UNIVERSITAT AUTONOMA DE BARCELONA

DEPARTAMENT D'ECONOMIA DE L'EMPRESA

INFORMACIO INCOMPLETA I TEORIA DE JOCS
APLICACIO A LA NEGOCIACIO DE CONTRACTES ENTRE EMPRESES

TESI

que, per a optar al Grau de Doctor en Ciències Econòmiques, presenta la llicenciada

GLORIA ESTAPE DUBREUIL

Dirigida pel Doctor:
Cesar Villazon Hervas
Catedràtic del Departament d'Economia de l'Empresa de la U.A.B.

Bellaterra, juny de 1990

6.3. L'enfocament de Harsanyi: el tipus d'un jugador

Per a evitar la dificultat que, en principi, suposa adoptar el punt de vista de la teoria subjectivista de la decisió presentada en l'apartat anterior, Harsanyi (1967-68) va introduir el concepte de "tipus" d'un jugador. Amb el seu ajut és possible sintetitzar la informació i creences possibles de cada jugador en el joc, permetent una anàlisi similar a la que es pot fer d'un joc amb informació completa. Comentem a continuació aquest enfocament, que exposarem a partir d'una situació de joc general, en què intervinguin n jugadors.

En primer lloc, Harsanyi argumenta que qualsevol situació de joc en la que hi hagi informació incompleta per part, almenys, d'un jugador, en qualsevol aspecte del mateix (per exemple, desconeixement de la dependència específica entre les accions dels jugadors i el resultat físic del joc; o dels espais d'estratègies de què disposen els jugadors, etc.) es pot reformular de manera que <u>la manca d'informació estigui reflexada només en les funcions d'utilitat dels jugadors</u> [cf.op.cit.,part I, secció 2]. Per tant, des del punt de vista d'un dels jugadors, les funcions d'utilitat de tots els jugadors es poden considerar conegudes, excepte pel que fa al valor que prenen alguns paràmetres de les mateixes. En la notació de Harsanyi, tindrem:

$$x_i = U_i(s_1,\ldots,s_n) = V_i^*(s_1,\ldots,s_n;a_{01},a_{1i},\ldots,a_{ni})$$

on x_i és la utilitat que obtindrà el jugador i, si en el joc s'utilitzen les estratègies $s_1,\ldots,s_n$. Encara que el jugador no conegui U_i, pot expressar aquesta utilitat amb una funció V_i^* de forma matemàtica coneguda, incorporant-hi els paràmetres a_{ki}, que, en opinió del jugador que fa l'anàlisi, representen les diferents categories de desconeixement del joc: a_{oi} són els paràmetres que intervenen en U_i desconeguts per tots els jugadors, mentre que els vectors a_{ki}, per $k=1,\ldots,n$, contenen aquells paràmetres de U_i que el jugador k coneix, encara que potser altres jugadors no.

Si denotem per $a_k=(a_{k1},\ldots,a_{kn})$ el vector que, en opinió del jugador que està analitzant el joc, resumeix la informació que el jugador k té sobre les funcions d'utilitat $U_1,\ldots,U_n$, no hi ha dificultat en considerar V_i^* depenent de tots aquests paràmetres - encara que en realitat sigui constant respecte a alguns d'ells -:

$$x_i = V_i^*(s_1,\ldots,s_n;a_o,a_1,\ldots,a_n) \qquad \forall\, i=1,\ldots,n$$

Fent servir la teoria subjectivista de la presa de decisions, el jugador, i, assignarà una distribució de probabilitats (subjectives) conjunta a aquests vectors desconeguts:

$$P_i=P_i(a_o,a_{-i},b_{-i})$$

on utilitzarem la notació a_{-i} per referir-nos al vector de n-1 components obtingut a partir de $a=(a_1,\ldots,a_n)$ treient la i-éssima component, sobre la que el jugador i no ha de fer cap valoració de probabilitat, ja que és el vector dels paràmetres que coneix. A més a més, es fa intervenir en aquesta funció de distribució els paràmetres $b_1,\ldots,b_{i-1},b_{i+1},\ldots,b_n$, que resumeixen aquella informació que el jugador i desconeix sobre les distribucions dels altres n-1 jugadors.

Igual com s'ha fet per les funcions d'utilitat, encara que el jugador que analitza el joc no conegui P_i, ha de poder escriure:

$$P_i(a_o,a_{-i},b_{-i})=R_i(a_o,a_{-i},b_{-i}|b_i)$$

on R_i és una funció coneguda pels n jugadors, i b_i els paràmetres de P_i que algun jugador $k\neq i$ desconeix.

Com és usual, el fet de què tant V_i^* com R_i depenguin d'informació desconeguda per tots els jugadors (el vector a_o) no significa que s'introdueixi una font addicional de problemes en el model. En efecte, els jugadors hauran de considerar la utilitat esperada respecte a a_o - en termes de la distribució de probabilitats subjectiva de cada jugador - com a mesura adequada a partir de la qual considerar les accions a emprendre:

$$V_i(s_1,\ldots,s_n;a)=\int_{A_o} V_i^*(s_1,\ldots,s_n;a_o,a)d_{(a_o)}R_i(a_o,a_{-i},b_{-i}|b_i)$$

així com la distribució marginal de R_i per a valorar les accions dels altres jugadors:

$$R_i(a_{-i},b_{-i}|b_i) = \int_{A_o} d_{(a_o)}R_i(a_o,a_{-i},b_{-i}|b_i)$$

on A_o és el domini dels vectors a_o.

Harsanyi proposa que, amb aquesta descripció, el joc es pot estudiar com un joc d'informació imperfecta[4], ja que essent la forma de les funcions V_i i R_i coneixement comú, aquestes, conjuntament amb els valors que puguin prendre els vectors $c_i=(a_i,b_i)$, en són una descripció completa. L'especificació de les creences de tots els jugadors a través dels vectors c_i permet un tractament diferent del clàssic en un joc d'informació incompleta.

---

4. Aquest terme va ésser introduït per von Neumann i Morgenstern (1944), per a descriure jocs en què els jugadors poden obtenir informació privada diferent en el transcurs del joc, tot i que comencen amb la mateixa informació.

El vector c_i, que Hasanyi anomena vector de "tipus" o "atributs" d'un jugador, identifica completament a un cert jugador. En paraules seves [Harsanyi(1967), pp.171-172]:

> "...podem considerar que el vector c_i representa certs atributs físics, socials i psicològics del propi jugador, en el sentit de què resumeix alguns paràmetres crucials de la funció de pagament U_i, així com els paràmetres principals de les seves creences sobre el seu entorn físic i social,.... La informació incompleta dels jugadors sobre la vertadera naturalesa de la situació de joc està representada per la hipòtesi de què, en general, el valor real del vector d'atributs c_i serà conegut només pel propi jugador .... Les regles del joc com a tal, permeten a qualsevol jugador donat pertànyer a qualsevol d'entre un cert nombre de possibles "tipus", corresponents als diferents valors que pot prendre c_i,.... Suposem sempre que cada jugador coneix el seu propi tipus real, però que en general ignorarà els tipus reals dels altres jugadors."

6.4. Desenvolupament de Mertens i Zamir: el joc bayesià universal

L'argument de Harsanyi, donat de forma més aviat intuïtiva, es veu reforçat pel tractament, molt més rigorós des d'un punt de vista matemàtic, donat per Mertens i Zamir (1985) a aquesta mateixa qüestió[5]. En el seu article demostren que, donada qualsevol situació real que volguem modelitzar a través d'un joc, en la que els jugadors tinguin informació incompleta, sempre podem trobar conjunts de tipus suficientment amplis per a poder caracteritzar totes les possibles informacions privades i creences que pugui tenir un jugador i que tinguin importància en el trascurs del joc.

Partint d'un conjunt S que contingui tots els possibles valors dels paràmetres del que almenys un jugador desconeix, identifiquen un conjunt Y d'"estats del món", en què cada punt conté totes les característiques, creences i creences mútues de tots els jugadors. Mertens i Zamir anomenen a Y espai de creences universal generat per S, i demostren que qualsevol jerarquia infinita de creences porta a un punt de Y. A més a més, construeixen un

5. Sobre aquest tema val la pena destacar també els articles de Böge i Eisele (1979) i Armbruster i Böge (1979), que en part, comparteixen aquest enfocament.

espai T, l'espai de possibles tipus d'un jugador en el joc, tal que:

(i) $Y=Sx[T]^n$: un estat del món consisteix en un estat de la natura i una n-pla de tipus, un per jugador.

(ii) T es pot identificar (a través d'un homomorfisme adequat) amb el conjunt de totes les distribucions de probabilitat a $Sx[T]^{n-1}$; és a dir, el tipus d'un jugador és simplement una distribució de probabilitats conjunta sobre S i els tipus dels altres n-1 jugadors.

Aquests resultats són un reflexe prou fidel del que Harsanyi proposava en el seu article.

Seguirem l'argument de Mertens i Zamir a partir de l'esquema que proposa Myerson (1985a)[6]. Donat el conjunt S, l'espai d'incertesa bàsica del joc, i que sense pèrdua de generalitat es pot considerar compacte [cf. Mertens i Zamir(1985), p.3], sigui Q_i^k el conjunt de possibles creences d'ordre k del jugador i. Seguint el comentari i la notació de l'apartat 6.2, és fàcil veure que:

$$Q_i^1 = \pi(S)$$

$$Q_i^k = \pi(SxQ_{-i}^{k-1})=\pi(SxQ_1^{k-1}x\ldots xQ_{i-1}^{k-1}xQ_{i+1}^{k-1}x\ldots xQ_n^{k-1}) \quad k=2,\ldots$$

6. Veure també el resum de Ricart (1988), pp. 99-108.

Cal tenir en compte que, per k donat, els conjunts Q_i^k són idèntics pels diferents jugadors: distribucions de probabilitat sobre el producte cartesià de S i n-1 còpies del conjunt de creences d'ordre k-1, corresponents a les creences que no coneix el jugador i. Els subíndex hi són només per a facilitar la comprensió d'aquests elements, matemàticament força complexes.

Mertens i Zamir observen que les creences d'ordre k d'un jugador determinen totes les seves creences d'ordre inferior, definint-les com a distribucions marginals sobre el conjunt anterior. Donat $q_i^k \in Q_i^k$, podem associar-li un element de Q_i^{k-1} a través d'una funció, que anomenarem $\Phi_i^{k-1}: Q_i^k \longrightarrow Q_i^{k-1}$, de la manera següent:

$$[(\Phi_i^{k-1})(q_i^k)](\Omega) := q_i^k(A_k) \qquad \forall\, \Omega \subset SxQ_{-i}^{k-2}$$

on definim $A_k := \left\{(s,(q_j^{k-1})_{j\neq i}) \;/\; (s,[\Phi_j^{k-2}(q_j^{k-1})]_{j\neq i}) \in \Omega\right\}$

És a dir, per cada element q_i^k, conjunt de creences d'ordre k de l'individu i, construïm les creences d'ordre k-1, $\Phi_i^{k-1}(q_i^k)$, que ha de ser un element de $Q_i^{k-1} = \pi(SxQ_{-i}^{k-2})$. Es defineix de manera que la imatge d'un subconjunt Ω de SxQ_{-i}^{k-2} sigui la imatge per q_i^k del conjunt A_k, un subconjunt de SxQ_{-i}^{k-1} format pels elements que, conjuntament amb els de S, tenen com a imatge per Φ_j^{k-2} elements de Ω.

El procediment de construcció de les funcions Φ_i^k és, doncs, inductiu. Per acabar correctament aquesta inducció, ens falta definir $\Phi_i^1 : Q_i^2 \longrightarrow Q_i^1$, cosa que podem fer de manera similar:

$$[\Phi_i^1(q_i^2)](\Omega) := q_i^2(\Omega x Q_{-i}^1) \qquad \forall \Omega \subset S$$

A la inversa, donades unes creences de primer ordre $\bar{q}_i^1$ per un jugador qualsevol, si construïm les creences de segon ordre a partir d'aquestes, s'ha de complir que les de primer ordre siguin exactament la distribució marginal de les creences de segon ordre sobre S. Dit d'un altra manera, per cada jugador i tenim $\bar{q}_i^1 = \Phi_i^1(\bar{q}_i^2)$. Però ja que això es dedueix dels axiomes de la probabilitat, cada jugador i sap que pels altres jugadors $j \neq i$ es donarà el mateix: $\bar{q}_j^1 = \Phi_j^1(\bar{q}_j^2)$. Per tant, les creences de tercer ordre que es formin compliran també aquesta condició: $\bar{q}_i^2 = \Phi_i^2(\bar{q}_i^3)$. Continuant inductivament aquest raonament, es pot comprovar que qualsevol jerarquia de creences coherent ha de ser del conjunt:

$$Q_i^\infty = \{q_i = (q_i^1, q_i^2, \ldots) \in \prod_{k=1}^{\infty} Q_i^k \ / \ q_i^{k-1} = \Phi_i^{k-1}(q_i^k) \quad \forall k\}$$

i ja que cada un dels espais Q_i^k és compacte, Q_i^∞ també ho serà (respecte a la topologia producte).

Els espais Q_i^∞ es poden considerar els espais de possibles tipus del jugador i en el joc. Un element $q_i \in Q_i^\infty$ (un possible jugador i del joc, de fet) indueix una distribució de probabilitats sobre SxQ_{-i}^∞ de la manera següent:

$$P_i(\Omega|q_i) := \lim_{k\to\infty} q_i^k(\{(s,(q_j^{k-1})_{j\neq i}) \ / \ (s,(q_j)_{j\neq i})\in\Omega\})$$

per cada subconjunt de Borel de SxQ_{-i}^∞.

Mertens i Zamir demostren que $P_i(|.)$ és l'homomorfisme entre Q_i^∞ i $\pi(SxQ_{-i}^\infty)$ que es postulava a (ii), de manera que realment el tipus d'un jugador està determinat per un element de Q_i^∞, i aquest, al seu torn, permet definir de manera única les seves creences sobre els altres n-1 jugadors.

En particular, el conjunt d'incertesa bàsica S només influeix en el comportament dels jugadors en la mesura en què aquests tenen informació sobre S. Però aquesta està expressada en les seves creences, i per tant, si considerem en lloc de $P_i(.|q_i)$, la distribució marginal que se n'obté respecte a Q_{-i}^∞, no perdem cap de les estructures que tenen importància en la previsió del comportament dels jugadors:

$$p_i(\Omega|q_i) := P_i(Sx\Omega|q_i) \qquad \forall i=1,\dots,n \qquad \forall \Omega\subset Q_{-i}^\infty$$

i p_i caracteritza completament un jugador de tipus q_i. Per tant, podem prescindir del conjunt S en la descripció de la situació de joc, ja que els conjunts de tipus de cada jugador el substitueixen amb escreix.

Per a tenir completament especificat el joc, ens falta definir les funcions d'utilitat dels jugadors, expressades en funció dels seus conjunts de tipus, en comptes de respecte al conjunt d'incertesa bàsica. El canvi d'estructures és relativament senzill de fer. En efecte, donada la funció d'utilitat del jugador i en la situació de joc, $w_i: A_i x \ldots x A_n x S \longrightarrow R$, podem definir una nova funció, $u_i: A_1 x \ldots x A_n x Q_1^\infty x \ldots x Q_n^\infty \longrightarrow R$ considerant com a imatge del punt $(s_1, \ldots, s_n, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n)$ l'esperança condicional de $w_i(s_1, \ldots, s_n, \theta)$ respecte a la distribució de probabilitats condicional pels elements de S induïda per $\bar{q}_i$, suposant que q_{-i} sigui el vector dels tipus vertaders dels altres n-1 jugadors:

$$u_i(s_1, \ldots, s_n, \bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_n) = E_{\bar{q}_i}\{w_i(s_1, \ldots, s_n, \theta) \mid q_{-i} = \bar{q}_{-i}\}$$

D'aquesta manera hem definit el que podríem anomenar "<u>joc bayesià universal</u>":

$$\Gamma^\infty = (A_1, \ldots, A_n;\ Q_1^\infty, \ldots, Q_n^\infty;\ p_1, \ldots, p_n;\ u_1, \ldots, u_n)$$

que especifica les accions que pot emprendre cada jugador; el conjunt de tipus a què pot pertànyer; la distribució de probabilitats de cada individu respecte als tipus dels altres jugadors (que caracteritza completament el tipus real del jugador); així com les utilitats que obtenen en funció de les accions que triïn i dels seus respectius tipus reals. El treball de Mertens i Zamir ens assegura que qualsevol situació de joc en què hi hagi informació incompleta es pot descriure a través de les estructures de Γ^{∞}.

6.5. Equilibris de Nash en sentit bayesià a Γ^{∞}

En un joc bayesià universal, generat per un conjunt d'incertesa bàsica S, l'acció d'un jugador estarà determinada generalment pel seu tipus. Però ja que els altres jugadors no saben quin és aquest tipus en realitat, si volen preveure el seu comportament han de considerar les accions que podria emprendre el dit jugador <u>en qualsevol dels tipus que el pugui caracteritzar</u>. Això significa que, en qualsevol concepte de solució del joc que es pugui definir, s'haurà de tenir en compte que les previsions dels jugadors, respecte al comportament dels seus oponents, només es poden fer en base a estratègies que siguin funcions mesurables de la forma:

$$\sigma_i : Q_i^{\infty} \longrightarrow A_i \qquad \forall\, i=1,\ldots,n$$

Evidentment, des del punt de vista d'un jugador donat i, aquest només ha de considerar les funcions σ_j per $j \neq i$. A més, només farà servir la imatge per σ_i del seu vertader tipus, que ja coneix al començament del joc. Però la definició de qualsevol concepte de solució s'ha d'establir utilitzant les funcions $\sigma_1,\ldots,\sigma_n$, ja que un jugador només podrà "explotar" la seva informació privada si la seva actuació no deixa entreveure quina és.

Naturalment, degut a la manca d'informació completa d'aquest joc, la valoració de les diverses accions que un jugador pot dur a terme, s'haurà de fer en termes de la utilitat esperada que se'n pugui obtenir amb el seu ús. Però aquesta utilitat depèn també de les accions que emprenguin els altres jugadors, de manera que haurem d'utilitzar la notació següent:

$$U_i(\sigma|\bar{q}_i) := \int_{Q^{\infty}_{-i}} u_i(\sigma(q),q)\ dp_i(q_{-i}|\bar{q}_i)$$

per a designar la utilitat que espera obtenir el jugador i de tipus $\bar{q}_i$, si els n jugadors utilitzen les estratègies que indica el vector $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$. Per a simplificar l'expressió hem escrit q per $(q_1,\ldots,q_{i-1},\bar{q}_i,q_{i+1},\ldots,q_n)$, i q_{-i} pel vector q sense la seva i-èssima component.

Encara que les estructures que hem donat a Γ^{∞} no defineixen un joc en el sentit usual, el concepte d'equilibri de Nash s'hi pot estendre de manera natural.

Un conjunt de n estratègies $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_n)$ pels jugadors d'un joc bayesià universal Γ^{∞} estaran en <u>equilibri de Nash en sentit bayesià</u> si compleixen:

$$U_i(\sigma|q_i) \geq U_i(\sigma_{-i},\tilde{\sigma}_i|q_i) \qquad \forall q_i \in Q^{\infty}_i \quad \forall i=1,\ldots,n \quad \forall \tilde{\sigma}_i$$

on $(\sigma_{-i},\tilde{\sigma}_i)=(\sigma_1,\ldots,\sigma_{i-1},\tilde{\sigma}_i,\sigma_{i+1},\ldots,\sigma_n)$.

Així doncs, la construcció de Mertens i Zamir ens permet assegurar que qualsevol situació de joc amb informació incompleta pot ser tractada com un joc bayesià. A més, amb aquesta concepció de la situació, podem utilitzar una extensió del concepte d'equilibri de Nash, conservant el mateix sentit que en el cas dels jocs usuals: qualsevol predicció de l'actuació de jugadors racionals s'ha de basar en què aquests no es comportarien de manera racional si no utilitzessin estratègies en equilibri de Nash.

No obstant, les estructures que configuren Γ^{∞} tenen un gran nivell d'abstracció, i són difícilment tractables en la pràctica. En particular, els conjunts de tipus dels jugadors requereixen l'especificació completa de les successions de distribucions de probabilitat subjectiva dels diferents ordres. Així doncs, tot i partint d'un conjunt S (paràmetres desconeguts de la situació) de cardinalitat baixa, constitueixen conjunts massa grans per a ser la base de l'anàlisi del comportament dels jugadors en la dita situació.

6.6. Conjunts tancats respecte a creences i jocs bayesians

Les tècniques que acabem d'exposar per a analitzar una situació de joc amb informació incompleta només seran viables, en general, si gran part de la situació que es vol modelitzar es pot considerar coneixement comú. La viabilitat depèn, no solament de què el conjunt d'incertesa bàsica S sigui petit, com comentàvem a la secció anterior, sinó que també requereix la inclusió de hipòtesis suplementàries sobre els possibles conjunts de tipus dels jugadors.

Per a limitar l'abstracció i complicació matemàtica dels conjunts de tipus Q_i^∞ del joc bayesià universal, sovint es fa una anàlisi simplificada de la situació de joc. Es parteix de la base de què és coneixement comú que les creences de cada jugador estan en un cert subconjunt, que anomenarem T_i, de l'espai universal de creences Q_i^∞.

Formalment, aquesta hipòtesi es pot enunciar dient que el conjunt $T_1 x \ldots x T_n$ és <u>tancat respecte a creences</u> en $Q_1^\infty x \ldots x Q_n^\infty$, definint aquesta condició per:

$$p_i(T_{-i} | t_i)=1 \qquad \forall t_i \in T_i \qquad \forall i=1,\ldots,n$$

on, com d'habitud, $T_{-i}=T_1 x \ldots x T_{i-1} x T_{i+1} x \ldots x T_n$. És a dir, un conjunt de tipus és tancat respecte a creences si cada un dels n jugadors, en cada un dels seus possibles tipus, atorga una probabilitat (subjectiva) nul.la a l'esdeveniment de què el vector de tipus d'algun dels altres n-1 jugadors estigui fora de T_{-i}.

En aquest cas, si cada T_i és suficientment petit (la majoria de models que es poden trobar a la literatura suposen els conjunts T_i finits o parametritzats per una sola variable real), el resultat serà un model a través del qual és relativament senzill obtenir una visió general de la situació que es vol estudiar.

Mertens i Zamir demostren [cf.op.cit., secció 3] que qualsevol subespai de $Q_i^{\infty}x...xQ_n^{\infty}$ tancat respecte a creences es pot aproximar per un subespai finit, igualment tancat respecte a creences, que és arbitràriament pròxim al primer utilitzant la distància de Hausdorff entre conjunts tancats. Per tant, ja que els subespais finits tancats respecte a creences són densos respecte a tots els de $Q_i^{\infty}x..xQ_n^{\infty}$ que compleixen aquesta propietat, podem considerar que "gairebé" no hi ha pèrdua de generalitat en utilitzar hipòtesis simplificadores en la formulació d'un model[7]. Val a dir que aquesta indicació va ser també donada per Harsanyi en el seu article original, encara que amb un raonament totalment intuïtiu.

7. Veure també el treball de Bacharach (1985).

En conseqüència, direm que una situació pot ser modelitzada a través d'un joc bayesià si es pot definir una estructura de la forma:

$$\Gamma=(A_1,\ldots,A_n;\ T_1,\ldots,T_n;\ p_1,\ldots,p_n;\ u_1,\ldots,u_n)$$

on els conjunts A_i especifiquen les accions a l'abast de cada un dels jugadors; T_i són els conjunts de tipus dels mateixos, de manera que $T_1 x \ldots x T_n$ sigui tancat respecte a creences; i les funcions p_i i u_i s'obtenen de les definides a Γ^∞ restringint els seus dominis de definició respectius al subconjunt $T_1 x \ldots x T_n$ de $Q_1^\infty x \ldots x Q_n^\infty$.

És important tenir en compte que l'anàlisi d'una situació a través d'un joc bayesià Γ, requereix que totes les estructures de Γ - i no només els conjunts de tipus - siguin coneixement comú de tots els jugadors. Això no és cap problema pel que fa als conjunts d'accions, que podem agafar sempre prou amplis per què no depenguin dels tipus dels jugadors, i que siguin coneguts per tots ells. Tampoc ho és realment per a les funcions d'utilitat dels diferents jugadors, ja que aquestes han estat definides respecte als tipus dels jugadors, a partir de les establertes per les accions que aquests poden dur a terme.

Però cal suposar igualment que les probabilitats subjectives que assigna un jugador de qualsevol tipus, pel que fa als tipus dels altres jugadors, és coneixement comú. Aquesta hipòtesi, inherent al tractament bayesià d'un joc, és força restrictiva, tenint en compte que s'estableix sobre valoracions subjectives de diversos individus. La dificultat està lligada al concepte mateix de probabilitat subjectiva: tot i que dos individus tinguin exactament la mateixa informació i siguin exactament d'un mateix nivell d'intel.ligència, és fàcil que assignin probabilitats subjectives diferents als mateixos esdeveniments.

Per a atenuar l'impacte d'aquest postulat al modelitzar situacions de joc reals, Harsanyi proposa la consideració d'un concepte addicional: la "consistència" de les creences sostingudes pels diversos jugadors que intervenen en el joc. Seguint Harsanyi, direm que un conjunt de creences $(p_1,\ldots,p_n)$ és <u>consistent</u> si existeix una distribució de probabilitats "a priori" p^* definida a $T=T_1x\ldots xT_n$ tal que les distribucions condicionals de p^* segons el tipus de cada jugador (calculades utilitzant el teorema de Bayes) coincideixin amb les creences p_i de cada jugador. En el cas de conjunts de tipus finits T_i - únics dels que s'ocupa Harsanyi -, tindrem:

$$p_i(\hat{t}_{-i}|\hat{t}_i) = p^*(\hat{t}) \Big/ \sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p^*(t) \quad \forall\, \hat{t}_i\in T_i \quad \forall\, \hat{t}_{-i}\in T_{-i}$$

essent $\hat{t}=(\hat{t}_{-i},\hat{t}_i)=(\hat{t}_1,\ldots,\hat{t}_{i-1},\hat{t}_i,\hat{t}_{i+1},\ldots,\hat{t}_n)$

$t=(t_1,\ldots,t_{i-1},\hat{t}_i,t_{i+1},\ldots,t_n)$

Mertens i Zamir [op.cit.,pp.19-21] donen una definició més general de consistència: donat un subespai T tancat respecte a creences, una distribució de probabilitats $P \in \pi(T)$, definida sobre $T=T_1 x \ldots x T_n$, es diu que és <u>consistent</u> si, i solament si, compleix:

$$P = \int_T P_{t_i} dP \qquad \forall i=1,\ldots,n$$

denotant per P_{t_i} la probabilitat subjectiva del jugador de tipus t_i. Així mateix, demostren que aquesta definició és una representació fidel del significat intuïtiu de consistència: si P és una distribució consistent, es compleix:

$$p_i(\Omega|t_i)=P(\Omega \cap T_{-i}|t_i) \qquad \forall\, \Omega \text{ subconjunt de Borel de } T$$
$$\forall\, t_i \in T_i \qquad \forall i=1,\ldots,n$$

és a dir, si P és consistent per cada jugador, P es pot considerar com una distribució a priori definida sobre T que té com a distribucions a posteriori les funcions p_i.

Harsanyi [op.cit.,pp.174-175] considera que, tot i que no en totes les situacions reals s'ha de donar una consistència en el sentit de la definició anterior, hauríem d'esperar que una gran part ho fossin, perquè els tipus dels jugadors poden haver estat conjuntament determinats, abans del joc, per algun esdeveniment aleatori governat per la distribució p^*.

Naturalment, la consistència implica que cada jugador utilitzarà les seves probabilitats subjectives exactament de la mateixa manera que les condicionals de p^*, que es poden considerar probabilitats objectives; i en particular que la tria d'una estratègia per part d'un jugador estarà governada per la mateixa regla de decisió - el mateix concepte de solució - en els dos casos [postulat que Harsanyi anomena d'"equivalència bayesiana"]. A més a més, el fet de què p^* es pugui considerar una distribució de probabilitats objectiva coneguda, fa molt més coherent l'anàlisi bayesiana d'una situació de joc.

Sense adoptar completament el punt de vista de Harsanyi, Mertens i Zamir es pregunten també per l'existència de punts de l'espai de creences universal en què les creences dels n jugadors siguin consistents; i en tal cas com es poden caracteritzar. En el seu estudi, els autors demostren [cf.op.cit.,secció 4] que la consistència d'una situació real és coneixement comú, en el sentit de què cada jugador, basant-se només en la seva informació privada, pot fer un test a la hipòtesi "l'estat del món és consistent", en el que té una probabilitat (subjectiva) zero d'equivocar-se en treure'n la conclusió.

Si la resposta al test és positiva, cada jugador pot calcular el conjunt d'estats consistents al que pertany - és a dir, els elements $t \in T$ pels que existeix una distribució p^* que tingui com a posteriors les creences descrites a t -, així com la distribució de probabilitat global sobre T - determinada de manera única - corresponent a la situació de consistència en què es troba.

Cal observar que la distribució a priori consistent, si existeix, és coneixement comú deduït només de les creences de cada jugador sobre les creences dels altres. Per tant, no cal considerar, com ho feia Harsanyi, que la distribució p^* "selecciona els jugadors" del joc - en el sentit de què caracteritza les seves creences -; sinó simplement que la introducció de p^* és una qüestió de conveniència matemàtica, que ens serveix per a trobar els equilibris de Nash de la situació original, definits de manera natural via les probabilitats subjectives.

En conseqüència, tenim elements per a decidir si es pot utilitzar un joc bayesià Γ per a analitzar una determinada situació de joc. A més a més, si considerem que aquesta situació és consistent, tots els jugadors poden arribar, basant-se en la seva pròpia informació, a la mateixa conclusió. Per tant podem assegurar que representarem prou fidelment les creences de tots els jugadors sobre la dita situació, de manera que l'anàlisi a partir d'un joc bayesià ens pot servir per a predir les accions que els agents puguin emprendre.

Per últim, mencionem que el concepte d'equilibri de Nash en sentit bayesià, formulat a Γ^{∞} en la secció anterior, es pot aplicar directament a un joc bayesià Γ del tipus definit en aquesta secció, sense més problemes que l'adaptació de les estratègies dels jugadors als conjunts de tipus T_i tancats respecte a creences.

