Universitat Autònoma de Barcelona

Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor

José Abraham de la Fuente Pérez

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals
Doctorat en EDUCACIÓ

Títol de la tesi:

Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor

Nom i signatura del Doctorand: José Abraham de la Fuente Pérez

Nom i signatura del Director: Jordi Deulofeu Piquet

BELLATERRA, setembre de 2016

Dr. Jordi Deulofeu Piquet del Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, amb seu a la Facultat de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona.

FAIG CONSTAR QUE:

La investigació realitzada sota la direcció del signant/s per al Llicenciat José Abraham de la Fuente Pérez, amb el títol "Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas. El rol del conocimiento del profesor", reuneix tots els requeriments científics, metodològics i formals exigits per la legislació vigent per la seva Lectura i Defensa pública davant la corresponent Comissió, per la obtenció del Grau de Doctor en Educació per la Universitat Autònoma de Barcelona, per tant considerem procedent autoritzar la seva presentació.

Bellaterra, a 16 de setembre de 2016

Signat, Jordi Deulofeu Piquet

Universitat Autònoma de Barcelona

Construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas

El rol del conocimiento del profesor

Autor: Abraham de la Fuente

Director: Jordi Deulofeu

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals

Universitat Autònoma de Barcelona

Tesis Doctoral

BELLATERRA, setembre de 2016

Para Helena, la persona que me ha cambiado la vida. Y para Júlia, que antes de llegar ya me la estaba cambiando. Espero que en el mundo al que llegues otra educación ya sea posible.

Mis más sinceras disculpas.

Aún recuerdo nítidamente el día en que decidí comenzar a escribir esta tesis doctoral. Estábamos de viaje por Huesca. Mientras yo especulaba sobre lo bonito que sería todo aquel paisaje si estuviera nevado, mi compadre Javier Moreno me iba dando uno de sus discursos. Me decía que tenía mucho que aprender. Que antes de seguir hablando sobre educación matemática y de seguir dando discursos a las familias de nuestro centro sobre la metodología que usábamos, me tenía que poner a estudiar. Creo que simplemente se sentía solo siendo doctor en astrofísica y quería a su lado alguien como él. Por lo menos, después del lío en que me metiste, has estado siempre cerca para apoyarme. Y no me refiero solo a la ayuda con el inglés, que ha sido mucha. Tus reflexiones, tus críticas, tus ganas de mejorar y de innovar tienen mucho que ver con que finalmente esta tesis esté acabada. Gracias.

El caso es que, a la vuelta de Huesca, no tardé ni un par de días en hacer caso a Javi y acudir a mi gurú de la educación y gran amigo del que me encanta presumir: Anton Aubanell. Anton, en muchos aspectos, ha sido mi padre profesional. Sus sabios consejos siempre han sido de los mejores que me han dado. Y en esta ocasión, su consejo me llevó a hablar con Jordi Deulofeu. Me dijo que Jordi sería la persona adecuada para dirigirme. Y sí, acertó. En todos estos años la puerta del despacho de Jordi ha estado siempre abierta para mí. Su implicación ha sido constante y ha estado ahí en las duras y en las maduras, porque en tres años de tesis hay momentos para todo. En este tiempo creo que hemos forjado una amistad de esas que son difíciles de olvidar. A los tres os tengo mucho que agradecer. Sin vuestras palabras, sin vuestro apoyo, sin vuestros gestos, esta tesis no hubiera salido adelante.

Por eso, si estás enfadado conmigo porque por algún tipo de compromiso te ha tocado leerte estas 323 páginas, ya puedes ponerles cara a algunos de los culpables de tener este tocho entre tus manos. Aquí empiezan mis más sinceras disculpas (y los mil agradecimientos).

Aunque las disculpas no deberían ser solamente mías, y no sólo para ti, el lector que tiene entre sus manos esta densa lectura. Si los tres amigos que he mencionado anteriormente de verdad quieren ser dignos de ese calificativo, sin duda deberían estar ahorrando para ayudarme a pagar una cena "donde ella diga" a Helena Erviti. De alguna forma habrá que compensar todo el tiempo que me ha quitado de su dulce compañía esta investigación. Creo que nunca podré acabar de agradecerte toda la paciencia y todo el apoyo que me has dado no sólo mientras escribía esta tesis. Seguro que, además de Jordi, eres la persona que más veces y con más cariño te has leído estas páginas. Has hecho tantas aportaciones, tantos comentarios y tantas correcciones que a veces dudo de si deberíamos firmar los dos juntos esta memoria. En fin, perdóname por todos esos discursos en la selva, en la playa o allá donde se me ocurriesen las ideas. Gracias por escucharme siempre con tanta paciencia y cariño.

Por orden de daño infligido, debo continuar disculpándome con las principales víctimas de esta investigación (y de mis chapas): mis amigos y compañeros del Departamento de Matemáticas del colegio. Gracimas a todos. A los del pasado, a los del presente y a los del futuro: Andreu Raig, Marc Rafart, Neus Català, Marta Ferrer, Pedro Aznar, Javier Moreno, Eulàlia Rovira, María Lluïsa Saurí, Xavier Montagut, Marta Adán, Juan Mesa, Andrea Richter, Laura Morera y Edu Polls.

Todos vosotros estáis presentes de alguna manera en esta memoria. Y algunos me habéis oído hablar tanto de esta tesis que seguramente ya sabéis todo lo que pone. Siento haberos quitado el placer de leer este pequeño informe. Bueno, y claro, especial mención a ese profesor de física que siempre me ha hecho reflexionar con sus quejas sobre el nivel de matemáticas. Fíjate si te respeto, Andreu, que para contestarte he escrito toda una tesis doctoral.

En el mismo sentido, hay otro equipo de profesoras que merecen unas palabras y unas disculpas: los betacampers. Andrea Richter, Sergi del Moral, Helena Erviti, Jordi Font, Laura Morera, Guillermo Pérez, Tresa Marimon, Sergi Múria, Kauthar Boukafri, Salvador Chiva, Carla Fontanella, Rai Carreras y todos los que estuvisteis en el primer betacamp. No hubiera podido desatomizar el álgebra sin vosotras. Mis disculpas por la paliza que os di durante esos días.

No puedo olvidarme tampoco de los miembros del grupo de didáctica de la UB: Sergi Múria, Sergi del Moral, Anton Aubanell, Salvador Chiva, Andrea Richter, Laura Morera, Jordi Font, Alberto Herrero, Lluis Mora, Sergio Belmonte, Antoni Benseny, Paula López, Laia Miró, Raúl Fernández, Sílvia Margelí y Francesc Massic, lo siento por el abandono de los últimos meses. Pero volveré, es una amenaza.

De todas estas profesoras y profesores que acabo de mencionar hay tres por los que siento una especial admiración. Gracias por dejarme entrar en un espacio tan íntimo como son vuestras clases, con vuestros alumnos. Siento mucho que la cámara os haya perturbado durante un curso entero, y os agradezco infinitamente vuestra paciencia, comprensión y colaboración. Sí, a los demás os grabé en reuniones, pero entendedme, no es lo mismo. Y qué decir de ti Rafa, siempre a punto para echar una mano donde haga falta, y ya sabes que no hablo sólo de este año. Siempre lo diré: eres el verdadero pilar de ese colegio.

Agradezco también a los alumnos del centro su colaboración. Muchos de ellos se han ocupado pacientemente de ayudar a los profesores a instalar y desinstalar la cámara. Han actuado con total normalidad delante de la cámara, aceptando que sus profesores solo querían mejorar. Es posible que no sean conscientes de hasta qué punto nos han ayudado, y de todo lo que nosotros también hemos aprendido con ellos. Vosotros hacéis que todo esto valga la pena. Dristhi, tú te mereces unas palabras especiales por la inspiración que, sin saberlo, has supuesto en muchas ideas que finalmente escribí en esta tesis.

Y siguiendo con el centro, tengo que agradecer especialmente a la directora, Julie Harris, toda la ayuda y la confianza que ha depositado en mí todos estos años. Nunca he encontrado en ti nada más que facilidades. No voy a olvidar nunca ni nuestras conversaciones sobre pedagogía y observaciones en el aula ni sobre educación en general, pero mucho menos nuestros bailes. ¡Que sigan muchos años! Y hablando de bailes, Pedro, creo que teníamos una apuesta pendiente. ¿No decíamos que si acababa la tesis me pagabas una cena donde yo quisiera? Pues aquí estamos. A ti no te pido perdón por nada, es lo que tiene la confianza.

No me olvido tampoco de la chapa que os he dado al resto de amigos y amigas del claustro de profesores: Silvia, Sinéad, Rhona, Justin, Geraldine, Isabelle, Jordi, Toni, Gemma y un largo etcétera. Gracias por aguantarme estos años, y no sólo los de la tesis. Agustín, deberías ir aprendiendo esto de pedir perdón por las chapas, mucha gente te estaría agradecida. Lo que no entiendo es cómo aún así todo el mundo te quiere tanto, será por tus besos y abrazos de buena mañana, que hacen que todo se te perdone. Tengo mucho que aprender.

Laura y Anna, ya pensabais que no os iba a decir nada, ¿verdad? Con lo que habéis tenido que aguantar día sí y día también en el coche, camino al trabajo, aproximadamente a las 7:20 cada día. Me encantan esos ratitos con vosotras. Y mira, si no hubiera escrito un doctorado, a lo mejor no os lo hubiera dicho nunca. Pero bueno, seguro que lo sabíais de sobras. A vosotras también os he hecho aguantar algunos discursillos y encima a unas horas en las que mi lucidez los debía hacer todavía más pesados. Pero no sé si disculparme, me parece que a vosotras sí os ha gustado escucharme, ¿a que sí? ¡Necesito que para alguien todo esto no haya sido una pesadilla!

Para ti, Natali, las disculpas van por el abandono en nuestra flamante carrera como aspirantes a economistas del estado. Los dos sabíamos que ahí no había futuro para mí, lo mío es la educación. Gracias por todos estos años de amistad incondicional, me has sacado de más de una. Y hablando de amistades incondicionales, Mireia, muchas gracias por escucharme y comprenderme en cada uno de los giros que le he dado a mi vida, que han sido unos cuantos.

A la familia, y en especial a mis padres, también tengo mucho que decirles. Vayan por delante todos los agradecimientos del mundo por los valores que me habéis transmitido durante toda mi vida. Perdón por todos los sacrificios que habéis tenido que hacer para que yo pueda llegar a escribir estas líneas. Sé que han sido muchos, y solo espero que hayan valido la pena y que os sintáis un poco orgullosos. Mari Jo, Jerónimo, a vosotros os ha tocado sufrir solo el final del camino de esta tesis, pero os lo he hecho pagar bien con el último encierro en vuestra casa. Aun así, nunca he visto una mala cara por vuestra parte, sino todo lo contrario, encima hacíais el esfuerzo por enteraros de qué iba esta tesis. Con estas familias, uno no puede pedir más.

También quiero agradecer a todos los miembros del Departamento de Educación de la UAB su calurosa acogida durante estos años y a los del departamento homólogo en la University of East Anglia durante los cuatro meses en que os invadí. En especial, me gustaría mencionar a Tim Rowland, por su paciencia y sus consejos, a Josep María Fortuny, por el cariño que me ha procesado, a Edelmira Badillo, por las infinitas ayudas que me ha proporcionado, a Núria Planas, por darme la oportunidad de trabajar como profesor en la universidad, a Laura Morera, por escribir el artículo de SUMA que inspiró el tema de la tesis y a Núria Gorgorió, por incluirme en su proyecto de investigación. Proyecto que, por cierto, me lleva a pedir mis últimas disculpas. Unas disculpas para unas víctimas colaterales que ni siquiera saben que lo son. Los pasajeros del vuelo VY1821, del 31 de julio de 2016. Me esforcé tanto en desear un retraso de un par de horas de ese vuelo que lo conseguí. Y sí, gracias a todos vosotros pude acabar de escribir la tesis a tiempo para poder disfrutar de un maravilloso viaje a Islandia con Helena, Sergi y Andrea. Me disculparía con vosotros por la paliza que os di explicando parte de la tesis pero: 1) podría haber sido peor; 2) era Sergi quien preguntaba y 3) en el fondo sé que os gustaba.

En fin, si algún damnificado se ha quedado sin su merecida disculpa, espero me perdone. Lo que sí puedo prometer es que ningún animal ha sufrido durante la producción de esta investigación. Al menos ellos han sido libres. Ahora en serio, gracias a todos los que de alguna manera habéis estado en el camino hasta aquí.

ÍNDICE

PRIMERA PARTE

INTRODUCCIÓN

La introducción de esta memoria se divide en dos partes. Comienza con una justificación personal de los motivos que me llevaron a realizar esta investigación. De la justificación, escrita en tono un tono personal y con un lenguaje cercano, emergen los primeros elementos que nos llevan a discriminar los apartados que tendrá la fundamentación teórica que apoya nuestra investigación.

La segunda sección establece la pregunta de investigación y los objetivos que nos deben llevar a contestar a esta pregunta.

1. Justificación personal

El presente trabajo de investigación, que se enmarca dentro del programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, es el fruto de las reflexiones y las inquietudes surgidas de mi experiencia como profesor de secundaria en un colegio de Barcelona durante 10 años.

Es por eso que creo que es importante comenzar este trabajo desarrollando las reflexiones que me llevaron a comenzar la investigación. Lo haremos usando un lenguaje cercano, propio de esas primeras preguntas que me hice al iniciar el programa de Doctorado.

Mi interés por la problemática en la educación y en particular por el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha sido cultivado por las vivencias como profesor de matemáticas en secundaria y bachillerato. Para explicar con claridad la cuestión que me llevó a la decisión de comenzar esta investigación, debo explicar una anécdota. Una anécdota que seguro será cercana para la mayoría de los lectores que hayan estado alguna vez en una reunión de evaluación. ¿Cuántas veces los profesores de matemáticas habremos oído quejarse al profesor de física de que sus alumnos no saben matemáticas? ¿Y cuántas veces diríamos de esos alumnos que son buenos alumnos en matemáticas? En efecto, he oído esta queja muchas veces. Y sí, el profesor de física había sido profesor de matemáticas de esos mismos alumnos más de una vez. Así que la primera pregunta que nos viene a la cabeza es: ¿qué ocurre con los alumnos que saben matemáticas una vez salen del aula de matemáticas?, ¿se olvidan de ellas?

Estas inquietudes propias junto con la suerte de pertenecer a un colegio en el que el equipo de profesoras y profesores del departamento de matemáticas puede reunirse cada semana para hablar de matemáticas y para reflexionar sobre cómo mejorar nuestra docencia, consiguieron que empezase a hilar preguntas cada vez más concretas. Por ejemplo: ¿a qué se refiere el profesor de física cuando dice que "sus alumnos no saben matemáticas"? Después de muchas conversaciones con él observé como la mayoría de las veces en realidad se estaba refiriendo a que los alumnos no sabían simplificar expresiones algebraicas, resolver ecuaciones, cambiar el término principal de una fórmula por otro, etc. En resumen, la mayoría de las veces su preocupación era la habilidad para trabajar con el lenguaje algebraico en algunas situaciones concretas.

En este punto, debo aclarar que en nuestro colegio no usamos libros de texto desde hace ya seis cursos. Y, a propósito del lenguaje algebraico, esto nos ha permitido diseñar unidades didácticas que no siguen el orden habitual. Por ejemplo, no existe ninguna unidad didáctica llamada "álgebra" o "ecuaciones de primer grado". Tenemos la intención de que los profesores ayuden a los alumnos a construir el lenguaje algebraico inherente a los problemas planteados en unidades donde el objetivo es resolver un problema en un determinado contexto, realizar una investigación o producir modelos matemáticos.

Estábamos diseñando este tipo de unidades didácticas con la intención de ayudar a los alumnos a desarrollar su competencia matemática más allá del uso de unos procedimientos rígidos para rsolver unos problemas concretos. Esta forma de trabajar parecía coherente con lo que las instituciones educativas y la sociedad nos estaban demandando: desde el entorno más local se dice que "se entiende por competencia la capacidad de utilizar los conocimientos y habilidades, de manera transversal e interactiva, en contextos y situaciones que requieren la intervención de conocimientos vinculados a diferentes saberes, cosa que implica la comprensión, la reflexión y el discernimiento teniendo en cuenta la dimensión social de cada situación" (Generalitat de Catalunya, Decret 143/2007, 26 de junio, p. 3). En consonancia con ello, y al respecto de la competencia matemática, desde la política educativa estadounidense podemos leer en los Estándares del NCTM que "en las últimas décadas, las investigaciones de psicólogos y educadores sobre el aprendizaje de disciplinas complejas como las matemáticas han establecido sólidamente el importante papel de la comprensión conceptual en el conocimiento y la actividad de las personas competentes. Ser competente en un campo complejo como lo son las matemáticas supone tener la habilidad de usar los conocimientos con flexibilidad y aplicar con propiedad aquello que se ha aprendido en un contexto, a otro contexto" (NCTM, 2000, p. 5). En resumen, el profesor de física de mi colegio algo de razón tenía. Si en clase de matemáticas no veíamos conflicto con la habilidad matemática de nuestros alumnos pero en clase de física los mismos alumnos que lo hacían bien en matemáticas fallaban en física, algo pasaba. Se hizo evidente que teníamos mucho margen de mejora.

Todas estas cuestiones rondando mi cabeza son las que me llevaron un día al despacho de Jordi Deulofeu para plantearle todas mis dudas y pedirle que me dirigiese la tesis doctoral. Mi intención inicial era conseguir crear un plan de actuación que nos sirviese para mejorar cómo los profesores ayudaban a los alumnos a construir el lenguaje algebraico, que contemplase la formación permanente del profesorado y que involucrase a las familias de nuestros alumnos en el proceso. Desde el principio y hasta ahora, he ido aplicando un embudo y un colador a mis pretensiones para conseguir llegar a tener una pregunta y unos objetivos factibles para un trabajo de investigación de estas características. Por ejemplo, las familias no han sido analizadas en esta investigación. En los siguientes apartados explicaré brevemente cómo en primer lugar fuimos filtrando mis inquietudes iniciales hasta llegar a conseguir planterme una pregunta de investigación viable que me permitiese definir los objetivos de esta investigación.

1.1 Competencia matemática y resolución de problemas

En evaluaciones externas transnacionales como PISA y en su influencia mediática se ve reflejado el carácter internacional de estas demandas que hemos comentado; demandas que provienen tanto de las instituciones como de la propia sociedad. En estas pruebas las preguntas tienen un marcado carácter de reflexión, que pone en juego el conocimiento matemático de nuestros alumnos fuera del contexto de las clases de matemáticas. Además, no se puede dejar de tener en cuenta que los currículums de muchos países se están desarrollando en torno a la idea de competencia. Diremos que una persona es competente en un determinado campo del conocimiento si es capaz de dominar los aspectos esenciales de ese campo de manera efectiva, con visión de conjunto y capacidad de juicio. En particular, dentro del campo de las matemáticas, la competencia matemática comprende tener la habilidad de comprender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones, tanto intra como extra matemáticos en los cuales las matemáticas tienen o pueden tener un rol (Niss 2011, p. 49).

A pesar de que al caracterizar la competencia matemática existen pequeñas diferencias, en la mayoría de los currículums oficiales del mundo una de las dimensiones invariables de la competencia matemática es la resolución de problemas. Dada la importancia que damos a esta dimensión, pretendemos que la resolución de problemas sea uno de los ejes centrales del aprendizaje de las matemáticas en nuestro colegio. De hecho, el objetivo es que la resolución de problemas ayude a las alumnas[1] a construir e interiorizar conceptos matemáticos nuevos. En particular, y volviendo al tema central de este trabajo de investigación, queremos ayudar a que nuestras alumnas construyan el lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas.

1.2 El lenguaje algebraico

Volviendo a un entorno local, en Burgués y Sarramona (2013), dentro de la primera de las dimensiones en que se subdivide la competencia matemática (resolución de problemas) vemos como la primera de ellas es: "Traducir un problema a lenguaje matemático o una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos adecuados". Por otro lado, dentro de la dimensión "Comunicación y representación" encontramos la competencia número 9 que es: "Representar un concepto o relación matemática de diversas maneras y usar el cambio de representación como estrategia de trabajo matemático". De nuevo podemos comprobar como estas demandas no son excluyentes de las políticas locales. De acuerdo con Niss (2011, p. 52) para que los alumnos sean capaces de lidiar con el lenguaje y las herramientas matemáticas es importante que construyan y utilicen diferentes representaciones de conceptos matemáticos, fenómenos y situaciones (*representing competency*). En particular, es importante que puedan trabajar con representaciones simbólicas (*symbol and formalism competency*).

Es decir que, desde un punto de vista de desarrollo de la competencia matemática, se puede ver claramente que es importante que las alumnas aprendan a utilizar el lenguaje algebraico. Está claro que no solo el lenguaje algebraico nos ayudará a traducir problemas o utilizar los cambios de representaciones para resolverlos, pero es indudable que es una de las herramientas que nuestros alumnos deben interiorizar.

En este campo, y volviendo a las preguntas del profesor de física, comencé a detectar lo que

[1] Confiamos en que, igual que nosotros, nuestros lectores se opongan a cualquier forma de discriminación y en particular a la discriminación por sexo. El problema estriba en encontrar modos de expresar estas creencias en la práctica diaria. No suele ser fácil. Por ejemplo, utilizar "El profesor o la profesora" dificulta la lectura cuando se repite a menudo, pero "el profesorado", que se suele usar para soslayar el problema, produce un efecto despersonalizador. Queremos referirnos a los profesores y a los alumnos individuales para acentuar su particularidad. En este trabajo, y de acuerdo con Goldschmied y Jackson (1997) hemos llegado a la solución de imaginar que a veces los profesores o los alumnos son hombres o chicos y a veces son chicas o mujeres. Por lo tanto, utilizamos el masculino y el femenino indistintamente para referirnos al genérico.

para mí se convirtió en el origen del problema respecto al uso que hacían nuestros alumnos del lenguaje algebraico. Normalmente lo que hacían era memorizar una serie de reglas que podían aplicar a expresiones algebraicas que luego utilizaban en la resolución de ecuaciones. Ciertamente las profesoras del Departamento usábamos el modelo de la balanza para dar significado a la manipulación de ecuaciones, es decir, que si queríamos conseguir ecuaciones equivalentes debíamos hacer la misma operación en los dos lados de la igualdad. Pero a la práctica, este enfoque significativo del lenguaje solo suponía algunas sesiones (en el mejor de los casos) o sencillamente algún primer momento de alguna sesión, para en seguida comenzar a utilizar reglas sintácticas como "pasar la x al otro lado restando", etc. Es decir, invitábamos a los alumnos a memorizar reglas sintácticas que les ayudasen a resolver unos problemas muy concretos.

Una de las barreras en el aprendizaje aparecía en el momento en que los alumnos se equivocaban usando estas reglas. La experiencia nos decía que el estudio temprano de las reglas sintácticas del álgebra provocaba un pensamiento rígido que hace que para los alumnos sea muy difícil reconstruir el lenguaje a partir de sus propios errores. Es decir, que una vez que habían creído aprender algo de este lenguaje era muy difícil hacer que los alumnos abandonasen las técnicas que habían aprendido incorrectamente. Desarrollaremos estas ideas en el marco teórico de esta investigación (Capítulo 6.).

1.3 El profesor como guía en el proceso de aprendizaje

Como ya he comentado anteriormente, en nuestro colegio hace seis años que no utilizamos libros de texto. Los profesores del departamento diseñan y adaptan tareas que agrupamos en forma de unidad didáctica para llevarlas a las aulas. Este es un proceso que llevamos a cabo trabajando en equipo, utilizando nuestra reunión de seminario semanal para estos propósitos (se puede encontrar detallado este proceso en el apartado 8.4). Respecto al lenguaje algebraico, nuestra pretensión era disponer de unidades didácticas con las que ayudar a nuestros alumnos a construirlo en las que a la vez estuviéramos trabajando diversos bloques del currículum.

Antes de iniciar esta investigación, en el colegio ya contábamos con unidades didácticas diseñadas por nosotros que cumplían estas características. En particular, los profesores del departamento pretendíamos que nuestros alumnos no estuvieran limitados por un uso rígido de herramientas matemáticas, y teníamos por objetivo proporcionarles la oportunidad de construir sus propias formas de resolver problemas (Espinoza, Barbé y Gálvez, 2009). Además, los profesores estábamos de acuerdo en que los alumnos debían ser los protagonistas de su propio proceso de aprendizaje, siendo el profesor un guía que ayude a las alumnas a desarrollar la autonomía suficiente para construir su propio conocimiento.

Claro, con estas condiciones yo pensaba que ya estaba todo hecho. Pero el profesor de física seguía quejándose. Era evidente que aún teníamos margen de mejora. Como decía, el equipo de profesores del departamento estaba dispuesto a reflexionar sobre su propia práctica y a hablar de cómo solucionar los problemas que nos iban surgiendo. Así fue como empecé a ver que a pesar de compartir los objetivos de las tareas y de hacerlo en una reunión semanal, nuestra gestión del aula y, en particular, la forma de llevar las actividades a clase eran bastante diferentes.

Esta percepción es lo que hizo que nos decidiéramos por el estudio del papel que jugaban los profesores al implementar las tareas que habíamos diseñado. De acuerdo con Skemp (1978) y con Hiebert y Carpenter (1992), si miramos los extremos se pueden diferenciar dos tipos de profesores de matemáticas: aquellos que consideran que el objetivo central del aprendizaje de las matemáticas es la adquisición de un conjunto determinado de técnicas y aquellos que tienen por objetivo "enseñar a pensar". El problema del primer enfoque es que el alumnado puede verse forzado a memorizar sin necesariamente entender lo que hace (es decir, no se consigue un aprendizaje significativo). Por otro lado, cuando el profesorado se obsesiona con la frase "enseñar a pensar" se encuentra con la dificultad de caracterizar el significado de esta expresión y también de que los alumnos no sepan qué es lo que están aprendiendo o se sientan inseguros respecto a su competencia matemática.

2. Pregunta y objetivos de la investigación

La problemática que hemos presentado se podría abordar desde muchos puntos de vista, pero como ya hemos dicho, decidimos centrar la investigación en el conocimiento que necesita un profesor de matemáticas para ayudar a sus alumnos a construir el lenguaje algebraico. Así pues, en este apartado concretaremos la pregunta de investigación que guiará esta memoria y los objetivos que nos hemos marcado para ayudarnos a buscar las respuestas a esa pregunta.

Después de filtrar todas las reflexiones que hemos expuesto en el apartado anterior, decidimos que la pregunta de investigación que guiaría este estudio debería conducirnos a discernir cuáles son los conocimientos que un profesor de matemáticas debería poseer para ayudar a los alumnos a construir el lenguaje algebraico necesario para saber hacer, saber comunicar y aprender a su vez nuevas matemáticas y cómo los profesores utilizan este conocimiento mientras implementan tareas en el aula. Todo esto sin dejar de lado que en el proceso de enseñanza-aprendizaje la resolución de problemas debe tener una importancia capital en la asignatura de matemáticas y debe servir no sólo para que los alumnos tengan la oportunidad de movilizar su conocimiento para resolverlos, sino también para construir conceptos nuevos. Así pues, enunciaremos la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué conocimientos debería tener el profesor de matemáticas y cómo podría utilizarlos para ayudar a los alumnos a desarrollar el lenguaje algebraico trabajando en un ambiente de resolución de problemas?

Para responder a esta pregunta, hemos fijado los siguientes objetivos de la investigación:

1. Diseñar secuencias didácticas que brinden a los alumnos oportunidades para construir el lenguaje algebraico a través de la resolución de problemas y caracterizar las tareas de estas secuencias.
2. Analizar cómo diferentes profesores implementan en el aula una misma secuencia didáctica, teniendo en cuenta que esta ha sido diseñada mediante un proceso de trabajo en equipo.
3. Identificar las características inherentes en la dinámica de trabajo en equipo que ayudan a que los profesores reflexionen sobre su práctica docente y permiten ampliar su conocimiento.

El primer objetivo requiere poner en común cuáles son los objetivos de aprendizaje de las tareas que deben contener estas secuencias didácticas. Dado que no queremos alterar el procedimiento habitual de trabajo del equipo, el trabajo consistirá en acordar qué aspectos del lenguaje algebraico nos interesa que nuestros alumnos desarrollen, definir cuáles son los más importantes en cada tarea concreta, hacer algunas propuestas por parte del investigador y dejar que el equipo de profesores se reparta el trabajo como habitualmente hacen. Después de una fase individual en que los profesores rediseñarán las tareas, queremos analizar cómo los profesores que han diseñado estas tareas las comparten con el resto del equipo de profesores y cómo las implementan con sus alumnos.

El segundo objetivo también respeta el trabajo habitual de los profesores. Una de las implicaciones de la raíz inglesa de nuestro colegio es que las observaciones de aula entre profesoras son una práctica habitual. Así que ni para las alumnas ni para los profesores esto iba a representar algo extraño. Uno de los motivos de analizar a distintos profesores usando la misma tarea era que queríamos observar las diferencias en la forma de implementar un mismo material. En definitiva, queríamos ver si a pesar de haber definido juntos los objetivos de aprendizaje y de haber hablado de lo que nos parecía importante sobre una tarea en nuestras reuniones semanales, habría diferencias sustanciales en cuanto a la implementación de algunas tareas concretas.

Para dar sentido a nuestra investigación dentro del contexto del colegio, el desarrollo del primer objetivo implicaría todas las unidades didácticas del primer ciclo de la ESO. En cambio, para poder llevar a cabo la investigación con la suficiente profundidad, el segundo de los objetivos lo haríamos centrándonos en una secuencia concreta. Pero no queríamos decidir cuál sería esa unidad hasta que todas las implementaciones se hubieran llevado a cabo, de manera que el foco de la investigación influyese lo menos posible en la forma habitual de proceder de los distintos profesores.

Por último, queremos extraer del análisis buenas prácticas con respecto a la formación del profesorado, viendo cómo mejoran su conocimiento a partir de las reflexiones que realiza cada uno de los profesores provocadas por las diferentes interacciones entre ellos.

---SEGUNDA PARTE---

MARCO TEÓRICO

El marco teórico nos servirá para fundamentar el resto de la memoria. Comenzamos justificando la selección de temas que hemos hecho para luego profundizar en cada uno de ellos: el conocimiento del profesor, la resolución de problemas vista como herramienta para construir conocimiento y la construcción del lenguaje algebraico. Hemos hecho un recorrido por diversas investigaciones de cada uno de los puntos, dejando clara nuestra posición en cada uno de ellos. Finalizamos el marco teórico relacionando en forma de síntesis los tres aspectos que hemos expuesto.

3. Justificación del marco teórico

En las siguientes páginas relacionaremos los tres aspectos que queremos destacar en nuestro marco teórico: el conocimiento del profesor, la construcción del lenguaje algebraico y cómo el hecho de que se trabaje en un ambiente de aula de resolución de problemas es beneficioso para este propósito.

A los profesores nos llegan contínuamente producciones de nuestras alumnas que contienen errores algebraicos (Figura 3.1 y Figura 3.2, por ejemplo).

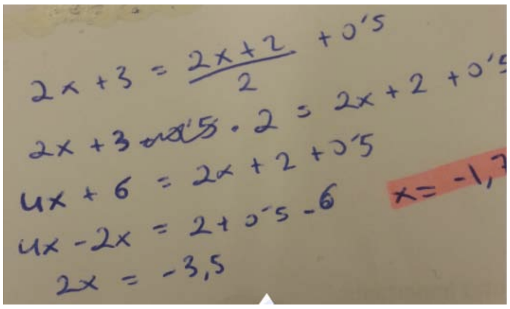


Figura 3.1 - Resolución de una ecuación de un alumno de 2º de ESO

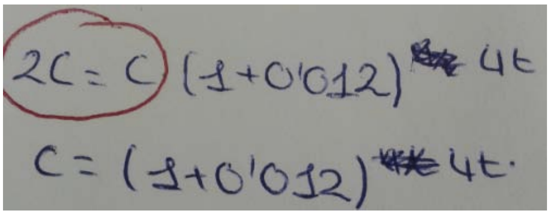


Figura 3.2 -Fragmento de la resolución de una alumna de 1º de Bachillerato de un problema contextualitzado

En la Figura 3.1 vemos como el alumno ha multiplicado por 2 la ecuación en la segunda línea, pero se ha olvidado de multiplicar uno de los términos. Seguramente ha utilizado una regla sintáctica del tipo "paso el 2 multiplicando al otro lado". En la Figura 3.2, en cambio, la alumna parece que ha restado la "C" de la derecha del "2C" del lado izquierdo de la igualdad.

Figura 3.3 - Esquema que justifica la selección del marco teórico

Es habitual encontrar el mismo tipo de errores fuera de la clase de matemáticas, por ejemplo en las clases de otras asignaturas, especialmente en las de la rama de ciencias. Este tipo de errores de nuestros alumnos conducen constantemente a debates entre las profesoras de los departamentos de matemáticas de nuestros colegios. Pensamos que estos debates son necesarios, pero también creemos que para que sean de utilidad y nos lleven a realizar reflexiones concretas que nos permitan sacar conclusiones efectivas, debemos ser conscientes de que los errores de estas fotografías no son nada más que la punta de un iceberg.

La parte que aflora en este iceberg, los errores en la resolución de ecuaciones, tienen una relación directa con la manera en la que nuestros alumnos construyen el lenguaje algebraico. Es decir, nos tenemos que plantear qué tipo de tareas estamos brindando a nuestros alumnos para que desarrollen este lenguaje: ¿ayudan a dotar de significado a los símbolos?, ¿desarrollan métodos significativos y flexibles para manipular los símbolos? También nos tenemos que plantear si con el tipo de dinámicas que se siguen en las aulas podemos aprovechar estos errores para conseguir una mejora del aprendizaje de los alumnos. Dado que uno de nuestros objetivos es rediseñar las secuencias didácticas existentes poniendo el foco en el lenguaje algebraico, buscaremos ayuda en la literatura para mejorar las tareas de manera que podamos responder a las preguntas anteriores.

Profundizando en nuestro iceberg, y dado que nos posicionamos en una línea constructivista como teoría del proceso de enseñanza-aprendizaje, creemos que en estas secuencias la resolución de problemas debe jugar un papel de crucial importancia. Queremos que en las clases se viva un ambiente de resolución de problemas, que se genere un entorno de aprendizaje donde la principal tarea del alumno sea plantearse y responder preguntas usando las matemáticas. En definitiva, donde se ayude a desarrollar el pensamiento matemático. En esta línea, nos interesa que el marco teórico nos ayude a fijar las ideas sobre cómo utilizar la resolución de problemas en clase de matemáticas para desarrollar conocimientos concretos.

Pero aún no estamos en el fondo del iceberg. Tener clara la finalidad de que los alumnos aprendan a usar el lenguaje algebraico y la manera en que queremos que lo aprendan no es lo único que nos interesa estudiar en este trabajo. Cuando un profesor lleva al aula una determinada tarea, esta se transforma. Esta transformación viene dada en parte por la interacción con los alumnos, pero también por la interpretación que hace este profesor de la actividad. Y uno de los factores determinantes de esta interpretación viene dado por el conocimiento que posee el profesor sobre la materia. Este conocimiento es el que representa para nosotros la base de nuestro iceberg.

Es por esto que este marco teórico haremos una revisión de algunas investigaciones relevantes para nuestro estudio sobre los tres componentes que hemos detectado en nuestro iceberg:

1. Conocimiento profesional del profesor
2. Resolución de problemas
3. Lenguaje algebraico

Hemos escogido este orden de exposición para facilitar el discurso, partiendo del punto más general y así avanzar hacia lo particular. Este marco teórico no pretende ser una mera recopilación de información, sino que también contendrá algunas consideraciones propias que nos servirán para desarrollar la metodología de trabajo propia de esta investigación.

4. La raíz de la profesionalidad de un profesor

¿De dónde provienen las explicaciones de un profesor? ¿Cómo deciden los profesores qué enseñan y cómo presentan aquello que quieren mostrar? ¿Cuál es el origen de las preguntas que hacen los alumnos? ¿De dónde provienen las soluciones a los malentendidos que se derivan de la dificultad de una materia? ¿Por qué los profesores deciden proponer una determinada tarea y no otra a sus alumnas?

Todas estas preguntas podrían servir para conformar una descripción del trabajo que hace una profesora.Y no solo eso: sin duda, la respuesta a todas ellas tiene componentes del conocimiento que los profesores necesitan para poder realizar su trabajo. En este apartado recogeremos algunas de las ideas que diferentes investigaciones han aportado al respecto.

Desde la Edad Media, el test definitivo para saber si había comprensión de una determinada materia ha sido la habilidad para transformar ese conocimiento de forma que otras personas lo puedan entender. Esto se mantiene tanto en la forma de conseguir los títulos de Máster como de Doctorado en un tema: siempre con una exposición sobre un tema delante de un público. Es decir, que la capacidad de enseñar un determinado concepto es la máxima expresión de su conocimiento (Shulman, 1986, p. 7). Esto hace que el conocimiento que debe poseer una profesora sea de una naturaleza muy especial.

Ya hace muchos años que el conocimiento de los estudiantes es cuidadosamente estudiado por pruebas que pretenden mantener la neutralidad con respecto a la cultura a la que pertenecen o la lengua que utilizan. Ejemplos de ello son TIMSS o PISA. Estas pruebas revelan que el nivel de los alumnos de nuestro país no es el que nos gustaría. En el sentido de intentar mejorar, se hacen muchos esfuerzos desde los diferentes gobiernos en forma de cambios de ley y cambios de currículum (cambios en el sentido de modificar qué cosas y en qué orden deben aprender nuestros alumnos). Por otro lado, hemos visto desde siempre cómo estos cambios, que representan un esfuerzo enorme, no producen mejoras significativas (Ball, Hill y Bass, 2005, p. 14). La cuestión es que no se tiene en cuenta que el currículum no se enseña por sí solo. Hay un grupo de personas que es quien se dedica a la implementación del mismo y que no está siendo estudiada todavía de forma sistemática a través de pruebas objetivas (Delaney, Ball, Hill, Schilling y Zopf, 2008, p. 172).

Dado que uno de los objetivos del presente trabajo de investigación es hacer un análisis de cómo los profesores usan su conocimiento durante su práctica docente, en este apartado haremos un recorrido por las diferentes teorías que usaremos para desarrollar nuestra metodología, analizar los datos y fundamentar nuestro trabajo.

4.1 El origen de una teoría

El éxito de un profesor en el momento de enseñar depende, en gran parte, de su propio conocimiento. Pero de hecho no solo del conocimiento que tiene de la materia misma, en nuestro caso de las matemáticas. La cuestión del conocimiento va más allá: por ejemplo, es de vital importancia que sea capaz de predecir las preguntas y respuestas que le plantearán sus alumnos en clase.

La complejidad y la multiplicidad de conocimientos necesarios para la enseñanza son ahora reconocidas internacionalmente (Huckstep, Rowland y Thwaites 2002, p 1). Pero no siempre ha sido así. Lee S. Shulman fue uno de los primeros en plantearse una categorización que pudiese servir para entender las diferentes dimensiones que tendría que tener el conocimiento necesario para ser profesora.

Su análisis parte de las pruebas que se hacían en los Estados Unidos a los futuros maestros. Por ejemplo, en 1875 solo se pedía que tuviesen conocimiento de la materia. Solo había 50 puntos sobre más de 1000 que hacían referencia a los conocimientos sobre pedagogía del candidato. En cambio, un siglo después, en el momento de escribir su artículo *Those who understand: Knowledge growth in teaching* (Shulman, 1986), las preguntas versaban en su mayoría sobre pedagogía, y prácticamente ninguna sobre contenido. Este hecho hizo que Shulman se plantease la elaboración de un marco que pudiera servir para analizar cuáles eran los conocimientos necesarios para llevar a cabo el trabajo de un profesor.

Para poder identificar cuáles son los puntos clave del conocimiento profesional que necesita un profesor para enseñar, lo primero que tenemos que aclarar es qué significa para nosotros **enseñar.** De acuerdo con Ball, Hill y Bass (2005, p. 17) "enseñar es todo aquello que el profesor hace para ayudar a los alumnos a aprender. Con esto claramente hablamos de las actividades interactivas que se llevan a cabo en el aula y de todas las tareas que se desprenden alrededor de estas. Pero también significa planificar todas las actividades, evaluar el trabajo de los alumnos, escribir y graduar esta evaluación, explicar el trabajo que se ha hecho en clase a las familias, decidir y gestionar los deberes de los alumnos atendiendo a condiciones de igualdad, llegar a acuerdos con la dirección del centro, que es quien tiene una visión más normativa del currículum, etc.".

De acuerdo con esta definición de lo que es enseñar, que en realidad es una descripción de la profesión de profesor, Shulman dividió el conocimiento del profesor en las siguientes categorías (Shulman, 1987, p.8):

1. Conocimientos generales sobre pedagogía, con especial referencia a los principios generales y a las estrategias de manejo de la clase y de organización que parecen trascender a la materia.
2. Conocimiento de los alumnos y de sus características.
3. Conocimiento de los contextos educativos, que van desde su grupo clase, los distritos

de gobierno o financiamiento hasta el carácter de la comunidad educativa y su cultura.
4. Conocimiento de los propósitos educativos, sus valores, su filosofía y su justificación histórica.
5. **Conocimiento de la materia** que tendrá que enseñar.
6. Conocimiento del currículum, con especial dominio de los materiales y programas que servirán como herramientas de trabajo al profesor.
7. **Conocimiento pedagógico del contenido,** que tiene que amalgamar los contenidos y la pedagogía en un conocimiento que es propiedad única del profesorado.

Con esta clasificación se iniciaba la construcción de un marco de estudio del conocimiento del profesor que serviría como contenido para enseñar a su vez a futuros profesores. Este era un punto de partida radical para la investigación de la época, que hasta ese momento estaba básicamente enfocada en aspectos generales de pedagogía y en el ámbito de la didáctica en cuestiones sobre el aprendizaje de los alumnos (Ball, Hoover y Phelps, 2008, p. 390).

4.2 El conocimiento pedagógico del contenido

De acuerdo con Rowland y Ruthven (2011, p.11), la disticinción entre los puntos 5, 6 y 7 de la división del conocimiento del profesor hecho por Shulman es en realidad su gran aportación a la teoría del conocimiento del profesor. Se trata del primer intento de distinción entre el conocimiento propio de cualquier profesional sobre una determinada materia y el conocimiento necesario para enseñarlo. Esta distinción es la que dota de una profesionalidad especial el trabajo del profesor y permite profundizar en las dimensiones del mismo.

Por ejemplo, una de las habilidades propias y especiales que requiere este conocimiento es la detección de los errores cometidos por los alumnos y la gestión de los mismos. Por ejemplo, si un profesor se encuentra con una producción escrita de un alumno (Figura 4.1), ¿que hará para corregirlo y ayudarle a aprender de este error? Una respuesta típica, y a la vez intervencionista, es que le diga, en esta caso, que en la segunda línea "el 2 tiene que multiplicar a toda la ecuación, por lo tanto falta el paréntesis en la parte izquierda de la igualdad y que el 0.5 de la derecha también se tiene que multiplicar por 2". Detrás de esta repuesta nos encontramos con una de las formas clásicas de enseñar a resolver ecuaciones: "como el 2 está dividiendo, tiene que pasar multiplicando". Y por lo tanto, estamos delante de una afirmación de carácter técnico, de explicación de un proceso.

-

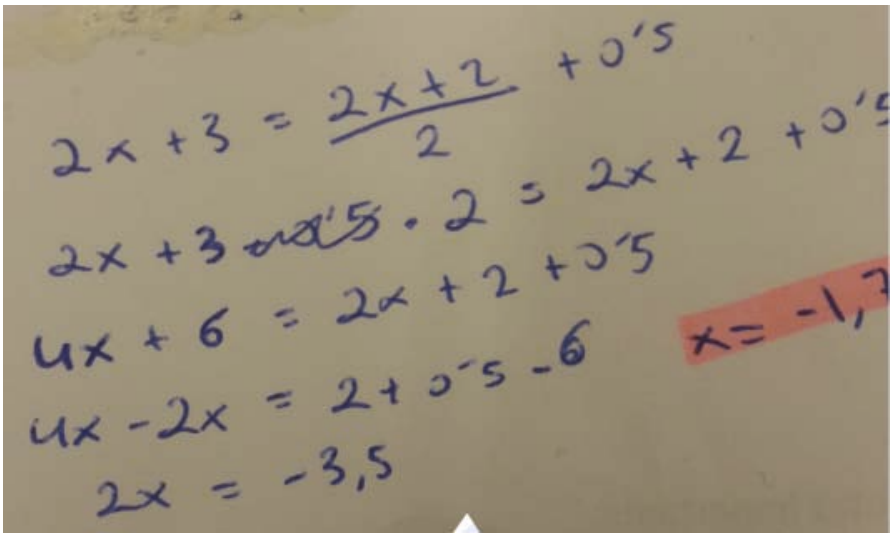


Figura 4.1: Resolución de una ecuación por un alumno de 2º de ESO

Siguiendo con este tipo de corrección y con esta forma de enseñar álgebra, vemos otro ejemplo en la Figura 4.2. ¿Cómo lo haremos para trabajar con este error? En este caso podríamos decir "la C la has pasado restando y tendrías que haberla pasado dividiendo, fíjate que la C está multiplicando". Seguramente la alumna podría preguntar "¿multiplicando a qué?" Lo que está claro es uno de los problemas con esta metodología: para corregir este tipo de errores el profesor tiene que recurrir a la memoria y a una lógica que no tiene un significado claro. Esto se debe a que la manipulación que ha hecho la alumna no se corresponde en realidad con ninguna operación que podamos hacer sobre la ecuación de manera que la igualdad se mantenga.

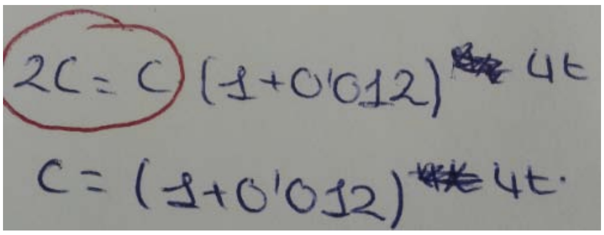


Figura 4.2: Fragmento de la resolución de una alumna de 1º de Bachillerato de un problema contextualizado

Más adelante profundizaremos sobre el problema que vemos en situaciones como las anteriores: en este tipo de intervenciones, hay mucha más insistencia en la sintaxis del lenguaje algebraico que en su semántica.

Pero lidiar con los errores de los alumnos no es todo lo que una profesora tiene que hacer. Los estudiantes no sólo se equivocan. También hacen preguntas, usan modelos y piensan sus propios métodos no estándares para resolver problemas, entre otras muchas acciones (Ball, Hill y Bass 2005, p. 20). En los siguientes apartados es precisamente esta la idea que queremos desarrollar. Las diferentes dimensiones del conocimiento necesario para enseñar nos tienen que ayudar también a detectar en qué acciones del docente se activa este conocimiento.

4.3 La llegada de una nueva teoría del conocimiento del profesor

Ya en este siglo, Deborah Ball y su equipo de Michigan decidieron retomar el modelo de Shulman para elaborar una teoría que sirviese como marco de trabajo para mejorar la práctica docente, en este caso concretando sobre la asignatura de matemáticas.

En Ball, Hoover y Phelps (2008, p. 395) se afirma que hasta el momento en que empezaron los estudios del grupo de Michigan para la elaboración de su propio marco teórico, las diferentes interpretaciones que se habían hecho del trabajo de Shulman contenían definiciones demasiado amplias en lo que se refería al conocimiento pedagógico del contenido. Por ejemplo, se definía como la *intersección entre el conocimiento de la materia y el conocimiento necesario para enseñar* (Niess, 2005, p. 510 citado en Ball, Hoover y Phelps 2008, p. 395) o también, y de una forma aún más amplia, como *el producto de la transformación de la propia materia en una forma que facilite el aprendizaje del alumno* (de Berg y Greive, 1999, p. 20 citado en Ball, Hoover y Phelps 2008, p. 395). Aunque compartimos con Ball la superficialidad de estas definiciones, creemos que estas pueden servir para hacerse una idea de aquello a lo que se quiere referir con el conocimiento del profesor.

La principal característica que diferencia los trabajos de Ball del resto de aproximaciones que se habían hecho hasta el momento es que estos quieren acercarse a la categorización del conocimiento desde una perspectiva de observación de la práctica. En particular decidieron hacerlo partiendo de los profesores de matemáticas. Aun así se debe tener en cuenta que tanto los trabajos de Shulman, como los de Ball y los de Rowland que más adelante desarrollaremos, se estaban investigando como posibles teorías que pudieran servir como marco de trabajo para otras materias.

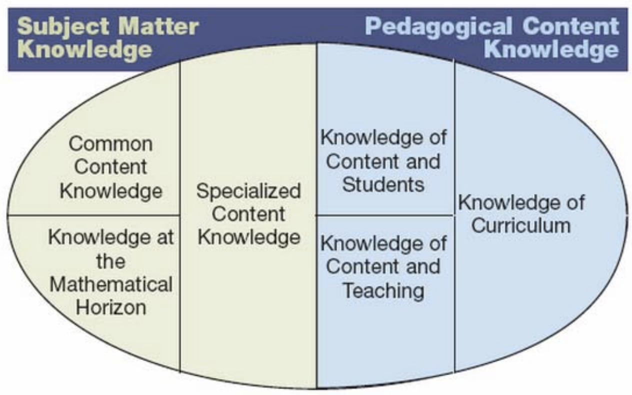


Figura 4.3: Dimensiones del MKT (Hill y Ball, 2009, p.70)

Parece obvio que una profesora de matemáticas necesita conocer los conceptos y procedimientos que está enseñando (números primos, fracciones equivalentes, etc.), pero la pregunta clave es de qué forma los necesita conocer, con qué nivel de profundidad, y también cómo usará esos conocimientos en la práctica (Ball, Hoover y Phelps, 2008, p. 395).

Manteniendo la línea de Shulman, la teoría que desarrolló el grupo de Michigan afirma que el conocimiento matemático necesario para ejercer la profesión de profesora es multidimensional. Llamaron a su categorización del conocimiento ***Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)***, e idearon un esquema que debía facilitar su representación en dimensiones del modelo (Figura 4.3).

-

En primer lugar, y de acuerdo con las investigaciones de Shulman, encontramos una distinción entre *Subject Matter Knowledge (SMK)* y *Pedagogical Content Knowledge (PCK)*. Cada una de estas dimensiones está dividida a su vez en tres subdimensiones más que ayudan a comprender su contenido. En la Tabla 4.1 encontramos una breve explicación de estas subdimensiones (Ball, Hoover y Phelps, 2008).

El propio equipo de Michigan reconoce algunos puntos débiles de este modelo en algunas de sus publicaciones (Ball, Hoover y Phelps, 2008, p. 405). Uno de los puntos con más comentarios es que la distinción entre *Common Content Knowledge (CCK)* y *Specialized Content Knowledge (SCK)* no está del todo clara. Veamos un ejemplo que no se comenta en la literatura existente: ¿dónde se sitúa el conocimiento sobre contextos que puedan motivar el aprendizaje de conceptos propios de las matemáticas? Si, de acuerdo con Niss (2011, p. 49 Niss), saber matemáticas significa saber aplicarlas en problemas donde el contexto matemático pueda tener un papel, conocer estos contextos ¿forma parte del conocimiento que esperamos de cualquier persona que sepa matemáticas o solo de aquellos que deben enseñarlas?

Tampoco queda suficientemente claro dónde se debe situar el conocimiento sobre materiales manipulables, sobre el uso de herramientas tecnológicas y otros recursos que puedan dar soporte al aprendizaje de los alumnos, por ejemplo.

Otra de las reflexiones a las que nos lleva este marco teórico tiene que ver con su puesta en práctica. ¿Cómo lo podemos utilizar para analizar la enseñanza de una determinada profesora? ¿Cuál es el conjunto de propuestas que se hacen desde este marco de trabajo? En el siguiente apartado desarrollaremos las respuestas a estas preguntas.

SMK	**Common Content Knowledge (CCK)**	Es el conjunto de conocimientos y habilidades matemáticas que no solo se usan en el mundo de la enseñanza. El profesor tiene que conocer la materia que enseña, tiene que ser capaz de reconocer ciertas respuestas incorrectas a sus preguntas o tiene que saber cuándo un libro de texto hace una definición poco precisa, por ejemplo.
	Specialized Content Knowledge (SCK)	Es el conjunto de habilidades matemáticas que solo se necesita conocer cuando un profesor desarrolla su profesión. Las tareas que un profesor necesita desplegar para enseñar requieren un componente de contenido matemático muy fuerte. Por ejemplo, un profesor tiene que ser capaz de hablar explícitamente sobre cómo se utiliza el lenguaje matemático, de escoger una representación concreta de un concepto para que quede claro en un momento determinado o de justificar el funcionamiento de un determinado algoritmo.

-

	Knowledge at the Mathematical Horitzon (KMH)	Los profesores han de conocer las habilidades que ya tienen sus alumnos y las que tendrían que adquirir gracias a lo que les enseñan. Llamaremos a esto conocimiento vertical del horizonte. También es importante tener conocimiento de aquello que saben hacer los alumnos que no está directamente relacionado con las matemáticas (conocimiento horizontal del horizonte). En particular, es necesario que el profesor tenga la habilidad de realizar connexiones útiles para la construcción del conocimiento matemático con los horizontes del conocimiento de los alumnos.
PCK	**Knowledge of Content and Students (KCS)**	Es un conocimiento que combina conocimiento sobre los alumnos con conocimiento sobre matemáticas. Por ejemplo, el profesor tiene que ser capaz de anticipar cuáles serán las confusiones a las que llevará la construcción de un determinado conocimiento, o cuáles son los errores comunes delante de un determinado procedimiento. También tiene que ser capaz de escuchar y entender a un alumno cuando utiliza un lenguaje emergente e incompleto para expresar una idea que para él es nueva.
	Knowledge of Content and Teaching (KCT)	Combina el conocimiento sobre matemáticas con el conocimiento sobre cómo enseñarlas. Una de las expresiones de este conocimiento se encuentra dentro del diseño de la enseñanza. Por ejemplo, los profesores deben secuenciar un contenido particular, tienen que escoger unos determinados ejemplos y tienen que evaluar el uso de una determinada representación de un concepto matemático.
	Knowledge of Curriculum (KC)	Parece evidente que un profesor debe conocer de manera directa el currículum que tiene que usar para planificar sus clases y sobre los cambios que se hacen sobre el mismo.

Tabla 4.1: Descripción de las dimensiones del MKT (Ball, Hoover y Phelps 2008)

4.4 MKT: de la teoría a la práctica

En el proyecto desarrollado por Hill y otros en 2008 podemos encontrar una experiencia que tiene por objeto encontrar una relación cuantitativa entre el conocimiento matemático del profesor (MKT) y la calidad de la enseñanza de ese profesor, buscando una correlación entre estas dos variables.

4.4.1 Herramientas para medir el conocimiento del profesor

La herramienta usada para medir el MKT de las maestras implicadas en esta investigación fue una serie de tests escritos donde se realizaban preguntas referidas a su conocimiento de matemáticas y también sobre el conocimiento que tenían sobre la didáctica de las mismas. Por ejemplo, se planteaban preguntas sobre errores de alumnos o sobre problemas con lo que se podían encontrar al usar diversos libros de texto. Posteriormente se hicieron entrevistas para aclarar sus respuestas, pero estas entrevistas no servían para modificar las puntuaciones obtenidas en el test escrito.

4.4.2 Medir la calidad de la enseñanza

Por otro lado, también se define *Mathematical Quality of Instruction* (MQI) como un conjunto de dimensiones que sirven para caracterizar el rigor y la riqueza matemática de una sesión de clase, incluyendo por ejemplo la presencia o la ausencia de errores matemáticos, la calidad de las explicaciones y justificaciones matemáticas, la cantidad y pertinencia de las representaciones matemáticas que se usan, etc. (Hill y otros, 2008, pp. 506-511).

En esta experiencia se grabaron un conjunto de clases de 10 maestras de primaria. A partir de la observación directa de las clases y posteriormente de los vídeos, se estableció una puntuación de estas sesiones a partir de rúbricas elaboradas usando las dimensiones en las que previamente se había catalogado el MQI.

Combinando las puntuaciones obtenidas en los tests de MKT y las obtenidas después del análisis de las implementaciones, lo que hicieron fue intentar establecer una relación cuantitativa entre estas dos variables. En este punto, se encontraron con resultados muy dispares. Había situaciones en que maestros que habían conseguido buenas puntuaciones en los tests no habían conseguido buenas puntuaciones en su MQI. También había profesores con una puntuación baja en MKT y alta en MQI, o altas en ambos y bajas en ambos. Es decir, no parece establecerse una relación clara entre ambas variables.

Resultó ser que las sesiones observadas eran demasiado dispares. Vemos por ejemplo dos casos con puntuaciones convergentes (un caso de puntuación alta en MKT y también en MQI y otro caso con puntuaciones bajas en los dos indicadores). La maestra que mejores resultados obtuvo, tanto en su MKT como en el MQI, fue Lauren que implementó una sesión sobre probabilidad (Hill y otros, 2008 pp. 446-457). Durante esta sesión no solo apoyó a los alumnos en la construcción del concepto de probabilidad, sino que además aprovechó para conectar diferentes representaciones que ayudaron a los alumnos a cuantificar la probabilidad. Además, utilizó la misma sesión para ayudar a recordar a los alumnos cómo se pueden comparar fracciones usando diversas estrategias. En cambio, en el caso de Zoe (Hill y otros, 2008 pp. 446-457), ella decidió implementar una sesión sobre pensamiento aditivo. Durante la sesión presentó un método para sumar con el que no estaba familiarizada, dando explicaciones confusas en diversas ocasiones. Las puntuaciones de Zoe fueron bajas en los dos indicadores (MKT y MQI). Nos preguntamos qué es lo que hubiera pasado si Lauren hubiera tenido por objetivo que sus alumnos aprendieran a sumar. ¿Hubiera sido tan brillante en la manera de ayudar a las alumnas a construir los conceptos? ¿O simplemente no se hubiera planteado introducir la suma sin la necesidad creada por una situación de contexto, como en el caso de la comparación de fracciones y la comparación de probabilidades? Y, ¿qué hubiera pasado si Zoe y Lauren hubieran compartido sus ideas antes de las implementaciones?

Viendo las conclusiones que Hill extrae de esta investigación es como hemos detectado la importancia de hacer un seguimiento completo del proceso de implementación de un material en el aula, por lo que hemos decidido realizarlo en nuestra investigación. Queremos ver cómo diferentes profesores implementan en el aula las mismas actividades, cómo las interpretan y las transforman y cómo su conocimiento influye en las decisiones que toman durante la implementación.

-

4.5 La movilización del conocimiento del profesor en el aula

Cuando un profesor se encuentra delante de sus alumnos tiende a utilizar su conocimiento de una manera que puede ser muy diferente a cuando se encuentra delante de una prueba escrita. De acuerdo con Mason y Spence (1999), podríamos definir esta forma de usar el conocimiento como *knowing-to*, es decir, el acto que permite acceder a su conocimiento para resolver una determinada situación problemática en un instante concreto. El acceso a este conocimiento debe ser tan ágil como para poder responder a la situación en un tiempo determinado. Es por eso que creemos importante encontrar un marco de trabajo que nos permita analizar cómo los profesores utilizan el conocimiento en el aula, por encima de un marco que nos permita analizar el conocimiento a través de tests escritos.

En esta línea, nos interesa destacar la teoría del conocimiento del profesor conocida como *Knowledge Quartet* (KQ). La propia construcción del marco teórico del KQ ya genera nuestro interés. Esta teoría se desarrolló en un programa de investigación de la Universidad de Cambridge llamado SKYMA (*subject knowledge in mathematics*), que se empezó a desarrollar en 2002. Se quería analizar la forma en que diversos futuros maestros de primaria hacían visible su conocimiento mientras planificaban e implementaban sus clases. Comenzaron la observarción de las maestras sin ninguna tabla de observación, con la intención de construir estas tablas a partir de la propia observación de los elementos que hacían que la maestra hiciese emerger estos conocimientos en el aula (Rowland y otros, 2008, p. 26-29). Después de poner en común las observaciones entre el equipo de investigadores y las propias maestras que habían observado, vieron cómo podían agrupar las diferentes observaciones que habían hecho en 18 codificaciones diferentes que se referían de alguna manera a las acciones y decisiones que habían llevado a cabo.

