge el siguiente nodo retransmisor entre los que aún no lo han enviado un máximo de s veces. Esta función se describe formalmente en la Función 6.3. Dado que la restricción en el número de retransmisiones puede aislar algunos nodos de la red, el valor de s ha de ser suficientemente grande para garantizar un árbol conexo, es decir, la recepción del mensaje en toda la red. Del mismo modo que SMM, el algoritmo MSM-s tiene complejidad $O(n^2)$.

6.4. Algoritmo MSM-s con restricción temporal

Sea p un nodo que reenvía un mensaje a un nodo q y sean $s_p(s)$, $s_q(s) \leq s$ el número de veces que p y q , respectivamente, retransmiten el mensaje según el algoritmo MSM-s.

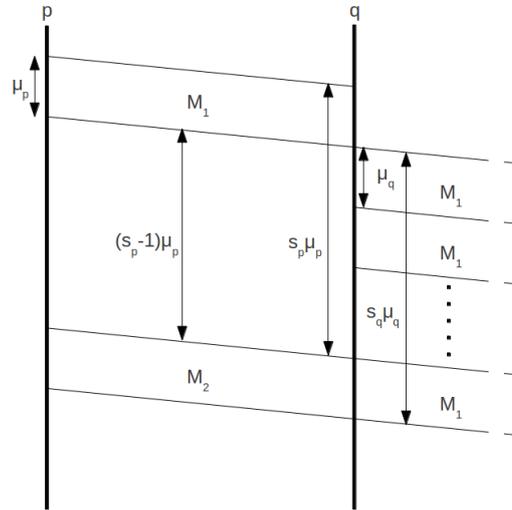


Figura 6.6: El límite s_q de retransmisiones del nodo q puede ser diferente para cada nodo q , en función del tiempo de transmisión de los nodos.

En este caso, un mensaje se recibe en q con un retraso de $s_p(s) \cdot \mu_p$ unidades de tiempo respecto al mensaje anterior, dado que ambos mensajes siguen el mismo camino en el grafo y el segundo empieza a retransmitirse $s_p(s) \cdot \mu_p$ unidades de tiempo más tarde que el primero, tal y como se muestra en la Figura 6.6. Nótese que en esta figura el nodo q es el primer nodo que recibe el mensaje de p , pero lo mismo puede decirse para cualquier otro de los nodos que reciben el mensaje desde p . Así, si tomamos el segundo nodo al que p retransmite cada mensaje, p empieza a transmitir el primer mensaje a este nodo μ_p unidades de tiempo más tarde que a q . Pero para recibir el segundo mensaje, este segundo nodo tiene que esperar las restantes retransmisiones del primer mensaje más la primera retransmisión del segundo mensaje al nodo q , con lo cual su retraso global es el mismo, es decir, igual a $s_p(s) \cdot \mu_p$ unidades de tiempo. Lo mismo puede decirse para el tercer nodo al que p retransmite cada mensaje y así sucesivamente.

De este modo, cuando el periodo de retransmisión $s_q(s) \cdot \mu_q$ de un mensaje en el nodo q es mayor que el periodo $s_p(s) \cdot \mu_p$ en el nodo p , podemos tener problemas de congestión. En este caso, mientras el nodo q retransmite el mensaje M_1 recibe el siguiente mensaje M_2 , que ha de ser almacenado, a la espera de que termine la retransmisión de M_1 . Esto supone además un retardo adicional que se acumula en los sucesivos mensajes. Para evitar esta situación, que implica un riesgo de congestión, se limita el periodo de retransmisión de cada nodo. En particular, la tasa de retransmisión de un nodo q (definida como $1/(s_q(s) \cdot \mu_q)$), i.e. el inverso del período de retransmisión) ha de ser igual o mayor a la tasa de retransmisión de los nodos que forman el trayecto que une la fuente con el nodo q :

$$\frac{1}{s_q(s) \cdot \mu_q} \geq \frac{1}{s_v(s) \cdot \mu_v} \quad \forall v \in \text{camino}\{\text{fuente a } q\}$$

En la práctica, con todo, basta aplicar esta restricción al nodo inmediatamente superior de cada nodo (es decir, aplicarlo a p en el caso del nodo q). De este modo, si q tiene una tasa mayor a p , el nodo p tiene a su vez una tasa mayor a su inmediato superior (es decir, al nodo que le retransmite cada mensaje) y así sucesivamente, entonces la tasa de q es mayor a la de todos los nodos que forman el camino entre la fuente y q , de modo que en condiciones de estabilidad de la red no existe riesgo de congestión.

Bajo esta restricción, el retardo de distribución de todos los mensajes es siempre el mismo puesto que de un mensaje a otro no se producen retardos adicionales debido al tiempo de espera en cola. Asumimos que todos los nodos, por criterio de admisión, disponen de suficiente capacidad para retransmitir el flujo a la tasa requerida.

6.5. Análisis de MSM-s

En las siguientes secciones se demuestra que, bajo ciertas consideraciones, es posible calcular el número mínimo M_σ tal que si el número de mensajes es mayor o igual a M_σ , entonces MSM- σ es mejor que MSM- $(\sigma+1)$, es decir, el aumento de la cadencia de transmisión de mensajes en MSM- σ compensa el retardo de la llegada del primer mensaje. Además, cuando restringimos el número de transmisiones para cada nodo, MSM-s ha de tener en cuenta la restricción de tasa impuesta por el propio flujo de mensajes. Si la fuente envía el mensaje s veces como máximo y tras $s \cdot \mu_r$ unidades de tiempo detiene la transmisión de un mensaje para continuar con el siguiente, asumimos que la fuente dispone ya de este nuevo mensaje. En otro caso, la fuente detendría la transmisión sin tener un nuevo mensaje preparado, de modo que permanecería inactiva, de forma inútil, durante un determinado intervalo de tiempo, con la subsiguiente pérdida de eficiencia.

6.5.1. Retardo de multicast

Sea τ_s el tiempo multicast para la distribución de un mensaje cuando el número máximo de transmisiones es s en cada nodo; sea M el número de mensajes del flujo y μ_r el tiempo que la fuente r tarda en transmitir un mensaje. Asumimos que s es tal que el grafo resultante es conexo, es decir, que todos los nodos reciben el mensaje. En este caso el tiempo de distribución multicast total para MSM-s, denotado por τ_{Ms} , viene dado por:

$$\tau_{Ms} = (M - 1) \cdot s \cdot \mu_r + \tau_s \tag{6.1}$$

La fuente transmite el primer mensaje s veces con un coste temporal de $s \cdot \mu_r$ unidades de tiempo, después aplica el mismo coste para el resto de mensajes con lo que en el instante $(M - 1) \cdot s \cdot \mu_r$ ha finalizado el envío de los $(M - 1)$ primeros mensajes y empieza la transmisión del último, que se recibe en el último nodo τ_s unidades de tiempo después. Recuérdate que tal y como se ha mostrado en la Sección 6.4 el retardo τ_s es igual y constante para todos los mensajes.