En efecte, en un joc bayesià Γ, una estatègia pura per a un jugador i serà una funció mesurable de la forma:

$$\sigma_i : T_i \longrightarrow A_i \qquad \forall\, i=1,\ldots,n$$

Si el joc Γ és finit, en el sentit de què hi ha tant un nombre finit de jugadors, com un nombre finit de tipus per cada un d'ells, el teorema de Nash ens assegura l'existència d'un equilibri en estratègies pures o mixtes, ja que el joc d'informació imperfecta associat és finit.

No obstant, si els conjunts de tipus dels jugadors són infinits, per a assegurar l'existència d'equilibri cal recòrrer al concepte introduït per Milgrom i Weber (1985). En el seu article demostren que el concepte adient per a tractar un joc d'informació incompleta és el que anomenen estratègia distribucional: una funció de probabilitat definida conjuntament sobre tipus i accions de cada jugador, en la que la distribució marginal sobre T_i correspongui a l'especificada per l'estructura informativa de la situació de joc - la funció de creences, p_i, de cada jugador -.

Milgrom i Weber demostren que aquest tipus d'estratègies coincideixen exactament amb les estratègies mixtes. La seva utilitat resideix, fonamentalment, en la facilitat de demostrar l'existència d'equilibris de Nash en sentit bayesià, per aquells jocs amb informació incompleta que no abarca el teorema de Nash.

L'article de Milgrom i Weber proporciona un resultat addicional pel que fa a l'existència d'equilibris amb estratègies <u>pures</u>. Demostren que si les funcions de creença p_i de cada jugador no contenen "punts amb probabilitat positiva"[8], el conjunt d'estratègies pures de cada jugador és dens en el d'estratègies distribucionals del mateix. En conseqüència, la restricció a l'ús d'estratègies pures no és essencial, ja que si només es poden observar punts de $T_i x A_i$ amb algun error de mesura, ambdós tipus d'estratègies resulten indistingibles.

---

8. La definició formal és la següent: per cada conjunt B de T_i en el que $p_i(B)>0$, ha d'existir un subconjunt C de B pel que $p_i(B)>p_i(C)>0$. Veure Milgrom i Weber (1985), pp. 628 i següents.

Capítol 7

MECANISMES SIMULTANIS DIRECTES BAYESIANS

7.1. Jocs bayesians associats a mecanismes simultanis d'un sol període

Aquest capítol està dedicat a l'estudi de les propietats de contractes signats utilitzant mecanismes de negociació simultànis d'una sola etapa. A diferència del capítol 5, adoptarem el punt de vista bayesià per a analitzar el joc no cooperatiu induït pel mecanisme de negociació. Caldrà començar, per tant, per la descripció d'un d'aquests jocs.

Sigui $\{q,P\}:M_1xM_2 \longrightarrow R^2$, un mecanisme de negociació qualsevol d'una sola etapa, on M_1 i M_2 són els espais de missatges, arbitràris, dels dos agents. El joc associat a $\{q,P\}$ és també d'una sola etapa, en la que cada agent simplement ha d'enviar un missatge. Aquests senyals són tramesos de forma simultània i independent, i determinen - d'acord amb el mecanisme escollit - els termes del contracte.

La situació de negociació així descrita es podrà modelitzar com un _joc bayesià_ si podem definir-la amb les estructures següents:

$$\Gamma=(A_i;\ T_i;\ p_i;\ u_i)$$

on A_i és el conjunt d'accions a l'abast de cada jugador, T_i el conjunt de tipus de cada un d'ells, p_i la distribució de probabilitats de cada individu respecte als tipus dels altres jugadors, i u_i les utilitats que obtenen en funció de les accions que triïn i dels seus respectius tipus. Observem que el producte cartesià dels conjunts de tipus dels agents ha de ser tancat respecte a creences, en el sentit de l'apartat 6.6.

Donat que el joc induït per un mecanisme {q,P} dels que estem considerant serà un joc d'una sola etapa, el _conjunt d'accions_ factibles per cada agent és de molt fàcil descripció: coincideix amb el conjunt de possibles missatges a trametre en l'única etapa del joc en què intervenen els agents. Per tant, definirem $A_i=M_i$ per $i=1,2$.

Per a establir el _conjunt de tipus_ de cada jugador, restringint l'espai de creences Q_i^∞ del joc bayesià universal, haurem d'imposar un cert nombre d'hipòtesis suplementàries al model que s'estudiï. D'acord amb les consideracions de l'apartat 4.1, suposarem que és coneixement comú que l'única informació desconeguda, en el moment d'iniciar la negociació, és la caracterització precisa de cada una de les dues bandes del mercat; que cada una d'elles es pot representar per un sol paràmetre real; i que es considera coneixement comú que el dit estat és informació privada de l'agent respectiu. En aquestes condicions, els conjunts de tipus dels agents en el joc associat al mecanisme, es poden parametritzar pels valors que fins ara hem anomenat $x,z\in[0,1]$, respectivament. En conseqüència, podrem definir $T_1=T_2=[0,1]$, ja que $T=T_1xT_2$ serà un conjunt tancat respecte a creences.

Per a indicar les <u>creences</u> de cada individu, utilitzarem distribucions de probabilitat acumulades sobre la característica del mercat que desconeixen. No utilitzarem les funcions p_i, sinó que denotarem per $F(z|x)$ la probabilitat que el primer agent atorga a l'esdeveniment: "l'estat del segon mercat estarà caracteritzat per un paràmetre no superior a z, sempre que l'estat del meu mercat vingui donat per x". De manera similar, $G(x|z)$ descriu les creences de la segona empresa - quan la seva banda del mercat es pugui descriure per z - respecte a les característiques del seu oposant. Naturalment, haurem de considerar funcions F i G contínues i diferenciables en tot el seu domini de definició. Quan sigui convenient, denotarem per f i g, respectivament, les funcions de densitat associades a F i G.

Evidentment F i G no representen, directament, el mateix tipus de probabilitats que les funcions p_i, descrites anteriorment, per un joc bayesià qualsevol. No obstant, a partir de F i G es pot calcular la jerarquia infinita de creences corresponent (utilitzant el teorema de Bayes). Així doncs, els conjunts T_i es poden considerar isomorfs a certs subconjunts de l'espai de creences universal, encara que no s'hagin identificat com a tals[1].

Per últim, ens cal caracteritzar les funcions d'utilitat dels agents en el joc. Atenent a la formulació general de la situació de negociació que estudiem (cfr. capítol 4) podem definir-les de la manera següent:

$$u:M_1 x M_2 x T_1 x T_2 \longrightarrow R$$

$$u(m_1,m_2;x,z):= P(m_1,m_2) - C(q(m_1,m_2),x)$$

$$v:M_1 x M_2 x T_1 x T_2 \longrightarrow R$$

$$v(m_1,m_2;x,z):= I(q(m_1,m_2),z) - P(m_1,m_2)$$

on, com és usual, m_i són els senyals tramesos per les empreses, i (x,z) l'estat real de la natura. Es pot observar que, almenys directament, la funció d'utilitat d'un agent no depèn de la característica del mercat oposat.

1. Per a més detalls es pot veure Myerson (1985), pp. 237-238.

En resum, podrem descriure el joc associat a un mecanisme $\{q,P\}:M_1 x M_2 \longrightarrow R$, quan ambdues empreses tenen informació privada, per un joc bayesià amb la següent estructura:

$$\Gamma^* = (M_1, M_2;\ T_1, T_2;\ F, G;\ u, v)$$

Per a aquest joc el criteri de solució adient és el d'equilibri de Nash en sentit bayesià. La definició d'aquest concepte es pot deduir de la que s'ha donat, per un joc qualsevol, en el capítol anterior. En efecte, siguin $\bar{\sigma} = (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2)$ un parell d'estratègies pels dos agents en un joc de la forma Γ^* que acabem de descriure. Direm que les estratègies $\bar{\sigma}_i : T_i \longrightarrow M_i$ estan en <u>equilibri de Nash en sentit bayesià</u> si compleixen:

$$\int_{T_2} u(\bar{\sigma}_1(x), \bar{\sigma}_2(z); x, z)\, dF(z|x) \geq \int_{T_2} u(m_1, \bar{\sigma}_2(z); x, z)\, dF(z|x)$$

per cada tipus ($x \in T_1$) del primer agent i

per cada missatge ($m_1 \in M_1$) que pugui trametre

$$\int_{T_1} v(\bar{\sigma}_1(x), \bar{\sigma}_2(z); x, z)\, dG(x|z) \geq \int_{T_1} u(\bar{\sigma}_1(x), m_2; x, z)\, dG(x|z)$$

per cada tipus ($z \in T_2$) del segon agent i

per cada missatge ($m_2 \in M_2$) que pugui trametre

7.2. Compatibilitat respecte a incentius en sentit bayesià i mecanismes directes

Passem ara a veure que, raonant de manera similar a la secció 4.3, podem aplicar aquí també el principi de revelació. Essencialment, cal demostrar que els contractes que es poden signar amb la mediació d'un mecanisme qualsevol {q,P} són equivalents - en el sentit que cada jugador de cada tipus obté la mateixa utilitat esperada - als que s'acorden quan s'utilitza un mecanisme directe. El raonament es basa, naturalment, en la consideració dels resultats que es poden obtenir amb el joc bayesià Γ^* induït per {q,P}, quan el criteri de solució que prenem és el d'equilibri de Nash en sentit bayesià.

En efecte, sigui $\bar{\sigma}=(\bar{\sigma}_1,\bar{\sigma}_2)$ un equilibri de Nash en sentit bayesià d'un joc de negociació de la forma Γ^* associat a un mecanisme de negociació qualsevol {q,P}. El <u>mecanisme directe</u> equivalent a {q,P} es pot definir, donades les estratègies $\bar{\sigma}_i$, de manera similar a (4.A):

$$q_d: T_1 x T_2 \longrightarrow R \quad \text{on } q_d(x,z) := q(\bar{\sigma}_1(x),\bar{\sigma}_2(z))$$

$$P_d: T_1 x T_2 \longrightarrow R \quad \text{on } P_d(x,z) := P(\bar{\sigma}_1(x),\bar{\sigma}_2(z))$$

Aquest mecanisme directe indueix un joc bayesià que difereix de Γ^* en què els conjunts d'accions dels jugadors són els propis conjunts de tipus; i en què les funcions d'utilitat s'obtenen per composició de les originals amb el mecanisme directe i l'equilibri de Nash triat a Γ^*:

$$\Gamma_d^*=(T_1,T_2;\ T_1,T_2;\ F,G;\ u_d,v_d)$$

amb u_d i v_d donades per:

$$u_d(x',z';x,z):=u(\bar{\sigma}_1(x'),\bar{\sigma}_2(z');x,z)=$$

$$=P_d(\bar{\sigma}_1(x'),\bar{\sigma}_2(z'))-C(q_d(\bar{\sigma}_1(x'),\bar{\sigma}_2(z'),x)=$$

$$=P_d(x',z')-C(q_d(x',z'),x)$$

i, de manera similar,

$$v_d(x',z';x,z):=I(q_d(x',z'),z)-P_d(x',z')$$

El domini de definició de les funcions u_d i v_d és $T_1xT_2xT_1xT_2$, interpretant que el primer producte cartesià T_1xT_2 correspon a les accions dels agents, mentre que el segon indica els seus tipus. Així doncs, $u_d(x',z';x,z)$ s'ha d'entendre com la utilitat que obtindrà el primer agent a Γ_d^* si els senyals enviats per ambdós jugadors són el parell (x',z'), i el valor real dels estats de les dues bandes del mercat es pot representar pel parell (x,z).

En el joc Γ_d^* les estratègies que consisteixen en anunciar la veritable informació privada de cada agent formen un equilibri de Nash en sentit bayesià. En efecte, la utilitat esperada que obtindrà el primer jugador emprant una estratègia qualsevol $s_1:T_1 \longrightarrow T_1$, suposant que el segon agent digui la veritat, serà:

$$\int_{T_2} u_d(s_1(x),z;x,z)\ dF(z|x) =$$

$$= \int_{T_2} u(\bar{\sigma}_1(s_1(x)),\bar{\sigma}_2(z);x,z)\ dF(z|x) \leq$$

$$\leq \int_{T_2} u(\bar{\sigma}_1(x),\bar{\sigma}_2(z);x,z)\ dF(z|x) =$$

$$= \int_{T_2} u_d(x,z;x,z)\ dF(x|z)$$

on la desigualtat es deguda a què $\bar{\sigma}_1(s_1(x))$ proporcionarà, en general, un missatge diferent de $\bar{\sigma}_1(x)$. Essent $\bar{\sigma}$ un equilibri de Nash en sentit bayesià, la utilitat esperada que s'obté en el primer cas no pot ser superior a la prevista en el segon.

Podem doncs concloure que x és el millor senyal que pot enviar el primer agent quan el seu tipus és precisament el valor x. Així mateix, amb un argument totalment paral.lel al que s'acaba d'exposar, és immediat comprovar que el segon agent maximitza la seva utilitat esperada si diu la veritat sobre la seva informació privada, sempre que suposi que el primer jugador dirà la veritat.

En conseqüència, el principi de revelació és igualment vàlid en un context bayesià, i admet la següent interpretació: Denominem contractes "factibles" als que es poden signar amb negociacions conduïdes per mecanismes d'una sola etapa, quan les empreses utilitzin com a criteri de solució del joc associat el d'equilibri de Nash en sentit bayesià. Podem assegurar que el conjunt de contractes factibles coincideix amb el de contractes dissenyats per mecanismes directes, en què dir la veritat sigui un equilibri de Nash en sentit bayesià del joc associat corresponent.

Serà útil, per tant, la següent notació: donat un mecanisme <u>directe</u> $\{q,P\}:T_1 x T_2 \longrightarrow R^2$, anotarem les utilitats esperades de les dues empreses per:

$$U(x';x) := \int_{T_2} \left[P(x',z) - C(q(x',z),x)\right] \, dF(z|x)$$

$$V(z';z) := \int_{T_1} \left[I(q(x,z'),z) - P(x,z')\right] \, dG(x|z)$$

si aquestes anuncien els valors x' i z', respectivament, quan les vertaderes característiques de les dues bandes del mercat són x i z.

Els únics mecanismes directes que haurem de tenir en compte com a generadors de contractes factibles seran els que compleixin, per cada parell de possibles estats del mercat $(x,z)\in T_1 x T_2$:

$$\begin{aligned} U(x';x) &\leq U(x;x) \qquad \forall x'\in T_1 \\ V(z';z) &\leq V(z;z) \qquad \forall z'\in T_2 \end{aligned} \tag{7.A}$$

Aquesta propietat, deduïda del principi de revelació, es coneix amb el nom de "compatibilitat respecte a incentius en sentit bayesià" del mecanisme[2]. La interpretació del terme és similar a la del concepte introduït a la secció 5.1: si s'utilitza un d'aquests mecanismes per a conduir la negociació, cap de les dues empreses té un incentiu per a no dir la veritat sobre la seva informació privada.

2. La primera definició d'aquest concepte, així com la terminologia que s'utilitza, són degudes a d'Aspremont i Gérard-Varet(1979).

7.3. Criteris de selecció d'un mecanime

L'objectiu central de la nostra anàlisi en aquest capítol serà la caracterització de mecanismes de negociació que permetin la signatura de contractes "òptims", en el sentit que proporcionin als agents les màximes utilitats que es puguin obtenir utilitzant mecanismes de negociació d'una sola etapa. Pel principi de revelació, aquests valors màxims s'han de poder obtenir considerant els contractes signats només a partir d'equilibris bayesians en jocs associats a mecanismes directes compatibles respecte a incentius (en sentit bayesià[3]).

Cal tenir en compte, però, que les utilitats que obtenen els agents amb la signatura d'un contracte són el resultat d'una negociació, modelitzada per un joc no cooperatiu. Per tant, la investigació i caracterització dels contractes òptims pels agents s'haurà de fer a través de propietats definides en els mecanismes que regulen el joc entre les empreses. Aquest serà l'objectiu de la present secció.

3. En la resta d'epígrafs tant d'aquesta secció com de les que segueixen ometrem la menció explícita de què els criteris i conceptes que s'estan estudiant són l'extensió "en sentit bayesià" dels establerts en el capítol anterior. Aquest conveni, usual en la literatura de jocs bayesians, es mantindrà mentre no porti a confusió.

7.3.1. Eficiència

El concepte clàssic més dèbil que es sol imposar com a criteri d'optimalitat en una negociació, és el criteri d'eficiència de la solució obtinguda.

Hem de començar observant que, per a una negociació realitzada en un entorn d'informació privada, la definició precisa del concepte d'eficiència resulta força més complexa que si es tracta d'arribar a un acord quan tots els elements són coneixement comú. En efecte, en aquest últim cas es pot adoptar de manera natural el concepte d'eficiència en el sentit de Pareto: un mecanisme de negociació és eficient si, i solament si, no n'hi ha cap altre que proporcioni una utilitat més gran a almenys un dels individus que participen a la negociació, sense que disminueixi la utilitat de la resta d'agents.

Per a estendre el concepte d'eficiència en el sentit de Pareto a situacions en què els participants disposin d'informació incompleta, cal veure com es pot determinar la variació en la utilitat dels agents al canviar el mecanisme de negociació. Però l'avaluació de les esmentades utilitats depèn de la informació de què es disposi, i per tant, per jutjar l'eficiència d'un mecanisme cal saber la perspectiva que té de la situació la persona que l'ha d'establir.

Per exemple, si un agent disposa de certa informació privada, pot determinar el(s) mecanisme(s) més favorable(s) donada la seva informació real. Aquest tipus de judici no està, en canvi, a l'abast de la resta d'individus que puguin intervenir en la situació, ja que no disposen de la mateixa informació. Així doncs, podem pensar almenys en tres criteris diferents d'acord amb els que es pot establir l'eficiència d'un mecanisme: els propis jugadors per separat, un consens entre els mateixos, una persona externa que faci d'àrbitre, donaran lloc a concepcions diverses de l'eficiència d'un mecanisme.

Tal i com esmentàvem a 4.2, en aquest capítol - com en el capítol 5 - partim de la base que el mecanisme amb què es fa la negociació entre les empreses, els ha estat imposat. Això significa que la perspectiva adequada per a valorar l'eficiència d'un mecanisme serà la d'un planificador extern, que no coneix la informació privada de què disposen els agents negociadors.

No obstant, analitzar una situació de joc amb un model bayesià implica considerar coneixement comú les creences de cada un dels agents, respecte a la informació privada i creences dels altres agents. Per tant, aquestes creences poden ser utilitzades pel planificador en la definició d'eficiència que triï pels mecanismes. Al mateix temps, però, caldrà tenir en compte el moment en què es mesuri la utilitat dels individus que intervenen en una negociació, perquè varia la informació que aquests tenen, i per tant la seva posició respecte a un cert mecanisme donat. Es poden considerar tres etapes diferents cara a l'avaluació de l'eficiència d'un mecanisme[4], que, seguint la terminologia de Holmström i Myerson (1983), qualificarem de la manera següent:

- l'etapa _ex ante_, quan cap de les empreses coneix encara la seva informació privada;
- l'etapa _ínterim_, en què cada agent coneix la seva característica privada, però encara no s'ha dut a terme la negociació, i per tant desconeix la informació que puguin tenir els seus oposants, i
- l'etapa _ex post_, quan tota la informació de la situació de joc ha esdevingut coneixement comú.

D'acord amb això, l'avaluació de les utilitats que comporta un contracte signat a través d'un mecanisme de negociació $\{q,P\}$, directe i compatible respecte a incentius, es podrà fer de tres maneres diferents, segons les funcions:

4. Veure també, en aquest sentit, Crawford (1985a).

$$(1)\quad W_1(<q,P>) := \int_{\Omega} \Big[P(x,z) - C(q(x,z),x)\Big]\, dH(x,z)$$

$$W_2(<q,P>) := \int_{\Omega} \Big[I(q(x,z),z) - P(x,z)\Big]\, dH(x,z)$$

en el cas <u>ex ante</u>, essent $H(x,z)$ la distribució de probabilitats conjunta[5] de F i G, i definint:

$$\Omega := \{\ (x,z) \in T_1 x T_2 \ /\ q(x,z) \geq 0\ \}$$

$$(2)\quad W_1(<q,P>|x) := U(x;x) =$$

$$= \int_{\Omega_1(x)} \Big[P(x,z) - C(q(x,z),x)\Big]\, dF(z|x)$$

$$W_2(<q,P>|z) := V(z;z) =$$

$$= \int_{\Omega_2(x)} \Big[I(q(x,z),z) - P(x,z)\Big]\, dG(x|z)$$

en el cas <u>ínterim</u>, on $\Omega_1(x) := \{\ z \in T_2\ /\ q(x,z) \geq 0\ \}$

$$\Omega_2(x) := \{\ x \in T_1\ /\ q(x,z) \geq 0\ \}$$

$$(3)\quad W_1(<q,P>|x,z) := P(x,z) - C(q(x,z),x)$$

$W_2(<q,P>|x,z) := I(q(x,z),z) - P(x,z)$ pel cas <u>ex post</u>

5. La definició ex ante presuposa que la situació de joc és consistent, ja que altrament la funció H no té perquè existir, excepte en casos molt especials.
Reduirem la seva aplicació a casos en què H estigui definida de forma natural, de manera que no caldrà imposar, a priori, la hipòtesi addicional de què la situació és efectivament consistent.

Els conjunts Ω i Ω_i que hem utilitzat en les definicions de les utilitats esperades (casos ex ante i ínterim) són necessaris pel conveni establert al principi del nostre estudi, segons el qual s'entén que no es signa el contracte si la regla d'intercanvi tria una quantitat negativa.

Les funcions W_i representen les utilitats (esperades en els casos ex ante i ínterim) que obtindran els jugadors si utilitzen un mecanisme directe $\{q,P\}$, sempre i quan facilitin la informació privada que realment posseeixen. Per tant, qualsevol criteri de classificació dels mecanismes utilitzant les funcions W_i només tindrà sentit si suposem que els diferents agents que intervenen en el joc estan disposats a dir la veritat, com és el cas si els mecanismes són compatibles respecte a incentius, perquè llavors revelar la informació privada vertadera constitueix un equilibri de Nash.

Aquestes tres mesures donen lloc a tres nocions diferents de dominància, que es poden utilitzar de manera similar al criteri de Pareto. Donats dos mecanismes factibles (i.e., directes i compatibles respecte a incentius) $\{q,P\}$ i $\{\hat{q},\hat{P}\}$, direm que:

(a) $\{\hat{q},\hat{P}\}$ <u>domina ex ante</u> $\{q,P\}$ si es compleix:

$$W_i(\langle\hat{q},\hat{P}\rangle) \geq W_i(\langle q,P\rangle) \qquad \forall i=1,2$$

(b) $\{\hat{q},\hat{P}\}$ <u>domina en sentit ínterim</u> $\{q,P\}$ si es compleix:

$$W_i(<\hat{q},\hat{P}>|t_i) \geq W_i(<q,P>|t_i) \quad \forall i=1,2 \quad \forall t_i \in T_i$$

(on cal entendre $t_i=x$ si $i=1$; o $t_i=z$ si $i=2$)

(c) $\{\hat{q},\hat{P}\}$ <u>domina ex post</u> $\{q,P\}$ si es compleix:

$$W_i(<\hat{q},\hat{P}>|x,z) \geqslant W_i(<q,P>|x,z) \quad \forall i=1,2 \quad \forall x \in T_1 \quad \forall z \in T_2$$

i si, a més, en cada definició, almenys una de les desigualtats és estricte.

Observem que en els casos ínterim i ex post, la dominància requereix un increment de la utilitat esperada per tots els tipus possibles, i no solament per aquell que correspongui a l'estat real d'informació del mercat. Aquest requisit és necessari perquè, com ja hem indicat, el planificador, al ser un observador extern, no pot utilitzar cap concepte de dominància que depengui de la informació privada real dels agents.

Les diferents nocions de dominància donen lloc de manera natural a tres conceptes d'eficiència[6]: direm que un mecanisme factible és <u>eficient ex ante</u> (respectivament

---

6. Holmström i Myerson (1983) defineixen, de fet, sis conceptes d'eficiència. Per una banda els tres que nosaltres hem enunciat, pels que fan servir la qualificació de "eficiència respecte a incentius", ja que s'estan considerant com a mecanismes factibles els directes compatibles respecte a incentius. Però també defineixen tres conceptes més, que designen amb l'adjectiu "eficiència clàssica", en què els mecanismes factibles són tots els directes, en un enfoc que suposa que no hi ha problemes d'incentius quan cal saber quina és la informació privada (./.)

en sentit interim o ex post) si no hi ha cap altre mecanisme factible que el domini ex ante (respectivament, en sentit ínterim o ex post).

L'anàlisi de l'eficiència dels mecanismes de negociació mitjançant el criteri ex ante només té sentit si el planificador ha d'anunciar el mecanisme que s'ha d'utilitzar abans de què els negociadors coneixin la seva informació privada. En aquest cas, si els individus estan d'acord en emprar un cert mecanisme, no es pot assegurar que hi hagi una regla de negociació que sigui millor per tots els agents després de conèixer la seva informació privada. Però aquest criteri és adequat per a una situació que es pugui tractar com un joc d'informació imperfecta, i la que nosaltres estem estudiant no ho serà a menys que es tracti de signar un contracte a llarg termini.

En conseqüència, i donat que dels dos criteris restants evidentment el més fort és el d'eficiència ex post, intentarem caracteritzar els mecanimes que tinguin aquesta última propietat. A aquest objectiu pot ajudarnos-hi els resultats de la secció que segueix.

(peu de pàg.6, cont.)

de què disposen realment els individus.

La línia que segueix aquest treball no requereix en cap moment la consideració dels criteris d'eficiència clàssica, ja que la compatibilitat respecte a incentius ha sorgit de manera natural en l'estudi; per tant no sembla mecessari afegir l'adjectiu "respecte a incentius" en les definicions d'eficiència que s'han donat.

7.3.2. Eficiència ex post

Proposició 7.1. Sigui $\bar{q}(x,z)=\text{argmax}_q\ S(q,x,z)$, definint aquesta darrera funció per:

$$S(q,x,z)=I(q,z)-C(q,x)$$

Si existeix una funció de transferències $P:T_1xT_2 \longrightarrow R$ tal que $\{\bar{q},P\}$ sigui un mecanisme factible, llavors $\{\bar{q},P\}$ és eficient ex post.

En efecte: suposem que $\{\bar{q},P\}$ és un mecanisme factible però no eficient ex post. Això significa que podem trobar un altre mecanisme $\{q',P'\}$ que el domina ex post, és a dir:

$$W_i(<q',P'>|x,z) \geq W_i(<\bar{q},P>|x,z) \quad \forall (x,z)\in T_1xT_2 \ \forall i=1,2$$

amb, almenys, una desigualtat estricta. Per exemple, suposem que per $i=1$, $x=x^*$, $z=z^*$ es compleix:

$$W_1(<q',P'>|x^*,z^*) > W_1(<\bar{q},P>|x^*,z^*)$$

Llavors podem escriure:

$$S(q'(x^*,z^*),x^*,z^*) = I(q'(x^*,z^*),z^*)-C(q'(x^*,z^*),x^*)=$$

$$= \left[I(q'(x^*,z^*),z^*) - P(x^*,z^*)\right] +$$

$$+ \left[P'(x^*,z^*) - C(q'(x^*,z^*),x^*)\right] =$$

$$= W_2(<q',P'>|x^*,z^*) + W_1(<q',P'>|x^*,z^*) >$$

$$> W_2(<\bar{q},P>|x^*,z^*) + W_1(<\bar{q},P>|x^*,z^*) =$$

$$= S(\bar{q}(x^*,z^*),x^*,z^*)$$

és a dir, hem demostrat que, en aquest cas, tenim $S(q'(x^*,z^*),x^*,z^*) > S(\bar{q}(x^*,z^*),x^*,z^*)$, i això no és possible si $S(.,x.z)$ arriba al seu màxim en $\bar{q}(x,z)$, per qualsevol valor del parell $(x,z)\in T_1xT_2$.
La contradicció resulta d'haver suposat que $\{q',P'\}$ dominava ex post $\{\bar{q},P\}$; i per tant $\{\bar{q},P\}$ ha de ser eficient ex post. ▮

La demostració d'aquesta proposició posa de manifest que els mecanismes de la forma $\{\bar{q},P\}$, per P qualsevol, optimitzen la suma de les utilitats ex post que poden obtenir els jugadors, siguin quines siguin les condicions del mercat, és a dir:

$$\bar{q}(x,z) = \mathrm{argmax}_q \left[W_1(<q,P>|x,z) + W_2(<q,P>|x,z)\right]$$

ja que, segons hem vist:

$$W_1(<q,P>|x,z) + W_2(<q,P>|x,z) = S(q(x,z),x,z)$$

Així doncs, si podem trobar un mecanisme factible del tipus $\{\bar{q},P\}$, aquest serà eficient, tant amb la definició que nosaltres hem donat d'aquest concepte, com amb una de les definicions que és usual trobar a la literatura sobre jocs de negociació: un mecanisme és eficient si maximitza la suma d'utilitats dels agents, en qualsevol situació d'informació dels mateixos[7].

Així mateix, utilitzant un mecanisme del tipus $\{\bar{q},P\}$, s'estarà fent una transacció d'una quantitat $\bar{q}(x,z)$ que coincideix amb l'òptima en el cas d'informació perfecta. En aquest sentit, aquests mecanismes són també eficients utilitzant un altre criteri d'eficiència que sol ser freqüent[8], i que nosaltres mateixos hem adoptat en el capítol 5 d'aquest treball: considerar eficient un mecanisme en el que la regla amb què es determina la quantitat a intercanviar, coincideix amb la regla òptima en un marc d'informació completa, sigui quin sigui el possible estat de la natura en què, en realitat, s'estigui duent a terme la negociació.

La proposició 7.1 dóna només una condició necessària per assegurar que un mecanisme directe compatible respecte a incentius sigui eficient. La condició suficient, però, es pot establir tenint en compte que els diversos conceptes d'eficiència es poden representar, de forma equivalent, utilitzant una regla de benestar social.