Con la intención de facilitar el estudio de estas acciones, agruparon estos 18 códigos en cuatro categorías que servían para agrupar los diferentes códigos. De esta manera pretendían facilitar futuras observaciones. De aquí el nombre con el que bautizaron a esta nueva teoría, *Knowledge Quartet* (Figura 4.4).

De la propia construcción de esta categorización se desprende todavía una diferencia más respecto a la teoría del conocimiento de Ball: en el marco del KQ no es tan importante la categorización del conocimeinto en sí misma, sino la clasificación de las situaciones en las cuales este conocimiento emerge. Es por esto que estas dos teorías tienen mucho que ofrecerse la una a la otra (Rowland y otros, 2008, p. 24) . Cabe mencionar aquí que el número de códigos ha ido creciendo a lo largo de los años, aunque siempre con la intención de que no haya tantos códigos que al final sea impracticable.

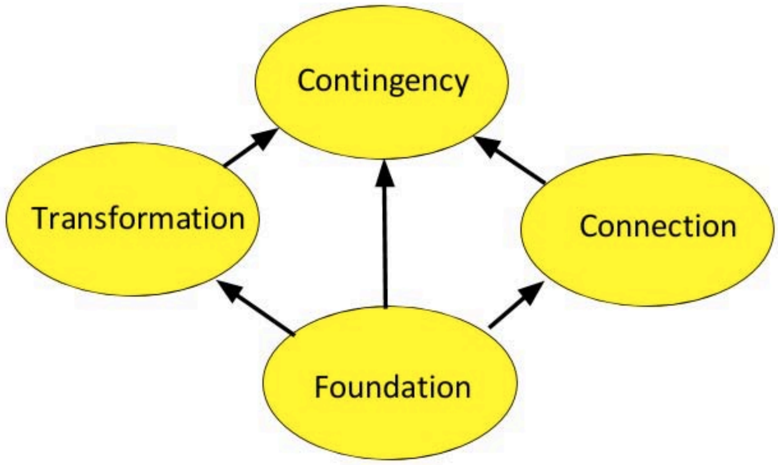


Figura 4.4: Categorías del KQ (Weston y otros, 2012)

La categoría que situamos en la parte inferior del diagrama, *foundation*, difiere de las otras tres en que estas últimas se refieren a acciones (incluyendo en su discurso) que realiza el profesor que nos llevan a observar cómo el conocimiento del profesor emerge y se conduce durante su intervención en el aula, mientras que la primera hace referencia a la base de conocimiento que hace emerger tras esas acciones. Aclararemos estos puntos en los siguiente apartados (Rowland y otros, 2004; Rowland y Ruthven, 2011; Rowland y otros 2011).

Foundation

A partir de ahora llamaremos a esta categoría **fundamentos**. En esta categoría se incluye tanto el conocimiento matemático como lo relativo a las creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas de las profesoras.

Estos conocimientos y creencias nos proporcionarán información sobre las razones por las cuales un profesor toma determinadas decisiones pedagógicas. Las componentes claves de esta categoria son: los conocimientos y la comprensión de las matemáticas en sí mismas y sobre investigaciones sobre didáctica de las matemáticas. Las creencias se refieren a las convicciones que poseen y los valores que desprenden los profesores. Estas creencias nos revelarán los diferentes posicionamientos ideológicos al respecto de la naturaleza del conocimiento matemático, el propósito de la educación matemática y las condiciones sobre las cuales el profesor cree que los alumnos aprenderán mejor las matemáticas.

Los códigos que nos darán información sobre esta categoría son:

- Consciencia de los objetivos de aprendizaje
- Identificación de errores (de los alumnos y propios)
- Demostración explícita de conocimiento de la materia
- Fundamentos teóricos de pedagogía
- Uso de la terminología matemática
- Interacción con el libro de texto y materiales didácticos
- Dependencia de los procedimientos

-

Transformation

A partir de ahora llamaremos a esta categoría **transformación**. En el conocimiento necesario para ser profesora se distingue "la capacidad del profesor de transformar el conocimiento del contenido que él posee en formas que son didácticamente poderosas" (Shulman 1987, p. 15). Es decir, el profesor tiene que ser capaz de transformar el conocimiento que él posee en una forma en la que los alumnos puedan aprender. Esto lo hará usando representaciones concretas, analogías, ejemplos, ilustraciones, explicaciones o demostraciones (Shulman 1986, p.9).

Así que esta categoría se diferencia de la anterior en que nos tiene que informar sobre cómo el profesor se dirige a sus alumnos de forma deliberada y preparada. Los códigos que nos deben permitir observar este tipo de conocimiento son:

- Explicaciones (actuaciones) del profesor
- Uso de materiales didácticos
- Elección de representaciones
- Elección de ejemplos

Connection

A partir de ahora llamaremos a esta categoría **conexión**. Para observar cómo emerge el conocimiento dentro de esta categoría es esencial fijarse en la coherencia entre ciertas elecciones o decisiones que toma el profesor durante una o varias sesiones. Es decir, observaremos la coherencia en su planificación.

Esta coherencia respecto a las conexiones incluye la administración por parte del profesor del discurso matemático dentro del aula, la secuenciación de los temas de los cuales hablará en clase en una sesión o cómo los conecta entre varias sesiones y las tareas que hace hacer a sus alumnos tanto dentro como fuera del aula.

Los códigos que afectan a la categoría de conexiones serán:

- Conexiones entre procedimientos
- Conexiones entre conceptos
- Anticipación de la complejidad
- Decisiones sobre la secuenciación
- Reconocimiento de la adecuación conceptual

Contingency

A partir de ahora llamaremos **contingencia** a esta categoría. La última de las categorías del KQ nos informará sobre cómo el profesor utiliza su conocimiento delante de cualquier situación que suceda en el aula fuera de su planificación (situaciones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas). Esta categoría está directamente relacionada con el tipo de saber del que nos hablan Mason y Spence (1999), el *knowing-to action*: la capacidad de respuesta ante un problema inesperado. De la misma manera que ellos sugieren esta denominación del saber para los alumnos como la que demuestra un conocimiento más elevado de la materia (se podría decir que corresponde también con la idea de competencia matemática de Niss), nosotros entendemos que las acciones que nos permiten observar esta categoría serán los que nos harán ver cómo el profesor es capaz de utilizar su conocimiento en una forma más elevada. Esto explica su situación en el diagrama de Figura 4.4 y el hecho de que todas las flechas apunten hacia ella. El profesor solo podrá gestionar la contingencia si posee un buen conocimiento en todas las otras formas.

Los códigos relacionados con la dimensión de contingencia son los siguientes:

- Gestión de las intervenciones de los alumnos
- Capacidad de respuesta delante de la disponibilidad (o no) de herramientas tecnológicas y materiales didácticos.
- Desviación de la agenda
- Reflexiones sobre las actuaciones propias (*teacher insight*)

4.6 La reflexión como herramienta para la mejora de la práctica docente

Es importante remarcar que, obviamente, la adquisición del conocimiento necesario para enseñar matemáticas no acaba con la formación inicial del profesorado (a pesar de que el aprendizaje durante toda esta época también tiene mucha influencia en la práctica del futuro docente). Las preguntas son: ¿cómo podemos ayudar a los profesores a que aprendan buenas prácticas? ¿cómo podemos aprovechar el trabajo en equipo de un departamento para que el aprendizaje de los profesores tenga una influencia explícita y positiva en su alumnado?

En esta línea se han desarrollado diversas experiencias que utilizan el marco teórico proporcinado por el KQ con el objetivo de mejorar la práctica docente tanto de futuros profesores en prácticas (Rowland, 2008) como de profesores en activo (Rowland y otros, 2004; Rowland y Turner, 2007). En estos estudios se muestra cómo ayudando al profesorado a focalizar la atención en el conjunto de sus clases de matemáticas dentro del contexto de su experiencia en las aulas y el trabajo con otros, el marco de trabajo del KQ sirve como soporte para desarrollar el MKT de los profesores (Turner 2012, p. 253).

-

Hodgen y Johson (2004), mencionados en Turner (2012, p. 255), estudiaron los mecanismos de reflexión de los profesores que llevan a cabo cambios en su práctica docente. En sus estudios demostraron que a los profesores les cuesta mucho reflexionar sobre su propia praxis en soledad. Necesitan zonas de promulgación para analizar y para reflexionar qué es lo que tienen que cambiar. Por ejemplo, de acuerdo con Mason y Spence (1999, p. 153), estas reflexiones se pueden conseguir haciendo revivir activamente incidentes o momentos recientes, junto con el ejercicio de imaginar situaciones semejantes en el futuro en las cuales puedan actuar como el profesor crea conveniente. De esta manera se podrán desarrollar acciones alternativas que se querrían intentar llevar a cabo. Será necesario también desarrollar la sensibilidad para reconocer oportunidades en las cuales se aplicarán estas nuevas estrategias.

En estos experimentos lo que se hace siempre es explicar el modelo con el que los profesores serán observados, se graban estas sesiones y se analizan. Finalmente los profesores visionan sus grabaciones junto con los observadores y sus compañeros y es así como se genera el entorno adecuado para reflexionar.

4.7 Diferentes palabras para las mismas ideas

Tal y como ya hemos anunciado, en nuestra investigación usaremos el modelo del KQ para indagar sobre cómo los profesores utilizan su conocimiento en su práctica docente. Pero de acuerdo con Turner (2012) los modelos de Shulman, Ball y Rowland tienen que ofrecerse mucho entre ellos. En la Tabla 4.2 podemos ver las relaciones que existen entre los diferentes modelos del conocimiento matemático del profesor. Como ya habíamos comentado, la catalogación del MKT de Ball nos ofrece una forma de catalogar los diferentes aspectos del conocimiento mientras que el KQ nos proporciona un marco para observar cómo estos conocimientos se usan en la práctica.

-

KQ	Shulman (1986)	Shulman (1987)	Ball, Thames and Phelp (2008)
Foundation	Propositional Case Study	Subject Matter Knowledge (SMK) Theoretical Pedagogical Content Knowledge (PCK) Curricular Knowledge (CK)	Common Content Knowledge (CCK) Specialised Content Knowledge (SCK)
Transformation	Propositional Case Study	Active Pedagogical Content Knowledge (PCK)	Knowledge of content and teaching (KCT) Knowledge of content and learners (KCL)
Connection	Propositional Case Study	Subject Matter Knowledge (SMK) Curricular Knowledge (CK)	Common Content Knowledge (CCK) Specialised Content Knowledge (SCK) Knowledge of Content and learners (KCL)
Contingency	Strategic Knowledge	Subject Matter Knowledge (SMK) Theoretical and active Pedagogical Content Knowledge (PCK)	Common Content Knowledge (CCK) Specialised Content Knowledge (SCK) Knowledge of content and teaching (KCT) Knowledge of content and learners (KCL)

Tabla 4.2: Relaciones entre el marco teórico del Knowledge Quartet y los modelos de Shulman y Ball (Turner 2012, p. 257)

5. Resolver problemas para aprender matemáticas

En esta investigación partimos de la idea de que el aprendizaje del lenguaje algebraico se debe conseguir en un ambiente de resolución de problemas. En este apartado estableceremos qué entendemos por problema de matemáticas y a qué nos referimos cuando decimos ambiente de resolución de problemas. También haremos un resumen de la literatura dirigida a la resolución de problemas centrándonos en cómo podemos conseguir que estos nos ayuden a que los alumnos construyan nuevos conocimientos matemáticos.

Una metáfora que ayudará a entender qué papel creo que deben jugar los docentes en el aprendizaje basado en la resolución de problemas fue una experiencia que viví en una viaje a Costa Rica. En el Parque Nacional de Tortuguero hay muchos científicos dedicados a la conservación de los huevos de tortugas marinas, declaradas en peligro de extinción. Los conservacionistas esperan a que las tortugas lleguen por la noche a la playa a poner sus huevos, dejan que se vayan y antes de que salga el sol, ponen los huevos en bidones con la fecha marcada. Cuando quedan una o dos noches para la eclosión de los huevos de tortuga (normalmente al amanecer), vuelven a coger el bidón, vuelven a enterrar los huevos en el mismo lugar de la playa y, todos los días hasta que las pequeñas tortugas salen, vigilan la zona para protegerla de los depredadores (incluido el ser humano). Cuando las tortugas rompen los huevos y caminan hacia el mar, las escoltan de nuevo protegiéndolas de las aves, los jaguares, etc. Con todo este proceso de protección, el porcentaje de tortugas que consiguen sobrevivir a todos estos depredadores es increiblemente bajo. Mi pregunta inmediata fue entonces: ¿y por qué no esperáis simplemente a que las tortugas nazcan en el bidón y las dejáis en el mar? La respuesta de la conservacionista que me estaba explicando el proceso me hizo pensar automáticamente en mi investigación. Me dijo que en todo este camino, las pequeñas tortugas debían aprender toda una serie de habilidades (salir de la tierra, localizarse, respirar fuera y dentro del mar, nadar...) que de otra manera sería imposible que aprendiesen y que entonces su supervivencia sería imposible. Pensé que eso era un símil muy adecuado para el aprendizaje en las aulas. El profesor debe ser un guía, capaz de estimular a los alumnos a abordar situaciones nuevas, a responder a cuestiones por las que no se conoce una respuesta, a elaborar estrategias de pensamiento, etc. Y todo ello haciendo preguntas y teniendo cuidado de no ser él mismo quien las responda. Si esto no se da en una situación basada en la resolución de problemas, dificilmente se conseguirá.

5.1 Hacer matemáticas en un ambiente de resolución de problemas

La resolución de problemas ha sido caracterizada por muchos autores como el corazón de las matemáticas (Halmos, 1980). Es por eso que los currículums de diferentes países alrededor del mundo han posicionado la resolución de problemas como el eje central del aprendizaje de las matemáticas, aunque con diferentes matices influidos por las diferentes culturas de los diferentes países (Törner, Schoenfeld y Reiss, 2007, p. 353).

En la línea de Schoenfeld (1992) los problemas de matemáticas deben servir como herramienta para ayudar a los alumnos a pensar matemáticamente. Esto es, "para desarrollar el punto de vista matemático, valorando los procesos de matematización y abstracción, teniendo predilección por usarlos y desarrollar la competencia con las herramientas del ramo, usándolas al servicio del objetivo de entender la estructura matemática" (Schoenfeld 1992, p. 335). Concretando por otra parte la idea de problema, a partir de ahora y de acuerdo con Vila (2004, p. 31), reservaremos el término problema de matemáticas para "designar una situación, planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno o grupo de alumnos que intenta resolverla, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos con la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar, investigar, establecer relaciones, implicar afectos, etc. para afrontar una situación nueva".

Una de las características que queríamos que tuviera la intervención que realizaríamos en esta investigación es que el aprendizaje de los alumnos se desarrollase en un ambiente de resolución de problemas. De acuerdo con Abrantes (1996, p. 10) en la intervención que hemos llevado a cabo para esta investigación no queremos que los problemas sean afrontados como factor de motivación externa, no pretendemos que sean utilizados únicamente como aplicación de conocimientos adquiridos, ni que se lleven al aula simplemente para introducir nuevos temas. Las actividades de aprendizaje que se implementarán en esta investigación se caracterizan por constituir situaciones problemáticas en las que sea necesario explorar, que despierten varias formas de razonamiento, que requieran el uso de procesos como experimentar, discutir, conjeturar o justificar. Es en este sentido en el que decimos que la resolución de problemas es el contexto de aprendizaje, relacionándolo con el ambiente de trabajo en el aula y con la naturaleza de las actividades que propondremos a las alumnas.

5.2 Construir matemáticas resolviendo problemas

De acuerdo con Schoenfeld (1992, p. 338), los objetivos por los que tradicionalmente los problemas son llevados al aula por los profesores pueden ser de naturaleza muy diferente:

- Como justificación para enseñar matemáticas
- Para dotar de motivación específica a temas concretos
- Como recreación

- Para dar significado al desarrollo de habilidades concretas
- Como práctica de habilidades y algoritmos
- Con el objetivo de desarrollar la competencia de resolución de problemas en sí misma

Por todo ello, la razón por la cual queremos que la intervención de esta investigación se produzca en el ambiente de resolución de problemas que hemos descrito es porque creemos que la resolución de problemas es el mejor camino para aprender matemáticas. Por eso "la selección de problemas se tiene que hacer con cuidado, de manera que inicialmente sean asequibles para las alumnas, que les permitan aplicar sus conocimientos, pero que a la vez les ayuden a tomar consciencia de la insuficiencia de su conocimiento para poder dar una respuesta totalmente satisfactoria" (Giné 2012, p. 17). De esta manera podremos mantener el interés del problema y crearemos el desequilibrio que permitirá a las alumas aprender nuevos conocimientos.

Un ejemplo en el campo que nos ocupa, el del aprendizaje del lenguaje algebraico, es el de las ecuaciones de primer grado. En muchos libros de texto, después de una disertación sobre operaciones con monomios y algunos ejemplos de resolución de ecuaciones sin el contexto que pueda dar un problema textual, nos encontramos con unos cuantos ejemplos resueltos de problemas textuales y unas propuestas posteriores para que el alumno pueda intentar imitar los procesos (Kieran 1992, p. 392). En la mayoría de los casos, los primeros problemas que se presentan sobre ecuaciones de primer grado se pueden resolver utilizando solamente operaciones aritméticas (Puig y Cerdán, 1990). Estos problemas no crean el desequilibrio del que hablamos y la experiencia nos dice que cuando un profesor intenta comenzar a utilizar el lenguaje algebraico con sus alumnos mediante este tipo de problemas las dificultades más habituales son bloqueos en los alumnos porque, para empezar, no entienden por qué se está usando esa herramienta tan compleja para ellos como es el lenguaje algebraico, cuando estos problemas se podrían resolver usando simples operaciones aritméticas (que pueden incluir el tanteo de las soluciones). De acuerdo con Arcavi (1999, p.43) concluimos que un problema como el que acabamos de describir no es más que un disfraz verbal de un simple ejercicio técnico, que no ayudará a desarrollar el nuevo lenguaje a nuestras alumnas.

En cambio, si el problema se presta a elaborar preguntas nuevas, es decir, si la solución del mismo despierta la curiosidad del alumno por su cuenta, en grupo, o con la ayuda de un profesor, se tendrá la posibilidad de seguir explorando la situación. Esto se puede conseguir, por ejemplo, si el problema no tiene una respuesta única o si la respuesta al problema no es el resultado de una operación sino la formulación de un argumento, una comparación, una conexión entre conceptos, o una traducción entre diferentes representaciones. Por eso es importante el cuidado en la selección de los problemas que hemos mencionado anteriormente.

Soportando el planteamiento que hacemos sobre la enseñanza (que ya hemos dicho que era todo aquello que un profesor hace para que los alumnos aprendan) está la concepción constructivista del aprendizaje, de la que nos hacemos partícipes. "El constructivismo define el concepto de conocimiento como una función adaptativa, mediante la cual los resultados de nuestros esfuerzos cognitivos tienen como propósito ayudarnos a hacer frente y entender el mundo de nuestras experiencias. Esas experiencias son subjetivas y, por ende, no pueden ser capturadas en la forma de conocimiento externo, objetivo, disociado de un sujeto. Lo que sí existe, son *dominios de consenso* que se crean a través de comunicación y negociación intersubjetiva" (Arcavi 1999, p. 41).

En matemáticas, comprender una idea, una expresión o un concepto es conectar el significado con otra idea de las propias matemáticas, o de otro dominio del conocimiento. Y no solo eso, implica también insertar esas ideas, con sus prácticas, sus procedimientos, etc. (Schoenfeld 1992b).

5.3 Un pequeño recorrido por la heurística

En el ámbito de las Ciencias de la Educación, cada disciplina aborda el estudio de la resolución de problemas con una visión propia. Concretamente en educación matemática se pueden distinguir diversas aproximaciones. La resolución de problemas ha sido estudiada por filósofos, psicólogos, matemáticos profesionales, especialistas en educación y didáctica de las matemáticas (Giné 2012, p. 14). En nuestro caso nos interesa, como ya hemos dicho antes, describir el proceso de resolución de problemas desde un punto de vista que nos permita ver cómo esta actividad permite al resolutor aprender no solamente estrategias de resolución de problemas sino también cómo el profesor conduce esta actividad de manera que sirva para que los alumnos aprendan *a hacer* matemáticas y en particular a utilizar el lenguaje algebraico. Para esto último creemos que debemos tener en cuenta el estudio de la resolución desde el punto de vista de la heurística.

Cualquier descripción de la resolución de problemas que se quiera hacer desde el punto de vista de la heurística no puede olvidar los trabajos de Polya (1945) y Schoenfeld (1985). Aunque uno se considere continuador del otro no puede obviarse cómo las metodologías de análisis de uno y de otro son esencialmente diferentes. En la misma línea debemos mencionar el modelo de Mason, Burton y Stacey, que proponen un instrumento de ayuda para la enseñanza en la resolución de problemas.

5.3.1 El modelo de Polya

Polya, en su libro *How to Solve it* (1945), estableció lo que a partir de entonces se conocería como la heurística moderna: el estudio de todas las operaciones mentales típicamente útiles en el proceso de resolución de problemas. No se trataba de un estudio sistemático de estas operaciones, como ya se puede deducir de su misma forma de exposición en forma de diccionario, sino de un conjunto de reflexiones acerca de los procesos que seguiría un *resolutor ideal*. Este resolutor ideal sería el sujeto que intenta resolver un problema siguiendo un proceso lineal que Polya establece según las siguientes cuatro etapas:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan:
    a. Determinar la relación entre los datos y la incógnita.
    b. De no encontrarse una relación inmediata se pueden considerar problemas auxiliares.
    c. Obtener finalmente un plan de solución.
3. Ejecución del plan.
4. Examinar la solución obtenida.

La estructura del modelo de Polya aparece de una u otra manera en todos los modelos que se han presentado con posterioridad y ha supuesto una ampliación del estudio a otros campos que intervienen también en la actividad de resolución de problemas.

5.3.2 El modelo de Schoenfeld

Schoenfeld quiso estudiar las dificultades que presenta un resolutor real cuando se enfrenta a un problema de matemáticas. En la resolución de problemas, aprender a pensar matemáticamente involucra algo más que poseer una gran cantidad de conocimiento de la materia: incluye ser flexible y dominar los recursos dentro de la disciplina, usar el conocimiento propio eficientemente y comprender y aceptar las reglas tácitas del juego (Schoenfeld 1985, p.12).

Para realizar este estudio, Schoenfeld analizó cientos de casos de diferentes resolutores y observó cómo se enfrentaban a las dificultades que les surgían delante de los problemas de matemáticas que les proponía. El estudio lo hizo siguiendo el modelo de Polya, dándose cuenta de que los resolutores reales no se enfrentan a los problemas de forma lineal. Schoenfeld pudo discriminar cómo las diferentes fases del proceso de resolución de un problema de Polya se suceden siguiendo caminos en zig-zag, con marchas atrás y adelante.

Otro aspecto muy importante en la propuesta de Schoenfeld son los componentes del conocimiento y comportamiento matemático, que son las siguientes:

1. Recursos: El conjunto de conocimientos matemáticos precisos para enfrentarse a los problemas.
2. Heurísticos: Técnicas generales de resolución de problemas.
3. Control: Modo en el que cada persona se maneja en el proceso de resolución de problemas, en que usa los recursos y los heurísticos que conoce. Esta categoría (que es nueva con respecto a los modelos anteriores) es la más crítica a la hora de lograr éxitos o fracasos. Por eso Schoenfeld le presta especial atención y diseña un programa para que los resolutores puedan mejorar.
4. Sistemas de creencias: Este tipo de conocimiento tiene una gran importancia en las actitudes que tomamos ante la resolución de problemas y puede hacer, por ejemplo, continuar o cesar en el intento de resolver un problema (en Vila 2004 o Giné 2012, por ejemplo, podemos encontrar estudios más detallados sobre el tema).

5.3.3 El modelo de Mason, Burton y Stacey

Mason, Burton y Stacey, en su libro *Pensar Matemáticamente* (1992) presentan una propuesta que pretende no ser solo un instrumento de análisis sino también de ayuda a la enseñanza. Entienden que analizar el proceso de resolución de un problema una vez se ha resuelto, permite retroalimentar nuestra experiencia, mejorando así la competencia en resolución de problemas.

Parten de la idea de Schoenfeld sobre la trascendencia del *control* en el proceso y proponen la idea de un **monitor**, una especie de tutor interior que dirige los procesos tanto personales como técnicos que se despliegan en la resolución de problemas. Este monitor se podrá desarrollar siempre que se contemple como fundamental el análisis. Los autores proponen la técnica del **rotulado** como medio para propiciarlo. Se trata de emplear una serie de convenciones simbólicas para describir los momentos claves de la resolución y los estados emocionales que provocan. De este modo se puede diferenciar entre el proceso mismo de pensamiento y la propia conciencia del proceso.

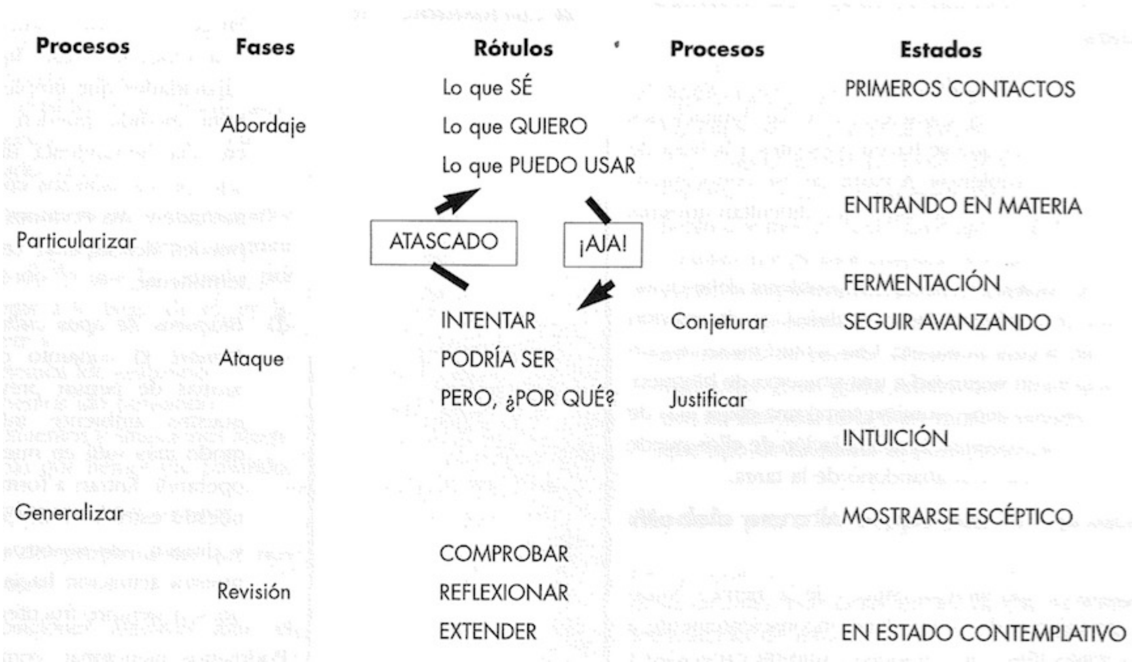


Figura 5.1: Modelo de resolución de Mason, Burton y Stacey (1992, p. 140)

5.4 El modelo de competencia

De acuerdo con Puig (1996) creemos que el marco teórico que nos proporciona su modelo de competencia es útil para los propósitos de esta investigación y que lo podremos usar para nuestro análisis. Este modelo de competencia está basado en la reformulación de las capacidades del resolutor ideal de Polya y en los componentes del modelo de actuación de Schoenfeld.

No debemos confundir el modelo de competencia de Puig con un enfoque competencial de la enseñanza, a pesar de que haya una cierta relación entre ambos conceptos. En el caso de la enseñanza basada en competencias, y de acuerdo con Niss (2011), lo que tenemos es el conjunto de habilidades que queremos que nuestros alumnos aprendan cuando hacen matemáticas. En el caso de las competencias referidas a la resolución de problemas, no sólo queremos que sepan resolverlos, sino que también queremos que sean capaces de hacerse preguntas de contenido matemático, por ejemplo. El modelo de competencia de Puig se refiere a las acciones que debería ser capaz de hacer un alumno cuando resuelve un problema, a los conocimientos y heurísticas que debe poseer y también a las tareas que el profesor puede hacer para ayudar al alumno a avanzar en la resolución de un problema.

Los elementos que componen el modelo de competencia de Puig son:

1. Destrezas con potencial heurístico
2. Sugerencias heurísticas
3. Herramientas heurísticas
4. Métodos de resolución con contenido heurístico
5. Patrones plausibles
6. El gestor instruido
7. Una concepción de la naturaleza de la tarea de resolver problemas según la cual esta se realiza con fines epistémicos

Los elementos de este modelo de competencia que nos interesa desarrollar para nuestra investigación son aquellos que son de contenido puramente heurístico, ya que en el aprendizaje del lenguaje algebraico la traducción entre diferentes lenguajes es una cuestión crucial para conseguir un aprendizaje significativo. Por otra parte desarrollaremos también las tareas del gestor, puesto que nuestro centro de observación serán las actuaciones de los profesores mientras gestionan la resolución de problemas en el aula.

5.4.1 La diferente naturaleza de los heurísticos

Se puede observar cómo el modelo de Puig considera que no todo lo que Polya llama heurística son conceptos de la misma naturaleza. De acuerdo con Puig (1996, p. 38) son heurísticos todos los modos de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos que son independientes del contenido y que no suponen garantía de que se obtenga la solución. Puig basa su distinción entre heurísticos en la consideración de que, por ejemplo, las estrategias descritas por Polya como *buscar un problema relacionado*, *hacer una tabla* o *considerar un caso* son en realidad muy diferentes entre sí.

Buscar un problema relacionado será una **sugerencia heurística** ya que nos indica una dirección de trabajo pero no se refiere a ningún procedimiento concreto para buscar o producir tal problema relacionado. En cambio, *considerar un caso,* sí que se refiere a un procedimiento determinado que permite, a partir del problema que se tiene que resolver, formular un problema relacionado. A este tipo de estrategias las llamaremos **herramientas heurísticas**, usando la palabra herramienta para indicar el carácter de transformación de esta estrategia. Por último, diremos que *hacer una tabla* es una **destreza heurística** ya que no tiene ese carácter de transformación del problema.

A pesar de que los tres elementos que acabamos de describir sean de diferente naturaleza, pueden aparecer combinados en el curso de la resolución de un problema. Por ejemplo, cuando el resolutor busca un problema relacionado, esta sugerencia le puede conducir a usar la herramienta heurística de considerar un caso, que a su misma vez le puede llevar a utilizar la destreza de organizar los datos en una tabla para ordenar la información.

Aun así hay que tener en cuenta que las sugerencias heurísticas no tienen como única función desencadenar el uso de herramientas heurísticas. También podrían servir para hacer búsquedas en la memoria a largo plazo apoyadas sobre las características del problema. Y por otro lado las destrezas heurísticas no son meras formas adecuadas de trabajo o de presentación del trabajo, sino que tienen potencial heurístico, es decir, sirven para descubrir. "Una *notación adecuada* puede ser el terreno en que se realicen las transformaciones que permiten descubrir lo necesario para resolver el problema" (Polya 1945, p. 137).

Puig (1996, p. 44) define *herramienta heurística* como un procedimiento independiente del contenido del problema que lo transforma en otro. Otras herramientas heurísticas que podemos encontrar en Polya (1945) son (además de la ya mencionada *consideración de un caso o de una serie de casos)*: la *división del problema en partes*, la *reformulación*, la *variación parcial*, el *examen de posibilidades*, el paso al *contrarrecíproco*, la introducción de una *figura auxiliar* y la *analogía aclarada*. Esta definición, por un lado, nos ha de permitir también distinguir con mayor precisión a qué se le llamará sugerencia y a qué destreza heurística. Por otro lado nos ha de permitir realizar un análisis de las relaciones entre el problema original y el transformado.

5.4.2 Las tareas del gestor

Puig (1996) introduce este elemento del proceso de resolución de problemas a partir de las dificultades observadas por Schoenfeld en las experiencias con resolutores reales. En nuestra investigación consideraremos que el papel del gestor lo juega el profesor, que es quien puede ayudar a los alumnos a recuperar el control sobre el proceso de resolución o usando el vocabulario de Mason, Burton y Stacey (1988) es quien puede monitorizar este proceso, ayudándoles a avanzar. La lista de funciones del gestor que describe Puig (1996, p. 48) se ha conseguido a través de la observación de casos de comportamientos:

- Evaluación de la familiaridad con el problema
- Evaluación del nivel de dificultad y de las oportunidades de éxito
- Evaluación de la dificultad cuando hay alternativas
- Uso de diversas aproximaciones para la comprobación
- Control de los errores que uno comete más frecuentemente
- Control de dirección en la ejecución del plan
- Revisión del plan ante la aparición de información nueva
- Evaluación del plan cuando se está atascado mediante cualquier elemento significativo del que se disponga
- Cambio de punto de vista para exploración o ante un atasco
- Recuperación de lo que hay de valioso en un plan abandonado
- Acarreo de información de un problema a otro
- Evaluación de la dificultad de un problema auxiliar
- Evaluación de la adecuación de un problema auxiliar

Por otro lado, Puig (1996, p. 61) elabora un modelo de enseñanza en el que describe las tareas de la profesora:

1. Resolver un problema de varias maneras
2. Plantear posibles formas de solución (sin llevarlas a cabo)

3. Tras resolver el problema planteado, enunciar problemas que estén resueltos en parte o se tenga idea de cómo resolverlos, gracias a la resolución del problema planteado
4. Variar sistemáticamente un problema, para generar otros
5. Describir por escrito el proceso de resolución y no sólo la solución

Estas tareas de la profesora corresponden con el enfoque de la enseñanza por competencias, en el sentido de que realizándolas de forma sistemática, pueden ayudar a los alumnos a desarrollar su competencia matemática. Por ejemplo, variando sistemáticamente un problema para generar nuevos problemas estará ayudando a los alumnos a plantearse nuevas preguntas matemáticas.

6. La construcción del lenguaje algebraico

En Alonso (1991, p. 13) podemos leer una experiencia de aula en que una alumna de primero del ya desaparecido BUP dice: "he encontrado la x, me da 6, pero ahora no sé si son las vacas, los hijos, o... no lo sé". Este tipo de respuesta de nuestros alumnos nos debe hacer reflexionar sobre cómo enseñamos álgebra y sobre qué álgebra enseñamos. En este capítulo fundamentaremos teóricamente estas reflexiones.

De acuerdo con Bishop (1977) un tipo de aprendizaje del álgebra en que el alumno solo tiene que aprender reglas para resolver ecuaciones cada vez más complicadas dista mucho de un aprendizaje que invite al alumno a mantener la postura crítica y reflexiva que implica un clima de resolución de problemas en nuestras aulas y seguramente esto implica que sea difícil que el alumno se sienta partícipe de la evolución de su propio conocimiento. "El currículum dirigido al desarrollo de técnicas no puede educar, porque no ayuda a comprender, no desarrolla significados. Y una crítica sencilla es que se limita a desarrollar los seres humanos la capacidad para hacer lo que las calculadoras y los ordenadores pueden hacer con mayor velocidad y precisión" (Bishop, 1997, p. 13). Estos argumentos ya nos dejan entrever que para conseguir un aprendizaje significativo del álgebra, tenemos que profundizar de forma contundente en su semántica más que en su sintaxis y en la simple manipulación de expresiones formales.

En este capítulo tenemos por objetivo aproximarnos a las respuestas de las siguientes preguntas: "¿qué es lo que obliga a tantos estudiantes a memorizar las reglas del álgebra?, ¿qué es lo que hace que la comprensión del álgebra escolar sea difícil para la mayoría? ¿Es el contenido la fuente del problema?, ¿o se trata de la forma en que se enseña lo que hace que los alumnos no sean capaces de dar sentido a esta parte de la materia?, ¿o es que los alumnos se acercan a las tareas algebraicas de una manera que es inadecuada para aprender la materia?" (Kieran 1992, p. 390). Lo haremos a través de un recorrido sobre qué es y cómo es el lenguaje algebraico que queremos ayudar a construir en nuestras aulas y cuáles son las razones por las que lo queremos utilizar.

Todo esto lo haremos sin dejar de tener en cuenta lo expuesto en el capítulo anterior: que nos interesa que la construcción del lenguaje algebraico se dé dentro de un enfoque competencial de la enseñanza y en un ambiente de resolución de problemas que propicie un entorno que ayude a construir el significado de los símbolos.

6.1 ¿Pero de verdad es tan difícil aprender a usar el lenguaje algebraico?

El lenguaje algebraico y las dificultades en su proceso de aprendizaje han sido centro de estudio de muchas investigaciones a lo largo de los años (Booth, 1984 y 1988; Kieran, 1992; Malisani, 1999; Palarea, 1999). Dentro de esta literatura encontramos desde justificaciones históricas hasta psicológicas, pasando también por catálogos y clasificaciones de errores y bloqueos que afectan a los alumnos, todos aportando muchas ideas para ayudarnos a superar estas dificultades en nuestras aulas.

6.1.1 El análisis de los errores algebraicos

De acuerdo con Kieran (1992), las dificultades de los alumnos frente al lenguaje algebraico están centradas en la falta de significado de las letras, en el cambio de las convenciones aritméticas hacia las algebraicas y en el reconocimiento y uso de estas estructuras cuando las tienen que abstraer.

Si tenemos en cuenta el rol de la historia de las matemáticas dentro de su aprendizaje podemos ver cómo las dificultades que se producen con el lenguaje algebraico vienen de lejos. Pero también debemos tener en cuenta que el uso de un simbolismo adecuado favorece el desarrollo del pensamiento algebraico. Por este motivo en la historia del álgebra tienen importancia no solo la historia de los conceptos sino también la del sistema de símbolos utilizados para poder expresarlos (Malisani 1999, p.4). Se pueden determinar tres períodos diferentes en la evolución del lenguaje algebraico:

- Fase retórica: Se considera como la anterior a Diofanto de Alejandría (250 d.C.) en la cual se usa exclusivamente el lenguaje natural, sin recurrir a ningún símbolo.
- Fase sincopada: Comprende desde la época de Diofanto hasta finales del siglo XVI, en la cual se introducen algunas abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de uso frecuente, pero los cálculos se desarrollan usando el lenguaje natural.
- Fase simbólica: Comenzada por Viète (1540-1603) y hasta la actualidad, es la fase en la cual se empiezan a usar letras para todas las cantidades y signos para representar las operaciones. Aquí se empieza a usar el lenguaje algebraico no solo para resolver ecuaciones, sino también para demostrar reglas generales.

El hecho de observar los siglos que han transcurrido desde que el ser humano empieza a utilizar las matemáticas hasta el momento en que hemos tenido la necesidad de desarrollar el lenguaje algebraico, teniendo en cuenta también el tiempo pasado desde que se inicia hasta que se perfecciona hasta el nivel en que los expertos lo usamos hoy en día nos da una primera idea sobre las dificultades que debe comportar su aprendizaje.

Los estudios de Booth (1984 y 1988) se dirigen al análisis de los errores en el uso del álgebra que se arrastran cuando se ve el lenguaje algebraico como aritmética generalizada. Estos estudios se basan en la hipótesis que compartimos de que los errores se producen por el hecho de que las alumnas interpretan las letras de muchas formas inesperadas.

Por ejemplo, si tomamos una expresión algebraica como 3(x+5)+1, esta se puede ver como la descripción de un proceso de cálculo, como una función o simplemente como una cadeana de símbolos (Ameron, 2002).

Para poder trabajar con las diferentes interpretaciones que hacen los alumnos respecto de los símbolos, Booth usa como marco teórico la clasificación de Kücheman y Collins sobre los diferentes niveles de interpretación que hacen los alumnos sobre las letras en el álgebra:

1. Letra evaluada: Respuesta en que a la letra se le asigna un valor.
2. Letra no usada: El alumno ignora la letra, o puede que conozca la existencia, pero no le da un significado.
3. Letra como objeto: La letra se entiende como una abreviatura de un objeto o como un objeto en sí mismo.
4. Letra como a incógnita específica: El alumno reconoce la letra como un número específico pero desconocido y puede operar con él directamente.
5. Letra como número generalitzado: Se ve como el alumno acepta que la letra puede tomar diferentes valores.
6. Letra como variable: La letra se ve como un rango de valores no especificados y se reconoce que hay una relación sistemática entre dos conjuntos de valores.

Una de las conclusiones importantes de estos estudios es que los alumnos se sienten incómodos dando respuestas de tipo algebraico a los problemas. Por ejemplo, respondiendo a la pregunta sobre la Figura 6.1 "¿qué podrías decir sobre el área de la siguiente figura?" (Booth, 1984 p. 36), muchos alumnos sienten que no han dado una respuesta completa aunque sepan decir que el área es 3(7+f).

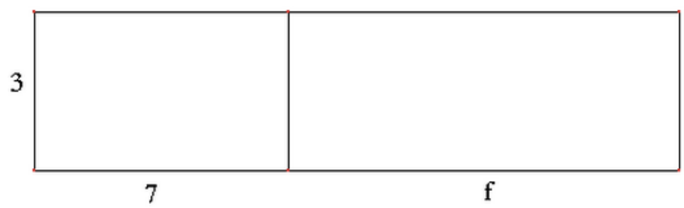


Figura 6.1: ¿Qué podrías decir sobre el área de la siguiente figura? (Booth, 1984, p. 36)

Vemos en este ejemplo que los alumnos ignoran el significado de los símbolos que se supone que han aprendido. De acuerdo con Ortiz (1997, p. 47) incluso algunos de los alumnos más diestros con los cálculos algebraicos utilizan el álgebra como una máquina de cálculo y no como una herramienta apta para describir y comprender generalizaciones o para argumentar en matemáticas.

En este mismo sentido, muchos alumnos tienen la necesidad de cerrar sus respuestas simplificando al máximo las expresiones, aunque estas simplificaciones no sean correctas. Es por eso que delante de expresiones como 2a+3b acaban escribiendo que esto es igual a 5ab. Entienden que tienen que juntar al máximo las expresiones de manera que su respuesta no tenga operaciones explícitas. De nuevo estos alumnos no tienen adquirida la idea de que el álgebra es una herramienta de generalización y por eso quieren dar una respuesta final.

Respecto a las diferentes interpretaciones de las letras, un ejemplo muy interesante nos lo proporcionan las respuestas a la pregunta sobre si la siguiente expresión puede ser o no cierta en algún caso:

$$x+y+z = x+t+z.$$

La mayoría de los alumnos responden que nunca puede ser cierta porque hay letras diferentes. Además, algunos de los que responden que puede ser cierta a veces, lo hacen denotando mucha inseguridad en la respuesta.

6.1.2 Y si es tan difícil, ¿por qué insistimos en enseñar álgebra?

De acuerdo con Alonso y otros (1991, p. 47), los símbolos escritos son una manera conveniente y poderosa de representar algunas situaciones matemáticas y manipularlas. Una vez que determinados problemas se representan simbólicamente estos se pueden resolver fácilmente. Sobre todo cuando el problema es complejo, su representación simbólica puede resultar muy ventajosa. Estas palabras son las que nos animan a pensar que tenemos que ayudar a nuestros alumnos a construir el lenguaje algebraico.

También apoyamos nuestro interés en el enfoque competencial del aprendizaje de las matemáticas. Niss (2011, p. 51) divide la competencia matemática en dos grandes grupos. Uno de estos grupos ha de servir para desarrollar en los alumnos la capacidad de lidiar con el lenguaje matemático y sus herramientas, que comprende las siguientes cuatro competencias:

1. *Representing competency*: Ser capaz de lidiar con diferentes representaciones de conceptos matemáticos, fenómenos y situaciones.
2. *Symbol and formalism competency*: Ser capaz de trabajar con expresiones simbólicas y fórmulas en matemáticas.
3. *Communicating competency*: Ser capaz de comunicar sobre matemáticas y de usar las matemáticas para comunicarse.
4. *Aids and tools competency*: Ser capaz de utilizar la tecnología para hacer matemáticas.

Queda claro que en todas estas competencias es básico para las alumnas un buen aprendizaje del lenguaje algebraico. Lo mismo ocurre en la legislación local. En el documento de desplegamiento de la competencia matemática de Burgués y Sarramona (2013) se refieren a la dimensión de Comunicación y Representación, que se desarrolla en las siguientes competencias:

- Representar un concepto o relación matemática de diversas maneras y usar el cambio de representación como estrategia de trabajo matemático.
- Expresar ideas matemáticas con claridad y precisión y comprender las de los demás.
- Usar la comunicación y el trabajo colaborativo para compartir y construir conocimiento a partir de ideas matemáticas.
- Seleccionar y usar tecnologías diversas para gestionar y mostrar información y visualizar y estructurar ideas o procesos matemáticos.

Está claro que las competencias dentro de la dimensión de Comunicación y Representación no las podemos dar por asumidas solamente con la construcción del lenguaje algebraico. También debemos hacer que los alumnos sepan usar, por ejemplo, gráficos estadísticos para comunicar datos. Pero dado que el objetivo de esta tesis y de este apartado en concreto está centrado en el lenguaje algebraico continuaremos por este camino sin dejar de ser conscientes que abandonamos muchas otras puertas que quedan abiertas al estudio del desarrollo de estas competencias.

Así pues, parece que el álgebra debe ser una herramienta que nos ayude a resolver problemas. Pero nuestros alumnos se equivocan al utilizarla. ¿Por qué? ¿Por qué comenten errores cuando utilizan este lenguaje que todo lo debería solucionar? Y sobre todo, ¿por qué se resisten a utilizarlo cuando los profesores se lo enseñamos a usar? De acuerdo con Ameron (2002), podemos argumentar que el álgebra que enseñamos no ha cambiado mucho durante las últimas décadas y que, además, esta se continúa transmitiendo de forma rígida, como una rama abstracta de las matemáticas poco relacionada con el mundo real y con el contexto de los alumnos. Una visión clásica de las unidades didácticas sobre álgebra nos muestra cómo estas forman parte del currículum solo como un conjunto de reglas de transformaciones de expresiones y de procesos de resolución de ecuaciones. Además, con este enfoque tradicional de la enseñanza del lenguaje algebraico se pretende que los alumnos memoricen una serie de reglas sobre manipulación algebraica (sintaxis) mucho antes de que ni tan solo el alumno haya tenido la necesidad de utilizar el álgebra para expresar sus ideas y para resolver problemas (semántica).

Para encontrar una respuesta a la segunda pregunta nos podemos acoger a los estudios de Kieran y Filloy (1989), que confirman que un común denominador es la ausencia de métodos algebraicos en las respuestas a problemas planteados a alumnos de entre 12 y 16 años. Los alumnos, en general, prefieren utilizar estrategias aritméticas y de ensayo y error. Ellos señalan como una posible causa las dificultades sintácticas implícitas en los métodos algebraicos, por lo tanto, el uso del lenguaje algebraico más que una necesidad se convierte en un impedimento para resolver los problemas.

Los hechos expuestos acaban llevándonos hacia una falta de motivación hacia las matemáticas de nuestro alumnado, ya que el dominio del álgebra se ha utilizado, de forma intencionada o no, como método para seleccionar alumnos, método que también influye en las elecciones de los estudios post-obligatorios. "Los alumnos se alejan de las matemáticas antes de haber experimentado no solo con su propia habilidad para construir conocimiento matemático, sino, lo que es más importante, sin haber comprendido la importancia y la utilidad del mismo en sus propias vidas", Kaput (2000, p. 2).

Por lo tanto, de nuevo de acuerdo con Ortiz (1997, p. 47), pero ahora escribiendo en positivo: queremos que nuestros alumnos tengan claro el significado de los símbolos cuando los aprenden a usar, queremos que vean el lenguaje algebraico como una herramienta que facilita los cálculos cuando los usan para, por ejemplo, representar generalizaciones, para comunicar argumentaciones matemáticas o para resolver problemas. En definitiva queremos que el lenguaje algebraico les resulte útil para hacer matemáticas.

Con esta visión de lo que debería ser el lenguaje algebraico que enseñamos en nuestras escuelas, de cómo debería enseñarse y de con qué objetivo hacerlo, a continuación presentaremos una visión de este lenguaje que, a nuestro entender, cumple con las características que deseamos.

6.2 Hacia una definición de álgebra escolar

De acuerdo con Kieran (1992, p. 392), una visión tradicional del la enseñanza del álgebra incluye simplificar y factorizar expresiones, resolver ecuaciones realizando la misma operación a ambos lados de la igualdad y manipular parámetros de ecuaciones funcionales como, por ejemplo, $y = mx + 2$ para estudiar familias de funciones. Además, los capítulos introductorios al lenguaje algebraico de muchos libros de texto enfatizan las conexiones del álgebra con la aritmética. Aunque los currículums oficiales han cambiado en favor de las competencias básicas y de una visión más rica de una herramienta matemática tan potente como es el lenguaje simbólico, hay que tener en cuenta que la educación de los profesores que hoy en día enseñan a nuestros alumnos se ha basado en currículums anteriores y que muchos libros de texto siguen teniendo la misma estructura. Por lo tanto, esta visión tradicional continúa imperando.

Consideramos que esta visión del álgebra es demasiado simplista y que por lo tanto no genera un aprendizaje competencial (en el sentido de que ayude a desarrollar la competencia matemática de los alumnos). Así que si queremos enfocar el aprendizaje del lenguaje algebraico desde un punto de vista competencial y con toda la complejidad necesaria, lo primero que tenemos que hacer es ponernos de acuerdo en qué queremos decir cuando hablamos de álgebra escolar.

De acuerdo con Kieran (2004), para que una alumna sea capaz de construir el lenguaje algebraico, en primer lugar esta alumna debe tener desarrollado un conjunto de habilidades que llamaremos pensamiento prealgebraico. Este es un pensamiento que nos ha de permitir analizar relaciones entre cantidades, percibir estructuras, estudiar el cambio, generalizar, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir.

En los siguientes apartados haremos un recorrido a través de las diferentes versiones de definiciones de álgebra escolar que nos ha de permitir posicionarnos al respecto, teniendo en cuenta también el pensamiento prealgebraico.

6.2.1 Del pensamiento prealgebraico al *Early Algebra*

En los estándares del NCTM (2000, p.37) se recomienda la introducción al lenguaje algebraico a edades muy tempranas para poder "construir una base sólida de aprendizaje y experiencia como preparación para un trabajo más sofisticado con el álgebra de los grados medio y superior". En este sentido Ameron (2002, p. 32) distingue entre preálgebra y *Early Algebra* en el sentido que mientras la primera tradicionalmente se ocupa de la introducción del álgebra a partir de la generalización de la aritmética para minimizar las dificultades de los alumnos en la manipulación de objetos algebraicos, la segunda trata de desarrollar el razonamiento algebraico desde todos los puntos de vista posible y desde una época muy temprana. Se trata de un cambio de terminología que implica un cambio de enfoque en el sentido de que según el *Early Algebra,* este pensamiento se desarrollará si se mantiende una línea de trabajo en la que los maestros tengan en cuenta el desarrollo de estas habilidades constantemente.

De acuerdo con Kieran (2004, pp. 140-141), las habilidades de las que estamos hablando son:

1. Focalizar el estudio de la aritmética en las relaciones aritméticas y no solo en el cálculo de la solución numérica.
2. Focalizar en las operaciones tanto como en sus inversas, relacionándolas con la idea de hacer y deshacer.
3. Focalizar en las ideas de representar y resolver un problema, más que en la cuestión de calcular la solución.
4. Focalizar en el estudio con números y letras, no solo con números. Esto incluye trabajar con letras que puedan ser incógnitas, variables o parámetros, aceptar como respuestas expresiones literales no cerradas y comparar equivalencias entre expresiones basadas en las propiedades y no solo en evaluaciones numéricas.
5. Focalizar el estudio en la reflexión sobre los diferentes significados que puede tener el signo igual.

Por ejemplo, a edades tempranas, el hecho de que nuestros alumnos sean capaces de hacer el cálculo de la siguiente suma 2+3 y además de saber que esto es igual a 3+2 no nos asegura que podamos pensar que son capaces de entender una expresión como a+b = b+a. En primer lugar, es posible que ni siquiera entiendan lo que quiere decir la expresión a+b. Tal y como dice Booth (1984, 1988), en primer lugar el alumno tendría que ser capaz de entender que el signo "+" no necesariamente implica el cálculo del resultado. Una propuesta para trabajar esta idea sería dar la oportunidad a los alumnos de vivir experiencias en las que tengan que trabajar con expresiones del tipo: 5 =2+3=1+4, etc.

Otro ejemplo de trabajo en este sentido lo podemos encontrar en Molina (2007). Se trata de hacer preguntas orientadas a la justificación de igualdades como las siguientes: 75+23 = 23+75, 53+41=54+40, 100+94-94 = 100. Los alumnos que posean el pensamiento relacional necesario para desarrollar el lenguaje algebraico serán aquellos que sean capaces de dar justificaciones no solo en términos del cálculo operativo sino también en términos de las estructuras que allí se observan.

Finalmente expondremos otro ejemplo interesante que nos tiene que servir para trabajar con las operaciones inversas. Si a un alumno le proponemos que encuentre el valor que tiene que poner dentro del espacio que queda para que la siguiente operación sea cierta:

$$7 + \_\_\_ = 10$$

y nos da la respuesta correcta, de nuevo no podremos asumir que entiende que la operación inversa de la suma es la resta, ya que es muy posible que lo que haya hecho es encontrar el resultado de la suma. Es decir, resolver el ejercicio simplemente usando las herramientas de cálculo de resultados y sin implicar las relaciones entre operaciones. Por ejemplo, Booth (1984, p. 48) nos propone que en las aulas se trabaje con este tipo de expresiones pero usando decimales o bien con números lo bastante grandes como para que sea más cómodo realizar la resta que no diferentes sumas para aproximar el resultado.

Más recientemente, Kaput (2008, p.12-14) amplió las ramas que debía desarrollar el *Early Algebra* considerando las siguientes habilidades:

1. Construcción de generalizaciones desde los razonamientos aritméticos y cuantitativos.
2. Descripción de variaciones en diversos contextos (idea de función).
3. Usar estas generalizaciones y la descripción de variaciones para expresar modelos.

En conclusión, el *Early Algebra* representa una forma de trabajar en las aulas en las que el objetivo es desarrollar el pensamiento relacional, que es aquél que en definitiva permitirá examinar las expresiones aritméticas y algebraicas como totalidades y detectar las relaciones entre ellas y entre sus términos. En definitiva, esta es una propuesta de algebrización del currículum desde edades muy tempranas (Kaput 2000, p. 3).

6.2.2 Álgebra simbólica

Para poder ayudar a nuestras alumnas a construir el lenguaje algebraico simbólico es necesario que hayan tenido experiencias en *Early Algebra* que les hayan brindado la oportunidad de desarrollar el pensamiento relacional que acabamos de describir. En una primera aproximación hacia lo que nosotros llamaremos álgebra escolar podríamos decir que el álgebra está constituida por un conjunto de afirmaciones por las cuales es posible producir significado en términos de números y operaciones aritméticas, incluyendo igualdad y desigualdad (Lins y Giménez 1997, p. 107).

Muchos autores han dado diferentes versiones sobre lo que debería ser el ábegra escolar. A pesar de los diferentes enfoques y la diversidad de definiciones, lo que todas ellas tienen en común es que todas afirman que hay diversas formas de razonamiento algebraico y que todas se tienen que desarrollar si queremos que nuestros alumnos construyan el lenguaje algebraico en un sentido amplio.

Por ejemplo, Usiskin (1988) distingue las siguientes dimensiones: álgebra como generalización de la aritmética, álgebra como el estudio de los procedimientos para resolver algunos tipos de problemas (básicamente se trata de la resolución de ecuaciones), álgebra como el estudio de relaciones entre cantidades (se habla aquí tanto de las relaciones que proporcionan las fórmulas de la geometría como el estudio de funciones) y el álgebra como estudio de estructuras (sintaxis y manipulación de objetos algebraicos abstractos).

El modelo de Kieran (1992), en cambio, caracteriza el álgebra a partir de las actividades que ella considera que el alumnado desarrolla de forma habitual: expresión algebraica (incluyendo la formación de ecuaciones y de expresiones algebraicas), actividades de transformación basadas en reglas (es decir, la sintaxis del lenguaje algebraico) y por último el metanivel (actividades donde el álgebra se usa como herramienta para desarrollar el propio lenguaje algebraico), incluyendo aquí la resolución de problemas, el proceso de modelización, el estudio de estructuras matemáticas abstractas, etc.

También en los NCTM (2000) podemos encontrar una caracterización de lo que se considera álgebra escolar. Allí se describen cuatro temas que sirven para caracterizar el álgebra escolar: funciones y relaciones, modelización, estructuración y lenguaje de representación.

Finalmente, explicaremos con detalle el modelo que mejor liga con el objetivo de esta investigación: **construir el lenguaje algebraico en un ambiente de resolución de problemas**. Nos referimos a la definición de álgebra escolar que propone Kaput (2000). El autor distingue cinco formas de razonamiento algebraico:

1. Generalización y formalización de patrones y restricciones
2. Manipulación de formalismos guiada sintácticamente
3. Estudio de estructuras abstractas, cálculo y relaciones
4. Estudio de funciones, relaciones y variaciones
5. Lenguaje de modelización

Además tiene en cuenta que estas cinco formas de razonamiento algebraico, tal y como es de esperar y desear, se interrelacionan y se superponen entre ellas hasta el punto en que en algunas actividades de aprendizaje es difícil su distinción (se ilustra esta idea en la Figura 6.2).

Como este será el modelo que desarrollaremos en nuestra investigación para acabar construyendo nuestro propio modelo de razonamiento algebraico, a continuación detallaremos sus características en profundidad.

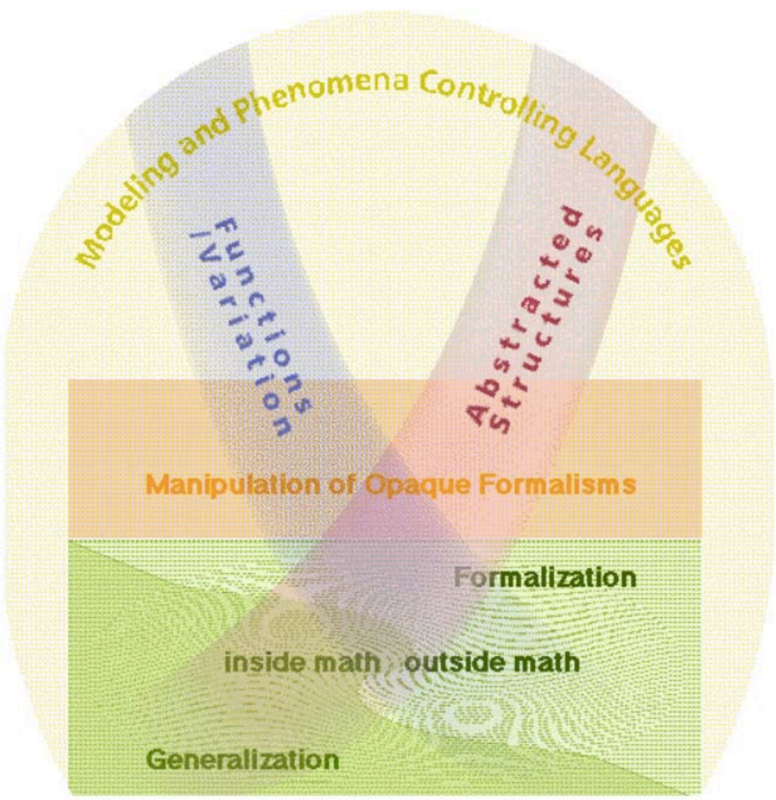


Figura 6.2: La superposición e interrelación de las cinco formas de pensamiento algebraico (Kaput 2000, p. 5)

El **álgebra como generalización y formalización de patrones y restricciones** es la más general de las cinco formas de razonamiento que considera Kaput. Por lo tanto, en este modelo, el resto acabarán convergiendo en esta. Generalizar y formalizar es una actividad intrínseca del pensamiento matemático. Necesitamos generalizar, por ejemplo, para poder relacionar situaciones que no están ligadas por el mismo contexto. Identificar patrones, seguir procesos, analizar estructuras y encontrar las relaciones entre ellas son ejemplos de esta misma forma de razonamiento.