La Ecuación 6.1 es válida cuando la fuente r envía un mensaje s veces. Con todo, para un valor de s suficientemente grande, un mensaje puede haber sido recibido por todos los nodos antes de que la fuente lo transmita s veces. En este caso, si la fuente transmite el mensaje $s_r(s) < s$ veces, permanece inactiva durante $(s - s_r(s)) \cdot \mu_r$ unidades de tiempo, con la consiguiente pérdida de eficiencia. Para evitar estos intervalos de inactividad, la fuente puede enviar el mensaje $s_r(s)$ veces e inmediatamente proceder al envío del siguiente mensaje. Dado que $s_r(s) \leq s$, la Ecuación 6.1 puede reformularse de la siguiente manera:

$$\tau_{Ms} = (M - 1) \cdot s_r(s) \cdot \mu_r + \tau_s \leq (M - 1) \cdot s \cdot \mu_r + \tau_s \quad (6.2)$$

Proposición 23. *Dado el algoritmo MSM- s para EMPS(n, \mathcal{L}, μ), el retardo para un único mensaje es tal que $\tau_{\sigma+\delta} \leq \tau_\sigma, \forall \sigma, \delta > 0$*

Demostración. Por construcción del algoritmo, cuando definimos un número máximo de $\sigma + \delta$ retransmisiones por nodo, MSM- $(\sigma + \delta)$ forma un mejor árbol multicast que MSM- $(\sigma + \delta - 1)$ sólo si existe una mejor solución. En otro caso, MSM- $(\sigma + \delta)$ forma el mismo árbol multicast que MSM- $(\sigma + \delta - 1)$. Así, $\tau_{\sigma+\delta} \leq \tau_{\sigma+\delta-1}$. Iterando el argumento para $\tau_{\sigma+\delta-1}$ y $\tau_{\sigma+\delta-2}$ y así sucesivamente obtenemos que $\tau_{\sigma+\delta} \leq \tau_\sigma \forall \sigma, \delta > 0$

□

Teorema 24. *Dado el algoritmo MSM- s para EMPS(n, \mathcal{L}, μ), se puede obtener la condición tal que MSM- σ es mejor que MSM- $(\sigma + 1)$.*

Demostración. En primer lugar, definimos el mínimo número M_σ tal que MSM- σ es mejor que MSM- $(\sigma + 1)$. Empezando con $\sigma = 1$, el valor M_1 se obtiene ejecutando los algoritmos MSM-1 y MSM-2 y tomando los valores de τ_1, τ_2 y $s_r(2)$. Según la Proposición 23 tenemos que $\tau_1 \geq \tau_2$. Según la Ecuación 6.2, $\tau_{M1} = (M - 1) \cdot \mu_r + \tau_1$ y $\tau_{M2} = (M - 1) \cdot s_r(2) \cdot \mu_r + \tau_2$, donde $s_r(2)$, que puede valer 1 o 2, es el número de veces que la fuente envía un mismo mensaje para MSM-2. Cuando $s_r(2) = 1$ y dado que $\tau_1 \geq \tau_2$, MSM-2 obtiene un tiempo de multicast menor o igual a MSM-1 para cualquier número M de mensajes. Cuando $s_r(2) = 2$ planteamos la desigualdad $\tau_{M1} \leq \tau_{M2}$ y se despeja M :

$$M \geq \frac{(\tau_1 - \tau_2)}{\mu_r} + 1 = M_1$$

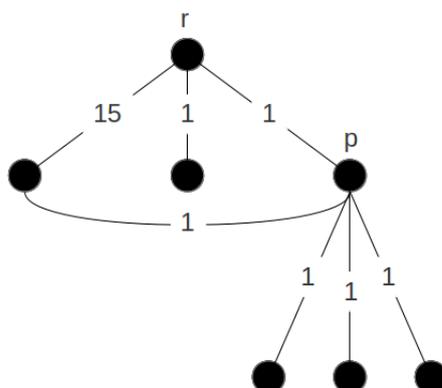


Figura 6.7: Ejemplo de una red donde $s_r(\sigma) \geq s_r(\sigma+1)$. En particular se tiene que $s_r(3) = 3$ y $s_r(4) = 2$.

Para el caso general, el número M_σ de mensajes para el cual el retardo de multicast total es mejor para $s = \sigma$ que para $s = \sigma + 1$ puede obtenerse mediante el mismo procedimiento. Primero se ejecutan MSM- σ y MSM- $(\sigma + 1)$ y se obtienen las expresiones de $\tau_{M\sigma}$ y $\tau_{M\sigma+1}$. A continuación se aplica la Ecuación 6.2 para σ y $\sigma + 1$:

$$\tau_{M\sigma} = (M - 1) \cdot s_r(\sigma) \cdot \mu_r + \tau_\sigma$$

Por la Proposición 23 tenemos que $\tau_\sigma \geq \tau_{\sigma+1}$. Por lo tanto, en el caso poco habitual en que $s_r(\sigma) \geq s_r(\sigma + 1)$, MSM- $(\sigma + 1)$ será mejor o igual que MSM- σ para cualquier número M de mensajes. En otro caso, cuando $s_r(\sigma) < s_r(\sigma + 1)$ se plantea la desigualdad $\tau_{M\sigma} \leq \tau_{M(\sigma+1)}$ y se despeja M :

$$M \geq \frac{\tau_\sigma - \tau_{\sigma+1}}{(s_r(\sigma + 1) - s_r(\sigma)) \cdot \mu_r} + 1 = M_\sigma$$

□

Pese a que no es un caso habitual, en la Figura 6.7 se muestra un ejemplo de red en el que $s_r(\sigma)$ es mayor que $s_r(\sigma + 1)$. En particular, tenemos que $s_r(3) > s_r(4)$. En este caso, por tanto, MSM-4 es más rápido que MSM-3 para cualquier número de mensajes M . Con el objeto de cumplir las restricciones impuestas en la Sección 6.4, suponemos $\mu_r = 2$ y $\mu_p = 1$.

6.5.2. Cotas analíticas para M_1

En esta sección se obtiene una cota analítica para el número M_1 de mensajes tal que el retardo total de multicast es mejor para $s = 1$ que para $s = 2$. Tal y como se ha explicado en la Sección 6.5.1, asumimos que $s_r(2) = 2$ puesto que para el caso $s_r(2) = 1$ MSM-2 es

igual o mejor que MSM-1 para cualquier número de mensajes. Sea n el número de nodos de la red, M el número de mensajes de la transmisión, τ_{M1} y τ_{M2} el retardo multicast para MSM-1 y MSM-2, respectivamente, μ_r el tiempo de transmisión de la fuente y \mathcal{L}_{\min} y \mathcal{L}_{\max} la latencia mínima y máxima, respectivamente, entre cualquier par de nodos de la red.

A continuación, se calcula una cota superior para τ_{M1} y una cota inferior para τ_{M2} a las que denotamos por T_1 y t_2 , respectivamente. Entonces, en el caso en que $T_1 \leq t_2$ se tiene que MSM-1 es mejor que MSM-2 puesto que:

$$\tau_{M1} \leq T_1 \leq t_2 \leq \tau_{M2} \quad (6.3)$$

Para encontrar los valores de T_1 y t_2 modificamos ligeramente el algoritmo MSM- s , es decir, lo simplificamos para obtener algoritmos cuyos retardos resultan más fáciles de calcular. En primer lugar, tenemos:

$$\tau_{M1} \leq (M - 1) \cdot \mu_r + (n - 1) \cdot \mathcal{L}_{\max} = T_1 \quad (6.4)$$

Recuérdese que para MSM-1 cada nodo envía una única vez el mensaje, de forma que la topología resultante de MSM-1 es un árbol lineal de $(n - 1)$ aristas. En este caso resulta obvio que $\tau_{M1} \leq T_1$ ya que la Ecuación 6.4 corresponde al peor caso, es decir, aquel en el que el mensaje ha de ser transmitido por $(n - 1)$ enlaces con el coste máximo \mathcal{L}_{\max} .

Para encontrar una cota inferior para τ_{M2} consideramos un algoritmo con un retardo menor que MSM-2. Asumimos primero de todo que la latencia para cualquier par de nodos es la mínima, \mathcal{L}_{\min} . Además, el nuevo algoritmo puede enviar el mismo mensaje simultáneamente a dos nodos distintos. Pese a que esta hipótesis suele resultar físicamente imposible, permite encontrar un árbol multicast con un retardo de distribución t_2 menor al de MSM-2.