---

7. Veure, per exemple, d'Aspremont i Gérard-Varet (1979,1982), Riordan (1984), W.Samuelson (1984), Maskin (1986), o Spulber (1988b).

8. Alguns dels articles en què es dóna són: Myerson i Sattwerthwaite (1983), Cramton, Gibbons i Klemperer (1987).

En el cas de l'eficiència ex post es demostra[9] que, per a ser eficient, un mecanisme ha de maximitzar una suma ponderada de les utilitats ex post dels dos agents:

$$\alpha_1(x,z)W_1(<q,P>|x,z) + \alpha_2(x,z)W_2(<q,P>|x,z)$$

on les α_i són funcions arbitràries, $\alpha_i: T_1 x T_2 \longrightarrow R_+$, per $i=1,2$.

Tenint en compte que les funcions W_i són additivament separables en unitats monetàries i quantitat intercanviada, no hi ha pèrdua de generalitat en suposar que les dues funcions de pes α_i són iguals: $\alpha_1(x,z)=\alpha_2(x,z)=1$ per tot $(x,z)\in T_1 x T_2$. En aquest cas la funció a optimitzar coincideix amb $S(q,x,z)$, i per tant <u>la condició establerta en la proposició 7.1 resulta ser alhora necessària i suficient</u> per assegurar l'eficiència ex post d'un mecanisme factible. En resum, tenim doncs:

<u>Proposició 7.2.</u> Un mecanisme directe $\{q,P\}$ compatible respecte a incentius és eficient ex post si, i solament si, $q=\bar{q}$.

9. Veure, en general, Holmström i Myerson (1983), i més en particular per les regles de negociació ex post, Cramtom (1985), p. 163.

7.3.3. Racionalitat individual

A banda del concepte d'eficiència que s'utilitzi per a triar un mecanisme, és desitjable que aquest tingui una altra propietat, especialment important en el cas que la negociació es dugui a terme en un marc d'informació privada. El planificador ha de tenir en compte que el mecanisme proposat ha de ser "individualment racional" des del punt de vista de cada una de les empreses, és a dir, que cada un dels agents ha de preferir (dèbilment) entrar en la negociació.

Com en el cas de l'eficiència, quan una situació de joc s'analitza amb les hipòtesis bayesianes, la mesura de la racionalitat individual depèn de l'estat de la informació de cada agent en el moment en què ha de prendre la decisió d'entrar o no en la negociació. Segons això, donat un mecanisme qualsevol $\{q,P\}$, direm que:

(a) $\{q,P\}$ és <u>individualment racional ex ante</u> quan:

$$W_i(<q,P>) \geq 0 \qquad \forall i=1,2$$

(b) $\{q,P\}$ és <u>individualment racional en sentit ínterim</u> ssi

$$W_i(<q,P>|t_i) \geq 0 \qquad \forall t_i \in T_i \qquad \forall i=1,2$$

(c) $\{q,P\}$ és <u>individualment racional ex post</u> ssi:

$$W_i(<q,P>|x,z) \geq 0 \qquad \forall (x,z) \in T_1 x T_2 \qquad \forall i=1,2$$

Es evident que qualsevol mecanisme que el planificador triï ha de complir aquesta propietat, almenys en la seva versió més dèbil. En cas contrari, algun tipus d'algun dels agents podria preferir no entrar en la negociació, i això alteraria completament les bases de l'anàlisi del joc, perquè aquesta informació necessàriament seria incorporada a les funcions de creença dels agents en el moment de començar la mateixa, i el contracte signat no coincidiria amb les previsions del planificador.

7.4. Mecanismes eficients per a agents amb creences independents

Com hem assenyalat en l'apartat anterior, les característiques principals que han de reunir els mecanismes factibles, són l'eficiència ex post i la racionalitat individual en alguna de les seves formes. Per tant, desenvoluparem la nostra anàlisi començant per l'obtenció de mecanismes eficients ex post, i dins d'aquest grup caracteritzarem aquells que, a més a més, siguin individualment racionals. D'aquesta caracterització en podrem deduir fàcilment les utilitats màximes que poden esperar obtenir les empreses a través de la signatura de contractes en les condicions d'incertesa que estem analitzant.

Per a dur a terme aquest estudi resulten de gran importància les propietats addicionals que puguin complir les funcions de creença dels agents, representades per les distribucions de probabilitat acumulada F i G, ja que les tècniques que s'utilitzen difereixen d'acord amb les diverses hipòtesis que adoptem sobre les mateixes.

Una de les condicions més fortes que es poden imposar a les funcions de valoració subjectives dels agents és que aquestes siguin independents dels seus tipus, de manera que el vertader estat de la banda del mercat que constitueix la informació privada de l'agent no tingui cap influència en les creences del mateix sobre la informació que desconeix; és a dir:

$$F(.|x) = F(.|x') =: F(.) \qquad \forall x,x' \in T_1$$

$$G(.|z) = G(.|z') =: G(.) \qquad \forall z,z' \in T_2$$

Observem que aquesta condició és realment molt restrictiva, ja que, de fet, implica considerar coneixement comú les creences vertaderes de cada agent.

L'objectiu d'aquesta secció serà l'estudi de situacions de negociació en què es pugui imposar aquesta condició - que, d'altra banda, és una de les hipòtesis de treball més habituals en la literatura de jocs de negociació -, deixant per l'apartat següent l'anàlisi de casos més generals.

7.4.1. Caracterització d'una família de mecanismes eficients ex post

Tal com acabem de comentar, en el desenvolupament d'aquesta secció utilitzarem la hipòtesi addicional següent:

(C.I.) La informació a l'abast de les empreses en el moment de començar la negociació és suficientment precisa com per a poder sostenir creences que són independents del seu tipus.

D'acord amb la proposició 7.2, en qualsevol mecanisme eficient ex post la regla d'intercanvi ha de coincidir amb la funció $\bar{q}$. Per tant l'estudi que haurem de dur a terme s'ha de referir a la caracterització de funcions de transferència P, tals que el mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$ sigui compatible respecte a incentius. Si seguim el punt de vista bayesià, per a assegurar que un contracte es signa en condicions òptimes, serà suficient que aquest es negociï d'acord amb un mecanisme directe de la forma $\{\bar{q},P\}$ que compleixi (7.A):

$$U(x';x) \leq U(x;x) \qquad \forall x \in T_1$$

$$V(z';z) \leq V(z;z) \qquad \forall z \in T_2$$

per a qualsevol parell $(x,z) \in T_1 x T_2$ que constituexi l'estat de la natura quan es faci la negociació.

Per a calcular la utilitat esperada de cada una de les empreses - funcions U i V - hem de tenir en compte que, donat el mecanisme de negociació, és coneixement comú en quins dels estats de la natura és possible signar un contracte i en quins no, ja que es pot calcular l'excedent total de la negociació en cada estat de la natura. Com en l'apartat anterior podem escriure:

$$U(x';x) = \int_{\Omega_1(x')} \left[P(x',z) - C(\bar{q}(x',z),x) \right] dF(z)$$

$$V(z';z) = \int_{\Omega_2(z')} \left[I(\bar{q}(x,z'),z) - P(x,z') \right] dG(x)$$

$$\text{on } \Omega_1(x') := \{ z \in T_2 \ / \ \bar{q}(x',z) \geq 0 \}$$
$$\Omega_2(z') := \{ x \in T_1 \ / \ \bar{q}(x,z') \geq 0 \}$$

ja que en un estat $(x,z) \in T_1 x T_2$ en què la quantitat intercanviada òptima prescrita sigui negativa òbviament no es signarà mai cap contracte.

L'observació precedent ens indica que haurem de començar el nostre estudi caracteritzant els conjunts Ω_i quan la regla d'intercanvi ve donada per $\bar{q}$:

Lema 7.3. En la hipòtesi (C.I.) els dominis de definició de les utilitats esperades per cada empresa, si es duu a terme la negociació amb un mecanisme directe $\{q,P\}$, són, respectivament:

$$\Omega_1(x) = [z^*(x),1] \qquad\qquad \Omega_2(z) = [0,x^*(z)]$$

on les funcions z^* i x^* estan definides de la manera següent:

$$z^*:T_1 \dashrightarrow T_2 \qquad z^*(x) = \begin{cases} \text{el valor } z\in T_2\text{, si existeix, en què } \bar{q}(x,z)=0 \\ 0 \qquad \text{si } \bar{q}(x,z)\geq 0 \quad \forall z\in T_2 \\ 1 \qquad \text{si } \bar{q}(x,z)\leq 0 \quad \forall z\in T_2 \end{cases}$$

$$x^*:T_2 \dashrightarrow T_1 \qquad x^*(z) = \begin{cases} \text{el valor } x\in T_1\text{, si existeix, en què } \bar{q}(x,z)=0 \\ 1 \qquad \text{si } \bar{q}(x,z)\geq 0 \quad \forall x\in T_1 \\ 0 \qquad \text{si } \bar{q}(x,z)\leq 0 \quad \forall x\in T_1 \end{cases}$$

En efecte, recordem que la definició de $\bar{q}(x,z)$ ens permet trobar explícitament $\bar{q}_x$ i $\bar{q}_z$, de manera que podem assegurar que $\bar{q}$ és decreixent respecte a la variable x i creixent respecte a z. Així doncs, donat un valor de x, la funció $\bar{q}(x,z)$ tindrà, com a màxim, un canvi de signe, ja que és una funció derivable - i per tant contínua -, i la definició de z^* està ben justificada.

A més, una empresa que anunciï un valor x fixat podrà negociar un contracte sempre que l'altra banda del mercat estigui definida per un valor $z \geq z^*(x)$, perquè llavors:

$$\bar{q}(x,z) \geq \bar{q}(x,z^*(x))=0 \quad \text{si } z^*(x) \text{ és de l'interior de } T_2$$

$$\bar{q}(x,z) \geq \bar{q}(x,z^*(x)) \geq 0 \quad \text{en el cas } z^*(x)=0$$

Aquest raonament és suficient per assegurar que, per la primera empresa, $\Omega_1(x) = [z^*(x),1]$.
Pel que fa a la funció x^* i al conjunt $\Omega_2(z)$, es pot arribar a una conclusió similar utilitzant els mateixos arguments anteriors: al ser $\bar{q}$ decreixent respecte a x, es compleix $\bar{q}(x,z) \geq 0$ per tot $x \in [0,x^*(z)]$.∎

Per a una situació de joc donada, determinada per les funcions de cost i ingrés de les dues empreses, serà molt probable que almenys una de les funcions $z^*(x)$ o $x^*(z)$ sigui no constant. Això significa que l'anunci de certes característiques per part d'un dels agents en el transcurs de la negociació pot implicar automàticament la no signatura del contracte [per l'agent 1, per exemple, es donarà aquest cas sempre que anunciï $x \in T_1$ amb $z^*(x)=0$], o que només es signarà per agents de la part contrària amb certes característiques.

Si és així, les utilitats que puguin obtenir les empreses són funció també de $x^*(z)$ i $z^*(x)$, ja que són coneixement comú abans d'iniciar-se la negociació, i la determinació d'aquesta dependència és un pas previ per a poder caracteritzar els mecanismes directes $\{\bar{q},P\}$ compatibles respecte a incentius. En aquest sentit és necessari donar primer algunes propietats de x^* i z^*, per poder deduir la forma de les funcions d'utilitat:

<u>Lema 7.4.</u> En les condicions del lema anterior es poden definir valors $\underline{x},\bar{x}\in T_1$ i $\underline{z},\bar{z}\in T_2$ tals que:

(1) $z^*(x)=0$ per $x\in[0,\underline{x}]$

$z^*(x)$ és una funció derivable i creixent per $x\in(\underline{x},\bar{x})$

$z^*(x)=1$ per $x\in[\bar{x},1]$

(2) $x^*(z)=0$ per $z\in[0,\underline{z}]$

$x^*(z)$ és una funció derivable i creixent per $z\in(\underline{z},\bar{z})$

$x^*(z)=1$ per $z\in[\bar{z},1]$

(3) x^* i z^* són funcions inverses en els intervals $(\underline{x},\bar{x})$ i $(\underline{z},\bar{z})$

En efecte:

(1) Observem, en primer lloc, que si $\bar{q}(x,z)\leq 0$ per tot z, i prenem un valor $x'>x$ tindrem $\bar{q}(x',z)\leq\bar{q}(x,z)\leq 0$ per tot z. Dit d'altra manera:

$$z^*(x)=1 \Longrightarrow z^*(x')=1 \quad \text{per tot } x'>x$$

Podem definir, per tant, $\bar{x}$ com l'element més petit de T_1 en que $z^*(x)=1$, o, equivalentment:

$$\bar{x} := \inf \{ x \in T_1 \;/\; \bar{q}(x,z) \geq 0 \quad \forall z \in T_2 \}$$

Es evident, per la definició de $\bar{x}$, que $z^*(x)=1$ per tot $x \in [\bar{x},1]$, i que si l'empresa venedora anuncia un valor d'aquest interval no s'arribarà a un acord, sigui quina sigui la característica del mercat de la segona empresa.

Així mateix, si $\bar{q}(x,z) \geq 0$ per tot z, es compleix igualment aquesta propietat per tots els punts a l'esquerra de x, de manera que essent la funció $\bar{q}$ contínua, té sentit considerar el punt:

$$\underline{x} := \sup \{ x \in T_1 \;/\; \bar{q}(x,z) \geq 0 \quad \forall z \in T_2 \}$$

i tindrem $z^*(x)=0$ per $x \in [0,\underline{x}]$. L'anunci d'un valor x d'aquest interval implicarà la signatura d'un acord per qualsevol característica de l'altra banda del mercat.

Per últim, demostrem que $z^*(x)$ és derivable i creixent en $(\underline{x},\bar{x})$. Per construcció, en l'interval $(\underline{x},\bar{x})$ la funció $z^*(x)$ està definida de manera implícita per l'equació $\bar{q}(x,z^*(x))=0$. Ja que $\bar{q}$ és diferenciable, z^* resulta ser-ho també, i derivant l'equació tindrem:

$$\bar{q}_x(x,z^*(x)) + \bar{q}_z(x,z^*(x)) \; z_x^*(x) = 0$$

d'on: $\quad z_x^*(x) = - \bar{q}_x(x,z^*(x)) \;/\; \bar{q}_z(x,z^*(x)) > 0$

al ser $\bar{q}$ creixent respecte a z i decreixent respecte a x.

(2) En el cas de la funció x^* podrem definir:

$$\underline{z} := \sup \{z \in T_2 \ / \ \bar{q}(x,z) \leq 0 \quad \forall x \in T_1 \}$$

$$\bar{z} := \inf \{z \in T_2 \ / \ \bar{q}(x,z) \leq 0 \quad \forall x \in T_1 \}$$

Un raonament similar al de (1) ens permet afirmar que si l'empresa compradora anuncia un valor $z \in [0,\underline{z}]$ no d'arribarà a cap acord, sigui quin sigui l'estat de la primera empresa; i que si anuncia $z \in [\bar{z},1]$ es signarà un contracte sempre. Igualment és immediat comprovar que $x^*(z)$ és també una funció derivable i creixent a l'interval $(\underline{z},\bar{z})$.

(3) Per últim, demostrem que les funcions x^* i z^* són inverses en els intervals $(\underline{x},\bar{x})$ i $(\underline{z},\bar{z})$. En efecte, donat $x \in (\underline{x},\bar{x})$, $z^*(x)$ és, per definició, el valor en què $\bar{q}(x,z^*(x))=0$. Però llavors, per la definició de x^*, tenim $\bar{q}(x^*(z^*(x)),z^*(x))=0$, i ja que el punt de tall és únic, podem assegurar que es compleix que $x^*(z^*(x))=x$. La composició en sentit contrari porta a la mateixa conclusió.∎

Com a conseqüència tindrem també:

Corol.lari. Les funcions d'utilitat de les dues empreses, si es duu a terme una negociació amb un mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$, es poden definir com:

$$U(x';x):=\begin{cases}\displaystyle\int_{z^*(x')}^{1}\Big[P(x',z)-C(\bar{q}(x',z),x)\Big]dF(z) & \text{si } x'\in[0,\bar{x}]\\[2ex] 0 & \text{per } x'\in(\bar{x},1]\end{cases}$$

tenint en compte que $z^*(x')$ és constant i igual a zero per $x'\in[0,\underline{x}]$.

$$V(z';z):=\begin{cases}0 & \text{per } z'\in[0,\underline{z})\\[2ex] \displaystyle\int_{0}^{x^*(z')}\Big[I(\bar{q}(x,z'),z)-P(x,z')\Big]dG(x) & \text{si } z'\in[\underline{z},1]\end{cases}$$

tenint en compte que $x^*(z')$ és constant i igual a la unitat per $z'\in[\bar{z},1]$.

Ara estem en condicions de poder buscar una funció de preus $P(x,z)$ tal que el mecanisme $\{q,P\}$, amb la funció $\bar{q}(x,z)$ com a regla d'intercanvi, sigui compatible respecte a incentius. Imposarem dues restriccions a la funció de preus que caracteritzarem. Haurà de ser:

(1) additivament separable[10]: $P(x,z)=p_1(x)+p_2(x)$, i

(2) diferenciable.

La condició (7.A), que estableix els mecanismes que són compatibles respecte a incentius, es pot escriure també com:

$$U(x;x)=\text{màx}_{x'}\ U(x';x) \qquad V(z;z)=\text{màx}_{z'}\ V(z';z)$$

Si suposem diferenciabilitat a la funció de preus, la condició necessària de primer ordre serà:

$$U_{x'}(x';x) = 0 \quad \text{per } x'=x \qquad \text{en qualsevol } x\in[0,\bar{x}]$$

$$V_{z'}(z';z) = 0 \quad \text{per } z'=z \qquad \text{en qualsevol } z\in[\underline{z},1]$$

10. Els mecanismes additivament separables van ser estudiats per primera vegada, en un marc molt general de béns públics, per d'Aspremont i Gérard-Varet (1979), on demostren que amb un mecanisme d'aquest tipus compatible respecte a incentius en sentit bayesià s'obtenen distribucions eficients sense necessitat de subsidis externs. En el seu article imposen una condició, que anomenen "d'independència", similar a la nostra hipòtesi de creences independents, però els recursos que utilitzen en la seva demostració són diferents dels que es fan servir aquí, ja que suposen que es pot fer una distribució en qualsevol estat de la natura.
En una línia similar - mecanismes additivament separables i hipòtesi d'independència - es pot veure també Arrow (1979).

Desenvolupem la primera condició. Tenint en compte la forma de la regla de quantitats ($\bar{q}$) i el corol.lari anterior, la utilitat del primer agent serà:

$$U(x';x) = \int_{z^*(x')}^{1} \left[P(x',z) - C(\bar{q}(x',z),x)\right] dF(z) =$$

$$= \int_{z^*(x')}^{1} p_1(x') dF(z) + \int_{z^*(x')}^{1} \left[p_2(z) - C(\bar{q}(x',z),x)\right] dF(z)$$

$$= p_1(x')\left[1 - F(z^*(x'))\right] +$$

$$+ \int_{z^*(x')}^{1} \left[p_2(z) - C(\bar{q}(x',z),x)\right] dF(z) \qquad \text{si } x' \in (\underline{x}, \bar{x})$$

En particular, si $x' \in [0, \underline{x}]$ tenim $z^*(x')=0$, de manera que per aquests valors l'expressió serà més senzilla:

$$U(x';x) = p_1(x') + \int_{0}^{1} \left[p_2(z) - C(\bar{q}(x',z),x)\right] dF(z)$$

Busquem ara la derivada d'aquesta funció respecte a x'. Haurem de diferenciar entre els dos intervals, ja que la funció $z^*(x')$ és constant en un d'ells:

(1) per $x' \in [0,\underline{x}]$:

$$U_{x'}(x';x) =$$

$$= \frac{d}{dx}\, p_1(x') - \int_0^1 C_q(\bar{q}(x'z),x)\bar{q}_x(x',z)dF(z) =$$

$$= \frac{d}{dx}\, p_1(x') - \frac{d}{dx}\int_0^1 I(\bar{q}(x',z),z)dF(z) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\, p_1(x') - \int_0^1 I(\bar{q}(x',z),z)dF(z)\,\right]$$

En aquest càlcul hem aprofitat que, per definició, la funció $\bar{q}$ compleix $C_q(\bar{q}(x,z),x)=I_q(\bar{q}(x,z),z)$, i que fent aquesta substitució ens queda, sota el signe d'integral, un diferencial total.

(2) per $x' \in (\underline{x},\bar{x})$:

$$U_{x'}(x';x) = \left[1-F(z^*(x')\right] \frac{d}{dx}\, p_1(x') +$$

$$+ p_1(x') \left[-f(z^*(x')\right] \; z^*_x(x') -$$

$$- \int_{z^*(x')}^1 C_q(\bar{q}(x',z),x)\; \bar{q}_x(x',z)\; dF(z) -$$

$$- z^*_x(x')\; p_2(z^*(x'))\; f(z^*(x')) +$$

$$+ z^*_x(x')\; C(\bar{q}(x',z^*(x')),x)\; f(z^*(x'))$$

Per tant, la condició necessària de primer ordre per què el mecanisme sigui compatible respecte a incentius, pel que fa a l'agent 1, és:

$$(1) \quad \frac{d}{dx}\left[\, p_1(x) - \int_0^1 I(\bar{q}(x,z),z)dF(z)\,\right] = 0 \qquad \text{per } x \in [0,\underline{x}]$$

$$(2) \quad \left[1-F(z^*(x))\right] \frac{d}{dx} p_1(x) - p_1(x)\, f(z^*(x))\, z^*_x(x) - $$

$$- p_2(z^*(x))\, f(z^*(x))\, z^*_x(x) = \qquad (7.B.1)$$

$$= \int_{z^*(x)}^1 C_q(\bar{q}(x,z),x)\, \bar{q}_x(x,z)\, dF(z) -$$

$$- C(\bar{q}(x,z^*(x)),x)\, f(z^*(x))\, z^*_x(x) \qquad \text{per } x \in (\underline{x},\bar{x})$$

La primera d'aquestes dues equacions és de resolució immediata:

$$p_1(x) = \int_0^1 I(\bar{q}(x,z),z)\, dF(z) + k_1 \qquad \text{per } x \in [0,\underline{x}]$$

i al mateix temps ens proporcionarà la condició de contorn necessària per a resoldre l'equació diferencial plantejada a (7.B.1), ja que si exigim la diferenciabilitat de la funció d'utilitat de la primera empresa, s'ha de complir:

$$p_1(\underline{x}) = \int_0^1 I(\bar{q}(\underline{x},z),z)\, dF(z) + k_1$$

Però, evidentment, (7.B.1) no es pot resoldre de manera independent, ja que en la mateixa intervenen les dues funcions de preu p_1 i p_2. Per a fer-ho haurem de requerir també la compatibilitat respecte a incentius pel segon agent. Fent operacions tindrem:

$$V(z';z)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^*(z')} \left[I(\bar{q}(x,z'),z)-p_1(x)\right] dG(x)-p_2(z')G(x^*(z')) & \text{si } z'\in(\underline{z},\bar{z}) \\ \displaystyle\int_0^1 \left[I(\bar{q}(x,z'),z)-p_1(x)\right] dG(x) - p_2(z') & \text{si } z'\in[\bar{z},1] \end{cases}$$

ja que $x^*(z)$ és constant i igual a ú en aquest últim interval, qüestió que cal posar de manifest degut a la utilització posterior de la derivada d'aquesta funció, que es pot escriure com:

$$V_{z'}(z';z) = \int_0^{x^*(z')} I_q(\bar{q}(x,z'),z)\bar{q}_z(x,z')dG(x) +$$

$$+ x_z^*(z') \left[I(\bar{q}(x^*(z'),z'),z) - p_1(x^*(z'))\right] g(x^*(z')) -$$

$$- G(x^*(z')) \frac{d}{dz} p_2(z') - p_2(z') g(x^*(z')) x_z^*(z')$$

Quan $x^*(z')=1$ (interval $[\bar{z},1]$) queda reduïda a:

$$V_z'(z';z) = \int_0^1 I_q(\bar{q}(x,z'),z)\bar{q}_z(x,z')dG(x) - \frac{d}{dz} p_2(z') =$$

$$= \frac{d}{dz} \left[\int_0^1 C(\bar{q}(x,z),x)dG(x) - p_2(z')\right]$$

de manera que la condició de primer ordre pel segon agent donarà:

$$(3) \int_0^{x^*(z)} I_q(\bar{q}(x,z),z)\bar{q}_z(x,z)dG(x) +$$

$$+ x_z^*(z) I(\bar{q}(x^*(z),z),z) g(x^*(z)) = \qquad (7.B.2)$$

$$= G(x^*(z)) \frac{d}{dz} p_2(z) + \left[p_2(z)+p_1(x^*(z))\right] g(x^*(z)) x_z^*(z)$$

si $z \in (\underline{z},\bar{z})$

$$(4) \quad \frac{d}{dz} p_2(z) = \int_0^1 \frac{d}{dz} C(\bar{q}(x,z),x)dG(x) \qquad \text{si } z' \in [\bar{z},1]$$

Raonant com en el cas de la funció U, la segona part és de resolució immediata, i alhora ens proporcionarà les condicions de contorn necessàries per a resoldre (7.B.2). En total, podem establir el següent resultat:

Proposició 7.4. La condició necessària per què la funció de preus $P(x,z)=p_1(x)+p_2(z)$ doni lloc a un mecanisme compatible respecte a incentius juntament amb $\bar{q}(x,z)$ és que:

(a) Als intervals $(\underline{x},\bar{x})$ i $(\underline{z},\bar{z})$, respectivament, p_1 i p_2 siguin solució del sistema d'equacions diferencials:

$$\left[1-F(z^*(x))\right] \frac{d}{dx} p_1(x) - \left[p_1(x)+p_2(z^*(x))\right] \frac{d}{dx}\left[F(z^*(x))\right] =$$

$$=\int_{z^*(x)}^{1} C_q(\bar{q}(x,z),x)\ \bar{q}_x(x,z)\ dF(z) \qquad (7.B'.1)$$

$$G(x^*(z)) \frac{d}{dz} p_2(z) + \left[p_2(z)+p_1(x^*(z))\right] \frac{d}{dz}\left[G(x^*(z))\right] =$$

$$=\int_{0}^{x^*(z)} I_q(\bar{q}(x,z),z)\bar{q}_z(x,z)dG(x) \qquad (7.B'.2)$$

amb condicions inicials:

$$p_1(\underline{x}) = \int_0^1 I(\bar{q}(\underline{x},z),z)dF(z) + k_1$$

$$p_2(\bar{z}) = \int_0^1 C(\bar{q}(x,\bar{z}),x)dG(x) + k_2$$

(b) Pels intervals $[0,\underline{x}]$ i $[\bar{z},1]$, respectivament, s'ha de complir:

$$p_1(x) = \int_0^1 I(\bar{q}(x,z),z)\, dF(z) + k_1$$

$$p_2(z) = \int_0^1 C(\bar{q}(x,z),x)\, dG(x) + k_2$$

on k_1 i k_2 són constants qualsevulles.

El raonament anterior és suficient per a justificar aquesta proposició, afegint només que, respecte a (7.B), no hem escrit el terme de cost avaluat a $\bar{q}(x,z^*(x))$ ni el d'ingrés a $\bar{q}(x^*(z),z)$ perquè, per definició són quantitats nul.les, i no hi ha pèrdua de generalitat en considerar - pel que fa a aquest estudi - ingressos i costos nuls si no hi ha intercanvi. ∎

El sistema d'equacions diferencials plantejat a (7.B') és lineal, i totes les funcions que hi intervenen com a coeficients són, almenys, contínues. Per tant se'n pot assegurar l'existència de solució, que no ofereix massa dificultats de càlcul per a trobar-la - si tenim funcions de cost, ingrés i creences donades -, encara que calgui una resolució numèrica. Obviament la proposició anterior no dóna condicions suficients, però aquestes són de fàcil comprovació una vegada determinades les possibles regles de preu dels mecanismes.

En el capítol 8 presentem un cas particular, en què es pot resoldre explícitament el sistema d'equacions diferencials de la proposició anterior, així com obtenir condicions suficients per a caracteritzar els mecanismes que, a més, són individualment racionals.

Hi ha un tipus de situacions de joc, però, en què el sistema (7.B') és de resolució immediata, i ens permet continuar, més genèricament, l'estudi: quan les funcions x^* i z^* són constants. Aquest serà l'objectiu de la secció següent.

7.4.2. Negociacions factibles per qualsevol característica dels contractants

D'acord amb les observacions anteriors, utilitzarem aquí les següents hipòtesis de treball addicionals:

(C.I.) La informació a l'abast de les empreses, en el moment de començar la negociació, és suficientment precisa com per a poder sostenir creences que són independents del seu tipus.

(N.F.) Les funcions de cost i ingrés de les dues empreses permeten suposar que la negociació és factible en qualsevol estat de les dues bandes del mercat, perquè es pot obtenir una quantitat òptima d'intercanvi no negativa. És a dir:

$$\bar{q}(x,z)\geq 0 \qquad \forall (x,z)\in T_1 x T_2$$

La condició (N.F.) ens assegura que els conjunts Ω_i, dominis de definició de les utilitats esperades dels agents són, en aquest cas:

$$\Omega_1(x)=T_2 \qquad \forall x\in T_1 \qquad \text{(ja que } z^*(x)=0\text{)}$$

$$\Omega_2(z)=T_1 \qquad \forall z\in T_2 \qquad \text{(ja que } x^*(z)=1\text{)}$$

7.4.2.1. Eficiència ex post

En la secció 7.4.1. hem obtingut una condició necessària per què la família de mecanismes $\{\bar{q},P\}$, amb P additivament separable i diferenciable, sigui compatible respecte a incentius - i, per tant, eficient ex post -. Amb la hipòtesi (N.F.), la funció P haurà de complir, segons l'apartat (b) de la proposició 7.4:

$$P(x,z) = p_1(x) + p_2(z) \text{ on:}$$

$$p_1(z)= \int_0^1 I(\bar{q}(x,z),z)dF(z) + k_1$$

$$p_2(z)= \int_0^1 C(\bar{q}(x,z),x)dG(x) + k_2$$

essent k_1 i k_2 constants qualsevulles.