Es importante tener en cuenta que las primeras generalizaciones que normalmente hará un alumno delante de una profesora se hará en un lenguaje que no es propio de ninguno de los dos: ni del que enseña ni del que aprende. Es decir, que el alumno todavía está construyendo su propia manera de comunicar y el profesor ya tiene adquirido como propio el lenguaje matemático (algebraico en este caso) necesario para comunicar, junto con todos los formalismos asociados. Por ejemplo, la primera vez que un alumno quiere expresar un número impar cualquiera, hasta que llegue a la conclusión de que puede escribir $2n+1$, la comunicación tendrá lugar usando un lenguaje que no es propio del álgebra formal. En estos momentos la profesora tiene que ser capaz de escuchar con cuidado al alumno y ser capaz de generar una serie de diálogos que acerquen al alumno a la construcción del lenguaje algebraico.

Kaput (2000) distingue además dos fuentes de generalización: las que sirven para comunicar y razonar cuestiones propias de las matemáticas, que usualmente comienzan con la aritmética, y las que se basan en situaciones fuera de las matemáticas pero que son susceptibles de ser matematizadas. En consecuencia hay que tener en cuenta que en un aula donde se promueva la comprensión como vehículo de aprendizaje, los estudiantes se sentirán más atraídos por la generalización si esta se hace a través de experiencias con significado que puedan derivar en sus propias formalizaciones.

Cuando Kaput nos habla de la **manipulación guiada sintácticamente** se refiere al uso de formalismos sin hacer incidencia en su significado, coincidiendo con la idea del metanivel del aprendizaje de Kieran (1992). Como decía Bertrand Rusell, "*(formal) algebra allows the user to think less and less about more and more*" (Kaput (2000), p. 11). Desafortunadamente el problema es que la enseñanza tradicional del álgebra hace mucho más hincapié en este "less and less". Aquellos alumnos que aprenden a usar el álgebra a través de su sintaxis creen que entender el álgebra quiere decir recordar qué reglas se tienen que aplicar a cada cadena de símbolos. Pero entender el álgebra está muy lejos de esto: el objetivo tiene que ser ser capaz de conectar el conocimiento de los procedimientos y técnicas (sintaxis) con el conocimiento de los conceptos (semántica). Kaput nos propone que trabajemos la sintaxis usando conceptos lejanos a la aritmética generalizada, que es la que nos encamina hacia la resolución de ecuaciones. Afirma que de esta manera no haremos que nuestros alumnos caigan en la trampa de cometer errores de los que luego será difícil desprenderse.

Nosotros creemos que este tipo de razonamiento algebraico que tiene que ver con la automatización y la mecanización de algunos procesos es necesario. Pero, en cambio, también creemos que no es un tipo de razonamiento que nos interese construir de forma separada al resto. Cualquier proceso que consideremos puramente mecánico creemos que no es necesario construirlo si no tenemos detrás algún contexto (y por contexto también entendemos los contextos puramente matemáticos) que haga necesario su uso. A partir de tener diversos contextos que necesiten de estas mecánicas, la automatización surgirá de forma natural, a diferentes velocidades y profundidades para diferentes alumnos.

De hecho, ligado a la manipulación guiada sintácticamente, y exponiendo lo que para Kaput es **el estudio de estructuras abstractas y el cálculo con relaciones** (la siguiente forma de razonamiento algebraico que presenta), Kaput (2000) nos propone un contexto de trabajo de lo que él llama sintaxis, donde el alumno tiene un contexto para construir una formalización: los grupos diédricos. El alumno en este caso tiene la geometría como base y por lo tanto se puede llegar a construir un lenguaje estructurado sin necesidad de la aritmética. Pero a su vez esto no implica que en este ejemplo nos hayamos desligado de la semántica para trabajar con formalismos algebraicos. Por lo tanto, a través de un contexto podemos dar un significado al lenguaje algebraico que nos permite una formalización con la que trabajar la sintaxis del lenguaje.

Para **estudiar funciones y relaciones** la notación tradicional usa el álgebra simbólica como herramienta habitual de comunicación. Sin embargo está claro que no solo el álgebra nos ha de servir para hacer razonamientos en este sentido. Gráficas y tablas de valores son recursos habituales para transmitir informaciones referentes a estos conceptos. Por eso este proceso también involucra la **generalización**: nos podemos preguntar qué es lo que tienen en común todas estas formas de expresar la misma información. Por otro lado, se considera que los gráficos de funciones son también un sistema de símbolos que hay que interpretar.

El último de los aspectos que trata Kaput (2000) sobre el razonamiento algebraico es el **álgebra como lenguaje de modelización.** De hecho insiste en que, en realidad, modelar situaciones es la primera de las razones por las cuales es necesario estudiar álgebra. En la modelización nuestro objetivo es estudiar un fenómeno para conseguir matematizarlo. En este sentido, las nuevas tecnologías nos permiten hacer este proceso de manera ágil. Pero se ha de tener en cuenta que si bien los entornos virtuales son cuantitativamente muy ricos, son pobres en cuanto a su manipulación. En cambio, los modelos físicos en que los alumnos pueden experimentar con sus propias herramientas tendrán mucha riqueza manipulativa pero poca precisión numérica y siempre el número de experimentos será limitado. Es por eso que Kaput nos recomienda trabajar con los dos tipos de experimentos de forma muy ligada.

6.2.3 El sentido de los símbolos

Para completar la definición de álgebra escolar creemos que es importante hablar del **sentido de los símbolos**, aspecto que nos ayudará a encajar el uso del lenguaje algebraico con la resolución de problemas.

Está ampliamente aceptada la existencia de un sentido sobre los números y la aritmética (NCTM, 2000) que hace que la enseñanza sobre la aritmética no tenga únicamente como foco las cuatro operaciones. Es evidente que es importante saber cuándo se debe realizar una determinada operación, comprender las relaciones de desigualdad, tener un sentido sobre los órdenes de magnitud, ser diestro a la hora de cambiar de algoritmo para un determinado cálculo, ser capaz de descartar un resultado incoherente, etc.

La pregunta que pretendemos responder en este apartado es si hay un sentido paralelo sobre los símbolos algebraicos. Para contestar a esta pregunta nos basaremos en los estudios de Arcavi (1994 y 2005) al respecto. En estos artículos no encontramos una definición de lo que es el sentido de los símbolos, sino una serie de reflexiones sobre capacidades que tendría que desarrollar una persona que posea este sentido. Planteado de esta manera resulta ser un documento muy práctico que nos puede servir como marco de trabajo para enfocar las implementaciones que llevaremos a cabo en nuestra investigación. Además hay que tener en cuenta que dadas las características y los objetivos de nuestra investigación, no solo nos interesa cómo desarrollar este sentido en nuestros alumnos sino también ser capaces de analizar si los profesores poseen estas habilidades y son capaces de transmitirlas a los alumnos.

Este sentido representa, por tanto, una de las relaciones entre la construcción del lenguaje algebraico y el conocimiento del profesor.

Como ya hemos dicho antes, aunque el hecho de poseer un sentido sobre los símbolos es una cuestión de la que en la literatura no hay una definición completa, lo que sí podemos encontrar es una serie de **comportamientos** delante de los símbolos que hay que tener en cuenta para poder decir que una persona posee este sentido (Arcavi 2005):

1. **Amigabilidad con los símbolos:** Este comportamiento implica una comprensión de los símbolos que nos permita decidir cuándo y cómo los símbolos pueden y deben ser usados con el objetivo de ejemplificar relaciones, generalizaciones y demostraciones que de otra forma quedarían ocultas.

   Pero no solo eso, también nos ha de permitir reconocer en qué momento los símbolos dejan de ser útiles y por lo tanto es mejor recurrir a otra representación de un concepto matemático para resolver un determinado problema.

2. **Capacidad para "manipular" y también "leer a través" de expresiones simbólicas, como aspectos complementarios en la resolución de problemas algebraicos:** Este comportamiento implica ser capaz de pararse a reflexionar delante de una manipulación ya automatizada de los símbolos para dotarlos de un significado que ayude en la resolución de un determinado problema.

   Por ejemplo, delante de la resolución de la ecuación:

   $$\frac{2x+3}{4x+6}=2$$

   un alumno que tenga desarrollado este comportamiento se dará cuenta de que el denominador es el doble del numerador y de que, por lo tanto, no puede haber solución. Incluso si la resuelve y a través de manipulaciones algebraicas obtiene el resultado $x=-\frac{3}{2}$, sabrá que este resultado es falso y sabrá argumentar por qué.

3. **Consciencia de que uno puede diseñar exitosamente relaciones simbólicas que expresen cierta información (verbal o gráfica) dada o deseada:** El ejemplo que se propone de este tipo de comportamiento es la construcción de una expresión algebraica de una función que cumpla unas ciertas características (en este caso que pase por una serie de puntos dados).

4. **La capacidad de seleccionar una posible representación simbólica (es decir, escoger la variable a la cual se le debe asignar un determinado símbolo) y, en ciertos casos, reconocer nuestra propia insatisfacción con esta elección, prestarle atención e ingeniárselas para encontrar una mejor:** Por ejemplo, en el proceso de resolución de un cierto problema, hacer una pausa para considerar si seria más conveniente representar tres números consecutivos como *n, n+1, n+2* o bien como *n-1, n, n+1* o cualquier otra posibilidad.

5. **Consciencia de la necesidad de revisar los significados de los símbolos durante la aplicación de un procedimiento, durante la resolución de un problema o durante la comprobación de un resultado y comparar estos significados con las intuiciones alrededor de los resultados esperados y con la situación misma del problema:** Por ejemplo, en un problema en el que queramos tratar la generalización algebraica o en concreto la búsqueda de un patrón, podríamos proponer la actividad inversa: dar un patrón algebraico y hacer que los alumnos tengan que buscar su significado relacionándolo con el problema.

6. **Consciencia de que los símbolos pueden tener diferentes roles en diferentes contextos y desarrollar un sentido intuitivo de estas diferencias:** Un ejemplo claro de este comportamiento es la distinción entre variables y parámetros en la ecuación de la recta $y = ax + b$.

Según el mismo Arcavi (2005, p. 7) la caracterización de la idea del sentido de los símbolos no está completamente desarrollada. Él propone como posibilidad aumentar la colección de ejemplos para las diferentes categorías, proponer una lista más extensa de categorías y convertirla en un marco de trabajo para la investigación y para el diseño de unidades didácticas.

7. Síntesis del marco teórico

Después del recorrido que hemos hecho a través del iceberg del que ya hablábamos en el apartado 3. , y que sirvió como metáfora para ilustrar la dificultad de la problemática que estamos estudiando, queremos sintetizar en este apartado nuestra fundamentación teórica para acabar de asentar las bases de nuestra investigación y así relacionar los tres campos de estudio que nos ocupan en esta investigación.

Una de las confusiones más comunes en educación matemática es asumir que la mejor, y quizá la única manera, de poseer un conocimiento es conseguir soltura a través de la práctica hasta la perfección. Ciertamente ganar soltura reduce los esfuerzos y simplifica la atención requerida sobre las estructuras y efectivamente si se tiene que escoger una herramienta de trabajo los profesionales eligirán aquella que les resulte más familiar. Pero la experiencia nos dice que practicar hasta la maestría es insuficiente. Muchas técnicas que se aplican hasta la perfección fallan en el momento en que se tienen que aplicar para resolver problemas (ya hemos hablado de ello en el apartado 1.), mientras que otras técnicas se aprenden sin realmente practicarlas tanto (Mason 1999, p. 156).

Es por esto que hemos elegido la resolución de problemas como enfoque para la enseñanza del álgebra, porque con este enfoque de la enseñanza creemos que se puede conseguir un ambiente de aula que propicie un aprendizaje pausado, flexible y transparente. En este sentido, el papel del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje es crucial. Por ejemplo, debemos tener en cuenta, de acuerdo con Arcavi (2005, p. 14), que cuando se plantea un determinado hecho problemático en el aula, las profesoras sienten una "necesidad de cierre" íntimamente relacionada con la sensación de falta de eficacia que experimentan cuando en una o dos sesiones no consiguen que los alumnos encuentren la solución del problema. Debido a esta necesidad en ocasiones no se dejan momentos para la reflexión ni espacio de tiempo suficiente para que la necesidad de recurrir al álgebra para resolver un problema surja por sí sola. Por lo tanto nos tenemos que plantear si el profesorado tiene conocimiento sobre secuencias de problemas adecuados para hacer que el pensamiento y el lenguaje algebraico afloren.

La ausencia de este conocimiento por parte de las profesoras dificulta un trabajo centrado en el significado de los símbolos algebraicos y provoca casi inevitablemente una enseñanza centrada en la sintaxis de este lenguaje. Debemos recordar que nuestro objetivo es que los alumnos desarrollen un sentido sobre los símbolos que "va más allá de una cuestión puramente congnoscitiva. Está conectado con aquello que se espera que un alumno produzca, con aquello que se valora, con aquello que está aceptado con las reglas del juego, más allá de la manipulación simbólica" (Arcavi 2005, p.11). Esta visión del uso del álgebra nos recuerda el enfoque competencial que queremos que caracterice nuestro modelo de enseñanza.

Por eso, para iniciar la construcción del lenguaje algebraico, diseñaremos secuencias de problemas que cumplan las dos características sugeridas por Kieran (2004):

- Las tareas que demandan los problemas deben implicar los procesos que están conectados con el pensamiento algebraico, es decir, generalización, argumentación y justificación, predicciones y demostraciones.

- Los problemas deberían implicar el uso de representaciones variadas de conceptos matemáticos, es decir, de expresiones verbales, diagramas, dibujos o gráficos, etc. Los símbolos algebraicos no tienen por qué ser los protagonistas en el momento de plantear los problemas y no necesariamente tienen por qué ser la única forma de resolverlos.

Nuestra concepción del conocimiento del profesor incluye saber qué enseñar y por qué (Rowland y otros 2009), y cómo diseñar tareas de aprendizaje (de la Fuente, Rowland y Deulofeu 2016, p. 26). Por eso, y dado nuestro enfoque de trabajo en equipo entre las profesoras, es necesario que puedan acordar qué es el lenguaje algebraico y qué es lo que los alumnos deberían saber. La multiplicidad de las dimensiones del lenguaje algebraico que sugiere Kaput (2000) nos ofrece un marco adecuado para compartir con las profesoras la complejidad de este lenguaje. Por esta razón nos basaremos en esta definición para elaborar una propia en el apartado 9.

Nuestra visión constructivista del aprendizaje nos lleva a precisar el significado que para nosotros tendrá la palabra enseñar, que serán todas aquellas acciones que el profesor lleve a cabo con el objetivo de que los alumnos aprendan.

Por otro lado, dado que uno de nuestros objetivos es observar el proceso completo de diseño, discusión e implementación de secuencias didácticas en el aula por parte de los profesores y analizar cómo los profesores utilizan su conocimiento durante la implementación, hemos decidido utilizar el marco teórico del conocimiento que nos ofrece el *Knowledge Quartet* (KQ). Recordemos que el KQ identifica cuatro *categorías de situaciones* que nos permiten analizar cómo los profesores utilizan su conocimiento matemático mientras implementan una tarea: *fundamentos, transformación, conexión y contingencia.* La Tabla 7.1 resume estas categorías y sus los códigos que contribuyen a cada una de ellas.

Dimensión	Código contributorio
Fundamentación (Foundation) Conocimiento y comprensión sobre matemáticas y su didáctica. Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre las condiciones en que los alumnos las aprenden mejor.	Conciencia del propósito; Adherencia a los libros de texto; Concentración en los procedimientos; Identificación de errores; Conocimiento explícito del tema; Base teórica de didáctica; Uso de terminología matemática.
Tranformación (Transformation) Presentación de ideas a los alumnos en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones.	Elección de ejemplos; Elección de representaciones; Uso de materiales para enseñar; Modelación del profesor (para explicar un procedimento).
Conexión (Connection) Secuenciación de los materiales de enseñanza y consciencia de las demandas cognitivas relativas a los diferentes temas y tareas.	Anticipación de complejidad; Decisiones sobre la secuenciación; Reconocimiento de la pertinencia conceptual; Conexiones entre procedimentos; Conexiones entre conceptos.
Contingencia (Contingency) Capacidad de dar respuestas convincentes, razonadas y bien informadas a acontecimientos imprevistos y no planificados.	Desviación de la agenda; Responder a las ideas de los alumnos (uso de las oportunidades); Visión retrospectiva del profesor durante la enseñanza; Repuestas a la (in)disponibilidad de herramientas y recursos.

Tabla 7.1: The Knowledge Quartet - Dimensiones y códigos contribuyentes (Rowland y otros 2014, p. 25)

Hay que tener en cuenta que los códigos que contribuyen en el modelo de Rowland aparecen de manera simultánea. Es por eso que en nuestro análisis todas estas categorías jugarán un papel muy importante, ya que queremos ver cómo el conocimiento aflora mientras se implementan las tareas en clase. Aún así creemos que el rol de las conexiones que realiza el

-

profesor tendrá un papel crucial en el aprendizaje del lenguaje algebraico.

Diremos que se produce una conexión cuando se establece una relación entre dos elementos de forma que el enlace se base en un principio de lógica, coherencia y continuidad (Gamboa y Figueiras 2014, p. 2). Por ejemplo, respecto a las herramientas heurísticas, que son aquellas que tienen capacidad transformadora de los problemas, se abre la vía para analizar las distintas maneras que tienen de realizar tal transformación y cuáles pueden ser los efectos que pueden esperarse de su uso para la solución del problema originalmente planteado. Dicho análisis puede conducirse guiado por preguntas del estilo de las siguientes: ¿cuál es la intención de su uso?, ¿cómo está relacionado el problema original con el problema transformado? O, la solución del problema transformado, ¿qué implica para la solución del problema original?, ¿qué se puede traer de la solución del problema transformado al problema original?, ¿cómo queda transformado el problema original al incorporarle lo que se traiga de la solución del transformado? Las respuestas a todas estas preguntas tendrán sin duda un componente muy importante en cuanto a las conexiones que se realizan en el aula ya que "la construcción de cadenas de significado en matemáticas requiere del establecimiento de transformaciones entre representaciones" (Gamboa y Figueiras 2014, p. 3).

Durante el resto de la memoria veremos cómo hemos modificado algunos de los marcos teóricos que estamos utilizado para fundamentar nuestra investigación, de manera que se adapten completamente a nuestras necesidades. En concreto, como ya se ha anunciado, adaptaremos la definición de álgebra escolar de Kaput (2000) e incluiremos un nuevo código en la categoría de conexiones del KQ.

---TERCERA PARTE---

METODOLOGÍA

En este capítulo describimos el diseño metodológico de la investigación, la recogida de datos y la metodología de análisis. En general, hemos elegido un enfoque cualitativo e interpretativo.

En primer lugar, veremos cómo hemos caracterizado lo que entenderemos por álgebra escolar y cómo hemos utilizado esta caracterización para rediseñar las unidades didácticas de los dos primeros cursos de la ESO con el objetivo de asegurarnos que los alumnos tienen más oportunidades de aprender este lenguaje en clase de matemáticas.

A continuación explicaremos cuál ha sido el proceso de recogida de datos, cómo hemos seleccionado los datos que hemos analizado, incidiendo en la idea de que esta selección la hemos hecho con la intención de poder analizar el proceso completo de diseño e implementación de unidades.

Por último explicamos cómo hemos realizado el análisis usando el marco teórico proporcionado por el *Knowledge Quartet* y cómo hemos incorporado algunas herramientas de análisis inéditas a este marco.

8. Contexto de la investigación

El contexto de la investigación tiene características que es importante tener en cuenta de cara al diseño metodológico. En este apartado explicaremos las características del centro, ofreceremos una visión general sobre nuestra visión del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en todo el centro (de infantil a bachillerato), veremos cómo se organiza el Departamento de Matemáticas del centro y cómo se diseña el currículum propio. Explicaremos también cuál es la metodología de trabajo habitual sin dejar de tener en cuenta que la intervención llevada a cabo por esta investigación ha constituido una mejora de este proceso.

A continuación haremos un recorrido por el contexto, empezando por lo más general: las características del centro donde realizamos la intervención y acabando por lo más concreto: el Departamento de Matemáticas y su enfoque de la enseñanza.

8.1 El centro

El centro educativo donde hemos realizado la intervención es un centro privado de Barcelona, concretamente de la zona de Sarrià-Sant Gervasi. Los alumnos provienen de familias acomodadas de Barcelona, con un alto nivel adquisitivo. Los alumnos pueden entrar al colegio con tres años y la mayoría se quedan allí hasta la etapa de Bachillerato. Tiene tres líneas para cada curso desde infantil hasta cuarto de la ESO. En Bachillerato hay una línea para el Bachillerato Científico y otra para el Bachillerato Humanístico-Social. Desde el curso 2014-15 también se ha incluído en el proyecto pedagógico la posibilidad de cursar el Bachillerato Internacional.

Se trata de un centro de tradición británica. Durante las etapas de Infantil y Primaria se sigue el *National Currículum* y las clases se hacen en inglés contando con profesores nativos en esta lengua. En el curso correspondiente a primero de Primaria de nuestro sistema educativo (Year 2 del sistema británico) los alumnos empiezan a tener algunas clases en castellano y a partir de segundo de Primaria (Year 3) también tienen algunas clases en catalán. En la etapa de Secundaria los alumnos tienen la posibilidad de empezar a estudiar una segunda lengua extrangera, que pueden escoger entre Francés o Alemán. En el segundo curso de la ESO se presentan al examen de Cambridge del First Certificate, en cuarto al Advanced y en 2º de Bachillerato tienen acceso al nivel Proficiency. La escuela es miembro de la asociación NABSS (*National Association of British Schools of Spain*).

8.2 Las matemáticas en el centro

Como ya hemos dicho, durante las etapas de Infantil y Primaria los alumnos siguen el currículum de matemáticas británico. Por tanto los libros de texto siguen el *National Curriculum* y las maestras de matemáticas son de origen británico. El último año de Primaria (Y7) se sustituyen dos de las horas de matemáticas en inglés por dos horas en catalán. Así, durante este curso tienen tres horas de clase de matemáticas en inglés y dos horas en catalán. Una de las razones de este cambio es que los alumnos comiencen a trabajar con el vocabulario específico de la materia en este idioma.

En Secundaria, en cambio, el currículum de matemáticas que seguimos es el currículum catalán. La flexibilidad que tienen estos alumnos con el idioma hace que sea posible usar en clase sin ningún problema material que esté en cualquiera de las tres lenguas que dominan: catalán, castellano e inglés.

Durante el segundo ciclo de la ESO los alumnos se presentan a los exámenes oficiales de Cambridge conocidos como IGCSE (*International General Certificate of Secondary Education*) que son las pruebas que permiten obtener el título británico equivalente a nuestra Secundaria. En particular se presentan al IGCSE de matemáticas (*Math Extended* o *Math Core*) y esto lo hacen en el cuarto curso de la ESO. Más de dos tercios de los alumnos eligen la opción de presentarse a la opción *Extended*, mientras que el resto se presentan a la opción *Core*.

En la etapa de Secundaria se debe tener en cuenta que en el centro se trabaja dividiendo los alumnos en grupos flexibles y homogéneos. Los grupos son flexibles en el sentido que dos veces por trimestre son revisados y se cambian alumnos si se considera necesario. La separación es homogénea en cuanto al nivel de matemáticas de los alumnos. Los alumnos están separados en tres grupos: A, B y C, siendo el grupo A el que contiene a los alumnos que demuestran mayor talento para las matemáticas y el grupo C el que agrupa a los alumnos con más dificultades en el aprendizaje de la materia. En el grupo C se dispone de dos profesores en el aula durante las cuatro horas semanales de clase de matemáticas. Además los tres grupos de matemáticas tienen el mismo horario. Por lo tanto, se da la situación de que los cuatro profesores tienen que llevar a clase el mismo material a la misma vez y se deben organizar para llevar aproximadamente el mismo ritmo, ya que todas las evaluaciones son comunes para los tres grupos. Actualmente se está revisando esta forma de trabajar, y en particular se está estudiando la idoneidad o no de tener a los alumnos distribuidos de esta manera.

En Bachillerato cabe destacar que los alumnos del Bachillerato Humanístico-Social pueden elegir la asignatura de Matemáticas 1 y 2 que corresponde a la modalidad Científica. Además se ofrece la asignatura optativa de Ampliación de Matemáticas tanto en primero como en segundo curso. En la modalidad Internacional de Bachillerato se ofrecen los niveles: *Mathematical Studies, Standard Mathematics* y *Mathematics High Level*, que se imparten en inglés.

8.3 El Departamento de Matemáticas de Secundaria

El Departamento de Matemáticas de Secundaria está formado por todos los profesores y profesoras de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. Así pues, durante el curso 2014-15, cuando se realizó la intervención, estaba formado por cinco profesoras y tres profesores.

Como en la ESO las tres líneas desde 1° hasta 4° curso están separadas por niveles de habilidad y las clases de cada curso de todos los niveles tienen lugar en el mismo horario, es muy importante que todas las profesoras de un mismo curso se coordinen bien y trabajen en equipo. El objetivo es mantener la coherencia entre los diferentes profesores del departamento y la flexibilidad en los cambios de nivel que podemos realizar sea posible y no represente un problema para las alumnas (recordemos que revisamos los niveles dos veces por trimestre). Por lo tanto es importante que todos los profesores tengan claros los objetivos de aprendizaje de cada tarea que llevan al aula, puesto que estos cambios se pueden realizar en medio de una unidad didáctica y que la evaluación es la misma para todos los niveles.

Para poder llegar a este nivel de coordinación disponemos de una hora de reunión semanal del Departamento de Matemáticas. En estas reuniones nos ponemos al día de las programaciones, unificamos criterios de evaluación y trabajamos de forma conjunta en el diseño de nuevas unidades didácticas o en la mejora de las existentes. Además yo, como jefe del Departamento, tengo reuniones individuales de periodicidad semanal o quincenal con alguno de los profesores del Departamento para poder ayudar a cada uno de ellos con las tareas individuales que se asignan en la reunión conjunta.

El equipo de profesoras que forma el Departamento cree que la formación permanente es una herramienta fundamental para poder desarrollar su trabajo. Por eso participamos activamente en muchas jornadas y congresos sobre educación matemática (como asistentes y como ponentes) y también organizamos cursos de formación y asesoramientos dentro de nuestro horario (a veces incluidos dentro de nuestra hora de reunión semanal).

8.4 Del Departamento de Matemáticas a la programación

Las programaciones de los diferentes cursos de matemáticas son el nexo de unión entre la propuesta pedagógica del centro (concretada por el Departamento de matemáticas) y la práctica docente en el aula de las profesoras. Estas programaciones han de precisar cuáles son los contenidos que se tratarán en cada curso, cuáles serán los **objetivos de aprendizaje** para nuestras alumnas y cuáles serán las **tareas** que se implementarán, incluyendo **orientaciones** didácticas para llevarlas a cabo y cuáles serán los **criterios de evaluación** de cada una de ellas.

El hecho de que el centro donde se realiza la intervención sea de tradición británica tiene influencia en la estructura de nuestra programación. De acuerdo con la terminología británica, la programación se divide en cuatro niveles de concreción:

- *Long Term Plan (LTP)*: Es el temario resumido por trimestres.
- *Medium Term Plan (MTP)*: Consiste en un resumen de cada unidad didáctica. En él, podremos ver qué bloques del currículum trabajamos en cada unidad y cuáles son los procesos que trabajamos dentro de cada bloque.
- *Day Plan (DP)*: Es la que representa el máximo nivel de concreción con respecto al enfoque de la enseñanza. Contiene orientaciones para la metología de trabajo en el aula y acceso a todos los materiales necesarios para llevar a cabo la acción de aula.

- *Weekly Plan (WP):* No es nada más que un calendario para situar en qué parte de la secuencia de actividades se encuentra cada profesor.

Tal como podemos ver en la Figura 8.1, el LTP simplemente nos informa sobre el título de las diferentes unidades didácticas que trabajaremos en cada trimestre y contiene los enlaces que llevan a la información concreta de cada unidad. También podemos encontrar enlaces a los criterios de evaluación de cada trimestre y a una presentación general de la asignatura, documentos que también estarán disponibles para los alumnos.

[Programació 2º d'ESO]

1er Trimestre	2o Trimestre	3er Trimestre
Juguem amb la probabilitat (ir) Coneguem la nostra classe! (ir) Les matemàtiques del calendari (ir)	Resolució de problemes (ir) Del preu d'una pizza al pla musical (ir) Funcions per estalviar (ir)	La forma dels objectes (ir) Argumentació en geometria (ir) La relació freqüència-longitud (ir)
Avaluació i percentatges (ir) Recuperació (ir)	Avaluació i percentatges (ir) Recuperació (ir)	Avaluació i percentatges (ir) Recuperació (ir)
Presentació de l'assignatura (ir)		

Figura 8.1: Ejemplo de *Long Term Plan* de 2º de ESO de la programación del Departamento

En la Figura 8.2 podemos encontrar un ejemplo de *Medium Term Plan* que corresponde a la página del documento a la que se accede desde el LTP cuando se selecciona la unidad *Del preu d'una pizza al pla musical* del segundo trimestre del 2º curso de la ESO. En primer lugar encontramos una pequeña explicación del tema (pensada para que la pueda entender también un alumno) y la temporización. En azul están resaltados los bloques del currículum que se trabajan en esa unidad. Por último podemos encontrar los procesos que querremos que nuestros alumnos aprendan con las tareas que harán en clase y por último un resumen de los criterios de evaluación específica de la unidad (es el apartado de *Seguiment*).

Del preu d'una pizza al pla musical

Duració: 15 sessions

En aquesta unitat veurem com, conegudes unes dades, podem esbrinar certa informació extra sobre allò que estem estudiant. Ara bé, aquesta informació que desvetllarem no sempre seran unes solucions numèriques concretes, també obtindrem com a resultats de les nostres investigacions les relacions de dependència entre quantitats.

Així que aprendrem a interpretar relacions de dependència entre quantitats, tot relacionant diferents representacions de les mateixes, com ara taules de valors, gràfics i expressions algebraiques, a més d'aprendre a expressar-les verbalment.

Finalment us sorprendrem veient com aquestes relacions també es poden fer servir per descriure una peça musical. Intentarem aprofundir en algunes relacions entre la música i les matemàtiques.

Blocs del curriculum

Numeració i càlcul	Canvi i relacions	Espai i forma	Mesura	Estadística i atzar

Procesos

Canvi i relacions
- Relació i comparació entre diferents formes de representació d'una mateixa relació.
- Exploració de relacions entre expressions verbals, taules i gràfiques, en situacions de proporcionalitat.
- Identificació de funcions lineals i anàlisi de les seves propietats a partir de taules o gràfiques en diferents contextos.
- Modelització i resolució de problemes utilitzant representacions diverses, com gràfiques, taules i equacions i expressions verbals.
- Resolució de sistemes d'equacions lineals amb fluïdesa. Interpretació gràfica.

Espai i forma
- Ús del model cartesià per representar i explicar relacions numèriques i relacions algebraiques.

Seguiment

- Combinar linialment representacions icòniques, incloent utilitzar la proporcionalitat per trobar condicions equivalents.
- Calcular i/o expressar una quantitat en funció d'una altra, contruïnt taules de valors i expressions algebraiques.
- Resoldre problemes fent servir representacions icòniques o llenguatge algebraic
- Relacionar els diferents llenguatges de representació d'una informació (verbal, gràfica, taules de valors o expressió algebraica)

Criteris d'avaluació (ir)

Figura 8.2: Ejemplo de *Medium Term Plan* de 2º de ESO de la programación del Departamento

-

El *Day Plan*, en cambio, es la parte de la programación con el máximo nivel de concreción. Para entender completamente el Day Plan, es importante saber qué sistema utilizamos para atender la diversidad en el aula. Este sistema se caracteriza por dos hechos fundamentales: los grupos de nivel y las programaciones por colores (verde, amarillo y rojo). El color verde contiene todo lo que es indispensable aprender dentro de una unidad didáctica. Más allá de esto puede haber planes individuales para algunos alumnos particulares que gestiona el Departamento de Diversidad. Aquello que esté marcado de color amarillo también son contenidos básicos, pero con propuestas de problemas algo más difíciles. Por lo tanto, el alumnado con más dificultades podría no hacer esta parte y aun así seguir el ritmo del curso. Por último, el color rojo nos indica que aquellos problemas son de ampliación. La decisión sobre qué hace cada alumno es negociada entre la profesora y los propios alumnos. Podría ser que en algunas actividades, y dentro de la misma aula, los alumnos no estén trabajando exactamente las mismas tareas. En la Figura 8.3 se puede ver un fragmento de un ejemplo de este nivel de concreción de la programación.

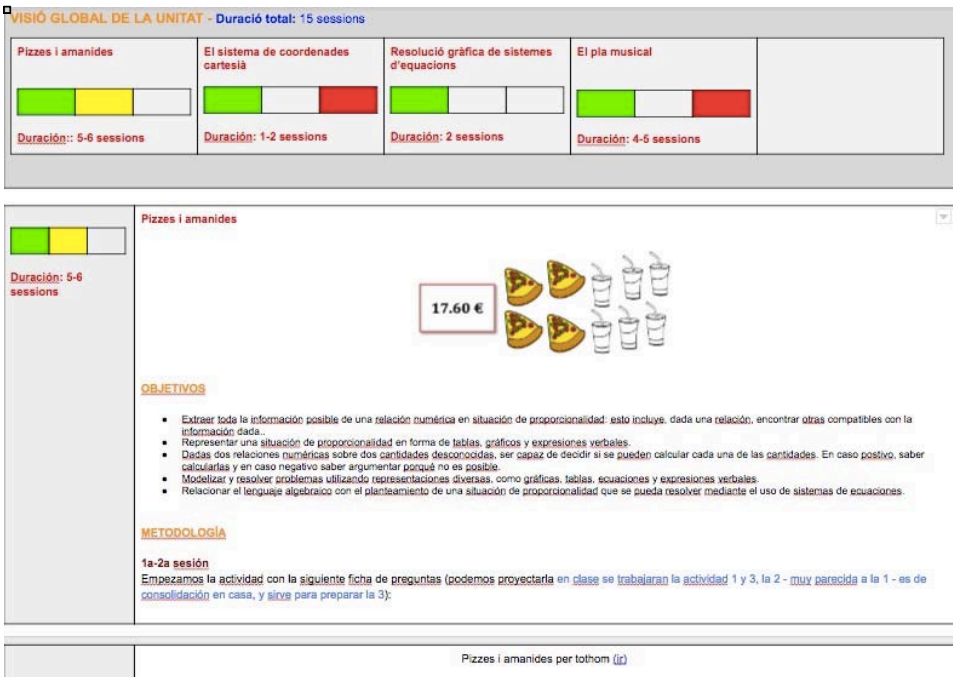


Figura 8.3: Fragmento ejemplo de *Day Plan* de una unidad de 2º de ESO de la programación del Departamento

En cada celda del *Day Plan* se puede ver un conjunto de actividades de aprendizaje que siguen una secuencia lógica. El conjunto de estas secuencias de actividades es lo que conforma una unidad didáctica particular. También se informa sobre la temporización aproximada de cada actividad, de los objetivos de aprendizaje de cada una de ellas y se pueden encontrar los enlaces a todo el material digital necesario, además de enlaces a documentos con más información para los profesores, normalmente dirigidos al lugar de donde hemos obtenido la actividad original. La intención es que las profesoras puedan encontrar todo el material necesario para prepararse las clases en un solo lugar.

Por último disponemos del *Weekly Plan*, un calendario donde los profesores van escribiendo qué actividades implementan en cada sesión. Es un diario del profesor que sirve para poder trabajar de forma coordinada y en equipo (Figura 8.4).

Semana 21 09-13 / 2	SKI WEEK	SKI WEEK	SKI WEEK	SKI WEEK	SKI WEEK
Semana 22 16-20 / 2		RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS **Problemas a l'esprint AULA MÓVIL (grupos de 4 o 5)** Enunciados 2011 (ir) Soluciones 2011 (ir) Soluciones 2011 explicadas (ir)	**Problemes a l'esprint**	cuadrados -> generalizar de la lista de 1º de ESO (ir)	ENTREGA DE LA FOTOGRAFÍA MATEMÁTICA!!!!! cuadrados -> generalizar de la lista de 1º de ESO (ir)
Semana 23 23-27 / 2		+ funciones arcavi Representaciones del ahorro (ir)	+ funciones arcavi Representaciones del ahorro (ir)	+ funciones arcavi suma de funciones (ir)	+funciones arcavi suma de funciones (ir)
Semana 24 02-06 / 3		problema de las coordenadas!!! (sirve de repaso) ponemos un punto en el 3r cuadrante y otro punto en el 1r	**Exámenes trimestrales (es el de mates)**	**Exámenes trimestrales** **acabar las actividades que no estén hechas de antes de globales y cerrar el trimestre.**	**Exámenes trimestrales** **• TENEMOS clase normal** **GRUPO C. EMPEZAR A**

Figura 8.4: Fragmento de ejemplo de *Weekly Plan*

8.5 ¿Cómo reciben los alumnos el material para trabajar?

El centro inició un proyecto 1x1 con tabletas durante el curso 2013-14, en concreto con iPad, así que el material que reciben los alumnos tiene en cuenta el medio del que disponen. Los profesores hemos diseñado un iTunes-U para cada curso de la ESO, desde donde se pueden descargar todo el material necesario para trabajar. La Figura 8.5 es un ejemplo del iTunes-U que usamos en 2º de ESO.

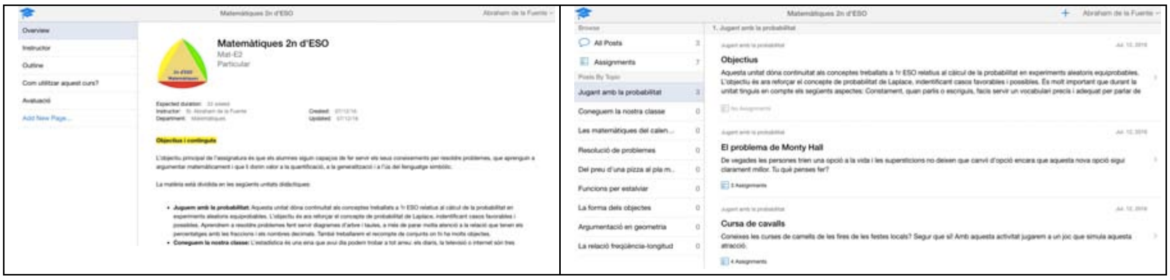


Figura 8.5: Fragmentos del Itunes-U de 1º de ESO.

8.6 La filosofía de enseñanza a través del diseño de las unidades didácticas

Uno de los principios del Departamento de Matemáticas del centro es que diseñamos nuestros propios materiales de aprendizaje o adaptamos materiales ya existentes. Pensamos que la enseñanza basada en libros de texto es impersonal y que nosotros somos los últimos responsables de cómo aprenden nuestros alumnos, por eso el diseño del material de aprendizaje debe ser tarea nuestra. De acuerdo con Bishop (1997, p. 10-13), el libro de texto ejerce un control sobre los profesores que nosotros no estamos dispuestos a asumir. Lo que de verdad necesitamos son actividades y recursos que contribuyan al desarrollo del aprendizaje de nuestros alumnos, y lo que de verdad necesita un alumno es un entorno de aprendizaje cálido, comprensivo e intelectualmente estimulante. Así que si ninguna de las dos partes necesita un libro de texto, ¿por qué estos tendrían que ser tan dominantes? Esta fue la reflexión que hace ya seis años llevó a nuestro Departamento de Matemáticas a decidir dejar de usar libros de texto de forma definitiva en nuestras aulas. El proceso viene de más lejos aún, dos años antes ya usábamos muchas actividades diseñadas o adaptadas por nuestro equipo, hasta que llegó un momento en que el libro no se usaba para casi nada en el aula y como material de consulta daba más problemas de los que solucionaba.

El curso 2010-11 lo iniciamos ya sin libro de texto. Y a la misma vez que decidimos esto, decidimos que también cambiaríamos la estructura de la programación. No queríamos tener unidades didácticas tituladas "Álgebra" o "Ecuaciones de primer grado", porque creíamos que estos títulos forzaban un encapsulamiento de los contenidos que no era de nuestro agrado. Queríamos encontrar contextos tanto intra-matemáticos como extra-matemáticos que nos permitiesen establecer puntos de conexión entre las diferentes partes del currículum oficial, de manera que acabásemos trabajando todos estos conceptos pero conectados durante todo el curso, no como entidades estancas tal y como se proponía en los libros de texto que habíamos usado hasta el momento. Queríamos que en cada unidad didáctica se tratasen diversos bloques del currículum, y este es el principio que usamos para diseñar nuestro *Long Term Plan* de cada curso de la ESO, que nosotros llamamos **desatomizar el aprendizaje de las matemáticas**, y que ahora explicaremos con más detalle.

Por otro lado, queríamos conseguir que la estructura de la programación de todos los cursos, es decir, el conjunto formado por todas las unidades didácticas, tuviese un diseño con el que las profesoras pudiesen ayudar a los alumnos a construir los conceptos a partir de diversas representaciones, donde cada nueva actividad que se llevase al aula se pudiese nutrir de algunas de las anteriores, de manera que pudiésemos establecer puentes internos entre diferentes conceptos, vínculos entre las diferentes representaciones del mismo concepto y conexiones entre los diferentes procesos que los alumnos fuesen aprendiendo.

Para diseñar una unidad didáctica, lo que hacemos es establecer un grupo de trabajo que se encargará del trabajo. Los miembros que conforman los diferentes grupos de trabajo se forman con profesores voluntarios con la intervención del jefe del departamento. Este grupo de trabajo tiene que tener un líder que ayude a dinamizar el diseño y que sea el responsable de llevar a cabo los cambios necesarios en los documentos que usamos para programar y de lo que ya hemos hablado anteriormente (LTP, MTP y DP). A partir de este momento, cada grupo decide como se administra el tiempo. Todo este trabajo lo empezamos a hacer durante el curso anterior a decidir que abandonaríamos el libro de texto. Aun así, ya hacía tiempo que usábamos este método de trabajo, aunque no lo hiciéramos de forma explícita y sistemática.

Una de las cuestiones que resolvimos durante este proceso de formalización del método de trabajo fue la aclaración de cuál sería la estructura que queríamos que tuvieran las unidades didácticas. Compartimos con Freudenthal (1977) el punto de vista respecto al aprendizaje de las matemáticas. Freudenthal sentía que las matemáticas tenían que tener conexión con la realidad, que se tenían que mantener cercanas a la experiencia de los alumnos y que tenían que ser pertinentes a la sociedad para que tuviesen un valor humano. Es decir, las matemáticas vistas no sólo como una asignatura, sino como una actividad humana. Creemos que las clases de matemáticas tienen que dar a los alumnos una oportunidad guiada de reinventarlas, focalizando la actividad diaria en el aula a través del proceso de matematización (Freudenthal, 1968). La estructura de las unidades didácticas que presentaremos a continuación tienen el propósito de ser consistentes con estos principios.

En primer lugar está la cuestión del título. Preferiblemente, como ya hemos dicho, queríamos evitar títulos que hiciesen referencia directa a un concepto concreto, precisamente para dar esta idea de transversalidad. Así pues, no hay ninguna unidad didáctica titulada "La ecuación de segundo grado" o "El teorema de Pitágoras". Esto no quiere decir que el título no pueda hacer referencia a un contenido matemático. Por ejemplo, una unidad podía llamarse "Juguemos con la probabilidad", pero en la medida de lo posible nos interesa mantener la sorpresa de cara a los alumnos sobre qué se trabajará en cada unidad. La intención era doble, ya que de esta manera complicábamos también el trabajo de familias y profesores particulares acostumbrados a resolver los problemas de sus hijos y alumnos buscando en la red una batería de ejercicios repetitivos que dificultan mucho nuestro trabajo como profesores. Paralelamente ofrecimos un ciclo de talleres dirigidos a las familias y profesores particulares para que conocieran nuestro método de enseñanza. En la actualidad continuamos trabajando para intentar ofrecer a las familias un material complementario al que usamos en las aulas para aquellas familias que quieren ayudar a nuestros alumnos en casa y para que lo puedan hacer sin que sea contraproducente.

Como ya hemos dicho, el título tenía que ayudarnos a mantener la idea de transversalidad de nuestro currículum de matemáticas y a la vez tiene que conseguir mantener un diseño del aprendizaje en forma de espiral, de acuerdo con las ideas de Armendáriz, Azcárate y Deulofeu (1993) o Arcavi (1999). Es decir, toda unidad comienza con una pregunta, la presentación de un contexto o de un concepto matemático lo bastante transversal (como puede ser por ejemplo la probabilidad dentro de las matemáticas) al que se pueda hacer referencia a lo largo de la secuencia de actividades y que finalmente nos haga volver a la idea sugerida en el título, con la intención de cerrar la unidad ayudando a los alumnos a extraer conclusiones sobre lo que han aprendido.

Los objetivos de aprendizaje son también una cuestión esencial en el diseño. El equipo que diseña una unidad los tiene que dejar muy claros. Se trata de escribir los objetivos generales de la unidad y también de los objetivos de cada actividad. Para decidir si nuestros alumnos consiguen superar estos objetivos de aprendizaje es imprescindible una evaluación rica, que integre claramente al alumno en su propio proceso de aprendizaje (Mesa, Adán y de la Fuente, 2015). Para llevar a cabo una evaluación tan compleja, el equipo que diseña la unidad tiene que dejar muy claro qué actividades tendrán retroacción por parte del profesor y de qué manera se llevará a cabo.

Una vez la unidad está diseñada se tiene que compartir con el resto del Departamento, aprovechando las reuniones semanales de las que disponemos. Muchas veces no todo el profesorado de un curso está implicado en el diseño de las unidades. Por esto, esas discusiones son todavía más importantes. A veces estas reuniones provocan cambios en estas unidades. Por otra parte, en cada curso se hace una revisión del conjunto de unidades y así es como vamos mejorando las actividades. Creemos que las programaciones deben estar vivas, que se tienen que ir modificando y mejorando curso tras curso. Todo esto se complicaría mucho más si usáramos un libro de texto para trabajar.

En los siguientes apartados seguiremos con detalle este proceso, ya que para conseguir cumplir con el primer objetivo de la investigación debíamos diseñar unidades didácticas que ayudasen a los alumnos a construir el lenguaje algebraico a través de la resolución de problemas. Para ello, comenzamos con una revisión de lo que consideraríamos álgebra, de qué querríamos que aprendiesen nuestros alumnos al respecto y procederíamos a hacer los cambios necesarios en nuestras programaciones.

9. La multidimensionalidad del álgebra escolar

Para mantener la coherencia con el proceso habitual de trabajo del Departamento de Matemáticas y con respecto a la idea de que en nuestra caracterización del conocimiento del profesor es importante que los profesores sepan cuáles son los objetivos del aprendizaje de los alumnos (de la Fuente, Rowland y Deulofeu 2016, p. 26), el primer paso debía ser ponernos de acuerdo en qué entendemos por álgebra escolar y en qué queremos que aprendan nuestros alumnos al respecto.

Este apartado constituye un resumen de las discusiones que nos llevaron a elaborar nuestra propia definición de álgebra escolar, adaptada de algunas ya existentes en la literatura, y por lo tanto resultó una herramienta de trabajo durante la investigación.

Podríamos intentar captar en una sola frase qué entendemos por álgebra escolar diciendo que el álgebra es aquella parte de las matemáticas que estudia las relaciones entre objetos matemáticos (números, funciones, figuras geométricas...) y las expresa usando simbolismos. Aunque esta sentencia no deja del todo clara la multidimensionalidad de este lenguaje, sí que pone de relieve la importancia que tiene el significado (versus la sintaxis) dentro de este lenguaje que queremos que nuestros alumnos aprendan a usar. También debemos tener en cuenta que el lenguaje algebraico deberá jugar un papel crucial como transmisor de las ideas entre profesor y alumno durante el proceso de resolución de problemas (Vila y Callejo 2004, p. 34).

Si conseguimos que nuestros alumnos no ignoren el significado de los símbolos que usan, conseguiremos también que puedan usar este lenguaje como una herramienta apta para comprender y expresar generalizaciones, captar conexiones estructurales y para argumentar en matemáticas. En este sentido, lo que queremos es conseguir un equilibrio entre las diferentes concepciones de los símbolos que vayan asumiendo a través de situaciones significativas variadas que ayuden a los alumnos a comprender la pertinencia del lenguaje algebraico, su estructura y el significado de los conceptos fundamentales con el objeto de que sean capaces de movilizar el razonamiento algebraico para resolver problemas.

Ya en el apartado 6.2 de esta memoria hemos hablado sobre la multidimensionalidad del álgebra escolar. El objetivo de este capítulo es, por lo tanto, fijar cuáles son las categorías de este lenguaje que nos gustaría trabajar y cómo queremos que nuestros alumnos aprendan usar este lenguaje. En la mayoría de los casos los ejemplos que mostraremos forman parte de las unidades didácticas que los profesores llevarán al aula.

Debido a que nuestro enfoque de la enseñanza es la construcción del lenguaje algebraico en un entorno de resolución de problemas, hemos caracterizado las dimensiones de este lenguaje en términos de capacidades, atendiendo así a un lenguaje que nos ayude también a mostrar el enfoque competencial del aprendizaje. La definición de álgebra la basaremos pues en aquellas que mejor se adaptan a estas necesidades: Kaput (2000) y NCTM (2000). Además no podemos dejar de tener en cuenta la necesidad de desarrollar en nuestros alumnos las habilidades implícitas en el *Early Algebra* (Kieran, 2004) debido a nuestro posicionamiento constructivista del aprendizaje.

Así pues, a partir de ahora nos referiremos a las dimensiones del álgebra escolar de la siguiente forma: el álgebra escolar será un lenguaje simbólico que tiene que servir para:

- Generalizar y formalizar
- Representar estructuras abstractas y hacer cálculos con ellas
- Estudiar relaciones y funciones
- Modelizar

Nuestra elección de estas dimensiones se basa en la idea de que para poder construir el conocimiento necesario para desarrollar las habilidades de la siguiente dimensión será necesaria una cierta habilidad en los procesos implicados en las anteriores dimensiones. Esto quedará claro y justificado con los problemas de ejemplo que iremos considerando en los siguientes apartados, donde veremos con más detalle a qué hace referencia cada una de las categorías del lenguaje algebraico.

9.1 Early Algebra

Tradicionalmente los profesores pensamos que en las edades en las que se sitúa este estudio los alumnos ya estarán preparados para empezar a utilizar el lenguaje algebraico, y la experiencia nos dice que esto no siempre es así. Hay un conjunto de habilidades de pensamiento algebraico que son necesarias para desarrollar el lenguaje algebraico. Estas habilidades forman parte de lo que se conoce como *Early Algebra.*

De acuerdo con Kieran (2004) y Kaput (2008) estas habilidades se podrían resumir en que el alumno ha de ser capaz de:

1. Identificar relaciones aritméticas.
2. Argumentar la solución de un problema que sabe solucionar.
3. Reconocer las operaciones inversas y saber usarlas para resolver problemas.
4. Identificar los diferentes significados del signo igual y, en general, del resto de símbolos.
5. Construir generalizaciones desde razonamientos aritméticos y cuantitativos.
6. Describir la variación (primeras ideas sobre el concepto de función)
7. Usar estas habilidades para expresar modelos.

Es evidente que un mismo alumno puede estar a diferentes niveles en cada una de las habilidades mencionadas, y también es verdad que no hace falta que el alumno tenga desarrolladas todas las habilidades al mismo nivel antes de empezar a trabajar con el lenguaje simbólico. Pero sobre todo en el inicio del uso del lenguaje algebraico, los profesores tendríamos que tener muy presentes estas habilidades para estar atentos a las oportunidades de aprendizaje que se den en el aula y que nos lleven en la dirección de mejora de las mismas.

9.2 Generalizar y formalizar

Creemos que el lenguaje algebraico se debe comenzar a construir como un conjunto de tareas de **generalización**. El lenguaje algebraico necesario para generalizar surge en el momento en que se tiene la necesidad de comunicar patrones, ya sean numéricos o algebraicos, o cuando intentamos expresar las leyes que gobiernan las relaciones numéricas.

Es por esto que creemos que las tareas que el profesor propone en clase tienen que animar a los alumnos a interaccionar entre ellos, a exponer los resultados en pequeños grupos y después con todo el grupo-clase. De esta manera podremos conseguir que para comunicarse tengan la necesidad de tener un lenguaje prealgebraico o algebraico común. Esta emergencia se dará las primeras veces en la fase sincopada de este lenguaje.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema (Mason, Burton y Stacey 1992 p. 77):

(SUMAS CONSECUTIVAS) Algunos números se pueden expresar como suma de una sucesión de números positivos consecutivos. ¿Exactamente qué números tienen esta propiedad? Por ejemplo, observa que:

9 = 2+3+4
11 = 5+6
18 = 3+4+5+6

Este problema así propuesto ya es de por sí un problema muy rico que dará mucho juego y que se podría proponer a muchos niveles diferentes. A nosotros lo que nos interesa es cómo lo podemos utilizar para ayudar a nuestros alumnos a construir el lenguaje algebraico necesario para generalizar. Si proponemos este problema en el aula, los alumnos convencionalmente querrán hacer unas cuantas pruebas que les servirán para entender el enunciado. Si la atención sobre el problema se mantiene el tiempo suficiente, es muy probable que algún alumno acabe haciendo la siguiente conjetura: "con los números impares siempre se puede". Este alumno está intentando generalizar, ya que está observando ciertos aspectos comunes a diferentes casos particulares y está ignorando, en cambio, otros aspectos. Ahora, una vez formulada, esta conjetura tiene que ser investigada para ver si la podemos confirmar o no (Mason, Burton y Stacey 1992, p. 35).

Para demostrar esta conjetura el alumno tendrá que referirse a todos los números impares a la vez de alguna manera. Y aquí será donde el profesor tendrá que jugar su papel e intentar que los alumnos lleguen a escribir la expresión $2n+1$ como generalización de los números impares.

Incluso se puede aprovechar para ofrecer otra representación de los números pares e impares (Figura 9.1), que a su vez podría combinar el trabajo con los alumnos de la segunda dimensión del algebra escolar, la que trataremos en el siguiente apartado. Es fácil apreciar, por tanto, como el esquema de Kaput que ya hemos apuntado anteriormente (Figura 6.2, p.19) sigue teniendo validez.

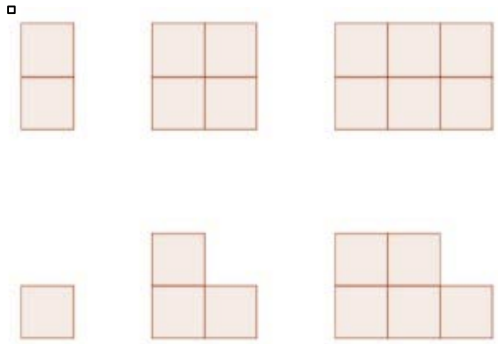


Figura 9.1: Representación geométrica de los números pares e impares

Por otro lado, si tenemos puesto el foco en las argumentaciones de los alumnos, será fácil convencerles de que el lenguaje algebraico también les tiene que servir para **formalizar** sus argumentaciones. Por ejemplo, cuando proponemos a nuestros alumnos que resuelvan el siguiente problema de demostración (Azcárate y Deulofeu, 1998):

Está claro que los rectángulos rallados de la figura no son iguales. Pero, en cambio, tienen la misma área. ¡Arguméntalo!

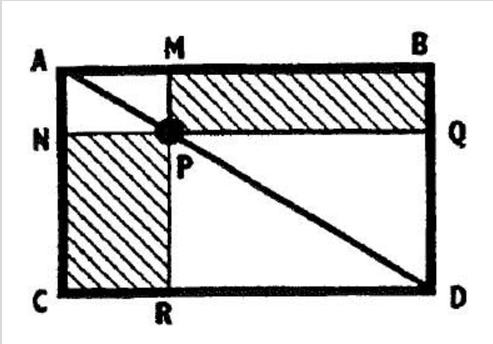


Figura 9.2: Rectángulos diferentes pero de áreas iguales

Después de trabajar un buen rato con la argumentación de forma oral, si queremos hacer la siguiente parte de la tarea y así aprovechar para ayudarles a construir el lenguaje necesario para formalizar, podríamos pedir a los alumnos que escriban sus argumentaciones con sus propias palabras. Una vez nos hemos asegurado de que un alumno tiene su argumentación bien escrita, la segunda parte de la tarea consiste en utilizar las frases que tenemos a continuación para volver a escribir una argumentación que sea correcta (ordenándolas, obviamente):

Area MBPQ = Area NPRC | Area ACD = Area ADB

La diagonal divide el rectángulo en dos partes iguales

ya que | Area MAP = Area ANP | porque

Area ABD = Area AMP + Area MPQB + Area PQD

Area ACD = Area ANP + Area NPCR + Area PRD

La diagonal divide el rectángulo en dos partes iguales

La diagonal divide el rectángulo en dos partes iguales

Por tanto | El mismo | Por tanto

y | Area PRD = Area PQD

Figura 9.3: Frases para ordenar y construir con ellas una argumentación formal (Azcárate y Deulofeu, 1998)

De esta manera podremos hacer una aproximación a los alumnos de cuál es el tipo de lenguaje que usamos los matemáticos para hacer demostraciones formales.

9.3 Representar estructuras abstractas y hacer cálculos con ellas

"El significado que tienen los objetos matemáticos se encuentra determinado más por los contextos en los que se usan que no por las reglas formales con los que se usan" (Schoenfeld y Arcavi, 1988, p. 420). Si lo que queremos es conseguir que el álgebra tenga un significado subyacente para nuestros alumnos, tenemos que conseguir que tengan muchas experiencias usándola como un lenguaje que sirva para representar objetos matemáticos. Es difícil que los alumnos se apropien de estos objetos abstractos sin haber experimentado con una diversidad de representaciones de los mismos. En términos de la teoría piagetiana, solo en la etapa de las operaciones formales se puede esperar que para el alumno desaparezca la dependencia de los referentes concretos (Socas y Palarea 1997, p.11).

9.3.1 Cambios de representación

Nuestro primer ejemplo de cambio de representación ya lo hemos visto en la tarea sugerida por la Figura 9.1, es decir, el álgebra constituye un lenguaje que, además de servir para formalizar generalizaciones, tiene que ayudar a nuestros alumnos a comprender cómo relacionar patrones geométricos con expresiones simbólicas. Otro ejemplo de tarea podría ser proponer a nuestras alumnas que utilicen la Figura 9.4 para argumentar la siguiente igualdad algebraica:

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Por lo tanto necesitamos que nuestros alumnos aprendan a cambiar la representación de objetos matemáticos (en este caso una figura) y los símbolos con cierta fluidez.

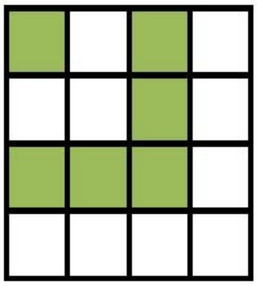


Figura 9.4: Demostración visual de que 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2

Pero está claro que necesitamos también que los alumnos aprendan a hacer cálculos con estos símbolos, por ejemplo, para comprobar la equivalencia entre diferentes expresiones. El siguiente problema (Sessa, 2005 p.75-86) es un buen ejemplo de cómo a través de la resolución de un problema se puede conseguir crear la necesidad de construir esta dimensión del lenguaje algebraico.

¿Cuántos cuadraditos tiene la Figura 9.5 en su zona perimetral?

¿Cuántos cuadraditos tendría en su zona perimetral la figura análoga que tiene 37 cuadraditos de lado? Escribe en forma de operación combinada los cálculos que has necesitado y argumenta la respuesta.

¿Podrías proponer una fórmula que sirva para calcular el número de cuadraditos de la zona perimetral de cualquier figura como esta?

