Càlcul Numèric d'Objectes Invariants amb Ondetes

Doctorand: David Romero i Sànchez
Tutor: Lluís Alsedà i Soler.

Resum

Aquesta memòria està dividida en dues parts. La primera (Capítols 1 – 4) està dedicada a fer un recordatori per tal d'introduir la teoria i les eines que seran usades a la segona part (Capítols 5 – 7). Al Capítol 1 hi ha una introducció autocontinguda a les ondetes. Com que s'usaran ondetes de Daubechies amb $p \geq 1$ moments nuls, ens centrarem en les propietats d'aquestes ondetes. També hi ha la reformulació de les esmentades ondetes d'$\mathbb{R}$ a $\mathbb{S}^1$ i, com és usual en aquest canvi de llenguatge, les hem anomenat ψ^{PER}. A la part final d'aquest Capítol 1 s'introdueixen els espais de regularitat $\mathscr{B}^s_{2,2}(\mathbb{S}^1)$ i $\mathscr{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{S}^1)$ per tal de fer una ullada ràpida a la relació entre els coeficients d'ondetes, $\langle f, \psi^{\text{PER}}_{-j,n}\rangle$, i els esmentats espais funcionals $\mathscr{B}^s_{2,2}(\mathbb{S}^1)$ i $\mathscr{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{S}^1)$.

El tema principal del Capítol 2 és el càlcul efectiu dels coeficients d'ondetes (usant tres tècniques diferents): la Fast Wavelet Transform, regles de quadratura i la solució d'un sistema (no)-lineal d'equacions. Més concretament, en aquest capítol es dóna un algorisme que permet calcular ψ^{PER} en una malla de punts d'$\mathbb{S}^1$. Aquest mètode està basat en l'algorisme de Daubechies–Lagarias (vegeu [DL91, DL92]) i és un punt crucial d'aquesta Tesi. Deixant de banda aquests mètodes, també hem fabricat, seguint tècniques similars a [BBDK01, BBD$^+$02], una quadratura de Gauss–Lobatto definint $\psi(x) + c$ com a pes de la quadratura.

Els dos darrers capítols d'aquesta primera part estan dedicats a recopilar el marc teòric per on es mourà la present memòria. Concretament, al Capítol 4 s'hi introdueixn molts dels conceptes i també es caracteritzen els mecanismes, involucrats en les propietats geomètriques per a una certa família d'*skew products* forçats quasiperiòdicament. De fet, seguint algunes idees de [AM08, Har12] s'hi estenen alguns resultats de [Sta97, Sta99] per a certes classes de funcions. També hi ha descrita la regularitat "*teòrica*" del model Keller-GOPY. Tots aquests esforços estan encarats a justificar l'ús de la creació d'un programa informàtic per fer càlculs i estudis de regularitat en altres casos d'SNA's.

Centrant-nos a la segona part d'aquesta Tesi, s'hi descriuen dos enfocs diferents d'un mateix algorisme. Seguint [dlLP02], aquest algorisme consisteix en com es poden estimar regularitats, en termes de $\mathscr{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{S}^1)$, per a $s \in \mathbb{R}$ utilitzant $\langle f, \psi^{\text{PER}}_{-j,n}\rangle$. Aquest algorisme és el principal objecte d'estudi del Capítol 5. En aquest capítol s'usa fent servir la Fast Wavelet Transform però és adaptable a d'altres situacions. De fer, al Capítol 6 també hi ha l'ús d'aquest algorisme però amb una altra tècnica per a obtenir $\langle \varphi, \psi^{\text{PER}}_{-j,n}\rangle$.

Efectivament, els dos darrers capítols de la tesi estan centrats en resoldre l'Equació d'Invariància per a diversos casos. A més, tenint en compte les bones propietats de la família d'ondetes de Daubechies (vegeu per exemple [Dau92, HW96, Tri06]) s'hi descriuen dues estratègies per a obtenir $\langle \varphi, \psi^{\text{PER}}_{-j,n}\rangle$. Les dues són similars però, per la simplicitat de l'odneta de Haar ($p = 1$), la primera metodologia ens dóna un mètode casi explicit per calcular els coeficients de la wavelet de Haar. tal i com hem dit, més enllà de l' "*approximació numèrica*" de φ, també es dona una estimació de la regularitat, en termes de $\mathscr{B}^s_{2,2}(\mathbb{S}^1)$ i $\mathscr{B}^s_{\infty,\infty}(\mathbb{S}^1)$, per a certs models d'*skew products* usant l'ondeta de Haar. Aquestes classificacions també s'han fet per a d'altres ondetes de Daubechies. Amb tot, val a dir que quan $p > 1$ el nucli del mètode iteratiu és l'evaluació massiva d'ψ^{PER} i, també, la separació del l'Operator Transfer condicionat per l'esquerra. Com un a més a més, també hi ha l'exploració numèrica de l'exponent de Lyapunov per un cas particular dels sitemes proposats [AM08].

Referències

[AM08] Lluís Alsedà and Michał Misiurewicz. Attractors for unimodal quasiperiodically forced maps. *J. Difference Equ. Appl.*, 14(10-11):1175–1196, 2008.

[BBD$^+$02] Arne Barinka, Titus Barsch, Stephan Dahlke, Mario Mommer, and Michael Konik. Quadrature formulas for refinable functions and wavelets. II. Error analysis. *J. Comput. Anal. Appl.*, 4(4):339–361, 2002.

[BBDK01] A. Barinka, T. Barsch, S. Dahlke, and M. Konik. Some remarks on quadrature formulas for refinable functions and wavelets. *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, 81(12):839–855, 2001.

[Dau92] Ingrid Daubechies. *Ten lectures on wavelets*, volume 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[DL91] Ingrid Daubechies and Jeffrey C. Lagarias. Two-scale difference equations. I. Existence and global regularity of solutions. *SIAM J. Math. Anal.*, 22(5):1388–1410, 1991.

[DL92] Ingrid Daubechies and Jeffrey C. Lagarias. Two-scale difference equations. II. Local regularity, infinite products of matrices and fractals. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(4):1031–1079, 1992.

[dlLP02] Rafael de la Llave and Nikola P. Petrov. Regularity of conjugacies between critical circle maps: an experimental study. *Experiment. Math.*, 11(2):219–241, 2002.

[Har12] Àlex Haro. On strange attractors in a class of pinched skew products. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32(2):605–617, 2012.

[HW96] Eugenio Hernández and Guido Weiss. *A first course on wavelets*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996. With a foreword by Yves Meyer.

[Sta97] Jaroslav Stark. Invariant graphs for forced systems. *Phys. D*, 109(1-2):163–179, 1997. Physics and dynamics between chaos, order, and noise (Berlin, 1996).

[Sta99] Jaroslav Stark. Regularity of invariant graphs for forced systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(1):155–199, 1999.

[Tri06] Hans Triebel. *Theory of function spaces. III*, volume 100 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.