Observem que s'obté la mateixa solució utilitzant l'apartat (a) de la dita proposició, ja que (N.F.) implica que $z^*(x)=0$ per tot x i $x^*(z)=1$ per tot z. Llavors (7.B') és un sistema d'equacions diferencials que es pot integrar directament, per obtenir les mateixes funcions que hem escrit més amunt.

En aquest cas, la condició necessària per què $\{\bar{q},P\}$ sigui un mecanisme factible resulta ser suficient. Donem aquest resultat en la proposició següent:

<u>Proposició 7.5.</u> En les hipòtesis (C.I.) i (N.F.), qualsevol mecanisme directe de la família $\{\bar{q},\bar{P}\}$ definint:

$$
\begin{aligned}
&\bar{P}(x,z) := p_1(x) + p_2(z) - k \text{ amb} \\
&\qquad k \text{ constant qualsevol} \\
&\qquad p_1(x) = \int_{T_2} I(\bar{q}(x,z),z)\,dF(z) \\
&\qquad p_2(z) = \int_{T_1} C(\bar{q}(x,z),x)\,dG(x)
\end{aligned}
\tag{7.C}
$$

és compatible respecte a incentius i eficient ex post.

En efecte:

Per la proposició 7.2, tot mecanisme de la forma $\{\bar{q},P\}$ és eficient ex post. Falta veure que cada un dels mecanismes la família proposada és compatible respecte a incentius; és a dir, que compleix (7.A):

(a) Calculem $U(x';x)$ amb un d'aquests mecanismes:

$$U(x';x) = \int_{T_2} \left[\bar{P}(x',z) - C(\bar{q}(x',z),x)\right] dF(z) =$$

$$= p_1(x') - k + \int_{T_2} p_2(z)dF(z) - \int_{T_2} C(\bar{q}(x',z),x)dF(z) =$$

$$= \int_{T_2} S(\bar{q}(x',z),x,z)dF(z) + \int_{T_2} p_2(z)dF(z) - k$$

Llavors resulta obvi que $U(x';x) \leq U(x;x)$, ja que la diferència entre abmdues és $S(.,x,z)$, que arriba al seu màxim a $\bar{q}(x,z)$ i no a $\bar{q}(x',z)$.

(b) De manera similar tindrem:

$$V(z';z) = \int_{T_1} \left[I(\bar{q}(x,z'),z)-\bar{P}(x,z')\right]dG(x) =$$

$$= \int_{T_1} I(\bar{q}(x,z'),z)dG(x) - p_2(z') + k - \int_{T_1} p_1(x)dG(x) =$$

$$= \int_{T_1} S(\bar{q}(x,z'),x,z)dG(x) - \int_{T_1} p_1(x)dG(x) + k$$

I per tant:

$$V(z';z)-V(z;z) = \int_{T_1} \left[S(\bar{q}(x,z'),x,z)-S(\bar{q}(x,z),x,z)\right]dG(x) \leq 0$$

al ser $\bar{q}(x,z)$ el màxim de $S(.,x,z)$.■

Si el planificador tria un mecanisme de la família $\{\bar{q},\bar{P}\}$ per a dur a terme la negociació, les utilitats que poden esperar obtenir les dues empreses del contracte que signaran (i observem que per (N.F.) sempre val la pena fer-ho) seran:

$$UE(x) = U(x;x) = \int_{T_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z) + CM - k$$

$$VE(z) = V(z;z) = \int_{T_1} S(\bar{q}(x,z),x,z)dG(x) - IM - k$$

definint, per comoditat: $CM := \int_{T_1 x T_2} C(\bar{q}(x,z),x)dG(x)dF(z)$

$$IM := \int_{T_1 x T_2} I(\bar{q}(x,z),z)dG(x)dF(z)$$

CM i IM indiquen cost i ingrés mig esperat ex ante, respectivament. Aquests termes, juntament amb k, regulen la part de l'excedent total que poden esperar obtenir cada un dels agents.

7.4.2.2 Racionalitat individual

En primer lloc explorarem la possibilitat de trobar, d'entre la família de mecanismes eficients ex post caracteritzats per la proposició 7.5, aquells que siguin racionalment individuals ex ante. S'obtenen a partir del següent resultat:

Proposició 7.6. Un mecanisme de la família $\{\bar{q},\bar{P}\}$ donada per (7.C) és individualment racional ex ante si, i solament si, el paràmetre k que caracteritza la funció de preus és de l'interval [CM,IM] (veure pàg. anterior). En particular per $k^*=\frac{1}{2}[CM+IM]$ el mecanisme proporciona una utilitat esperada igual per ambdós agents.

En efecte, per (7.D) les utilitats esperades ex ante pels dos agents seran:

$$W_1(<\bar{q},\bar{P}>)=\int_{T_1} U(x;x)dG(x)=$$

$$=\int_{T_1xT_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z)dG(x) + CM - k =$$

$$= IM - k$$

$$W_2(<\bar{q},\bar{P}>)=\int_{T_2} V(z;z)dF(z)=$$

$$= \int_{T_1 x T_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z)dG(x) - IM + k =$$

$$= k - CM$$

Per definició, el mecanisme serà individualment racional ex ante si compleix $W_i(<\bar{q},\bar{P}>) \geq 0$ per tot i, condicions que determinen $k \in [CM, IM]$, interval no buit per les hipòtesis generals del nostre estudi.

Pel valor mig d'aquest interval, k^*, tindrem:

$$W_1(<\bar{q},\bar{P}>) = IM - \tfrac{1}{2}[CM+IM] = \tfrac{1}{2}[IM-CM] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{T_1 x T_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z)dG(x) \geq 0$$

$$W_2(<\bar{q},\bar{P}>) = \tfrac{1}{2}[CM+IM] - CM = \tfrac{1}{2}[IM-CM] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_{T_1 x T_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z)dG(x) \geq 0$$

d'on evidentment, $W_1(<\bar{q},\bar{P}>)=W_2(<\bar{q},\bar{P}>)$ ∎

La proposició anterior caracteritza un conjunt de mecanismes directes compatibles respecte a incentius i eficients ex post, que es poden triar quan les empreses estan simètricament informades - és a dir, en l'etapa ex ante, en que cap de les dues coneix encara la seva informació privada -. En aquestes condicions, qualsevol dels mecanismes anteriors serà acceptat sense dificultat per ambdues empreses, i és òptim, ja que és eficient ex post. Si, en particular, es tria el mecanisme de (7.C) per $k=k^*$, les empreses es repartiran en parts iguals l'excedent esperat de la seva relació, justament com en el cas d'informació completa.

La racionalitat individual ex ante, no obstant, no és adequada si les empreses coneixen la seva informació privada quan es plantejen d'entrar en la negociació. En aquest cas serà necessari exigir que el mecanisme reflecteixi la situació _ínterim_ en què estan les empreses, ja que cal assegurar-se de què aquestes tinguin un incentiu per a entrar en la negociació. Si un mecanisme imposat externament ha de satisfer aquesta condició, caldrà que compleixi:

$$W_i(\langle q,P\rangle|t_i)\geq 0 \qquad \forall\, t_i\in T_i \quad \forall\, i=1,2$$

donat que el planificador no disposa d'informació sobre el tipus d'un agent quan proposa el mecanisme de negociació. Per tant, aquest requisit és imprescindible per a assegurar que el mecanisme serà acceptat per dues empreses qualsevulles.

Per veure quins dels mecanismes de la família donada a (7.C) són _individualment racionals en sentit ínterim_ necessitarem el resultat següent:

Lema 7.7. Qualsevol mecanisme $\{\bar{q},\bar{P}\}$ del tipus (7.C) compleix:

$$U(1;1)=\text{mín}_x U(x;x) \qquad V(0;0)=\text{mín}_z V(z;z)$$

En efecte, derivant la funció U(x;x) de (7.D) tenim:

$$\frac{d}{dx} U(x;x)= \int_{T_2} I_q(\bar{q}(x,z),z)\bar{q}_x(x,z)dF(z) -$$

$$-\int_{T_2} \left[C_q(\bar{q}(x,z),x)\bar{q}_x(x,z)+C_x(\bar{q}(x,z),x)\right]dF(z) =$$

$$= -\int_{T_2} C_x(\bar{q}(x,z),x)\ dF(z)$$

on la darrera igualtat es dedueix de la definició de la funció $\bar{q}(x,z)$.

Ara bé, per hipòtesi, la funció de cost C és creixent respecte a la seva segona variable, és a dir, $C_x(.,x)>0$ per qualsevol valor de x fixat. Per tant el signe de la derivada anterior és sempre negatiu, i podem assegurar que la utilitat esperada de la primera empresa serà una funció decreixent de la variable que simbolitza la seva informació privada.

De manera similar, per a la segona empresa es compleix:

$$\frac{d}{dz} V(z;z)=\int_{T_1} I_z(\bar{q}(x,z),z)\ dG(x) > 0$$

i per tant en aquest cas la funció d'utilitat esperada és creixent respecte al paràmetre z.∎

En conseqüència, podrem assegurar que el mecanisme és individualment racional en sentit ínterim si trobem un valor de k - que ens defineixi completament $\bar{P}(x,z)$ - en el que es compleixi $U(1;1)\geq 0$ i $V(0;0)\geq 0$. Per a enunciar les condicions en què això es pot fer, utilitzarem la següent notació:

$$\bar{S}(x,z):=S(\bar{q}(x,z),x,z)=I(\bar{q}(x,z),z)-C(\bar{q}(x,z),x)$$

$$E1(1):=\int_{T_2} \bar{S}(1,z)dF(z)$$

$$E2(0):=\int_{T_1} \bar{S}(x,0)dG(x)$$

$\bar{S}(x,z)$ és l'excedent òptim del mercat caracteritzat pel parell $(x,z)\in T_1 x T_2$. Observem que la funció $\bar{S}$ és creixent respecte a la variable z i decreixent respecte a la variable x, com es pot deduir del lema anterior. Per tant E1(1) es pot interpretar com l'excedent mínim que l'agent 1 espera que existeixi, en mitjana, si es signa un contracte, ja que s'obté amb x=1, és a dir, en les pitjors condicions de la seva banda del mercat. El valor E2(0) fa el mateix paper per l'agent 2: és també l'excedent mínim esperat des del seu punt de vista, ja que s'obté per z=0, quan l'agent obté els ingressos més baixos.

Amb l'ajut d'aquestes funcions podem establir la condició de la manera següent:

Proposició 7.8. Si les funcions d'ingrés i cost de les dues empreses satisfan la condició[11]:

$$\int_{T_1 x T_2} \bar{S}(x,z)dG(x)dF(z) \leq E1(1)+E2(0) \qquad (7.E)$$

tots els mecanismes $\{\bar{q},\bar{P}\}$ de la família donada a (7.C) per $k \in [IM-E2(0), CM+E1(1)]$ són individualment racionals en sentit ínterim[12].

En efecte:

$$W_1(\langle\bar{q},\bar{P}\rangle|x) = U(x;x) \geq U(1;1) = E1(1) + CM - k$$
$$W_2(\langle\bar{q},\bar{P}\rangle|z) = V(z;z) \geq V(0;0) = E2(0) - IM + k$$

Per tant una condició suficient per a assegurar la racionalitat en sentit ínterim del mecanisme és:

---

11. Es pot trobar una condició similar a Spulber (1988) [proposició 6, p. 261] per a unes funcions de cost i ingrés particulars.

12. Aquesta observació contrasta amb el resultat obtingut per Myerson i Satterthwaite (1983), que en el cas d'una negociació per a intercanviar un objecte indivisible demostren que no és possible trobar cap mecanisme de revelació - que indueixi a dir la veritat - que sigui alhora individualment racional en sentit ínterim i eficient ex post.
Però, com també observen Cramton, Gibbons i Klemperer (1987), el resultat és una conseqüència de la poca "flexibilitat" de la pròpia negociació, deguda sobre tot al fet de què només es pot intercanviar un únic objecte.
Veure també Hagerty i Rogerson (1987), Matsuo (1989) o Satterthwaite i Williams (1989).

$$IM - E2(0) \leq k \leq E1(1) + CM$$

sempre i quan l'interval anterior sigui propi, restricció que, reescrita, dóna la anunciada a (7.E).∎

Respecte a la relació entre els mecanismes individualment racionals ex ante i en sentit ínterim tenim:

Observació.- Tot mecanisme $\{\bar{q},\bar{P}\}$ de la família definida a (7.C) que sigui individualment racional en sentit ínterim ho és també ex ante.

Cal comprovar que $[IM-E2(0),CM+E1(1)] \subset [CM,IM]$, però al ser $E2(0)\geq 0$ i $E1(1)\geq 0$ serà suficient veure que $IM-E2(0)\geq CM$ així com que $CM+E1(1)\leq IM$, és a dir, que:

$$E1(1) \leq IM - CM \leq E2(0)$$

condició que es pot assegurar pel comportament monòton de la funció $\bar{S}(x,z)$.∎

Acabem aquesta secció amb una altra observació: en general, si es compleix (7.E), hi haurà diferents mecanismes òptims entre els que es podrà triar.

Donem a continuació algunes suggerències de com es pot optar per un d'ells, destriant un cert element $\bar{k}$ de l'interval $[IM-E2(0),CM+E1(1)]$. Ja que suposem que el mecanisme és imposat externament, podem considerar que l'elecció del mecanisme està en mans del planificador extern. Aquest no coneix, lògicament, la informació privada dels agents, i per tant la seva tria ha d'estar referida a utilitat total esperada ex ante de les empreses[13]. Si el mecanisme amb $k=k^*$ de la proposició 7.6 és individualment racional en sentit ínterim, pot ser una bona elecció, ja que reparteix en parts iguals l'excedent esperat.

Una altra possibilitat és buscar el mecanisme que maximitzi una suma ponderada d'aquestes utilitats[14]:

$$\text{Màx} \quad \alpha W_1(\langle q,P\rangle)+\beta W_2(\langle q,P\rangle) \qquad \text{s.a.} \quad \begin{array}{l}\{q,P\}=\{\bar{q},\bar{P}\} \\ k\in[IM-E2(0),CM+E1(1)]\end{array}$$

on $\alpha,\beta\in[0,1]$ són fixats.

En aquest cas, i ja que:

$$W_1(\langle q,P\rangle)=\int_{T_1 x T_2} I(\bar{q}(x,z),z)dG(x)dF(z) - k$$

13. Observem que en el cas que estem estudiant no hi ha dificultat en emprar aquest concepte, perquè essent les variables x i z independents, és immediat que existeix la distribució de probabilitat conjunta.

14. Per exemple, Baron i Myerson (1982) utilitzen un criteri amb una funció objectiu d'aquest mateix tipus.

$$W_2(<q,P>)= k - \int_{T_1 x T_2} C(\bar{q}(x,z),x)dG(x)dF(z)$$

la funció objectiu és lineal en k:

$$\text{Màx } (\beta-\alpha)k + \int_{T_1 x T_2} \left[\alpha I(\bar{q}(x,z),z)-\beta C(\bar{q}(x,z),x)\right]dG(x)dF(z)$$

$$\text{s.a.} \quad k\in[IM-E2(0),CM+E1(1)]$$

Per tant, si $\beta>\alpha$ (el pendent de la recta és positiu), l'òptim està a $\bar{k}$=CM+E1(1) mentre que per $\beta<\alpha$ cal triar $\bar{k}$=IM-E2(0) per a obtenir el millor valor. Si es dóna la mateixa ponderació a ambdues empreses ($\alpha=\beta$), amb qualsevol dels valors de k s'obté el mateix valor de la funció objectiu.

7.4.2.3. Preus de transferència no separables

En la secció anterior hem obtingut una condició necessària i suficient per a garantir l'existència de mecanismes directes $\{\bar{q},P\}$ compatibles respecte a incentius i eficients ex post que siguin també individualment racionals en sentit ínterim.

Però la condició establerta en la proposició 7.8 es refereix només a la família de mecanismes directes de (7.C) - additivament separables i diferenciables -. Si (7.D) no es compleix podem preguntar-nos per l'existència d'altres mecanismes directes eficients ex post i compatibles respecte a incentius que, no essent de la dita família, siguin individualment racionals en sentit ínterim. El conjunt de resultats que exposarem en aquesta secció ens assegura que no existeixen.

Comencem per obtenir un condició necessària que haurà de verificar qualsevol mecanisme directe de la forma $\{\bar{q},P\}$ és a dir, eficient ex post:

<u>Proposició 7.9.</u> En les hipòtesis (C.I.) i (N.F.), qualsevol mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$ que sigui compatible respecte a incentius compleix:

(1) La funció P és derivable parcialment gairabé per tot respecte a les seves dues variables.

(2) $$\int_{T_2} P(x,z)dF(z) = \int_{T_2} I(\bar{q}(x,z),z)dF(z) + k_1$$

(3) $$\int_{T_1} P(x,z)dG(x) = \int_{T_1} C(\bar{q}(x,z),x)dG(x) + k_2$$

on k_1 i k_2 són constants qualsevulles.

La demostració de les condicions (2) i (3) és totalment paral.lela; i (1) es dedueix al mateix temps. Serà suficient, per tant, detallar només una d'elles, per exemple (2):

Per (7.A) tot mecanisme compatible respecte a incentius ha de complir $U(x';x) \leq U(x;x)$ siguin quins siguin els valors de $x,x' \in T_1$. Per tant, donats $x,x' \in T_1$ qualssevol, podrem escriure:

$$U(x';x) \leq U(x;x) \qquad U(x;x') \leq U(x';x')$$

i, tenint en compte que, per definició:

$$U(x';x) = \int_{T_2} \left[P(x',z) - C(\bar{q}(x',z),x)\right] dF(z)$$

les condicions anteriors són equivalents a:

$$\int_{T_2} \left[C(\bar{q}(x',z),x') - C(\bar{q}(x,z),x')\right] dF(z) \leq$$

$$\leq \int_{T_2} \left[P(x',z) - P(x,z)\right] dF(z) \leq$$

$$\leq \int_{T_2} \left[C(\bar{q}(x',z),x) - C(\bar{q}(x,z),x)\right] dF(z)$$

de manera que dividint aquestes expressions per (x'-x) i fent tendir x' a x resulta:

$$\int_{T_2} P_x(x,z)dF(z) = \int_{T_2} C_q(\bar{q}(x,z),x)\ \bar{q}_x(x,z)\ dF(z)$$

ja que C i $\bar{q}$ són contínues i diferenciables. Per tant P és derivable g.p.t. respecte a x.

Però tenint en compte que $\bar{q}$ compleix la igualtat $I_q(\bar{q}(x,z),z) = C_q(\bar{q}(x,z),x)$, podem escriure també:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{T_2} P(x,z)dF(z)\right] = \int_{T_2} I_q(\bar{q}(x,z),z)\ \bar{q}_x(x,z)dF(z) =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\int_{T_2} I(q(x,z),z)\ dF(z)\right]$$

i d'aquesta igualtat se'n dedueix directament (2).∎

Observem, en primer lloc, que com a conseqüència d'aquesta proposició, tenim també el següent:

<u>Corol.lari.</u>- Qualsevol mecanisme $\{\bar{q},P\}$, compatible respecte a incentius additivament separable, és també diferenciable.

Per tant, en cas que no es compleixi (7.D) haurem de buscar mecanismes individualment racionals en sentit ínterim fora de la família $\{\bar{q},P\}$ on P és additivament separable (relaxar la condició de diferenciabilitat de P no té sentit). No obstant, això no serà possible, ja que podem establir la següent:

<u>Proposició 7.10.</u> En les hipòtesis (N.F.) i (C.I.) la condició (7.E) és necessària per què un mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$ qualsevol sigui compatible respecte a incentius i individualment racional en sentit ínterim.

En efecte: donat un mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$ qualsevol, la proposició 7.3 ens caracteritza suficientment la funció de preus, P, per a poder trobar les utilitats esperades, si el mecanisme és compatible respecte a incentius:

sigui $R_1(x) := \int_{T_2} P(x,z)dF(z) = \int_{T_2} I(\bar{q}(x,z),z)dF(z) + k_1$

$$R_2(z) := \int_{T_1} P(x,z)dG(x) = \int_{T_1} C(\bar{q}(x,z),x)dG(x) + k_2$$

llavors $$U(x;x) = \int_{T_2} \left[P(x,z) - C(\bar{q}(x,z),x)\right]dF(z) =$$

$$= R_1(x) - \int_{T_2} C(\bar{q}(x,z),x)dF(z) =$$

$$= \int_{T_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z) + k_1$$

i, de manera similar, $V(z;z) = \int_{T_1} S(\bar{q}(x,z),x,z)dG(x) + k_2$

Per tant, procedint com en el lema 7.7, podem assegurar que $U(x;x)$ és decreixent i $V(z;z)$ és creixent, i tindrem un mecanisme individualment racional en sentit ínterim si, i solament si:

$$\text{mín}_x U(x;x) = U(1;1) = E1(1) + k_1 \geq 0$$

$$\text{mín}_x V(z;z) = V(0;0) = E2(0) + k_2 \geq 0$$

d'on, sumant les dues desigualtats anteriors, s'obté la condició necessària següent:

$$k_1 + k_2 \geq - E1(1) - E2(0) \qquad (7.F)$$

Per altra banda:

$$\int_{T_1 x T_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dG(x)dF(z)$$

$$= \int_{T_2}\int_{T_1} I(\bar{q}(x,z),z)dG(x)\ dF(z) - \int_{T_1}\int_{T_2} C(\bar{q}(x,z),x)dF(z)\ dG(x)$$

$$= \int_{T_2} \left[V(z;z)+R_2(z)\right]dF(z) - \int_{T_1} \left[R_1(x)-U(x;x)\right]dG(x) =$$

$$= \int_{T_2} V(z;z)dF(z) + \int_{T_1} U(x;x)dG(x) =$$

$$= 2\int_{T_1xT_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z)dG(x) + k_1 + k_2$$

Per tant $k_1 + k_2 = -\int_{T_1xT_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z)dG(x)$

Llavors la condició (7.F) es pot escriure com:

$$-\int_{T_1xT_2} S(\bar{q}(x,z),x,z)dF(z)dG(x) = k_1 + k_2 \geq - E1(1) - E2(0)$$

que coincideix amb (7.E).∎

Podem concloure que, efectivament, la condició (7.E) és necessària per a garantir l'existència de mecanismes directes que siguin alhora eficients i individualment racionals en sentit ínterim.

7.5. Mecanismes eficients en el cas general

Tal i com esmentàvem al principi de la secció 7.4, la condició (C.I.) - agents amb creences independents - suposa considerar que les empreses disposen d'una gran quantitat d'informació sobre les dues bandes del mercat, ja que poden valorar distribucions de probabilitat sobre els paràmetres de les mateixes, prescindint de quina sigui la seva informació privada. Així doncs, aquesta condició pressuposa la independència, en el sentit informatiu, de les dues bandes del mercat.

Però l'àmbit d'aplicació d'aquesta hipòtesi no és universal. En general, només serà consistent si les dues empreses tenen una àmplia relació que justifiqui aquest coneixement. Però, per exemple, si les empreses estableixen relacions contractuals puntuals, cal pensar en el cost que pot tenir valorar creences versemblants independents del tipus de l'empresa, i en si aquesta eventual despesa és prou justificada. En diverses ocasions podem trobar-nos en la necessitat de formular hipòtesis menys restrictives que l'anomenada (C.I.).

En conseqüència, un estudi més complet dels mecanismes que pot preveure un planificador per a regular una contractació entre dues empreses qualssevol, ha de tenir en compte també el cas en què aquestes estiguin relativament poc informades. Si es dóna aquesta situació, és necessari postular que les creences de les dites empreses, respecte a les característiques del mercat de la seva adversària, estan mediatitzades per la seva pròpia informació privada. Per tant, les funcions de distribució que simbolitzen les creences de les empreses hauran de dependre dels seus pròpis tipus, és a dir, seran de la forma $F(z|x)$ i $G(x|z)$.

En la línia de les seccions anteriors, estudiarem en primer lloc l'existència de mecanismes eficients en què la regla de preus sigui additivament separable respecte a les característiques privades dels dos agents. L'imposició d'aquesta hipòtesi addicional es pot justificar tenint present la facilitat de càlcul que permet. No obstant, els resultats que s'obtenen són força diferents dels de la secció 7.4. Això ens obligarà a utilitzar una altra tipus d'anàlisi, amb mecanismes en què la regla de transferència sigui no separable.

7.5.1. Preus de transferència additivament separables

En el desenvolupament d'aquesta secció utilitzarem les següents hipòtesis:

(C.D.) Les creences de les dues empreses depenen dels seus tipus respectius.

Representarem aquestes creences per les funcions de distribució $F(z|x)$ i $G(x|z)$, amb $F_x \neq 0$ i $G_z \neq 0$.

(N.F.) Les funcions de cost i ingrés de les empreses permeten suposar que la negociació és factible en qualsevol estat de les dues bandes del mercat, perquè es pot obtenir una quantitat òptima d'intercanvi no negativa:

$$\bar{q}(x,z) \geq 0 \qquad \forall (x,z) \in T_1 x T_2$$

L'objectiu de la secció és la caracterització, si és possible, dels mecanismes directes compatibles respecte a incentius i eficients ex post en què la regla que indica el preu de la transferència, P, sigui:

(1) additivament separable: $P(x,z)=p_1(x)+p_2(z)$

(2) diferenciable

Sigui doncs $\{\bar{q},P\}$ un mecanisme directe on P compleixi (1) i (2). Ja que la quantitat per la que es signarà eventualment el contracte vé donada per $\bar{q}$, l'eficiència del mecanisme dependrà només de què sigui compatible respecte a incentius.

Per a veure en quins casos un mecanisme pot complir aquesta condició, comencem per donar les utilitats esperades dels agents:

Tenint en compte (1), la utilitat esperada pel primer agent si anuncia $x' \in T_1$, essent $x \in T_1$ el valor de la seva informació privada, serà:

$$U(x';x) = \int_{T_2} \left[P(x';z) - C(\bar{q}(x',z),x) \right] dF(z|x) =$$

$$= p_1(x') + \int_{T_2} \left[p_2(z) - C(\bar{q}(x',z),x) \right] dF(z|x)$$

Pel segon agent tindrem, de manera similar:

$$V(z';z) = \int_{T_1} \left[I(\bar{q}(x,z'),z) - P(x,z') \right] dG(x|z) =$$

$$= -\, p_2(z') + \int_{T_1} \left[I(\bar{q}(x,z'),z) - p_1(x) \right] dG(x|z)$$

recordant que, per tot x, $F(z|x)$ és una funció de distribució sobre T_2, i, igualment $G(x|z)$ ho és sobre T_1 per cada z.

Però per a aquest tipus de mecanismes no es poden obtenir conclusions satisfactòries. Desglossem el raonament que justifica aquesta afirmació en els dos resultats següents:

Proposició 7.11. En les condicions (C.D.) i (N.F.), qualsevol mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$, on P sigui additivament separable i diferenciable, per ser compatible respecte a incentius ha de complir:

$P(x,z)=p_1(x)+p_2(z)$, amb

$$p_1(x) = p_1(0)+\int_0^x \left[\int_{T_2} C_q(\bar{q}(s,z),s)\bar{q}_x(s,z)dF(z|s)\right] ds$$

$$\text{(7.G)}$$

$$p_2(z) = p_2(0)+\int_0^z \left[\int_{T_1} I_q(\bar{q}(x,s),s)\bar{q}_z(x,s)dG(x|s)\right] ds$$

En efecte:

Suposant diferenciabilitat a la funció P, podem assegurar que les funcions d'utilitat U i V ho són igualment. Per tant, podem aplicar l'anàlisi clàssica per a imposar la condició de compatibilitat respecte a incentius de (7.A), que es pot expressar, de manera equivalent, per:

$$U(x;x)=\max_{x'} U(x';x) \qquad V(z;z)=\max_{z'} V(z';z)$$

Comencem per la primera empresa. La condició necessària de primer ordre serà $U_{x'}(x';x)=0$ per $x'=x$. És fàcil veure que l'expressió d'aquesta derivada és:

$$U_{x'}(x';x) = \frac{d}{dx} p_1(x') - \int_{T_2} C_q(\bar{q}(x',z),x)\bar{q}_x(x',z)dF(z|x)$$

La condició de primer ordre ens dóna la forma de la funció p_1, ja que es pot formular com:

$$\frac{d}{dx} p_1(x) = \int_{T_2} C_q(\bar{q}(x,z),x)\ \bar{q}_x(x,z)\ dF(z|x)$$

i, integrant, tindrem:

$$p_1(x) = p_1(0)+\int_0^x \left[\int_{T_2} C_q(\bar{q}(s,z),s)\bar{q}_x(s,z)dF(z|s)\right] ds$$

De manera similar, la condició necessària per què la funció $V(z';z)$ arribi al seu màxim en $z'=z$, ens donarà la segona part de (7.G).∎

<u>Observació</u>.- En general, no es pot assegurar que cap mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$, amb P complint (7.G), sigui compatible respecte a incentius.

En efecte:

Tenint en compte que (7.G) és només una condició necessària, caldria comprovar que $\{\bar{q},P\}$ compleix (7.A):

$$U(x';x)-U(x;x)\leq 0 \qquad \forall\, x,x'\in T_1$$

$$V(z';z)-V(z;z)\leq 0 \qquad \forall\, z,z'\in T_2$$

Comencem per treballar sobre la primera de les dues diferències. Donada la definició de la funció U, tindrem:

$$U(x';x)-U(x;x)= p_1(x')-p_1(x) + \\ +\int_{T_2}\left[C(\bar{q}(x,z),x)-C(\bar{q}(x',z),x)\right]dF(z|x)$$

Tenint en compte (7.G) podem escriure:

$$p_1(x')-p_1(x)=\int_x^{x'}\left[\int_{T_2} C_q(\bar{q}(s,z),s)\ \bar{q}_x(s,z)dF(z|s)\right]\ ds$$

A més, pel segon sumand de U(x';x)-U(x;x) podem trobar una formulació similar a aquesta darrera expressió, ja que:

$$\int_{x'}^{x} C_q(\bar{q}(s,z),x)\bar{q}_x(s,z)ds =\int_{\bar{q}(x',z)}^{\bar{q}(x,z)} C_q(t,x)dt =$$

$$= C(\bar{q}(x,z),x)-C(\bar{q}(x',z),x)$$

Per tant, en total, tindrem:

$$U(x';x)-U(x;x)=$$

$$\int_{x}^{x'}\int_{T_2}\left[C_q(\bar{q}(s,z),s)f(z|s)-C_q(\bar{q}(s,z),x)f(z|x)\right]\bar{q}_x(s,z)dzds$$

on $f(z|s)$ és la funció de densitat associada a $F(z|s)$.