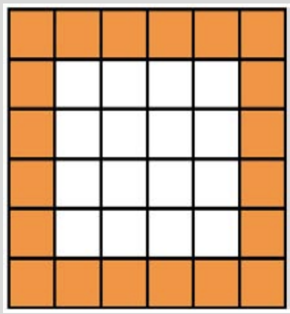


Figura 9.5: Contar cuadraditos

Este problema se podría desarrollar en el aula en diferentes etapas. La primera y la segunda etapa, que corresponden con las primeras preguntas del problema, son dos casos particulares que sirven para asegurar que los alumnos entienden el problema y que son capaces de realizar un cálculo concreto y de particularizar el problema en un caso mayor. Es muy importante pedir la estrategia que han usado para hacer el cálculo. Así es como fácilmente podremos pedir que generalicen y que nos digan cómo harían el cálculo para un cuadrado de cualquier tamaño. Es muy probable que al respecto del lenguaje algebraico, las argumentaciones las hagan usando el álgebra retórica como medio. Es en estos momentos cuando tenemos que compartir los diferentes métodos de cálculo y así podremos escribir las diferentes expresiones algebraicas que hemos ido obteniendo. En la Figura 9.6 tenemos un ejemplo con todas las generalizaciones diferentes que se obtuvieron durante la resolución de este problema con una clase de 1° de ESO.

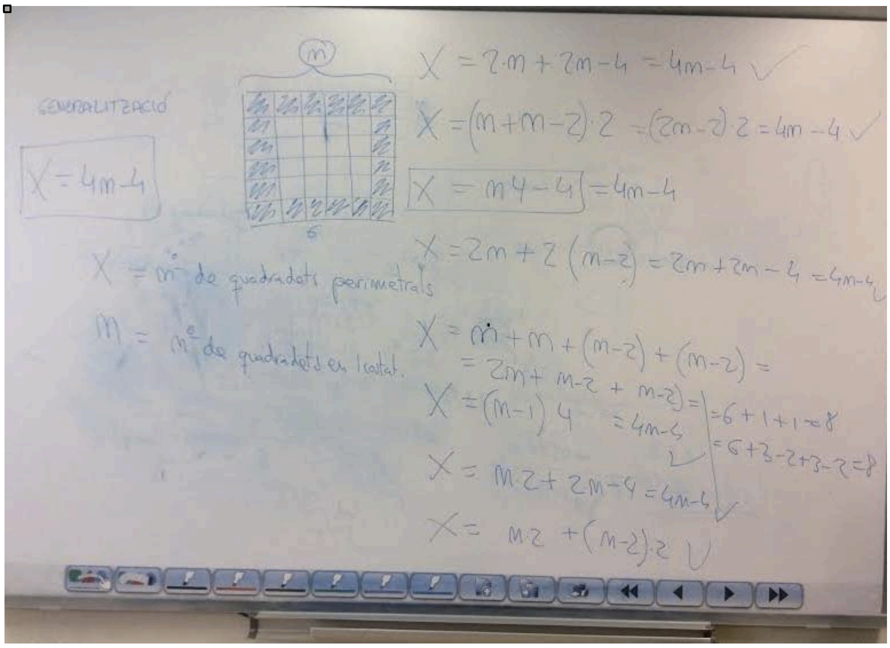


Figura 9.6: Diferentes generalizaciones del problema obtenidas por una clase de 1° de ESO

Una vez hemos recogido todas las generalizaciones, será el momento en que saldremos de la dimensión de generalización y podremos entrar en el cálculo usando estructuras abstractas. Podemos mantener vivo el significado de las letras durante mucho rato y además podremos ir introduciendo a los alumnos en la manipulación de las letras y las operaciones con ellas. Por ejemplo, este es un problema para empezar a poner en común diferentes formas de expresar un producto en álgebra: 2 · n, 2xn o 2n.

Este problema tiene todavía una contribución más al desarrollo del lenguaje algebraico: la respuesta al problema es una fórmula, una expresión algebraica no cerrada, y no una cantidad concreta. También podremos aprovechar este problema para trabajar el concepto de variable y evitar así acabar trabajando las letras sin tener en cuenta los múltiples significados que estas tienen (Schoenfeld y Arcavi, 1988). Esto nos permitirá conectar el problema fácilmente con la siguiente categoría del lenguaje algebraico: el estudio de relaciones y funciones.

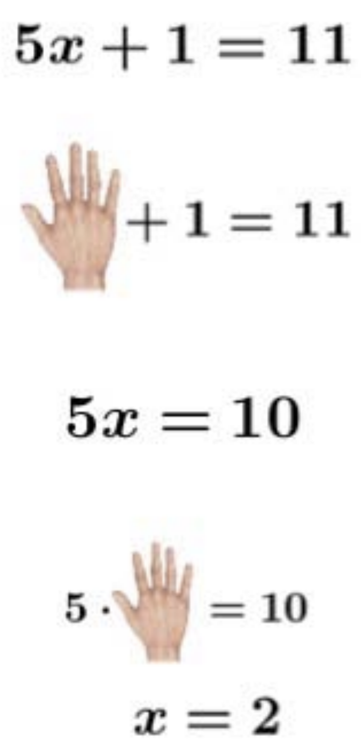


Figura 9.7: Resolución de una ecuación de primer grado usando la técnica del *Cover -up*.

-

9.3.2 Resolución de ecuaciones

Resolver problemas mediante ecuaciones no es solo la forma histórica en la que se desarrolló el lenguaje algebraico, sino también una actividad fundamental en todos los currículums de matemáticas del mundo. Por ejemplo, traducir enunciados verbales en ecuaciones consiste en la transición de la aritmética hacia el álgebra en términos de simbolismos bien razonados.

Hemos de tener en cuenta que en la resolución de ecuaciones los símbolos toman unos significados muy concretos. Si no tenemos esto en consideración podemos inducir a nuestros alumnos a obstáculos de aprendizaje (Socas, 1997). Para no caer en estas trampas, creemos que es mejor presentar la resolución de ecuaciones a través de un abanico de modelos que a la vez nos sirvan para mantener esta visión de las múltiples representaciones de los objetos matemáticos que queremos resaltar en este capítulo.

Creemos que un buen modelo para empezar a construir técnicas de resolución de ecuaciones con nuestros alumnos es la conocida como *Cover-up*. En la Figura 9.7 tenemos un ejemplo resuelto usando esta técnica de resolución de ecuaciones. Observemos que para poder usar esta técnica de resolución, el alumno tiene que tener un buen control sobre la prioridad de las operaciones y sobre el uso de operaciones inversas (*Early Algebra*). Además, tiene que haber asumido el significado de los símbolos que aparecen en una ecuación y cuál es el papel que están jugando en cada caso. Es decir, el alumno tendrá que haber asumido las habilidades propias del *Early Algebra* a partir, por ejemplo, de sus experiencias aritméticas previas.

Se tiene que tener en cuenta que esta estrategia de resolución de ecuaciones solo funcionará cuando la incógnita aparezca una vez en la ecuación. En cambio, nos servirá para introducir no solo la resolución de ecuaciones de primer grado, sino también para otros tipos de ecuaciones más complejas, como por ejemplo $(x+3)^2 = 27$ o bien $\sqrt{x+25} = 12$ sin tener que hablar de métodos específicos para resolver ecuaciones de segundo grado, por ejemplo.

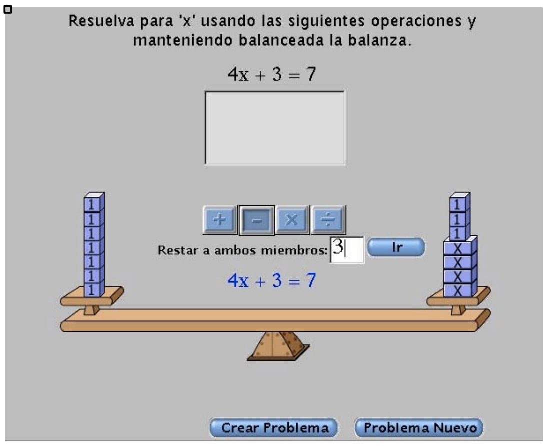


Figura 9.8: Applet de la balanza para resolver eciuciones desarrollado por la Universidad de Utah

Por otro lado, y creemos que aquí es donde reside la máxima potencia del método, esta estrategia no es solo un camino para resolver ecuaciones, sino que también sugiere una forma de registrar el proceso, de argumentar la solución. Como ya hemos dicho diversas veces en este trabajo, focalizar sobre las argumentaciones durante el proceso de aprendizaje tiene que servir para crear la necesidad del uso del lenguaje algebraico, para formalizarlas y también para conseguir hacer que estas sean más cortas y rápidas de escribir.

El conocido modelo de la balanza también es muy útil para dar herramientas de resolución de ecuaciones sin perder de vista el significado de los símbolos. Además, de nuevo nos proporciona una idea sobre cómo argumentar los sucesivos pasos que se siguen para resolver una ecuación, esencialmente diferente a la anterior. De nuevo, usando este método de resolución estaremos focalizando la atención sobre las operaciones inversas. Mostramos una imagen del applet desarrollado por la Universidad de Utah (Figura 9.8) que tiene también una solución muy original para coeficientes negativos de las ecuaciones, usando globos para representar los números negativos.

Existen muchos más modelos para resolver ecuaciones y, de hecho, cuanta más variedad de ellos presentemos a nuestros alumnos, más riqueza estaremos añadiendo a su capacidad de cambio de representación.

9.4 Estudiar relaciones y funciones

El lenguaje algebraico también tiene que servir como medio para comunicar y entender la **relación entre dos o más variables**. En particular, el estudio de funciones tendría a su vez que ayudar a los alumnos a desarrollar este lenguaje.

La geometría puede proporcionarnos contextos ricos para que nuestros alumnos construyan el lenguaje simbólico necesario para entender relaciones entre dos o más variables, por ejemplo, mientras estudiamos las fórmulas de las áreas de las figuras planas. El siguiente problema es un ejemplo de ello:

> Seguramente ya sabes que el área del trapecio es: A = (B + b) . h / 2. Deduce esta fórmula suponiendo que solo sabes las fórmulas del área del rectángulo, el triángulo y el paralelogramo. Hazlo almenos de tres maneras diferentes.

La Figura 9.9: Área del trapecio es un ejemplo de resolución de una alumna de 1° de ESO del problema que hemos planteado. Podemos observar cómo esta alumna es capaz de manipular los símbolos para obtener diferentes fórmulas equivalentes del área del trapecio para luego comprobar que efectivamente todas llevan a la misma expresión si se manipula adecuadamente.

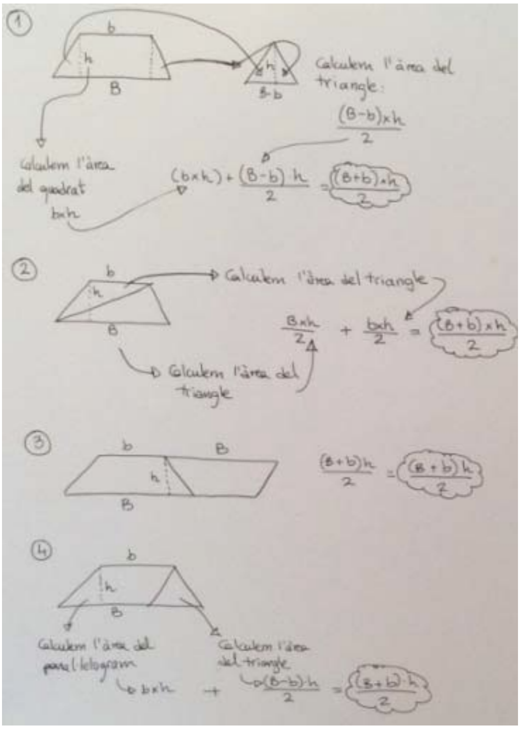


Figura 9.9: Área del trapecio

El estudio de fenómenos que implican cambios son los que generan el estudio de las funciones. Este estudio se puede expresar usando diferentes representaciones. Una función se puede representar mediante una descripción verbal, una gráfica, una tabla de valores o una expresión algebraica. Por lo tanto, ya queda claro que la expresión algebraica de una función no es la única forma en la que nos podemos referir a ella. Esta variedad de representaciones forma parte de la riqueza que nos interesa resaltar, y es la manera en la que podemos conectar la anterior dimensión del lenguaje algebraico con la que estamos presentando ahora. Nos interesa que nuestras alumnas conozcan todos los lenguajes útiles para referirse a las funciones como un objetivo importantísimo de aprendizaje. Y, de hecho, esta interrelación entre los diferentes lenguajes nos tiene que servir para dotar de un significado más al lenguaje que nos ocupa en este apartado. Ahora bien, nos gustaría remarcar que para que la propuesta de actividades relacionadas que sugerimos sea lo más útil posible, es importante que los alumnos hayan vivido experiencias previas con gráficas de funciones, tablas, etc. El hecho de trabajar con gráficas de funciones y no necesariamente con las expresiones algebraicas de las mismas, nos permitirá poder trabajar con una amplia variedad de funciones, sin necesidad de limitarnos a aquellas que tengan una expresión algebraica sencilla.

Los ahorros de Helena, Xavier, Andrea y Joan han cambiado durante el último año tal y como está descrito bajo estas líneas. Los números indican las cantidades de dinero en euros y al final de cada semana.

Helena: La tabla muestra cuánto dinero ha ahorrado al final de cada semana. La tabla continúa de la misma forma durante todo el año.

Semana	1	2	3	4	5	6 ...
Ahorro	7	14	21	28	35	42 ...

Xavier: Durante todo el año ha tenido ahorrados 300€.

Andrea: El gráfico describe sus ahorros durante las primeras veinte semanas. El gráfico continúa de la misma manera durante el resto del año.

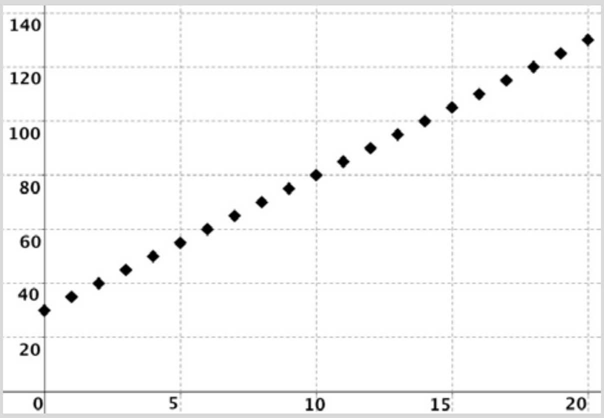


Figura 9.10: Gráfica que describe los ahorros de Andrea

Joan: Los ahorros de Joan se pueden describir mediante la siguiente expresión algebraica:

$$y = 300 - 5x,$$

siendo *x* el número de semanas e *y* los ahorros en euros.

Empezaremos los ejemplos con el conjunto de datos (adaptado de Arcavi, 2008 p. 53) que nos servirá para explicitar la conexión entre las diferentes representaciones de una función.

El problema que proponemos a partir de estos datos es que el alumno tenga que escoger su representación preferida de los ahorros y tenga que traducir todo el resto a este lenguaje. Es decir, que cambie la representación de los datos. Una vez hecho esto, querremos que compare los diferentes ahorros entre las cuatro personas.

De acuerdo con Kaput (2000) y con Arcavi (2008), la tecnología debería ser una herramienta muy utilizada cuando trabajamos con funciones. En particular puede jugar un papel muy importante en la construcción del lenguaje algebraico para nuestros alumnos. De hecho, creemos que la mejor opción al respecto del acceso a la tecnología sería tener la oportunidad de trabajar en un entorno CIE (*Computer Intesive Environment*). Este se caracteriza por dos condiciones (Arcavi, 2008):

- Las herramientas tecnológicas están a disposición de los alumnos en todo momento (tanto en el centro como en casa).
- Los alumnos son libres de escoger en qué momento y cómo las utilizan.

Este tipo de entorno de aprendizaje permite que los alumnos puedan ir construyendo el sentido de los símbolos a su ritmo. Por ejemplo, el uso de hojas de cálculo para investigar procesos de variación permite a los alumnos utilizar fórmulas algebraicas de forma expontánea, en la sintaxis de la hoja de cálculo, con un significado natural dado por la descripción del propio fenómeno que se quiera estudiar (Arcavi, 2008).

Por otro lado, las celdas de una hoja de cálculo tienen una ambigüidad en su significado (un número específico, un número genérico, un número desconocido, una relación entre variables...) que nos permitirá hacer hincapié en los diferentes significados de las letras y así reforzar la comprensión de nuestros alumnos al respecto. Por ejemplo, podremos permitir que los alumnos hagan generalizaciones usando diferentes estrategias, dependiendo de su nivel de comprensión: pueden hacer generalizaciones utilizando la recursividad o bien utilizando expresiones explícitas.

Otro ejemplo que nos permite continuar con la construcción del lenguaje algebraico a partir de la necesidad de comunicar relaciones entre variables y funciones es el siguiente (adaptado de Arcavi, 2008 p. 54):

Las siguientes expresiones describen los ahorros de los diferentes nietos del abuelo Joan (*x* denota el número de semana):

Mónica	7x	**Gus**	300
Anna	10x	**Pere**	60+3x
Javi	30+5x	**Helena**	-20+4x
Laura	300-5x	**Gerard**	-70+7x

-

Todos los nietos viven bastante cerca, y han descubierto que hay una forma muy divertida de poder comunicarse entre ellos: el *Walkie-Talkie*. Para eso tienen que comprar un transmisor para cada dos de ellos. Así que juntarán sus ahorros para poder llegar a los 400€ que cuesta ese modelo de *Walkie-Talkie*.

1) Encuentra expresiones, tan cortas como sea posible, para describir la cantidad de ahorros que se pueden conseguir juntando los ahorros por pareja de todas las parejas posibles. Haz una descripción tanto verbal como algebraica.

2) ¿Cuál de las parejas sería la primera en conseguir ahorrar los 400€ que cuestan los *Walkie-Talkies*?

3) ¿Podrías sugerir una agrupación de parejas que beneficie a todo el grupo?

Con este problema podemos conseguir trabajar la traducción de una expresión algebraica a lenguaje verbal dentro de un contexto con un significado cercano a los alumnos como pueden ser los ahorros y además propiciamos que este lenguaje, el verbal, pueda ser útil para la propia construcción de expresiones algebraicas simbólicas. En Arcavi (2008, p.55) podemos encontrar el siguiente diálogo entre dos alumnas mientras discuten los ahorros producidos por las parejas Mónica (7x) - Anna (10x) y Mónica (7x) - Javi (30 + 5x):

Natally — Mónica consigue 7 cada semana, y Anna gana 10 cada semana, por lo tanto juntas consiguen 17 cada semana, 17x.

Eli — Ellas conseguirán la máxima cantidad de ahorros.

Natally — Mónica y Javi. Si Mónica consigue 7, y Javi 5, ¡espera un momento! Javi tiene 30€ inicialmente, ¿no? Por lo tanto, 5+7=12, OK. 30+12x.

Es decir, que con este tipo de actividades los alumnos pueden ser capaces de sumar dos expresiones algebraicas (cosa que no habían aprendido a hacer cuando se realizó esta experiencia) sin recurrir a las reglas sintácticas del álgebra. Podríamos además aprovechar este problema para por ejemplo hablar sobre la pendiente de una recta y comenzar así a ver cómo el modelo dado por la función lineal $y=mx+b$ nos ayuda a resolver algunos problemas.

9.5 Modelizar

Queremos que nuestros alumnos se muestren flexibles a la hora de describir e interpretar el mundo de los fenómenos que les rodean. Y, de acuerdo con Azcárate y Deulofeu (1998): "todo el mundo docente coincide en considerar el papel esencial del estudio de funciones en las Matemáticas, a partir del siglo XVIII, como fuente de modelos e instrumentos que permiten describir e interpretar tando el mundo físico como los fenómenos y las relaciones sociales".
Así pues, creemos que la **modelización** matemática ha de permitir desarrollar esta sensibilidad. Lo que pretendemos en este apartado es ver cómo el lenguaje algebraico puede servir para presentar y entender los modelos que nos permiten interpretar nuestro entorno.

De acuerdo con estos principios, esta dimensión del lenguaje algebraico debe incluir ser capaz de construir significado a partir de diferentes representaciones (gráficos, tablas, fórmulas, etc.) de un mismo fenómeno y ser capaz de transformar diferentes representaciones en otras equivalentes para comprenderlas y extraer conclusiones. Pero fijémonos que si solo hablamos de estos aspectos, no tendremos una necesidad clara de decir que el álgebra tiene que servir para modelizar y distinguir a su vez esta dimensión de la del estudio de funciones. Por ejemplo, podríamos decir que cuando un alumno traduce del lenguaje verbal un problema y escribe una ecuación que servirá para resolverlo también está cambiando de representación y por lo tanto, ya estaría modelizando. Ciertamente, también podríamos decir que este proceso pertenece a la dimensión de modelización. Entonces, ¿para qué nos interesa mantener una dimensión separada para el proceso de modelización?

De acuerdo con Solar, Deulofeu y Azcárate (2015) la modelización será el conjunto de fases necesarias para resolver un problema proviniente de una situación real por medio de un modelo matemático. "El proceso de modelización se inicia generalmente con una situación extramatemática, se simplifica a un modelo real y se matematiza para obtener un modelo matemático; se resuelve la situación dentro del modelo y se interpreta la solución de una forma coherente con la situación inicial; finalmente se evalúa si responde con la situación original" (Solar, Deulofeu y Azcárate 2015, p. 193). Así, volviendo a nuestra cuestión anterior: los procesos que generan una necesidad esencialmente diferente al respecto del uso del lenguaje algebraico del resto de categorías son los que hemos llamado **matematizar** e **interpretar** en la Figura 9.11.

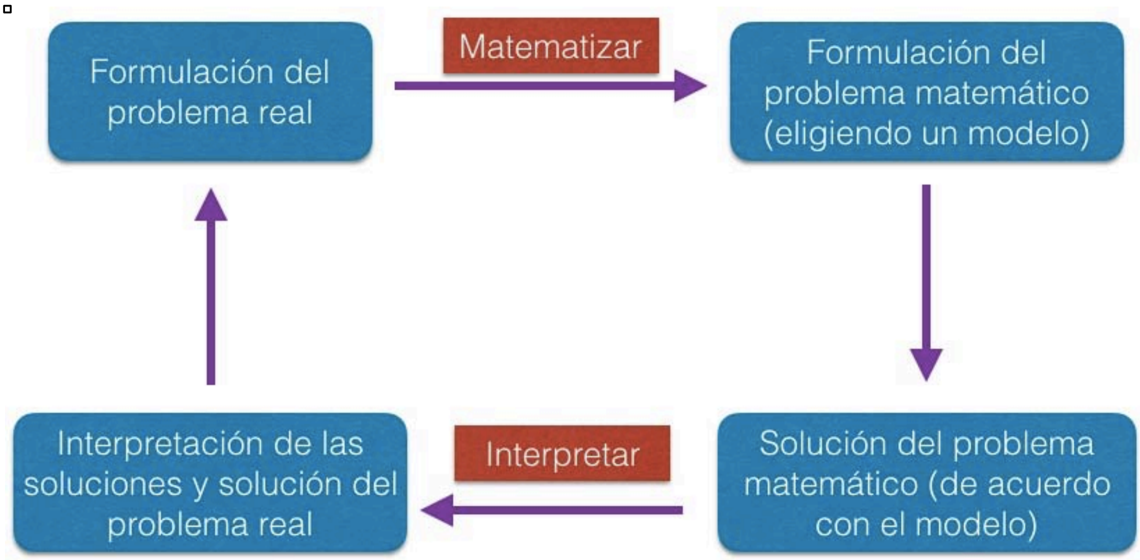


Figura 9.11: El proceso de modelización

En la Tabla 9.1 podemos encontrar una serie de ejemplos de modelos matemáticos extraidos de Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev (1973, pp. 66-67). Aquí se puede ver cómo a partir de tres contextos diferentes y siendo uno de ellos un contexto puramente matemático, podemos hacer emerger el mismo modelo funcional para matematizar las diferentes situaciones. Creemos que, de alguna manera, el hecho de que el modelo sea el mismo dará legitimidad a los profesores de matemáticas delante de sus alumnos para motivar el estudio de las funciones parabólicas en el aula.

-

Situaciones problemáticas		
Energía de un cuerpo que cae.	**Cantidad de calor generada en un conductor en la unidad de tiempo, al paso de una corriente eléctrica.**	**Superficie de un triángulo rectángulo.**
$E = \frac{m\,v^2}{2}$	$Q = \frac{R\,I^2}{2}$	$S = \frac{1}{2}\,x^2\,tg(\alpha)$
m = masa *v* = velocidad	I = intensidad R = resistencia	x = lado del triángulo α = ángulo agudo adyacente
Modelo matemático		
$f(x) = \frac{1}{2}ax^2$		

Tabla 9.1: Ejemplos de modelizaciones matemáticas

Cerrar el círculo de la modelización completo y llegar hasta este punto de motivación con nuestros alumnos puede ser costoso en cuanto al tiempo necesario para hacerlo, pero creemos que vale la pena que esto pase aunque sean unas pocas veces durante su educación obligatoria. Por lo tanto habría que buscar contextos donde se den estas situaciones y la complejidad de las mismas esté al alcance de nuestros alumnos.

Un ejemplo de tarea que podríamos llevar a cabo con nuestros alumnos para hacer emerger las diferentes fases del proceso de modelización en nuestras aulas es el estudio de la relación existente entre la frecuencia del sonido obtenido tocando una cuerda de una guitarra y la longitud de la misma. La relación entre estas dos variables es de proporcionalidad inversa y, concretamente, si llamamos *L* a la longitud de la cuerda, y *F* a la frecuencia, tenemos que

$$F = \frac{K}{L}$$

siendo *K* una constante que depende de la cuerda particular. Podemos usar esta idea en el aula midiendo la frecuencia con cualquier medidor digital (por ejemplo, usando una aplicación para teléfono móvil) y viendo cómo varía la frecuencia en función de dónde estemos pulsando la cuerda de la guitarra. Así los alumnos podrán acabar encontrando la relación anterior con una cuerda concreta. Luego les podríamos pedir que, ya sin usar el medidor de frecuencias digitales, hagan el mismo proceso con otra cuerda y que representen la información que relaciona frecuencia y longitud de forma verbal, gráficamente, en una tabla de valores y también a través de una expresión algebraica. Solo habrá que darles un dato, por ejemplo la frecuencia que corresponde a la cuerda de la guitarra al sonar suelta. En la Figura 9.12 podemos ver el resultado de esta tarea planteada en una clase de 2° de ESO. En mi opinión es en esta parte del experimento donde el profesor tiene la oportunidad de convencer a los alumnos del interés que tiene el uso de este modelo matemático, en el momento en que gracias a las matemáticas podemos estudiar el fenómeno sin tener que repetir el experimento.

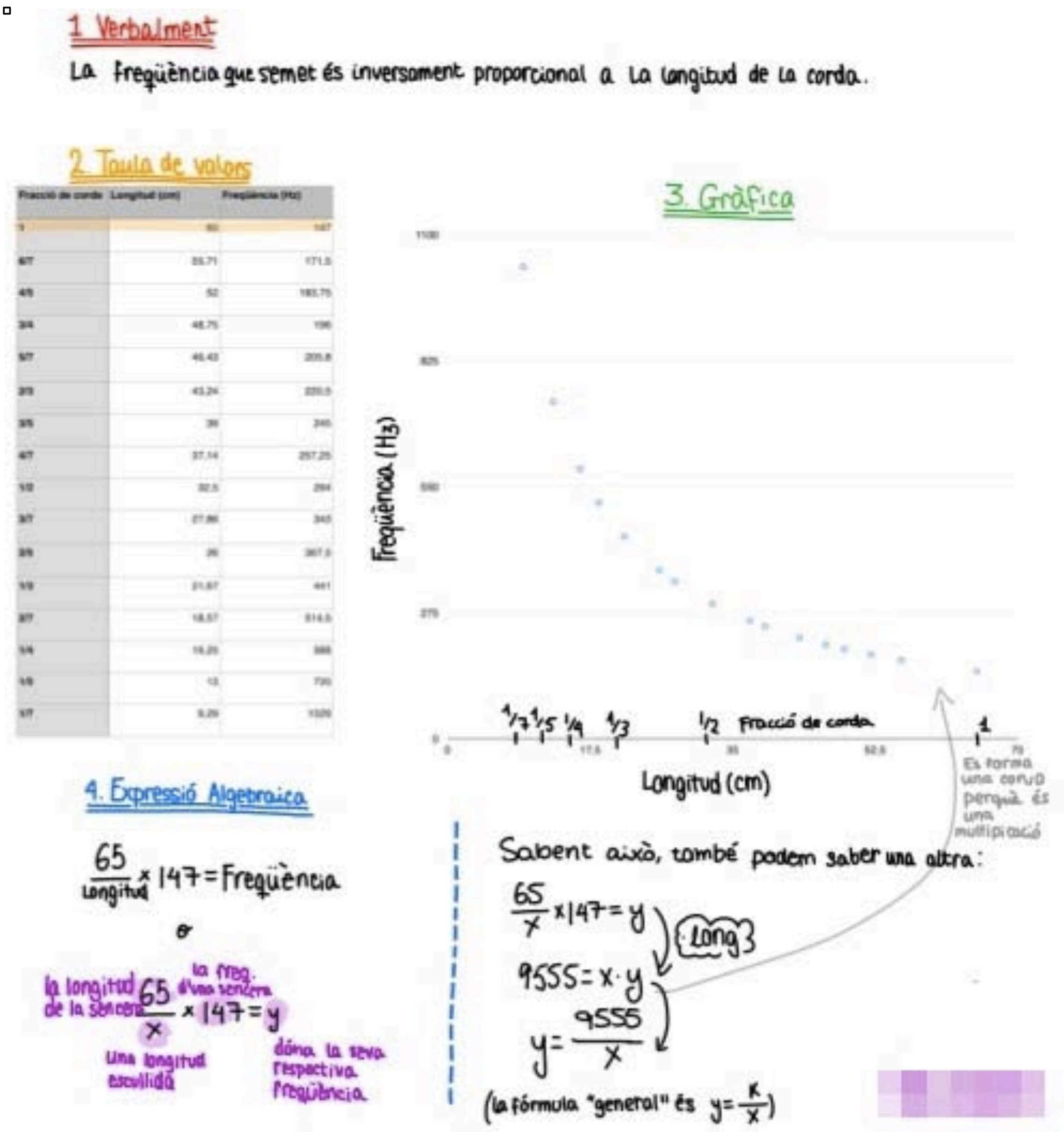


Figura 9.12: Diferentes representaciones de la relación entre la longitud de una cuerda de una guitarra y la frecuencia que emite al tocarla.

Consideremos ahora la familia de rectángulos que tienen área K cm[2] (rectángulos equivalentes). Si consideramos la relación entre la base (*b*) y la altura (*a*) de estos rectángulos, de nuevo obtenemos la siguiente relación:

$$a = \frac{K}{b}$$

En la Figura 9.13 vemos la representación gráfica que se hizo implementando esta actividad en la misma aula de 2° de ESO en la que se demandó el trabajo que hemos mostrado anteriormente. Se pidió que se construyesen muchos rectángulos

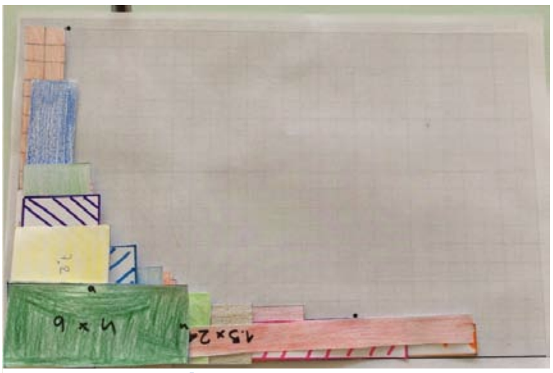


Figura 9.13: Rectángulos equivalentes de 36cm[2] de área representando una función de proporcionalidad inversa

equivalentes de área $36cm^2$ para luego juntarlos todos y estudiar la relación que se obtenía entre área y altura observando el vértice del rectángulo que queda más alejado del origen de coordenadas si los colocamos tal y como vemos en la imagen.

Por último, dentro de un contexto tradicional de una clase de Tecnología (o en la propia aula de Matemáticas) se podría hablar de la ley de Ohm:

$$V = I \cdot R$$

dónde *I* es la intesidad de la corriente (cantidad de electrones que circulan en un punto por unidad de tiempo), *R* es la resistencia de los materiales que forman parte del circuito y *V* es el voltaje que proporciona la fuente de energía. Nótese que, manteniendo constante el voltaje V, las variables I y R son inversamente proporcionales. Entonces, si en un enchufe que proporciona un voltaje constante de 220V, ¿qué pasará si metemos los dedos? Resulta que nuestro cuerpo no ofrece casi ninguna resistencia al circuito, por lo que si la resistencia tiende a cero, la intensidad tenderá a infinito, produciendo el consecuente chispazo en el cable debido al elevado número de electrones que intentan pasar a través del mismo. De nuevo el estudio de la función de proporcionalidad inversa nos ofrece un buen modelo matemático para hacer este estudio.

Seguro que la gran mayoría de los profesores están convencidos de que el estudio la función de proporcionalidad inversa ($y = k/x$) es importante en clase de matemáticas, pero todo este recorrido por el proceso de modelización es lo que en realidad dotará de razones a los alumnos para que ellos también crean que es importante estudiar este modelo matemático y permanecer en la abstracción estudiando cómo varía la función según los diferentes valores del parámetro *k* de este modelo funcional.

9.6 ¿Y la sintaxis? También a través de la resolución de problemas

En las dimensiones que hemos elegido para construir el lenguaje algebraico escolar no hemos tenido en cuenta de las dimensiones de Kaput (2000) la **manipulación guiada sintácticamente** ya que pensamos que no es uno de los aspectos del álgebra escolar que se tengan que llevar al aula separados del resto. Siempre que estemos usando el lenguaje algebraico habrá una parte propia de su sintaxis que estaremos usando y creemos que la automatización llegará de forma natural en el momento en que el alumno tenga suficientes contextos a los que recurrir delante de la necesidad de trabajar con una expresión algebraica sin un significado inmediato. Y, de paso sea dicho, no está claro en qué momento esto ha de pasar de forma irremediable y si esto tiene que ser uno de los objetivos de aprendizaje de la enseñanza obligatoria. Nosotros creemos que no.

Pero también es cierto que tener que recurrir constantemente al significado de los símbolos para poder manipular símbolos puede ser demasiado costoso. Por ejemplo, si un alumno consigue traducir un problema a una ecuación con la que podría resolverlo y para resolver esta ecuación tiene que estar recurriendo constantemente al significado de las expresiones sin tener la habilidad de operar de forma rápida y ágil con los símbolos, este alumno podría tener serias dificultades para acabar resolviendo el problema. Precisamente, el poder del álgebra como lenguaje radica en la posibilidad de realizar una manipulación extensiva de relaciones dentro de un sistema semiótico que es fiable y que además no requiere una atención continua al significado referencial de las expresiones intermedias generadas en la representación (Socas y Paralea 1997, p. 11).

De acuerdo con Friedlander y Arcavi (2012, p. 609), el aprendizaje de las reglas del álgebra y sus procedimientos debería estar conectado con un entendimiento profundo del significado y con el uso flexible de los métodos de manipulación de los símbolos. Ellos proponen un marco de trabajo dirigido a profesores que quieran disponer de una colección de ejercicios centrados por una parte en cubrir los procesos que habitualmente se trabajan en cualquier curso de álgebra para principiantes y por otra en los procesos cognitivos que requiere una manipulación de símbolos significativa. Los procesos cognitivos que proponen son los siguientes:

1. Pensamiento inverso
2. Comprensión global
3. Construcción de ejemplos y contraejemplos
4. Identificación de errores
5. Justificación
6. Aplicación de operaciones algebraicas
7. Pensamiento cualitativo
8. Pensamiento divergente

En la Tabla 9.2 se pueden ver ejercicios de ejemplo con los que se pueden trabajar en el aula los procedimientos más habituales como son: operaciones con números negativos, manipulación de expresiones algebraicas, resolución de ecuaciones e inecuaciones, resolución de sistemas de ecuaciones y factorización.

Con estas propuestas vemos cómo también es posible trabajar la manipulación guiada sintácticamente de expresiones algebraicas manteniendo el ambiente de resolución de problemas que nos interesa en el aula, ya que muchos de estos ejercicios tienen varias soluciones, admiten métodos de resolución flexibles y permiten fijar la atención sobre la argumentación si así se considera necesario.

-

Sample Task 1

Fill in the missing operation signs. Use parentheses, if needed.

(*a*) $6m \bigcirc 7 \bigcirc 2m = 8m + 7$

(*b*) $6m \bigcirc 7 \bigcirc 2m = 20m$

(*c*) $6m \bigcirc 7 \bigcirc 2m = 12m^2 - 14m$

Sample Task 2

In the following magic squares, the three expressions in each row, column, and diagonal of a square add up to the same magic sum. Fill in the missing expressions.

(*a*)

$x+1$		
$4x-1$	$x-2$	
$-2x-6$		

(*b*)

$-x$		$\frac{x}{6}$
	$\frac{x}{3}$	
$\frac{x}{2}$		

Sample Task 1

Knowing that $2x + 15 = -2$, find the values of the following expressions.

(*a*) $2x + 16 =$ ____

(*b*) $2x + 20 =$ ____

(*c*) $2x + 5 =$ ____

(*d*) $3 \cdot (2x + 15) =$ ____

(*e*) $-1 \cdot (2x + 15) =$ ____

(*f*) $-0.5 \cdot (2x + 5) =$ ____

Sample Task 2

Given that $a - b = 9$ and $ab = 36$, find the values of the following expressions *without* finding the values of a and b:

(*a*) $a^2 - 2ab + b^2$ (*b*) $2ab$ (*c*) $2a - 2b$

Use your results to find the values for the following:

(*d*) $a^2 + b^2$ (*e*) $(a + b)^2$ (*f*) $a^2 - b^2$

Complete the quiz about equivalent expressions by writing four reasonable choices for each expression. At least one of the choices should be correct, but more than one may be correct.

Example: $5 - 2 \cdot (7x - 4) =$

(*a*) $3(7x - 4)$ (*b*) $-14x + 13$ (*c*) $5 - 14x + 8$ (*d*) $5 - 14x - 4$

1. $5 - x - 3 =$
(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

2. $7 - 2 \cdot (x - 3) =$
(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

3. $4 \cdot (x \cdot 5) =$
(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

4. $6 - (2 - x) =$
(*a*) (*b*) (*c*) (*d*)

The mathematics teacher asked the class to substitute $a = 3$ in

$$-5 - \frac{3+2a}{3}.$$

Check the work of the following students and make the necessary corrections.

Abe $-5 - \frac{3+6}{3} = -5 - 1 + 6 = 0$

Benjamin $-5 - \frac{3+6}{3} = \frac{-15-3+6}{3} = \frac{-12}{3} = 4$

Claire $-5 - \frac{3+6}{3} = -5 - \frac{9}{3} = -8$

Diane $-5 - \frac{3+6}{3} = -5 - \frac{9}{3} = -2$

Which of the expressions below is/are equivalent to

$$\frac{a-6}{3}?$$

$\frac{a+6}{3}$ $\frac{1}{3}a - 6$ $\frac{a}{3} - 2$ $\frac{6-a}{3}$ $\frac{1}{3}(a-6)$ $-\frac{6-a}{3}$

Which of the expressions below is/are equivalent to

$$\frac{x \cdot y}{3}?$$

$\frac{x}{3} \cdot y$ $x \cdot \frac{y}{3}$ $x \cdot y : 3$ $\frac{1}{3}(xy)$ $\frac{x}{3} \cdot \frac{y}{3}$ $(x \cdot y) : 3$

Sample Task 1

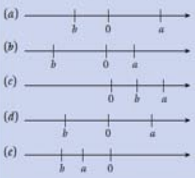
Each rectangle drawn below represents an area of $18x + 36$. Find four possible pairs of expressions that can represent lengths of their sides.

(*a*) $18x + 36$ (*b*) $18x + 36$

(*c*) $18x + 36$ (*d*) $18x + 36$

Sample Task 2

In this task, a and b represent numbers on the number line. Mark the operations that produce a *negative result* for $a \square b$.



(*a*) + − × ÷ None

(*b*) + − × ÷ None

(*c*) + − × ÷ None

(*d*) + − × ÷ None

(*e*) + − × ÷ None

Sample Task 1

The average of four numbers is negative.

(*a*) Can all four numbers be negative? Explain.

(*b*) Can all four numbers be positive? Explain.

(*c*) Can only two of the four numbers be positive? Explain.

(*d*) Can only three of the four numbers be negative? Explain.

(*e*) Can only one of the four numbers be negative? Explain.

Sample Task 2

Without multiplying the factors, predict the number of terms for each simplified product.

(*a*) $(x + 8)(x - 6)$ (*d*) $(x + 8)(y - 6)$

(*b*) $(x + x)(8 - 6)$ (*e*) $(x + y)(6 - 8)$

(*c*) $(x + 8)^2$ (*f*) $(x + 8)(x - 8)$

Sample Task 1

Complete equivalent expressions in different ways.

(*a*) ____ + 6x + ____ = (____ + ____)²

(*b*) ____ + 6x + ____ = (____ + ____)²

(*c*) ____ + 6x + ____ = (____ + ____)²

(*d*) ____ + 3x + ____ = (____ + ____)²

(*e*) ____ + 3x + ____ = (____ + ____)²

Sample Task 2

- Classify the following expressions into two groups. Describe each group.
- Classify the same expressions, this time into three groups. Describe each group.

$x^2 - 8x + 16$ $x^2 - 16$ $x^2 + 8x + 16$ $x^2 + 16$

$x^2 + 10x + 25$ $x^2 + 25$ $x^2 - 25$ $x^2 + 10x - 25$

Tabla 9.2: Propuestas de ejercicios para practicar cada una de las habilidades cognitivas (Friedlander y Arcavi (2012, p. 610-613)

10. Adaptación de las unidades didácticas

En este apartado veremos cuál es el proceso que el Departamento de Matemáticas siguió para rediseñar las unidades didácticas de manera que se mejorase el enfoque que tenía el aprendizaje del álgebra escolar.

10.1 Puesta en común de la definición de álgebra escolar

Tal y como ya hemos explicado en el apartado 8.3 , los miembros del Departamento de Matemáticas del centro tienen reuniones de periodicidad semanal en las que los profesores, además de organizarse al respecto de las tareas que van surgiendo en el día a día del centro, debaten sobre las metodologías que utilizan en el aula, ponen en común las tareas que implementarán en clase y posteriormente reflexionan sobre lo que ha pasado en estas implementaciones, modificando cuando es necesario las actividades en función de estas reflexiones. Además, son un equipo de profesores que tiene por costumbre formarse conjuntamente: asisten a cursos de formación, reciben formación que han solicitado ellos en el propio centro y participan en jornadas didácticas no solamente cómo asistentes, sino que muchas veces son ponentes que explican lo que hacen en sus aulas.

En la última reunión del curso 2013-14 se puso en común la definición de álgebra escolar de la que hemos hablado en el apartado 9. La redacción final de este apartado la llevamos a cabo una vez recogimos los comentarios de todas las profesoras del departamento, intentando así que fuera una definición acordada con la intención de que las profesoras se la apropiaran y la usaran de forma explícita en las aulas. Para poder ejemplificar cada una de las dimensiones del lenguaje algebraico lo que hicimos fue buscar entre las unidades didácticas que ya estábamos usando oportunidades de aprendizaje de este lenguaje para los alumnos, dado que como hemos comentado en el apartado 8.4 no hay ninguna unidad didáctica de la ESO que se haya diseñado exclusivamente para ayudar a los alumnos a aprender a usar el lenguaje algebraico.

Uno de los comentarios por parte de los profesores durante esa reunión fue, precisamente, que esa dispersión con respecto al uso del lenguaje algebraico podía hacer que los alumnos no fueran conscientes de que lo estaban aprendiendo a usar e incluso que no les pareciera importante. Después de esa reunión los profesores comentaron que ahora veían más clara la razón por la cual habíamos decidido implementar en las programaciones la idea de desatomizar el currículum, de enseñar a usar el lenguaje algebraico en una unidad en la que parecía que la geometría era el tema central o de trabajar fracciones y decimales dentro del tema de probabilidad. Ocurría que ellos no eran plenamente conscientes de la necesidad de ser explícitos al respecto de los conceptos que se estaban trabajando en cada unidad y acabamos la reunión concluyendo que sería importante que a partir de ahora deberían serlo, en general con los conceptos matemáticos que estaban intentando enseñar a los alumnos y en particular con respecto al uso del lenguaje algebraico y las diferentes dimensiones que ahora ya les eran más familiares.

10.2 El lenguaje algebraico dentro de las programaciones

De acuerdo con el primero de los objetivos de la investigación, queríamos diseñar unidades didácticas que brindasen a los profesores suficientes oportunidades para ayudar a sus alumnos a construir el lenguaje algebraico, pero este diseño lo queríamos hacer respetando la forma en la que el Departamento de Matemáticas del centro trabaja habitualmente. Así que hicimos un análisis de las programaciones de 1° y 2° de ESO del curso 2012-13, buscando aquellas tareas que podían ser especialmente útiles para que los profesores enseñasen a usar el lenguaje algebraico a sus alumnos y marcando qué dimensiones de este lenguaje eran las que se podían desarrollar si se implementaban en el aula. En el ANEXO A se puede encontrar el resultado de este análisis.

Al realizar este primer análisis nos dimos cuenta de que no se estaban cubriendo suficientemente todos los aspectos del lenguaje algebraico. Para hacer más visual esta carencia elaboramos las tablas que hemos añadido en el ANEXO B, donde se pueden ver todas las unidades de 1° a 2° de ESO y marcadas todas las actividades que permitían la construcción y el uso del lenguaje algebraico.

Así fue como decidimos proponer al equipo de trabajo un cambio: rediseñar algunas de las unidades de 1° y 2° de ESO e introducir nuevas tareas que permitiesen desarrollar el lenguaje algebraico. Todos los profesores estuvieron de acuerdo en ello.

Con la nueva programación, lo que se pretendía era que en 1° de ESO hubiese muchas oportunidades de evaluar las habilidades del *Early Algebra*. Por **evaluar** entendemos el proceso completo en el que los profesores tienen oportunidades de detectar cuáles son las necesidades de los alumnos y ayudarlos a construir los conocimientos necesarios para suplir sus carencias. Además, centramos la mayoría de las actividades en la dimensión de generalización y formalización, sin dejar de tener en cuenta el uso de funciones (sobre todo la función de proporcionalidad directa y afín) y el uso de operaciones inversas para resolver ecuaciones de primer grado sencillas.

En 2° de ESO, además de trabajar los números enteros y de nuevo la generalización, se decidió focalizar el aprendizaje del lenguaje algebraico en la dimensión del lenguaje algebraico referente al estudio de relaciones entre variables y funciones, y en la dimensión que debe ayudar a realizar cálculos con estructuras abstractas, trabajando especialmente la resolución de ecuaciones de primer grado y de sistemas de ecuaciones con dos ecuaciones y dos incógnitas, además de iniciar el estudio del proceso de modelización.

Estas unidades didácticas que rediseñaríamos se implementarían en las aulas durante el curso

2013-14, curso en el que además se grabarían las sesiones para recoger los datos para esta investigación. Durante ese curso, 3º de ESO permanecería igual en la programación del curso 2012-13, y el cambio lo llevaríamos a cabo durante el curso 2014-15, ya fuera del alcance de esta investigación. Por ello no hemos realizado el análisis de las unidades de este curso.

En el ANEXO C podemos ver la nueva propuesta de unidades didácticas y su análisis desde el punto de vista de las dimensiones del lenguaje algebraico.

10.3 El proceso de rediseño de las unidades

Una vez habíamos decidido cómo queríamos que fuesen las unidades de cada uno de los cursos y qué dimensiones queríamos construir con nuestros alumnos dentro de cada una de ellas, les hicimos a los profesores una propuesta de actividades que se podrían desarrollar en las diferentes unidades. A partir de aquí, los profesores eligieron voluntariamente de qué unidades didácticas serían los responsables y comenzaron el trabajo individual de preparación de estas unidades. Lo hicieron describiendo en la programación los objetivos de aprendizaje, escribiendo sugerencias sobre las metodologías adecuadas para implementarlas y diseñando el material necesario para los alumnos.

Después de este proceso de diseño, utilizamos las reuniones semanales de Departamento para que las pudieran compartir con el resto del equipo y así poder acabar de preparlas para llevar las actividades al aula.

En la Figura 10.1 y en la Figura 10.2 podemos ver cómo han evolucionado las unidades de los dos primeros cursos de la ESO gracias a los cambios que se han llevado a cabo. En las nuevas programaciones el álgebra está integrada explícitamente en muchas tareas y además se cubren todas las dimensiones del lenguaje algebraico.

-

1º de ESO 2013-14

	Título de la actividad	Dimensiones 0	1	2	3	4
U1	Problemas aritméticos					
	El parque acuático					
	La dieta					
	La factura					
U2	El juego del 24					
	Apín Capón Zapún Amanicano					
	Divisibilidad					
	La criba de Eratóstenes					
	El juego del TOC BUM					
	Sistemas de numeración					
U3	Fracciones unitarias 1: Concepto, orden y equivalencia					
	Fracciones unitarias 2: Suma y resta					
	Fracciones unitarias 3: Multiplicación y división					
	El papiro rhind y las fracciones					
U4	¡Escoge tu descuento!					
	Precios de Amazon					
	Problemas de porcentajes					
	Problemas de escala					
	Mi habitación a escala					
U5	Controlemos el tiempo					
	Videomat					
U6	Los Polígonos					
	Área i perímetro					
	El decimetro cúbico					
	El triángulo: bases y alturas (área)					
	El ortocentro					
	Mediatriz y circuncentro					
	Clasificación de cuadriláteros					
	Cuadriláteros. Problemas de dibujo					
	De la geometría al álgebra					
U7	Enteros y fichas de colores 1: suma y resta					
	Ffichas de colores 2: multiplicación y división					
U8	¡Cuál es la probabilidad de sacar un 5?					

1º de ESO 2014-15

	Título de la actividad	Dimensiones 0	1	2	3	4
U1	Las Matemáticas como cultura					
	El menú					
	El juego del 24					
	El tangram					
U2	Apín Capón Zapún Amanicano					
	Los sistemas de numeración					
U3	Divisibilidad					
	La espiral de los números primos					
	El resto también importa					
	La criba de Eratóstenes					
	Pares e impares					
U4	Pensamiento matemático					
	Un marco de cuadrados					
	¡Lo generalizamos todo?					
U5	La resolución de problemas					
	Fem Matemàtiques					
	Problemas al esprint					
	Canguret					
U6	Fracciones unitarias					
	El papiro Rhind y el ojo de Horus					
	En las rebajas					
	Fracciones y álgebra					
U7	Tea spoon					
	La escala de los planos					
	Tarifas de parking					
	Rectángulos crecientes					
U8	Unidades, áreas y perímetros					
	Triángulos, cuadriláteros y el número π					
	Quants cigrons hi ha en un quilogram de cigrons? (Captura i recaptura)					
U9	Fichas de colores					
	Husos horarios					
	¡Letras negativas?					
U10	¡Cuál es la probabilidad de sacar un 5? ¿Seguro?					
	Monedas de Buffon					
	¡Cuántos garbanzos hay en un quilo de garbanzos?					

Figura 10.1: Comparativa entre el recubrimiento del álgebra escolar en la programación de 1º de ESO antes y después de los cambios que se llevaron a cabo gracias a la investigación.

-

2º de ESO – 2013-14

	Título de la actividad	0	1	2	3	4
U1	Enteros y fichas de colores 1: suma y resta					
	Enteros y fichas de colores 2: multiplicación y división					
	Los husos horarios					
	Las civilizaciones y sus sistemas de numeración					
U2	Cover-up					
	La balanza					
	Problemas con ecuaciones					
U3	Pizzas y bebidas					
	Problemas con sistemas de ecuaciones					
	Rolle play de sistemas de ecuaciones					
	Solución gráfica de sistemas de ecuaciones					
U4	Las coordenadas					
	La ecuación de la recta					
	Funciones definidas a trozos					
U5	Problemas y poemas					
	El ábaco de Gerbert					
U6	El número de Euler					
	Poliedros con guisantes					
	Cálculo del volumen de prismas y pirámides					
U7	¿Cuál es la probabilidad de sacar un 5?					
	Las monedas de Buffon					

2º de ESO – 2014-15

	Títol activitat	0	1	2	3	4
U1	El problema de Monty Hall					
	Carreras de caballos					
	Un juego egipcio de ¿dados? El senet					
	Urnas y bolas					
	Baldufas					
	La mejor estrategia					
	Cursos de probabilidad					
	Combinatoria					
U2	El proceso estadístico					
	Cuestionarse y recoger					
	Ordenar y representar					
	Describir e interpretar					
	Predecir, inferir					
	Proyecto estadístico					
U3	El misterio de la muerte de Shakespare					
	Las civilizaciones					
	El señor del cero					
	El monasterio de Poblet					
U4	Pizzes I amanides					
	El sistema cartesià de coordenades					
	Rolle play de sistemas					
	El plano musical					
U5	Fem Matemàtiques					
	Problemes a l'esprint					
	Cangurer					
U6	Cambiar la representación, no la información					
	Ahorremos					
	La magia del álgebra					
U7	Tratamiento de imágenes					
	Las medidas DIN-A					
	El papiro Rhind					
	Espejito, espejito					
	Resolución de problemas					
U8	Figuras equivalentes					
	Problemas de geometría					
	El teorema de Pitágoras					
U9	La longitud de una cuerda y su frecuencia					
	Rectángulos isoperimétricos y equivalentes					

Figura 10.2: Comparativa entre el recubrimiento del álgebra escolar en la programación de 2º de ESO antes y después de los cambios que se llevaron a cabo gracias a la investigación.

11. Procesando los datos

En este apartado explicamos todo lo referente a los datos de esta investigación: el proceso de recogida de datos, cómo seleccionamos aquellos que íbamos a analizar y la metodología que seguimos para realizar el análisis.

11.1 La recogida de datos

Durante el curso 2014-15 grabamos todas las reuniones del Departamento de Matemáticas. También registramos la implementación de aquellas unidades de primer ciclo de la ESO que brindaban a los alumnos oportunidades de aprendizaje del lenguaje algebraico. La grabación la realizamos en estos dos cursos porque consideramos que eran lo bastante representativos de todas las dimensiones del lenguaje algebraico que hemos desarrollado en el capítulo 9. de esta memoria.

Las grabaciones tanto de las implementaciones como de las reuniones las realizamos con cámaras digitales instaladas sobre un trípode, una cámara para cada clase en el caso de las implementaciones y solamente una cámara en el caso de las reuniones. Hay que tener en cuenta que, en este centro, las tres clases de matemáticas se realizan a la misma hora. Por lo tanto, entre el conserje del colegio y yo dejábamos las tres cámaras preparadas cada día y eran los propios profesores los responsables de situar la cámara dentro del aula.

A los profesores les dimos instrucciones de dejar las cámaras en la parte trasera del aula enfocando a la pizarra. Por otra parte, en el caso de que la dinámica de clase fuese de trabajo en pequeños grupos de alumnos o por parejas, les pedimos que en esos momentos moviesen la cámara y enfocasen a un grupo, de manera que pudiéramos ver y oir el trabajo de un grupo de alumnos cualquiera y las conversaciones entre ese grupo de alumnos y la profesora cuando esta se acercase a ese grupo concreto. Algunos profesores decidieron hacer responsable a algún alumno de ir a buscar la cámara al inicio de la clase mientras ellos preparaban el material para comenzar la sesión, de esta forma conseguían minimizar todavía más el impacto de la cámara en el tiempo que podían dedicar a las diferentes sesiones.

Las primeras grabaciones las realizamos conectando también un micrófono de pie a la cámara, pero se oía demasiado el ruido de fondo y su instalación requería de un trabajo extra que molestaba a la dinámica de la clase. Así que finalmente decidimos dejar que la cámara grabase tan solo con el micrófono integrado. Solo tuvimos que pedirles a los profesores que mantuviesen las puertas y ventanas cerradas durante las implementaciones de las sesiones que se estaban grabando. Estas medidas fueron suficientes para conseguir una buena calidad de audio y de vídeo.

En la Tabla 11.1 encontramos un resumen de los datos obtenidos con estas grabaciones. Aunque todos los profesores tenían que grabar las implementaciones de las mismas unidades, se observan un número diferente de sesiones grabadas dado que cada profesor podía decidir el número exacto de sesiones que dedicaba a las diferentes tareas y por tanto esta libertad hace que el número de sesiones de cada profesor pueda tener una pequeña variación con respecto a los demás.

	Número de sesiones de 55 minutos	
	1º de ESO	2º de ESO
Jorge	25	
Mónica	30	33
Neus	21	
Jorge y Neus		34
Ángel		29
Reuniones	21	

Tabla 11.1: Datos primarios y secundarios

Aunque no todas las tareas ni todas las grabaciones que hemos realizado serán objeto de análisis, creímos que podía ser interesante grabar todas las unidades para que de esta forma tanto los profesores como los alumnos se acostumbrasen a la presencia de la cámara, de forma que conseguiríamos una mayor naturalidad en las actuaciones tanto de los profesores como de los alumnos. Y efectivamente pudimos observar cómo en las primeras grabaciones los alumnos miran a la cámara de vez en cuando, el profesor está pendiente de la colocación del trípode, etc., pero conforme el curso iba avanzando, la cámara se convirtió en un objeto más del aula.

Por otro lado, los profesores no sabían cuál sería el conjuto de tareas que analizaríamos para la investigación, por lo tanto no se las podían preparar de forma diferente al resto. Es decir, que las implementaciones que hemos seleccionado para el análisis son simplemente unas más de las muchas horas en las que grabamos dentro de las aulas. Yo mismo, que también fui uno de los profesores que se grabó, no tenía decidido el conjunto de tareas que analizaría, ya que esta decisión la tomamos una vez que todos los datos ya estaban recogidos.

11.2 Selección de datos

Dada la gran cantidad de datos de los que disponíamos teníamos que hacer una primera elección para su análisis. En este apartado justificaremos esta elección.

La unidad que finalmente decidimos analizar pertenece al segundo curso de la ESO. Esta unidad tiene entre sus objetivos el desarrollo de las competencias algebraicas necesarias para describir relaciones entre variables y para resolver sistemas de ecuaciones lineales usando diversos métodos: gráficamente, a través de una tabla de valores o a través de una manipulación de una información que no necesariamente se ha dado usando lenguaje algebraico. Lo que se pretende es que se haga evidente para los alumnos que la manipulación algebraica puede ser útil para resolver problemas y como a su vez otras representaciones de la información pueden servir para resolver sistemas de ecuaciones que se han dado en forma algebraica.

Hemos seleccionado esta unidad para realizar el análisis porque cubre un abanico amplio de las dimensiones del álgebra: cálculo usando estructuras abstractas, generalización y estudio de funciones.

Esta unidad representa un ejemplo paradigmático del proceso de trabajo en equipo del

Departamento que hemos descrito en esta memoria. El diseño de la unidad se ha hecho partiendo de un acuerdo entre los profesores del Departamento y uno de los profesores se hizo responsable del diseño concreto de los materiales y de explicarlos y compartirlos tanto por escrito en la programación como oralmente en diversas reuniones. En concreto, se habló de los objetivos de aprendizaje de esta unidad en dos reuniones diferentes. Una de estas reuniones tuvo lugar antes de empezar a implementar la unidad en las aulas y otra durante las semanas que duró su implementación. Además, una de las sesiones la desarrollamos con los tres grupos de alumnos en una misma aula y con todos los profesores observando como uno de ellos desarralloba una actividad con todos los alumnos. Este proceso de diseño e implementación de las actividades hace que esta unidad didáctica sea especialmente interesante en el sentido que nos permite observar en una sola unidad todas las características que nos interesan para nuestra investigación. El proceso se explicará con más detalle en el apartado siguiente.

Recordemos que lo que queremos es analizar cómo el conocimiento de los profesores condiciona el aprendizaje de los alumnos. Además, esto lo haremos utilizando el marco de trabajo que nos proporciona el KQ, que es un modelo creado para analizar el conocimiento a partir de la observación de la implentación de tareas en el aula. Esto nos ha hecho dedicir que nuestros datos primarios sean las grabaciones de las implementaciones de estas tareas en el aula, mientras que los registros en las programaciones, las producciones de los alumnos y las grabaciones de las reuniones sean datos secundarios. La sesión que se realizó conjuntamente con todos los alumnos también formará parte del cuerpo de datos secundarios. En la Tabla 11.2 hemos hecho un resumen de los datos que forman parte del cuerpo de datos tanto primarios como secundarios.