Sea $N(t)$, $t \in \mathbb{Z}^+$, el número de nodos que han recibido el mensaje en la t -ésima iteración según el nuevo algoritmo simplificado:

$$N(t) = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^t = 2^{t+1} - 1$$

Igualando $N(t)$ al número n de nodos obtenemos el número de iteraciones necesarias para distribuir un mensaje a todos los nodos de la red:

$$t = \lceil \log_2(n + 1) - 1 \rceil$$

En este caso, el nuevo algoritmo puede distribuir un mensaje a todos los nodos en $\lceil \log_2(n + 1) - 1 \rceil \cdot \mathcal{L}_{\min}$ unidades de tiempo y, por lo tanto, para la distribución de los M mensajes obtenemos el siguiente tiempo de multicast:

$$\tau_{M2} \geq (M - 1) \cdot 2 \cdot \mu_r + \lceil \log_2(n + 1) - 1 \rceil \cdot \mathcal{L}_{\text{mín}} = t_2 \quad (6.5)$$

Finalmente, si de acuerdo con la Ecuación 6.3 se impone que T_1 sea menor o igual que t_2 , entonces τ_{M1} será menor o igual que τ_{M2} y, por tanto, MSM-1 será mejor que MSM-2. De la Ecuación 6.4 y la Ecuación 6.5:

$$M \geq \frac{(n - 1) \cdot \mathcal{L}_{\text{máx}} - \lceil \log_2(n + 1) - 1 \rceil \cdot \mathcal{L}_{\text{mín}}}{\mu_r} + 1$$

Y dado que hemos considerado casos más restrictivos que MSM-1 y MSM-2, resulta:

$$M_1 \leq \frac{(n - 1) \cdot \mathcal{L}_{\text{máx}} - \lceil \log_2(n + 1) - 1 \rceil \cdot \mathcal{L}_{\text{mín}}}{\mu_r} + 1 \quad (6.6)$$

De la anterior ecuación observamos que el mínimo número M_1 de mensajes para el cual MSM-1 es mejor que MSM-2 es lineal respecto al número n de nodos. De este modo, podemos concluir que para el caso general en que $s_r(2) = 2$, el algoritmo MSM-1 es normalmente mejor que MSM-2 ya que el número de mensajes transmitidos suele ser mucho mayor que el número de nodos que forman la red.

La cota obtenida en la Ecuación 6.6 puede mejorarse empleando un cálculo más preciso de t_2 , esto es, comparando MSM-2 con un algoritmo más ajustado y considerando la misma cota inferior T_1 para MSM-1. De nuevo asumimos que $s_r(2) = 2$. En este caso, definimos un nuevo algoritmo en el que cada nodo envía, en cada iteración, el mensaje a un nodo. Además cada nodo sólo puede enviar el mensaje un máximo de dos veces. Denotamos por $N(t)$ el número de nodos que han recibido el mensaje en la iteración t . Nótese que en la iteración t , sólo los $N(t - 1) - N(t - 3)$ nodos que aún no han enviado dos veces el mensaje pueden hacerlo. Así pues, en la iteración t disponen del mensaje los $N(t - 1)$ nodos que ya lo tenían en la última iteración más los $N(t - 1) - N(t - 3)$ que acaban de recibir el mensaje:

$$N(t) = N(t - 1) + (N(t - 1) - N(t - 3)) = 2 \cdot N(t - 1) - N(t - 3) \quad (6.7)$$

Los valores iniciales de la sucesión son $N(0) = 1$, $N(1) = 2$ y $N(2) = 4$. En el Cuadro 6.1 se puede observar que $N(t) = F(t + 3) - 1$, donde $F(t)$ es la sucesión de Fibonacci para valores iniciales de $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$. Por lo tanto, tomando $\phi_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ y $\phi_2 = (1 - \sqrt{5})/2$, se tiene que:

$$N(t) = F(t + 3) - 1 = \frac{\phi_1^{t+3} - \phi_2^{t+3}}{\sqrt{5}} - 1 \quad (6.8)$$

t				0	1	2	3	4	5	6
N(t)				1	2	4	7	12	20	33
F(t)	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Cuadro 6.1: $N(t)$ vs. La serie de Fibonacci.

Puesto que estamos determinando una cota inferior del retardo, definimos un algoritmo hipotético capaz de alcanzar en la iteración t un número de nodos $N_S(t) > N(t)$ donde:

$$N_S(t) = \frac{\phi_1^{t+3} + 1}{\sqrt{5}} - 1.$$

Obsérvese que $-1 < \phi_2 < 0$ y que por tanto $N_S(t) > N(t)$. En consecuencia, si calculamos para $N_S(t)$ el número de iteraciones necesarias para alcanzar n nodos, se obtiene una cota inferior para $N(t)$, es decir, un número de iteraciones menor o igual al que necesitaría $N(t)$ para alcanzar n nodos. Para $t \gg 1$ tenemos $\phi_1^{t+3} \gg 1$ y además $\phi_2^{t+3} \approx 0$, de forma que la cota calculada resulta muy ajustada. Igualando $N_S(t)$ a n y despejando t tenemos:

$$t = \lceil \log_{\phi_1}((n+1) \cdot \sqrt{5} - 1) - 3 \rceil$$

Por otro lado, en la Figura 6.8 se muestra que en cada iteración t se tiene un retardo mínimo de $t \cdot (\mathcal{L}_{\min} + \mu_{\min})/2$ de modo que:

$$\tau_{M2} \geq (M-1) \cdot 2 \cdot \mu_r + \lceil \log_{\phi_1}((n+1) \cdot \sqrt{5} - 1) - 3 \rceil \cdot \frac{\mathcal{L}_{\min} + \mu_{\min}}{2} = t_2$$

Así pues, considerando la nueva cota de t_2 con $\phi_1 = (1 + \sqrt{5})/2$ y repitiendo para el mismo valor de T_1 los argumentos de la cota anterior, se obtiene:

$$M_1 \leq \frac{(n-1) \cdot \mathcal{L}_{\max} - \lceil \log_{\phi_1}((n+1) \cdot \sqrt{5} - 1) - 3 \rceil \cdot \frac{\mathcal{L}_{\min} + \mu_{\min}}{2}}{\mu_r} + 1 \quad (6.9)$$

Esta cota resulta más o menos ajustada que la cota de la Ecuación 6.6 dependiendo de los valores de \mathcal{L}_{\min} , μ_{\min} y μ_r . En un caso práctico, con todo, se pueden calcular ambas cotas y escoger la mejor.

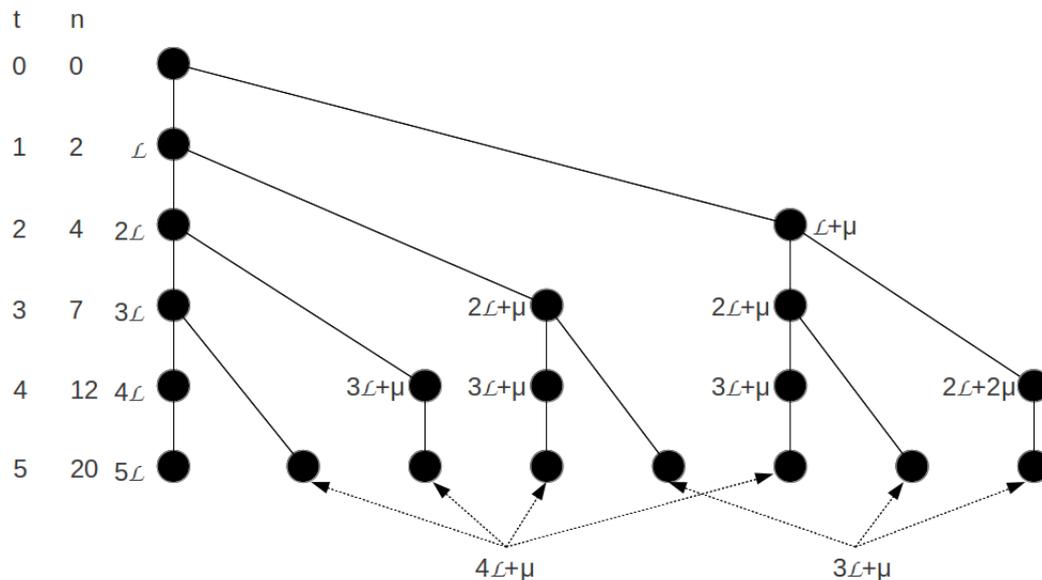


Figura 6.8: El árbol de Fibonacci. Cada nodo reenvía el mensaje dos veces.