Per analitzar el signe d'aquesta expressió, l'única condició viable que podem imposar és que la funció a integrar conservi el signe en tot el seu domini d'integració. Tenint en compte que la funció $\bar{q}$ compleix $\bar{q}_x(x,z)<0$ per tot parell $(x,z)\in T_1xT_2$, i fent servir la següent notació:

$$\delta_z(s):= C_q(\bar{q}(s,z),s)f(z|s)-C_q(\bar{q}(s,z),x)f(z|x)$$

caldria veure que, per qualsevol valor $z\in T_1$, es compleix:

(i) si $x<x'$: $\quad \delta_z(s)\geq 0 \quad \forall s\in[x,x']$

(ii) si $x>x'$: $\quad \delta_z(s)\leq 0 \quad \forall s\in[x',x]$

Ja que, per hipòtesi, la funció de cost és creixent respecte a la seva segona variable, i $f(z|x)$ és no negativa (funció de densitat), podem escriure, en el cas (i):

$$s\in[x,x'] \Rightarrow x\leq s \Rightarrow C_q(\bar{q}(s,z),x)\leq C_q(\bar{q}(s,z),s)$$

$$\Rightarrow \delta_z(s) \geq C_q(\bar{q}(s,z),s)\left[f(z|s)-f(z|x)\right]$$

Les hipòtesis del nostre model inclouen també el creixement de la funció de cost respecte a la variable q, i per tant podem assegurar que:

$$f(z|s)-f(z|x)\geq 0 \quad \forall s\in[x,x'] \implies \delta_z(s)\geq 0 \quad \forall s\in[x,x']$$

és a dir, cal suposar que $f(z|x)$ és una funció <u>monòtona creixent respecte a x</u> per tot $z\in T_2$.

De manera similar, en el cas (ii) tindrem:

$$s\in[x',x] \implies x\geq s \implies C_q(\bar{q}(s,z),x)\geq C_q(\bar{q}(s,z),s)$$

$$\implies \delta_z(s) \leq C_q(\bar{q}(s,z),x)\left[f(z|s)-f(z|x)\right]$$

i una condició suficient per a assegurar la negativitat de $\delta_z(s)$ - ja que, en general, $C_q>0$ - serà:

$$f(z|s)-f(z|x)\geq 0 \quad \forall s\leq x$$

és a dir, cal demanar igualment que la funció $f(z|x)$ sigui monòtona creixent.

Pel que fa a la segona empresa, el càlcul a efectuar és totalment paral.lel, i la diferència d'utilitats serà:

$$V(z';z)-V(z;z)=$$

$$=\int_z^{z'}\int_{T_1}\left[I_q(\bar{q}(x,t),z)g(x|z)-I_q(\bar{q}(x,t),t)g(x|t)\right]\bar{q}_z(x,t)dxdt$$

utilitzant també (7.G) i un càlcul similar a l'anterior. Així mateix, denotem amb $g(x|t)$ la funció de densitat associada a $G(x|t)$.

Comparant les expressions de les diferències d'utilitat dels dos agents, és igualment evident la necessitat de postular la monotonia, en aquest cas decreixent (perquè $q_z(x,z)$ és positiu), de la funció de densitat, g, per a poder assegurar que el mecanisme de negociació serà compatible respecte a incentius.

Això significa requerir, en total, que:

$$\forall x_1, x_2 \in T_1,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(z|x_1) \leq f(z|x_2) \quad \forall z \in T_2$$

$$\forall z_1, z_2 \in T_2,\ z_1 < z_2 \Rightarrow g(x|z_1) \geq g(x|z_2) \quad \forall x \in T_1$$

Però aquestes condicions i les pròpies de les funcions de densitat no són compatibles[18]. ∎

---

18. Altres autors han trobat resultats similars, en què és necessari exigir un cert tipus de correlació entre les variables que representen factors desconeguts pels diversos agents que intervenen en la situació, per a poder donar una expressió analítica d'un mecanisme de negociació.
Podem citar, per exemple, Maskin (1986), Riordan (1984a) o Laffont i Maskin (1979).
No obstant, com acabem de veure, en el camp concret i pel tipus de mecanismes que nosaltres estem estudiant, no se'n pot trobar cap.

7.5.2. Preus de transferència no separables

7.5.2.1. Plantejament general

Un enfocament alternatiu que, en la hipòtesi (C.D.) - creences dels agents depenents del seu tipus -, ens permeti obtenir mecanismes eficients compatibles respecte a incentius i que, al mateix temps, no introdueixi una complicació excessiva del càlcul, consisteix en discretitzar el conjunt de tipus d'ambdós jugadors. Suposarem, doncs, que:

(T.D.) Les informacions privades de les empreses es poden descriure amb un nombre finit d'elements:

$$T_1=\{x_1,\dots,x_n\}\subset[0,1] \text{ i } T_2=\{z_1,\dots,z_m\}\subset[0,1]$$

És a dir, els tipus dels agents són un conjunt discret.

Per a respectar la hipòtesi (C.D.), serà convenient redefinir les creences dels agents a través de funcions de quantia enlloc de representar-les, com fins ara, per les funcions de distribució. Si denotem per:

$$\sigma_{ij} := \text{Prob}\{\ z=z_i \mid x=x_j\ \} \quad \text{per } i=1,..,m \quad j=1,..,n$$

$$\tau_{ij} := \text{Prob}\{\ x=x_i \mid z=z_j\ \} \quad \text{per } i=1,..,n \quad j=1,..,m$$

on, òbviament, $\Sigma_i\ \sigma_{ij}=1$, $\Sigma_i\ \tau_{ij}=1$ per qualsevol j, podrem establir aquesta hipòtesi de la següent manera:

(C.D.) Almenys dos jugadors de tipus x_j i x_k ($j\neq k$) tenen <u>creences diferents</u> respecte a un mateix tipus de l'altra empresa:

$$\exists\ j,k\in\{1,..,n\},\ j\neq k,\quad \text{amb}\quad \sigma_{ij}\neq\sigma_{ik}\quad \text{per almenys un } i=1,..m$$

Igualment, almenys dos jugadors de tipus z_j i z_k tenen creences diferents respecte a un estat del mercat del seu adversari:

$$\exists\ j,k\in\{1,..,m\},\ j\neq k,\quad \text{amb}\quad \tau_{ij}\neq\tau_{ik}\quad \text{per almenys un } i=1,..n$$

En les hipòtesis (T.D.) i (C.D.), donat un mecanisme directe de la forma $\{\bar{q},P\}$ qualsevol, les utilitats dels dos agents seran:

$$\begin{aligned}
U(x_i;x_j) &= \Sigma_k\left[P(x_i,z_k)-C(\bar{q}(x_i,z_k),x_j)\right]\sigma_{kj} = \\
&= \Sigma_k\left[P_{ik}-C^j_{ik}\right]\sigma_{kj} \\
V(z_i;z_j) &= \Sigma_k\left[I(\bar{q}(x_k,z_i),z_j)-P(x_k,z_i)\right]\tau_{kj} = \\
&= \Sigma_k\left[I^j_{ki}-P_{ki}\right]\tau_{kj}
\end{aligned} \qquad (7.H)$$

considerant, per conveni, que:

$C^k_{ij} := C(\bar{q}(x_i,z_j),x_k)$ per $i,k=1,..,n$ $j=1,..,m$

$I^k_{ij} := I(\bar{q}(x_i,z_j),z_k)$ per $i=1,..,n$ $j,k=1,..,m$

$P_{ij} := P(x_i,z_j)$ per $i=1,..,n$ $j=1,..,m$

i que la suma s'esten a aquells índexs k pels que la quantitat a intercanviar resulti ser no negativa, és a dir, $\bar{q}(x_i,z_k)>0$ en el primer cas, o $\bar{q}(x_k,z_i)>0$ en el segon, ja que aquesta és una condició necessària per a la signatura d'un contracte.

Per a caracteritzar els mecanismes de negociació podem utilitzar el resultat següent:

Lema 7.12. En les condicions (T.D.) i (C.D.) un mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$ és eficient si, i solament si, existeix un conjunt de preus $\{P_{ij}\}$ no negatius tal que:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_k \left[P_{ik} - P_{jk}\right]\sigma_{ik} \geq \Sigma_k \left[C^i_{ik} - C^i_{jk}\right]\sigma_{ik} \\ \qquad\qquad i,j\in\{1,..,n\} \\ \\ \Sigma_k \left[P_{kj} - P_{ki}\right]\tau_{ki} \geq \Sigma_k \left[I^i_{kj} - I^i_{ki}\right]\tau_{ki} \\ \qquad\qquad i,j\in\{1,..,m\} \end{array}\right\} \quad (7.I)$$

La demostració és inmediata: el sistema d'inequacions de (7.I) es dedueix de la condició (7.A):

$$U(x_i;x_i) \geq U(x_j;x_i) \qquad \forall\, i,j\in\{1,..,n\}$$

$$V(z_i;z_i) \geq V(z_j;z_i) \qquad \forall\, i,j\in\{1,..,m\}$$

substituint (7.H) i tenint en compte que, pel lema 7.2, tot mecanisme directe compatible respecte a incentius en què $q=\bar{q}$ és eficient. ∎

En conseqüència, l'estudi d'aquesta secció es redueix a trobar les condicions en què el sistema d'inequacions donat a (7.I) té solució. D'entre els diversos procediments coneguts que donen condicions per a l'existència de solucions d'aquest tipus de sistemes, hem triat aquell que permet una anàlisi basada en el politop que formen, a R^{nm}, les condicions (7.I).

Tenint en compte la diferència entre els resultats que hem obtingut a les seccions 7.4 i 7.5.1, ens sembla interessant posar l'èmfasi en la influència de les funcions de creença dels agents en la possible existència de mecanismes eficients ex post. Això implica un estudi exhaustiu del politop, que realitzarem en el problema discretitzat més senzill: n=m=2. Enunciem els resultats obtinguts en la secció que segueix.

7.5.2.2. Estudi del cas de dues característiques privades

Seguint l'apartat anterior, si n=m=2, les hipòtesis en les que haurem de basar l'anàlisi seran:

(T.D.) L'estat de cada una de les dues bandes del mercat es pot representar per dos valors:

$$T_1=\{x_1,x_2\}\subset[0,1] \quad \text{amb } x_1<x_2$$

$$T_2=\{z_1,z_2\}\subset[0,1] \quad \text{amb } z_1<z_2$$

(C.D.) Les creences dels agents són diferents segons l'estat de la natura. Utilitzant la notació:

$$a:=\text{Prob}\{z=z_1|x=x_1\} \qquad b:=\text{Prob}\{z=z_1|x=x_2\}$$

$$c:=\text{Prob}\{x=x_1|z=z_1\} \qquad d:=\text{Prob}\{x=x_1|z=z_2\}$$

tindrem $a,b,c,d\in[0,1]$ amb $\left.\begin{matrix} a\neq b \\ c\neq d \end{matrix}\right\}$

(N.F.) En els quatre possibles estats de la natura hi ha guanys potencials si es signa un contracte:

$$\bar{q}(x_i,z_j)>0 \quad \text{per tot } i,j=1,2$$

Aquesta darrera hipòtesi afecta realment només a un estat: $\bar{q}(x_2,z_1)$, ja que en qualsevol altra combinació la negativitat és incompatible amb (C.D.). Per exemple, si

$\bar{q}(x_1,z_1)<0$, tindríem també $\bar{q}(x_2,z_1)\leq\bar{q}(x_1,z_1)<0$. Per tant seria coneixement comú que l'empresa compradora de tipus $z=z_1$, no estaria disposada a entrar en una negociació regulada per un mecanisme que induís a dir la veritat sobre la informació privada que es poseeix. En conseqüencia, davant d'una empresa que vol negociar, qualsevol empresa venedora podria deduir inmediatament $\text{Prob}\{z=z_1|x=x_i\}=0$ per tot i, és a dir, a=b, contradient (C.D.).

Pel lema 7.12, l'existència de mecanismes eficients ex post depèn només de poder trobar un sistema de preus no negatius que sigui solució del sistema (7.I.). Si només hi ha quatre possibles estats de la natura, les condicions del lema es poden resumir en:

$$\begin{pmatrix} a & 1-a & -a & a-1 \\ -b & b-1 & b & 1-b \\ -c & c & c-1 & 1-c \\ d & -d & 1-d & d-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{21} \\ P_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \alpha_1-\alpha_3 \\ \alpha_2-\alpha_4 \\ \beta_3-\beta_1 \\ \beta_4-\beta_2 \end{pmatrix} \qquad (7.K)$$

$$P_{ij} \geq 0 \quad i,j=1,2$$

utilitzant la notació següent:

$$\alpha_1:=C^1_{11}a + C^1_{12}(1-a) \qquad \alpha_3:=C^1_{21}a + C^1_{22}(1-a)$$

$$\alpha_2:=C^2_{21}b + C^2_{22}(1-b) \qquad \alpha_4:=C^2_{11}b + C^2_{12}(1-b)$$

$$\beta_1 := I^1_{11}c + I^1_{21}(1-c) \qquad \beta_3 := I^1_{12}c + I^1_{22}(1-c)$$

$$\beta_2 := I^2_{12}d + I^2_{22}(1-d) \qquad \beta_4 := I^2_{11}d + I^2_{21}(1-d)$$

Per veure si el politop definit per (7.K) és un conjunt no buit serà suficient determinar els seus vèrtexs. Aquests es poden identificar amb les solucions factibles bàsiques del sistema lineal associat a (7.K):

$$\begin{pmatrix} a & 1-a & -a & a-1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & b-1 & b & 1-b & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -c & c & c-1 & 1-c & 0 & 0 & -1 & 0 \\ d & -d & 1-d & d-1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_{21} \\ P_{22} \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1-\alpha_3 \\ \alpha_2-\alpha_4 \\ \beta_3-\beta_1 \\ \beta_4-\beta_2 \end{pmatrix}$$

suposant $P_{ij} \geq 0 \quad i,j=1,2$

$y_k \geq 0 \quad k=1,..,4$ (7.L)

Per tant, ens caldrà obtenir les solucions de (7.L), prenent com a variables actives quatre de les vuit existents, els coeficients de les quals constitueixin una submatriu de rang màxim, i considerant zero la resta de variables del sistema. D'entre aquestes, les que siguin factibles (és a dir, les que prenguin valors no negatius) determinaran els vèrtexs del politop, i qualsevol altra solució de (7.K) serà combinaciò convexa de les anteriors.

Naturalment, la demostració de què no hi ha cap mecanisme $\{\bar{q},P\}$ eficient ex post és equivalent, en aquest context, a demostrar que (7.K) no té solucions factibles bàsiques.

L'estudi d'aquest conjunt de vèrtexs ens permet enunciar el resultat següent:

<u>Proposició 7.13.</u> En les condicions (T.D.), (C.D.) i (N.F.):

(a) tenim assegurada l'existència de mecanismes directes eficients ex post si:

(a1) el quocient $\frac{b-a}{d-c}$ és negatiu

(a2) el quocient $\frac{b-a}{d-c}$ és positiu i $A \leq 0$, $B \leq 0$.

(b) no existeixen mecanismes directes eficients ex post si:

(b1) el quocient $\frac{b-a}{d-c}$ és positiu i $A \geq 0$, $B \geq 0$.

En aquest enunciat hem utilitzat les variables A i B, que són funció dels costos i dels ingressos de les dues empreses, respectivament, en els diversos estats de la natura. Concretament:

$$A:=\alpha_1-\alpha_3+\alpha_2-\alpha_4 \qquad B:=\beta_3-\beta_1+\beta_4-\beta_2.$$

La proposició 7.13 és conseqüència dels cinc resultats que presentem a continuació:

<u>Lema 7.14.</u> Els termes independents de (7.L) tenen, dos a dos, signes diferents:

$$\alpha_1-\alpha_3 \geq 0 \qquad \beta_3-\beta_1 \geq 0$$

$$\alpha_2-\alpha_4 \leq 0 \qquad \beta_4-\beta_2 \leq 0$$

<u>Lema 7.15.</u> Podem classificar els 70 possibles vèrtexs del politop (7.K) de la manera següent: Hi ha

- 5 combinacions no bàsiques
- 20 vèrtexs no factibles en qualsevol cas
- 36 vèrtexs que poden ser factibles
- 8 combinacions que no són necessàriament bàsiques
- 1 vèrtex que dóna lloc a un mecanisme no eficient (quan $P_{ij}=0$ per tot i,j)

Lema 7.16. Si l'expressió $-A - \frac{b-a}{d-c} B \geq 0$, podem trobar sempre un mínim de dos vèrtexs factibles.

Lema 7.17. Si $-\frac{d-c}{b-a} A - B \geq 0$, podem trobar sempre un mínim de dos vèrtexs factibles.

Lema 7.18. Si $-A - \frac{b-a}{d-c} B \leq 0$, $-\frac{d-c}{b-a} A - B \leq 0$ només podem trobar solucions factibles bàsiques en els dos casos següents:

(1) $a>b$, $c>d$, $A\leq 0$, $B\geq 0$

(2) $a<b$, $c<d$, $A\geq 0$, $B\leq 0$

La demostració d'aquests cinc resultats es pot trobar a l'annex d'aquest capítol.

Dels lemes 7.14 a 7.18 podem deduir-ne inmediatament la proposició 7.13:

Demostració de la proposició 7.13:

(a1) Si el quocient $\frac{b-a}{d-c}$ és negatiu, es compleixen sempre les condicions d'un dels dos lemes 7.16 o 7.17, i només una d'elles, perquè un dels dos valors $\left[-A - \frac{b-a}{d-c} B\right]$ o $\left[-\frac{d-c}{b-a} A - B\right]$ és sempre de signe positiu. En efecte, és inmediat comprovar que:

$$- \frac{d-c}{b-a} A - B = \frac{d-c}{b-a} \left[- A - \frac{b-a}{d-c} B \right]$$

de manera que, quan el quocient $\frac{b-a}{d-c}$ és negatiu, aquests dos valors tenen signes oposats, i podem assegurar sempre l'existència de vèrtexs factibles.

(a2) Si el quocient $\frac{b-a}{d-c}$ és positiu, però $A \le 0$, $B \le 0$, es compleix també que $- A - \frac{b-a}{d-c} B \ge 0$, $- \frac{d-c}{b-a} A - B \ge 0$. Els lemes 7.16 i 7.17 ens proporcionen els vèrtexs factibles que postulavem.

(b1) En canvi, si $\frac{b-a}{d-c}$ és positiu, però $A \ge 0$, $B \ge 0$, tindrem $- A - \frac{b-a}{d-c} B \le 0$, $- \frac{d-c}{b-a} A - B \le 0$, i no és cap dels dos casos en què, segons el lema 7.18, podem tenir solucions factibles bàsiques. ∎

D'aquest resultat ens sembla important destacar l'apartat (a1): <u>per a poder assegurar que, per funcions de cost i ingrés qualssevol, existeixen mecanismes eficients ex post, és necessari que les creences dels agents estiguin prou ben diferenciades</u>.

En cas contrari, la diferenciació s'ha de fer a través de les funcions de cost i d'ingrés de les empreses, perquè són els signes de les expressions A i B les que decideixen. Si estem en aquesta circumstància, només podem caracteritzar una situació extrema: $A.B \ge 0$. Si $A \le 0$

i $B\leq 0$ (a2), existeixen solucions, mentre que per $A\geq 0$ i $B\geq 0$ (b1), la resposta és sempre negativa.

Observem, però, que si $A.B\leq 0$, no és possible decidir, en general, si existiran mecanismes compatibles respecte a incentius eficients ex post. Al no saber el signe de les expressions $\left[- A - \frac{b-a}{d-c} B\right]$ i $\left[- \frac{d-c}{b-a} A - B\right]$, no podem utilitzar els resultats dels lemes 7.15 a 7.18 per a assegurar l'existència de solucions factibles que siguin bàsiques.

Evidentment, si alguna de les dues expressions anteriors fos positiva, podríem deduir-ne l'existència de mecanismes directes eficients ex post. En canvi, si totes dues són negatives, hi ha dos casos en què podem assegurar que no existeixen: els que no estan inclosos en l'enunciat del lema 7.18:

(b2) $a>b$, $c>d$, $A\geq 0$, $B\leq 0$

(b3) $a<b$, $c<d$, $A\leq 0$, $B\geq 0$

Com en l'apartat 7.4.1, fora de l'àmbit de la proposició 7.13, l'existència d'aquests mecanismes s'haurà d'estudiar en base a funcions d'ingrés i cost específiques. En el capítol 8 presentem l'estudi complet per a un cas particular.

ANNEX

Donem a continuació les demostracions dels lemes enunciat a l'apartat 7.5.2:

<u>Lema 7.14.</u> Els termes independents de (7.L) tenen, dos a dos, signes diferents. En concret:

$$\alpha_1-\alpha_3 \geq 0 \qquad \beta_3-\beta_1 \geq 0$$

$$\alpha_2-\alpha_4 \leq 0 \qquad \beta_4-\beta_2 \leq 0$$

En efecte: els signes d'aquests termes es dedueixen de la monotonia de les funcions d'ingrés, cost i quantitat òptima a intercanviar:

$$x_1<x_2 \implies \bar{q}(x_1,z_i)\geq\bar{q}(x_2,z_i) \quad \text{per tot } z_i$$

$$\implies C(\bar{q}(x_1,z_i),x_k)\geq C(\bar{q}(x_2,z_i),x_k) \quad \text{per tot k}$$

és a dir, $C_{1i}^k\geq C_{2i}^k$ per tot i,k=1,2; i per tant:

$$\alpha_1 = C_{11}^1 a + C_{12}^1(1-a) \geq C_{21}^1 a + C_{22}^1(1-a) = \alpha_3 \implies \alpha_1-\alpha_3\geq 0$$

$$\alpha_2 = C_{21}^2 b + C_{22}^2(1-b) \leq C_{11}^2 b + C_{12}^2(1-b) = \alpha_4 \implies \alpha_2-\alpha_4\leq 0$$

Pel que fa als coeficients β_i tenim unes relacions semblants:

$$z_1<z_2 \implies \bar{q}(x_i,z_1)\leq\bar{q}(x_i,z_2) \quad \text{per tot } x_i$$

$$I(\bar{q}(x_i,z_1),z_k)\leq I(\bar{q}(x_i,z_2),z_k) \quad \text{per tot k}$$

és a dir, $I^k_{i1} \leq I^k_{i2}$ per tot i,k=1,2; d'on:

$$\beta_1 = I^1_{11}c + I^1_{21}(1-c) \leq I^1_{12}c + I^1_{22}(1-c) = \beta_3 \implies \beta_3 - \beta_1 \geq 0$$

$$\beta_2 = I^2_{12}d + I^2_{22}(1-d) \geq I^2_{11}d + I^2_{21}(1-d) = \beta_4 \implies \beta_4 - \beta_2 \leq 0$$

tal com volíem demostrar. ∎

<u>Lema 7.15.</u> Podem classificar els 70 possibles vèrtexs del politop (7.K) de la manera següent: Hi ha

- 5 combinacions no bàsiques
- 20 vèrtexs no factibles en qualsevol cas
- 36 vèrtexs que poden ser factibles
- 8 combinacions que no són necessàriament bàsiques
- 1 vèrtex que dóna lloc a un mecanisme no eficient (quan $P_{ij}=0$ per tot i,j)

Donem a continuació, i resumits en diferents taules, els possibles vèrtexs de (7.K), classificats d'acord amb el nombre de variables del tipus P_{ij} que posem a la base. En el marge dret de cada taula hem afegit un símbol per a identificar els 36 vèrtexs que poden ser factibles, així com asteriscs per indicar els 20 que en cap cas ho poden ser.

(o) <u>Variables bàsiques</u> $\{Y_1, Y_2, Y_3, Y_4\}$

Evidentment formen una solució bàsica, ja que la sub-matriu de coeficients és la matriu identitat canviada de signe.

Però aquest vèrtex dóna lloc a un mecanisme en què els preus, en qualsevol estat de la natura, són zero, i per tant no ens interessa considerar-lo.

(i) <u>Variables bàsiques</u> $\{P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}\}$

No constitueixen una solució bàsica, ja que la suma de les quatre primeres columnes de la matriu de coeficients de (7.L) és zero.

Per tant, en qualsevol possible vèrtex tindrem, almenys, un preu nul. Observem que això no significa necessàriament que el mecanisme associat no permeti la negociació en un dels quatre estats de la natura, perquè si hi ha dos vèrtexs factibles en què no s'anul.lin les mateixes variables, la combinació convexe dels dos vèrtexs és també factible, i donarà lloc a mecanismes amb $p_{ij} \neq 0$ per tot $i,j=1,2$.

(ii) Amb tres preus a la base:

Aquestes combinacions proporcionen 16 de les 36 solucions que poden ser factibles. Les resumim en les quatre taules que segueixen, en les que hem utilitzat la notació següent:

$A1 = \alpha_1-\alpha_3 \qquad A2 = \alpha_2-\alpha_4 \qquad A = A1 + A2$

$B1 = \beta_3-\beta_1 \qquad B2 = \beta_4-\beta_2 \qquad B = B1 + B2$

Si la base està formada per $\{P_{11},P_{12},P_{21},Y_i\}$, variant i, tenim els vèrtexs:

Det.	Valor dels preus actius			V. Marge Act.	
d-c	$-A2+\frac{1-b-d}{d-c}B1+\frac{1-b-c}{d-c}B2$	$-A2-\frac{b}{d-c}B$	$-\frac{d}{d-c}B1-\frac{c}{d-c}B2$	$-A-\frac{b-a}{d-c}B$	V1
d-c	$A1+\frac{1-a-d}{d-c}B1+\frac{1-a-c}{d-c}B2$	$A1-\frac{a}{d-c}B$	$-\frac{d}{d-c}B1-\frac{c}{d-c}B2$	$-A-\frac{b-a}{d-c}B$	V2
b-a	$-\frac{1-d-b}{b-a}A1-\frac{1-a-d}{b-a}A2+B2$	$\frac{b}{b-a}A1+\frac{a}{b-a}A2$	$\frac{d}{b-a}A+B2$	$-\frac{d-c}{b-a}A-B$	W1
b-a	$-\frac{1-b-c}{b-a}A1-\frac{1-c-a}{b-a}A2-B1$	$\frac{b}{b-a}A1+\frac{a}{b-a}A2$	$\frac{c}{b-a}A-B1$	$-\frac{d-c}{b-a}A-B$	W2

Taula 1

Si la base està formada per $\{P_{11}, P_{12}, P_{22}, y_i\}$ amb $i=1,..,4$ tenim els vèrtexs:

Det.	Valor dels preus actius			V. Marge Act.	
c-d	$-A2 + \frac{1-b}{d-c} B$	$-A2 + \frac{d-b}{d-c} B1 + \frac{c-b}{d-c} B2$	$\frac{d}{d-c} B1 + \frac{c}{d-c} B2$	$-A - \frac{b-a}{d-c} B$	V3
c-d	$A1 + \frac{1-a}{d-c} B$	$A1 + \frac{d-a}{d-c} B1 + \frac{c-a}{d-c} B2$	$\frac{d}{d-c} B1 + \frac{c}{d-c} B2$	$-A - \frac{b-a}{d-c} B$	V4
a-b	$-\frac{1-b}{b-a} A1 - \frac{1-a}{b-a} A2$	$\frac{b-d}{b-a} A1 + \frac{a-d}{b-a} A2 - B2$	$-\frac{d}{b-a} A - B2$	$-\frac{d-c}{b-a} A - B$	W3
a-b	$-\frac{1-b}{b-a} A1 - \frac{1-a}{b-a} A2$	$\frac{b-c}{b-a} A1 + \frac{a-c}{b-a} A2 + B1$	$-\frac{c}{b-a} A + B1$	$-\frac{d-c}{b-a} A - B$	W4

Taula 2

Amb $\{P_{11}, P_{21}, P_{22}, y_i\}$ amb $i=1,..,4$ seran:

Det.	Valor dels preus actius			V. Marge Act.	
d-c	$\frac{1-d}{d-c} B1 + \frac{1-c}{d-c} B2$	$A2 - \frac{d-b}{d-c} B1 - \frac{c-b}{d-c} B2$	$A2 + \frac{b}{d-c} B$	$-A - \frac{b-a}{d-c} B$	V5
d-c	$\frac{1-d}{d-c} B1 + \frac{1-c}{d-c} B2$	$-A1 - \frac{d-a}{d-c} B1 - \frac{c-a}{d-c} B2$	$-A1 + \frac{a}{d-c} B$	$-A - \frac{b-a}{d-c} B$	V6
b-a	$-\frac{1-d}{b-a} A + B2$	$-\frac{b-d}{b-a} A1 - \frac{a-d}{b-a} A2 + B2$	$-\frac{b}{b-a} A1 - \frac{a}{b-a} A2$	$-\frac{d-c}{b-a} A - B$	W5
b-a	$-\frac{1-c}{b-a} A - B1$	$-\frac{b-c}{b-a} A1 - \frac{a-c}{b-a} A2 - B1$	$-\frac{b}{b-a} A1 - \frac{a}{b-a} A2$	$-\frac{d-c}{b-a} A - B$	W6

Taula 3

Per últim, si la base és $\{P_{12}, P_{21}, P_{22}, y_i\}$ amb $i=1,..,4$ seran:

Det.	Valor dels preus actius			V. Marge Act.	
c-d	$-\frac{1-d}{d-c}B1 - \frac{1-c}{d-c}B2$	$A2 - \frac{1-b}{d-c}B$	$A2 - \frac{1-b-d}{d-c}B1 - \frac{1-b-c}{d-c}B2$	$-A - \frac{b-a}{d-c}B$	V7
c-d	$-\frac{1-d}{d-c}B1 - \frac{1-c}{d-c}B2$	$-A1 - \frac{1-a}{d-c}B$	$-A1 - \frac{1-a-d}{d-c}B1 - \frac{1-a-c}{d-c}B2$	$-A - \frac{b-a}{d-c}B$	V8
a-b	$\frac{1-d}{b-a}A - B2$	$\frac{1-b}{b-a}A1 + \frac{1-a}{b-a}A2$	$\frac{1-d-b}{b-a}A1 + \frac{1-a-d}{b-a}A2 - B2$	$-\frac{d-c}{b-a}A - B$	W7
a-b	$\frac{1-c}{b-a}A + B1$	$\frac{1-b}{b-a}A1 + \frac{1-a}{b-a}A2$	$\frac{1-b-c}{b-a}A1 + \frac{1-c-a}{b-a}A2 + B1$	$-\frac{d-c}{b-a}A - B$	W8

Taula 4

Observem que <u>aquestes setze combinacions són sempre bases del sistema</u>, ja que els determinants de les submatrius corresponents no s'anul.len mai, degut a la hipòtesi (C.D.).