Datos primarios: Implementación de tareas	
Profesor	**Número de sesiones de 55 minutos**
Jorge y Neus	6
Mónica	5
Ángel	5
Datos secundarios: Fragmentos de reuniones y implementación conjunta de una actividad	
Reuniones	11 minutos de la primera reunión 21 minutos de la segunda reunión
Implementación de una tarea conjunta	1 sesión de 55 minutos

Tabla 11.2: Cuerpo de datos seleccionado para el análisis

11.3 El proceso de diseño e implementación de unidades

Como ya hemos introducido en el apartado anterior, durante el curso 2014-15, simultáneamente al diseño de algunas actividades, se tenían que ir implementando otras en las aulas. Esta forma de trabajar no fue impuesta por la investigación, sino que es la forma en la que se trabaja en el Departamento de Matemáticas del centro. La diferencia es que durante aquel curso todo este proceso fue monitorizado y grabado.

Este proceso de reflexión constante hace que el proceso de diseño de algunas actividades influya en la implementación y diseño de otras. En la Figura 11.1 se puede ver un esquema de este proceso que llamaremos **diseño-implementación**. Como ya hemos dicho anteriormente, hemos escogido para su análisis una unidad que representa un ejemplo paradigmático de este proceso.

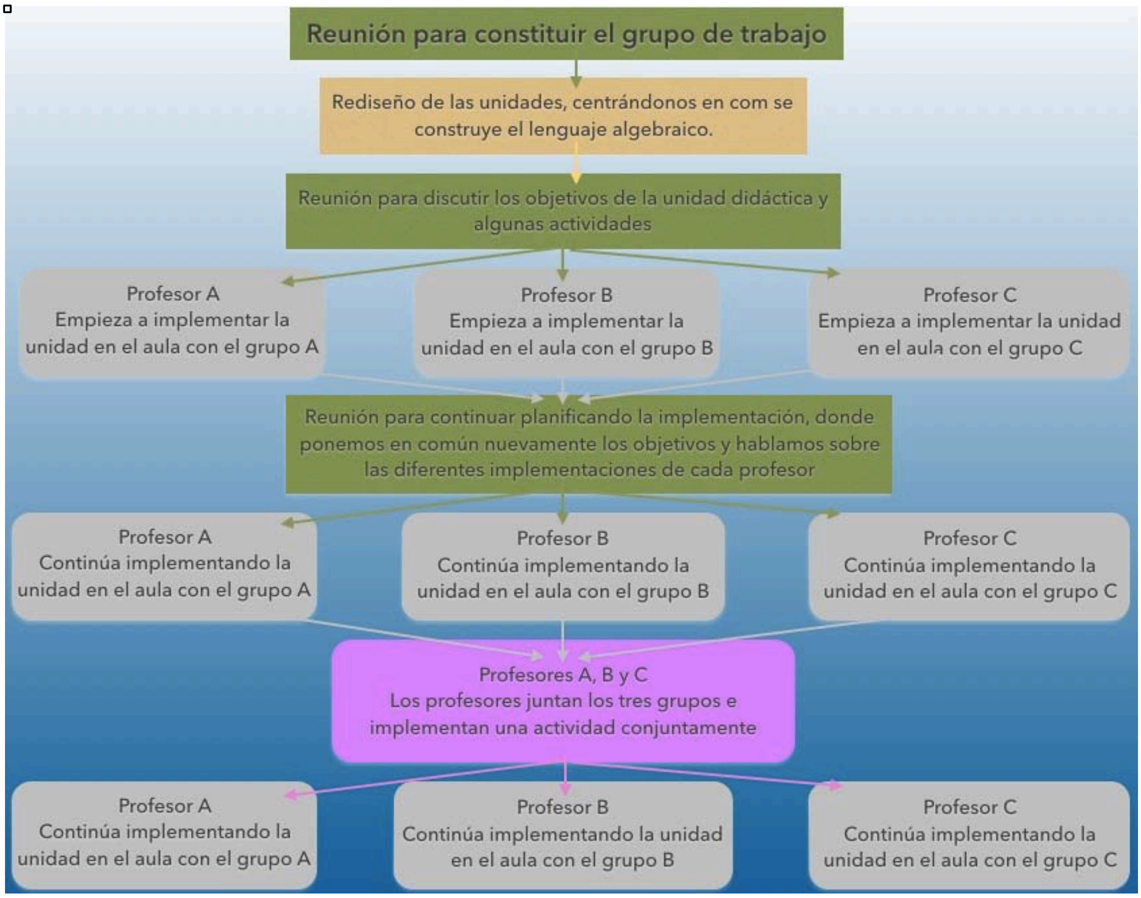


Figura 11.1: Esquema del proceso de diseño-implementación de unidades didácticas

Describiremos ahora las tareas de la secuencia de actividades que forman la parte de la unidad didáctica que vamos a analizar y su proceso de diseño, de manera que se vea cómo este proceso afecta a las implementaciones (Figura 11.1). El primer punto que consideraremos es una reunión en la que el profesor responsable de la unidad explicó los objetivos de la unidad. Esta reunión tuvo lugar unos días antes de la implementación de estas actividades en el aula. Además, estos objetivos constaban por escrito en la programación didáctica (MTP).

La primera secuencia de actividades se desarrolla en cuatro tareas concretas. A continuación haremos un resumen de estas tareas y explicaremos brevemente las indicaciones que se dieron en la reunión de Departamento a partir de las diferentes reflexiones que ellos mismos iban haciendo.

La primera de las tareas consistía en analizar la información dada por la Figura 11.2. Se trata de una **representación icónica** de una información que bien se podría haber dado en lenguaje algebraico, en forma de una condición lineal sobre dos variables.

Figura 11.2: Problema de 2º ESO de la actividad "El precio de las pizzas"

En el conjunto de preguntas de las primeras tareas, se propone que el profesorado pida a los alumnos que den toda la información posible sobre el precio de las pizzas y las bebidas. Estas preguntas tendrían que invitar a los alumnos a presentar la información de diversas formas: con tablas de valores, con gráficos, usando expresiones verbales que describan la relación o incluso una expresión algebraica que nos permita calcular uno de los valores en función del otro.

La manipulación de las diferentes representaciones de la información de parejas de datos como las que se muestran en la Figura 11.3, es también uno de los procedimientos que se pretende trabajar con este conjunto de tareas. Se espera que las manipulaciones que hagan los alumnos de esta representación icónica de la información sea similar a la que harían si utilizasen letras para representar los precios de los productos y expresiones algebraicas para representar la información.

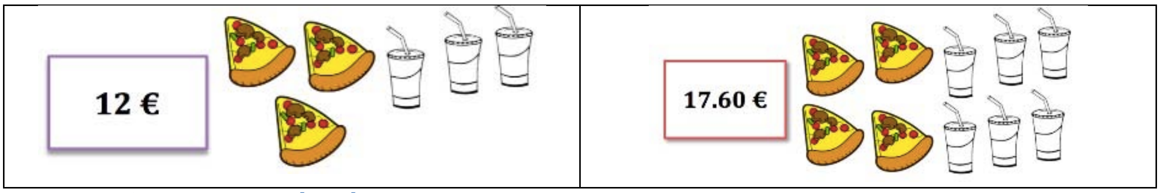


Figura 11.3: Representación icónica de un problema con dos condiciones de la actividad "el precio de las pizzas": ¿Cuánto vale una pizza? ¿Y una bebida?

Una de las consignas en las que se insiste durante la reunión de Departamento es que los profesores deben insistir en el abanico de posibilidades que existe a la hora de resolver el problema de la Figura 11.3, y que si algún alumno decidía recurrir al uso del lenguaje algebraico para resolverlo, que dejasen claro que esta no era más que otra forma de resolver este problema, ya que el objetivo no era solo que los alumnos aprendiesen a resolver sistemas de ecuaciones lineales, sino que también era importante trabajar las diferentes representaciones de esta información y cómo todas ellas podían servir para encontrar los dos precios que se buscaban.

Decidimos que acabaríamos esta primera secuencia de tareas proponiendo en una de las últimas sesiones una serie de problemas que los alumnos tendrían que resolver individualmente y sin apuntes. Estos problemas nos deberían servir para saber si habían interiorizado lo que se había trabajado y para ver si eran capaces de conectar los métodos informales que estarían usando en esos momentos para resolver problemas con el lenguaje algebraico. Todos los profesores quedamos de acuerdo en que no avisaríamos previamente a los alumnos de que esta prueba tendría lugar. Se pueden ver las preguntas de esta prueba en la Figura 11.4.

1)	Encuentra el precio de los siguientes objetos:  55€  62€
2)	Encuentra el valor de dos números desconocidos x e y que cumplan la siguiente relación: $\begin{cases} 3x + y = 55 \\ 2x + 2y = 62 \end{cases}$
3)	Encuentra el valor de dos números desconocidos a y b que cumplan la siguiente relación: $\begin{cases} 2a + b = 18 \\ 4a + b = 29 \end{cases}$

Figura 11.4: El problema del chewbacca

Con esta última actividad de la secuencia queríamos saber si los alumnos se daban cuenta de que los problemas 1 y 2 eran equivalentes. También queríamos detectar si algunos recurrían a la primera de las representaciones para resolver el tercero.

Algunos profesores realizaron esta prueba antes de la siguiente reunión y otros cuando esta segunda reunión ya había tenido lugar (Figura 11.1). En aquella segunda reunión se pretendía compartir los objetivos de las últimas actividades de aquella unidad y también de las siguientes unidades. Esta reflexión hizo que los profesores comentasen que en algunos casos no habían visto claros los objetivos de las primeras tareas. Concretamente manifestaban que no habían visto del todo claro qué era lo que se pretendía con estas actividades que estábamos haciendo en cuanto a las diferentes representaciones.

Ya después de la reunión y habiendo realizado la prueba en todas las clases, los profesores agruparon a los alumnos de las tres clases en el auditorio del colegio para llevar a cabo un *role play* de coordenadas de puntos y ecuaciones de rectas. El profesor que diseñó la unidad fue el mismo que la dirigió con todo el grupo de alumnos mientras los otros tres profesores observaban y ayudaban, participando en la dinámica. Los tres profesores que estaban observando se sentaron entre los alumnos para ayudarlos a realizar la actividad, resolviendo las dudas de algunos alumnos e indicando al profesor que la dirigía qué alumnos estaban entiendo lo que tenían que hacer y cuáles no. Es decir, que asumieron el rol de un alumno experto que ayudaba al profesor a conducir la actividad. La imagen de la Figura 11.5 corresponde a un momento de esta sesión.

El *role play* consistía en hacer que los alumnos representasen puntos del plano cartesiano. Cada uno tenía que saber qué coordenadas le correspondían y a continuación se tenían que levantar siempre que cumpliesen las condiciones dadas por el profesor. El profesor daba las condiciones usando diferentes representaciones: verbal, tabla de valores y expresiones algebraicas. El gráfico, además de estar representado por los alumnos, también se explicitaba en una presentación digital.

Figura 11.5: Clase de 2º de ESO durante el *role play* de sistemas de ecuaciones

De nuevo, esta sesión provocó la reflexión del equipo de profesores, que manifestó en diversas ocasiones que, viendo cómo se había dirigido la sesión, ahora tenían mucho más claros cuáles eran los objetivos de la unidad.

Las siguientes tareas consistían en continuar trabajando con los alumnos los cambios de representación. Para llevarlos a cabo se diseñó una nueva lista de problemas entre los que los profesores debían escoger algunos para poder trabajar con los alumnos durante una o dos sesiones más y así acabar de cerrar la secuencia de tareas.

11.4 Descripción y agrupación de los datos

En este apartado veremos con más detalle cuáles son las tareas cuya implementación hemos decidido analizar. También explicaremos cómo se han descrito estas implementaciones y qué características tienen los episodios que hemos decidido transcribir. Por último, las características del análisis que queremos realizar (tres profesores diferentes implementando las mismas tareas que tienen unos objetivos de aprendizaje concretos) ha hecho que estos datos se hayan tenido que reordenar para obtener un cuerpo de datos coherente con esta metología. Así pues, en este apartado también explicaremos cómo se ha llevado a cabo esta reordenación.

Se puede ver una descripicón detallada de las tareas que hemos seleccionado para el análisis en la Tabla 11.3. El material de todas estas tareas se proporcionó a los alumnos de forma digital, ya que ellos trabajan habitualmente sobre un iPad sobre el que toman notas directamente. Por otro lado, el profesor también disponía de estos documentos de forma digital, así que podía proyectar los problemas en la pizarra. La excepción fue la tarea número 4, que se proporcionó en papel, ya que se trataba de una prueba individual.

Además de todas las reflexiones que se hicieron en la reunión y que ya antes hemos comentado, los profesores disponían por escrito de los objetivos de la unidad. Recordemos que en aquella reunión se aclararon los detalles de estos objetivos y se decidió la planificación de las tareas dentro del calendario. Siguiendo la forma habitual de trabajar de los profesores del departamento, cada profesor tendría libertad para utilizar las sesiones que creyese conveniente utilizar para cada una de las tareas, podría decidir si trabajaba todas las cuestiones propuestas en las tareas o solo algunas, y también en qué orden preferiría hacerlo. La pauta común que se tenía que seguir era asegurarse de que se estaba focalizando el aprendizaje en los objetivos que habíamos acordado.

Objetivos de la unidad

- Extraer toda la información posible de una relación numérica en situación de proporcionalidad.
- Representar situaciones de proporcionalidad usando tablas, gráficos y expresiones verbales.
- Dadas dos relaciones con dos cantidades desconocidas, ser capaz de decidir cuándo se podrán calcular cada una de estas cantidades. Saber calcularlas en caso positivo y saber argumentar por qué no en caso negativo.
- Modelizar y resolver problemas usando diversas representaciones como, por ejemplo, tablas, gráficos, ecuaciones y enunciados verbales.
- Relacionar el lenguaje algebraico con el planteamiento de una situación de proporcionalidad que se pueda escribir mediante el uso de sistemas de ecuaciones.

Tarea 1: Pizzas y ensaladas para todos

19.90€

1. ¿Podrías saber cuánto cuestan una pizza y dos ensaladas? Argumenta la respuesta.
2. ¿Cuánto cuestan 4 ensaladas y 6 pizzas? ¿Por qué?
3. Explica qué más podemos decir a partir de estos datos.
4. Argumenta por qué dos ensaladas no pueden costar más de 20€.
5. Argumenta que una pizza no puede costar más de 6€.
6. Argumenta que cuatro ensaladas y siete pizzas cuestan más de 39€.
7. Di cinco posibles precios de ensaladas y los precios de pizza correspondientes. ¿Podrías generalizar?

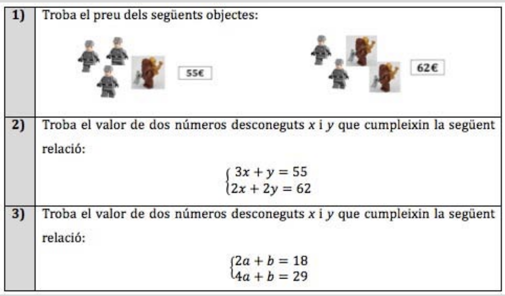
Tarea 2: ¿Qué podemos saber de los precios?

1. Argumenta si con la información que tenemos podemos saber el precio de una porción de pizza y una bebida.
2. ¿Qué podemos saber del precio de 4 bebidas y 2 porciones de pizza?
3. Escribe cinco cosas diferentes que puedas garantizar con esta información.
4. ¿Puedes saber el precio de 8 porciones de pizza y 12 bebidas?

Tarea 3: ¡Queremos saber más de los precios!

1. Argumenta por qué puedo saber el precio del conjunto formado por una ensalada y una pizza.
2. Explica por qué puedo saber el precio de cinco ensaladas y cinco pizzas.
3. Di seis cosas diferentes que podríamos afirmar a partir de los datos que tenemos.
4. Argumenta por qué no puedo saber el precio de dos porciones de pizza y una bebida solo con esta información.
5. Si también disponemos de la información de la actividad anterior, el precio de cuatro porciones de pizza y seis bebidas, explica como lo harás para saber el precio del conjunto formado por una porción de pizza y tres ensaladas.
6. ¿Y el precio de cinco bebidas y quince porciones de pizza?
7. Si también sabemos que una porción de pizza y dos bebidas cuestan 7€, ¿puedes saber ahora el precio de cada porción de pizza y cada bebida?

Tarea 4: De los precios al álgebra



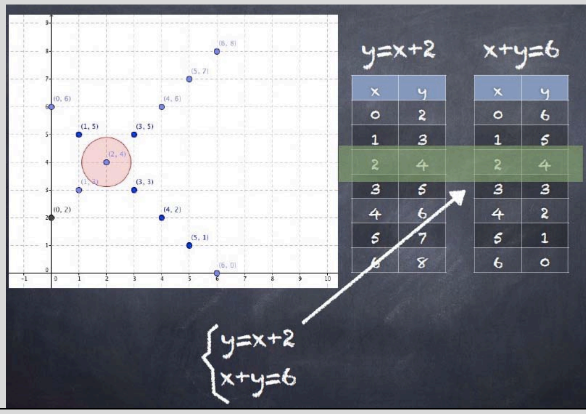
1)	Troba el preu dels següents objectes: 55€ 62€
2)	Troba el valor de dos números desconeguts x i y que cumpleixin la següent relació: $\begin{cases} 3x + y = 55 \\ 2x + 2y = 62 \end{cases}$
3)	Troba el valor de dos números desconeguts x i y que cumpleixin la següent relació: $\begin{cases} 2a + b = 18 \\ 4a + b = 29 \end{cases}$

Estos problemas se dieron a los alumnos en forma de prueba. Después de la realización de la prueba los profesores utilizamos entre media y una sesión completa para realizar una discusión con los alumnos sobre algunas soluciones que habían dado a los problemas.

Sesión conjunta (datos secundarios)

Se trata de un *Rolle play* donde los alumnos de las tres clases juntas se disponen en forma de cuadrícula, representando puntos del plano cartesiano. Se tenían que levantar aquellos que cumpliesen una determinada condición (Figura 11.5).

En esa sesión trabajamos de forma explícita las diferentes representaciones de los puntos de una recta en el plano. Es decir, que las condiciones que cumplían estos puntos se podían dar con un gráfico, una tabla de valores, con una expresión algebraica o una descripción verbal. Además, se trabajó explícitamente la relación entre todas estas representaciones y la conexión con la resolución de sistemas de ecuaciones.



Tarea 5: Lista de problemas para practicar

Consistía en una batería de 8 problemas que se podían utilizar para trabajar todo lo que los alumnos habían aprendido con las tareas anteriores. Los profesores tendrían que escoger qué problemas y de qué manera los trabajarían en clase, ya que solo disponían de una o dos sesiones más para cerrar esta parte de la unidad.

Tabla 11.3: Descripción de las tareas de las que vamos a analizar la implementación

Para poder hacer el análisis de los datos, en primer lugar transcribimimos y explicamos los vídeos de las implementaciones correspondientes a las cuatro primeras tareas, que se hicieron antes de la sesión conjunta con todos los alumnos de 2° de ESO. Hicimos las transcripciones de aquellos episodios en los que se hacía referencia explícita o implícita a algunas de las dimensiones del lenguaje algebraico.

Las transcripciones las hemos hecho respetando la lengua que estaban usando los alumnos y los profesores, que en ocasiones es castellano y en ocasiones es catalán. La descripción la hemos hecho usando el tiempo pasado, y hemos incluido algunos comentarios que aclaran lo que estaba sucediendo en la clase en esos momentos, en cursiva y entre corchetes.

La estructura de cada descripción de una tarea la hemos dividido en *introducción, desarrollo* y *cierre*. Consideramos **introducción** la presentación de la tarea a los alumnos o bien el inicio de una sesión. En el **desarrollo** es donde tiene lugar la mayor parte de la sesión, ya sea con el profesor debatiendo con los alumnos y explicando o bien con los alumnos trabajando individualmente o en grupo. El **cierre** corresponde a los momentos en que o bien se acaba una sesión (y por tanto los últimos minutos de la misma) o bien el momento en que el profesor decide cambiar de tarea.

En la Figura 11.6 se puede ver el formato con el que se hicieron estas descripciones. Para ayudarnos a estructurar el análisis que realizaríamos posteriormente, estas descripciones no se organizaron por sesiones, sino por tareas.

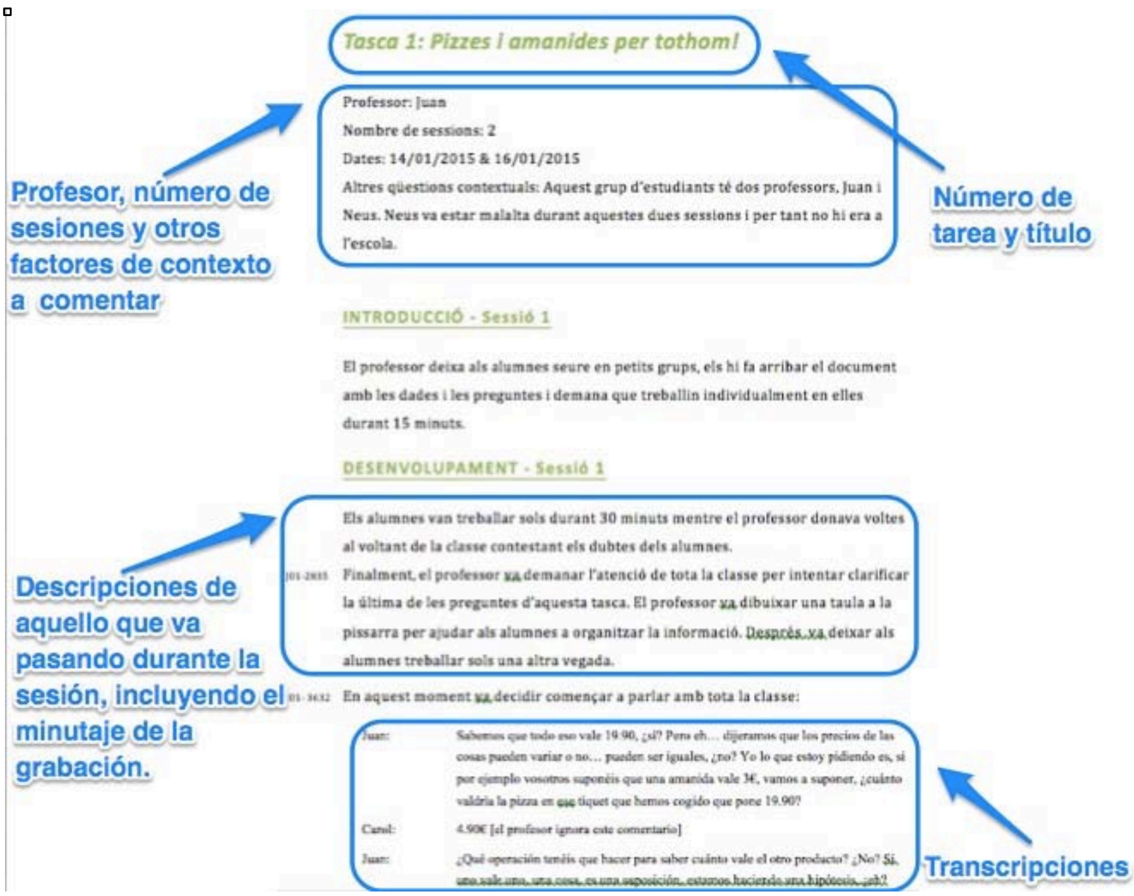


Figura 11.6: Formato de la descripción y transcripción de las tareas

En un primer nivel de análisis, hicimos estas descripciones y transcripciones de las tareas que nos interesaban. Fue así, al realizar estas descripciones y transcripciones como pudimos ver que los profesores intentaban que los alumnos asumieran los diferentes objetivos de aprendizaje en diferentes momentos con diferentes tareas. Pero lo que hacían los profesores era hacerse suyos estos objetivos de aprendizaje, concretándolos y acercándolos más a las tareas concretas que estaban implementando. Esta apropiación de objetivos se da en los tres profesores y, además, se fijan los mismos objetivos de aprendizaje.

En consecuencia, para poder hacer un análisis comparativo de los tres profesores, hemos decidido codificar la información en función de los objetivos de aprendizaje (que a partir de ahora diremos que son objetivos de aprendizaje *concretados*) que se estaban trabajando en un determinado momento. Así que en un segundo nivel de análisis hemos clasificado los episodios según el objetivo de aprendizaje concretado.

Estos objetivos de aprendizaje, que desarrollaremos con más atención en el apartado 12.2 de esta memoria, implican que los alumnos al finalizar la unidad deberían ser capaces de:

[1] Combinar las representaciones icónicas de las condiciones para obtener una nueva condición o bien utilizar la proporcionalidad para encontrar otras condiciones equivalentes.

[2] Calcular y/o expresar una variable en función de la otra, construyendo tablas de valores y relacionándolas con la expresión que permite calcular el valor de una variable una vez conocido el valor de la otra.

[3] Resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales expresados en forma icónica.

[4] Resolver e interpretar sistemas de ecuaciones lineales expresados en lenguaje algebraico.

En la Tabla 11.4 se puede ver una relación de los episodios que hemos seleccionado para su análisis. La codificación de cada episodio la hemos hecho siguiendo el siguiente patrón: J02 1140 T1. La primera parte indica la referencia al profesor y al número de vídeo. Por ejemplo, en este caso sería Jorge en el vídeo número 2. Los cuatro dígitos siguientes indican el minutaje del inicio del episodio dentro del vídeo. Por último se indica el número de tarea que se está analizando.

La Tabla 11.4 también recoge el tiempo total que han dedicado los tres profesores a cada uno de los objetivos de aprendizaje concretados durante la implementación de las primeras cuatro tareas. Hay que notar que este tiempo no corresponde con el total de tiempo que se ha estado trabajando sobre este objetivo de aprendizaje concretado, ya que los profesores dejan tiempos distintos a los alumnos para trabajar, ya sea individualmente o en pequeños grupos. El número corresponde por lo tanto al tiempo que cada profesor dedica a los diferentes objetivos de aprendizaje concretado durante las puestas en común de alguna de las tareas de la secuencia, ya sea con el grupo completo o con un grupo de alumnos reducido. En algunos casos esto explica las diferencias de tiempo entre profesores y entre diferentes objetivos.

	Jorge	Mónica	Ángel
1	J02 1140 T1 J03 1046 T2 J04 1913 T3 J04 2613 T3 **Tiempo: 13' 13''**	M01 2021 T1 M01 2130 T1 M01 2422 T1 M03 0535 T3 M03 1200 T3 **Tiempo: 12' 29''**	A01 3407 T1 A01 3508 T1 **Tiempo: 2' 48''**
2	J01 3632 T1 J01 4023 T1 J02 2041 T1 J02 2513 T1 J06 1133 T4 **Tiempo: 18' 31''**	M01 1526 T1 M05 1112 T4 **Tiempo: 3' 28''**	A01 4125 T1 A02 0840 T1 A02 1250 T1 A02 2010 T1 A02 2644 T1 A02 3500 T1 **Tiempo: 30' 58''**
3	J04 2914 T3 J04 3454 T3 J04 3626 T3 J05 0000 T4 J05 0125 T4 J05 0320 T4 J05 0421 T4 **Tiempo: 14' 5''**	M02 0903 T2 M02 1546 T2 M02 2443 T2 M03 1720 T3 M03 3000 T3 M03 3345 T3 M03 4225 T3 M05 0120 T4 M05 0508 T4 M05 0757 T4 **Tiempo: 37' 54''**	A03 2400 T3 A03 3212 T3 **Tiempo: 20' 31''**
4	J02 0720 T1 J05 0725 T4 J06 1133 T4 J06 2319 T4 J06 2400 T4 **Tiempo: 12' 8''**	M05 1310 T4 M05 1420 T4 M05 1524 T4 M05 1538 T4 M05 1811 T4 M05 2123 T4 **Tiempo: 13'**	A05 0632 T4 A05 1438 T4 **Tiempo: 2'**

Tabla 11.4: Resumen de episodios analizados

11.5 Metodología de análisis de las transcripciones

Después de seleccionar los episodios que hemos transcrito, describir todas las sesiones, como hemos explicado en el apartado anterior y codificar los episodios según el objetivo de aprendizaje concretado, hemos pasado al tercer nivel de análisis, utilizando el marco de trabajo que nos brinda el KQ (Rowland y otros, 2009), el cual nos proporcionará un lenguaje con el que discutir la práctica del profesor mientras enseña matemáticas, focalizando en el conocimiento matemático del profesor. Aunque nuestro cuerpo de datos secundarios incluyen la planificación de los profesores (reuniones, programaciones, etc.), hemos hecho el análisis de nuestros datos primarios: la implementación de tareas en el aula.

Este análisis nos ha hecho ver que, de acuerdo con de la Fuente, Rowland y Deulofeu, (2016, p. 25-30) las conexiones entre diferentes representaciones son especialmente importantes en el momento en que los profesores quieren ayudar a los alumnos a utilizar el lenguaje algebraico para resolver problemas. Por eso hemos propuesto la inclusión de un nuevo código contribuyente al KQ: conexiones entre representaciones (*making connections between representations*), que incluiremos dentro de la dimensión llamada Conexiones. Los códigos contribuyentes al KQ que finalmente hemos utilizado se pueden ver en la Tabla 11.5.

Lo que hemos hecho en primer lugar es ver cómo los profesores utilizan su conocimiento para ayudar a los alumnos a aprender unos procedimientos concretos durante los episodios seleccionados para su transcripción. Una vez hecho esto, hemos agrupado los episodios según la clasificación que ya habíamos hecho en la Tabla 11.4 para poder hacer un análisis comparativo entre los diversos profesores en relación con un mismo objetivo.

Dimensión	Códigos contribuyentes
Fundamentación (Foundation) Conocimiento y comprensión sobre matemáticas y su didáctica. Creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre las condiciones en que mejor se aprenden.	Consciencia del propósito Adherencia a libros de texto (*y otros materiales de aprendizaje)* Concentración en los procedimentos Identificación de errores Conocimiento explícito del tema Base teórica de didáctica Uso de terminología matemática
Transformación (Transformation) Presentación de ideas a los alumnos en forma de analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones.	Elección de ejemplos Elección de representaciones Uso de materiales para la enseñanza Modelación o ejemplificación del profesor (para explicar un procedimento)
Conexión (Connection) Secuenciación de los materiales de enseñanza y consciencia de las demandas cognitivas relativas a los diferentes temas y tareas.	Anticipación de la complejidad Decisiones sobre la secuenciación Reconocimiento de la pertinencia conceptual Conexiones entre procedimentos Conexiones entre conceptos **Conexiones entre representaciones**
Contingencia (Contingency) Capacidad de dar respuestas onvincentes, razonadas y bien informadas a acontecimientos imprevistos y no planificados.	Desviación de la agenda Respuestas a las ideas de los alumnos (uso de oportunidades) Visión retrosprectiva durante la enseñanza Respuestas a la (in)disponibilidad de herramientas y recursos

Tabla 11.5: The Knowledge Quartet (KQ) - Dimensiones y códigos contribuyentes (Rowland y otros, 2014, p. 25)

En la Figura 11.7 podemos ver qué formato le hemos dado al análisis de los episodios seleccionados. Hemos cambiado el color de este texto para facilitar la lectura. En primer lugar siempre encontramos el número que codifica el objetivo de aprendizaje concretado al que corresponde ese episodio.

De acuerdo con Hill, Schilling y Ball (2004, p. 433) los estudios que relacionan el conocimiento del profesor y la calidad de su enseñanza se pueden abordar desde dos puntos de vista: *deficit* y *affordance*. En el primer punto de vista, los investigadores buscan lagunas en el conocimiento de los profesores y las relacionan con su comportamiento en el aula, mientras que en el segundo los investigadores subrayan las fortalezas de los profesores y las usan para justificar lo que sucede en sus implementaciones. El uso del KQ como herramienta de análisis nos permite utilizar las dos visiones simultáneamente. Lo que hemos hecho es, junto a cada código contribuyente del KQ que emerge en cada episodio (que, recordemos, suelen aparecer diversos a la vez), incluir una flecha hacia arriba o hacia bajo indicando si consideramos que la profesora muestra un punto débil o una fortaleza para ese código concreto en ese episodio. Además, hemos añadido un comentario (escrito en presente o pretérito perfecto alternativamente) que analiza la contribución de los diferentes códigos del KQ a la emergencia del conocimiento del profesor y justifica la elección de la dirección de la flecha.

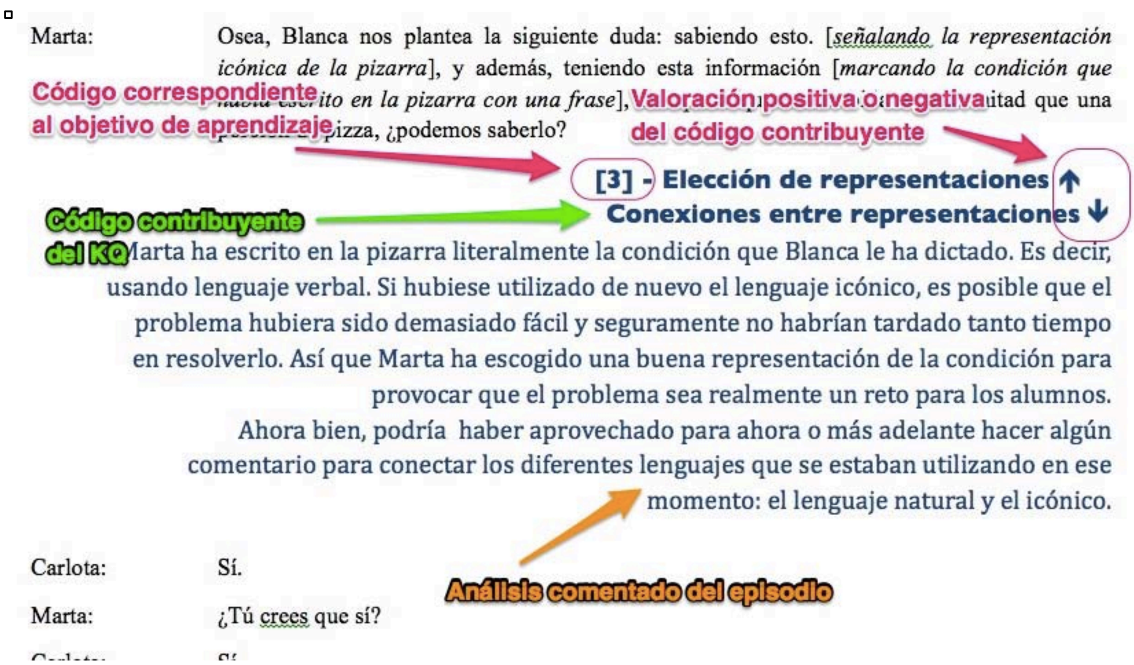


Figura 11.7: Formato del análisis de los episodios

Este tercer nivel de análisis es el que nos ha permitido estructurar las conclusiones sobre las actuaciones de los diferentes profesores y las comparaciones entre ellas. Para poder ver cómo la clase conjunta influyó a los tres profesores en la implementación de la última tarea, hemos seguido el mismo proceso de análisis, que también nos ha servido para estructurar las conclusiones al respecto de las influencias que tuvo la sesión conjunta.

--- CUARTA PARTE ---

ANÁLISIS

En esta parte realizamos el análisis de las implementaciones de los tres profesores. Este análisis lo hemos realizado por tarea y por profesor, empezando por las sesiones que se implementaron con anterioridad a una sesión que los tres profesores realizaron conjuntamente. El análisis de la sesión posterior a la clase conjunta, lo hemos realizado utilizando la misma metodología, pero dándole especial énfasis en el análisis a las diferencias que se observan en la implementación de la primera parte de la secuencia y la segunda.

12. Concreción de los objetivos de la primera secuencia

Cuando los profesores llevan a cabo las tareas que han acordado se apropian de los objetivos de una forma muy particular. Convierten unos objetivos generales en unos objetivos más concretos, más ligados a los contenidos que pretenden trabajar. En este apartado daremos una visión amplia del conjunto de tareas que forman la primera secuencia de actividades (veremos en detalle cada una de las tareas en los siguientes capítulos) y describiremos los objetivos de la secuencia concretando también cómo los profesores se han apropiado de estos objetivos.

12.1 La secuencia didáctica

En las siguientes páginas analizaremos la implementación de una secuencia didáctica en la que los profesores ayudarán a los alumnos a construir el lenguaje algebraico necesario para describir relaciones entre dos variables y para manipular estas relaciones en el sentido que ya hemos descrito en el apartado 9.4 de esta memoria.

Concretamente los profesores proporcionarán a los alumnos condiciones como las que indica la Figura 12.1 **representadas icónicamente** y les harán preguntas que lleven a los alumnos a tener que manipularlas dirigiéndolos hacia el uso de diferentes procedimientos algebraicos que sirvan para explicar estas manipulaciones mientras trabajan las diferentes representaciones que se pueden dar de las mismas. Queremos que los alumnos usen la propia representación icónica, expresiones verbales, tablas de valores, gráficos y representaciones algebraicas en forma de sistema de ecuaciones.

Figura 12.1: Representación icónica de una condición sobre el precio de un conjunto de pizzas y bebidas

En el momento de realizar esta secuencia los alumnos habían trabajado con otras secuencias de actividades en las que habían tenido que manipular expresiones algebraicas para generalizar (ver 9.2) pero todavía no habían aprendido métodos formales para resolver ecuaciones de ningún tipo. Es decir, estamos llevando a los alumnos a trabajar con sistemas de ecuaciones antes de introducirles en la resolución de ecuaciones de primer grado.

12.2 De los objetivos a su concreción

Durante una de las reuniones semanales del Departamento de Matemáticas se acordaron los objetivos de la secuencia, poniendo en común cómo se desarrollarían las tareas concretas que se llevarían a cabo para que los alumnos los alcanzaran. Los objetivos de aprendizaje que se fijaron implicaban que, al finalizar la secuencia, los alumnos deberían ser capaces de:

- Extraer toda la información posible de una relación numérica en situación de proporcionalidad.
- Representar situaciones de proporcionalidad en tablas, gráficos y expresiones verbales.
- Dadas dos relaciones con dos cantidades desconocidas, ser capaces de discernir cuándo se pueden calcular cada una de estas cantidades. Calcularlas en caso positivo y argumentar por qué no se puede en caso negativo.
- Modelar y resolver problemas usando diferentes representaciones tales como gráficas, tablas y expresiones verbales.
- Relacionar el lenguaje algebraico con el planteamiento de una situación de proporcionalidad que se pueda resolver mediante el uso de sistemas de ecuaciones.

Después de un primer visionado de las grabaciones de las diferentes implementaciones que hacen los distintos profesores, vimos cómo estos objetivos de aprendizaje se traducían en unos procedimientos más concretos, más cercanos a los contenidos que los profesores querían trabajar con sus alumnos. Hemos seleccionado y codificado estos objetivos específicos para facilitar el análisis de la secuencia:

[1] Combinar las representaciones icónicas de las condiciones para obtener una nueva condición o bien utilizar la proporcionalidad para encontrar otras condiciones equivalentes.

[2] Calcular y/o expresar una variable en función de la otra, construyendo tablas de valores y relacionándolas con la expresión que permite calcular el valor de una variable una vez conocido el valor de la otra.

[3] Resolver problemas de sistemas de ecuaciones lineales expresados en forma icónica.

[4] Resolver e interpretar sistemas de ecuaciones lineales expresados en lenguaje algebraico.

13. Análisis de la implementación de las primeras tareas

En este capítulo realizaremos el analisis de las implementaciones de las tareas de la secuencia que hemos presentado en el apartado anterior. Empezaremos siempre detallando cada una de las tareas de la secuencia y analizaremos como los tres profesores implementan estas tareas en el aula. Hemos agrupado el análisis según la tarea, y dentro de cada tarea hemos analizado a cada uno de los profesores.

Para cada una de las tareas encontraremos la descripción de las sesiones y las transcripciones de los episodios en que los profesores trabajan con sus alumnos alguno de los objetivos de aprendizaje que hemos enumerado en el apartado anterior. La herramienta de análisis que hemos utilizado es el Knowledge Quartet (Rowland y otros, 2009). La codificación que hemos utilizado es la que se puede encontrar en la Tabla 11.5.

13.1 Tarea 1: *¡Pizzas y ensaladas para todos!*

En la primera tarea se proporciona a los alumnos la información dada por la Figura 13.1. Los profesores acordaron trabajar en torno a las siguientes preguntas:

1. ¿Podrías saber cuánto cuestan una pizza y dos ensaladas? Argumenta la respuesta.
2. ¿Cuánto cuestan 4 pizzas y 6 ensaladas? ¿Por qué?
3. Explica qué más podemos decir a partir de estos datos.
4. Argumenta por qué dos ensaladas y dos pizzas no pueden costar más de 20€.
5. Argumenta que una pizza no puede costar más de 6€.
6. Argumenta que cuatro pizzas y siete ensaladas cuestan más de 39€.
7. Di cinco posibles precios de ensaladas y sus precios de pizzas correspondientes. ¿Podrías generalizar?

Los alumnos tenían disponible el documento con estos datos y todas las preguntas en forma digital.

Figura 13.1: Representación icónica del precio de dos ensaladas y tres pizzas

13.1.1 Profesor 1: Ángel

Número de sesiones: 2
Fechas: 20/01/2015 & 21/01/2015
Otras cuestiones de contexto: El profesor no había podido asistir a clase durante unos cuantos días dado que la escuela le había asignado otras funciones durante esos días. Por lo tanto, esta era la primera clase que tenía para trabajar con los alumnos esta unidad tenía una sesión menos que el resto de profesores para implementar esta secuencia.

INTRODUCCIÓN - Sesión 1

El professor empezó la sesión dando instrucciones sobre otro trabajo que tenían que hacer los alumnos y que no pertenece a esta investigación. En ese mismo momento envió por correo electrónico a los alumnos el documento de trabajo con las preguntas de la actividad.

A01-1125 El profesor proyectó la hoja de trabajo con las preguntas en la pizarra. Durante la explicación inicial remarcó que mientras los alumnos contestasen las preguntas, podría pasar que se dieran cuenta de que una respuesta que habían escrito anteriormente de esa misma hoja de trabajo podía estar mal y les pidió que, si esto pasaba, volviesen atrás y cambiaran las respuestas ellos mismos. Dio 10 minutos a los alumnos para trabajar individualmente.

DESARROLLO - Sesión 1

Mientras los alumnos trabajaban el profesor estaba sentado dejando a los alumnos trabajar en silencio e individualmente en su hoja de preguntas.

A01-2110 El profesor anunció que tenían todavía tres minutos antes de poder compartir las respuestas con los compañeros.

A01-2500 El profesor dijo que ahora disponían de tres minutos para compartir las respuestas por parejas. Durante este tiempo, el profesor caminaba por la clase escuchando cómo los alumnos hablaban sobre las respuestas entre ellos, pero sin intervenir.

A01-3200 Ángel quiso discutir con el grupo clase las respuestas que los alumnos habían escrito. Para la primera, estuvieron todos de acuerdo en que no podían decir el precio de una ensalada y dos pizzas. Un alumno había dicho que él había probado con dos posibles valores (un precio que cumplía la condición para cada producto), pero dijo que era consciente de que eso solo era una posibilidad.

A01-3407 Respecto a la segunda pregunta, los alumnos rápidamente contestaron que se podía saber el precio de cuatro ensaladas y seis pizzas porque era el doble. Un alumno dijo que había muchos números que cumplían aquella condición.

A01-3508 Los alumnos contestaron la tercera pregunta en voz alta (muchos a la vez). Decían que podían calcular el precio del doble de pizzas y ensaladas, del doble del doble, etc. También dijeron que podían calcular el precio de la mitad, de un tercio, etc. Entonces el profesor preguntó si conocían alguna palabra que sirviese para explicar aquello. Los alumnos dijeron: "múltiple", "divisor" y "fracción", y el profesor continuó preguntando hasta que un alumno dijo la palabra "proporción".

Ángel:	Proporció! Sempre que sigui la mateixa proporció de pizzes i amanides el preu el podreu saber. És a dir, si jo compro… eh… poseu-me un exemple que no sigui multiplicar per dos, i per dos, per dos,…
Cristina:	Una pizza i mitja amanida.
Ángel:	Una pizza i mitja amanida? Però això tindria sentit?
Cristina:	Mmmm... no.
Martina:	Home…
Mónica:	Quatre amanides…
Ángel:	Tindria més sentit potser…
Inés:	Una amanida…
Ángel:	Una amanida…
Algunos alumnos:	I quatre… no.
Pati:	Ah vale!
Alejandro:	I tres…
	[durante este tiempo ha habido muchos alumnos hablando que no se escuchan bien en la grabación. Los diálogos corresponden a los que están más cerca de la cámara pero más lejos del profesor. El profesor está tratando de responder a todos a la misma vez]
Ángel:	Això sí, no? Una amanida…
Pati:	I una pizza i mitja.
Ángel:	… i una pizza i mitja. No? O sigui, una amanida i una pizza i mitja la podria saber. Que seria…
	[responden diversos alumnos a la vez y no se entiende del todo bien lo que dicen, pero parece que dicen "un medio"]
Ángel:	La meitat del preu, no? Perquè l'amanida no te la partiran, però la pizza potser sí.

[1] - Uso de terminología matemática ↑

El profesor aprovecha el problema para recordar que lo que estaban haciendo era encontrar condiciones proporcionales a la que venía dada por el enunciado del problema.

A01-3655 Los alumnos pudieron contestar también a la cuarta pregunta. También pudieron argumentar la respuesta a la quinta pregunta, diciendo que el precio de una ensalada tendría que ser de 0.95€, y que esto era muy poco. La sexta pregunta fue contestada correctamente por un grupo de alumnos en voz alta.

A01-4125 Empezaron a comentar las respuestas a la pregunta número siete.

Ángel:	[*mirando a una alumna, Carol*] El que tu has fet, què és?
Carol:	L'amanida doncs 3.20 i la pizza 4.50.
Ángel:	Ja haurà trobat un que serveix. No? Sí. Has dit... posem aquí pizzes i aquí amanides. [*el profesor dibujó una tabla de valores en la pizarra y pone los números que le ha dicho Carol*]

pizzes	amanides
3.2	4.5

Ángel: 4.50...

Carol: i 3.20

Ángel: i 3.20.

Rita: 9.95 i 9.95.

Ángel: Com?

Rita: 9.95 i 9.95.

Ángel: Iguals.

Rita: Sí.

Ángel: [*señalando la tabla de valores*] 9.95 i 9.95. Això de què surt?

Rita: 19.90 dividit per 2.

Clara: Ah, però no són...

Ángel: Dividit entre 2?

Rita: Sí.

Ángel: Llavors això què és?

Clara: Dos... ai [ve que está interrumpiendo a su compañera y deja de hablar en voz alta]

Rita: Ehm... ehm... el preu... ah no! bueno res. Vale seria... [hay unos cuantos alumnos hablando a la vez y no se entiende lo que dicen]

Ángel: Vale. Però com ho arregles per fer-ho bé?

Pati: Dos amanides i quatre... tres pizzes.

Ángel: Llavors què hauries de fer?

Clara: Dividir-ho entre 3 i dividir-ho entre 2.

Ángel: Aquest el divideixo entre 3, aquest el divideixo entre 2 [*señalando el lugar del precio de las pizzas y de las ensaladas respectivamente*]... llavors el que tu penses ja podria ser. O sigui, no és que les pizzes i les amanides costin igual, sino que el que estàs fent és que... el grup de pizzes i el grup d'amanides costi igual.

[2] - Elección de representaciones ↓↑ Identificación de errores ↑

El profesor decide escribir la información que pedía la pregunta número 7 en forma de tabla de valores. La representación que usa es la misma que la que se utilizaría para recoger valores de una función cualquiera. Pero en las etiquetas de la tabla decide no poner letras, sino las palabras "pizzas" y "ensaladas". De esta manera no está identificando la tabla con lo que realmente contiene: el precio de una pizza y de una ensalada.

Por otro lado, al escribir las palabras en plural hizo que una alumna se confundiese y dijese los precios del grupo de ensaladas y el grupo de pizzas. El profesor identifica el error que había cometido la alumna y lo corrige con la colaboración del resto de alumnos.

-

CIERRE - Sesión 1

De repente, a media discusión, sonó el timbre que indicaba que la clase tenía que terminar. Así que la discusión sobre la tabla de valores quedó sin acabar. Antes de que los alumnos abandonasen el aula, el profesor dijo que el próximo día preguntaría si alguno sabía generalizar. También envió la siguiente hoja de preguntas (Tarea 2) por correo electrónico y dijo que éste no lo comentarían en clase porque era muy parecido a este primero que ya habían trabajado, pero que lo enviaba para que pudieran practicar en casa.

INTRODUCCIÓN - Sesión 2

El profesor empezó la sesión preguntando a los alumnos sobre la competición de resolución de problemas en que algunos alumnos habían participado (Copa Cangur). También explicó el próximo trabajo que debían presentar y que no pertenece a las tareas de esta investigación (Fotografía Matemática).

A02-0840 Ángel dibujó en la pizarra la representación icónica de los datos que se daban en la tarea en la que habían estado trabajando el día anterior y proyectó el enunciado de la pregunta número 7 para discutirla de nuevo con los alumnos, continuando así con lo que habían trabajado durante la sesión anterior.

DESARROLLO - Sesión 2

El profesor pidió que le diesen cinco posibles valores de pizzas y ensaladas que cumpliesen la condición del enunciado y escribió la información en la pizarra completando la siguiente tabla de valores:

Ensalada	Pizza
3.2	4.5
2.86	5.2
4	3.95
5	3.3
4.33	3.6

En este momento se dio cuenta de que una cantidad sustancial de alumnos no tenían esta tabla hecha, así que paró la clase durante unos segundos para decir que esto no se debía volver a repetir.

[2] - Elección de representaciones ↓

La sesión anterior había puesto en la tabla de valores las etiquetas usando las palabras en plural, cosa que hizo que algún alumno se confundiese. Esta vez utiliza las palabras en singular, pero vuelve a no indicar que se trata de los precios de estos productos. Se podría haber solucionado fácilmente poniendo letras a las etiquetas y diciendo que estas letras representan los precios de los productos.

A02-1250 El profesor preguntó a una alumna si podía generalizar. Esta alumna le dijo que no entendía la pregunta. Entonces, el profesor le pidió a otra alumna si podía ayudar a su compañera a entender la pregunta:

Clara: Dir més o menys al voltant de quin número serà. O sigui, al voltant de quin preu posem allà

Ángel:	Al voltant de quin preu… eh…
Jaro:	Bueno, pots fer una mitja o una mediana, però no et serveix.
Clara:	No t'està dient què costarà 5… t'està dient que costarà algo al voltant de..
Jaro:	També ho pots fer realísticament
Pati:	Ah, jo pensava que era com un patró que servís, totes… [*Ángel puso la atención sobre lo que estaba diciendo esa alumna*] tots els preus per fer…
Ángel:	Tots els preus per fer...
Pati:	Sí, bueno, he fet… com calcular. Un patró que serveix amb tots els preus
Ángel:	Carlos, que està dient la Pati? [Pati estaba sentada en la primera fila y Carlos está sentado en la última fila]
Carlos:	... [*silencio*]
Ángel:	No? Escolta-la.

[2] - Reconocimiento de la pertinencia conceptual ↑

El profesor ha encontrado entre los alumnos el tipo de respuesta que estaba buscando. Así que intentó que todos los alumnos escuchasen a aquella alumna.

Pati:	Si dices... "a", dos "a", més tres "p", pizzas, igual a 19.90. Después, "a" iguala a 19.90 menys tres pizzes dividit entre dos. I "p" iguala a 19.90 menys…
Ángel:	Sabeu què està fent?
Some students:	Una equació...
Ángel:	Una equació?
Cristina:	Bé... no...
Jaro:	Està utilitzant àlgebra per..
Mónica:	Àlgebra…
Ángel:	Mónica?
Mónica:	Està fent operacions inverses per poder saber més o menys el número que podrien ser les amanides i les pizzes.
Ángel:	Més o menys, tu creus lo que està fent li donarà més o menys.
Mónica:	Bueno, no, no, jo crec que li donarà exacte.
Ángel:	Exacte?
Mónica:	Bueno, no ho sé, a lo millor. Bueno, jo crec que li donarà un número aproximat perquè mai pot ser un exacte.
Ángel:	A veure... um… Carol, intenta explicar tu, sense veure que el ha fet la Patrícia, el que ha dit la Patrícia
Carol:	Bueno. Jo crec que… o sigui, el que ha fet ella? [*Ángel asintió con la cabeza*]. Jo crec que potser està intenant que o sigui dividir el 19.90 entre el número de pizzes i d'amanides, però llavors sortirà el mateix preu per… o sigui… com si valguèssin el mateix les pizzes i les amanides.
Ángel:	Tu creus que valen igual o que no?
Carol:	Que no. Però que fent lo que faria potser li surt.
Pati:	No, no, perquè ho restes...
Ángel:	Espera Pati. Qui creu que li sortirà igual de preu de pizzes i d'amanides amb lo que ha fet ella?

-

Jaro: Puedes repetir?

Ángel: [*Asintió con la cabeza*] Álex, pots explicar una altra vegada el que ha dit la Pati?

Álex: Pues, ella vol fer 19.90 divi… bueno… dividit pel nombre de pizzes i després li donarà el preu de pizzes però crec que no està bé perquè trobaries solo el número de pizzes. Quant valdria una pizza

Ángel: O sigui, tu fas… tu creus que ella fa 19.90 entre el número de pizzes…

Álex: Sí.

Ángel: Fas això Pati?

Pati: No.

Ángel: No, em sembla que no. Bueno, ella no està d'acord. [*Martina levanta la mano*]. Algú sap explicar el que ha dit la Pati? Vinga Martina.

[2] - Respuestas a las ideas de los alumnos ➜

Los alumnos están divididos en dos grupos que confundían cosas diferentes. Por un lado, algunos alumnos ya entienden lo que había intentado explicar Pati, pero estaban insistiendo en que aquello no servía para calcular los precios de una pizza y de una ensalada sino simplemente para dar diversas posibilidades de precios. Y por otro lado hay que no entienden de dónde sale la fórmula que Pati había dado.
El profesor no detecta estas dudas y continúa intentando que los alumnos piensen en cómo escribir la fórmula. Lo podría haber explicado directamente él para no hacer una discusión tan larga, ya que no todos los alumnos están hablando de lo mismo.

Martina: Bé, del que ha explicat jo lo que he entès és que ella diu que el preu és 19.90 menys… o sigui… cada preu és "a" més "b" que això t'igualaria 19.90€ . "a" és el número d'amanides i "b" és el número de pizzes

Ángel: [*Decidió empezar a escribir en la pizarra por primera vez*] A veure, posem lletres. "a" majúscula o minúscula? Com t'agrada?

Martina: Minúscula

Ángel: Minúscula. "a" és…

Martina: "a" és el número d'amanides.

Ángel: Nombre d'amanides [escribiendo en la pizarra "a=número d'amanides"].

Martina: Que per trobar això serà el número de pizzes menys 19.90, o sigui, el preu de les pizzes menys 19.90. O sigui, preu d'amanides! [*señalando el significado de la "a" con el dedo*]

Ángel: Preu. Preu d'amanides [borrando "nombre d'amanides" de la pizarra y escribiendo "a=preu d'amanides"]. Què us agrada més [a la clase] preu o número?

Tota la classe: Preu.

Ángel: Preu?

[Algunos alumnos hablan a la misma vez, tratando de justificar por qué prefieren poner el precio]

Ángel: Preu, no? Marc, és número, no?

Marc: No. Preu.

Ángel: Per què?

Marc: Perquè el número seria el número de pizzes i no el preu que volem saber.

Ángel: Ah. Vale. Llavors. Ya no lío más. [*ríen*]. Què, ara què faig?

[2] - Base teórica de didáctica ↑

El profesor sabe que es habitual que los alumnos confundan el significado de las letras, así que decide insistir en que ahora las letras representan números y que en concreto representan el precio de los productos. Para hacerlo, genera una pequeña discusión con los alumnos hasta asegurarse de que la mayoría está siguiendo el razonamiento.

Martina: Doncs, llavors, per saber com trobar “a” hauries de fer, el preu de les pizzes,…

Ángel: Vale. Tu vols saber…

Martina: però tampoc ho pots saber perquè...

Ángel: … com puc trobar “a”... [escribiendo estas palabras en la pizarra]

Martina: Sí, però que tampoc ho pots saber perquè tampoc saps el preu de les pizzes i llavors estàs intentant calcular les dos coses. Però ella ha explicat que per trobar “a”…

Ángel: Ella ha fet el que li demanaven [marcando la palabra generalizar en la pizarra]

[2] - Respuestas a las ideas de los alumnos ↓

Martina le ha dado una respuesta al profesor que le tendría que haber hecho darse cuenta de que en la clase había un malentendido sobre lo que estaban haciendo: algunos alumnos estaban pensando en que podrían calcular el precio de una pizza y una ensalada.
En ese momento el profesor deja claro qué era lo que estaban intentado hacer con toda aquella discusión, pero no aclara la duda general que había en la clase desaprovechando así la intervención de la alumna.

Martina: Sí. Ha dit que “a” iguala 19.90 menys…

Ángel: O sigui si tu vols trobar “a” dius “a” igual a…

Martina: 19.90…

Ángel: Sí?

Martina: … menys preu de pizzes…

Pati: Sí.

Ángel: Menys?

Martina: Preu de pizzes.

Ángel: Preu de pizzes [escribiendo "preu de pizzes" en la fórmula]. Això?

[en la pizarra pone: a = 19.90 – preu de pizzes]

Martina: Sí.

Ángel: Esteu d’acord? [dirigiéndose a toda la clase]

[se oyen muchas voces diciendo que sí]

Martina: O posar una lletra.

Pati: Hauria de ser 3a menys “p”...

Drhisti: Sí perquè són tres pizzes...

Martina: Tres pizzes...

Ángel: Tres, preu de pizza.

Pati: Ah, no, perquè restes tres… [Ángel no hace caso de este comentario]

Ángel: Com ho escric això?

-

[2] - Base teórica de didáctica ↑
El profesor ha provocado que la alumna piense en el significado de la letra que quería poner en la fórmula.

Martina: Clar perquè això aniria dividit entre dos però… sí però clar… hi ha tres pizzes però jo aquí estic dient, o sigui, el número, o sigui el preu total de les tres pizzes. Si vols fer el preu total d'una pizza llavors poses “3p”, o “p”… no “3p” perquè llavors són tres pizzes. Llavors “a” seria

Ángel: Vale. Ves poc a poc. Ajuda'm. Això llavors ho puc esborrar.

Martina: No.

Pati: Sí.

Ángel: No? [Ángel tatxa el que havia escrit, no ho borra]

Martina: Només has de treure el preu de pizzes [*se oyen algunas voces más, pero ininteligibles*].

Ángel: A veure. Un altre diferent… Sara, que no ha parlat.

[2] - Conexiones entre procedimientos
Hace que una alumna continúe con el razonamiento de otra alumna.

Sara: Hauries…

Ángel: Continua amb la Martina, eh? No val…

Sara: Sí. Hauries de… Però he de mirar a la que has tatxat, perquè…

Ángel: Sí sí, jo la vull tatxar.

Sara: Pues seria o “2a” perquè són les dos amanides és igual al preu menys tres pizzes.

Ángel: Vale, “2a”... [ahora empieza a escribir en la pizarra]

Sara: És igual a 19.90…

Ángel: 19.90…

Sara: …menys “3b”.

Ángel: Tres pizzes?

Sara: Preus de pizza.

Ángel: Ah, preu de pizza [escribiendo “3 preu de pizza” en la pizarra].

Sara: O també es podria fer “a” és igual a 19.90 menys tres preus dividit tot entre 2.

Ángel: Sí. Podria fer així “a” igual a 19.90 menys tres preu de pizzes…

Jaro: Però aquí tenim una fòrmula, no uns números [*Ángel ignora este comentario*]

Ángel: … i tot dividit entre dos.

[en la pizarra queda escrito $a = \frac{19.90 - 3\,preu\ de\ pizza}{2}$]

Carol: [dice algunas frases que no se escuchan en la grabación, señalando a la fórmula de la pizarra]

Ángel: O sigui que puc dir “b” a això [*señalando “preu de pizza”*]

Pati: Sí, bueno, “p”.