6.5.3. Cota inferior y superior del retardo en MSM-s

Sea τ_{Ms} el retardo multicast para MSM-s y T_s una cota superior del mismo. En primer lugar, obtendremos una cota para el caso $s = 2$ y posteriormente generalizaremos el resultado. Con este propósito volvemos a considerar el algoritmo descrito en la Sección 6.5.2. Nuevamente, denotamos por $N(t)$ el número de nodos que han recibido el mensaje en la t -ésima iteración de dicho algoritmo. Para determinar una cota superior del número de iteraciones t en función del número de nodos n , definimos ahora $N_I(t)$ como el número de nodos que han recibido el mensaje en la iteración t si se aplica un algoritmo ligeramente más lento:

$$N_I(t) = \frac{\phi_1^{t+3} - 1}{\sqrt{5}} - 1$$

De la Ecuación 6.8 tenemos que $-1 < \phi_2 < 0$ y, por lo tanto, $N_I(t) < N(t)$. Si calculamos para $N_I(t)$ el número de iteraciones que se necesitan para visitar n nodos obtenemos una cota superior para $N(t)$. Igualando $N_I(t) = n$ y despejando t resulta:

$$t = \lceil (\log_{\phi_1}((n+1) \cdot \sqrt{5} + 1)) - 3 \rceil$$

Considerando en la Figura 6.8 que en cada iteración t el retardo máximo es $t \cdot \mathcal{L}_{\text{máx}}$, obtenemos:

$$\tau_2 \leq \lceil (\log_{\phi_1}((n+1) \cdot \sqrt{5} + 1)) - 3 \rceil \cdot \mathcal{L}_{\text{máx}} \quad (6.10)$$

Obsérvese que para garantizar la anterior cota debe suponerse que en MSM-2 cada nodo puede enviar el mensaje dos veces. Ya se ha discutido que esto no es siempre posible cuando se pretende evitar congestión. Sin embargo, cada nodo puede, en general, enviar el mensaje s veces si finalmente se limita la cadencia de la fuente a la del nodo más lento de la red. En este caso se considera que dicha cadencia es suficiente para absorber el flujo de información de la fuente. En otro caso, el nodo no debería ser admitido en la red.

De este modo, dado que $\tau_s \leq \tau_2 \forall s \geq 2$ y que la fuente comienza la transmisión de un mensaje como máximo $s \cdot \mu_s$ unidades de tiempo después del comienzo de la transmisión del mensaje anterior, en donde μ_s es el máximo retardo de transmisión de cualquier nodo de la red, se tiene:

$$\tau_{M_s} \leq (M-1) \cdot s \cdot \mu_s + \lceil \log_{\phi_1}((n+1) \cdot \sqrt{5} + 1) - 3 \rceil \cdot \mathcal{L}_{\text{máx}} = T_s \forall s \geq 2 \quad (6.11)$$

Para encontrar una cota inferior t_s de τ_{M_s} se considera, tal y como se hizo para MSM-2 en la Sección 6.5.2, un algoritmo en el que cada nodo pueda enviar el mismo mensaje simultáneamente a s nodos diferentes. Igualmente, asumimos que la latencia para cada par de nodos es la latencia mínima $\mathcal{L}_{\text{mín}}$. El nuevo algoritmo es, por tanto, más rápido que MSM- s . Sea $N(t)$, $t \in \mathbb{Z}^+$, el número de nodos que han recibido el mensaje en la iteración t :

$$N(t) = \sum_{i=0}^t s^i = \frac{s^{t+1} - 1}{s - 1} \forall t \geq 0$$

Igualando $N(t)$ al número de nodos n se obtiene, para $s \geq 2$, el número t de iteraciones necesario para llegar a todos los nodos de la red :

$$t = \lceil \log_s(n \cdot (s-1) + 1) - 1 \rceil$$

Y así, para $s \geq 2$ se obtiene la siguiente cota inferior t_s :

$$\begin{aligned} \tau_{M_s} &\geq (M-1) \cdot s_r(s) \cdot \mu_r + \left\lceil \log_s(n(s-1) + 1) - 1 \right\rceil \mathcal{L}_{\text{mín}} = t_s \geq \\ &(M-1) \cdot \mu_r + \left\lceil \log_s(n(s-1) + 1) - 1 \right\rceil \mathcal{L}_{\text{mín}} \end{aligned} \quad (6.12)$$

Para $s = 2$ se obtiene la expresión de la Ecuación 6.5 y para $s = 1$ se obtiene que:

$$\tau_{M1} \geq (M - 1) \cdot \mu_r + (n - 1)\mathcal{L}_{min}$$

6.5.4. Cota general para M_σ

Tomando las cotas obtenidas en la Sección 6.5.3 y repitiendo los argumentos de la Sección 6.5.2 para M_1 , se obtiene una cota para el número mínimo de mensajes M_σ para el que MSM- σ es mejor que MSM- $(\sigma + 1)$. Tal y como se ha explicado en las secciones precedentes, esta cota sólo tiene sentido cuando $s_r(\sigma) < s_r(\sigma + 1)$. En otro caso, MSM- $(\sigma + 1)$ siempre es mejor o igual que MSM- σ .

De la Ecuación 6.11 se obtiene una cota superior T_σ para $s = \sigma$ y de la Equation 6.12 se obtiene una cota inferior $t_{\sigma+1}$ para $s = \sigma + 1$. Forzando $T_\sigma \leq t_{\sigma+1}$ tenemos que:

$$\tau_{M\sigma} \leq T_\sigma \leq t_{\sigma+1} \leq \tau_{M(\sigma+1)}$$

En este caso, MSM- σ es mejor que MSM- $(\sigma + 1)$, lo que permite obtener la siguiente cota para $\sigma \geq 2$:

$$M \geq \frac{\left[\log_{\phi_1}((n+1)\sqrt{5}+1) - 3 \right] \mathcal{L}_{max} - \left[\log_{(\sigma+1)}(n\sigma+1) - 1 \right] \mathcal{L}_{min}}{s_r(\sigma+1) \cdot \mu_r - \sigma \cdot \mu_s} + 1$$

Obsérvese que hemos asumido que $s_r(\sigma+1) \cdot \mu_r \geq \sigma \cdot \mu_s$ y de este modo $s_r(\sigma+1) = \sigma+1$, puesto que por definición $\mu_r \leq \mu_s$. En otro caso, se deberían encontrar valores más ajustados para las cotas T_σ y $t_{\sigma+1}$ y repetir los cálculos para M . Finalmente, dado que estamos en un caso pesimista, se obtiene para $\sigma \geq 2$:

$$M_\sigma \leq \frac{\left[\log_{\phi_1}((n+1)\sqrt{5}+1) - 3 \right] \mathcal{L}_{max} - \left[\log_{(\sigma+1)}(n\sigma+1) - 1 \right] \mathcal{L}_{min}}{(\sigma+1) \cdot \mu_r - \sigma \cdot \mu_s} + 1$$

6.5.5. Fiabilidad de MSM-s

En esta sección se analiza la fiabilidad de la topología resultante de la ejecución del algoritmo MSM-s. Para ello se considera que los enlaces de la red subyacente tienen una determinada probabilidad de pérdida y que en caso de pérdida el nodo transmisor no retransmite el mensaje.