(iii) Passem ara als vèrtexs que tenen dues variables bàsiques que són preus. Els hem agrupat en sis taules, segons les sis combinacions possibles en què podem agafar dues variables de preu, i escrivint en el marge esquerra les altres dues variables bàsiques. Només reflexem explícitament aquelles combinacions que podem assegurar que són base:

Amb P_{11} i P_{12} a la base tenim:

	Det.	Valor dels preus actius		Variables de Marge Actives		
$y_1\ y_2$	0	-	-	-	-	
$y_1\ y_3$	-d	$-A2 + \frac{1-b}{d} B2$	$-A2 - \frac{b}{d} B2$	$-A - \frac{b-a}{d} B2$	$-B1 - \frac{c}{d} B2$	X1
$y_1\ y_4$	-c	$-A2 - \frac{1-b}{c} B1$	$-A2 + \frac{b}{c} B1$	$-A + \frac{b-a}{c} B1$	$-\frac{d}{c} B1 - B2$	X2
$y_2\ y_3$	-d	$A1 + \frac{1-a}{d} B2$	$A1 - \frac{a}{d} B2$	$-A - \frac{b-a}{d} B2$	$-B1 - \frac{c}{d} B2$	X3
$y_2\ y_4$	-c	$A1 - \frac{1-a}{c} B1$	$A1 + \frac{a}{c} B1$	$-A + \frac{b-a}{c} B1$	$-\frac{d}{c} B1 - B2$	X4
$y_3\ y_4$	b-a	$-\frac{1-b}{b-a} A1 - \frac{1-a}{b-a} A2$	$-\frac{b}{b-a} A1 - \frac{a}{b-a} A2$	$\frac{c}{b-a} A - B1$	$-\frac{d}{b-a} A - B2$	Z1

Taula 5

Igualment, amb P_{11} i P_{21} tindrem:

	Det.	Valor dels preus actius		Variables de Marge Actives		
$y_1\ y_2$	d-c	$\frac{1-d}{d-c} B1 + \frac{1-c}{d-c} B2$	$-\frac{d}{d-c} B1 - \frac{c}{d-c} B2$	$-A1 + \frac{a}{d-c} B$	$-A2 - \frac{b}{d-c} B$	Z2
$y_1\ y_3$	b	$-\frac{1-d}{b} A2 + B2$	$\frac{d}{b} A2 + B2$	$-A1 - \frac{a}{b} A2$	$\frac{d-c}{b} A2 + B$	**
$y_1\ y_4$	b	$-\frac{1-c}{b} A2 - B1$	$\frac{c}{b} A2 - B1$	$-A1 - \frac{a}{b} A2$	$\frac{d-c}{b} A2 + B$	**
$y_2\ y_3$	a	$\frac{1-d}{a} A1 + B2$	$-\frac{d}{a} A1 + B2$	$-\frac{b}{a} A1 - A2$	$\frac{d-c}{a} A1 - B$	**
$y_2\ y_4$	a	$\frac{1-c}{a} A1 - B1$	$-\frac{c}{a} A1 - B1$	$-\frac{b}{a} A1 - A2$	$\frac{d-c}{a} A1 - B$	**
$y_3\ y_4$	0	-	-	-	-	

Taula 6

Amb P_{11} i P_{22}:

	Det.	Valor dels preus actius		Variables de Marge Actives		
$y_1\ y_2$	c-d	$\frac{1-d}{d-c} B1 + \frac{1-c}{d-c} B2$	$\frac{d}{d-c} B1 + \frac{c}{d-c} B2$	$- A1 - \frac{d-a}{d-c} B1 - \frac{c-a}{d-c} B2$	$- A2 + \frac{d-b}{d-c} B1 + \frac{c-b}{d-c} B2$	Z3
$y_1\ y_3$	d-b	-	-	-	-	
$y_1\ y_4$	c-b	-	-	-	-	
$y_2\ y_3$	d-a	-	-	-	-	
$y_2\ y_4$	c-a	-	-	-	-	
$y_3\ y_4$	a-b	$- \frac{1-b}{b-a} A1 - \frac{1-a}{b-a} A2$	$- \frac{b}{b-a} A1 - \frac{a}{b-a} A2$	$- \frac{b-c}{b-a} A1 - \frac{a-c}{b-a} A2 - B1$	$\frac{b-d}{b-a} A1 + \frac{a-d}{b-a} A2 - B2$	Z4

Taula 7

Amb P_{12} i P_{21}:

	Det.	Valor dels preus actius		Variables de Marge Actives		
$y_1\ y_2$	c-d	$- \frac{1-d}{d-c} B1 - \frac{1-c}{d-c} B2$	$- \frac{d}{d-c} B1 - \frac{c}{d-c} B2$	$- A1 - \frac{1-a-d}{d-c} B1 - \frac{1-a-c}{d-c} B2$	$- A2 + \frac{1-b-d}{d-c} B1 + \frac{1-b-c}{d-c} B2$	Z5
$y_1\ y_3$	1-b-d	-	-	-	-	
$y_1\ y_4$	1-b-c	-	-	-	-	
$y_2\ y_3$	1-a-d	-	-	-	-	
$y_2\ y_4$	1-a-c	-	-	-	-	
$y_3\ y_4$	b-a	$\frac{b}{b-a} A1 + \frac{a}{b-a} A2$	$\frac{1-b}{b-a} A1 + \frac{1-a}{b-a} A2$	$- \frac{1-b-c}{b-a} A1 - \frac{1-c-a}{b-a} A2 - B1$	$\frac{1-d-b}{b-a} A1 + \frac{1-a-d}{b-a} A2 - B2$	Z6

Taula 8

Les darreres taules, per P_{12} i P_{22} ; i P_{21} i P_{22}, són:

	Det.	Valor dels preus actius		Variables de Marge Actives		
$y_1\ y_2$	d-c	$-\frac{1-d}{d-c}B1 - \frac{1-c}{d-c}B2$	$\frac{d}{d-c}B1 + \frac{c}{d-c}B2$	$-A1 - \frac{1-a}{d-c}B$	$-A2 + \frac{1-b}{d-c}B$	Z7
$y_1\ y_3$	b-1	$-\frac{1-d}{1-b}A2 - B2$	$\frac{d}{1-b}A2 - B2$	$-A1 - \frac{1-a}{1-b}A2$	$\frac{d-c}{1-b}A2 - B$	X5
$y_1\ y_4$	b-1	$-\frac{1-c}{1-b}A2 + B1$	$\frac{c}{1-b}A2 + B1$	$-A1 - \frac{1-a}{1-b}A2$	$\frac{d-c}{1-b}A2 - B$	X6
$y_2\ y_3$	a-1	$\frac{1-d}{1-a}A1 - B2$	$-\frac{d}{1-a}A1 - B2$	$-\frac{1-b}{1-a}A1 - A2$	$-\frac{d-c}{1-a}A1 - B$	X7
$y_2\ y_4$	a-1	$\frac{1-c}{1-a}A1 + B1$	$-\frac{c}{1-a}A1 + B1$	$-\frac{1-b}{1-a}A1 - A2$	$-\frac{d-c}{1-a}A1 - B$	X8
$y_3\ y_4$	0	-	-	-	-	

Taula 9

$y_1\ y_2$	0	-	-	-	-	
$y_1\ y_3$	1-d	$A2 + \frac{1-b}{1-d}B2$	$A2 - \frac{b}{1-d}B2$	$-A + \frac{b-a}{1-d}B2$	$-B1 - \frac{1-c}{1-d}B2$	**
$y_1\ y_4$	1-c	$A2 - \frac{1-b}{1-c}B1$	$A2 + \frac{b}{1-c}B1$	$-A - \frac{b-a}{1-c}B1$	$-\frac{1-d}{1-c}B1 - B2$	**
$y_2\ y_3$	1-d	$-A1 + \frac{1-a}{1-d}B2$	$-A1 - \frac{a}{1-d}B2$	$-A + \frac{b-a}{1-d}B2$	$-B1 - \frac{1-c}{1-d}B2$	**
$y_2\ y_4$	1-c	$-A1 - \frac{1-a}{1-c}B1$	$-A1 + \frac{a}{1-c}B1$	$-A - \frac{b-a}{1-c}B1$	$-\frac{1-d}{1-c}B1 - B2$	**
$y_3\ y_4$	b-a	$\frac{1-b}{b-a}A1 + \frac{1-a}{b-a}A2$	$-\frac{b}{b-a}A1 - \frac{a}{b-a}A2$	$-\frac{1-c}{b-a}A - B1$	$\frac{1-d}{b-a}A - B2$	Z8

Taula 10

(iv) Per últim, les quatre taules que reflexen els valors de les setze combinacions bàsiques si prenem <u>un sol preu a la base</u> són:

		Det.	V. preu	Valor de les variables de marge actives			
P_{11}	$y_1\ y_2\ y_3$	d	$\frac{1}{d}$ B2	$-$ A1 + $\frac{a}{d}$ B2	$-$ A2 $-$ $\frac{b}{d}$ B2	$-$ B1 $-$ $\frac{c}{d}$ B2	**
	$y_1\ y_2\ y_4$	c	$-\frac{1}{c}$ B1	$-$ A1 $-$ $\frac{a}{c}$ B1	$-$ A2 + $\frac{b}{c}$ B1	$-\frac{d}{c}$ B1 $-$ B2	**
	$y_1\ y_3\ y_4$	-b	$-\frac{1}{b}$ A2	$-\frac{a}{b}$ A1 $-$ A2	$\frac{c}{b}$ A2 $-$ B1	$-\frac{d}{b}$ A2 $-$ B2	**
	$y_2\ y_3\ y_4$	-a	$\frac{1}{a}$ A1	$-\frac{b}{a}$ A1 $-$ A2	$-\frac{c}{a}$ A1 $-$ B1	$\frac{d}{a}$ A1 $-$ B2	**

Taula 11

P_{12}	$y_1\ y_2\ y_3$	-d	$-\frac{1}{d}$ B2	$-$ A1 $-$ $\frac{1-a}{d}$ B2	$-$ A2 + $\frac{1-b}{d}$ B2	$-$ B1 $-$ $\frac{c}{d}$ B2	X9
	$y_1\ y_2\ y_4$	-c	$\frac{1}{c}$ B1	$-$ A1 + $\frac{1-a}{c}$ B1	$-$ A2 $-$ $\frac{1-b}{c}$ B1	$-\frac{d}{c}$ B1 $-$ B2	X10
	$y_1\ y_3\ y_4$	b-1	$-\frac{1}{1-b}$ A2	$-$ A1 $-$ $\frac{1-a}{1-b}$ A2	$-\frac{c}{1-b}$ A2 $-$ B1	$\frac{d}{1-b}$ A2 $-$ B2	X11
	$y_2\ y_3\ y_4$	a-1	$\frac{1}{1-a}$ A1	$-\frac{1-b}{1-a}$ A1 $-$ A2	$\frac{c}{1-a}$ A1 $-$ B1	$-\frac{d}{1-a}$ A1 $-$ B2	X12

Taula 12

		Det.	V. preu	Valor de les variables de marge actives			
P_{21}	$y_1\ y_2\ y_3$	1-d	$\frac{1}{1-d}\,B2$	$-\ A1 - \frac{a}{1-d}\,B2$	$-\ A2 + \frac{b}{1-d}\,B2$	$-\ B1 - \frac{1-c}{1-d}\,B2$	**
	$y_1\ y_2\ y_4$	1-c	$-\ \frac{1}{1-c}\,B1$	$-\ A1 + \frac{a}{1-c}\,B1$	$-\ A2 - \frac{b}{1-c}\,B1$	$-\ \frac{1-d}{1-c}\,B1 - B2$	**
	$y_1\ y_3\ y_4$	b	$\frac{1}{b}\,A2$	$-\ A1 - \frac{a}{b}\,A2$	$-\ \frac{1-c}{b}\,A2 - B1$	$\frac{1-d}{b}\,A2 - B2$	**
	$y_2\ y_3\ y_4$	a	$-\ \frac{1}{a}\,A1$	$-\ \frac{b}{a}\,A1 - A2$	$\frac{1-c}{a}\,A1 - B1$	$-\ \frac{1-d}{a}\,A1 - B2$	**

Taula 13

P_{22}	$y_1\ y_2\ y_3$	d-1	$-\ \frac{1}{1-d}\,B2$	$-\ A1 + \frac{1-a}{1-d}\,B2$	$-\ A2 - \frac{1-b}{1-d}\,B2$	$-\ B1 - \frac{1-c}{1-d}\,B2$	**
	$y_1\ y_2\ y_4$	c-1	$\frac{1}{1-c}\,B1$	$-\ A1 - \frac{1-a}{1-c}\,B1$	$-\ A2 + \frac{1-b}{1-c}\,B1$	$-\ \frac{1-d}{1-c}\,B1 - B2$	**
	$y_1\ y_3\ y_4$	1-b	$\frac{1}{1-b}\,A2$	$-\ A1 - \frac{1-a}{1-b}\,A2$	$\frac{1-c}{1-b}\,A2 - B1$	$-\ \frac{1-d}{1-b}\,A2 - B2$	**
	$y_2\ y_3\ y_4$	1-a	$-\ \frac{1}{1-a}\,A1$	$-\ \frac{1-b}{1-a}\,A1 - A2$	$-\ \frac{1-c}{1-a}\,A1 - B1$	$\frac{1-d}{1-a}\,A1 - B2$	**

Taula 14

Tenint en compte les taules anteriors, el lema és immediat:

Les <u>cinc combinacions no bàsiques</u> són de fàcil identificació. Corresponen a les que tenen submatrius de determinant nul: la de l'apartat (i) i una a cada una de les taules 5, 6, 9 i 10.

Pel que fa als <u>vint vèrtexs no factibles</u> - que hem marcat amb asteriscs a la banda dreta de les taules -, són conseqüència dels signes de A1, A2, B1 i B2, establerts al lema 7.14. A la taula 6, per exemple, hi ha quatre vèrtexs no factibles perquè el valor de P_{21} és sempre negatiu; el mateix, i per la mateixa raó, es pot concloure a la taula 10. Podem igualment descartar tots els vèrtexs de les taules 11, 13 i 14.

Així mateix, hi ha <u>vuit combinacions que no podem assegurar que siguin bàsiques</u>, localitzats a les taules 7 i 8, ja que els determinants de les submatrius corresponents són valors que no tenen perquè ser no nuls.

Ens queda, per tant, l'estudi de la factibilitat de les 36 combinacions restants. Les hem denotat, com es pot veure a les taules, per Vi, Wi, Xi, Zi, atenent a un criteri de semblança entre els valors que prenen les diverses variables de les solucions bàsiques.∎

Lema 7.16. Si l'expressió $- A - \frac{b-a}{d-c} B \geq 0$, podem trobar sempre un mínim de dos vèrtexs factibles.

En efecte:

Observem, en primer lloc que, en les condicions d'aquest lema, les variables de marge de les solucions de tipus Vi són positives. Per tant podem concloure que el sistema (7.K) té solució en aquest cas, perquè la no negativitat de les variables de marge assegura que les inequacions es compleixen amb el signe adient.

Ens falta, no obstant, assegurar-nos de què podem resoldre (7.K) de manera que també les variables que indiquen preus prenguin valors no negatius.

En aquest estudi descartarem les solucions de tipus Xi, perquè serien, de fet, solucions no bàsiques en situacions límit, en què un dels agents cregui saber amb certesa el tipus de l'altre. Si fos així resultaria que alguna de les probabilitats, a, b, c, d, 1-a, 1-b, 1-c, 1-d, seria zero, i automàticament exclouria algunes de les combinacions bàsiques dels vèrtexs denotats amb les Xi.

Considerarem només els vèrtexs Vi, Wi i Zi, que presenten una estructura similar i tenen l'avantatge de què seran sempre combinacions bàsiques. En concret, en aquest lema utilitzarem les dotze solucions bàsiques V1 a V8, Z2, Z3, Z5 i Z7.

Hem resumit aquests dotze vèrtexs en la taula 15, reescribint-los en funció de quatre noves variables:

$$K = -A2 - \frac{b}{d-c} B \qquad L = A1 - \frac{a}{d-c} B$$
$$M = -\frac{d}{d-c} B1 - \frac{c}{d-c} B2 \qquad N = \frac{1}{d-c} B \tag{7.M}$$

explicitant només les variables de marge pels vèrtexs de tipus Z, ja que pels altres ja sabem segur que són valors positius.

	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}		
V1	K+M+N	K	M	0		
V2	L+M+N	L	M	0		
V3	K+N	K-M	0	-M		
V4	L+N	L-M	0	-M		
V5	M+N	0	M-K	-K		
V6	M+N	0	M-L	-L		
V7	0	-M-N	-K-N	-K-M-N		
V8	0	-M-N	-L-N	-L-M-N		
Z2	M+N	0	M	0	-L	K
Z3	M+N	0	0	-M	-L+M	K-M
Z5	0	-M-N	M	0	-L-M-N	K+M+N
Z7	0	-M-N	0	-M	-L-N	K+N

Taula 15

Per veure quines d'aquestes solucions bàsiques són factibles haurem de considerar la taula 15 segons els signes de les quatre variables definides a (7.M). Això representa, en principi, estudiar setze combinacions de signes, però podem prescindir de diverses, ja que, tenint en compte el lema 7.14, tindrem:

$$N<0 \Longrightarrow K = - A2 - \frac{b}{d-c} B = - A2 - bN > 0 \quad \text{ja que } A2 \leq 0$$

$$L = A1 - \frac{a}{d-c} B = A1 - aN > 0 \quad \text{al ser } A1 \geq 0$$

$$N>0 \Longrightarrow M = - \frac{d}{d-c} B1 - \frac{c}{d-c} B2 = - \frac{d}{d-c} B1 + B2 =$$

$$= - dN + B2 < 0 \quad \text{ja que } B2 \leq 0$$

Resumim aquesta anàlisi en la taula 16:

K	L	M	N	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8	Z2	Z3	Z5	Z7	
+	+	-	+	nf	nf	f	f	nf	nf	nf	nf	nf	nf	nf	nf	(i)
+	-	-	+	nf	nf	f	?	nf	?	nf	?	nf	?	nf	?	(ii)
-	+	-	+	nf	nf	?	f	?	nf	?	nf	nf	nf	nf	nf	(iii)
-	-	-	+	nf	nf	?	?	?	?	?	?	nf	?	nf	?	(iv)
+	+	+	-	?	?	nf	nf	nf	nf	?	?	nf	nf	?	nf	(v)
+	+	-	-	nf	nf	?	?	nf	nf	?	?	nf	nf	nf	?	(vi)

Taula 16

en què indiquem amb f un vèrtex factible (on, per tant totes les variables són no negatives), amb nf un vèrtex no factible, i amb "?" quan cal una determinació posterior.

Comprovem que, per cada un dels sis casos anteriors, hi ha almenys dos vèrtexs factibles:

(i) està completament determinat.

(ii) V3 és sempre factible; però a més també ho és V4, V6 o V8, i en alguns casos Z3 o Z7:

V4 és factible ssi $L+N\geq 0$ i $L-M\geq 0$

V6 és factible ssi $M+N\geq 0$ i $M-L\geq 0$

V8 és factible ssi $-M-N\geq 0$, $-L-N\geq 0$ i $-L-M-N\geq 0$

Z3 necessita les mateixes condicions de V4 i Z7 dues de les de V8. Donada l'alternància de signes, tindrem:

- si $L+N\geq 0$ i $L-M\geq 0$ és factible V4
- si $L+N\geq 0$ i $L-M\leq 0$ ho són V6 i Z3, ja que la primera condició es dedueix: $M+N=(M-L)+(L-N)\geq 0$
- si $L+N\leq 0$ i $M+N\geq 0$ continuem tenint com a factibles V6 i Z3, ja que ara $M-L=(M+N)-(L+N)\geq 0$
- si $L+N\leq 0$ i $M+N\leq 0$ són factibles V8 i Z7, ja que $L\leq 0$.

Observem que, en cada cas, només són factibles els vèrtexs indicats, i cap d'altre dins del grup que estudiem.

(iii) V4 és factible, i la demostració de la factibilitat d'un (i només un) d'entre V3, V5 i V7 segueix la mateixa línia que en el cas (ii).

(iv) L'argument per obtenir dos vèrtexs factibles es pot fer ara a partir de (ii) i (iii). Tenim sis possibles vèrtexs factibles d'entre els Vi: V3 a V8. Però a (ii) hem demostrat que entre V4, V6 i V8 n'hi ha sempre un que ho és (només calia la hipòtesi addicional de què $L \leq 0$, i aquí també es compleix); i a (iii) es pot veure el mateix d'entre V3, V5 i V7, amb la hipòtesi addicional de què $K \leq 0$, també certa.
A més, quan ho siguin V3 i V6 també serà factible Z3, i si ho són V3 i V8, també tindrem Z7.

(v) Es una discusió similar a (ii) però més senzilla. Els vèrtexs a tenir en compte són:

V1 factible ssi $K+M+N \geq 0$

V2 factible ssi $L+M+N \geq 0$

V7 factible ssi $-M-N \geq 0$, $-K-N \geq 0$ i $-K-M-N \geq 0$

V8 factible ssi $-M-N \geq 0$, $-L-N \geq 0$ i $-L-M-N \geq 0$

Llavors és fàcil veure que:

- si $M+N \geq 0$, són factibles V1 i V2, ja que cal sumar K o L, i ambdós són aquí valors positius.
- si $M+N \leq 0$, tenim un vèrtex factible de cada un dels dos raonaments independents:

(.) si $K+N \geq 0$, ja que $M \geq 0$, V1 és factible

si $K+N \leq 0$, i a més $K+M+N \leq 0$ ho és V7, i si no V1

(..) si $L+N \geq 0$, ja que $M \geq 0$, V2 és factible

si $L+N \leq 0$, i a més $L+M+N \leq 0$ ho és V8, i si no V2

A més, si ho són V1 i V8 tindrem també el vèrtex Z5.

(vi) Es la discusió més inmediata:

V3 és factible si $K+N \geq 0$

V4 és factible si $L+N \geq 0$

V7 és factible ssi $-K-N \geq 0$

V8 és factible ssi $-L-N \geq 0$

Per tant o bé V3 o bé V7 és factible, i el mateix podem dir de V4 i V8. A més, quan ho siguin V3 i V8 també tindrem com a vèrtex factible Z7.

Observem, per últim, que en gran part dels casos podem assegurar que hi haurà negociació en tots els possibles estats de la natura, però que concretament en (i), ja que només són factibles V3 i V4, $P_{21}=0$, i cap dels vèrtexs tipus X, encara que sigui factible, conté aquest preu com a variable bàsica: si $x=x_2$ i $z=z_1$ (quan l'empresa venedora té el mercat en pitjors condicions i la compradora en les millors) no hi haurà negociació. ∎

Lema 7.17. Si $-\frac{d-c}{b-a}A - B \geq 0$, podem trobar sempre un mínim de dos vèrtexs factibles.

La demostració és idèntica a la del lema anterior, considerant ara les solucions bàsiques W1 a W8, Z1, Z4, Z6 i Z8, complementàries de les dotze solucions que estudiàvem més amunt. ∎

Lema 7.18. Si $-A - \frac{b-a}{d-c}B \leq 0$, $-\frac{d-c}{b-a}A - B \leq 0$ només podem trobar solucions factibles bàsiques en els dos casos següents:

(1) $a>b$, $c>d$, $A\leq 0$, $B\geq 0$

(2) $a<b$, $c<d$, $A\geq 0$, $B\leq 0$

En efecte:

Pas 1. D'entre les 36 solucions bàsiques que ens dóna el lema 7.15, és inmediat comprovar que cap de les dels tipus Vi o Wi són factibles, ja que les hipòtesis del lema impliquen que les variables de marge d'aquestes solucions són negatives.

Tampoc són factibles les solucions bàsiques del tipus Zi, ja que si sumem les dues variables de marge de cada una d'elles obtenim:

$$y_1+y_2 = -A + \frac{a-b}{d-c}B = -A - \frac{b-a}{d-c}B \leq 0$$

$$y_3+y_4 = \frac{c-d}{b-a}A - B = -\frac{d-c}{b-a}A - B \leq 0$$

i això contradiu clarament la no negativitat d'aquestes variables.

Pas 2. Les hipòtesis del lema només es poden complir si $\frac{b-a}{d-c} > 0$ i almenys un dels valors A o B és també positiu.

Aquest resultat és inmediat, ja que:

$$- \frac{d-c}{b-a} A - B = \frac{d-c}{b-a} \left[- A - \frac{b-a}{d-c} B \right]$$

de manera que $\frac{b-a}{d-c}$ es pot escriure com un quocient de dues expressions que prenen valors negatius. Es doncs, un valor positiu.

La segona part és ara també inmediata. Si tinguessim $A<0$ i $B<0$, llavors òbviament $-A-kB>0$, on k és el quocient anterior, $k>0$, contradient l'enunciat del lema.

Pas 3. Podem expressar tots els vèrtexs de tipus Xi (els únics que poden ser factibles segons el pas 1) en funció de sis valors, excepte una constant multiplicativa de signe positiu igual en cada una de les variables d'una mateixa solució.

Les sis noves variables són:

$R=-dA2+(1-b)B2$ $\qquad$ $S=-cA2-(1-b)B1$

T=dA1+(1-a)B2 U=cA1-(1-a)B1

E1=-dB1-cB2 E2=-(1-b)A1-(1-a)A2

Podem resumir-les en la taula 17 que donem a continuació. En la columna corresponent a la variable P_{12} no s'ha fet constar explícitament el valor, perquè es tracta sempre d'un número positiu.

	P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	Variables de marge		
X1	R	+	0	0	R-T	E1	
X2	S	+	0	0	S-U	E1	
X3	T	+	0	0	R-T	E1	
X4	U	+	0	0	S-U	E1	
X5	0	+	0	-R	E2	S-R	
X6	0	+	0	-S	E2	S-R	
X7	0	+	0	-T	E2	U-T	
X8	0	+	0	-U	E2	U-T	
X9	0	+	0	0	-T	R	E1
X10	0	+	0	0	-U	S	E1
X11	0	+	0	0	E2	S	-R
X12	0	+	0	0	E2	U	-T

Taula 17

Pas 4. Es compleix que:

(1) si c<d i B≥0, llavors E1≤0, S-R≤0 i U-T≤0

(2) si a>b i A≥0, llavors E2≤0, R-T≤0 i S-U≤0

i per tant, en aquestes hipòtesis, cap dels vèrtexs tipus Xi serà factible.

La demostració és en ambdós casos, inmediata. Per exemple, en (1) tindrem:

$$E1=-dB1-cB2<-dB\leq 0 \quad \text{ja que } c<d$$

$$S-R=-(1-b)B-(c-d)A2\leq 0$$

$$U-T=-(1-a)B+(c-d)A1\leq 0$$

Ara la conclusió és prou inmediata. Per exemple, si $c<d$, ja que $B\geq 0$, per (1) resulta $E1\leq 0$, i per tant X1, X2, X3, X4, X9 i X10 no són factibles, ni tampoc X5, X6, X7 i X8 degut a què tenen com a variable de marge S-R o U-T, ambdós valors negatius. Per últim, X11 i X12 són igualment no factibles, en el primer cas perquè la segona i tercera variables de marge sumen $S-R\leq 0$, i en el segon perquè sumen $U-T\leq 0$, de manera que no poden ser a l'hora dues variables positives.

Pas 5. Com a conseqüència del pas 3, tenim sis possibilitats respecte als signes de a-b, c-d, A i B:

(i) $a>b$, $A\geq 0$, $B\geq 0$ (i per tant $c>d$)

(ii) $a>b$, $A\geq 0$, $B\leq 0$ (i per tant $c>d$)

(iii) $a>b$, $A\leq 0$, $B\geq 0$ (i per tant $c>d$)

(iv) $a<b$, $A\geq 0$, $B\geq 0$ (i per tant $c<d$)

(v) $a<b$, $A\geq 0$, $B\leq 0$ (i per tant $c<d$)

(vi) $a<b$, $A\leq 0$, $B\geq 0$ (i per tant $c<d$)

D'acord amb el pas 4, en (i), (ii), (iv) i (vi) no tindrem cap vèrtex factible, perquè ens trobem en la situació (1) o (2).

Queden doncs els dos casos enunciats en el lema, en què no es pot trobar cap contradicció que invalidi la factibilitat de tots els vèrtexs alhora.∎

Capítol 8

ESTUDI PARTICULAR DEL CAS DE FUNCIONS QUADRATIQUES

8.1. El model

Dedicarem aquest capítol a la determinació de mecanismes directes eficients ex post per una família particular de funcions d'ingrés i cost de les empreses negociadores. Aquestes famílies proporcionen un exemple dels casos en què les característiques de la negociació són tals, que no s'els pot aplicar directament l'estudi general dut a terme en el capítol anterior.

La família de funcions que analitzarem seran funcions quadràtiques respecte a la quantitat intercanviada, que es poden expressar per:

$$\begin{aligned} C(q,x) &= q\,\Psi(x) + \frac{1}{2}\,\beta\, q^2 \\ I(q,z) &= q\,\varphi(z) - \frac{1}{2}\,\alpha\, q^2 \end{aligned} \tag{8.A}$$

on $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ són paràmetres, i les funcions $\Psi(x)$ i $\varphi(z)$ han de ser contínuament diferenciables, creixents i amb imatge positiva[1].