Ángel: “p”, o… ah! “a” d'amanida i “p” de pizza! Ara ho veig. [*todos ríen*]. Vale, llavors, “a” serà igual a 19.90 menys “3p” dividit entre 2. [*Y escribe en la pizarra* $a = \frac{19.90-3p}{2}$].

A02-2010 Después de esto, el profesor todavía discutió un poco más sobre la fórmula que ha escrito en la pizarra. Mónica dijo que la fórmula tendría que ser:

-

$$\frac{a}{2} = 19.90 - 3p$$

porque en la pizarra ponía “a=preu de les amanides”. Finalmente, la mayoría de los alumnos asienten cuando se dice que la fórmula podría ser diferente dependiendo del significado de las letras. Así que ellos decidieron dejar la fórmula que tenían antes, pero clarificando que el significado de la letra “a” era el precio de la cada ensalada.

[2] - Identificación de errores ↓ Conexiones entre procedimientos ↑
El profesor ve que esta alumna estaba usando una reinterpretación de las letras de la fórmula, pero no reconoce que esta nueva fórmula está mal expresada.

A02-2644 Finalmente el profesor intentó concluir qué era lo que habían estado trabajando con toda aquella discusión. Por eso preguntó a los alumnos qué era lo que pensaban que estaban haciendo.

Clara: El preu d’una pizza. Bueno, no l’hem trobat.

Ángel: Vale, hem trobat..

Clara: La fòrmula…

Ángel: ...la fórmula...

Clara: ...per trobar el preu d’una amanida!

Ángel: ...i d’això se’n diu… [*señalando a Pati*]

Pati: Generalitzar.

Ángel: El que hem fet és generalitzar. O sigui hem trobat una fòrmula que serveix per calcular què?

[2] Uso de terminología matemática ↑ Consciencia del propósito ↑
El profesor ha relacionado una de las preguntas de la tarea con el objetivo de aprendizaje de la unidad didáctica haciendo que una alumna utilice una de las palabras clave en el aprendizaje del lenguaje algebraico: la generalización.

Matina: El preu de l’amanida.

Clara: El preu d’una amanida [*casi a la misma vez que Martina*]

Ángel: [*señalando la tabla de valores*] Aquesta taula. Sí, no? O sigui, aquí què és el que podríem fer per relacionar aquesta fòrmula i aquesta taula? Álex. Aquesta taula i aquesta fòrmula com es relacionen?

[2] - Conexiones entre representaciones ↑
El profesor empezó a hacer preguntas para mostrar la relación entre las dos expresiones, la tabla de valores y la expresión algebraica que habían encontrado: dos representaciones de la misma información.

Álex: Pues, bueno, canvies l’”a” per 3….

Ángel: Aquí? [señalando "a" en la fórmula]

Álex: Sí.

Ángel: Sí?

Álex: Sí. Perquè és una amanida, després iguala a i, bueno, faria…

Ángel: [algunos alumnos levantan la mano queriendo contestar] Baixeu les mans, que es posa nerviós.

-

Álex: 4.5 per 3 perquè hi ha tres pizzes…

Ángel: Sí… [señalando en la pizarra lo que va diciendo Álex]

Álex: i després, quan ja, bueno, dividiries menys 19.90.

Ángel: Primer divideixes i després restes.

Álex: No. Primer restes.

Ángel: Primer restes i després divideixes. Però, i què ha de passar? O sigui… ara m’has dit una sèrie d’operacions però no acabo d’entendre la relació. O sigui, jo t’he preguntat quina relació hi ha… estigueu quiets [*pide a los alumnos que bajen las manos y que no contesten*]. Quina relació hi ha entre.. tu m’has senyalat aquests dos numerets [*tocando los dos primeros números de la tabla de valores*] i això d’aquí [*señalando la fórmula*]- M’has dit… què ha de passar?

[2] - Conexiones entre representaciones ↑
El profesor intenta que el alumno separe el proceso del concepto.

Álex: Bueno, trobaràs el preu de…

Ángel: Trobaràs?

Mónica: No perquè ja el tenim…

Ángel: Llavors què ha de passar? Com se relaciona això i això? [*volviendo a señalar la tabla de valores y la fórmula*]

Álex: ...

Ángel: No entens la pregunta. No?

Álex: No.

Ángel: Algú té la resposta? Vale a veure… qui no ha parlat avui… Alejandro ha parlat menys. Alejandro, escolta’m. El que vull que li expliquis a l’Álex és la pregunta que faig. O sigui, quina pregunta estic fent.

Alejandro: Sí ehm… com relaciones eh… el preu de l’amanida o de la pizza amb la fòrmula…

Ángel: No, però no repeteixis.

Alejandro: Llavors, has de substituir el preu…

Ángel: Ara estàs responent. Intenta fer la pregunta… o sigui, explica-li la pregunta que jo he fet. Jo li he dit dues vegades que vull una relació i no m’entén. Llavors, no saps explicar-ho d’una altra manera? Algú s’anima? Clara

Clara: Bueno, a veure. El que t’està preguntant el senyor de la Fuente és: tens una fòrmula i, no resultats, però una espècie de resultats i t’està dient, què… o sigui, de què estàs parlant, de problemes diferents? Que tenen aquestes dos coses que els hi fa estar en el mateix problema. Saps? [*Ángel afirma con la cabeza*] O sigui, és que no, no sé explicar-ho.

Ángel: No?

[Algunos alumnos levantan la mano y otros piden el turno de palabra]

Clara: Què és el que tenen a veure?

Ángel: Álex? Tres, dos, no? A vera, ... Alejandra, que no has parlat avui.

[los alumnos ríen porque le llama Alejandra]

Alexandra: Jo crec que has de posar només un número a la fòrmula i després calcular l’altre… o sigui…

Ángel: O sigui, quina relació tenen? Explica’m la relació.

Alexandra: Que.. eh…

-

Ángel:	Si vas bé, eh? Has de posar un número a la fórmula…
Alexandra:	Només el del preu de pizzes.
Ángel:	Només el de preu de pizzes. Posa'm un exemple. Explica'm-ho amb un exemple.
Alexandra:	4.5 per 3…
Ángel:	4.5…
Alexandra:	per 3
Ángel:	per 3. 4.5 per 3,... seria la "p", multiplico per 3...
Alexandra:	i després 19.90, ai, 19.90 menys el "p" i dividit per 2. I si dóna "a" aleshores…
Ángel:	I què hauria de donar? 3.2. O sigui, ara intenta completar el que estava explicant l'Álex. L'Álex estava dient fico el 3.2 aquí, fico el 4.5 aquí i calculo. I jo li preguntava, calculo què? O sigui, intenta que la resposta de l'Álex sigui bona.
Alexandra:	19.90 menys 13.5 dividit entre dos. I si dóna "a", o sigui, 3.2 és correcte.
Ángel:	És correcte. O sigui, pot servir per…
Jaro:	Comprovar.
Ángel:	Comprovar. Pot servir per comprovar, per exemple, no? Un podria tenir aquesta taula i aquesta fórmula i assegurar-se de que la taula està bé fent què?
Algunos alumnos:	L'operació.
Ángel:	Una pregunta. Quan esteu fent això [*assenyalant la taula de* valors], atenció a les paraules, de comprovar… què és el que esteu fent? Què és el que esteu fent amb els números aquí? [*señalando la fórmula*]
Clara:	Posar números a la fórmula.
Sara:	Substituir.
Ángel:	Substituir. El que esteu fent és substituir les lletres per números [*algunos alumnos lo están diciendo a la misma vez que el profesor*].O sigui que això és una fórmula que pot servir per comprovar, però també pot servir per…
	[se oyen voces ininteligibles que dicen generalizar, sustituir...]

[2] - Uso de terminología matemática ↑

El profesor busca que los alumnos usen la palabra "sustituir" el número dentro de la expresión algebraica.

Clara:	Obtindre resultats.
Ángel:	Obtindre resultats calculant. I com calculo?
Clara:	Generalitzant!
Ángel:	Bueno, la fòrmula és la generalització.
Mónica:	I si ja saps un número?
Pati:	Agafo qualsevol número…
Ángel	Agafo qualsevol.
Pati:	Sí, d'una pizza, qualsevol.
Ángel:	D'una pizza.
Pati:	Sí.
Ángel:	Tu faries el d'una pizza.
Pati:	Sí. I deprés el multiplico entre tres.

Ángel: Imagina't. Dic, inventa't.

Pati: 2.

Ángel: 2. Amb aquest 2, Inés, què faig?

Inés: Podries posar 2, el "3p", o sigui, 2, per "3p"…

Ángel: O sigui…

Inés: Menys 19.90 dividit entre 2 i donaria el preu d'una amanida [*algunos alumnos contestan a la vez*].

Ángel: O sigui que, això [*señalando la tabla de valores*], com de gran podria ser?

[se oyen alumnos que dicen "infinit", "llarguíssim", etc.]

Ángel: Hi ha moltíssimes possibilitats, no? Infinites. I això? [*ahora señalando la fórmula*]. I això ja està…

Jaro: Es pot simplificar…

Ángel: Llavors això, ja parlarem d'això [*hablando con Jaro*], i això són…

Mónica: És el mateix.

Ángel: És el mateix?

Mónica: No ho sé.

Jaro: Home sí.

Ángel: Bueno, són dues representacions

Todos: de la mateixa cosa.

Ángel: de la mateixa informació. És a dir, la informació dels preus la puc donar en una taula o la puc donar amb una fórmula. Són dues representacions de lo mateix. És igual, bueno, és semblant, a quan parlàvem de… teniu al cap alguna vegada que hem parlat de diferents representacions de lo mateix?

[2] - Conexiones entre representaciones

El profesor decide concluir explicando él mismo que la expresión algebraica y la tabla de valores son dos representaciones diferentes de la misma información. Podría haber aprovechado para hablar sobre la representación icónica, que no aparece en ningún momento de la discusión una vez la expresión algebraica está escrita sobre la pizarra.

Mónica: Sí. Ah, el nom. Fraccions.

Ángel: Fraccions, què passa?

Mónica: Fraccions equivalents.

Ángel: Fraccions equivalents, sí. Però això són representacions de lo mateix? Bueno, podria ser que sí. Però hi ha una en la que jo he insistit molt.

Rita: Ah, sí sí. Am percentat… no.

Martina: Distributiva…

Ángel: A veure Alejandro.

Alejandro: Crec que era això de les fraccions i els percentatges?

Ángel: Fraccions, percentatges…

Algunos alumnos: Decimals.

Ángel: … decimals…

Martina: Freqüència acumulada, relativa…

-

Ángel: Probabilitat, no? Fraccions, decimals, percentatges, i quan parlàvem de probabilitat això tot ho relacionàvem, no? La freqüència relativa… això és una cosa semblant.

[2] - Conexiones entre conceptos ↑

El profesor conecta dos conceptos diferentes: la relación que hay entre los diferentes tipos de representación en dos situaciones completamente diferentes. Por un lado las diferentes representaciones de la probabilidad de un suceso y las diferentes representaciones de una función (afín en este caso).

A02-3500 Ángel explicitó que uno de los objetivos de estas tareas que estaban haciendo era ser capaz de transformar la información entre sus diferentes representaciones. En este caso, de la tabla de valores a la fórmula y al revés.

A02-3627 El profesor pidió a los alumnos que pensasen cómo harían para representar aquella información en forma de gráfico.

CIERRE – Sesión 2

A02-3942 El profesor explicó a los alumnos tenían que hacer la tercera hoja de trabajo para la siguiente semana y que durante las dos próximas sesiones pasarían un tiempo trabajando sobre ella. Tendrían algún tiempo para trabajar individualmente y otra parte del tiempo lo usarían para discutir las respuestas entre todos. También dijo que la Tarea 2 era muy parecida a esta y que la podrían hacer por ellos mismos. Dejó los últimos 10 minutos de clase para que los alumnos empezaran a trabajar en la Tarea 3.

13.1.2 Profesor 2: Jorge

Número de sesiones: 2

Fechas: 14/01/2015 & 16/01/2015

Otras cuestiones de contexto: Este grupo de alumnos tiene dos profesores: Jorge y Neus. Neus no pudo asistir a clase durante estas dos primeras sesiones.

INTRODUCCIÓN - Sesión 1

El profesor deja a los alumnos sentarse en pequeños grupos, les hace llegar el documento con los datos y las preguntas y pide que trabajen en ellas indivualmente durante 15 minutos.

DESARROLLO - Sesión 1

En realidad, los alumnos trabajaron solos durante 30 minutos mientras el profesor daba vueltas alrededor de la clase contestando dudas de los alumnos.

J01-2835 Finalmente, el profesor pidió la atención de toda la clase para intentar clarificar la última de las preguntas de esta tarea. El profesor dibujó una tabla en la pizarra para ayudar a los alumnos a organizar la información. Después dejó a los alumnos trabajando solos de nuevo.

J01- 3632 En este momento decidió empezar a hablar con toda la clase:

Jorge: Sabemos que todo eso vale 19.90, ¿sí? Pero eh… dijéramos que los precios de las cosas pueden variar o no… pueden ser iguales, ¿no? Yo lo que estoy pidiendo es, si por ejemplo vosotros suponéis que una amanida vale 3€, vamos a suponer, ¿cuánto valdría la pizza en ese tiquet que hemos cogido que pone 19.90?

Carol: 4.90€ [el profesor ignora este comentario]

Jorge: ¿Qué operación tenéis que hacer para saber cuánto vale el otro producto? ¿No? Si uno vale uno, una cosa, es una suposición, estamos haciendo una hipótesis, ¿eh? Pues quiero que me hagáis cinco hipótesis de precios posibles. De esos productos. Con lo cual entiendo que esto que está pasando en la pregunta final está respondiendo a la primera pregunta, ¿no?

Carol: Pero si en la amanida pones 5€, ¿vale? y entonces para saber lo que vale la pizza, 19.90 dividido entre los 5€…

Jorge: ¿Sí?

Carol: …pues nos da 3.98€ y entonces a lo mejor ese sería el precio de la pizza.

Jorge: Y todo te suma, ¿todo te suma 19.90€?

Carol: Sí.

Jorge: ¿Lo has comprobado?

Carol: 3.98. A ver, me da 3.98…

Jorge: A ver, vamos a empezar a corregir.

Carol: 19.90.

Jorge: ¿Sí?

Carol: Sí.

Jorge: ¿Has comprobado los precios? Vale. Pues invéntate otro.

[2] - Identificación de errores ↑

Parece que Jorge ve que estos cálculos que estaba haciendo la alumna no tienen sentido y por eso le pregunta si lo ha comprobado. Como la alumna le dice que sí, le da la oportunidad de que se lo repiense pidiendo que busque algún otro ejemplo para la tabla de valores. Le da un tiempo y vuelve con ella a para ver si ha rectificado.

J01-3808 Los alumnos volvieron a trabajar cada uno en sus cálculos, intentando completar una tabla con cinco posibles valores. Jorge dejó que trabajasen hablando entre ellos.

J01-4023 Mientras tanto, volvió a hablar con la alumna que estaba intentando intervenir antes para completar valores en la tabla:

Carol: En la tabla, el precio total es 19.90€, bueno el precio total. Entonces nos hemos inventado el precio de la amanida, 5€, para saber el precio de la pizza, he dividido 19.90 entre 5€, el precio de la pizza, que me da 3.98€, que si lo multiplico por 5, que es las pizzas, me da 19.90.

Bea: Es lo que he hecho yo.

Jorge: ¿Te ha quedado claro Paloma?

Paloma: Sí.

Jorge: O sea, dividir 19.90 entre 5€, que es lo que vale cada amanida, ¿qué te va a dar?

Carol: 3.98. Entonces si lo multiplicas…

Jorge: ¿Y qué es eso?

[2] - Reconocimiento de la pertinencia conceptual ↑

Insiste en que le digan qué es lo que quiere decir ese número que están calculando. La alumna presenta dificultades a la hora de separar el proceso del concepto.

Bea: Lo que cuesta la pizza. Ah, no, es la diferencia entre los dos. No. ¿Qué es?

Carol: Es, si lo multiplicas por 5 te da…

Jorge: Eso como mucho te va a dar el número de amanidas que puedes comprar. ¿No? Si yo tengo 19.90€ y yo lo divido entre 5, que es el precio de una, ese resultado será el número de amanidas que yo pueda comprar.

-

[2] - Identificación de errores ↑

No solo se da cuenta de que el procedimiento que están utilizando las alumnas es incorrecto, sin que además hace una posible interpretación sobre qué quiere decir ese número que están calculando.

Bea:	¿No hay que multiplicarlo por…?
Jorge:	No son euros eso.
Bea:	No hay que dividirlo, hay que restarlo.
Jorge:	Hay que restar, en todo caso… pero restar 10,
Carol:	Restar…
Jorge:	Restar ¿el qué?
Carol:	Menos 5.
Jorge:	¿Menos 5? ¿Cuántas amanidas tienes? ¿Una?
Bea:	, sí.
Jorge:	Tienes dos, hay dos amanidas ahí. En el dibujo, ¿en el dibujo no hay dos amanidas?
Bea:	Hay tres.
Jorge:	Amanidas…
Bea:	Ah, amanidas hay dos.
Jorge:	Entonces, si cada una vale 5€…
Bea:	Multiplica por dos.
Jorge:	… cuestan 10, ¿no?
Carol:	Pues 19.90 menos 10.
Bea:	Ah, ya lo he pillao. Pero bien.
Jorge:	19.90 menos 10, ¿y que es eso? ¿19.90 menos 10?
Carol:	Eh… el precio.
Jorge:	¿De qué?
Bea:	El precio de las amenidas… de la pizza.
Jorge:	¿De la pizza? Las pizzas. De todas, ¿no? Bea, de las tres. ¿Y ahora qué tendría que hacer para encontrar el precio de una?
Bea:	Pues 9.90 dividido entre 3.
Carol:	, lo restamos entre 10 y lo dividimos en 3.
Jorge:	¿Tu crees que está bien eso?
Bea:	Sí.
Jorge:	¿Sí?
Carol:	lo restamos 19.90 rest… menos 10…
Jorge:	¿Por qué?

[2] - Concentración en los procedimientos ↑

El professor quiere dejar claro cuál es el procedimiento para hacer el cálculo del precio de uno de los productos, suponiendo que el precio del otro es conocido. Pero cuando una alumna le intenta decir el procedimiento para hacer este cálculo, no se lo deja explicar sin que haga el razonamiento de cada una de las operaciones que está haciendo.

-

Carol: Porque tenemos dos amanidas que valen cinco euros.

Jorge: Muy bien.

Carol: Y entonces lo dividimos entre tres que es lo de las pizzas.

Jorge: Y eso me da lo que valdrá cada pizza, ¿no? ¿Veis que ahora sí tiene lógica?

CIERRE - Sesión 1

J01-4657 La sesión acaba abruptamente con el sonido del timbre y el profesor pide que acaben la tabla de valores en casa.

[2] - Consciencia del propósito ↓

Jorge no insiste con los alumnos en intentar saber si tenían la capacidad de aplicar ese mismo procedimiento con cualquier otro precio. La clase acaba sin saber si todos los alumnos son capaces de calcular el precio de uno de los productos en función del otro. Así que Jorge acabó la clase sin saber si todos los alumnos serían capaces de hacer la tarea que les estaba pidiendo.

INTRODUCCIÓN - Sesión 2

La sesión empezó con el profesor recogiendo unos trabajos que no tienen relación con esta investigación (Fem Matemàtiques).

Después de algun tiempo, el profesor empezó a poner en común con los alumnos las respuestas de la Tarea 1.

DESARROLLO - Sesión 2

Empezaron discutiendo entre todos las dos primeras cuestiones. En esta discusión aclaran que la pizza y la ensalada no tienen por qué costar lo mismo.

Adherencia a los libros de texto ↓

En lugar de continuar desde el punto donde habían acabado la sesión anterior, Jorge decidió comenzar a comentar los problemas desde el principio. Parece que quiere ser exhaustivo dando las respuestas correctas a todas las preguntas. Podría haber aprovechado para aclarar la cuestión que quedó abierta en la anterior sesión y profundizar en su resolución con el grupo-clase.

J02-0720 Un alumno hizo la siguiente intervención cuando estaban respondiendo a la primera cuestión:

Pedro: Bueno, jo el que vaig fer era fer-ho amb "x" perquè com no sabem quant costen tres pizzes, llavors ho tenim que fer amb "x".

Jorge: "x" [corrigiendo el català]

Pedro: Bueno, amb "x". I els dos amanides ho vaig fer amb la "y".

Jorge: Amb la "y".

Pedro: I vaig fer el mateix procés però amb "x".

Jorge: Vale. Ell està veient que, que com diu que no sap el que val això, li diu "x" i "y", no? [*señalando los dibujos de las pizzas y las ensaladas*]

Pedro: Sí.

Jorge:	Però bueno, això ja anirem veient quina, quina aplicació pot tindre, sí? Vale? Però ara responent a aquesta pregunta... està bé el que dius, eh? El que diu aquí, en principi sembla ser que no tenim informació a no ser que ens diguin que tot val el mateix, no?

[4] - Respuestas a las ideas de los alumnos

El alumno le ha dado la oportunidad de hablar sobre el uso de las letras en la resolución de estos problemas, pero el profesor decide descartar este comentario, dándole valor y diciéndole que más adelante lo trabajarán. De hecho, efectivamente, más adelante Jorge recupera el comentario del alumno.

J02-1140 La discussión de la tercera cuestión llevó a la siguiente conversación:

Artur:	També es podria calcular el triple de lo que has fet.
Jorge:	Molt bé, o sigui, tu podries dir que el triple d'això, podries saber el preu, no? Val.
Isaías:	Podria ser totes les vegades que vulguis. El doble, el triple...
Jorge:	Molt bé. A veure, Nico, tú què has posat?
Nico:	Sí, lo mateix, que, ehm, ho pots saber amb aquestes dades si et diuen, eh, si et demanen el doble d'aquests productes.
Jorge:	Vale. Álvaro. Tu què has posat? Què podries dir més a partir d'aquí.
Alvaro:	Doncs, a part, que... o sigui, això, que eh, cost de totes les pizzes i totes les amanides que vulguis amb això, amb aquestes dades podries saber el que costa... i...
Jorge:	Si fossin múltiples, no? Vols dir?
Alvaro:	Sí.
Jorge:	Vale. Però això ja ho han dit, eh? Paloma, tu has posat alguna cosa diferent?
Paloma:	No.
Jorge:	Pablo.
Pablo:	Que amb el primer exemple que hi ha dos amanides i tres pizzes...
Jorge:	Sí?
Pablo:	Puc fer la meitat, una amanida i una pizza i mitja i així tindriem una mica més exacte lo que valdria el preu. També seria, com... no sé, si val 10€, 5 de l'amanida, pot ser, no?
Jorge:	Podries fer una deducció, no? Una amanida i una pizza i mitja valdria la meitat, no? Valdria la meitat de tota la quantitat.

[1] - Uso de terminología matemática ↓

Durante la discusión no aparece la palabra proporcionalidad en ningún momento. Además, se utiliza la palabra "múltiples" que en este contexto no tiene sentido.

La sesión continuó con la misma dinámica, contestando a las diferentes preguntas entre todos los alumnos.

[1] - Uso de terminología matemática ↓

Mientras daban las respuestas, los alumnos y el profesor utilizan diversas veces el hecho de que se puede calcular el precio de una cantidad proporcional de productos, pero en ningún momento se utiliza la palabra "proporcional".

J02-2041 En el momento en que llegaron a la cuestión número 7 el profesor decide que un alumno salga a la pizarra. Este alumno dijo que si una ensalada cuesta 3.5€, se puede multiplicar este precio por 2, que es la cantidad de ensaladas que hay en la representación icónica y así se obtendrían los 7€ que son el precio total de las ensaladas. Así pues, restando esta cantidad de 19.90€, que da 12.9€, y dividiendo entre tres, se tiene el precio de una pizza: 4.3€. En la pizarra, el alumno escribió lo siguiente:

3.5x2=7, 19.9-7=12.9, 12.9/3=4.3

El alumno hizo lo mismo otra vez con otro precio diferente de la ensalada. Lo escribió en la pizarra y organizó los datos en una especie de tabla de valores:

Pizzas	Ensaladas	Operaciones
3.5	4.3	3.5x2=7, 19.9-7=12.9, 12.9/3=4.3
5.30	2	2x2=4, 19.90-4=15.90, 15.90/3=5.30

El profesor pidió a los alumnos que tuviesen en sus apuntes una estructura como la que había en la pizarra, incluyendo las operaciones. También puntualizó que había muchas opciones diferentes, infinitas, para poner en la tabla.

[2] - Elección de representaciones ↓

Este formato no es el más habitual para representar una tabla de valores de una función: normalmente hay solamente dos columnas, una para cada valor. Es decir, que la columna con las operaciones no haría falta y puede hacer que los alunmnos tengan dificultades para relacionar esta representación de la información con la tabla de valores de una función.

Por otro lado, las etiquetas de los títulos no son las más adecuadas: se tendría que especificar que los valores de la tabla no son "pizzas" y "ensaladas" sinó que representan los posibles precios de estos productos. Por ejemplo, se podría haber solucionado utilizando letras para etiquetar las columnas de las tablas, diciendo que las letras representan el precio de los productos.

J02-2513 Una vez el alumno había escrito la tabla, el profesor quiso focalizar sobre la última de las preguntas de esta tarea: "*¿Podrías generalizar?*"

Jorge:	I ara, mireu què posa. Podries generalitzar? Podríem treure una regla general que es complís sempre que relacioni el preu total amb les amanides i les pizzes?
	[Se hace el silencio, parece que no entendían la pregunta. Se escucha algún "sí" aislado]
Jorge:	És a dir, ehm, com podries expressar en la primera línia que has fet, no? 19.90 què és? A què és igual?
Isaías:	El total, o sigui les tres pizzes i les dos amanides juntes.
Jorge:	Podries escriure això en una operació combinada? Allà a la dreta.
Algun alumne:	Com operació combinada?
Jorge:	Una operació combinada, és a dir, 19.90 què val, què és, igual,
Isaías:	19.90...
Jorge:	A què és igual?
Isaías:	19.90 igual a 3... [el alumno va escribiendo cosas en la pizarra mientras habla]
Jorge:	No. Tu tens que una amanida val 3.5, no?
Isaías:	Sí.

Jorge: I una pizza 4.30.

Isaías: Sí. A vale.

J02-2610 Finalmente el profesor consiguió que el alumno escribiese en la pizarra lo que él quería:

$$19.90 = 3.5x2 + 4.3x3,$$

J02-2627 Una vez escribió esta operación en la pizarra, el profesor intentó explicar por qué ha hecho a Isaías escribir las operaciones de esta manera:

Jorge: Muy bien. Això és una operació combinada, mirad, veieu? que expressa el preu de cada amanida i cada pizza i dóna el total de tot, veritat?

y pidió lo mismo para el otro cálculo que había escrito Isaías en la tabla. Esta vez el alumno lo hace sin dificultades y sin ninguna intervención del profesor:

$$19.9 = 2x2 + 5.3x3.$$

J02-2706 En ese momento, el profesor volvió a llamar la atención de toda la clase, diciendo que estuviesen atentos porque lo que diría ahora era muy importante.

Jorge: Val. I si jo ara et pregunto, Isaías, estem atents tots? Com podries posar-me una formula general, com aquella...

Isaías: Sí?

Jorge: ... que servís per a qualsevol preu? que tinguem a la classe. Clar, a la classe hem dit que cadascú ha posat el seu preu.

Isaías: Sí.

Jorge: Per un preu qualsevol...

Isaías: Vale, pues seria, el número de... seria el número de l'amanida, com ho ficaries a la pissarra?

Jorge: Eh...

Isaías: Però el preu de l'amanida...

Jorge: Com li dius al preu de l'amanida?

Jorge: Venga, estamos todos ahí. Vamos a mirar aquellas dos fórmulas y vamos a decir, vamos a ver qué cosas se parecen y que cosas iguales, entre la de arriba y la de abajo. Y qué cosas diferentes.

Isaías: No no. Pero es, lo que vale una amanida y lo multiplicamos por cuantas amanidas hay...

Jorge: Vale. Pues...

Isaías: Y luego lo dividimos por...

Jorge: Vale. Pues si no sabes lo que vale la amanida, com li podriem dir a l'amanida?

Isaías: Um...

Jorge: Perquè fos una incògnita, una cosa que no sabem... Pedro ho ha dit abans...

Alumne 1: "x".

Jorge: Una "x" por ejemplo.

Alumne 2: O una "n".

Jorge: Una "n", sí. El que vulguem.

Isaías: "n"... "n" per...

Jorge: A veure Alejandra, li pots donar un cop de mà?

Alejandra: Sí. 19.9 és igual a "n" per 2, bueno, pel número d'amanides que hi hagi... eh... més "n".

Jorge: "n"?

-

Alejandra:	Per número que hi hagi... no però és que, totes tenen...
	[Aquí pararon a discutir y no se entiende quién dice cada cosa. Estaban discutiendo sobre si lo tenían que hacer suponiendo que saben el número de pizzas y ensaladas que tienen, o si eso también tendrían que ser variables]
Jorge:	No. "n" per 3.
Alumne:	És a dir, "n" vol dir 7. I si fas 6, l'operació és menys 1... "n-1", saps?
Jorge:	Val, un moment. A les pizzes quina lletra li posem? Li posem la mateixa?
Alejandra:	"x". No.
Jorge:	Posem una altra, no? Val. Posem una altra lletra, no sé.
Alejandra:	Una "x".
Jorge:	Una "m"... què has posat, una "j"?
Isaías:	"j" de Isaías.
Jorge:	Val. Per...
Isaías:	Per 3.
Jorge:	Per 3.

J02-2924 Así fue como Jorge consiguió que Isaías escribiese en la pizarra la siguiente expresión:

19.9 = nx2 + jx3

donde "n" indicaba el precio de la ensalada i "j" el precio.

Jorge:	Veieu que això és una regla general que en funció de qualsevol lletra "n" que jo posi allí, allà, que serà "n" del nombre d'amanides...
Isaías:	"n" és com a "x".
Alumne:	No, el preu.
Jorge:	Perdò, el preu, el preu de les amanides...

[2] - Consciencia del propósito 🡻

El alumno había escrito en la pizarra esta cadena de operaciones para hacer los cálculos:

3.5x2 = 7, 19.9-7 = 12.9, 12.9/3 = 4.3

En el momento en que Jorge pidió a los alumnos que escribiesen esos cálculos en forma de operación combinada, los alumnos no entendieron qué era lo que les estaba pidiendo. Así que él es quien da la siguiente pista para cumplir sus instrucciones, y pregunta que qué es igual 19.90. De esta manera, provoca que el alumno acabe escribiendo la siguiente expresión:

19.90 = nx2+jx3

Diciendo que esto es una generalización. Aquí ha perdido la oportunidad de hacer que los alumnos escriban la fórmula que les permite calcular uno de los precios en función del otro, además de ligarla con la tabla de valores que estaban construyendo.

CIERRE - Sesión 2

El profesor acabó la sesión volviendo a recordar lo que un alumno había dicho al inicio, que él había utilizado las letras "x" e "y", y que él prefería trabajar con la expresión:

19.90=2x+2y

-

Entonces el profesor remarcó que cuando dos cantidades son desconocidas, es usual utilizar las letras "x" e "y" para hacer referencia a estas cantidades, aunque la letra daba igual y que podían usar la que mejor les fuese a ellos.
Finalmente pidió que escribiesen en sus apuntes todo lo que había en la pizarra y que cuando acabasen, empezasen a trabajar en la siguiente tarea, que la comentarían en la siguiente sesión.

13.1.3 Profesora 3: Mónica

Número de sesiones: 1
Fecha: 16/01/2015

INTRODUCCIÓN

La profesora había enviado la hoja de trabajo el día anterior por mail, pidiendo a los alumnos que la leyesen y empezasen a trabajar en ella antes de ir a clase. Mónica hizo unas cuantas preguntas para ver si los aumnos habían entendido la idea general de las preguntas de la tarea y cuando pensó que estaba claro, los dejó trabajar por parejas durante algún tiempo. Mientras los alumnos trabajaban, ella fue pasando por las diferentes mesas ayudándolos a resolver las dudas que iban surgiendo.

DESARROLLO

M01-1100 Mónica empezó a discutir las diferentes respuestas a las preguntas con la clase entera. Ella iba leyendo las preguntas a la vez que las tenía proyectadas en la pizarra. De las preguntas y respuestas que daban los alumnos se deduce inicialmente que algunos alumnos pensaban que todos los productos costaban el mismo precio. Después de un tiempo ya afirmaban que eso solo era una posibilidad, pero que realmente este era un hecho desconocido y que por lo tanto no podían asumir que fuese cierto. De hecho, dentro del contexto, algunos alumnos encontraban extraño que una pizza y una ensalada costase lo mismo, por lo tanto descartaban esta opción por ellos mismos.

Durante el debate, la profesora apuntaba muchos de los comentarios que hacían los alumnos en la pizarra, poniendo el nombre de quien lo había dicho y dejando que otros alumnos se añadiesen a estos comentarios si estaban de acuerdo.

M01-1526 La profesora preguntó qué datos querrían saber si tuviesen que poder contestar a la primera pregunta. Un alumno dijo que él querría saber el precio de una ensalada.

Mónica:	Y ahora, Nico, te pregunto a ti. ¿Qué querrías saber para poder tener los datos suficientes? ¿Para ti qué sería tener suficientes datos?
Nico:	Bueno, yo, osea... saber el precio, almenos, de una ensalada. Porque, porque así ya, osea, para saber como que ya tengo el 19.90€ que es total de todo, pues, eh, doblaría el precio de la ensalada y lo que sobre sería el precio de las tres pizzas. Y lo dividiría, lo dividiría entre tres, me daría el precio de una pizza y una ensalada.

[2] - Decisiones sobre la secuenciación ↑
Desviación de la agenda ↑ Consciencia del propósito ↓
Mónica hace una muy buena pregunta con la que consigue que un alumno le diga cómo calcular el precio de uno de los productos en función del precio del otro. Podría haber aprovechado para conseguir escribir una fórmula que sirviese para hacer este cálculo.

M01-1745 Mónica empezó a compartir las respuestas de la segunda cuestión. La mayoría de los alumnos respondían correctamente, y Mónica solo tuvo que aclarar que cuando el enunciado hablaba del precio de cuatro pizzas y seis ensaladas se refería a todos los productos a la vez, no cuatro pizzas por un lado y seis ensaladas por otro.

M01-2021 Cuando los alumnos acabaron de deducir que con los datos que tenían sí que podían conocer el precio de cuatro ensaladas y seis pizzas, la profesora hizo la siguiente anotación en la pizarra:

$$x2\begin{pmatrix} 2\,amanides\ +\ 3\,pizzes\ =\ 19.90 \\ \\ 4\,amanides\ +\ 6\,pizzes = \ 39.80 \end{pmatrix}x2$$

[1] - Elección de representaciones ↑

Cuando Mónica escribe en la pizarra las operaciones que permiten saber el precio de cantidades proporcionales a las que se dan en los datos de esta tarea, escoge representar los cálculos en la pizarra con una notación muy parecida a la que usará posteriormente para resolver ecuaciones de primer grado, cuando les enseñe a los alumnos el método de la balanza.

M01-2130 En la cuestión número 3, los alumnos respondieron que también podían saber cuánto costaría el triple de la cantidad de productos, cuatro veces esta cantidad, la mitad, etc.

[1] - Uso de terminología matemática ↓

En ningún momento aparece la palabra proporcional durante la discusión.

M01-2422 La profesora continúa preguntando qué otras cosas podrían saber sobre el precio y se encuentra con la siguiente intervención de una alumna:

Ana: Que a partir del precio que nos dan al principio, 19.90, puedes saber el precio de cualquiera, de cualquier comida pero que sea mayor a dos ensaladas y tres pizzas.

Mónica: ¿Sí? Por ejemplo, por ejemplo... ¿podría saber 3 ensaladas y 5 pizzas?

Carlota 1: No. No, porque no sabes el principal... osea, ese sí [*refiriéndose a lo que había escrito Mónica en la pizarra*] porque es multiplicar por dos.

Julia: Pero el otro, si te dicen, 1 pizza y 7 ensaladas pues como no sabes cuánto vale una pizza y cuánto vale una ensalada no puedes. Que sean múltiplos de las cantidades iniciales.

[1] - Identificación de errores ↑

M01-2520 Después de esta conversación, la profesora quiso anotar en la pizarra alguna conclusión. Así que volvió a recordar toda la conversación que habían tenido y dejó que una alumna le dictase la conclusión:

Julia: Solo puedes saber el precio [*la profesora va repetiendo lo que dice la alumna mientras lo apunta es la pizarra*] de los platos que sean múltiplos de 2 y de 3.

Carlota 1: Claro. Pero a la vez. De 2 y de 3 a la vez.

Mónica: A la vez [*y escribiendo esto en la pizarra*]. ¿Qué quiere decir esto? Por ejemplo, ¿quién me pone un ejemplo? Carlota [*esta alumna es diferente de la anterior*]. De lo que está diciendo ella, ¿has entendido?

Carlota 2: Sí. Que se pueda mult... que se pueda multiplicar por 2 y el otro que se pueda multiplicar por 3.

Mónica:	[*escribiendo en la pizarra*] Dos ensaladas y dos, tres pizzas, eran. ¿Verdad? Igual a 19.90. Y entonces, ellas dicen, podemos saber el precio de platos múltiplos de 2 y de 3 [*leyendo lo que había apuntado en la pizarra mientras Julia dictaba*]. ¿Quién me pone un ejemplo de esto que dicen ellas? Carlota.
Carlota 2:	9 y 4. No.
Mónica:	9 ¿qué? y 4 ¿qué?
Carlota 2:	9 pizzas y 4 ensaladas.
Mónica:	9 pizzas y 4 ensaladas [*escribiendo esto en la pizarra*]. ¿Y esto cuánto costaría?
Carlota 2:	9 pizzas y 4 ensaladas...
	[Muchos alumnos hablan a la vez y dicen que no se puede calcular. Mónica destaca una de las alumnas]
Mónica:	¡Ah! mira lo que dice Carlota [*una tercera Carlota en el aula*]
Carlota 3:	No es multiplicar por lo mismo, porque 3 pizzas lo has multiplicado por 3 y 2 ensaladas las has multiplicado por 2. Y si quisieras hacer esto tendría que ser en vez de 4 ensaladas, 6. Porque...
Mónica:	Mira, lo que dice Gerard es que tendría que ser 6, que ya lo hemos hecho en el anterior apartado, o ¿podría haber otra opción?
Carlota 2:	10 ensaladas y 15 pizzas.
Gerard:	O 12.
Mónica:	No, ¿no?
Carlota 3:	Pues si quisieras hacerlo al revés, 9 pizzas... ay
Mónica:	Sí, 9 pizzas...
	[muchos alumnos van gritando números en voz alta, que despistan a la profesora y a la alumna]
Carlota 3:	4 ensaladas... y 6... no, ese ya estaba hecho. 9 pizzas....
Mónica:	¿Y cuántas ensaladas? Carlota
Carlota 3:	A vale. Y 6 ensaladas.
Mónica:	Y 6 ensaladas. ¿Por qué 6? Inés.
Inés:	Porque 3 lo multiplico por 3 que nos ha dado 9 y entonces 2 lo multiplicamos por 3.
Mónica:	Inés, ¿cuánto costaría esto, 6 ensaladas y 9 pizzas?
Inés:	Eh... um... espera que lo hago.

La discusión continúa un rato más, y la profesora insiste en más ejemplos, también con la mitad de la cantidad.

[1] - Uso de terminología matemática ↓

En ningún momento aparece la palabra "proporcional" durante la discusión.

M01-3014 La sesión se vio interrumpida porque el coordinador de ciclo de la ESO entró en el aula buscando a una alumna y Mónica salió con ella del aula.

M01-3334 Finalmente la sesión continúa, directamente discutiendo la cuestión número 4. Los alumnos contestaron rápidamente a esta cuestión.

M01-3726 Para contestar a la pregunta número 5, Mónica pidió a un alumno que dijese lo que pensaba y éste no supo decir nada. El segundo alumno contesta a la pregunta rápidamente.

-

CIERRE

La sesión acaba abruptamente con el sonido del timbre.

13.2 Tarea 2: *¿Qué podemos saber de los precios?*

La segunda tarea que planificaron los profesores era muy similar a la anterior. En esta tarea se proporcionaba a los alumnos una representación icónica (Figura 13.2) de unos datos sobre precios de un conjunto de pizzas y, en este caso, bebidas.

Figura 13.2: Representación icónica del precio de cuatro pizzas y seis bebidas

Tanto los profesores como los alumnos disponían de las siguientes preguntas sobre estos datos:

1. Argumenta si con la información que tenemos podemos saber el precio de una porción de pizza y de una bebida.
2. ¿Qué podemos saber sobre el precio de 4 bebidas y 2 porciones de pizza?
3. Escribe cinco cosas diferentes que puedas garantizar con esta información
4. ¿Puedes saber el precio de 8 porciones de pizza y 12 bebidas?

13.2.1 Profesor 1: Ángel

Tal y como ya había anunciado en las sesiones que hemos analizado anteriormente, el profesor decidió no llevar a cabo esta actividad en clase. La dejó como trabajo para casa para que los alumnos pudieran practicar. Pidió que le enviaran sus trabajos para poder evaluarlos.

[1] - Decisiones sobre la secuenciación

El profesor tomó la decisión de no hacer esta actividad dada su similitud con la anterior y con la que venía después.

-

13.2.2 Professor 2: Jorge

Número de sesiones: 1
Fecha: 20/01/2015
Otras cuestiones de contexto: Este grupo de alumnos tiene dos profesores: Jorge y Neus. Neus no pudo asistir a clase durante estas dos primeras sesiones.

INTRODUCCIÓN

El profesor empezó la sesión comprobando si los alumnos habían hecho los deberes del día anterior, que era contestar a las preguntas de la Tarea 2 en casa.

Jorge dibujó la representación icónica de los datos del problema que se planteaba esta hoja de trabajo. Con esto empezaron a compartir las respuestas a las diferentes preguntas de esta actividad.

DESARROLLO

Utilizando la respuesta de un alumno, Jorge aprovechó para volver a aclarar de nuevo que las pizzas y las bebidas podían tener el mismo precio, pero no necesariamente, ya que los datos no daban esta información.

J03-1046 Sobre la tercera cuestión, en la que los alumnos tenían que enunciar diferentes afirmaciones que pudiesen asegurar a partir de la información que tenían, las respuestas de los alumnos fueron:

- Si tenemos la mitad de pizzas y la mitad de bebidas, esto tendría que costar la mitad del precio inicial. El profesor escribió en la pizarra:

$$2\ pizzes + 3\ begudes = \frac{17.60}{2}$$

- Ninguno de los productos puede costar más de cinco euros.
- También dedujeron que una pizza no podía costar más de 17.60/4 y cada bebida podía costar como máximo 17.60/6.

El profesor decidió dejar todo el protagonismo a los alumnos y confirmar cuáles eran las repuestas correctas a las diferentes cuestiones que planteaba la tarea 2. No dedicó demasiado tiempo a la discusión, preferiendo dejar tiempo de la sesión para que los alumnos empezaran a trabajar individualmente en la tarea 3.

CIERRE

Cuando acabaron de compartir las respuestas, Jorge dejó a los alumnos trabajar en la siguiente tarea. Los alumnos trabajaron individualmente durante 20 minutos con el profesor dando vueltas por la clase y respondiendo a sus dudas.

13.2.3 Profesora 3: Mónica

Número de sesiones: 1
Fecha: 20/01/2015

INTRODUCCIÓN

La profesora recordó a los alumnos que tenían que haber pensado la tarea número 2 en casa y los alumnos comentaron que era muy similar a lo que habían hecho en clase en la sesión anterior. Entonces Mónica decidió hacer un repaso general de lo que habían trabajado en la sesión anterior. Después de esto, dejó a los alumnos, distribuidos en pequeños grupos, un tiempo para discutir los problemas que habían hecho. Mientras los alumnos estaban trabajando, la profesora preparó el proyector. Una vez lo tenía preparado, Mónica caminaba por la clase preguntando a los alumnos si habían hecho los deberes y si tenían dudas sobre el trabajo que habían hecho.

DESARROLLO

M02-0633 La profesora empezó a compartir las respuestas de los alumnos a la primera pregunta. Algunos alumnos demostraron que habían entendido bien lo que habían hecho durante la sesión anterior y estaban utilizando las estrategias que habían aprendido para contestar a las nuevas preguntas.

M02-0735 Igual que durante la sesión anterior, empezaron a discutir qué datos más querrían conocer para poder calcular el precio de una pizza y una bebida. La profesora insistía en que con una información más ya podrían saber el precio de cada producto por separado. La mayoría de los alumnos estaban dando el mismo tipo de respuestas que en la sesión anterior (saber el precio de una bebida o de una pizza). Mientras, una alumna tenía la mano levantada todo el rato. Antes de dar paso a esta alumna, Mónica dijo lo siguiente:

M02-0903

Mónica: Entonces, lo que tiene que quedar claro es que: o por lo que me habéis dicho, ¿eh? que yo no puedo saber así, a priori [*señalando la representación icónica de la información que tenían en la pizarra*] cuánto vale una pizza o... y una bebida, eh, y necesitaría más información. ¿Qué tipo de información? Pues cuánto vale una pizza o cuánto vale una bebida o que todas son iguales, ¿sí? Con una información más, con alguna información más, podría llegar a saberlo. Esto es lo que me decís vosotros. ¿Estáis todos de acuerdo?

[3] - Desviación de la agenda ↑ Decisiones sobre la secuenciación ↑

La profesora insiste en el hecho de que se necesita más información de la que se da en el enunciado para saber el precio de uno de los productos. Durante la conversación ha estado provocando a los alumnos para que digan diferentes informaciones que se podrían dar para poder encontrar el precio de una bebida o una pizza y directamente reta a los alumnos a decir alguna cosa esencialmente diferente a lo que ya habían dicho durante la sesión anterior. Dice que, según los alumnos (ella decidió no confirmarlo ni dar una respuesta más completa), si tuviesen "una información más" se podría saber el precio individual de uno de los productos. Está dirigiendo claramente la tarea hacia la resolución de sistemas de ecuaciones.

[3] - Consciencia del propósito ↑

Al final de la intervención de la profesora, una alumna pregunta que por qué estaban haciendo aquellos problemas si no se podía saber ni el precio de una pizza ni el de una bebida con la información que se daba. La profesora había hecho tanto hincapié en el hecho de que con más información se podría saber el precio que de alguna manera provocó que los alumnos empezaran a pensar que aquél era el objetivo real de aquellas tareas.

M02-1000 Finalmente Mónica preguntó a la alumna que tenía la mano levantada desde hacía un rato qué era lo que pensaba:

Blanca: Creo que... bueno. ¿Si nos dijesen que la pizza vale el doble de la bebida? ¿Lo podríamos saber también?

Mónica: ¡Ah! Mirad qué pregunta me hace Blanca. Si me dijesen que... vuelve a repetir.

[3] - Desviación de la agenda 🡅 Respuestas a las ideas de los alumnos 🡅

La alumna acaba de dar una condición que permite calcular el precio de una pizza y una bebida. Es decir, que permitía enunciar un problema como el que Mónica estaba planteando en la anterior discusión. Mónica decide entonces dejar de discutir las preguntas de la hoja de trabajo para pasar a discutir con los alumnos este nuevo problema.

Blanca: Sí, que la pizza vale el doble que la bebida. Puede que no sabríamos, ¿que también lo podríamos saber?

Mónica: [*dirigiéndose a toda la clase*] ¿Estáis de acuerdo? ¿Podríamos saberlo? Bueno, ella lo pregunta.

[Muchos alumnos hablan a la misma vez]

Mónica: De uno en uno... Fran.

Francisco: Lo dividirías entre dos, y...

Mónica: Voy a apuntar lo que ha dicho Blanca para que no se nos... no se nos olvide. Blanca pregunta: si además de esto que sé [*señalando la condición expresada de forma icónica que está proyectando en la pizarra*], si supiera, o si me dijeran, que una bebida, ¿cómo has dicho, Blanca?

Blanca: Que una bebida...

Mónica: Una bebida...

Blanca: ... vale la mitad que una porción de pizza.

Mónica: ... vale la mitad... ¿que una qué has dicho? [Mónica está escribiendo en la pizarra lo mismo que ha dicho Blanca, utilizando todas las palabras]

Blanca: Porción de pizza. [*los alumnos se ríen*]

Mónica: Que una porción de pizza. Si nos dijeran esto, que una bebida vale la mitad de que una porción de pizza, ¿podríamos saber cuánto vale una porción de pizza y una bebida? A ver, primero quiero escuchar a Francisco.

Francisco: Sí... por... eh... lo divides entre... o sea, 17.60 entre las cosas que hay allá... espera, espera, hay 10, sí, sí, hay 10. Y lo que te da, lo divides entre 2...

Mónica: Y lo que te da lo divides entre dos...

Francisco: Pones, y lo que te da eso, será el precio de las bebidas y el original, lo que te ha dado, el resultado original será el precio de una porción.

Mónica: [*dirigiéndose a toda la clase*] ¿Estáis de acuerdo? ¿O no estáis de acuerdo? ¿No? Vamos a ir escuchando, vamos a ir escuchando diferentes opiniones y luego si queréis, intentamos resolver, a ver si podríamos o no podríamos. ¿Vale? De momento, escuchamos opiniones. Carlota.

[3] - Identificación de errores 🡅

Parece que Mónica hace ver que Francisco se estaba equivocando en su razonamiento. Decide no afirmar que hay un error, pero cambia la atención hacia otra alumna.

Carlota: Yo creo que podríamos llegar a... tener más información que esta, o sea acercarnos más, pero por ejemplo se puede hacer de varias maneras que nos pueda dar. Para que la bebida valga el doble, pues hay muchas maneras. Por ejemplo, podemos pensar que la bebida vale, no sé 2€ y la pizza vale 4. O que la bebida vale 5 y que...

Mónica: Vale. Pero piensa que además de esta condición, tiene que cumplir esta [marcando las dos condiciones, la que había escrito con todas las palabras y la que tenía proyectada con la representación icónica].

-

[3] - Identificación de errores ↑

Vuelve a ver que esta alumna se equivoca. Esta vez lo que hace es aclarar el enunciado del nuevo problema. Carlota no se estaba dando cuenta de que tenía que utilizar las dos condiciones.

Carlota: ¡Ah! vale, vale, con ese ejemplo. Entonces sí.

Mónica: O sea, Blanca nos plantea la siguiente duda: sabiendo esto. [*señalando la representación icónica de la pizarra*], y además, teniendo esta información [*marcando la condición que había escrito en la pizarra con una frase*], si supiera que una bebida vale la mitad que una porción de pizza, ¿podemos saberlo?

[3] - Elección de representaciones ↑
Conexiones entre representaciones ↓

Mónica ha escrito en la pizarra literalmente la condición que Blanca le ha dictado. Es decir, usando lenguaje verbal. Si hubiese utilizado de nuevo el lenguaje icónico, es posible que el problema hubiera sido demasiado fácil y seguramente no habrían tardado tanto tiempo en resolverlo. Así que Mónica ha escogido una buena representación de la condición para provocar que el problema sea realmente un reto para los alumnos. Ahora bien, podría haber aprovechado para ahora o más adelante hacer algún comentario para conectar los diferentes lenguajes que se estaban utilizando en ese momento: el lenguaje natural y el icónico.

Carlota: Sí.

Mónica: ¿Tú crees que sí?

Carlota: Sí.

Mónica: ¿Solo un valor para cada una cosa?

Carlota: Sí, sí, no, a ver...

Mónica: ¿No habría varias soluciones? Tu crees que sí. [Carlota estaba intentando hablar pero Mónica hizo todas las preguntas rápidamente, por encima de la voz de la alumna]

Carlota: Bueno, igual habría dos. Pero se acercarían mucho. Bueno, yo creo sí que daría.

Blanca: No, tendría que ser solo una, osea no podrías coger varias opciones. Solo puede ser una, y tendrías que ir probando y llegarías... bueno... llegarías....

Mónica: Bueno, tu dices que sí. Julia, qué dices.

Julia: [Dijo algunas palabras que no se entienden exactamente, pero parece que quiera decir que no puede ser que una bebida cueste el doble que una pizza. Parece que Mónica tampoco entendió lo que quería decir]

Raquel: No, pero, yo creo que sí que se podría...

Mónica: Vale, espera. Escucho a Ana, que ha levantado la mano, y luego Raquel creo que quiere hablar.

Ana: Yo pienso lo mismo que Julia, que necesitas almenos el precio de una porción.

Mónica: Vale. Ana y Julia, decís que necesitamos más información. [*escribe esto en la pizarra*]

Carlota: ¡Y Carlota!

Laura: ¡Y Laura!

Mónica: [*escribiendo los nombres de estos alumnos en la pizarra*] Necesitas, necesitamos saber el precio de una...

Raquel: Claro, si no tendrías que ir probando... hasta que encajara perfectamente con... [*alguna cosa más que no se entiende*]

Mónica: Necesitamos saber el precio de como mínimo uno [*algunas alumnas dijeron que estaban de acuerdo con eso, otras dudaban*]. Vale. Quiero escuchar a Raquel y luego vamos a hacer, vamos a probar. Raquel, que me decías algo. Tú crees que... ibas a decir algo.

Raquel: Yo creo que… sería difícil de encontrar pero se podría.

Mónica: Tú crees que se podría, ¿tú crees que estas dos condiciones serían suficientes? Para encontrar un precio final, un precio para la pizza y...

[Muchas alumnas empiezan a hablar a la vez. Mónica señala una de ellas: Blanca]

Blanca: Tendrías que ir probando número por número hasta que te encajara, pero lo podrías conseguir.

Mónica: Vale. Vale. Tú crees que sí. ¿Alguien más quiere decir su opinión, Nico? ¿Tú crees que con estas dos condiciones sería suficiente para encontrar los precios? ¿O necesitaríamos una más...?

Nico: Eh... bueno, no, sí...

Mónica: ¿O necesitaríamos...?

Nico: Bueno...

Mónica: ¿O con esto ya vale?

Nico: Bueno, sí. Con esto ya vale.

Mónica: ¿Tú crees que con esto ya vale?

Nico: Sí, con que sepas ya un precio, ya puedes calcularlo.

Mónica: Pero tú no sabes un precio, sabes que una bebida vale la mitad que una porción de pizza.

Nico: Ah, sí, tam... también.

Mónica: Nico, a ver, voy a apuntar los que decís que sí. Raquel ha dicho que sí también. [Mónica apunta unos cuantos nombres en la pizarra mientras algunos alumnos hablan en voz altra y entre sí]

Con toda esta conversación ha conseguido que la mayoría de los alumnos entiendan el nuevo problema que se ha planteado: la mayoría de los alumnos se han posicionado al respecto de si el nuevo problema se podrá o no se podrá resolver. Ahora, en el momento en que pidió a la clase que pensaran en el problema, los alumnos tenían claro qué era lo que tenían que conseguir.

M02-1608 En este momento la profesora animó a los alumnos a que calculasen el precio. Les pidió que si alguno pensaba que esto era imposible, que argumentasen la razón. Mónica les dijo que les daría 10 minutos para pensar en sus respuestas. Mientras empezaban, una alumna preguntó lo siguiente (no todos los alumnos estaban escuchando):

Raquel: ¿Esto es estadística?

Algunos alumnos: Es álgebra.

Mónica: Es álgebra. Todavía no hemos llegado, pero llegaremos.

Uso de terminología matemática ↑↓

Parece que la profesora no se siente cómoda utilizando lenguaje matemático específico en ese momento. En la anterior tarea ya se ha visto cómo evitaba utilizar la palabra "proporcionalidad". Esta vez confirma que lo que están aprendiendo a utilizar es el "álgebra", pero no hace mucha incidencia en la palabra que utilizan los alumnos y se nota que intenta evitar la conversación.

Raquel: ¡Ah!, pero... ¿haremos ecuaciones y todo eso?

Mónica no contestó a estas preguntas y empezó a pasar por las mesas de los alumnos mirando cómo trabajaban y contestando a las preguntas que le iban haciendo.

M02-2443 Después de que pasase algún tiempo, Mónica quiso captar otra vez la atención de todos los alumnos. Preguntó si alguien había encontrado los precios. Algunos alumnos, durante el tiempo en que habían estado trabajando, habían cambiado su punto de vista.

M02-2619 Ahora la mayoría de los alumnos pensaban que se podían saber los precios. Una alumna proyectó su iPad en la pizarra para explicar a toda la clase lo que había hecho para resolver el problema.

Al principio la mayoría de los alumnos no estaba escuchando. Pero después de la primera explicación, Mónica quiso que todos oyeran a la alumna.

Lo que hacía la alumna para resolver el problema era decir que, en primer lugar, había contado las porciones de pizza, que eran 4. Ahora, como se sabía que cada porción de pizza tenía el mismo precio que dos bebidas, había hecho grupos de dos bebidas contando que eran como una porción de pizza. En total, dijo, era como si tuviera 7 porciones de pizza. Así que finalmente solo tenía que dividir 17.60 entre 7. Para saber el precio de una bebida solo tenía que dividir el resultado entre 2. En la pizarra quedó escrita la explicación de la solución que se puede ver en la Figura 13.3.

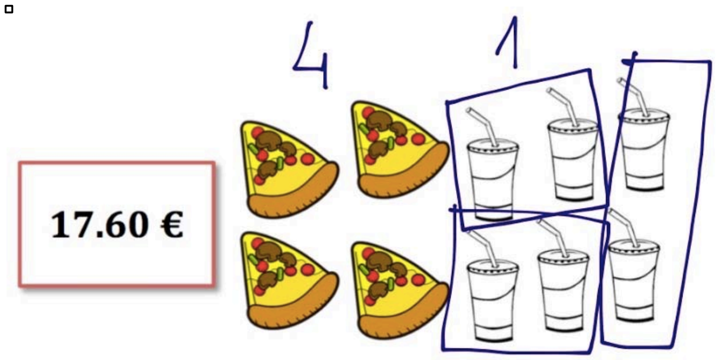


Figura 13.3: Resolución de un sistema de ecuaciones de una alumna de 2º de ESO durante una implementación de Mónica

[3] - Elección de ejemplos ↑ Conexiones entre representaciones ↓

De las diversas resoluciones que se identifica entre las alumnas, quiso mostrar una en la que el lenguaje icónico facilitaba la solución del problema.

De nuevo, no aprovecha para conectar la representación en lenguaje verbal del enunciado propuesto por la alumna con el lenguaje icónico que había utilizado la otra alumna para resolverlo.

Además no pide a la alumna que reescriba el problema de forma que la resolución se pueda leer fácilmente en el futuro. De haberlo hecho, se estaría acercando más al objetivo: desarrollar el lenguaje algebraico para resolver este tipo de problemas.

M02-3040 Mónica continuó compartiendo el resto de respuestas de la hoja de trabajo con los alumnos. La mayoría de los alumnos muestran que son capaces de argumentar utilizando condiciones proporcionales a una dada.

-

CIERRE

Al final de la sesión, Mónica intentó empezar la siguiente tarea, pero el tiempo de la sesión se acaba. Así que les pidió a los alumnos que empezaran a trabajar en la Tarea 3 en casa.

13.3 Tarea 3: ¡Queremos saber más de los precios!

La tercera tarea partía de nuevo de unos datos que se daban de forma icónica (Figura 13.4).

Figura 13.4: Datos de la tarea 3, representadas icónicamente

Profesores y alumnos disponían de las siguientes preguntas para contestar sobre esta tarea:

1. Argumenta por qué puedo saber el precio del conjunto formado por una pizza y una bebida.
2. Explica por qué puedo saber el precio de cinco ensaladas y cinco pizzas.
3. Di seis cosas diferentes que podemos afirmar a partir de los datos que tenemos.
4. Argumenta por qué no puedo saber el precio de dos porciones de pizza y una bebida solo con esta información.
5. Si también disponemos de la información de la actividad anterior, el precio de cuatro porciones de pizza y seis bebidas, explica cómo lo harás para saber el precio de un conjunto formado por una porción de pizza y tres ensaladas.
6. ¿Y el precio de cinco bebidas y quince porciones de pizza?
7. Si también sabemos que una porción de pizza y dos bebidas cuestan 7€, ¿puedes saber ahora el precio de cada porción de pizza y de cada bebida?