De la ejecución del algoritmo MSM-1 resulta una topología lineal, esto es, un árbol sin ramificaciones en que todos los nodos (salvo el primero y el último) tienen una arista de

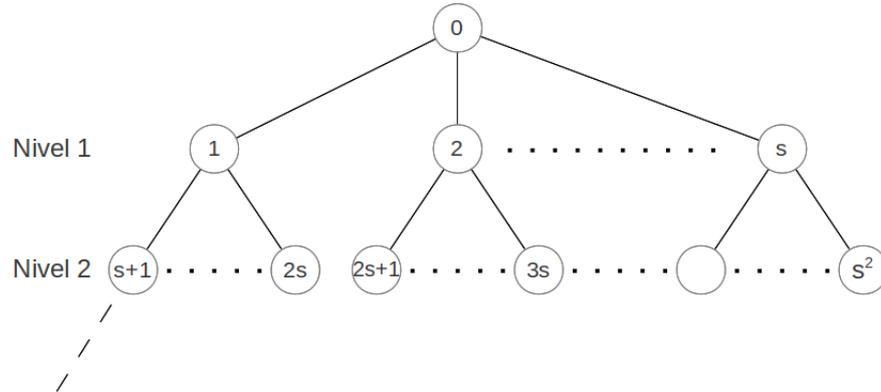


Figura 6.9: Árbol multicast para el cálculo de la fiabilidad de MSM- s .

entrada y otra de salida. Por otro lado, el algoritmo general MSM- s para $s \geq 2$, dibuja un árbol de distribución multicast con s caminos divergentes desde cada nodo del árbol, tal y como se muestra en la Figura 6.9.

Para MSM-1 la probabilidad de que un mensaje llegue a l nodos es siempre menor que la probabilidad de que lo haga a $l - 1$ nodos, ya que para llegar al l -ésimo nodo el mensaje ha de alcanzar previamente $l - 1$ nodos y entonces transmitirse sin pérdida desde el último nodo que ha recibido el mensaje. Esta característica no aparece en MSM- s para $s \geq 2$ gracias a la divergencia de los distintos caminos. En MSM-3, por ejemplo, la probabilidad de alcanzar tres nodos es considerablemente mayor que la probabilidad de llegar a un solo nodo, cosa que como se ha dicho no sucede en MSM-1.

Sea $P_c(p, q)$ la probabilidad de que el nodo q reciba correctamente un mensaje enviado por el nodo p . Por simplicidad, consideraremos que $P_c(p, q) = P_c$ para cada par de nodos de la red. En realidad, si consideramos $P_c = \max\{P_c(p, q)\} \forall p, q \in EMPS(n, \mathcal{L}, \mu)$, se obtiene una cota inferior de la fiabilidad del algoritmo MSM- s . Decimos que un nodo ha sido *visitado* cuando ha recibido el mensaje correctamente. El cálculo de la fiabilidad se restringe a la distribución de un único mensaje puesto que para el resto de mensajes los cálculos se repiten. Dicho de otra forma, la fiabilidad es una propiedad del árbol multicast.

Denotamos por \bar{n}_s el número medio de nodos que reciben el mensaje para MSM- s con una probabilidad P_c de transmitir correctamente un mensaje a través de un enlace. Para calcular \bar{n}_s dividimos los nodos en niveles tal y como se muestra en la Figura 6.9. Denotamos por E_l el número medio de nodos que reciben el mensaje en el nivel l . El primer nivel está formado por s nodos, de forma que:

$$E_1 = E(r_{11} + r_{21} + \dots + r_{s1})$$

Se define r_{ij} de tal forma que r_{ij} vale 1 si el nodo i del nivel j ha recibido el mensaje y 0 en caso contrario. Así $r_{11} + r_{21} + \dots + r_{s1}$ es igual al número de nodos que han recibido

el mensaje en el primer nivel, de donde:

$$E_1 = E(r_{11} + r_{21} + \dots + r_{s1}) = s \cdot E(r_{11}) = s(0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1)) = s \cdot P_c$$

Para los s^2 nodos del segundo nivel, se tiene que:

$$E_2 = E(r_{12} + r_{22} + \dots + r_{s^22}) = s^2 \cdot E(r_{12}) = s^2(0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1)) = s^2 \cdot P_c^2$$

Y para el nivel l :

$$E_l = E(r_{1l} + r_{2l} + \dots + r_{s^l l}) = s^l \cdot E(r_{1l}) = s^l(0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1)) = s^l \cdot P_c^l$$

Finalmente, el número medio de nodos que reciben el mensaje para MSM-s es la suma del número medio de nodos que reciben el mensaje en cada nivel, considerando que para el nivel 0 dicho número es 1 puesto que la fuente siempre dispone del mensaje. Por lo tanto, si denotamos L como el número de niveles del árbol multicast descontando el nivel 0, es decir, el nivel ocupado únicamente por la fuente, tenemos:

$$\bar{n}_s = \sum_{i=0}^L E_i = 1 + \sum_{i=1}^L (s \cdot P_c)^i = \frac{(s \cdot P_c)^{L+1} - 1}{s \cdot P_c - 1} \quad (6.13)$$

En este caso se asume que el número de nodos es $1 + s + s^2 + \dots + s^L = (s^{L+1} - 1)/(s - 1)$ y que la red se inunda nivel por nivel, caso plausible en una red con gran regularidad y tiempos de transmisión pequeños. Para el algoritmo MSM-1 las hipótesis de la Ecuación 6.13 son válidas. Dado que $L = n - 1$, resulta:

$$\bar{n}_1 = \frac{1 - P_c^n}{1 - P_c} < \frac{1}{1 - P_c}$$

Por lo tanto, si $1/(1 - P_c)$ es mucho menor que el número n de nodos, el número medio de nodos visitados con MSM-1 también es mucho menor que n . Contrariamente, cuando $1/(1 - P_c)$ es mayor que n , entonces el número medio de nodos visitados puede aproximarse al número total n de nodos.

En el Cuadro 6.2 se observan algunos valores de la fiabilidad (i.e. del número medio de nodos que reciben un mensaje) para MSM-1 en función de n y P_c . Para $P_c = 0,9$ resulta $1/(1 - P_c) = 10$ por lo que la media no es superior a 10, independientemente del valor de n . Sin embargo, para valores más realistas como $P_c = 0,999$ y $n = 50$ o $n = 100$ resultan buenas medias, de valor cercano a n . Para los valores en que la media es mucho menor que n (lo que significa que el mensaje no es recibido en un porcentaje elevado de nodos)

n	$P_c=0.9$	$P_c=0.99$	$P_c=0.999$	$P_c=0.9999$
50	9.95	39.50	48.79	49.88
100	10.00	63.40	95.21	99.51
1000	10.00	100.00	632.30	951.67

Cuadro 6.2: Número medio de nodos que reciben el mensaje para MSM-1 en función de n y P_c .

deberíamos usar el algoritmo MSM-2. Por ejemplo, para $n \approx 1000$ y $P_c = 0,999$ con MSM-1 llegaríamos sólo al 63,2% de los nodos mientras que dicho porcentaje sería del 99,1% para MSM-2. Si usáramos MSM-3 el porcentaje mejoraría muy poco respecto a MSM-2, en concreto obtendríamos un 99,4%. En un caso general la fiabilidad de MSM-2 puede considerarse aceptable.