Es fàcil veure que totes aquestes funcions compleixen els requeriments generals, definits al capítol 4, en què hem basat el nostre estudi. En efecte:

$$C_q(q,x) = \Psi(x) + \beta q \geq 0 \text{ per tot } q$$

$$C_x(q,x) = q\ \Psi'(x) \geq 0 \text{ per ser } \Psi \text{ una funció creixent}$$

$$C_{qx}(q,x) = \Psi'(x) \geq 0$$

$$C_{qq}(q,x) = \beta \geq 0$$

i per tant la funció de cost és creixent i convexa respecte a la variable q, creixent respecte a x i té les dues variables positivament correlacionades. De manera similar, per a la funció d'ingrés tenim:

$$I_q(q,z) = \varphi(z) - \alpha q \geq 0 \quad \text{sempre que } q \leq \varphi(z)/\alpha \qquad (8.B)$$

$$I_z(q,z) = q\ \varphi'(z) \geq 0 \text{ per ser } \quad \text{una funció creixent}$$

$$I_{qz}(q,z) = \varphi'(z) \geq 0$$

$$I_{qq}(q,z) = -\alpha \leq 0$$

---

1. Les funcions que proposem són una generalització de les estudiades per Green i Honkapohja (1983) en un context no bayesià.

és a dir, per quantitats $q \leq \varphi(z)/\alpha$, la funció d'ingrés és creixent i còncava respecte a q, creixent respecte a z, i té les seves dues variables positivament correlacionades.

Donat un estat qualsevol de la natura, $(x,z) \in T_1 z T_2$, l'intercanvi òptim que poden contractar les dues empreses es produirà per la quantitat $\bar{q}(x,z) = \mathrm{argmax}_q \; S(q,,x,z)$. Per a les funcions de la família donada per (8.A) aquest execedent compleix:

$$S(q,x,z) = I(q,z) - C(q,x) =$$

$$= q\,[\varphi(z) - \psi(x)] - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\, q^2$$

$$S_q(q,x,z) = [\varphi(z) - \psi(x)] - (\alpha+\beta)\, q$$

$$S_{qq}(q,x,z) = -(\alpha+\beta) \leq 0$$

la condició necessària de primer ordre que defineix $\bar{q}$ serà per tant també suficient, ja que S és còncava. A més podem donar explícitament la quantitat intercanviada òptima:

$$\bar{q}(x,z) = [\varphi(z) - \psi(x)]/(\alpha+\beta) \qquad (8.C)$$

quantitat que, evidentment, compleix la restricció (8.B) que ens assegura el creixement de la funció d'ingrés de l'empresa venedora.

En un mercat on intervinguin empreses amb costos i ingressos determinats per (8.A), no sempre es podrà signar un contracte per la quantitat òptima. Això dependrà, principalment, de la forma de les funcions φ i ψ. Per exemple, donat un cert valor de x, si la característica de la segona banda del mercat és inferior a $\varphi^{-1}(\psi(x))$, no es podrà establir cap negociació[2], ja que el millor intercanvi que es pot proposar és $\bar{q}(x,z)$, quantitat no positiva.

En termes de les funcions $x^*(z)$ i $z^*(x)$ definides a l'apartat 7.3.1. del capítol anterior, tindrem:

$$z^*: T_1 \longrightarrow T_2 \quad \text{amb} \quad z^*(x) := \varphi^{-1}(\psi(x))$$

$$x^*: T_2 \longrightarrow T_1 \quad \text{amb} \quad x^*(z) := \psi^{-1}(\varphi(z))$$

és a dir, una empresa venedora que anunciï com a característica de la seva banda del mercat un cert valor $x \in T_1$, només pot esperar arribar a un acord amb agents compradors que anunciïn com a caraterística pròpia un element de la franja $[z^*(x),1]$, ja que en cas contrari resultaria:

$$z < z^*(x) \Longrightarrow \bar{q}(x,z) = [\varphi(z) - \psi(x)]/(\alpha+\beta) <$$

$$< [\varphi(z^*(x)) - \psi(x)]/(\alpha+\beta) = 0$$

---

2. Observem que el valor $\varphi^{-1}(\psi(x))$ està ben definit, perquè podem assegurar l'existència de la funció inversa de φ, al ser una funció contínua i creixent. A més, φ està definida sobre l'interval [0,1], de manera que la seva inversa pren sempre valors no negatius.

Igualment, una empresa compradora que anunciï un valor $z \in T_2$ només pot esperar signar un contracte amb empreses venedores que trametin senyals situats en l'interval $[0, x^*(z)]$.

Observem, per últim, que en aquest model no es compleix mai la hipòtesi (N.F.) - quantitat òptima a intercanviar no negativa en qualsevol estat de la natura -. En efecte, en el cas continu, adoptar-la significaria suposar:

(a) $[z^*(x), 1] = T_2$ per tot $x \in T_1$

és a dir, $z^*(x) = \varphi^{-1}(\psi(x)) = 0$ per tot x

per tant $\psi(x) = \varphi(0)$

de manera que la funció de cost de (8.A) no dependria, de fet, de la característica del mercat dominat per l'empresa, en contra de la hipòtesi de què la mateixa té informació privada.

(b) $[0, x^*(z)] = T_1$ per tot z

igualment aniria en contra de la hipòtesi de què la segona empresa disposa d'informació privada.

Es pot concloure, per tant, que l'existència de mecanismes directes eficients ex post, per a aquest model, seguirà les línies marcades a les seccions 7.3.1 - condicions necessàries d'existència en el cas d'un nombre continu de tipus dels agents - i 7.4.2 - utilitzant, en el cas discret la proposició 7.13 -. L'anàlisi s'haurà de fer seguint una o altre secció, segons les hipòtesis addicionals que imposem a la forma de les funcions de creença de les empreses que han de portar a terme la negociació. Efectuarem aquest estudi sucessivament en els dos apartats que segueixen.

8.2. Agents amb creences independents

En aquest cas, l'existència de mecanismes directes eficients ex post, que un intermediari pugui proposar per a portar a terme una negociació entre les dues empreses, depèn de l'existència de solucions del sistema d'equacions diferencials (7.B') de la proposició 7.4.

Estudiarem aquest sistema per a la família de funcions de (8.A) en el cas, més senzill, en què $\varphi \equiv \psi \equiv \mathrm{Id}$, i suposant que les funcions de creença dels agents són les uniformes en l'interval $[0,1]$.

Així doncs, la situació del mercat estarà caracteritzada per:

$$\begin{aligned} C(q,x) &= qx + \tfrac{1}{2}\,\beta\, q^2 \\ I(q,z) &= qz - \tfrac{1}{2}\,\alpha\, q^2 \\ F(z|x) &= z \qquad \forall x \\ G(x|z) &= x \qquad \forall z \end{aligned} \tag{8.D}$$

Tenint en compte (8.C), la quantitat òptima d'intercanvi és ara:

$$\bar{q}(x,z) = \frac{z-x}{\alpha+\beta} \tag{8.E}$$

Es fàcil comprovar que, a priori, no hi ha cap estat del mercat, excepte x=1 i z=0, en què no hi hagi possibilitat de dur a terme una negociació. Per altra banda, i donada la funció d'intercanvi òptima, és immediat observar que $x^*(z)=z$, i que $z^*(x)=x$.

Podem doncs enunciar el següent resultat:

<u>Proposició 8.1.</u> En les condicions donades per (8.D), un mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$ en què la funció de preus sigui additivament separables és eficient ex post si, i solament si,

$$P(x,z) = p_1(x) + p_2(z)$$

on les dues components de P(x,z) tenen la forma:

$$p_1(x)=\begin{cases} \dfrac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2} & \text{si } x=0 \\[2ex] k_1\left[\dfrac{1}{1-x} + L\,\dfrac{x}{1-x}\right] + \dfrac{1}{24(\alpha+\beta)}\left[L(1-x) - \dfrac{1}{1-x}\right] - \\[2ex] \quad + \dfrac{1}{48(\alpha+\beta)^2}\left[3(7\alpha+5\beta)x^2 - 4(\alpha-5\beta)x\right] & \forall x\in(0,1) \\[2ex] 0 \quad \text{per } x=1 \end{cases} \tag{8.F}$$

$$p_2(z)=\begin{cases} 0 & \text{per } z=0 \\[2ex] k_1\left[\frac{1}{z} - L\,\frac{z}{1-z}\right] - \frac{1}{24(\alpha+\beta)}\left[L(1-z) - 1\right] + \\ \quad + \frac{1}{48(\alpha+\beta)^2}\left[3(5\alpha+7\beta)z^2 - 2(\alpha-5\beta)z\right] & \forall z\in(0,1) \\[2ex] \frac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2} & \text{si } z=1 \end{cases}$$

En efecte:

(a) <u>La condició és necessària</u>:

El sistema d'equacions diferencials de (7.B'), que dóna la dita condició, es pot expressar, tenint en compte (8.E), com:

$$\left.\begin{array}{l} (1-x)\,\frac{d}{dx}\,p_1(x) - p_1(x) - p_2(x) = -\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\alpha+\beta}\left[x + \beta\bar{q}(x,z)\right]dz \\[3ex] z\,\frac{d}{dz}\,p_2(z) + p_2(z) + p_1(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{1}{\alpha+\beta}\left[z - \alpha\bar{q}(x,z)\right]dx \end{array}\right\}$$

Ara bé, el càlcul dels termes de la banda dreta del sistema anterior es pot fer explícitament:

$$\int_x^1 \frac{1}{\alpha+\beta}\left[x + \beta\bar{q}(x,z)\right]dz = -\frac{1}{2(\alpha+\beta)^2}\left[(2\alpha+\beta)x^2 - 2\alpha x - \beta\right]$$

$$\int_0^z \frac{1}{\alpha+\beta} \left[z - \alpha\bar{q}(x,z) \right] dx = \frac{1}{2(\alpha+\beta)^2} (2\beta+\alpha)\ z^2$$

Si considerem t com a única variable, el sistema d'equacions diferencials anterior es pot escriure com:

$$\left. \begin{aligned} (1-t)\frac{d}{dt} p_1(t) - p_1(t) - p_2(t) &= \frac{1}{2(\alpha+\beta)^2} \left[(2\alpha+\beta)t^2 - 2\alpha t - \beta \right] \\ t\frac{d}{dt} p_2(t) + p_1(t) + p_2(t) &= \frac{1}{2(\alpha+\beta)^2} (2\beta+\alpha)\ t^2 \end{aligned} \right\}$$

Aïllant de la primera equació $p_2(t)$, derivant-la i substituint a la segona, s'obté una equació diferencial lineal d'ordre dos en $p_1(t)$:

$$t(1-t)\frac{d^2}{dt^2}p_1(t) + (1-3t)\frac{d}{dt} p_1(t) = \frac{1}{2(\alpha+\beta)^2} \left[(7\alpha+5\beta)t^2 - 4\alpha t - \beta \right]$$

La seva resolució resulta senzilla, ja que l'equació homogènia associada no té tots els termes. Es immediat comprovar que la família:

$$Y_1(t) = k_1 \left[\frac{1}{1-t} + L\,\frac{t}{1-t} \right] + k_2$$

constitueix la solució general de la dita equació homogènia.

Per a trobar una solució particular de l'equació completa hem considerat una funció de la forma:

$$Y_2(t) = k_1(t)z(t) + k_2(t), \text{ on } z(t) = \frac{1}{1-t} + L\,\frac{t}{1-t}$$

Es fàcil veure que $Y_2(t)$ és solució si $k_1(t)$ i $k_2(t)$ compleixen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\,k_1(t) &= (1-t)\,b(t) \\ \frac{d}{dt}\,k_2(t) &= -\,z(t)\,\frac{d}{dt}\,k_1(t) \end{aligned}\right\}$$

essent b(t) la funció que forma el terme independent de l'equació. Fent les operacions adients s'obté:

$$Y_2(t) = \frac{1}{24(\alpha+\beta)}\left[L(1-t) - \frac{1}{1-t}\right] - \frac{1}{48(\alpha+\beta)^2}\left[3(7\alpha+5\beta)t^2 - 4(\alpha-5\beta)t\right]$$

Per tant la solució general de l'equació és:

$$p_1(x) = k_1\left[\frac{1}{1-x} + L\,\frac{x}{1-x}\right] + \frac{1}{24(\alpha+\beta)}\left[L(1-x) - \frac{1}{1-x}\right] -$$

$$-\,\frac{1}{48(\alpha+\beta)^2}\left[3(7\alpha+5\beta)x^2 - 4(\alpha-5\beta)x\right] + k_2 \qquad \forall x \in (0,1)$$

D'aquesta solució s'en dedueix fàcilment la forma de la funció $p_2(z)$:

$$p_2(z) = k_1 \left[\frac{1}{z} - L\,\frac{z}{1-z} \right] - \frac{1}{24(\alpha+\beta)} \left[L(1-z) - 1 \right] +$$

$$+ \frac{1}{48(\alpha+\beta)^2} \left[3(5\alpha+7\beta)z^2-2(\alpha-5\beta)z\right] - k_2 \qquad \forall z\in(0,1)$$

A més a més, per la segona part de la proposició 7.4, tenim també:

$$p_1(0) = \int_0^1 I(\bar{q}(0,z),z)\ dF(z) = \frac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2}$$

$$p_1(1) = 0$$

$$p_2(0) = 0$$

$$p_2(1) = \int_0^1 C(\bar{q}(x,1),x)\ dG(x) = \frac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2}$$

Observem que la funció de preus del mecanisme de negociació depèn, en realitat, només de la constant k_1, ja que és $P(x,z)=p_1(x)+p_2(z)$, i per tant els termes amb k_2 es cancelen.

(b) La condició és suficient:

Cal veure que els mecanismes $\{\bar{q},P\}$ on P compleix (8.F) són efectivament compatibles respecte a incentius. Per a això busquem la utilitat esperada dels agents si utilitzen aquest mecanisme:

$$U(x';x) = \int_{x'}^{1} \left[p_1(x') + p_2(z) - C(\bar{q}(x',z),x)\right] dF(z) = \tag{8.G.1}$$

$$= k_1 + \frac{1}{24(\alpha+\beta)} \left[8(x')^3 - 12(1+x)(x')^2 + 24xx' + 3(1-4x)\right]$$

Derivant respecte a x' obtindrem:

$$U_{x'}(x';x) = \frac{1}{\alpha+\beta} \left[(x')^2 - (1+x)x' + x\right]$$

$$U_{x'x'}(x';x) = \frac{1}{\alpha+\beta} \left[2x' - (1+x)\right]$$

i és immediat comprovar que la primera derivada s'anul.la per $x'=x$, i que, fent aquesta substitució, la segona derivada és negativa per tot $x \in T_1 = [0,1]$. Així doncs, dir la veritat és òptim pel primer agent.

Per a la funció d'utilitat esperada del segon agent tindrem:

$$V(z';z) = \int_0^{z'} \left[I(\bar{q}(x,z'),z) - p_1(x) - p_2(z') \right] dG(x) =$$

$$= \frac{1}{6(\alpha+\beta)} \left[-2(z')^3 + 3z(z')^2 \right] - k_1 \qquad (8.G.2)$$

i és igualment directe veure que per $z'=z$ la primera derivada s'anul.la i la segona és negativa.∎

Corol.lari. Per un mecanisme directe qualsevol dels caracteritzats a la proposició anterior, les utilitats esperades dels dos agents són:

$$U(x) = \frac{1}{6(\alpha+\beta)} (1-x)^3 + k_1 - \frac{1}{24(\alpha+\beta)}$$

$$V(z) = \frac{1}{6(\alpha+\beta)} z^3 - k_1 \qquad (8.H)$$

Aquestes expressions es poden obtenir fàcilment de (8.G.1) i (8.G.2), per mecanismes en què dir la veritat sigui òptim, i en què, per tant, s'enviaran els senyals $x'=x$ i $z'=z$, respectivament.∎

En aquest model es compleix una propietat particular que resulta prou interessant: les utilitats de la forma (8.H) són les úniques que poden obtenir les empreses en negociacions regulades per mecanismes simultànis d'un sol període, encara que s'utilitzin mecanismes $\{\bar{q},P\}$ que no siguin additivament separables. Donem aquest resultat en la següent:

<u>Proposició 8.2.</u> Qualsevol negociació en què s'utilitzi un meccanisme directe $\{\bar{q},P\}$ eficient ex post permet als negociadors obtenir utilitats de la forma:

$$U(x) = \frac{1}{6(\alpha+\beta)}(1-x)^3 + \text{constant}$$

$$V(z) = \frac{1}{6(\alpha+\beta)} z^3 + \text{constant}$$

En efecte: Considerem un mecanisme en el que la regla de preus sigui una funció $P(x,z)$ qualsevol. Necessitarem la notació següent:

$$R_1(x) := \int_x^1 P(x,z)dz \qquad\qquad R_2(z) := \int_0^z P(x,z)dx$$

La utilitat del primer agent si aquest anuncia que el seu tipus és x' quan en realitat és x serà:

$$U(x';x) = \int_{x'}^1 \Big[P(x',z) - C(\bar{q}(x',z),x)\Big]dF(z) = \tag{8.I.1}$$

$$= R_1(x') + \frac{1}{6(\alpha+\beta)^2}\Big[\beta(x')^3 - 3\beta x(x')^2 - 3(\alpha+\beta)x(x')^2 +$$

$$+3\beta x' + 6(\alpha+\beta)xx' - 3(\alpha+\beta)x - \beta\Big]$$

Si volem que el mecanisme sigui compatible respecte a incentius haurà de complir $U_{x'}(x';x)=0$ en $x'=x$. Llavors, donat que:

$$U_{x'}(x';x) = \frac{d}{dx'} R_1(x') +$$

$$+ \frac{1}{2(\alpha+\beta)^2}\Big[\beta(x')^2 - 2\beta x' - 2(\alpha+\beta)xx' + 2(\alpha+\beta)x + \beta\Big]$$

la condició necessària de compatibilitat serà:

$$\frac{d}{dx} R_1(x) = \frac{1}{2(\alpha+\beta)^2}\Big[(2\alpha+\beta)x^2 - 2\alpha x - \beta\Big] \qquad (8.J.1)$$

Aquesta condició és també suficient, ja que:

$$U_{x'x'}(x';x) = \frac{d^2}{dx^2}R_1(x') + \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\Big[\beta x' - \beta - x(\alpha+\beta)\Big] =$$

$$= \frac{1}{(\alpha+\beta)^2}\Big[\alpha x + \beta x' - (\alpha+\beta)\Big]$$

i és immediat comprovar que aquesta expressió dóna un valor negatiu quan $x'=x$. Així doncs, resulta òptim pel primer agent dir la veritat si la funció de preus del mecanisme compleix (8.J.1).

Integrant (8.J.1) obtenim:

$$R_1(x) = R_1(0) + \frac{1}{6(\alpha+\beta)^2}\left[(2a+\beta)x^3 - 3\alpha x^2 - 3\beta x\right]$$

i la utilitat esperada del primer agent serà:

$$U(x) = R_1(0) + \frac{1}{6(\alpha+\beta)}(1-x)^3 - \frac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2} \qquad (8.K.1)$$

una funció decreixent de x.

L'expressió de U(x) donada a (8.K.1) demostra la tesi anunciada a la proposició, pel que fa al primer agent. En quant al segon, el procediment és el mateix. Sense detallar les operacions, tindrem en aquest cas el que segueix:

Si anuncia un valor z' quan el seu tipus és z, obté una utilitat de:

$$V(z';z) = \int_0^{z'} [I(\bar{q}(x,z'),z) - P(x,z')]\, dG(x) = \qquad (8.I.2)$$

$$= \frac{1}{6(\alpha+\beta)^2}\left[-\alpha(z')^3 + 3(\alpha+\beta)z(z')^2\right] - R_2(z')$$

La condició necessària i suficient per a la compatibilitat respecte a incentius del mecanisme és que:

$$\frac{d}{dz} R_2(z) = \frac{\alpha+2\beta}{2(\alpha+\beta)^2} z^2 \tag{8.J.2}$$

De la condició (8.J.2) resulta:

$$R_2(z) = R_2(1) - \frac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2} (1-z^3)$$

$$V(z) = \frac{1}{6(\alpha+\beta)} z^3 - R_2(1) + \frac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2} \tag{8.K.2}$$

on V(z) és una funció creixent respecte a z. ∎

Observem que el procés de demostració de la proposició anterior ens permet trobar les utilitats dels agents, però no quines són les funcions de preu dels mecanismes a través dels quals es poden obtenir. Però per la forma que tenen aquestes utilitats, no és realment necessari especificar les dites funcions de preu, ja que utilitzant funcions additivament separables s'arriba al mateix resultat. En conseqüència, podem afirmar que les funcions donades a (8.F) són suficients per a caracteritzar tots els mecanismes directes eficients ex post.

Passem ara a considerar la <u>racionalitat individual</u> dels mecanismes directes corresponents a aquest model. En primer lloc cal dir que cap mecanisme directe eficient ex post compleix la condició per a ser individualment racional en sentit ínterim. El raonament es pot fer seguint el de l'apartat 7.3.2 del capítol anterior, tot i que no s'hi pot aplicar directament, ja que per a deduir-lo, pressuposàvem la condició (N.F.) - negociació factible en qualsevol estat de la natura - que no es compleix aqui.

<u>Proposició 8.3.</u> En les condicions donades per (8.D) cap mecanisme directe eficient ex post és individualment racional en sentit ínterim.

Utilitzarem les expressions que hem obtingut per U(x) i V(z) a (8.K), quan el mecanisme $\{\bar{q},P\}$ és compatible respecte a incentius. Tenint en compte que U(x) és decreixent i V(z) creixent, si volem que es tracti d'un mecanisme individualment racional en sentit ínterim s'haurà de complir:

$$\text{mín}_x U(x) = U(1) = R_1(0) - \frac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2} \geq 0$$

$$\text{mín}_z V(z) = V(0) = -R_2(1) + \frac{\alpha+2\beta}{6(\alpha+\beta)^2} \geq 0$$

i per tant una condició necessària serà que $R_1(0)-R_2(1)\geq 0$.

No obstant, cap mecanisme compatible respecte a incentius i eficient ex post pot complir aquesta condició, tal i com es pot veure pel càlcul següent:

$$\int_0^1\int_0^z S(\bar{q}(x,z),x,z)dxdz =$$

$$= \int_0^1\int_0^z I(\bar{q}(x,z),z)dxdz - \int_0^1\int_x^1 C(\bar{q}(x,z),x)dzdx =$$

$$= \int_0^1 \Big[V(z)+R_2(z)\Big]dz - \int_0^1 \Big[R_1(x)-U(x)\Big]dx =$$

$$= \int_0^1 V(z)dz + \int_0^1 U(x)dx =$$

$$= R_1(0) - R_2(1) + \frac{1}{12(\alpha+\beta)}$$

on la primera igualtat resulta de substituir el valor de la funció S i canviar l'ordre d'integració de la segona integral, la segona de les expressions generals de V(z) i U(x) de (8.I) i la última d'integrar utilitzant (8.K).

Per altra banda tenim que:

$$S(\bar{q}(x,z),x,z) = (z-x)\bar{q}(x,z) - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)[\bar{q}(x,z)]^2 =$$

$$= (z-x)\,\frac{z-x}{\alpha+\beta} - \frac{1}{2}\,\frac{(z-x)^2}{(\alpha+\beta)^2} =$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+\beta)}\,(z-x)^2$$

i, integrant:

$$\int_0^1 \int_1^z S(\bar{q}(x,z),x,z)dxdz = \frac{1}{24(\alpha+\beta)}$$

d'on, juntament amb el càlcul anterior, resulta:

$$R_1(0) - R_2(1) = -\frac{1}{24(\alpha+\beta)} < 0$$

en contra de la condició necessària per què el mecanisme sigui individualment racional en sentit ínterim.∎

En canvi, sí és possible obtenir mecanismes directes eficients ex post que siguin <u>individualment racionals ex ante</u>:

<u>Proposició 8.4.</u> Qualsevol mecanisme directe $\{\bar{q},P\}$ on la funció de preus vingui donada per (8.F) i en la que $k_1 \in [0,1/24(\alpha+\beta)]$ és individualment racional ex ante.

En particular, si $k_1=1/48(\alpha+\beta)$ ambdós agents obtenen utilitats esperades iguals.

En efecte: tenint en compte el corol.lari de la proposició 8.1, les utilitats esperades ex ante dels agents seran:

$$\int_0^1 U(x)\, dG(x) = k_1$$

$$\int_0^1 V(z)\, dF(z) = \frac{1}{24(\alpha+\beta)} - k_1$$

i qualsevol constant k_1 de l'interval $[0,1/24(\alpha+\beta)]$ complirà aquestes condicions.

En particular, si volem que ambdós agents obtinguin utilitats esperades ex ante iguals caldrà triar el mecanisme amb $k_1=1/48(\alpha+\beta)$ ∎

8.3. Agents amb creences qualssevol: cas discret

Aquesta secció està basada en els resultats obtinguts en la secció 7.4.2. De fet, serveix per concloure-la, en el sentit de què complementa la proposició 7.13, per a aquells casos en què no es pot obtenir una solució sense especificar funcions de cost i d'ingrés per a les empreses.

Com en la secció 7.4.2, suposarem l'existència de només dos tipus per cada agent:

$$T_1=\{x_1,x_2\} \quad \text{amb} \quad x_1,x_2\in[0,1], \quad x_1<x_2$$

$$T_2=\{z_1,z_2\} \quad \text{amb} \quad z_1,z_2\in[0,1], \quad z_1<z_2$$

on, a més, es compleix $x_2<z_1$

Aquesta darrera condició és conseqüència de la hipòtesi que hem anomenat (N.F.), en què, per a assegurar que la negociació és factible en qualsevol dels estats de la natura, s'exigeix $\bar{q}(x_2,z_1)>0$. Aquí, i tenint en compte (8.E):

$$\bar{q}(x_2,z_1)=\frac{z_1-x_2}{\alpha+\beta}>0 \iff z_1>x_2$$

Segons l'estudi anterior, l'existència de mecanismes directes eficients ex post depèn essencialment del signe de les dues quantitats següents:

$$- A - \frac{b-a}{d-c} B \qquad \text{i/o} \qquad - \frac{d-c}{b-a} A - B$$

Així doncs, ens caldrà començar calculant el valor de cada una d'aquestes expressions, partint, naturalment, de les de A i B:

$$A := \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_4 =$$

$$= \left[C_{11}^1 a + C_{12}^1 (1-a)\right] - \left[C_{21}^1 a + C_{22}^1 (1-a)\right] +$$

$$+ \left[C_{21}^2 b + C_{22}^2 (1-b)\right] - \left[C_{11}^2 b + C_{12}^2 (1-b)\right] =$$

$$= \left[C_{11}^1 - C_{21}^1\right] a + \left[C_{12}^1 - C_{22}^1\right] (1-a) + \left[C_{21}^2 - C_{11}^2\right] b + \left[C_{22}^2 - C_{12}^2\right] (1-b)$$

Substituint els valors de C_{ij}^k tenint en compte l'expressió de la funció de cost de (8.D) i operant s'obté fàcilment:

$$A = \frac{1}{2(\alpha+\beta)^2} \left[\beta (z_2 - z_1)(b-a) - (\alpha+\beta)(x_2 - x_1)\right] (x_2 - x_1)$$

De manera similar tindrem:

$$B := \beta_3 - \beta_1 + \beta_4 - \beta_2 =$$

$$= \frac{1}{2(\alpha+\beta)^2} \left[\alpha (x_2 - x_1)(d-c) - (\alpha+\beta)(z_2 - z_1)\right] (z_2 - z_1)$$

En conseqüència:

$$- A - \frac{b-a}{d-c} B = \frac{-1}{(d-c)(\alpha+\beta)} \Big[(z_2-z_1)(x_2-x_1)(b-a)(d-c) - $$
$$- (x_2-x_1)^2(d-c) - (z_2-z_1)^2(b-a) \Big]$$

i, evidentment:

$$- \frac{d-c}{b-a} A - B = \frac{-1}{(b-a)(\alpha+\beta)} \Big[(z_2-z_1)(x_2-x_1)(b-a)(d-c) - $$
$$- (x_2-x_1)^2(d-c) - (z_2-z_1)^2(b-a) \Big]$$

En aquest model podem establir el següent resultat:

Proposició 8.5. Per qualsevol conjunt de probabilitats subjectives que puguin mantenir els agents sobre l'estat de la natura, representades per {a,b,c,d}, es poden dissenyar mecanismes directes que siguin eficients ex post.

En efecte: per la proposició 7.13 sabem que si $\frac{b-a}{d-c} < 0$, podem trobar amb seguretat mecanismes directes eficients ex post. Ens queda, per tant, l'anàlisi de la situació en què el signe de quocient sigui positiu, és a dir:

(1) si b-a<0 i d-c<0

(2) si b-a>0 i d-c>0

Cas (1):

Es evident que en aquesta situació tenim:

$$(z_2-z_1)(x_2-x_1)(b-a)(d-c)-(x_2-x_1)^2(d-c)-(z_2-z_1)^2(b-a)>0$$

d'on:
$$\left.\begin{array}{l} -A-\frac{b-a}{d-c}B \geq 0 \\ \\ -\frac{d-c}{b-a}A - B \geq 0 \end{array}\right\}$$

Per tant, els lemes 7.16 i 7.17 ens asseguren l'existència de mecanismes directes eficients ex post.

Cas (2):

Per a poder aplicar igualment els lemes 7.16 i 7.17 ens cal demostrar que:

$$(z_2-z_1)(x_2-x_1)(b-a)(d-c)-(x_2-x_1)^2(d-c)-(z_2-z_1)^2(b-a)<0$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{per tot } a,b,c,d\in[0,1] \quad \text{amb } b-a\in[0,1] \\ c-d\in[0,1] \end{array}\right\}$$

Podem establir la no positivitat de l'expressió anterior estudiant les corbes de nivell de la funció:

$$f(b-a,d-c):= (b-a)(d-c) - \frac{k}{h}(b-a) - \frac{h}{k}(d-c)$$

on, per comoditat, hem escrit: $h:=x_2-x_1\geq 0$

$k:=z_2-z_1\geq 0$

evidentment constants.