13.3.1 Profesor 1: Ángel

Número de sesiones: 1
Fecha: 22/01/2015

INTRODUCCIÓN

El profesor dejó seis minutos a los alumnos para que pudiesen trabajar en la tarea número 3. Mientras los alumnos trabajaban, el profesor paseaba por la clase, observando a los alumnos pero sin ayudarlos.

DESARROLLO

Cuando este tiempo había finalizado, pidió a los alumnos que compartiesen sus respuestas por parejas. No dijo nada sobre el tiempo que les dejaba para hacer esto. Otra vez, el profesor se paseaba por la clase escuchando las conversaciones de los alumnos pero sin ayudarlos.

A03-1413 El profesor dijo que tenían tiempo para trabajar otra vez individualmente pero que ahora tenían que ponerse a trabajar directamente en la última de las cuestiones de aquella tarea. Antes de dejarlos solos, intentó asegurarse de que todo el grupo entendía la pregunta. Para hacerlo pidió a algunos alumnos que le explicasen lo que pedía aquella pregunta. Cuando creyó que el enunciado estaba suficientemente claro, les dijo que tenían cinco minutos para trabajar solos. Después aún les dejó algo más de tiempo para compartir sus respuestas por parejas.

A03-2400 Pasado ese tiempo, quiso trabajar con toda la clase. Ángel escribió un problema diferente utilizando también la representación icónica, pero diferente al que los alumnos estaban resolviendo. En el dibujo se podía ver que tres manzanas y dos sandías cosataban 8.5€ y que dos manzanas y tres sandías costaban 9€. Antes de empezar con este nuevo problema preguntó cuántos alumnos habían conseguido resolver el último problema de su hoja. La mayoría de los alumnos levantaron la mano.

[3] - Adherencia a los libros de texto ↑
Elección de ejemplos ↑
Elección de representaciones ↑

El profesor decide plantear un problema diferente al de la hoja de trabajo. Consigue que todos los alumnos tengan que resolver un nuevo problema del mismo estilo al que estaban haciendo. Elige expresar el ejemplo usando el lenguaje icónico.

Ángel hizo salir a una alumna a la pizarra. Mientras esta alumna salía y empezaba a pensar en cómo resolvería el problema, el profesor dejó 2 minutos a todos los alumnos para que intentasen resolver el problema individualmente. En la Figura 13.5 se puede ver lo que la alumna, Hanna, escribió en la pizarra.

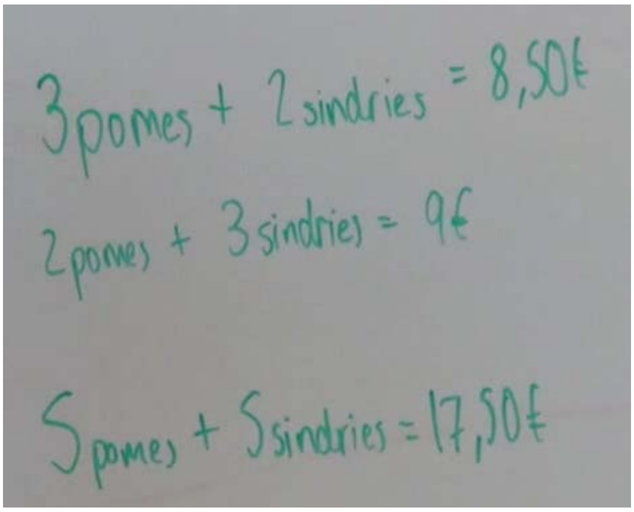


Figura 13.5: Ecuaciones escritas por una alumna de 2º de ESO

A03-2939 Ángel preguntó a los alumnos por qué pensaban que Hanna estaba haciendo esto.

Jaro: Per després poder trobar un i un. Perquè després, si tens cinc i cinc podràs trobar, podràs trobar la proporció, o sigui fent, com està a proporció podràs trobar el preu de tres i tres i si tens tres i tres podràs fer el que hem fet nosaltres en l'últim problema.

[3] - Conexiones entre procedimientos ↑

Con esta pregunta, el profesor consigue saber si los alumnos están conectando la forma en la que ellos estaban resolviendo el problema con la manera en la que Hanna lo estaba escribiendo en la pizarra.

A03-3212 El profesor decidió cambiar a la alumna que estaba en la pizarra. En ese momento pidió la atención de toda la clase y empezó a debatir con el grupo.

Clara: El primer que he fet és, o sigui, per averiguar, com que també vull averiguar com el d'abans… el que costava una parella d'una síndria i una poma. Així que he igualat la quantitat de pomes amb la quantitat de síndries [*no se entiende lo que dice, pero va señalando en la pizarra y parece que esté sumando las cantidades de las dos ecuaciones*]. Cinc pomes. I he sumat els dos preus.

Ángel: O sigui que, has fet fins a la Hanna, no?

[3] - Conexiones entre procedimientos ↑

El profesor vuelve a hacer una conexión con aquello que Hanna ha escrito en la pizarra, mientras que Clara apunta en la pizarra los cálculos que iba haciendo y los resultados que iba obteniendo.

Clara: Sí. Vale, això és 17.50. Després, per saber quant costa una parella, aquí en tenim… espera… tenim tres parelles d'una síndria i una poma. Sí?

Ángel: Ho enteneu?

[Los alumnos suspiran y asienten]

Clara: No, no, tenim cinc. Tenim, espera… tenim cinc parelles d'una síndria i una poma. Sí?

Algunos alumnos: Sí.

Clara: Per saber el preu d'una parella dividim 17.50 entre cinc…

Ángel: O sigui que fas 17.50 entre cinc i això serà…què serà?

Toda la clase: El preu d'una poma i una síndria.

Clara: Això donava 3.50. Vale. Ara sabem que una parella costa 3.50. Vale, sí. Sabem que una parella costa 3.50. Ara agafem un dels dos, per exemple aquest [*señalando la primera condición del problema*] i aquí hi ha dues parelles. O sigui aquest [*señalando dos manzanas y dos sandías*]. Una síndria i una poma, i una síndria i una poma. I doncs tenim 3.50 per 2. Perquè tenim dos parelles. I això dóna 7. Ens sobra una poma i ens sobra 1.50. Així que sabem que la poma aquesta valdrà 1.50 i doncs, per saber el que val la síndria, fem el preu d'una parella, 3.50, menys el preu d'una poma que hem quedat que era 1.50, i et dóna 2, no?. És el preu de la síndria.

A03-3443 Ahora el profesor se acercó a la pizarra.

Ángel: Una cosa que us pot servir per explicar això podria ser dir… cinc pomes més cinc síndries són 17.50. D'aquí heu deduït, què? [*Ahora el profesor está haciendo un esquema con la representación icónica de todo lo que va diciendo*]

Algunos alumnos: La parella.

Ángel: La parella, no? Venga. Què faig ara?

Algunos alumnos: 17.50 dividit entre 5.

Ángel: I què faig? Què he de posar ara jo aquí?

Algunos alumnos: 17.50 dividit entre 5.

Martina: No, una pera, ai! una poma.. no…

Ángel: Vale. Faig això 17.50 dividit entre 5, això dóna 3.50. Vale. I ara què faig? [*muchos alumnos dicen en voz alta lo mismo que el profesor*]. Una poma i una síndria és 3.50. Vale. I ara vull trobar una manera d'escriure això que està aquí per que s'entengui bé [*marcando los cálculos que había escrito Clara*]. Sí? Llavors, què faig aquí?

Ángel y Mónica: Si tinc tres pomes i dos síndries això val 8.50, no? I ara què faig?

Àlex: Aquí hi ha dos parelles.

Mónica: Les uneixes.

Ángel: [Ángel intenta encontrar otro rotulador de un color diferente para escribir en la pizarra, pero no tiene] Bueno, amb un altre color, podria fer, això… val 3.50 [redondeando una manzana y una sandía]. No? Això val 3.50 [marcando otra pareja]. Llavors si d'aquí trec 7, què he de fer aquí? [Marcando el otro lado de la ecuación]

Algunos alumnos: Restar.

Ángel: També restar 7. No? O sigui que tinc una poma igual a 8.5 menys 7 que és 1.5. Veieu? D'aquesta manera queda tot argumentat, que és lo mateix que ha fet la Clara que ho ha fet molt bé, ho ha explicat. Però què ha fet la Clara, ho ha explicat en llenguatge, què?

[3] - Modelización del profesor ↑

El profesor explica el procedimiento que ha hecho Clara en la pizarra. Pero esta vez lo escribe de manera que los alumnos puedan escribirlo en sus apuntes.

Algunos alumnos: Oral

Ángel: Oral o verbal, sí? Jo què estic fent?

Algunos alumnos: Dibuixar [*y más palabras ininteligibles*].

Ángel: Sí. Un llenguatge… mixt, no? entre gràfic i… és àlgebra casi. Això és àlgebra. Aquest símbol [*señalando el dibujo de una manzana*] vol dir poma. Vol dir poma aquest símbol?

[3] - Conexiones entre representaciones ↑

Modelización del profesor ↑ Visión retrospectiva durante la enseñanza ↑

El profesor intentó hacer evidente la conexión entre los cálculos aritméticos que había hecho Clara y el lenguaje con el que ellos estaban escribiendo en los razonamientos en la pizarra. Durante la explicación, Ángel dice que el icono que tiene forma de manzana representa una manzana, cuando en realidad tendría que haber dicho que representa el precio de una manzana. Se da cuenta del error lanza una pregunta para hacer que sean los alumnos quien le rectifiquen.

Algunos alumnos: No...

Ángel: Vol dir… què vol dir?

Carol: Preu d'una poma.

Ángel: Preu d'una poma, eh? Això és el preu de la poma. O sigui, aquests símbols podrien ser… "x", "p", "a", "b", és igual. "p" de poma, "s" de síndria. Sí? Llavors, el que volen dir és el preu… i estic fent un raonament que et serveix per fer-ho molt curtet. I que s'entén tot. Ho veieu?

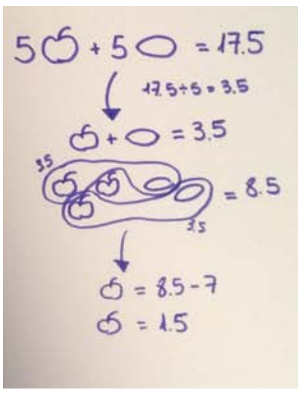


Figura 13.6: Reproducción de la resolución de un sistema de ecuaciones escrita por el profesor en la pizarra

-

CIERRE

El profesor acaba la clase diciendo que lo que habían hecho era trabajar una forma de escribir razonamientos muy cercana al lenguaje algebraico.

13.3.2 Profesor 2: Jorge

Número de sesiones: 1
Fecha: 21/01/2015
Otros factores de contexto: Neus vuelve hoy a las clases, después de estar la semana anterior ausente.

INTRODUCCIÓN

El profesor empezó comprobando si los alumnos habían hecho los deberes. Después de eso, Jorge empezó a trabajar utilizando la misma dinámica que en las sesiones anteriores, compartiendo en voz alta las respuestas de los alumnos.

DESARROLLO

J04-0244 Primero empezaron discutiendo el precio de una bebida y una pizza. Rápidamente los alumnos contestaron correctamente, utilizando la proporcionalidad. De la misma forma pudieron saber el precio de cinco pizzas y cinco bebidas.

[1] - Uso de terminología matemática ↓
En ningún momento ni el profesor ni los alumnos utilizan la palabra "proporcional" para responder a estas preguntas.

También respondieron correctamente a la segunda pregunta. Esta vez no hubo discusión al respecto de las respuestas, a diferencia de las sesiones anteriores.

J04-1913 En este momento discutieron la quinta cuestión. Jorge escribió en la pizarra la siguiente representación icónica:

También dibujó en la pizarra una porción de pizza y tres bebidas, para intentar saber el precio de este conjunto.

Jorge: A veure si som capaços de sapiguer quin és el preu d'això. Eh? [*en la pizarra señaló el dibujo de una porción de pizza y una bebida*]. Alguna idea? [*silenci dels alumnes*] Alguna idea chicos?

[Algunos alumnos dicen que no entienden la pregunta]

Jorge: Bueno. Uih. Lo que nos dice el problema es: yo tengo esta información, por un lado. Y tengo esta. A ver si... siempre nos quejamos de que no tenemos información, ¿verdad? para saber lo que vale o una pizza o una bebida. La pregunta es a ver si con esta información adicional ¿eh? Podemos ser capaces de calcular. Mirando a la pizarra ¿eh? la clave está en mirar, fijarse un poco lo que es cada cosa... [*Pedro levanta la mano*]

[los alumnos dicen que no saben el precio de los productos individualess]

Jorge:	Ahí no te lo está pidiendo el precio de una bebida ni el precio de una pizza. Te está pidiendo, es saber, eso. Solo eso. Hay que centrarse en saber cuánto vale eso. [*más alumnos levantan las manos y un alumno habla pero Jorge lo ignora*]. Ya empiezan a haber manos levantadas, ¿eh? seguramente algo han visto.
	[Silencio]
Jorge:	¿Mariano? ¿Nada? A ver, Pedro.
Pedro:	Ehm, si le restamos al 17.60 el 12, nos da la respuesta de una pizza y tres bebidas.
Jorge:	¿Cómo? ¿cómo?
Pedro:	Que si le restamos el 12 al...
Jorge:	Sí...
Pedro:	... 17.60 entonces nos da la respuesta a eso, que como tres pizzas se van con tres pizzas y tres bebidas se van con tres bebidas, entonces nos queda una pizza y tres bebidas.
Jorge:	Mariano, ¿lo has entendido?

[1] - Anticipación de la complejidad ↑

Jorge prevé que algunos alumnos no están siguiendo el razonamiento, así que decide focalizar en un alumno para que Pedro tenga que repetir lo que ha dicho.

Mariano:	No
Jorge:	[*A Pedro]* Dilo bien fuerte. Es eso ¿eh? Dilo bien fuerte a ver si lo escucha... a ver si lo entiende.
Pedro:	Que si ahí arriba tenemos tres pizzas y abajo tenemos cuatro pizzas restamos cuatro a tres, o sea, tres pizzas a cuatro, sería una pizza. Y si le restamos tres bebidas al seis bebidas, que son tres, sería una pizza y tres bebidas. Y ese es el precio.
Jorge:	¿Lo ves ahora?
Mariano:	Sí.

Parecía que el grupo entero entendió la explicación de Pedro, ya que todos asintieron. Además el profesor volvió a repetir el argumento de Pedro, escribiéndolo en la pizarra. Dejó tiempo para que anotasen bien lo que acaban de hacer en clase.

[1] - Modelización del profesor ↑

Aun repite una vez más el argumento de Pedro, combinando las dos condiciones (restándolas en este caso) para conseguir una nueva condición.

J04-2613 Resolvieron la sexta cuestión utilizando la nueva información: sabiendo que el precio de una porción de pizza y tres bebidas para saber cuánto costaban cinco pizzas y quince bebidas, diciendo que se tenía que multiplicar por cinco.

[1] - Uso de terminología matemática ↓↑

Para justificar que se tenía que multiplicar por 5 tanto el precio como la condición, el alumno que estaba participando utiliza la palabra "proporcional". El profesor felicita al alumno que estaba participando en ese justo momento. Podría haber aprovechado la ocasión para compartir el vocabulario con todo el grupo.

[1] - Elección de representaciones ↑↓

Escribe en la pizarra la representación icónica de 5 porciones de pizza y 15 bebidas tal y como se puede ver en la **Figura 13.7**. Por un lado, esta forma de escribir es más cercana al lenguaje algebraico que a una notación puramente icónica. Se tendría que tener en cuenta que en este caso los iconos dejan de representar objetos y pasan a representar sus precios (igual que si usáramos letras). Así que los signos de suma y de igualdad pasan a tener sentido en este contexto. En diversas ocasiones el profesor demuestra que tiene control sobre el significado de estos símbolos y los usa correctamente, insistiendo en que están representando los precios.

Pero por otro lado, llama la atención el segundo sumando del término izquierdo de la igualdad. Si esta representación tiene que ser más cercana a la escritura algebraica, en ella nunca utilizaríamos la concatenación de símbolos para indicar la suma.

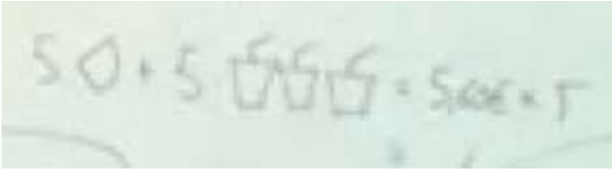


Figura 13.7: Representación icónica-algebraica de una condición escrita por Jorge

J04-2914 Jorge escribió la información sobre la séptima cuestión en la pizarra. Dibujó la representación icónica del problema mientras leía el enunciado en voz alta. En esos momentos había algunos alumnos que ya tenían la mano levantada.

[3] - Elección de representaciones 🡅

En la **Figura 13.8** se puede ver qué representación elige Jorge para transcribir el enunciado a la pizarra. Parece que piensa que la traducción del lenguaje verbal a la representación icónica es evidente, y lo hace él mismo sin ninguna mención especial a lo que está haciendo. Además, esta vez hace la traducción a un lenguaje puramente icónico.

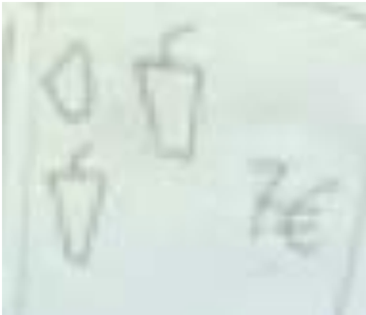


Figura 13.8: Representación icónica de una condición (Jorge)

Jorge: Vinga, deixeu l'iPad, mireu a la pissarra, tranquilament, hem anat com, tenint pistes i... hem tret conclusions. Noves conclusions. I ara ens donen una altra pista, no? Som capaços de determinar quant costa una beguda i una pizza? Per separat? [*algunos alumnos dicen que no*] Guillem, piensa, luego existe. [*silencio*]. Lo tenéis en la pizarra ¿eh? solo tenéis que mirar a la pizarra. Es un tema de agudeza visual. O de lógica también, ¿eh? Lo que estamos haciendo es... es... muy lógico ¿eh? Y podría ser una situación que os encontrarais cuando fuerais con un amigo a tomar algo... a ir a comer una hamburguesa... [*diversos alumnos van levantando las manos*]. A veces hay que repartir y hay que ver qué hay para cada uno, cuánto valen las cosas, ¿verdad? Es algo muy lógico ¿eh? [*silencio*]. Venga a ver, Isaías. Explícanos.

[3] - Anticipación de la complejidad 🡇

Jorge está dejando pasar un poco de tiempo para dar a los alumnos la oportunidad de pensar por ellos mismos cómo resolver el problema. Parece que tiene claro que es un problema difícil para sus alumnos, pero no da ninguna pista para intentar ayudar a que lo resuelvan por ellos mismos, simplemente les da tiempo.

Les dice que la solución está en la pizarra y que solo tienen que mirar bien. Pero en la pizarra lo que tiene escrito es la representación icónica que acaba de hacer y la representación en lenguaje intermedio entre algebraico e icónico que había escrito antes.

Finalmente escoge a Isaías para hablar, un alumno que tiene la mano levantada antes incluso de que hubiese aclarado el enunciado.

Isaías: Bueno que, sabemos que una bebida y una porción son 4€, si ahora nos dice que dos bebidas y una porción son 7, entonces, ehm…

Jorge: Bueno, en algún momento hemos deducido que una porción más una bebida eran 4€. En algún momento, ¿verdad? ¿antes?

[3] - Identificación de errores ↓
Respondiendo a las ideas de los alumnos ↓↑

Isaías está usando una condición que habían obtenido en otro apartado de la tarea. Concretamente la conclusión de la cuestión número 1 de la tarea 3. Esta condición no está en la pizarra, así que Jorge decide añadirla sin borrar ninguna de las que ya tenía escritas. Hacía un momento había dicho que era cuestión de mirar bien la pizarra, pero ahora añade una nueva condición que antes no estaba escrita.

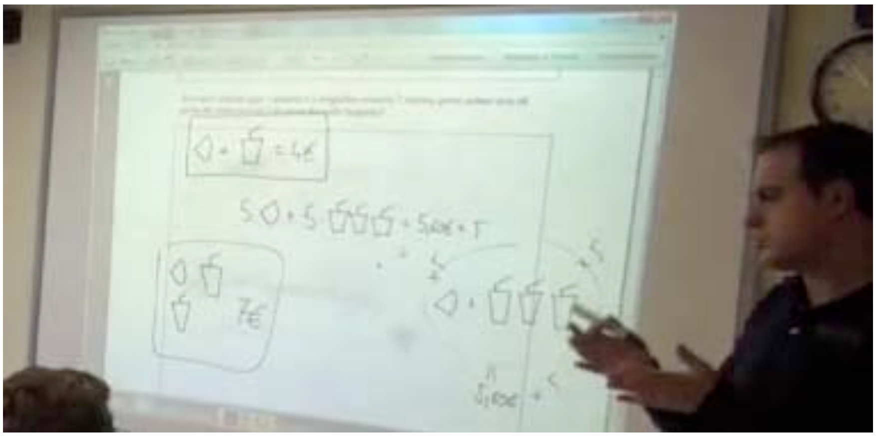


Figura 13.9: Jorge escribe un sistema de ecuaciones que resulta incompatible en la pizarra

Con esta nueva condición, el sistema que ha quedado implícito sobre la pizarra pasa a ser un incompatible. Pero ahora Jorge se centra en resolver el sistema formado por la ecuación que ha sugerido Isaías y la condición que nos daba el enunciado.

[3] - Elección de representaciones ↑

Para escribir sobre la pizarra la condición que le ha dado Isaías, vuelve a escoger un lenguaje intermedio entre el icónico y el algebraico. Esta vez esta notación es coherente en cuanto a su significado.

Isaías: Como le hemos sumado una bebida, hemos llegado al 7, o sea, a este le hemos sumado una bebida, entonces hay una porción y dos bebidas y para llegar a 7 le hemos sumado 3€. Entonces se puede saber que, ehm, una bebida vale 3€. Y entonces lo que queda si hay dos bebidas... entonces las bebidas valdrán 6€ de los 7 que hay y la pizza 1.

Jorge: ¿Estás de acuerdo Mariano?

[3] - Anticipación de la complejidad ↑

Prevé que la explicación de Isaías no será lo bastante clara como para hacer que todo el mundo la entienda, así que le pregunta a un alumno que no lo estaba entendiendo. Así provoca la necesidad de volver a explicar los cálculos.

Mariano: No.

Jorge: No, no has entendido nada.

Mariano: Sí. Pero si antes hemos hecho packs de cuatro... es que no entiendo por qué se le suman tres.

Jorge: Mira. [Hay muchos alumnos hablando a la vez e intentando explicarle el problema a Mariano]. Mira, ¡Mariano! Él está hablando sobre estas dos cosas.

Mariano: Vale.

Jorge: Ahora te pregunto a ti, Mariano. Mirando esta información, ¿puedes sacar lo que vale una bebida?

Mariano: ¡Ah, sí! [el alumno que está al lado de Mariano, Pablo, le va ayudando a entender la solución de Isaías]

Jorge: ¿Por qué?

Mariano: Porque a 7 le quitas, 7 menos 4, 3...

Jorge: ¿Por qué 7 menos 4, 3? 7 menos 4 ya sé que da 3. Me estás dando poca información, ¿no?

[3] - Concentración en los procedimientos ↑

Jorge se da cuenta de que Mariano está entendiendo solo cuál es el procedimiento (la serie de cálculos) que lleva a hacer aparecer el número 3, sin entender la razón conceptual por la cual se están realizando aquellos cálculos. Para intentar aclararlo, lo que hace Jorge es cambiar el foco a otro alumno.

Mariano: Sí.

Jorge: Martí, ¿tu que dices?

Martí: Que 7 menos 4, el 4 es un conjunto, y daría 3 euros la bebida.

Jorge: Vale. ¿No? Este pack de aquí [*señalando la bebida y la pizza de arriba*]... este menú... Mariano lo tenemos aquí [*assenyalant ara la condició de sota*].

Mariano: Sí, sí, ya me lo ha explicado Pablo.

Jorge: Esto de aquí, son 4€. Por lo tanto el resto tiene que ser la diferencia, ¿no? De 7 menos 4. ¿Verdad? 7€ menos 4€ serían 3€. ¿Qué son 3€?

Mariano: La bebida.

Tots: El precio de la bebida.

Jorge: ¿Sí? Y ahora, ¿cómo sé el precio de la pizza? Alejandra. Ya sé el de la bebida. ¿Cómo sé el de la pizza?

[3] - Consciencia del propósito ↑

El profesor es consciente de que el problema solo se acaba cuando se conocen el valor de los dos precios, así que no da el problema por finalizado cuando tienen el precio de una porción de pizza y continúa preguntando a los alumnos.

Alejandra: Eh...

Jorge: La bebida son 3€, ¿eh? lo tenemos aquí.

Alejandra: ¿Las dos bebidas? No solo una.

Jorge: Una bebida, una.

Alejandra: Ehm... Perquè si l'altra bebida costa 3€ doncs la pizza costarà 1€.

Jorge: Molt bé, d'on l'has tret?

Alejandra: Eh... de... si una beguda costa 3€ l'altra també costarà 3€.

Jorge: Sí, totes les begudes costen 3€ sí.

Alejandra:	3€. Per tant, i...
Jorge:	Ah! D'aquí vols dir [*señalando la condición inferior*] 3 més 3 és 6, més 1, 7.
Alejandra:	7.
Jorge:	D'aquí també, no? [*Ahora Jorge señala la condición superior*]. Si jo sé que la beguda val 3, la pizza ha de valdre 1€. No? Per tant podríem dir que, no? tenim una pizza més la beguda que és 3€ serà igual a 4€. Això implica que la pizza valdrà 1€.

[3] - Conexiones entre procedimientos ↑

Jorge ha visto cómo la forma en la que la alumna ha resuelto el problema es diferente a la que él ha pensado. Explica a todos los alumnos su forma de hacerlo, para que todos vean que el problema se puede resolver almenos de dos formas.

J04-3454 Mientras los alumnos copian toda la información de la pizarra en sus apuntes, Pedro, que tenía la mano levantada en diversas ocasiones durante el diálogo anterior, llama la atención de Jorge. El alumno estaba viendo alguna cosa extraña en la pizarra. [*En la pizarra estaban escritos todavía algunos datos del problema anterior: una pizza y tres bebidas cuestan 5.60€*]. Jorge contesta que "aquí podría haber algún problema" y pide a Pedro que espere a que los demás tomen nota. Después de esto, lo comenta.

Cuando el profesor llamó a los alumnos para que estuvieran atentos a lo que iba a explicar, estaba visiblemente nervioso. Incluso le cayó el borrador al suelo. Decidió borrar la pizarra, dejando solo la condición sobre una pizza y una bebida (4€) y la condición sobre una pizza y tres bebidas (5.60€). Mientras borraba la pizarra iba diciendo que Pedro había visto alguna cosa y que quería comentarla con todos.

J04-3626

Jorge:	Hemos llegado a esta información [*señalando en la pizarra el precio de una bebida y tres pizzas*]. Ehm... lo que pasa que en algún momento hemos recuperado esta otra información [*señalando el precio de una pizza y una bebida*] que venía de otras condiciones, o sea, yo creo que hemos mezclado dos problemas ¿sí? hemos mezclado dos problemas, por eso nos han salido dos condiciones distintas. Esto lo hemos ido haciendo con las pistas que nos iba dando al principio y luego cuando hemos recuperado la información del problema anterior, que nos decía, cuánto... cuatro porciones y seis bebidas eran 17.60 y nos han salido otras condiciones. Ehm... fijaros que se han mezclado... yo lo dejaría aquí, no le daría más vueltas. Yo pienso que esta información que hemos, que, que hemos obtenido es correcta... hemos deducido por lo que sabíamos de antes ¿verdad? que una pizza y una bebida valían 4€ y hemos obtenido una información ¿eh? Pero yo creo que lo que ha pasado Pedro es que hemos mezclado dos problemas. Quizás deberíamos haber seguido con este de aquí. Con estas condiciones hubiésemos obtenido también otras conclusiones, ¿eh?

[3] - Conexiones entre procedimientos ↓

Este alumno ha hecho ver a Jorge que sustituyendo en la otra condición que está escrita en la pizarra, los valores que han encontrado no solucionan el problema. Jorge ve que esto es verdad, pero no sabe encontrar una explicación convincente para los alumnos. Sospecha que se han equivocado en el momento de incluir la información que al principio no estaba en la pizarra, la que ha utilizado Isaías, pero no está seguro. Finalmente decide no pararse más con la actividad.

Podría haber hablado de la incompatibilidad del nuevo sistema de ecuaciones, con tres ecuaciones y dos incógnitas.

CIERRE

El profesor acabó la sesión intentando sintetizar todo lo que se había enseñado durante aquellas sesiones. Según Jorge, la idea general era saber qué información se podía deducir a través de una determinada información. Dijo que a veces no se tenía suficiente información. Por ejemplo, si solo tenemos una condición con dos incógnitas, no podemos saber el valor de cada una de ellas. Siempre hay diversas posibilidades. En cambio, si tenemos dos condiciones con dos cantidades desconocidas, podremos saber el valor de cada una de ellas.

J04-3818 Para terminar, Jorge decidió hacer otro ejemplo de resolución. Dibujo en la pizarra otro sistema representado icónicamente (Figura 13.10), aunque de nuevo mezclando con algunos símbolos algebraicos.

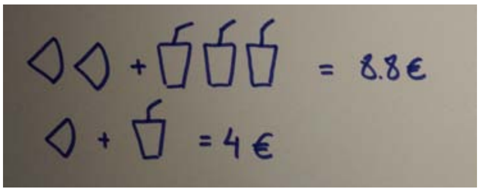


Figura 13.10: Problema representado en forma icónica

Resolvieron este problema entre todos, diciendo que el precio de un pack (una pizza y una bebida) era 4€. Entonces, en la primera condición, tenían dos packs. Por lo tanto cada bebida costaba 0.8€. Así que era fácil encontrar el valor de una pizza: 3.20€.

[3] - Modelización del profesor ↑

El profesor ha decidido plantear un sistema con las condiciones que él cree que eran las que tenían que haber usado para resolver bien la cuestión número 7. Vuelve a utilizar el mismo tipo de procesos que habían usado con el problema anterior, sin caer en ninguna incoherencia con las explicaciones anteriores. Además, el problema queda escrito en la pizarra de manera que se puede leer sin la necesidad de volver a escribir. Concluye que si tiene dos informaciones, podrá saber el precio de cada producto.

13.3.3 Profesora 3: Mónica

Número de sesiones: 1
Fecha: 21/01/2015

INTRODUCCIÓN

La profesora empezó a trabajar directamente con la tercera actividad proyectada en la pizarra.

DESARROLLO

M03-00:40 Los alumnos pudieron contestar a la primera pregunta sin dificultades. Durante la explicación de uno de los alumnos, otro alumno utiliza correctamente la palabra "proporcional", pero la profesora ignora este comentario y continúa escuchando al alumno que estaba hablando.

M03-0535 Una de las alumnas contestó a la primera cuestión utilizando la "regla de tres". La mayoría de los alumnos (incluyendo la propia alumna que estaba utilizando esta técnica) entendían que haciendo esto estaban suponiendo que los precios de los dos productos eran el mismo. Es decir, que esta forma de proceder daba el resultado correcto, pero que no era conceptualmente apropiado.

[1] - Identificación de errores ↓
Reconocimiento de la pertinencia conceptual ↑
Conexión entre conceptos ↓

Mónica reconoce que la alumna está tratando de utilizar una regla de tres para contestar la pregunta y anota los datos en la pizarra de esta manera. Se da cuenta también de que este procedimiento, aunque le da un resultado correcto, no es pertinente en este contexto. En el momento en que tiene que cerrar el razonamiento diciendo cuál es la suposición que está haciendo la alumna, la profesora no lo deja claro. No dice si que es que está asumiendo que todos los productos cuestan lo mismo o si es que está hablando del precio de una pizza y una bebida.
Según Mónica, si fuese el precio de una pareja de productos, entonces este procedimiento sí que sería correcto. Pero no es evidente por el diálogo que la propia Mónica lo tenga claro.

M03-0910 Contestaron a la segunda cuestión haciendo cinco grupos de pizza y una bebida.

M03-1200 Los alumnos dijeron que podrían saber el precio de cualquier cantidad de pizzas y bebidas. Ellos estaban pensando en grupos que tuviesen la misma cantidad de pizzas y bebidas. Por ejemplo, si tenemos 20 grupos de una pizza y una bebida.

Por lo tanto los alumnos acordaron que no podrían saber el precio de cuatro pizzas y tres bebidas.

[1] - Uso de terminología matemática ➔

Los alumnos utilizan diversas veces la proporcionalidad sobre las condiciones, pero en ningún momento Mónica utiliza la palabra "proporcional" (ni los alumnos tampoco).

M03-1529

Mónica:	Con la información que hay en la pizarra, solo con esta que tenemos: que una pizza más una bebida son 4€, ¿podemos calcular 4 porciones y 3 bebidas?
	[Algunos alumnos dicen que no en voz alta]
Mónica:	¿No? ¿Por qué no? A ver, Carlota.
Carlota:	Ah, o sí. Bueno. Yo creo que, eh. Con solo esta información, bueno, no lo podríamos saber porque van en grupitos juntos y si los separas ya no son grupos. Entonces como no sabes ni el valor ni de la pizza ni de la bebida sería un caos. Entonces, si tuvieras información de lo otro sí que podrías, pero con esto no.
Mónica:	Solo con esto no. Jenny.
Jenny:	Pero podemos saber que vale más de 12€.
Mónica:	¿Podemos saber que vale más de 12€? ¿Cuánto valía...? [Mónica mueve el documento proyectado para mostrar los datos iniciales]
Carlota:	Sí sí, porque, si quitásemos una, una porción, solo para hacer más o menos el precio...
Mónica:	¿Sí?
Julia:	Da 12.
Carlota:	... entonces tiene que ser, porque falta una porción.
Mónica:	Claro. Eso sí que lo podríamos saber. Tiene que valer más de 12€.

M03-1720 Los alumnos insistieron en que si utilizan el precio que sabían de la tarea anterior (que 4 pizzas y 6 bebidas costaban 17.60€) podrían saber el precio de una pizza y una bebida. Así que Mónica decidió escribir los datos en la pizarra, mezclando lenguaje algebraico con lenguaje icónico (Figura 13.11).

-

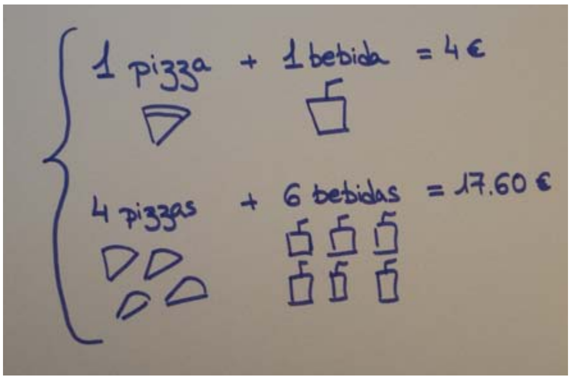


Figura 13.11: Representación icónica y algebraica de un sistema de ecuaciones hecha por Mónica

[3] - Elección de representaciones ↑ Conexiones entre representaciones ↓ Uso de terminología matemática ↓

Mónica escribe en la pizarra una representación del problema que se podría decir que es absolutamente algebraica y ningún alumno manifiesta sentirse incómodo con esta forma de escribir. Mónica podría haber aprovechado la ocasión para conectar esta nueva representación con la icónica, que es la que los alumnos están utilizando. Además de la igualdad y los signos de suma, que hace fácil el comentario de que entonces "pizza" y "bebidas" representan en realidad el precio de una pizza y una bebida respectivamente.
También utiliza la llave que agrupa las dos condiciones, así que podría haber aprovechado para explicar que lo que estaban haciendo era resolver sistemas de ecuaciones, que normalmente se escriben utilizando toda esa simbología que estaba usando.

Mónica dejó tiempo a los alumnos para intentar resolver este problema, trabajando en pequeños grupos. Mientras los alumnos trabajaban, ella paseaba por la clase ayudándoles y fijándose en las diferentes maneras en las que estaban resolviendo el problema. En algún momento, Mónica borró la representación de la información que había escrito en la pizarra sin hacer ningún comentario sobre ella.

M03-3000 Mónica decidió mostrar cómo algunos alumnos habían resuelto el problema, diciendo explícitamente que había visto tres diferentes. Lo hizo utilizando el iPad, dejando que los alumnos enseñasen sus resoluciones y explicasen cómo lo habían hecho. Inés fue la primera de las alumnas en mostrar la solución.

[3] - Conexiones entre procedimientos ↑ Respuestas a la (in)disponibilidad de herramientas y recursos ↑ Conexiones entre representaciones ↑

Mónica ha visto cómo todos los alumnos han podido resolver el problema pasando por las mesas, y además sabe qué estrategias han usado los alumnos.
Dice explícitamente que quiere mostrar diferentes maneras de resolver el mismo problema y para ello ha seleccionado tres resoluciones que dice que son diferentes y que quiere que los alumnos expliquen.
Lo harán sentados desde su mesa, proyectando el iPad en la pizarra.

Inés: Vale sí. Antes teníamos 4 pizzas... [dibujando sobre la misma representación inicial]

Mónica: Si os acordáis, el día de ayer. Ayer teníamos, teníamos 4 pizzas, ¿y cuántas bebidas?

Algunos alumnos: Seis.

Mónica: Seis bebidas. ¿Sí? Teníamos 4 pizzas y 6 bebidas.

Inés: Entonces sabemos que la mitad valía 8.8 [La tarea anterior decía que 17.60 era el precio de 4 pizzas y 6 bebidas. La alumna redondea esta mitad sobre el mismo dibujo, que ahora contiene tres condiciones: las dos proporcionales de la tarea anterior, y la propia de este día].

Mónica: ¿Os acordáis de ayer?

Inés: Porque es la mitad del 17. Y que todo junto valía 17.60. Entonces, em, aquí ahora tenemos una pizza más de lo que sería la mitad. Entonces hacemos 12 menos 8.8. Nos da 3.2, que sería cuánto vale una pizza.

Mónica: ¿Todos? ¿Hasta aquí? ¿Estáis de acuerdo?

[Muchos alumnos dicen que lo han entendido y algunos dicen que han hecho lo mismo]

Mónica: Lo ha hecho super fácil y ha encontrado el precio muy rápido de una pizza. ¿Quién no lo ha entendido?

Esta resolución quedó escrita en la pizarra tal y como se muestra en la Figura 13.12. Una alumna dijo que no lo había entendido, y Mónica pide a Inés que lo vuelva a explicar. Con la segunda explicación, ya queda clara la resolución, pero tiene que borrar lo que había hecho y volverlo a escribir.

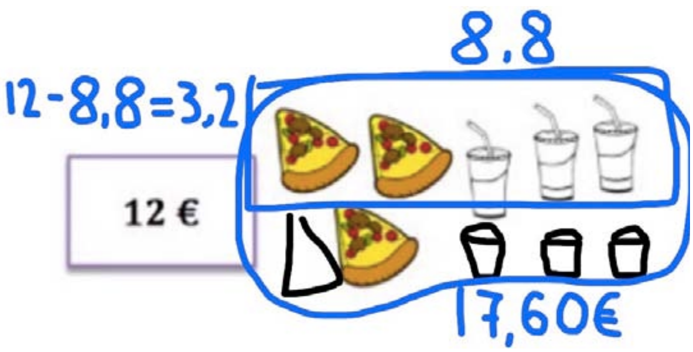


Figura 13.12: Resolución icónica de un sistema de ecuaciones (alumna de 2o de ESO)

Cuando acabó la aclaración, Mónica pidió a Inés que acabase el problema. De momento solo habían calculado el precio de la pizza, faltaba calcular el precio de una bebida.

M03-3156 La misma alumna que había explicado la primera parte del problema, escribió los cálculos que se pueden ver en la Figura 13.13 para contestar a lo que le pedía Mónica.

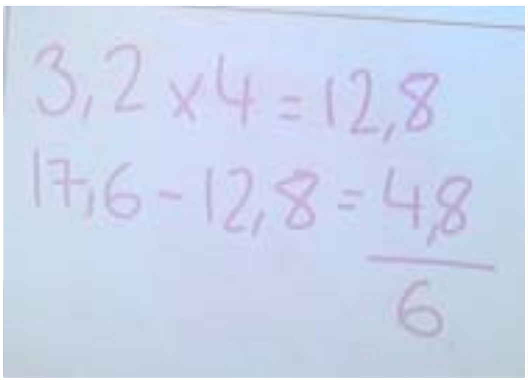


Figura 13.13: Cálculos escritos por una alumna de 2º de ESO

Después de que acabó de hacer los cálculos, Mónica felicitó a la alumna y no hizo ningún comentario sobre lo que había escrito [*Al final muchos alumnos hablan a la vez y piden explicarle a Mónica su forma de resolver el problema*].

[3] - Identificación de errores ↓

Mónica no hace ningún comentario sobre el error que ha cometido la alumna al escribir el signo igual en la segunda línea mientras hace los cálculos en la pizarra.

M03-3348 Mónica pidió a otra alumna que explicase su estrategia para resolver el problema. Esta vez dijo que lo debían hacer entre dos alumnas diferentes (que no habían trabajado juntas).

Mónica: Va venga, Blanca y Carlota nos van explicando. Empieza Blanca y yo te voy dando paso.

Blanca: Comenzamos sabiendo [*dice algunas palabras ininteligibles y hablan muchos alumnos a la vez*] (...). ¿Cuántos eran? (...) ¿Cuánto había, 4 pizzas?

Mónica: Sí, 4. 4 pizzas y 6 bebidas. Este era el de ayer.

[Algunos alumnos comentan en voz alta alguna cosa sobre los dibujos que hace la alumna en la pizarra. Están dibujando 4 pizzas y 6 bebidas.]

Mónica: Vale. 4 pizzas y 6 bebidas.

Blanca: Vale. Entonces, a ver, espera, cómo explicarlo... Vale. Entonces, sabemos que 1 pizza, bueno, aquí ya lo tenéis [*estaba señalando una representación icónica que decía que 1 una pizza y una bebida costaban 4€*]. 1 pizza y 1 bebida es 4€. Entonces, esto es, 4€, 4€, 4€, 4€ [*Dibujaba sobre la primera representación icónica que había hecho. Redondeaba una pizza y una bebida cada vez que decía 4€*].

Mónica: ¿Sí? ¿Hasta aquí? ¿Todos?

Blanca: Entonces tenemos que esto es 4 por 4 [mientras dibujaba una línea bajo los círculos que acababa de dibujar, indicando que había 4 grupos de 4 euros], que es 16. Pero te faltan dos bebidas. Ay, te sobran [La otra alumna que tenía que explicar junto con Blanca iba haciendo comentarios porque la profesora no le pedía que participase]. 17.60...

Mónica: Vale, sí. [*Los alumnos ríen*]. Vale. Carlota.

Blanca: Y el total es 17.60.

Mónica: Vale. Y el total es 17.60.

Carlota: El total, eh, de las 4 pizzas y 6 bebidas es 17.60. Entonces, ehm, restas el 17.60 al 16. Que esto te da 1.60.

Mónica: Muy bien.

Carlota: Entonces...

Mónica: Vale. Un momento, espera. ¿Todo el mundo sabe por qué han restado 17.60?

[Algún alumno dijo que no muy fuerte.]

[3] - Anticipación de la complejidad ↑

La profesora prevé que este proceso puede ser complejo para algunos alumnos. La condición inicial hablaba del precio de 3 bebidas y 3 pizzas, no de una pizza y una bebida. Como está haciendo 4 grupos y cada grupo cuesta 4€, está viendo que aquí puede haber confusión. Así que decide parar justo en este momento para preguntar a la clase si estaban siguiendo el razonamiento.

Carlota: Para saber...

Mónica: Espera, espera. Carla, deja que...

Carlota: Pues porque lo digo, como ya tenemos lo... las 4 bebidas y las 4... ah.

Mónica: Esto cuesta 16 [*señalando los cuatro grupos de una bebida y una pizza*] y todo cuesta 17.60. ¿Cómo sabes estas dos bebidas?

Carlota: Pues 17.60 menos 16, 1.60. Entonces 1.60 lo divides entre 2 por las 2 bebidas, esto te da 0.80. ¿Vale? Entonces, ehm, 0.80 yo lo he multiplicado por 6, 6 bebidas, que me da...

Mónica: Bueno, ya está. Ya tenemos la respuesta. La respuesta es ¿cuánto vale una pizza y cuanto vale una bebida? ¿Lo tenemos? ¿Lo sabemos? Pues ya está. Ya está, ya lo hemos resuel... ¿Nos daba lo mismo que Inés? Pues, parece ser que está bien, ¿no?

El razonamiento que quedó proyectado en la pizarra cuando se acabó la explicación se puede ver en la Figura 13.4 .

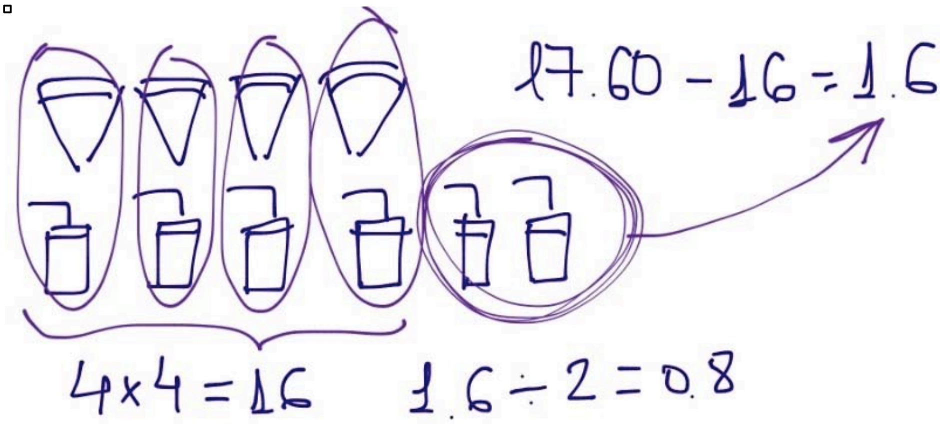


Figura 13.14: Resolución icónica de un sistema de ecuaciones (alumna de 2º de ESO)

M03-3626 Para esta solución, Mónica pidió que se comprobase el resultado. Además, insistió en que la alumna que proyectaba las soluciones lo hiciese en forma de operación combinada (Figura 13.15).

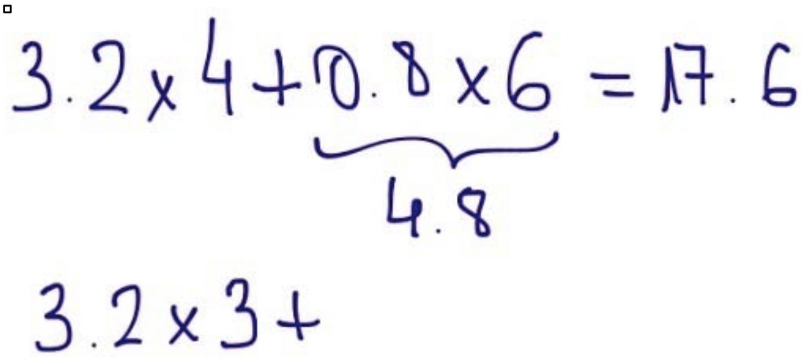


Figura 13.15: Cálculos escritos por una alumna de 2º de ESO

Además, después de una sugerencia de la profesora, discutieron sobre la importancia de escribir o no los paréntesis en las operaciones. Durante esta conversación, no se dice en ningún momento "prioridad de las operaciones", sino que se dicen frases como "la multiplicación va antes que la suma".

[3] - Uso de terminología matemática ↓

Durante esta conversación se ha hablado de operación combinada, pero este lenguaje solo lo utiliza la profesora: los alumnos dicen "eso de los brakets" y la profesora no dice nada al respecto. Por otro lado, tampoco se habla sobre la convención con respecto al orden de las operaciones como "prioridad de las operaciones" sino que simplemente dicen cosas como "la multiplicación va antes que la suma".

M03-4225 La última de las soluciones que Mónica quiso mostrar al resto de alumnos desencadenó en la siguiente conversación:

Mónica:	Vale. Vamos a ver ahora otra resolución diferente. Va, escuchad.
Julia:	Si sabes que un grupo de una pizza y una bebida vale 4€, y sabes que 4 pizzas y 6 bebidas valen 17,60€. Entonces, ehm... sabes los 4 grupos, cómo vas a hacerlo esto [*hay muchos alumnos hablando y mucho ruido en la clase, así que no se oye muy bien lo que dice esta alumna. Parece que ningún alumno la está escuchando. La profesora mira la pizarra, parece que está leyendo lo que la alumna ha proyectado*]. Sabes que 4 pizzas y 4 bebidas valen 16€. Pero como te piden... ay, no sé lo que he hecho.
Mónica:	Claro, es que... sí, has hecho lo mismo que ellas pero lo habías hecho con letras. Quería que... pero ahora has puesto bebidas y pizzas. Bueno, está bien. Ella ha hecho lo mismo pero en vez de utilizar dibujitos, que todos veíamos por qué habían hecho 4 por 4 y tal... ella ha hecho 4 pizzas más 4 bebidas igual a 16€. Sobran 2 bebidas. Es lo mismo que han hecho Blanca y Carlota. Entonces han restado el total menos los 16€ que te da 1.60, esto se divide entre 2 bebidas y... te ha quedado. Vale. Entonces, ¿quedamos en que es lo mismo que Blanca y Carlota? ¿Sí? Pero sin los dibujitos. Muy bien. Vale. Todo el mundo sabe resolver ya... cuánto vale una pizza y cuánto vale una bebida.

El proceso que quedó proyectado en la pizarra se puede ver en la Figura 13.16.

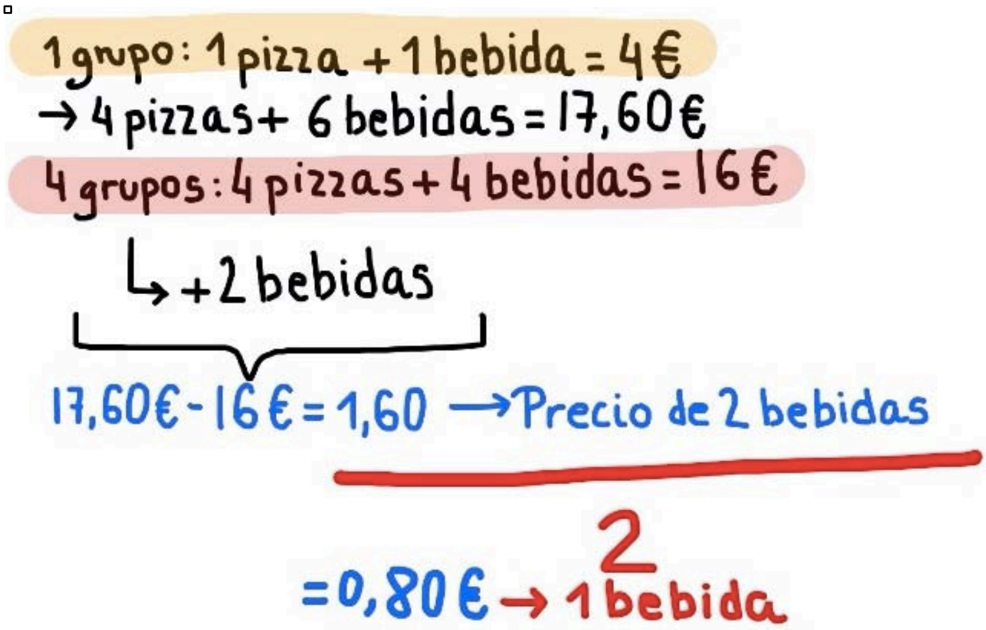


Figura 13.16: Resolución de un sistema usando álgebra retórica por una alumna de 2º de ESO.

[3] - Conexión entre procedimientos ↑
Conexiones entre representaciones ↓

La profesora dice explícitamente que este procedimiento es el mismo que el que se había usado antes para resolver el problema. Algunos alumnos no entienden la forma de escribir que ha utilizado Julia, así que Mónica muestra paso por paso cómo lo ha resuelto. Dice que ha hecho lo mismo, pero que no ha hecho "dibujitos". Es decir, que la alumna no ha utilizado la representación icónica para resolver el problema, sino que lo ha hecho usando álgebra retórica. Además, no aprovecha la ocasión para decir que de esta manera el proceso queda bien escrito, que no pasa como con las otras dos formas de escribir, que para poder aclarar dudas se tiene que borrar y volver a escribir.

CIERRE

M03-4345 En los últimos minutos de la sesión, Mónica decididó continuar comentando las respuestas de los alumnos a las diferentes preguntas que faltaban por poner en común de la tarea. Esto fue así hasta que sonó el timbre y la clase acabó abruptamente. Cuando los alumnos estaban saliendo por la puerta, Mónica dijo que se mirasen bien todo lo que habían hecho hasta ese día.

13.4 Tarea 4: *De los precios al álgebra*

Los profesores acordaron que los problemas que se pueden ver en la Figura 13.17, se darían a los alumnos en forma de prueba sin avisar. Se trataba de que los alumnos se tuviesen que enfrentar a un sistema de ecuaciones expresado en forma algebraica por primera vez en aquel momento, para ver si eran capaces de utilizar lo que habían aprendido en un contexto más abstracto. Los profesores querían saber si los alumnos por sí mismos se daban cuenta de que el primer y el segundo problema tenían la misma solución (podríamos decir que son problemas isomorfos) y ver qué estrategias usaban para intentar resolver el tercer problema.

1)	Troba el preu dels següents objectes:  55€  62€
2)	Troba el valor de dos números desconeguts x i y que cumpleixin la següent relació: $\begin{cases} 3x + y = 55 \\ 2x + 2y = 62 \end{cases}$
3)	Troba el valor de dos números desconeguts a i b que cumpleixin la següent relació: $\begin{cases} 2a + b = 18 \\ 4a + b = 29 \end{cases}$

Figura 13.17: Problemas de la tarea 4

Los profesores habían acordado que no avisarían de que habría una prueba y que darían de tiempo entre media sesión y una sesión completa para dejar a los alumnos resolver los problemas individualmente.

13.4.1 Profesor 1: Ángel

Número de sesiones: 2
Fechas: 23/01/2015 & 28/01/2015
Otros factores de contexto: La primera sesión se realizó antes de la sesión conjunta que detallaremos en el apartado 14.1 . Pero la segunda sesión se hizo ya después de esta clase.

INTRODUCCIÓN Y DESARROLLO - Sesión 1

El profesor dijo que tendrían treinta minutos para intentar resolver los tres problemas de forma individual y sin apuntes. Dijo que no podían preguntar nada durante todo ese tiempo y que cuando acabasen los tendrían que entregar.

-

CIERRE - Sesión 1

Cuando el tiempo acabó, el profesor se puso a hacer otra actividad que está fuera de los límites de esta investigación.

INTRODUCCIÓN - Sesión 2

Antes de devolver a los alumnos sus respuestas corregidas a las preguntas de la Tarea 4 (que habían hecho tres días antes) el profesor explicó cómo trabajarían las respuestas que habían dado los alumnos. A cada alumno le devolvería su propia prueba. Sobre la prueba, usando un bolígrafo de color diferente, les había escrito preguntas y sugerencias para mejorar las respuestas. Pidió que hiciesen una foto de la prueba y que después mejorasen aquello que les había pedido.

A05-0221 Quería que trabajasen formando grupos que él había escogido y les explicó la razón por la cual esos eran los agrupamientos:

Ángel: Us he posat en grups en funció de com he vist que heu pensat això [*enseñando las hojas que tenía con las respuestas*] i pensat això no vol dir bé o malament, sino com ho heu pensat. O sigui hi ha alguns de vosaltres que ja esteu desenvolupant el llenguatge algebraic i hi ha alguns de vosaltres que encara esteu en una fase més, més de redacció, que no pas de llenguatge algebraic. Llavors us he agrupat d'aquesta manera perquè estigueu tots treballant de la mateixa manera. Però una mica heu de saber que l'objectiu és anar desenvolupant l'eina de l'àlgebra. El que passa és que l'eina de l'àlgebra és una eina de tantes.

[4] - Consciencia del propósito ↑ Uso de terminología matemática ↑

A partir de la prueba que habían hecho, el profesor diseñó una actividad en la que cada alumno tendría que avanzar a partir de su propio nivel, ayundándose de compartir sus razonamientos con alumnos que estaban utilizando técnicas similares a la hora de resolver problemas. Pero además deja claro el propósito: quiere que todos los alumnos avancen hacia el uso del lenguaje algebraico para desarrollar sus argumentaciones.

Una vez había explicado eso, pidió que se sentasen en los grupos que había indicado y que se pusiesen a trabajar.

DESARROLLO - Sesión 2

Mientras los alumnos trabajaban, el profesor iba pasando por los diferentes grupos ayudándolos y resolviendo sus dudas.

Las transcripciones que aparecen a continuación son una selección de las conversaciones con alumnos o grupos concretos, utilizando siempre el mismo criterio para la selección, que recordemos que es que el episodio corresponda a uno de los objetivos de aprendizaje que estamos analizando.

A05-0632 Una alumna llamó al profesor para preguntarle qué quería decir uno de los comentarios que había escrito sobre la pregunta 2 de la prueba.

Ángel: La pregunta és si "x" vol dir Chewbacca. O "y" vol dir soldat.

Martina: Ah, vale.

Ángel: Vol dir Chewbacca la "x"? "x" és igual a Chewbacca?

-

Martina: No.

Ángel: Què vol dir?

Martina: O sigui, és que no és el mateix.

Ángel: No és el mateix.

Martina: Són dos problemes diferents.

Ángel: Són dos problemes diferents.

Martina: Però no, no té que ser això.

Ángel: Però la "x" la pots relacionar amb un soldat, un chewbacca...

Martina: No. Amb el preu.

Ángel: Vale. Amb el preu. Molt bé.

[4] - Identificación de errores ↑ **Base teórica de didáctica** ↑

Identifica el error de una alumna confundiendo el objeto con el precio en su identificación del símbolo.

A05-1438 Algunos alumnos habían utilizado el lenguaje algebraico para resolver los problemas 2 y 3. Pero algunos habían utilizado una argumentación verbal. El profesor había agrupado los alumnos de manera que en ellos hubiese algún alumno que hubiera utilizado el álgebra para resolver el problema y alguno que no. Ángel iba pasando por las mesas explicando que el objetivo era llegar a que ellos fuesen capaces de utilizar el lenguaje algebraico para resolver el problema. Esta conversación es un ejemplo de cómo el profesor llevaba a cabo esta explicación (se repite el mismo argumento en todos los grupos):

Ángel: Això està molt ben explicat [señalando la argumentación que había escrito una alumna utilizando lenguaje natural]. O sigui, això [señalando una argumentación puramente algebraica] i això està igual de ben explicat. Quina diferència hi ha? Que això [señalando la argumentación algebraica] trigues una mica menys. I com que el problema del temps és una cosa que hem de solucionar, això t'ajuda molt.

Pati: Vale.

[4] - Consciencia del propósito ↑

Esta es la argumentación que estaba usando el profesor constantemente cuando pasaba por los diferentes grupos de alumnos. Hemos seleccionado esta conversación porque se produce cerca de la cámara y la hemos podido transcribir entera, pero es el mismo tipo de razonamiento que utiliza durante toda la sesión.
Todos los alumnos habían sabido hacer los problemas 2 y 3 de la prueba, es decir, todos habían resuelto correctamente los sistemas de ecuaciones. Algunos habían usado la representación icónica y otros habían explicado como encontraban la solución con palabras. Así que el profesor quiere intentar que los alumnos vean que el lenguaje puramente algebraico también sirve para explicar la solución sin la necesidad de utilizar argumentaciones tan largas.

A05-4005 El grupo de alumnos formado por Rita, Alejandro y Marc hacía rato que discutían un problema de otra tarea (la que tendrían que hacer al día siguiente y que explicaremos en el siguiente capítulo), en la que los datos estaban representados icónicamente (Figura 13.18).