Así pues, cuando se considere la posibilidad de aplicar MSM-1 en una red real (asumiendo que MSM-1 pueda llegar topológicamente a todos los nodos con la restricción $s = 1$, que la tasa de la fuente es suficientemente alta para proporcionar un mensaje cada μ_r unidades de tiempo y que para el número de mensajes que se desea transmitir el retardo es menor para MSM-1 que para MSM-2), en este caso el algoritmo debería estimar el número medio de nodos que recibirán el mensaje para MSM-1 y si este no fuera lo suficientemente alto, entonces debería aplicarse MSM-2, considerando el nuevo número medio de nodos que reciben el mensaje y cambiando a MSM-3 en caso necesario y así sucesivamente.

De todos modos, la hipótesis de que P_c es igual para todos los enlaces tiene mayor repercusión en MSM-1 que en MSM- s para $s \geq 2$. En general, en MSM-1 hay un mayor porcentaje de transmisiones cortas que en MSM- s para $s \geq 2$ dado que cada nodo retransmite el mensaje una sola vez y por tanto se pone, en general, en contacto con un nodo próximo. Esto significa que en MSM-1 hay en general muchas más transmisiones que en MSM- s con una probabilidad de éxito mayor que P_c . Por lo tanto, los resultados de la Ecuación 6.13 son más pesimistas para $s = 1$ que para $s \geq 2$.

Capítulo 7

Conclusiones y líneas futuras

En este capítulo se ofrece un resumen de los principales resultados que se han obtenido a lo largo de la realización del presente trabajo y se incluye asimismo un apartado en que se exponen una serie de líneas futuras de investigación planteadas durante su desarrollo.

7.1. Conclusiones

En la presente memoria se ha propuesto una arquitectura para la distribución de información en redes *peer-to-peer*, denotadas también como redes P2P. Con la excepción del nodo principal, denominado *nodo fuente*, los nodos que forman la red disponen de una capacidad de transmisión inferior a la tasa del flujo. Esta capacidad reducida se puede interpretar como una imposibilidad física debida a las características del enlace o también como una restricción que disminuye el consumo de ancho de banda de los nodos de la red. Con el objeto de definir una topología general de difusión, el flujo de información se divide en unidades fundamentales de transmisión denominadas *objetos*.

En nuestro modelo se define la unidad de tiempo de transmisión como el inverso de la tasa de flujo, medida en objetos por segundo. De esta forma, la tasa de recepción se normaliza a un objeto por unidad de tiempo. Además, como se ha dicho, en cada caso se identifica un nodo fuente de ancho de banda elevado –en comparación con la tasa de distribución– que sirve el flujo en paralelo a un determinado número α de nodos. El nodo fuente, junto al resto de nodos de la red, se representan como los nodos de un grafo cuyas aristas poseen un ancho de banda igual a $1/K$ objetos por unidad de tiempo.

De este modo, un nodo necesita conectarse a K aristas incidentes para recibir el flujo a tasa unitaria. Dicho de otra forma, K es el número de conexiones de entrada que tiene que establecer un nodo con otros nodos de la red para recibir el flujo en tiempo real. Asimismo, los nodos establecen conexiones de salida con otros nodos para retransmitir la información. Dado que el ancho de banda de los nodos, excepto el nodo fuente, es inferior a la unidad,

denotamos por u el número de conexiones de subida que puede establecer como máximo un nodo con otro, en donde $0 < u < K$. De este modo, los nodos tienen un ancho de banda de subida igual a u/K objetos por unidad de tiempo en donde, según la definición de u , se cumple que $0 < u/K < 1$.

La conexión de los nodos se realiza a través de un algoritmo de ingreso. La topología resultante del algoritmo se ha representado mediante un multigrafo dirigido, al que denominamos *grafo de distribución*, caracterizado por los valores de α , K y u . En nuestro caso, además del *orden*, es decir, del número de nodos que componen el grafo, se ha calculado la *longitud* del grafo de distribución en vez del *diámetro* puesto que, como se ha explicado, el camino que determina el retardo de la transmisión es el camino de mayor longitud entre la fuente y cada nodo, proporcionado por la longitud del grafo.

El algoritmo de ingreso definido permite construir, como se ha demostrado, un grafo de distribución de longitud mínima, propiedad que resulta de especial importancia puesto que el retardo de distribución –es decir, el tiempo que tarda un objeto en transmitirse a todos los nodos de la red– está acotado por el producto de dicha longitud y el parámetro K .

Para la distribución de objetos se ha dividido el flujo en segmentos de K objetos. Cada uno de los K objetos que componen un segmento se distribuye por un árbol generador del grafo de distribución, llamado *árbol de difusión*. De este modo, se ha definido un conjunto de K árboles de difusión. Cada uno de estos árboles viene determinado por un algoritmo de planificación simple que asocia a cada una de las K aristas de entrada de un nodo, por orden de aparición, la recepción de uno de los K objetos del segmento. La longitud máxima de estos árboles es equivalente a la longitud del grafo de distribución de forma que, como se ha dicho, el retardo de distribución viene acotado finalmente por la longitud del grafo. A pesar de ello, en algunos casos particulares se han descrito algoritmos de planificación capaces de definir un conjunto de K árboles generadores de longitud menor a la longitud del grafo, lo que disminuye el retardo final de distribución.

Con el objeto de determinar las propiedades topológicas de los grafos de distribución, se ha planteado en primer lugar el caso en que los nodos establecen una única conexión de subida, es decir, en que $u = 1$. Esto significa que, con la excepción del nodo fuente, los nodos del grafo disponen de una única arista de salida y que, por tanto, su ancho de banda es $1/K$. A estos grafos en que $u = 1$ los hemos denominado *grafos de distribución de capacidad mínima*. Del análisis de tales casos se obtiene una expresión del orden de los grafos, esto es, del número de nodos que conforman cada grafo, así como una expresión de su longitud, que crece logarítmicamente con respecto al ancho de banda α del nodo fuente.

Se ha estudiado asimismo el caso general en que los nodos del grafo disponen de u aristas de salida, en donde $1 \leq u < K$. En este contexto se ha obtenido una expresión del orden del grafo conforme el cual la capacidad de la red –entendida aquí como el máximo número de nodos a los que se puede transmitir el flujo con calidad de servicio– aumenta significativamente en comparación con el número de nodos que puede recibir el flujo según un modelo clásico de cliente-servidor, en que la fuente es el único nodo que transmite

información. Se ha demostrado, también, que la longitud del grafo de distribución está acotada logarítmicamente con respecto al valor de α , lo que garantiza, en consecuencia, retardos de distribución reducidos. Finalmente, se han comparado las cotas de la longitud del grafo de distribución con su valor real en una serie de grafos determinados por los pares u y K . En cada caso se han representado ambos parámetros, longitud y cota de la longitud, en función del ancho de banda α del nodo fuente. El valor real de la longitud se ha calculado por construcción. Es decir, se ha programado el algoritmo de ingreso y se ha ejecutado hasta que ya no ha sido posible formar un nuevo nodo por falta de ancho de banda. La longitud del grafo de distribución se obtiene, como se ha explicado, sumando una unidad al valor del último nivel del grafo.

Para evaluar tanto el modelo teórico planteado como el comportamiento de la topología en una red de distribución, se ha realizado una simulación de transmisión de flujo de vídeo sobre redes VANET. La simulación se ha implementado sobre la plataforma ns-2. El flujo de vídeo se ha simulado mediante trazas reales de vídeo, codificado en formato MPEG-4. Como resultado de este estudio, se ha comprobado que la limitación en el consumo de ancho de banda de los nodos se traduce, como era nuestro propósito, en una disminución de los efectos de las interferencias y el desvanecimiento o *fading*. Dicho de otra forma, nuestra propuesta disminuye el tiempo de ocupación de los canales y, por tanto, el volumen de interferencias y la probabilidad de sufrir pérdidas. La topología descrita proporciona asimismo un retardo de distribución bajo y permite aumentar de forma considerable el número de nodos que reciben el flujo, en comparación con la arquitectura clásica de cliente-servidor.