Per $b-a \neq \frac{h}{k}$, l'equació $f(b-a,d-c)=Ct$ defineix implícitament $d-c$ en funció de $b-a$. Les corbes de nivell de la funció $f(b-a,d-c)$ són hipèrboles equilàteres amb la discontinuïtat essencial situada a $b-a=\frac{h}{k}$ i amb asímptota en $d-c=\frac{k}{h}$, excepte per $Ct=-1$, on és la recta $d-c=\frac{k}{h}$:

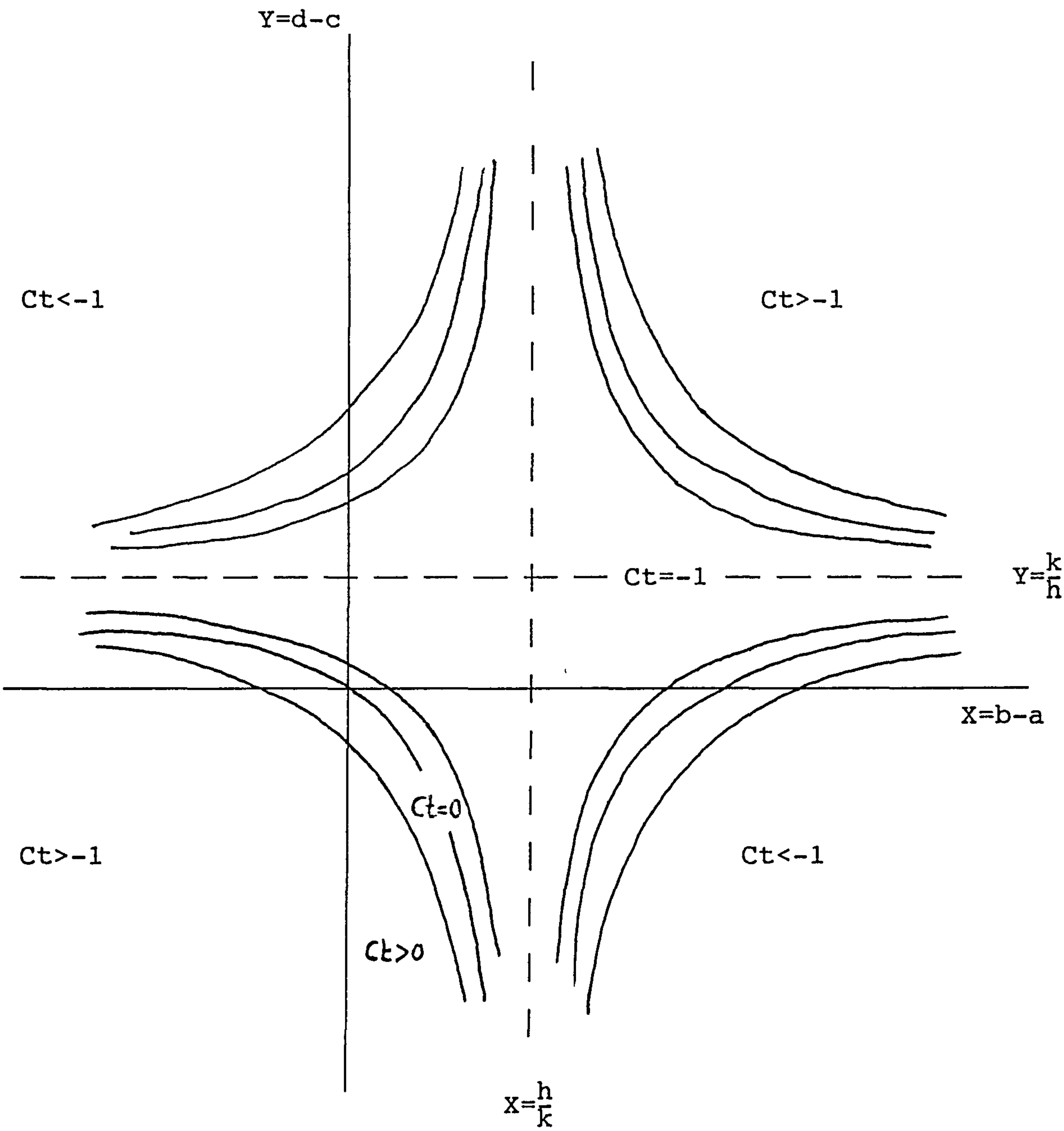

Figura 6

Ens interessa veure que cap de les corbes de nivell de la funció:

$$f(X,Y) = XY \frac{k}{h} X - \frac{h}{k} Y$$

amb $C_t>0$ passa pels punts de la forma (X,Y) amb $X,Y\in[0,1]$. Hem escrit, com en la figura 6:

$$X:=b-a \qquad Y:=d-c$$

notació més habitual en el context en què estem fent el raonament.

Això és evident pel que fa a les branques decreixents de les hipèrboles amb $Ct>-1$, ja que, com es pot comprovar fàcilment, per $Ct=0$ la corba passa per l'origen de coordenades, i per $Ct>0$ la hiperbòle no té cap punt en el primer quadrant.

Ens queda per demostrar que les branques creixents no tenen punts situats al quadrat $[0,1]x[0,1]$ si $Ct>0$. Però, com es pot veure al gràfic, aquestes branques s'obtenen per $X>\frac{h}{k}$ i $Y>\frac{k}{h}$; per tant:

si $\frac{h}{k} > 1$ llavors $X>1$

si $\frac{k}{h} > 1$ llavors $\frac{h}{k} <1$ de manera que $Y>1$

si h=k el punt d'intersecció dels eixos de les hipèrboles és justament el punt (1,1), i evidentment tot el quadrat $[0,1]x[0,1]$ estarà situat a la zona en què $Ct \leq -1$.

Per últim, falta veure el valor de $f(X,Y)$ si $X=\frac{h}{k}$, punts en què l'estudi precedent no es pot aplicar. Però aquí tindrem:

$$f(X,Y) = \frac{h}{k} Y - \frac{k}{h} \frac{h}{k} - \frac{h}{k} Y = -1 < 0$$

i podem concloure que, en qualsevol cas:

$$f(b-a,d-c) < 0 \quad \text{per tot } a,b,c,d \quad \text{amb } b-a,d-c \in [0,1]$$

de manera que podem assegurar també l'existència de mecanismes directes eficients ex post.∎

Capítol 9

NEGOCIACIONS SEQUENCIALS

9.1. Mecanismes de negociació amb diversos períodes

Dedicarem aquest capítol a la consideració de mecanismes de negociació que tinguin més d'un període, enllaçant d'aquesta manera amb la discussió començada al capítol 4, on presentàvem els models utilitzats més habitualment en una negociació.

L'anàlisi d'un model de negociació utilitzant un mecanisme d'aquest tipus presenta un avantatge important respecte als mecanismes d'un sol període, perquè permet considerar situacions de negociació més properes a les que, en gran part, tenen lloc a la vida real. En efecte, és freqüent, sobre tot quan l'entorn econòmic es limita a la presència de dos agents, observar negociacions amb regles que consenteixen un seguit de converses entre els agents abans d'arribar a un acord, o decidir que no se'n pot establir cap.

L'estudi de negociacions amb diverses rondes de comunicació entre els agents, és especialment interessant en el cas que aquestes tinguin lloc en un marc d'informació incompleta. D'aquesta manera es poden construir models que posin de manifest, explícitament, la importància d'un dels propòsits aparents de les diverses rondes: adquirir informació addicional, deduïda del comportament dels adversaris durant les mateixes. En general, s'acostuma a modelitzar aquest procés d'informació des d'una òptica bayesiana, transformant les funcions de creença que mantenen els agents, en els successius períodes, amb l'ajut del teorema de Bayes (sempre que sigui possible, és a dir, mentre la negociació no arribi a un punt que l'agent considerava de probabilitat nul.la). En aquest cas es parla de mecanismes bayesians.

D'altra banda, l'anàlisi d'aquests models de negociació té també inconvenients. En particular, es tracta d'estudis menys generals que els què permeten els mecanismes d'un sol període, degut a que el principi de revelació no s'hi pot aplicar directament[1]. És per això que, molt sovint, quan es vol modelitzar una situació de negociació

1. No obstant, cridem l'atenció respecte a alguns estudis recents on es relacionen els dos enfocaments. En particular, citem el d'Ausubel i Deneckere (1989), que analitzen una negociació per a transferir un objecte indivisible, quan només una de les parts té informació completa. En el seu article troben una caracterització dels equilibris d'una certa família de negociacions seqüencials, en termes de solucions de mecanismes directes compatibles respecte a incentius i individualment racionals.

amb diversos períodes, es proposa un model concret de negociació, estudiant el seu resultat a través del càlcul dels equilibris del joc associat al mecanisme, - l'únic tipus d'estratègies que utilitzaria un jugador racional -. Les seves conclusions, tot i dependre de les regles específiques fixades, poden ser un bon complement de les obtingudes amb l'ajut de mecanismes directes compatibles respecte a incentius[2].

D'entre els mecanismes de negociació de diversos períodes, tenen especial interès els que s'utilitzen per a modelitzar negociacions de tipus seqüencial. És a dir, mecanismes que prescriuen que les diverses comunicacions dels agents - amb l'objectiu d'arribar a un acord - tinguin lloc de manera alternada. En cada període del joc induït pel dit mecanisme, es preveu un o diversos senyals creuats entre els agents, que aquests envien en un ordre

2. S'han fet diversos intents d'estudiar de manera conjunta els resultats d'una negociació arbitrada per mecanismes de més d'un període. El més significatiu és el de Cramton (1985), on s'analitza la negociació que pot tenir lloc per a transferir un sol objecte indivisible.
En el seu estudi utilitza un grup de mecanismes, que anomena "de revelació directe seqüencial" en els que el resultat de la negociació - donada per un preu, una distribució de probabilitats de què l'objecte sigui transferit, i el moment en que s'efectuaria la transacció - depenen d'una sola comunicació que cada agent faria al principi del joc. Els mecanismes que considera Cramton, a més a més de ser compatibles respecte a incentius i individualment racionals, han de ser "perfectes", per a poder representar negociacions amb diverses rondes. Aquesta última característica és la garantia que mai serà coneixement comú que el mecanisme induït en el temps està dominat per un altre mecanisme.
Però, com indica el mateix Cramton (cfr. op. cit., pp.166), en alguns supòsits les complicacions de càlcul són excessives per a permetre arribar a conclusions, inclús en una negociació tan senzilla com la que es proposa.

prèviament establert; de manera que cada un dels senyals sigui tramès i rebut per tots ells abans d'efectuar-se'n un altre. En funció d'aquests senyals, i de les regles del mecanisme, es determina si la negociació ha acabat, així com la utilitat dels jugadors.

Evidentment, també és possible estudiar el resultat de negociacions efectuades amb mecanismes seqüencials que només tinguin un període. En aquests mecanismes cada jugador tramet un únic senyal, però enlloc de fer-ho al mateix temps, com en el cas de les negociacions que hem considerat en capítols anteriors, és un dels jugadors, triat prèviament - element que és una part del coneixement comú del joc -, qui emet un senyal. Només després de donar-lo a conèixer, es tramet el missatge del segon jugador. No considerarem aquest tipus de mecanismes, ja que no incorporen, més que molt parcialment, l'aspecte d'adquisició de nova informació mencionat més amunt[3].

La família de mecanismes de negociació seqüencial més usual[4] és l'anomenada "d'ofertes alternades". En cada

---

3. Es pot trobar un estudi dels mecanismes de negociació seqüencials d'un sol període a Crémer i Riordan (1985), així com a Riordan (1984a), en el mateix marc del nostre treball. Veure també Riordan (1986), així com Crawford i Sobel (1982) en un model genèric de tramesa de senyals.

4. Hi ha força presentacions generals d'aquest tipus de mecanismes en la literatura recent. La majoria compara també els principals models estudiats. Veure, en paricular, els articles de Chatterjee (1985), Myerson (1985b), Sutton (1986), Roberts (1987), Rochet (1987), Rubinstein (1987), Wilson (1987) o Crésta (1988).

període del joc associat, el mecanisme preveu que un dels jugadors faci una oferta, que pot ser acceptada o rebutjada per l'altre agent. En el primer dels dos casos, el joc es dóna per acabat. Així mateix, el joc pot finalitzar sense acord, si el mecanisme estipula una durada màxima de la negociació - és a dir, si es disposa només d'un nombre finit de períodes -. En aquest cas, si es rebutja l'oferta de l'últim període, s'entén que els jugadors obtenen certes utilitats fixades prèviament, que podem identificar amb el punt de status quo[5].

En general, un mecanisme qualsevol d'aquesta família permet m ofertes successives de l'agent venedor, seguides de n contraofertes del comprador, i després el procés es repeteix. Aquesta descripció inclou les tres formes extensives més usualment analitzades a la literatura[6]:

---

5. Mencionem també l'existència d'altres estudis amb models un xic més complicats, en els que hi ha una tercera via per donar per acabada una negociació. En els mateixos es permet un altre tipus de comunicació, a més de l'oferta (o contraoferta) i de l'acceptació o rebuig: inclouen també la possibilitat de què, en el moment d'intervenir un agent, aquest decideixi abandonar les negociacions.
   Veure, en negociacions per a transferir un objecte indivisible, els articles de Perry (1986) (en un duopoli), així com els de Riley i Zeckhauser (1983), Gul, Sonnenschein i Wilson (1986) o Fudenberg, Levine i Tirole (1987) (suposant la presència de més d'un comprador per a explicar l'abandonament de les negociacions amb un cert agent en particular).

6. Aquestes famílies de mecanismes han estat utilitzades, sobretot, per a explorar els resultats d'una negociació per a transferir un objecte indivisible. Entre els estudis d'aquest tipus, mencionem els de Sobel i Takahashi (1983), Fudenberg i Tirole (1983), Cramton (1984), Fudenberg, Levine i Tirole (1985), Grosman i Perry (1986a), Chatterjee i Samuelson (1987), Black i Bulkley (1988), Gul i Sonnenschein (1988), Vincent (1989).
   Veure, igualment, els estudis de Baron i Besanko (1984b) o Gale (1987), que examinen diferents aspectes d'un entorn econòmic en el que s'admeten diverses negociacions seqüencials per parelles comprador-venedor.

(a) El venedor fa totes les ofertes [m=1, n=0].

(b) Venedor i comprador s'alternen en fer ofertes i contraofertes [m=n=1].

(c) El comprador fa totes les ofertes [m=0, n=1].

Evidentmentment, la descripció del mecanisme triat s'ha de completar detallant l'horitzó - finit o infinit - de la negociació, així com el què es considera una oferta vàlida en el context específic de la mateixa.

Les conclusions dels models de negociació definits a través d'aquestes famílies de mecanismes depenen, no solament de la forma extensiva triada, sinó també de l'especificació de les utilitats dels agents, pel que fa als acords a que es pugui arribar. Tot i que la concreció de les dites funcions depèn clarament del tipus de negociació estudiada, la majoria de models tenen una característica comuna. S'acostuma a atribuir als diversos jugadors, si el model seqüencial té més d'un període, tipus de funcions d'utilitat que suposin una certa impaciència per arribar a un acord. Aquest últim requisit suposa admetre, per exemple, que un jugador prefereixi un acord avui al mateix acord demà.

Una de les formes més habituals - encara que no l'única - de modelitzar les preferències dels agents respecte al temps, és la utilització de taxes de descompte constants. Una de les raons de més pes per a triar aquesta descripció és l'estudi de Fishburn i Rubinstein (1982). Aquests demostren[7] que les taxes de descompte constants són una representació vàlida, si les preferències dels agents respecte als resultats de la negociació es poden descriure per una ordenació (no necessàriament total) monòtona i contínua, i en què els agents exhibeixin un tipus d'impaciència per a arribar a un acord que es pugui expressar només en funció del temps transcorregut per a arribar al mateix, excepte pel que fa al resultat "no hi ha acord", considerat neutre en el temps.

En l'esperit de les consideracions anteriors, presentem a continuació un model concret de negociació seqüencial amb horitzó infinit per a la signatura d'un contracte, partint de la formulació general en el marc d'informació incompleta adoptada en el capítol 4.

7. Fishburn i Rubinstein (1982), pp. 680 i següents.

9.2. Formulació del model

Tal com mencionàvem al capítol 2, una negociació per a intercanviar una certa quantitat q, per un preu global P, es pot considerar també com una negociació per a obtenir un cert vector d'utilitats (u,v), d'entre tots els factibles. Recordem que, en el cas d'informació completa, la màxima utilitat que poden assolir les empreses, conjuntament, ve donada per la maximització de l'excedent total de la seva relació.

En presència d'informació incompleta es pot fer un raonament similar: si $(x,z) \in T_1 x T_2$ és el vertader estat de la natura, el dos agents poden obtenir, negociant, una utilitat màxima conjunta de:

$$\bar{S}(x,z) := S(\bar{q}(x,z),x,z) = I(\bar{q}(x,z),z) - C(\bar{q}(x,z),x)$$

on, com en capítols anteriors, $\bar{q}(x,z) := \text{argmax}_q S(q,x,z)$.

Així doncs, en qualsevol negociació, el conjunt d'utilitats factibles per ambdós agents és:

$$F := \{ (u,v) \in R^2 \ / \ u+v \leq \bar{S}(x,z) \ , \ u \geq 0, \ v \geq 0 \}$$

Les dues últimes restriccions del conjunt F són degudes a la racionalitat individual de les empreses: no es podrà signar un acord que no les compleixi.

En qualsevol negociació establerta en termes d'utilitats sobre el conjunt F, haurem de tenir present que els agents poden no conèixer amb certesa la vertadera frontera del conjunt factible. Això és degut a la manca d'informació, ja que l'esmentada frontera depèn de l'estat real de la natura quan es faci la negociació. No obstant, podem tenir en compte les següents observacions:

<u>Observació 9.1</u>. La funció $\bar{S}(x,z)$, que defineix la part incerta de la frontera de F, és contínuament diferenciable, creixent respecte a z i decreixent respecte a x.

Aquest resultat és conseqüència de les propietats que suposem a les funcions I i C, així com a les que, per la seva definició, té $\bar{q}$: $\bar{S}$ és contínuament diferenciable per ser-ho I, C i $\bar{q}$, i es compleix:

$$\bar{S}_x(x,z) = I_q(\bar{q}(x,z),z)\bar{q}_x(x,z) - C_q(\bar{q}(x,z),x)\bar{q}_x(x,z) - C_x(\bar{q}(x,z),x) = - C_x(\bar{q}(x,z),x) < 0$$

$$\bar{S}_z(x,z) = I_q(\bar{q}(x,z),z)\bar{q}_z(x,z) + I_z(\bar{q}(x,z),z) - C_q(\bar{q}(x,z),x)\bar{q}_z(x,z) = I_z(\bar{q}(x,z),z) > 0$$

on, en ambdós casos, l'última igualtat es dedueix de la definició de $\bar{q}$ (equació (5.E)). ▮

Per tant, el conjunt factible F, gràficament, serà de la forma:

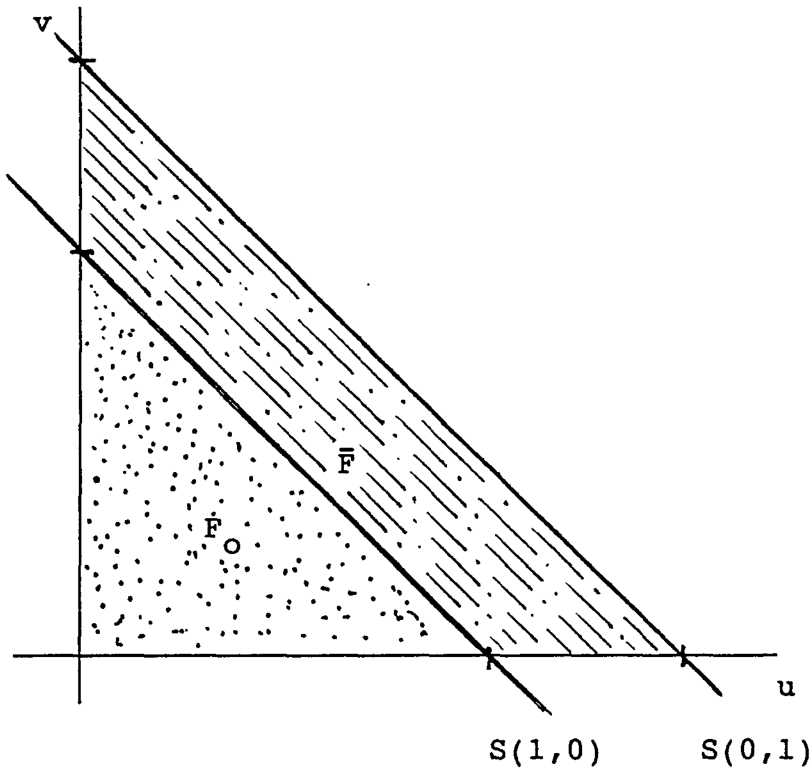

Figura 7

Contindrà sempre els punts del conjunt:

$$F_o := \{ (u,v) \in R^2 \;/\; u+v<S(1,0),\ u\geq 0,\ v\geq 0 \}$$

i la seva frontera és una de les rectes compreses entre $u+v \leq S(1,0)$ i $u+v \leq S(0,1)$.

<u>Observació 9.2</u>. Cap acord de distribució de la utilitat entre els dos agents serà un punt de F_o.

Aquesta és una observació força òbvia. Per exemple, si l'agent 2 estés disposat a acceptar una oferta $(u,v)\in F_o$, també acceptaria $(\bar{S}(1,0)-v,v)$, que li dóna la mateixa utilitat que l'oferta anterior, i en canvi augmenta el benefici de l'agent 1. Així doncs, qualsevol estratègia que indueixi a oferir un punt de F_o serà una estratègia dominada en qualsevol joc de negociació sobre F. ∎

Per tant, qualsevol contracte negociat implicarà un repartiment de la utilitat segons un punt de la zona que en la figura 7 hem denominat $\bar{F}$:

$$\bar{F} := \{ (u,v)\in R^2 \ / \ \bar{S}(1,0)\leq u+v\leq \bar{S}(0,1) \ , \ u\geq 0, \ v\geq 0 \}$$

Per aquest conjunt de punts podem establir el següent resultat:

<u>Observació 9.3</u> Qualsevol punt de $\bar{F}$ determina de manera única els termes d'un contracte.

En efecte, un punt qualsevol $(\bar{u},\bar{v})\in\bar{F}$, està situat sobre una única recta de les que formen $\bar{F}$ (cfr. l'observació 1). En conseqüència, podem determinar de manera única un parell $(\bar{x},\bar{z})\in T_1 x T_2$ tal que $\bar{u}+\bar{v}=\bar{S}(\bar{x},\bar{z})$.
El contracte a signar serà el següent: intercanviar la quantitat $\bar{q}(\bar{x},\bar{z})$, pel preu total que donaria a ambdós agents les utilitats $\bar{u}$ i $\bar{v}$, <u>si el parell $(\bar{x},\bar{z})$ fos el vertader estat del mercat</u> quan es signa el contracte:

$$P = \frac{1}{2}\left[\bar{u} - \bar{v} + I(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),\bar{z}) + C(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),\bar{x})\right]$$

És immediat comprovar que amb el contracte $\{\bar{q},P\}$ cada agent obté l'utilitat acordada, si el mercat està realment en les condicions $(\bar{x},\bar{z})$. Per exemple, per l'empresa 1:

$$P - C(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),\bar{x}) = \frac{1}{2}\left[\bar{u} - \bar{v} + \bar{S}(\bar{x},\bar{z})\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\bar{u} - \bar{v} + \bar{u} + \bar{v}\right] = \bar{u} \quad \blacksquare$$

Observem que el contracte definit a 9.3 no proporciona el parell $(\bar{u},\bar{v})$ com a <u>utilitats reals</u> de les empreses si el vertader estat de la les dues bandes del mercat no coincideix amb $(\bar{x},\bar{z})$. Si denotem per (x,z) els les vertaderes característiques de les empreses, aquestes obtindran:

<u>empresa 1</u>:

$$P - C(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),x) = \bar{u} + \left[C(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),\bar{x}) - C(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),x)\right]$$

<u>empresa 2</u>: (9.A)

$$I(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),z) - P = \bar{v} + \left[I(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),z) - I(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),\bar{z})\right]$$

És a dir, les utilitats reals són la correcció de les que s'han atorgat en la negociació, d'acord amb un factor additiu que pot ser positiu (quan $\bar{x}>x$ o $\bar{z}<z$, respectivament) o negatiu.

9.3. Els termes de la negociació

Per a dur a terme la negociació seqüencial en el model que acabem de presentar, utilitzarem un mecanisme de la família d'ofertes alternades. Es tracta, com es pot deduir de la secció anterior, d'un model à la Rubinstein[8], perquè la negociació s'estableix en termes d'utilitat, i el contracte n'és la conseqüència.

En aquesta secció donarem una descripció general de la negociació, considerant, en fer-la, que hi ha informació incompleta en ambdós costats. Si la informació incompleta és asimètrica, el mecanisme descrit es pot adaptar fàcilment, com veurem en l'apartat següent.

Descriurem el joc pel cas, més general, en què ambdós negociadors tinguin dret a fer ofertes - mecanisme del tipus (b) mencionat a la secció 9.1 -. A partir d'aquesta descripció és molt senzill deduir-ne la mecànica del joc en què un dels dos agents faci totes les ofertes.

Considerarem doncs un mecanisme en què un dels dos agents comença el joc fent una oferta, que el seu oposant

---

8. Veure Rubinstein (1985), així com Harris (1985). El model que presentem aquí difereix del de Rubinstein, essencialment, en els paràmetres que es consideren coneixement privat dels agents, ja que en l'estudi de Rubinstein la manca d'informació es refereix a les taxes de descompte dels dos agents que estableixen la negociació.

pot acceptar o rebutjar. En el primer cas el joc es dóna per acabat, i el càlcul de la quantitat a intercanviar i del preu de la transacció es determinen de la manera indicada en l'observació 9.3. Si l'agent rebutja l'oferta, s'obre un nou període de negociacions, que s'inicia amb la seva contraoferta, que el primer agent pot igualment acceptar o no. Aquest procés continua, fent ofertes alternativament un i altre agent, fins que s'arribi a un acord. No obstant, cada nou període, ja que significa un retard, representa per ambdós negociadors un decrement de la seva utilitat, que inclourem en el model a través d'un factor de descompte $\alpha \in (0,1)$ comú conegut pels dos agents.

En aquest joc una <u>oferta</u> en una etapa consistirà en indicar el nivell d'utilitat que l'agent reclama en l'acord. Una resposta afirmativa a una oferta ha d'estar acompanyada de la tria d'un element del conjunt F que tingui com a primera component (respectivament, la segona si l'agent que fa l'oferta és el segon) el nivell ofert. En aquest cas tindrem determinat el parell d'utilitats (u,v) i per tant, els termes del contracte entre les empreses.

Si s'arriba a un acord sobre un parell $(\bar{u},\bar{v})$ - per l'observació 9.2, serà un element de $\bar{F}$ - en el moment t, considerarem que els agents han negociat una utilitat descomptada de $(\alpha^t \bar{u},\alpha^t \bar{v})$. Si el parell $(\bar{u},\bar{v})$ està sobre la recta $u+v=\bar{S}(\bar{x},\bar{z})$ i el vertader estat de les dues bandes del mercat és el parell (x,z), les utilitats reals dels agents seran:

$$U := \alpha^t \, \bar{u} + \alpha^t \left[C(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),\bar{x}) - C(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),x) \right]$$

$$V := \alpha^t \, \bar{v} + \alpha^t \left[I(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),z) - I(\bar{q}(\bar{x},\bar{z}),\bar{z}) \right]$$

Una <u>estratègia</u> per a un agent en aquest joc serà un conjunt de funcions indicant l'oferta a fer, o la resposta a donar a una contraoferta, en cada període del joc. Considerarem que la negociació comença en $t=0$, de manera que inclourem el zero en el conjunt N dels numeros naturals. Per l'agent que fa la primera oferta, les funcions que composen la seva estatègia tindran la forma següent:

$f_t : K^t \longrightarrow K$ per t parell

$f_t : K^{t+1} \longrightarrow R$ per t imparell

on $K := [0, \bar{S}(0,1)]$ representa el conjunt de nivells d'utilitat que pot anunciar un agent.

$R := [0, \bar{S}(0,1)] \cup \{No\}$ són les possibles respostes a una contraoferta: acceptar-la i triar un nivell d'utilitat (un element de K) o bé rebutjar-la.

K^t és el producte cartesià de t vegades K: la successió d'ofertes i contraofertes que s'han fet fins al moment t. Per conveni considerarem $K^o = \phi$.

Cada una d'aquestes estratègies té en compte explícitament la "història" del joc fins al moment t-1, a l'hora de prendre una decisió en el moment t. Així doncs, f_o indica un element $u_o \in K$ com a oferta inicial, una resposta $f_1(u_o,v_1)$ a la contraoferta v_1 del seu oposant si l'oferta inicial ha estat rebutjada, etc.[9].

De manera similar, l'agent que té com a primer moviment en el joc la resposta a una oferta del seu adversari, pot caracteritzar cada una de les seves estratègies per un conjunt $\{g_t\}_{t\in N}$ de la mateixa forma que l'anterior, però intercanviant els papers de t parell i imparell:

$$g_t : K^{t+1} \longrightarrow R \quad \text{per t parell}$$

$$g_t : K^{t} \longrightarrow K \quad \text{per t imparell}$$

Al tractar-se d'un joc amb informació incompleta, el concepte de solució adient és el d'equilibri de Nash en sentit bayesià. Sense donar una definició formal, força

9. En aquesta interpretació hem suposat que l'agent 1 començava el joc. Substituint les u_i per v_i i les v_i per u_i tindrem formulada la situació contrària.

complicada en aquest context, podem dir que un conjunt d'estratègies[10]

$$\{\{f_t(x)\}_{t\in N}, \{g_t(z)\}_{t\in N}\} \text{ per cada } (x,z)$$

estan <u>en equilibri de Nash-Bayes</u> si cada una d'elles és la millor resposta a l'estratègia utilitzada per l'altre jugador, mesurada en termes d'utilitat esperada, respecte a les creences sobre la distribució de tipus, desconeguts, de l'oposant. En altres paraules, si, d'entre les estratègies disponibles, cap li pot proporcionar una utilitat esperada més gran, donada l'estratègia del seu adversari.

10. o bé $\{\{g_t(x)\}_{t\in N}, \{f_t(z)\}_{t\in N}\}$, per cada (x,z), si és l'agent 2 qui fa la primera oferta.