Las topologías P2P que hemos definido están formadas por un nodo fuente de alta capacidad y un conjunto de nodos de ancho de banda restringido. Aunque esta limitación se traduce en la pérdida de capacidad de la red, garantiza como se ha dicho un consumo reducido del ancho de banda de los nodos. Por otro lado, en el caso en que se admitan nodos con un ancho de banda superior al de la tasa de transmisión de vídeo, estos pueden escogerse como nodos fuente de nuevos grafos para la transmisión del flujo.

De esta forma, los nodos de alta capacidad pueden considerarse nodos fuentes por un doble motivo. En primer término, porque generan físicamente el flujo de la información. Y, en segundo término, porque retransmiten el flujo, como nodos fuente, a nodos de baja capacidad con el objeto de conformar una nueva red P2P de difusión. La distribución del flujo original hasta cada uno de esos nodos fuente puede plantearse mediante una combinación de distintos grafos de distribución o, también, mediante una distribución multicast como la que se propone en el Capítulo 6 de esta memoria.

7.2. Líneas futuras

En el presente trabajo de investigación se han considerado grafos homogéneos, es decir, grafos en que todos los nodos a excepción de la fuente tienen el mismo ancho de banda.

Aunque se puede demostrar que tanto el orden como la longitud de un grafo heterogéneo pueden acotarse mediante los grafos homogéneos de u mínima y de u máxima, respectivamente, queda pendiente estudiar en estos casos la topología óptima de distribución. En este contexto, puede considerarse en primer término la conveniencia de incluir los nodos de mayor capacidad o bien en los primeros niveles o bien en los últimos niveles del grafo de distribución. También puede estudiarse una estrategia mixta que alterne nodos de alta capacidad con nodos de baja capacidad con el objetivo de reducir la longitud del grafo, de un lado, y de aumentar el número de nodos que pueden ingresar en la red, de otro.

En el Capítulo 2 se han descrito, en determinados escenarios de transmisión, una serie de planificaciones específicas capaces de obtener un retardo de distribución menor al que resulta de la planificación simple definida en ese mismo capítulo. Aunque se han discutido las condiciones necesarias para que puedan existir tales planificaciones especiales, queda por formalizar su definición en un caso general. En este escenario, el problema planteado es equivalente al de encontrar un conjunto de K árboles generadores que cumplan las tres propiedades siguientes. En primer lugar, la suma de los grados de entrada de un nodo para todos los árboles ha de valer K . En segundo lugar, la suma de los grados de salida de un nodo, también contabilizada sobre todos los árboles, ha de valer u . Y, en tercer término, la longitud de todos los árboles ha de ser menor a la longitud del grafo de distribución. De esta forma, la distribución de cada uno de los K objetos que forman un segmento podría ahorrarse, a través de su correspondiente árbol de difusión, uno o más de los saltos de nivel del grafo de distribución y, por tanto, un tiempo de transmisión igual a K o más unidades en cada salto. Este ahorro, como queda dicho, se traduce finalmente en una reducción del retardo total de distribución.

Queda pendiente, asimismo, el cálculo de una expresión exacta de la longitud del grafo de distribución que generalice la expresión obtenida para $u = 1$ del Capítulo 3. Recuérdese que en el presente trabajo hemos calculado la longitud del grafo, en un caso general, por construcción. Es decir, hemos programado el algoritmo de ingreso y lo hemos ejecutado hasta que no ha sido posible añadir un nuevo nodo en el grafo por falta de ancho de banda. En este punto, la longitud H del grafo se obtiene como la suma del índice del último nivel más una unidad. Para este caso general se ha obtenido asimismo una cota que, según se ha demostrado, ajusta correctamente la longitud real del grafo de distribución y garantiza un crecimiento logarítmico de los valores de dicho parámetro. Como línea futura queda, con todo, el cálculo exacto de una expresión del valor de la longitud en función de los parámetros α , K y u que definen el grafo de distribución.

En el análisis de nuestras topologías de transmisión se han considerado siempre condiciones de estabilidad. Es decir, hemos supuesto que, una vez que un nodo ha ingresado en la red de distribución, permanece en ella durante toda la transmisión. De este modo se han podido calcular parámetros del grafo como el orden o la longitud. En un trabajo futuro se plantea la posibilidad de analizar redes dinámicas, es decir, redes cuya topología varíe a lo largo del tiempo de transmisión en función de la salida o incorporación de nuevos nodos en la red. En este caso hay que definir políticas de admisión y reorganización para minimizar

el impacto, en términos de calidad de servicio, tanto de la pérdida como del ingreso de nodos en el grafo.

Por otra parte, puede plantearse un escenario en que se transmita más de una secuencia de información de forma simultánea. En este contexto, el ancho de banda disponible de cada nodo debe ser dividido en dos fracciones. De un lado, debe reservarse una parte para la transmisión de su propia señal, considerando que el nodo actúa en este caso como fuente. Y, por otro lado, el restante ancho de banda debe destinarse a la retransmisión de objetos procedentes de otras fuentes. Puesto que ha reservado ancho de banda para otras aplicaciones, nuestro modelo puede resultar apropiado en este contexto. Si el flujo transmitido se compone además de señales de vídeo, puede estudiarse el efecto de la elección del codificador en la calidad de la transmisión.

Igualmente, como se ha apuntado en el Capítulo 5, queda pendiente la posibilidad de realizar simulaciones que consideren los mecanismos de calidad de servicio definidos en el estándar IEEE 802.11p. Recuérdese que estos mecanismos asignan a cada paquete una categoría de acceso (*Access Category*, AC) que se utiliza como criterio de prioridad de acuerdo con cuatro clases de paquetes definidas: *background* (BK), *best effort* (BE), vídeo (VI) y voz (VO). El empleo de estas clases puede reducir, como se ha explicado, las pérdidas de paquetes en la transmisión de flujos de vídeo. En consecuencia, en pruebas futuras puede plantearse el uso de dichos mecanismos de prioridad como medio para mejorar la calidad de la transmisión.

En este contexto existe asimismo la posibilidad de analizar con mayor exhaustividad la evolución de los parámetros de la transmisión –fundamentalmente retardo, pérdidas de paquetes y tiempo durante el cual el flujo se interrumpe en cada nodo– en función de los parámetros que caracterizan una red VANET y, más en particular, de los valores de α , K y u que definen nuestro modelo. Del mismo modo, puede estudiarse el comportamiento de nuestra topología en otro tipo de redes, como ejemplo, redes corporativas o redes de distribución de contenidos por pago. Por otro lado, dado que en nuestra topología aumenta el número de nodos respecto al modelo cliente-servidor y a que dicho número puede caracterizarse además de forma simple, consideramos que nuestro modelo puede funcionar positivamente en el contexto del llamado *green networking* [29, 30].

Por último, en un escenario real, pueden tomarse en consideración las características de la red subyacente cuando un nodo se une o abandona la red. De este modo, si se conectan en niveles consecutivos del grafo aquellos nodos que en la red física están separados por un número mínimo de enlaces, pueden optimizarse tanto el retardo de la transmisión como, en el caso de redes inalámbricas, los efectos de las interferencias y el desvanecimiento, con la consiguiente mejora en la calidad de la transmisión.

Bibliografía

- [1] S. Cherry, “The battle for broadband [Internet Protocol television],” *IEEE Spectrum*, vol. 42, num. 1, pp. 24–29, January 2005.
- [2] V. Padmanabhan, H. Wang, y P. Chou, “Resilient peer-to-peer streaming,” en *Network Protocols, 2003. Proceedings. 11th IEEE International Conference on*, Nov 2003, pp. 16–27.
- [3] M. Castro, P. Druschel, A.-M. Kermarrec, A. Nandi, A. Rowstron, y A. Singh, “Splitstream: High-bandwidth multicast in cooperative environments,” *SIGOPS Oper. Syst. Rev.*, vol. 37, num. 5, pp. 298–313, Oct. 2003. [Online]. Disponible en: <http://doi.acm.org/10.1145/1165389.945474>
- [4] B. Li, S. Xie, Y. Qu, G. Keung, C. Lin, J. Liu, y X. Zhang, “Inside the new coolstreaming: Principles, measurements and performance implications,” en *INFOCOM 2008. The 27th Conference on Computer Communications. IEEE*, 2008, pp. 1031–1039.
- [5] N. Magharei y R. Rejaie, “Prime: Peer-to-peer receiver-driven mesh-based streaming,” *IEEE/ACM Trans. Netw.*, vol. 17, num. 4, pp. 1052–1065, Aug. 2009. [Online]. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1109/TNET.2008.2007434>
- [6] M. F. M. Firdhous, “Multicasting over Overlay Networks - A Critical Review,” *International Journal of Advanced Computer Science and Applications(IJACSA)*, vol. 2, num. 3, 2011. [Online]. Disponible en: <http://ijacsa.thesai.org/>
- [7] K. Z. Ghafoor, K. A. Bakar, Z. M. Zainuddin, C.-H. Ke, y A. J. Gonzalez, “Reliable video geocasting over vehicular ad hoc networks.” *Ad Hoc & Sensor Wireless Networks*, vol. 15, num. 2-4, pp. 201–221, 2012.
- [8] J. Singh, N. Bambos, B. Srinivasan, y D. Clawin, “Wireless LAN performance under varied stress conditions in vehicular traffic scenarios,” en *Vehicular Technology Conference, 2002. Proceedings. VTC 2002-Fall. 2002 IEEE 56th*, vol. 2, 2002, pp. 743–747.
- [9] “Wireless LAN medium access control (MAC) and physical layer (PHY) specifications amendment 6: Wireless access in vehicular environments,” *IEEE Std 802.11p-2010*, 2010.

- [10] J.-S. Park, U. Lee, S. Y. Oh, M. Gerla, D. S. Lun, W. W. Ro, y J. Park, "Delay analysis of car-to-car reliable data delivery strategies based on data mulling with network coding," *IEICE - Trans. Inf. Syst.*, vol. E91-D, num. 10, pp. 2524–2527, Oct. 2008.
- [11] H. Chen, B. Sun, Y. Zeng, y X. He, "An entropy-based fuzzy controllers QoS routing algorithm in MANET," en *Hybrid Intelligent Systems, 2009. HIS '09. Ninth International Conference on*, vol. 3, 2009, pp. 235–239.
- [12] K. Z. Ghafoor, K. A. Bakar, J. Lloret, R. Khokhar, y K. Lee, "Intelligent beaconless geographical forwarding for urban vehicular environments," *Wireless Networks*, vol. 19, num. 3, pp. 345–362, 2013.
- [13] K. Z. Ghafoor, J. Lloret, K. A. Bakar, A. S. Sadiq, y S. A. B. Mussa, "Beaconing approaches in vehicular ad hoc networks: A survey," *Wireless Personal Communications*, pp. 1–28, 2013.
- [14] N. N. Qadri, A. Liotta, M. Altaf, M. Fleury, y M. Ghanbari, "Effective video streaming using mesh P2P with MDC over MANETs," *J. Mob. Multimed.*, vol. 5, num. 4, pp. 301–316, Dec. 2009.
- [15] N. Qadri, M. Fleury, B. Rofoee, M. Altaf, y M. Ghanbari, "Robust P2P multimedia exchange within a VANET," *Wireless Personal Communications*, vol. 63, num. 3, pp. 561–577, 2012.
- [16] S. McCanne y S. Floyd, "NS network simulator," 2011.
- [17] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*, 1st ed. Piscataway, NJ, USA: IEEE Press, 1996.
- [18] E. Alba y J. Toutouh, "Accuracy and efficiency in simulating vanets," en *In Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences*. Physica Verlag, Springer-Verlag. 109, 2008, pp. 568–578.
- [19] N. Arulkumar y E. Raj, "A simulation based study to implement intelligent transport systems concepts in vanets using aodv routing protocol in ns2," en *Advanced Computing (ICoAC), 2012 Fourth International Conference on*, Dec 2012, pp. 1–4.
- [20] S. Marinoni y H. Kari, "Ad hoc routing protocol's performance: a realistic simulation based study," *Telecommunication Systems*, vol. 33, num. 1-3, pp. 269–289, 2006. [Online]. Disponible en: <http://dx.doi.org/10.1007/s11235-006-9015-z>
- [21] D. Dhoutaut, A. Régis, y F. Spies, "Impact of radio propagation models in vehicular ad hoc networks simulations," en *Proceedings of the 3rd International Workshop on Vehicular Ad Hoc Networks*, ser. VANET '06. New York, NY, USA: ACM, 2006, pp. 40–49. [Online]. Disponible en: <http://doi.acm.org/10.1145/1161064.1161072>
- [22] A. Mahajan, N. Potnis, K. Gopalan, y A. Wang, "Modeling vanet deployment in urban settings," en *Proceedings of the 10th ACM Symposium on Modeling*,

- Analysis, and Simulation of Wireless and Mobile Systems*, ser. MSWiM '07. New York, NY, USA: ACM, 2007, pp. 151–158. [Online]. Disponible en: <http://doi.acm.org/10.1145/1298126.1298154>
- [23] J. Härri, F. Filali, C. Bonnet, y M. Fiore, “Vanetmobisim: generating realistic mobility patterns for VANETs,” en *Proceedings of the 3rd international workshop on Vehicular ad hoc networks*, 2006, pp. 96–97.
- [24] M. Fiore, J. Härri, F. Filali, y C. Bonnet, “Vehicular mobility simulation for vanets.” en *Annual Simulation Symposium*. IEEE Computer Society, 2007, pp. 301–309.
- [25] CARLINK::UMA, “D1.3.2-vanetmobisim/ns-2: A VANET simulator for CARLINK,” University of Málaga, Tech. Rep., 2007.
- [26] “MPEG-4 and H.263 video traces for network performance evaluation,” <http://trace.eas.asu.edu/TRACE/trace.html>, 2000.
- [27] Y. Wang, A. Ahmed, B. Krishnamachari, y K. Psounis, “IEEE 802.11p performance evaluation and protocol enhancement,” en *IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety ICVES 2008*, 2008, pp. 317–322.
- [28] A. Bar-Noy y S. Kipnis, “Designing broadcasting algorithms in the postal model for message-passing systems,” en *Proceedings of the fourth annual ACM symposium on Parallel algorithms and architectures*, ser. SPAA '92. New York, NY, USA: ACM, 1992, pp. 13–22.
- [29] A. Khalek y Z. Dawy, “Energy-efficient cooperative video distribution with statistical qos provisions over wireless networks,” *Mobile Computing, IEEE Transactions on*, vol. 11, num. 7, pp. 1223–1236, July 2012.
- [30] N. Xu, J. Yang, M. Needham, D. Boscovic, y F. Vakil, “Toward the green video cdn,” en *Green Computing and Communications (GreenCom), 2010 IEEE/ACM Int'l Conference on Int'l Conference on Cyber, Physical and Social Computing (CPSCoM)*, Dec 2010, pp. 430–435.

Un abrazo para Montse