Marc había encontrado la solución probando diferentes valores para cada variable y comprobando que los precios se ajustaban a las condiciones del problema. Pero Alejandro cuestionó el método de resolución diciendo que era muy difícil y Marc no supo cómo defenderlo. Rita afirmó que seguro que había una manera más fácil de encontrar la solución y consigue que los tres se pongan a pensar en silencio. De repente, Rita dijo que había encontrado un método para hacerlo.

Figura 13.18: Sistema de ecuaciones representado de forma icónica

Rita: Ah, mira! Sumas estos dos, sumas 165 más 150 y divides entre tres. Y sabes el precio de una pareja.

Marc: No, porque entonces tu no puedes saber.

Rita: Sí, tu sabes que es 5€ más.

Marc: Ya, y?

Alejandro: Vale, enséñame cómo lo has hecho.

Rita: Y sabes el precio de cada pareja.

Marc: Pero ¿cómo sabes el precio de una camiseta?

Rita: A ver, espera.

Alejandro: ¿Cómo lo has hecho?

Rita: Si tú sumas 3 camisetas y 3 balones, tienes igual. Lo divides entre 3, porque tienes 3 parejas y te sale el precio de cada pareja. Y después de eso, tengo que saber cómo igualarlo.

[Alejandro se levanta y se acerca a otra mesa mientras Marc y Rita continúan trabajando]

Marc: El total es 315.

Alejandro: [*a Rita*] Vale, vuelve a explicarlo.

Rita: Aquí tienes dos y uno y aquí uno y dos, si sumas todo tienes tres.

Alejandro: Ah...

Marc: Y entonces, restas, restas 45 [Esta es la solución que Marc había encontrado antes por prueba y error. Lo que dice después no se oye, pero parece que sigue razonando con la solución que había encontrado antes. Alejandro no está escuchando y Rita está esperando que acabe para continuar].

CIERRE

Cuando faltaban cinco minutos para acabar la clase, el profesor les dijo a los alumnos cuáles serían los problemas que discutirían en la siguiente sesión. También pidió que dejasen la hoja sobre la mesa, no sin antes sacar una foto para guardarla en sus apuntes.

-

13.4.2 Profesor 2: Jorge

Número de sesiones: 2
Fechas: 22/01/2015 & 23/01/2015

INTRODUCCIÓN - Sesión 1

Los alumnos tuvieron que hacer la Tarea 3 como una prueba durante los 30 primeros minutos de la sesión. Jorge no puso la cámara durante este tiempo. Cuando el tiempo acabó, el profesor quiso discutir con los alumnos las diferentes estrategias que habían utilizado.

DESARROLLO - Sesión 1

J05-00:00 Pedro, un alumno, estaba en la pizarra. Tenía los enunciados de los problemas proyectados. Iba a proceder a resolver el primer problema, el que estaba planteado con la representación icónica.

Pedro: Entonces yo lo que he hecho es 62 menos 55 que esto me ha dado 7. Y, ¿por qué he hecho esto? porque si le quitamos uno, dos, tres [*señalando sobre la pizarra dos de los soldados imperiales y un chewbacca de la condición de arriba*]. Uno, dos, tres [*marcando ahora dos soldados imperiales y un chewbacca de la condición inferior*]. Entonces nos quedan este soldado [*marcando el soldado de arriba*] *y* este... [*marcando el chewbacca inferior*] cosa.

Alumno 1: Chewbacca

Pedro: Chewbacca [*riendo*]. Y entonces, yo lo que, osea, yo he supuesto, yo dije que, suponiendo que por ejemplo, vamos a poner que cada uno vale lo mismo, y lo que he hecho es dividir esto por dos [*señalando los 7€ que había escrito en la pizarra*], que es 3.5€. Y pues...

Jorge: ¿Podemos suponer que cada uno vale lo mismo?

Toda la clase: No. [*incluyendo a Pedro*]

Pedro: Yo cuando hice. Y después yo he puesto que como no nos dice la respuesta yo mismo voy a poner que esto vale, o sea, lo mismo que esto [*marcando un soldado y un chewbacca*]. Y entonces he puesto la respuesta.

Alumno 2: Pero eso es imposible, es imposible que valga lo mismo.

Jorge: Ehm... claro el problema es ese, que... que no dice en ningún sitio que sea lo mismo. ¿Vale? eh, bueno. A ver, Bea, ¿tú que has hecho?

J05-01:25 Pedro volvió a sentarse y el profesor empezó a preguntar a diversos alumnos para saber qué era lo que habían hecho.

Bea: Pues he restado 62 de 55, y da 7, y creo que da, que da la diferencia, ay no, ¿el chewbacca costará 7€ más caro que el soldado? [*algún alumno asiente*] Porque hay dos soldados abajo y hay dos... una cosa rara... abajo, y... y arriba hay...

Jorge: ¿62-55?

Bea: Sí, porque arriba hay...

Jorge: Pero a ver, si abajo no tenemos otro soldado, ¿no?

Isaías: Pero igual el que hemos quitado valía, era, o sea...

Jorge: Claro, venga. Lo veis que... claro, si quitáis 62 menos 55... Pero a ver, yo no sé si se puede quitar eso porque nos falta un soldado abajo, ¿no?

[3] - Reconocimiento de la pertinencia conceptual ↓

Jorge no sabe interpretar la operación que le ha dicho la alumna, parece que no sabe cómo interpretar los coeficientes negativos que aparecen resolviendo el problema de esta forma. Podría pensarse que Jorge creía que esta forma de resolver el problema era demasiado difícil para el grupo de alumnos, pero por las preguntas que hace después, parece que realmente no sabe como continuar la argumentación de la alumna.

Algunos alumnos:	Ya...
Alumno 3:	Sí pero, esto es lo mismo... osea, hay lo mismo arriba que abajo, solo que un soldado no está y hay la otra cosa...
Pedro:	Sí, pero no sabemos el precio de un soldado.
Jorge:	Pero no sabemos lo que vale dos soldados y un chewbacca, ¿no?
Alumno 3:	Pero sabes que vale 7€ más porque mirando el cambio de precio, el cambio de precio, porque es lo mismo pero cambias una cosa. Entonces, hay un cambio de precio.
Jorge:	Es igual, pero ¿cuánto vale entonces?
Alumno 3:	No lo sabes, pero sabes que el chewbacca es 7€ más caro que el soldado.
Alumno 2:	Eso no tiene nada que ver.
Jorge:	[*Hablando poco a poco*] Sabes que el chewbacca es 7€ más caro que el soldado...
Alumno 3:	No valen igual, no valen lo mismo...
Isaías:	Sabemos que la chewbacca seguro que es más caro.

[3] - Respuestas a las ideas de los alumnos ↓ Conexiones entre procedimientos ↓

El profesor sabe resolver el problema, tal y como se mostrará más adelantes. Pero no sabía conectar ese procedimiento que estaban haciendo los alumnos y por lo tanto no puede aprovechar para demostrarles qué significado tienen aquí los coeficientes negativos que aparecen.

J05-0259 La discusión continuó todavía unos segundos más, con algunas voces que no se entienden en el audio del vídeo y muchos alumnos hablando a la vez. El profesor pedía calma a la vez que decía que quería que hablase algún alumno que tuviese "alguna conclusión más positiva". Preguntó a un alumno (Yulian) como lo había hecho, y éste le dijo que lo había hecho como el problema 2. Jorge descartó la opción de que este alumno le explicase su estrategia.

J05-0320 El profesor quiere volver a redirigir la discusión.

Jorge:	Todavía estamos, todavía estamos en, lo que hemos estado haciendo hasta ahora. Que es: agrupando cosas, haciendo paque... packs. Intentáis hacer packs, pero parece que no estáis haciendo los packs que hay que hacer. A ver, vamos a mirar abajo. Vamos a mirar abajo. Abajo, ¿qué tenemos? Dos piezas iguales y otras dos piezas iguales. ¿Qué puedo saber yo de abajo? Decirme cosas que yo puedo saber de abajo. Lo que hicimos ayer, cuando preguntábamos... seis cosas que puedo decir de abajo, venga. Decidme seis cosas.

[3] - Conexiones entre procedimientos ↑

Jorge intenta ahora que los alumnos conecten este problema con los que habían estado haciendo en las sesiones anteriores. Así que recurre al mismo tipo de preguntas que había formulado antes, buscando claramente que utilicen la proporcionalidad sobre la segunda condición. Lo consigue después de obtener alguna respuesta más que no le convence, pero que es parecida a algunas respuestas que ya dieron los alumnos en las anteriores sesiones.

Alumne 3:	Que hay cuatro productos.
Jorge:	Que hay cuatro productos. Algo más... ¿profundo?
	[Muchos alumnos hablan a la vez, pero la voz de Mariano es la más fuerte entre todas las demás]

-

Mariano:	Puedes saber que un muñeco y un chewbacca son 31€.
Jorge:	Un muñeco... no sé como pintar un muñeco. Eh...
Neus:	Posa una M... una M...
Jorge:	Un ninot, no? i un chewbacca...
Mariano:	són 31€, porque lo divides entre dos.
Jorge:	...són 31€

J05-0421 Jorge escribió en la pizarra la siguiente expresión:

$$1N + 1C = 31€$$

Jorge:	¿Estamos todos de acuerdo?
	[Algunos alumnos asienten en voz alta]
Jorge:	Vale, ya sabemos algo de abajo. Con lo que sabemos y con lo que vemos arriba, ¿no podéis ya decir algo?

[3] - Conexiones entre representaciones ↓↑

En este momento Jorge está cambiando la representación del problema. La dificultad de dibujar estos iconos ha forzado al profesor a utilizar el lenguaje algebraico para representar el problema. Hubiera sido un buen momento para explicitar el cambio de representación que estaba haciendo, pero desaprovechó la ocasión.

J05-0432 Durante unos cuantos segundos algunos alumnos suspiraban y decían cosas que no se entienden en el audio, como: "dividir por dos", "tienes que restar"... parecía que estuvieran pensando en voz alta.

J05-0447 Después de este tiempo, empezaron a aparecer las siguientes ideas:

Alumno 4:	Es que si haces... 55 menos 31, es que es imposible que el chewbacca te cueste 24€.
Jorge:	Tu has hecho 55 menos 31, ¿porqué y para qué?
Alumno 5:	Yo he hecho lo mismo...
Alumno 4:	Porque si el precio del producto de arriba es 55, y hemos calculado que puede ser que un chewbacca de abajo cueste 31€...
Jorge:	No, el chewbacca no.
Alumno 4:	El chewbacca no...
Jorge:	Y el soldado.
Alumno 6:	Ah, y el soldado...
Alumno 7:	Sr. Mesa, yo lo que he hecho es la media de los cuatro en el primero y la media en el segundo...
Jorge:	Uff... espera, espera, espera. [*algunos alumnos ríen*]
Isaías:	Yo, yo, ¡yo sé como hacerlo! [*levanta la mano visiblemente nervioso*]
Jorge:	Espera, espera, espera, que está Nico. Nico nos quiere decir algo. ¿Nada? [*Isaías está nervioso porque piensa que lo sabe hacer*]. ¡Isaías!
Isaías:	¿Lo puedo explicar?
Jorge:	¡Sí!
Isaías:	Me he iluminado.

Jorge: Toma, toma. Te has iluminado... venga.

Isaías: [Se levanta y empieza a escribir en la pizarra] No sé... si sabemos que esto es 31€ [señalando un soldado imperial y un chewbacca de la condición superior]

Jorge: ¿Sabemos que esto son 31€?

Algunos alumnos: No...

Algunos alumnos: Sí...

[Comenzó una discusión con algunos alumnos y el profesor hablando a la misma vez. Hemos transcrito las frases más significativas.]

Alumno 8: !No! ¡Abajo!

Algunos alumnos: Es lo mismo...

Jorge: Sí... lo hemos deducido de abajo, ¿no? [El profesor estaba intentando engañar a algunos alumnos pero Isaías quiere continuar con su razonamiento. Así que empezó a hablar más alto hasta que captó la atención de todo el grupo]

[Fin de la discusión]

Isaías: Si le quitamos 31€ a esto [*refiriéndose a los 55€*], que serían... [*coge una calculadora*].

Muchos alumnos: ¡24! [*gritando*]

Isaías: Bueno le quitamos 31 a esto... [*señalando el 55 de la pizarra*]...

Muchos alumnos: ¡24!

Jorge: ¡24!, ¿qué vale 24? ¿qué es lo que vale 24?

Isaías: 24 son estos dos soldados [*señalando los soldados de la condición superior*]. Y lo dividimos, si lo dividimos, sabemos cuanto vale cada soldado, le quitamos, al 31 le quitamos lo que vale... creo que son...

Alumno 4: 12€

Alumno 10: 12, 12, 12

Isaías: Al 31 le quitamos el 12 y entonces lo que nos queda es lo que vale esto. [*señalando el chewbacca*]

Jorge: ¿Estáis de acuerdo?

[Algunos alumnos aplauden]

Neus: Mariano ha dado la primera pista, ¿eh?

Jorge: Esto hemos dicho que vale 12, ¿no? [*algunos alumnos dicen que sí*]. Por lo tanto a 31, van 19. Entonces, ¿no? se deduce de esto que es cierto, que lo sabemos que es cierto [*señalando la condición que había escrito antes: 1N+1C=31€*] Guillem, ¿qué? ¿tenía solución esto, o no?

Guillem: En mi cabeza no tenía solución.

Jorge: Vale, es una manera de hacerlo. Seguramente podíamos hacer alguna otra, eh... agrupación, ¿eh? Y poder deducir otras cosas, si seguimos pensando... [*los alumnos ya no están escuchando al profesor, así que decide parar]*

Cuando la discusión acabó, los alumnos empezaron a preguntarse entre ellos si a alguno le había salido bien el problema durante la prueba. Cuando algún alumno dijo que sí, la clase se empezó a tranquilizar mientras Jorge intentaba continuar con la siguiente pregunta (2), que proyectó en la pizarra.

J05-0725 Jorge leyó el enunciado en voz alta para todos los alumnos. Entonces empezó otra discusión sobre este problema.

Jorge:	Següent prova. Troba els valors de "x", "y" que compleixen aquestes, igualtats. Prueba de agudeza visual. ¿En qué se parece el enunciado de este problema...? ¿En qué se parece este problema al anterior?
Alumno 4:	Pues que no sabes el precio
Jorge:	Busca las diferencias...
Alumno 5:	No sabes el número...
Jorge:	No sabes el número, vale. ¿Qué más? Raúl!
Raúl:	Bueno, sé cómo hacerlo. Pero...
Jorge:	No, yo, mi pregunta es: ¿en qué se parece este problema al anterior?
Raúl:	Bueno, que no nos dan eh... bueno, no nos dan los datos.
Jorge:	Vale. Tenemos dos incógnitas como antes. ¿No? ¡Mariano!
Mariano:	Que para partir del problema también hemos de saber una combinación. ...
Jorge:	Vale, tenemos unas combinaciones, ¿no? que nos dicen la información. Ehm... ¿nada por aquí? Bea, ¿no se te ocurre nada? ¿Andrea? ¿No?
Neus:	El Guillem.
Guillem:	No sé, que... por ejemplo los soldados son como las "3x", que deben ser el mismo precio, o sea...
Jorge:	Los soldados son como...
Guillem:	En teoría es como los soldados...
Jorge:	O sea, tú crees que los soldados...
Guillem:	"x", siempre va a ser el mismo precio, igual que los soldados, entonces, que no, no va a cambiar el precio.
Pedro:	que "x" es como soldados.
Guillem:	Sí.
Algunos alumnos:	Y lo otro es chubaca...
Neus:	¿Y la "y"?
Guillem:	La "y" sí. La "y" son los chewbaccas.
Jorge:	¿Y el 3 qué es?
Guillem:	¿Qué?
Jorge:	¿Y la "y" qué es?
Algunos alumnos:	Els chewbaccas. [*Muchos alumnos hablan a la vez*]
Alumno 4:	El problema 2 es... como el que hemos hecho.
Jorge:	O sea que es el mismo problema. ¿Todo el mundo ve que es el mismo problema que hay abajo? ¿Que el de antes?

[4] – Conexiones entre representaciones ↓↑

El profesor está intentando que los alumnos vean que las dos representaciones podrían representar el mismo problema. Lo que no ha dicho es que las letras "x" e "y" tendrían que representar los precios del chewbacca y el soldado respectivamente para que esto fuese así.

Algunos alumnos:	wuala..

Jorge:	Los precios finales son los mismos, ¿sí? Y los productos que tenemos, son los mismos [Los alumnos exclamaban diferentes cosas a la vez, parecía que entendían que eran problemas equivalentes].
Isaías:	¡Qué tontos! ¡Claro! Podríamos haber copiado el problema.
	[Todos hablan a la vez y algunos alumnos ríen]
Jorge:	Yo no estoy hablando del resultado. Estoy hablando de en qué se parece este problema al anterior.
Alumno 4:	Pues que tiene el mismo resultado.
Jorge:	Tiene el mismo resultado, tiene dos condiciones... vale. Y ahora lo que pregunto yo... ¿alguien me podría decir qué es "x"? ¿Qué es "x"?
Alumno 4:	"x" es 31.
Jorge:	Espera. ¿Qué quiere decir, perdón, que quiere decir "x"?
Algunos alumnos:	El número...
Jorge:	A ver Raúl, el número, ¿qué número?
Raúl:	¿El número que representa?
Jorge:	Sí. ¿Qué número representa?
Raúl:	Vale. Yo he puesto 12.
Jorge:	¿Y qué es 12?
Alumno 4:	Era el de antes...
Raúl:	¿Cómo que...?
Jorge:	12, ¿12 qué? ¿euros pero qué 12?
Raúl:	A vale. Bueno, 12...
Jorge:	Yo que sé, ¿12 manzanas? ¡Cristina!
Cristina:	Es el precio de cada soldado, ¿no?
Jorge:	Muy bien. La "x" es el precio de cada soldado, multiplicado por 3 soldados, es el precio de los 3 soldados. Más el precio de chewbacca es igual al precio total. ¿Lo veis? Estamos expresando en una operación combinada, por decirlo de alguna manera, ¿sí?, eh... lo que expresa el problema anterior. ¿Lo véis?

[4] – Base teórica de didáctica ↑

El profesor sabe que uno de los errores habituales de los alumnos es confundir el significado de las letras. Así que insiste y genera discusión sobre su significado siempre que tiene ocasión.

Alumno 11:	Sí
Jorge:	Sí, ¿Guillem?
Guillem:	Es exactament igual, o sea si sabes que este es 12, el otro va a ser 12, o sea... es exactamente igual.
Jorge:	Venga, podemos decir que lo que teníamos antes que eran dibujos, una representación gráfica, es lo mismo... esto... esto es la representación algebraica, ¿verdad? [*señalando el sistema de ecuaciones*] Una representación en, en, en letras. Donde ya sabemos, podemos identificar qué es cada cosa. La "x" es el precio del soldado y la "y" es el precio de, del chewbacca, ¿no? Por lo tanto, ahora hay que resolver esto, ¿no?
Pedro:	También podríamos haber dibujado.
Jorge:	Y... claro, ya nosotros como conocemos lo del anterior, pues ya tenemos más pistas, ¿no? Pero... pero bueno, no sé como podríamos resolverlo. A ver, Raúl.

Raúl:	¿Puedo decir lo que representa la "y"?
Jorge:	Sí.
Raúl:	Bueno pues la "y" debería representar, bueno, representa 19, bueno, 19 euros como precio de cada chewbacca.
Jorge:	Muy bien... sí, sí...
Raúl:	Y el total da 55.
Jorge:	Sí, eso es. ¿Y ahora cómo podríamos resolver esto? A ver, Isaías, ¿tú ibas a decir algo?
Isaías:	Pero es que, yo, yo lo he hecho diferente. En vez de 19 he puesto, he puesto, ya ahora veo que está mal, pero he puesto 20, y he puesto que la ese... o sea los soldados, el de arriba valía 11.66... que me daba o sea 34.98, entonces más o menos, coincide con el de abajo... bueno, casi.

CIERRE - Sesión 1

J05-1159 El timbre sonó e hizo que la sesión acabase de forma abrupta mientras Isaías estaba explicando su razonamiento. Jorge lo intentó escuchar, pero la mayoría de los alumnos ya estaban recogiendo y marchándose de la clase.

Jorge acabó la sesión pidiendo a los alumnos que acabasen los problemas en casa. En ese momento utilizó la palabra "ecuación" por primera vez.

INTRODUCCIÓN - Sesión 2

El profesor empezó la sesión diciéndoles a los alumnos las calificaciones de otra actividad que habían hecho los alumnos y que no pertenece a esta investigación. Eso se llevó algunos minutos de la sesión.

J06-0526 Finalmente el profesor preguntó a los alumnos si habían intentado hacer los deberes. Los alumnos decían que sí, y el profesor les preguntó si los habían sabido hacer. Los alumnos decían ser capaces de resolver bien estos problemas y los dos profesores pasean por la clase mirando si es verdad lo que ellos creen.

Durante unos minutos no se sabe lo que hacen los profesores, que están dando vueltas por la clase, hablando entre ellos. Parece que busquen alguna cosa que les quieren dar a los alumnos.

J06-0935 Jorge empezó ahora a escribir el tercer problema de la Tarea 4 en la pizzarra, el sistema de ecuaciones representado algebraicamente.

DESARROLLO - Sesión 2

J06-1100 Finalmente empezaron la discusión sobre este problema. Jorge primero explicó que no tendrá en cuenta las calificaciones de este problema porque las notas habían sido muy malas. Intenta animar a los alumnos diciendo que ya harían alguna otra prueba en otro momento. Los alumnos vuelven a hablar entre ellos, preguntando si alguien había hecho bien los problemas, etc.

J06-1133

Jorge:	Vam veure primer, no? Com eren capaços de, a través d'una informació, no? D'objectes que sabíem un preu total i altra informació de deduir el preu de cada cosa, sí? I vam veure que allò s'identificava amb un altre tipus de representació que era a la següent pàgina. Com heu solucionat aquest problema? [*señalando la pizarra*] A veure, Martí.
Martí:	Jo he anat provant...

-

Jorge: Has anat provant?

Martí: Vaig provar amb 4, amb 4.5, 5, 5.5...

Jorge: Vale. Podries sortir i ens ho expliques?

[4] - Elección de ejemplos ↑

Jorge ha tenido la oportunidad de ver antes de llegar a esa clase cuáles eran las estrategias que habían utilizado los alumnos para intentar resolver los problemas. En el momento en el que selecciona a Martí para salir a la pizarra, Jorge sabe qué era lo que había escrito en la prueba y por lo tanto tenía una idea de la estrategia que Martí había utilizado para resolver el problema. Veremos que Jorge quiere mostrar a través de Martí una estrategia concreta: el uso de la prueba y el error para aproximarse a la solución.

J06-1308 Martí salió a la pizarra. Jorge y Neus le pidieron que dejase el iPad y la calculadora sobre su mesa. Le dijeron que si necesitaba hacer cálculos, ya le ayudaría alguien. Martí empezó a escribir en la pizarra (mientras tanto, Neus distraía a Jorge comentándole alguna cosa sobre los deberes) mientras decía lo que apuntaba en voz alta:

$$4x2 = 8+10 = 18$$
$$4x4 = \_\_\_ + \_\_\_ = 29$$

y entonces:

$$4x2 = 8+10 = 18$$
$$4x4 = 16 + \_\_\_ = 29$$

J06-1341 Jorge volvió a mirar a la pizarra y entonces empezó a hablar con Martí:

Jorge: Ehm... explica una mica, què vol dir? 4x2 i 4x4?

Martí: I... com sí, això és "a" i "a".

Jorge: Ah! "a" és 4

Martí: Sí

Neus: "a" és 4?

Jorge: Vale. Pots posar adalt, "a" igual a 4? [*Martí lo escribe*] Tu estàs suposant que "a" és 4, no?

Martí: Sí, bueno, per provar. "b" és el 10 i el que resta, però com no és el mateix, doncs provo amb un altre número.

Jorge: Vale, o sigui que el primer que has fet adalt, entenc que has fet 4x2, no? 8, i el més 10 que és? "b"?

Martí: Sí

Jorge: O sigui...

Martí: Però com no és el mateix, doncs...

Jorge: Vale. Doncs posa, sota de la "a", posa "b" igual a 10. Perquè és la teva hipòtesi, no? La teva... inicial, no? La prova inicial. Tu penses que amb 4 i 10 això pot sortir, però ho proves a sota... dius... 4x4=16, no? més 10, són 26. No dona. Per tant, te n'adones que aquesta "a" potser compleix adalt, no? I aquesta "b" compleixen en una equació però no a l'altra. No? Per tant no és vàlida. Ho enteneu això? [*Jorge se acercó a la pizarra*] Vale, simplement, per un tema de com expressar això, el que no podem fer és enllaçar, enlazar iguales de esta manera. Fijaros lo que está diciendo él. 4x2 es 8 y le sumo 10, es 18. O sea que está diciendo que 4x2 es igual a 18, ¿lo veis? ¿que esto está mal expresado? Si yo encadeno iguales, tengo que encadenar cosas que sean iguales. Porque 18 no es igual a 4x2. Por tanto esto evitad expresarlo así. No? [*Jorge borró parte de la pizarra, dejando solo escrito lo siguiente: 4x2=8*] Tú has dicho 4x2=8. Y ahora yo te he preguntado, ¿qué es 8? Tú me has dicho que eran... soldados.

-

[4] - Identificación de errores ↑
Base teórica de didáctica ↑
Desviación de la agenda ↓

Jorge detecta el error en la forma de escribir de Martí: un mal uso del signo de igualdad. La detección de este error es un conocimiento específico que tiene que tener un profesor. El símbolo "=" en este contexto tiene que ser un símbolo que indique equivalencia y no la efectuación de un cálculo, que es como lo utiliza Martí.

Por otro lado, el hecho de borrar lo que ha hecho Martí junto con que el profesor no estuviese atento al razonamiento que había llevado a cabo el alumno, hace que el profesor no pueda ver bien el orden de los cálculos que estaba haciendo Martí en la pizarra. Martí estaba probando el valor "a=4", y en la primera igualdad había visto que "b" tenía que ser 10 si quería mantener la equivalencia. Lo que estaba haciendo después era volver a probar con el valor "a=4" en la segunda ecuación y mirando si también daba que "b=10". Como no le daba, estaba diciendo que lo primero que había probado ("a=4") no servía como solución.

Martí: Bueno, el "a".

Jorge: ¿Son soldados?

Martí: No.

Jorge: ¿Qué es?

Martí: El "a".

Jorge: ¿Pero qué es "a"? ¿Qué son? eh... ¿lápices?

Martí: No lo sé.

Jorge: ¿Qué es 8? [*a la clase entera*]

[Silencio de la mayoría y alguna voz que no se entiende]

Jorge: Vale. Entiendo que como estamos en el contexto de soldados, ¿no? y precios ¿no? Estamos en el contexto de precios de cosas, o pueden ser soldados, ¿no? o lo que tu quieras que sea "b". Hemos dicho que "a" es un soldado, ¿no? y ¿"b" qué es?

[4] - Conexiones entre representaciones ↑ Decisiones sobre la secuenciación ↑

Jorge decidió conectar el problema 3 con el problema 1 de la prueba. Estaba haciendo por tanto una conexión entre dos representaciones: la icónica y la algebraica, intentando hacer que el sistema de ecuaciones del problema 3 cobre significado para los alumnos a través de dotar de significado a los diferentes números y símbolos que allí aparecen.

Respecto de esta conexión entre representaciones, se tendría que tener en cuenta que la insistencia del profesor en relacionar los problemas 3 y 1 podría hacer a los alumnos pensar que siempre que se resuelva un sistema de ecuaciones, la incógnita puede representar un precio. Esto podría causar alguna confusión en el futuro (por ejemplo, si las soluciones son negativas).

Martí: El chewbacca.

Jorge: El chewbacca... pues, lo que da esto, ¿qué es? 29, ¿qué sería?

Martí: El precio.

Jorge: El precio, ¿no? Por lo tanto, 4 por 2, 8, ¿qué es? 8 ¿es?

Martí: Es el que vale, dos, dos soldados.

Jorge: Es lo que vale dos soldados. Por lo tanto es precio, ¿no? Por lo tanto son euros. ¿4 son euros, también? "a" igual a 4, "b" igual a 10, ¿qué son? Jorge [llamó a un alumno que se llamaba Jorge]

Jorge (alumno):	Está mal... [*algunos alumnos ríen*]
Neus:	No t'està preguntant, això...
Jorge (alumno):	Me está preguntando cómo lo está haciendo, y yo creo que está mal...
Neus:	Però no està preguntant això el senyor Mesa.
Jorge:	Por favor, si alguien se pierde en lo que estoy diciendo que levante la mano y diga: no entiendo por qué has puesto 4 por 2, 8. ¿Vale? No cuando acaba el problema decir... no... eso... está mal. Vamos a seguir el hilo del problema. Él ha explicado de dónde salía cada cosa. Lo que era 4, lo que era 2, ¿sí?
Jorge (alumno):	Ya.
Jorge:	Bea.
Bea:	El preu de cada figura?
Jorge:	Muy bien. Esto son euros, ¿no? Y tal y como lo ha pensado, pues 4€ sería el precio de un soldado, ¿no? si lo que él ve aquí son soldados y chewbaccas [*señalando las letras*]. Muy bien. Por lo tanto 4 por 2, 8, y... fijaos. Aquí lo que quieres hacer es, en esta de arriba, ¿no? 2 por 4, más 10, que es tu suposición, ¿no? inicial. Y esto efectivamente te da 18, ¿no?

[4] - Base teórica de didáctica 🡅

El profesor utiliza ese momento para hacer notar que las letras no están representando a los objetos en sí mismos, sino a sus precios.

J06-1747 Jorge escribía en la pizarra, mientras iba diciendo lo que estaba escribiendo en voz alta:

$$2 \cdot 4+10=18,$$

y decía esto lo había escrito porque su suposición inicial había sido que "a=4" y que "b=10". Así que después, había probado esto en la segunda ecuación, y escribió:

$$4 \cdot 4+10=26$$

Por lo tanto, según Jorge, se podía ver que su suposición incial era falsa.

Martí quiso decir que también había probado para otros valores de "a", como por ejemplo 5.5. Con esta nueva suposición, Jorge quiso que Martí escribiese los cálculos en la pizarra de la misma forma que el había escrito antes. Entonces Martí escribió:

$$2 \cdot 5.5 + ...$$

y preguntó a la clase cuanto daba 18 menos esto. Los alumnos le dijeron que 7, y entonces él escribió:

$$2 \cdot 5.5+7=18$$

y

$$4 \cdot 5.5+7=29.$$

Después de esto, Jorge insistió en que Martí estaba pensando en probar valores de "a" y de "b", en este caso "a=5.5" y "b=7". Martí esta vez ya no intenta contradecir a Jorge, parece convencido.

Jorge preguntó al conjunto de la clase si alguno más lo había hecho de esa manera, y muchos alumnos dicen que sí. Los dos profesores decidieron entonces que dejarían algunos minutos para que todo el grupo pudiera tomar nota de lo que había en la pizarra.

[2 y 4] - Desviación de la agenda 🡇

Jorge vuelve a insistir en que el método que había utilizado Martí era el que Jorge tenía pensado mostrar durante aquella sesión. Cuando Jorge pregunta en voz alta en clase, muchos alumnos dicen que habían intentado utilizar la misma estrategia, parece que es una forma habitual de intentar resolver el problema en ese grupo de alumnos.

[3] - Conexiones entre representaciones ↓ Uso de materiales para la enseñanza ↓

El alumno lo que estaba haciendo era probar valores de una de las incógnitas, calculando el valor de la otra incógnita por separado en cada una de las ecuaciones. Este hubiera sido un buen momento para recurrir a la tabla de valores para dar la información y aprovechar para recurrir a la tabla de valores para dar la información, conectando así las dos maneras de representar la información:

2a+b = 18

a	b
4	10
5.5	7

4a+b=29

a	b
4	13
5.5	7

Los profesores en la reunión de departamento habían acordado que utilizarían las tareas de esta unidad didáctica para ayudar a los alumnos a que aprendiesen a utilizar las tablas de valores para resolver sistemas de ecuaciones.

J06-2317 Un alumno dijo que él había resuelto el problema de una manera diferente (Jorge, el alumno que antes no habían dejado hablar).

Jorge:	Jorge, m'expliques què has fet tu?
Jorge (alumno):	Surto a la pissarra?
Jorge:	Sí.
Jorge (alumno):	Puc anar amb la llibreta?
Jorge:	No.
Jorge (alumno):	És que llavors, no...
Jorge:	Pues explícamelo.
Jorge (alumno):	Bueno, pues, ehm... "b" es igual a 18 menos "2a". Porque si está en positivo lo tienes que pasar a negativo.
Jorge:	¿Eso por qué? ¿Porque lo tienes que pasar a negativo si está en positivo?
Jorge (alumno):	Porque me lo han explicado.
Jorge:	Te lo han explicado así. Vale. Espera no sigas.
Jorge (alumno):	Ya.
Jorge:	Vale, eso que estás haciendo, nos lo guardamos, ¿vale? Está bien lo que me vas a decir y todo lo que explicas. Pero vamos a guardar eso.

[4] - Desviación de la agenda ↑

El profesor detecta que el alumno estaba utilizando alguna técnica que no había acabado de entender, por eso decide no darle protagonismo. Efectivamente, el alumno dice que "alguien" le había dicho que si "2a" era positivo, esto tenía que pasarlo negativo "al otro lado". Como el profesor cree que la manipulación del lenguaje algebraico utilizando la sintaxis no ayudará a entender cómo resolver el problema al resto de alumnos, decide no dejar pasar más tiempo con ese episodio contingente.

Por otro lado, por no querer decir al alumno que lo que estaba diciendo no era correcto, aunque sirviese en ese caso particular, la forma de contestar de los dos profesores quizá hizo pensar a ese alumno que su manera de resolver el problema era más avanzada que la que

-

estaba utilizando el resto de la clase. Así que el alumno no se plantea si tenía que continuar por ese camino o si tenía que intentar enteder la estrategia de sus compañeros.

J06-2400 Jorge decidió cambiar el foco de atención hacia algún otro alumno, intentando buscar algún alumno que hubiese intentado ayudarse de la representación icónica para resolver el problema.

Jorge: ¿Alguien ha visto una relación con esto, con los objetos, y ha intentado buscar relaciones que me relacionen estos números como hacíamos con los, con los objetos que decíamos no, que una pizza más una bebida valían tanto y por lo tanto yo podía deducir otra cosa? ¿Alguien ha utilizado estas condiciones de alguna manera, pues aprovechando lo que sabe de una para deducir cosas de la otra? ¿No? Pedro, tú has hecho algún dibujito por ahí. Pedro.

[4] - Conexiones entre representaciones ↑ Decisiones sobre la secuenciación ↑ Elección de ejemplos ↑

El profesor decide volver a conectar las representaciones del problema 3 y el problema 1. Esta vez lo hace de una manera más explícita y utiliza esta conexión para resolver el problema. Lo hace a través del ejemplo de resolución de problema que había visto en la producción de un alumno.

Pedro: Sí, yo he hecho un dibujo pero... después... o sea, pensé que no me iba a salir. Porque lo que he hecho es dibujar que "a" sea dos soldados...

Jorge: Ajá.

Pedro: ... y "b" sea... una chewbacca.

Jorge: Habrás hecho, por ejemplo, podemos hacer esto, ¿no? [*Jorge empieza a dibujar una posible representación icónica del distema en la pizarra*] y, el chewbacca lo voy a hacer con un sombrero, ¿no? 2 y 1, esto son 18. Muy bien. ¿Y esto? Has dicho...

Pedro: Los de abajo 4, también 4 soldados...

Jorge: 4 de estos... y, 1 de estos...

Pedro: Y entonces lo que yo he hecho es restar.

Jorge: Ole. Y esto son, 29 [*todavía dibujaba*]. ¿Y tú has hecho...?

Pedro: Bueno, yo lo que hice es restar, restar todo. O sea. Cogemos una chewbacca con una chewbacca...

Jorge: Pablo, ¿qué está diciendo?

Pablo: Que... está diciendo lo que para él vale cada cosa.

Jorge: ¿Quieres escuchar? Pedro.

Pedro: Que... le quitamos una chewbacca a una chewbacca que se van. Y... dos soldados a dos soldados. Que también se van. Entonces quedan dos soldados.

Jorge: Muy bien. Tú dices que esto de aquí [señalando sobre los dibujos de la condición superior] lo tienes aquí, ¿no? [señalando ahora la condición inferior] Por tanto esto de aquí [pintando sobre la condición inferior] vale 18€, ¿no?

Pedro: Sí.

Jorge: ¡Mariano! ¿cuánto valen los dos soldados, entonces?

Mariano: 18. Ay.

Jorge: ¿Cuánto valen los dos soldados?

Mariano: Eh... los dos soldados...

Jorge: Estos dos. ¿Sabes por qué no lo sabes? Porque estabas copiando cuando él estaba hablando. Álvaro. ¿Cuánto valen, esto, dos soldados?

Alvaro: 11

Jorge: 11... ¿por qué?

Alvaro: Ah, bueno, no sé si lo he hecho bien, pero...

Jorge: ¡Ah! los dos soldados, ¿dices?

Alvaro: Sí

Jorge: ¿Los dos?

Alvaro: Ah, ¡sí! pero lo otro 18. Los dos soldados y chewbacca.

Jorge: Los dos soldados, valen 11. ¿Por qué? Porque 11 es igual a 29 menos 18, ¿no?

Alvaro: Sí

Jorge: Y por lo tanto, ¿cuánto vale un soldado?

Muchos alumnos: 5.5

Jorge: Por tanto vale, 5.5.

Pedro: Pero yo después de ahí, o sea, cuando lo he restado ya no sabía, ya no he continuado. Entonces no sé porqué pero lo he tachado.

Jorge: Vale. Tú has visto algo, pero después no has sabido ver que esto era, que esto ya te daba una pista...

Pedro: Sí.

[4] - Concentración en los procedimientos ↑ Uso de materiales para la enseñanza ↑

Durante toda la discusión Jorge insiste en la importancia de reflexionar sobre el uso de los símbolos y sobre el significado de las operaciones. Así estaba demostrando su creencia en que las matemáticas son un ámbito de conocimiento donde la reflexión sobre los procedimientos está por delante de los propios procedimientos.

Jorge: ¿Veis? Esto es otra manera de hacerlo. O de verlo. Si, si yo tengo aquí dos "a" y un "b", y aquí tengo cuatro "a" y una "b". ¿Pues qué me queda si resto esto? Me van a quedar dos "a". Y en esa resta, las dos "a" será la diferencia de este precio.

[4] - Conexiones entre procedimientos ↑

El profesor realiza una conexión entre el procedimiento que él había interpretado que había utilizado Martí para resolver el problema y el procedimiento que ahora estaba mostrando a través de la explicación.

Isaías: La manera de Pedro, o sea, es más fácil i más rápida.

Pedro: Es más rápida.

[Jorge levantó las manos indicando que daba la razón, y dejó continuar a Isaías sin intervenir.]

Isaías: Porque si imagínate que el número que tienes que ir probando, es 11.5.

Jorge: Claro.

Isaías: Tienes que ir probando mucho pero de esta manera lo adivinas a la primera.

Jorge: Imaginaos que en vez de ser 5.5 la solución de esto fuera... 5.85. Pues va a ser muy difícil ir probando hasta que te salga el 5.85. De todas maneras, es un método totalmente bueno, ¿eh? el que utiliza Martí. Es un recurso que yo utilizo muchas veces. Pero...

[4] - Conexiones entre procedimientos ↑

Jorge vuelve a conectar los dos procedimientos para resolver el problema, incluyendo además un juicio de valor para dar importancia a la primera estrategia de resolución que se había

-

mostrado en esa sesión.

Isaías:	¿Puedo continuar yo? [dijo alguna cosa más que no se entiende en la grabación]
Jorge:	Bueno, ya sabemos cuánto vale un soldado. ¿Puedes decirme cuánto vale el chewbacca? Si sabes lo que vale un soldado.
Isaías:	Sí, porque si los dos soldados que hay ahí...
Jorge:	Esto vale 11... [señalando el "2a" que había escrito en la pizarra]
Isaías:	Restas 11 a 18.
Jorge:	Claro tú sabes que esto vale 11 ahora. Por lo tanto ya sabes lo que vale "b", ¿no? Directo. Es 7. ¿Eh? Esto cada uno, lo ve de una manera, pero son estrategias diferentes, ¿no? De abordar el problema. Una es comprobar valores y esto sería, pues eh... de alguna manera... ¿no? la relación que hay entre los números y deduciendo... deduciendo... cosas que se cumplen, ¿eh?
Neus:	Estaria molt bé Jorge, [*dirigiéndose al alumno, Jorge, que antes había dicho que quería pasar restando una letra que estaba sumando*] que tu t'apuntessis tot això, eh? els dibuixos... tu i tots. Perquè, aquesta manera de fer-ho, és posterior. I encara que te l'hagin ensenyat, és millor que sapigueu relacionar. Al final arribarem aquí, al que a tu t'han ensenyat. Però fent-lo d'una altra manera... una mica... eh? més llarg, per tant heu de... incorporar el que nosaltres diem. Feu els dibuixos... que això està molt bé.
	[Mientrastanto el alumno iba asintiendo y diciendo que le parecía bien lo que le decía Neus]
Jorge:	Exacte. De totes maneres... encara que tu ja sàpigues això, Jorge...

[4] - Conexiones entre procedimientos ↓

El profesor vuelve a insistir en el procedimiento de Jorge (el alumno). Antes no le habían dado paso a este alumno y le quisieron valorar su trabajo, sin conectar este procedimiento con ninguno de los que se habían visto durante la sesión.
Quizá hubiera sido un buen momento para introducir una resolución puramente algebraica.
De la manera que se lo dijeron, de nuevo, parece que el procedimiento que había utilizado este alumno era en realidad una estrategia de orden superior, aunque igualmente le pidieron que copiase la resolución que se había hecho mediante la representación icónica.

Jorge (alumno):	Sí, sí.
Jorge:	Intenta entender esto también.
Jorge (alumno):	Sí, sí.

CIERRE - Sesión 2

J06-2910 La sesión continuó cambiando de tarea, una tarea que no está dentro de esta investigación.

13.4.3 Profesora 3: Mónica

Número de sesiones: 2
Fechas: 22/01/2015 & 23/01/2015

INTRODUCCIÓN - Sesión 1

Mónica dio a los alumnos la tarea que debían realizar en formato de examen. Los sentó individualmente y les pidió que no se preocupasen, que tenían que intentar contestar a las preguntas usando lo que habían aprendido los días anteriores.

-

DESARROLLO Y CIERRE - Sesión 1

El examen transcurrió en silencio durante 40 minutos. Los alumnos que se ven en la cámara pasan todo el tiempo escribiendo, preguntando a la profesora pequeñas cuestiones, pero nada sobre los enunciados. Cuando suena el timbre, Mónica recoge el examen.

INTRODUCCIÓN - Sesión 2

La sesió empezó con la primera pregunta del examen proyectada en la pizarra. La profesora explicó a los alumnos que quería discutir las respuestas de la prueba con todo el grupo.

Como la profesora había dedicado toda la sesión anterior para dar tiempo a los alumnos a resolver los problemas de la prueba, tuvo tiempo de leer las resoluciones de los alumnos. Pero durante la implementación no queda claro si los alumnos estaban siendo escogidos de forma consciente según sus resoluciones o bien si las elecciones de la profesora son fruto del azar.

DESARROLLO - Sesión 2

Mónica empezó con la primera de las preguntas. Algunos alumnos no sabían como resolver este problema, pero parecía que la mayoría sabía que sí que podrían encontrar alguna solución. También demostraron que la mayoría sabía que tenían que utilizar estrategias como las que habían aprendido en las sesiones anteriores (combinar o agrupar adecuadamente los objetos).

M05-0120 Mónica preguntó a un alumno por su estrategia:

Gerard: Ehm, yo, hice, que... si cambiabas el soldadito, por el de... por el chewbacca, te costaba siete euros más.

Mónica: Si cambiabas el soldadito por el chewbacca...

Gerard: Te costaba 7€ más. Entonces sabías que un chewbacca costaría 7€ más que un soldadito.

Mónica: ¿Sí? [*A toda la clase*] ¿Estáis de acuerdo?

[La mayoría de los alumnos dicen que sí. Algunos alumnos dicen que habían utilizado la misma estrategia y algunos de ellos dicen que esa era una gran idea.]

[3] - Anticipación de la complejidad ↑

Delante de la dificultad que prevé para los alumnos para entender el procedimiento que estaba utilizando Gerard, la profesora insiste diversas veces, durante toda la discusión, en que Gerard explique a qué hacen referencia aquellos 7€ de los que habla todo el rato y que eran parte esencial del proceso de resolución.

Mónica: ¿Sí? ¿A ver? [*A Gerard*] ¿Puedes salir a la pizarra a enseñarnos...? [*los alumnos están hablando entre ellos muy alto*] A ver. ¿A ver? [*gritando para intentar que los alumnos bajen el tono de voz*]. ¡Vamos a ver qué hizo! ¿Lo escuchamos? Y luego preguntáis, ¿vale? Así... entendemos... así vemos cuáles son vuestras dudas.

Gerard: [*Mientras Mónica hablaba, Gerard había escrito en la pizarra 62-55=7*]. Me dio 7. Entonces, ehm, [*algunos alumnos todavía hacen comentarios en voz alta*]. Entonces, habían 2 soldaditos, ¿no? Entonces 7 lo multipliqué por 2, que eran 14...

Mónica: Vale, pero qué has hecho...

Gerard: Le saqué el precio. Le saqué, ehm, le saqué 14 euros a 62 para saber, ehm, bueno, le saqué 14€ a 62...

Mónica: Pero primero te...

[la clase continúa pareciendo alterada. Algunos alumnos empiezan a preguntar en voz alta interrumpiendo a Mónica que a su vez ya estaba interrumpiendo a Gerard]

Francisco: ¿Puedo ir preguntando?

Mónica: Vale. Mira. Vais preguntando vosotros.

[Los alumnos hablan entre ellos y se oye a alumnos diciendo que lo habían hecho diferente, o que habían hecho lo de siempre... el alumno que Mónica había señalado es uno de ellos. Finalmente decide dirigir la pregunta a Gerard.]

Francisco: Como sabías... al restar, que te ha dado 7, ¿cómo sabías que eso era el precio de un soldado?

Mónica: ¡Muy bien! cuando has restado, ¿por qué sabías que eso era el precio de un soldado?

Gerard: No. Esto no es el precio de un soldadito.

Mónica: No, el 62... el 7, ¿no? ¿dices? ¿Francisco?

Francisco: Sí, sí.

Mónica: El 7 primero, ese 7, ¿qué es Gerard?

Gerard: La diferencia de precio que hay entre... [los alumnos continúan gritando y no dejando hablar a Gerard]

Francisco: ¿entonces porqué lo multiplicas por 2?

Mónica: Espera, espera.

Gerard: ... un soldadito y un chewbacca. O sea, un chewbacca cuesta 7€ más que un soldadito.

[otra vez todo el mundo habla a la vez. Mónica señala a una alumna y parece que ahora empiezan a escucharla a ella]

Julia: No, porque si la diferencia es 55 menos 62 y añades una chewbacca y quitas un soldadito te va a costar 7€ más.

[de nuevo todos hablan en voz alta y contestándose entre ellos]

Gerard: [intenta continuar su razonamiento gritando más que el resto] Entonces, como hay un sol...

Mónica: Vale. Esperad un mom... vale... sshhh. Vamos a ver que... [*Francisco continúa gritando*]

Francisco: ¡Esa es la diferencia, no el precio!

Mónica: Esa es la diferencia, no el precio.

[Mónica intenta hacer callar a todos mientras Gerard continúa hablando. Él quiere acabar su argumentación]

Gerard: Y como hay 2 soldaditos, lo he multiplicado por 2.

Mónica: Explícaselo a ellos [señalando a la clase, en especial a la zona donde Francisco está sentado]

Gerard: [*Deja de mirar a la pizarra y empieza a hablar con toda la clase*] Lo he multiplicado por 2, y entonces le he restado... de 62.

Mónica: ¿Pero por qué lo multiplicas por 2?

[3] - Concentración en los procedimientos ↑

Mónica no para de hacer preguntas a Gerard cada vez que el alumno intenta continuar con el procedimiento sin explicar cuál era el significado de los cálculos que iba haciendo, revelando así la creencia de Mónica sobre las matemáticas como materia de reflexión y no como un conjunto de pasos a seguir para conseguir un objetivo.

Gerard: Porque hay dos soldados [*señalando la condición inferior*], entonces [*los alumnos continúan hablando en voz alta e interviniendo sin permiso*], entonces quería saber, ehm, que, entonces lo que quería saber era qué pasaría si estos dos [*señalando los dos chewbaccas*] fueran soldaditos. Entonces lo que he hecho ha sido, bueno, he restado los 14, porque es la diferencia que hay, de dos soldados, entonces 48 lo he dividido entre 4.

Mónica: Ah, porque ya no hay dos soldaditos... [interrumpe a Gerard de nuevo, que habla más alto para poder continuar]

Gerard: Hay dos... cuatro... eh... soldaditos. Habrían 4 soldaditos. Y me daba 12. Entonces, ehm, 12 era, lo que era, lo que me costaba un soldadito. Un soldadito igualaba a 12, entonces si sabemos que hay 7 de diferencia [*de nuevo, los alumnos gritando, intentan interrumpir a Gerard, diciendo el resultado antes que él*], un chewbacca costaba 19.

[Cuando acaba, algunos alumnos empiezan a aplaudir, parece que no riéndose del alumno, porque al final han entendido la explicación que ha dado Gerard]

[3 y 4] - Conexiones entre representaciones ↓

De la misma manera que sucedió en las sesiones anteriores, Mónica no aprovecha la ocasión para dejar bien escrita la solución de Gerard. Es decir, verbalmente sí que se ha podido seguir todo el razonamiento, pero escrito en la pizarra solo quedan los cálculos aritméticos que había estado haciendo. Se perdió la oportunidad para conectar el lenguaje icónico y algebraico.

M05-0508 Mónica preguntó quién sabía alguna estrategia diferente para resolver el problema. Pidió a una alumna que saliese a la pizarra a explicar su estrategia y al resto de los alumnos que se fijaran en si su estrategia era la misma o era diferente.

[3] - Conexiones entre procedimientos

Con esta demanda, Mónica provoca que los alumnos tengan que hacer una conexión entre los diferentes procedimientos que se mostrarán en la pizarra durante el desarrollo de la sesión. Ahora bien, como no sabemos si la profesora había seleccionado previamente a los alumnos a los que preguntaría, no podemos saber si ella había hecho esas conexiones a priori. Lo que sí podemos observar es que está pidiendo de forma explícita procesos de resolución que sean diferentes entre ellos, que es capaz de seguirlos todos y que valora positivamente esa variedad, preguntando a los alumnos cuáles les parecen mejor (en el sentido de más eficientes o más fáciles de entender). Por eso decimos que Mónica está conectando los procesos.

Raquel: Bueno, ehm...

Mónica: A ellos, a ellos [Raquel se iba a girar y a ponerse a hablar de cara a la pizarra, y Mónica le pide que lo explique para toda la clase]

Raquel: Sí. Primero eh, o sea, he cogido este precio [*señalando el 62*], ¿vale? ya que eran dos cosas iguales. Dos, y dos de cada uno [*señalando los dos soldados y los dos chewbaccas de la condición inferior*]. Total, que lo he dividido por 2, esto, dividido por 2 [*ahora escribe los cálculos en la pizarra*]. Y me ha dado 31. Que 31€...

Laura: ¿Por qué lo has dividido por 2?

Raquel: Porque son 2 de cada, entonces para encontrar la mitad [*señalando un chewbacca y un soldado de la condición inferior*].

Francisco: Es decir, un chewbacca y un soldado vale 31.

Raquel: Entonces, esto, eh, 31 equivale al precio de un chewbacca y un soldado [Mónica le da alguna indicación que no se oye en el audio]. Esto [redondeando un conjunto formado por un soldado y un chewbacca y escribiendo 31 en la pizarra] vale 31€. ¿Vale? Entonces, si nos damos cuenta, aquí [ahora señala la condición que está arriba del enunciado que hay proyectado en la pizarra] hay esta combinación [redondeando un soldado y un chewbacca] ¿vale? Entonces ya sabemos que esto vale 31€. Entonces, ehm, hemos restado 31 de 55, que daba 24, y lo he dividido entre 2.

Carlota: Has puesto... ¿31 dividido entre 24?

Mónica: [*Se levanta de la silla dónde está sentada*] Escríbelo por separado. 31 es lo que vale ese grupito de ahí. Y entonces ahora haz la operación que hace que te dé 24.

[3 y 4] - Respuestas a las ideas de los alumnos ↓ Conexiones entre representaciones ↓

Algunos alumnos empiezan a no entender el argumento verbal que estaba dando Raquel debido a que no estaba escribiendo los cálculos aritméticos muy claramente. Mónica decide intervenir, pero de nuevo manteniendo la escritura formal en un paso intermedio entre el lenguaje verbal y el icónico, sin dar un paso para relacionar el lenguaje icónico y el algebraico.

Raquel: Entonces he dividido 24 entre 2...

Mónica: ¿Pero de dónde te sale el 24?

[Muchos alumnos hablan a la vez muy alto]

Raquel: El 24, el 24, el 24 equivale a esto [redondeando dos soldados]. Porque el 55... [un alumno ha hablado en voz alta y no deja hablar a Raquel]. He restado esto [señalando la pareja de un soldado y un chewbacca que había redondeado diciendo que representaban 31€] de todo esto [señalando toda la condición. Se oyen exclamaciones de alumnos].

Algunos alumnos: ¡Ah!

Raquel: Total, que de aquí, me ha, o sea me ha dado 24. Entonces lo divido entre 2 para encontrar el precio de 1 soldadito. Que me ha dado 12. Entonces a 31, a 31, le he restado 12, que me da 19.

M05-0704 Antes de sentarse, Raquel dijo que para resolver este examen lo que había hecho era resolver de nuevo el problema de las pizzas durante el examen. Que en el problema de las pizzas había tenido que dividir entre 2 la condición, y así fue como se le ocurrió la estrategia que había utilizado.

M05-0757 Mónica pidió a una alumna más que saliese a explicar su manera de resolver el problema en la pizarra.

Estela: Primero he hecho el doble de 55. O sea, que serían 2 chewbaccas...

Francisco: ¿Por qué?

Mónica: Bueno... espera.

Estela: ... y 6 soldados [*escribiendo esto en la condición superior*]. Y todo esto vale 110. Entonces, vale, entonces son... [*habla consigo misma y no se entiende lo que dice*] vale, entonces esto sería... o sea, 2 chewbaccas y faltan 4 soldados. Entonces, claro, esto valdría 110. Entonces hago 110 menos 62...

Mónica: Vale. ¿Qué valdría 110?

Estela: O sea, serían, esto [señalando los 2 soldados y los 2 chewbaccas en la condición inferior] más 4 soldados [tocando la pizarra com si hubiesen 4 soldados que no están]

Mónica: ¿Puedes hacer una redonda a lo que valdría 110? Como ha hecho Raquel antes, para que todos veamos...

[3] - Anticipación de la complejidad ↑
Conexiones entre procedimientos ↑

Mónica prevé que los alumnos no estaban entendiendo lo que Estela está intentando explicar, así que pide que utilice la misma forma de explicar pero que esta vez Mónica marca sobre la pizarra lo que había hecho Raquel, la alumna anterior.

Estela: [Haciendo un círculo] O sea, esto [dibujando cuatro líneas que representan cuatro soldados] son 4 soldados.

Mónica: Vale. Ya. Vale, 4 soldados.

Estela: Entonces 110 menos 62, que serían esto [*señalando la condición que estaba escrita inicialmente en el enunciado*]. Y me ha dado, ay, no sé que me ha dado.

Mónica: 110 menos 62... 48.

[Muchos alumnos están haciendo este cálculo en voz alta]

Estela: 48 es el precio de los 4 soldados. Entonces sería 48 entre 4 que sería 12.

Estela acabó el problema calculando el precio de los chewbaccas utilizando la segunda condición.

[3] - Concentración en los procedimientos ↑ Conexiones entre representaciones ↓

La profesora ha querido mostrar hasta tres formas diferentes de resolver el problema utilizando la representación icónica, mostrando así mucho interés en que todos los alumnos vieran diferentes estrategias de resolución. Les pregunta qué camino les parece mejor, cuál era más fácil de entender, etc.

Hubiera sido una buena ocasión para intentar ligar las diferentes formas de resolver el problema o con un lenguaje intermedio entre icónico y algebraico, ya que en diversas ocasiones los argumentos verbales de los alumnos no se entienden. Pero en vez de pedir a los alumnos que formalizasen lo que estaban escribiendo, les hacía repetir lo que habían dicho mientras hacían diferentes señales en la pizarra.

M05-1112 Algunos alumnos propusieron resolver el problema probando números en las condiciones. Mónica dijo que esta no era una buena estrategia para resolver el segundo y el tercer problema, pero los alumnos decían que ellos en realidad habían usado estas estrategias y que las respuestas que habían obtenido eran correctas.

Alberto: ¡Yo he ido probando!

Mónica: Vale. Y la otra manera, la última manera es probando. Qué es lo que ha hecho Alberto. Pero, ¿qué te ha pasado en los siguientes problemas, Alberto, probando?

Alberto: Bueno...

Mónica: En este, los números son enteros, que es 12 y... [*señala en la pizarra las soluciones*]

Alberto: Por eso, probando era más fácil en los demás problemas

Mónica: ¿En los demás problemas era más fácil? [niega con la cabeza, indicando que no se cree lo que dice el alumno]

Raquel: Yo lo encontré a los dos segundos, el último problema. O sea, dijo, se acabó el tiempo, y el último problema lo hice en, en...

Carlota: Yo también.

[Mónica camina hacia la mesa. Parece que quiera cortar esta conversación]

Mónica: Cuando los, los números que tienes. ¡Alberto! Cuando los números. Sí. Cuando los números no son enteros, que tenían decimales, 5.5, bueno...

Alberto: 5.5

Mónica: ... era más difícil encontrarlo, ¿no? ¿no te pareció más difícil?

Alberto: No.

Mónica: ¿No estuvisteis mucho rato, probando, haciendo muchas cosas?

-

Alberto: Bueno, fue en el segundo que no sabía qué hacer. Per en el tercero bajé un poquito y ya estaba. Si están muy cerca... pues ya está.

[2] - Conexiones entre procedimientos ↓

No le da ningún valor al procedimiento para resolver el problema por prueba y error, que podría haber servido para presentar las tablas de valores.

M05-1310 Mónica sacó a un alumno a la pizarra para discutir el segundo problema. El alumno dijo que veía que el problema 2 era el mismo que el problema 1. Es decir, que la solución tenía que ser la misma. Cuando la profesora le preguntó cómo demostraría eso, él solo comprobaba en la primera de las condiciones. Esta es la primera vez que tanto profesora como alumnos utilizan la palabra "ecuación". Mónica remarcó esta palabra. El alumno dijo que en realidad él había probado las dos ecuaciones, y de hecho demuestra que lo puede hacer en el pizarra. La mayoría de los alumnos afirman que son capaces de ver la similitud entre los dos problemas.

[4] - Decisiones sobre la secuenciación ↑ Conexiones entre representaciones ↑

La profesora decide conectar el problema 2 con el problema 1, conectando las dos representaciones. Al ver que el alumno no comprueba las dos ecuaciones decide continuar preguntando, parándose a dar significado a los símbolos que aparecen en las ecuaciones del segundo problema.

M05-1353 Por ejemplo, se dijeron las siguientes frases:

Francisco: Son las mismas ecuaciones que había que... que en el primer problema.

Raquel: Es el primer problema solo que sin soldados pero con letras.

Otros alumnos: Es el primer problema pero con fórmula.

M05-1420 Mónica interpretó que algunos alumnos no estaban viendo la conexión y que algunos alumnos estaban haciendo comentarios que le parecieron interesantes al respecto de la conexión entre los dos problemas. Así que dio voz a estos últimos.

Alberto: Por ejemplo, 3 es el número de soldados que había. Y "x" era el precio. Y solo cuando hay uno, la "y" en este caso, como no puedes poner un 1, solo se pone "y" es el chewbacca y es el precio.

Mónica: O sea, hay 3 soldados que valen..

Alberto: "x" es el precio.

Mónica: O sea para ti, tú, viendo este problema, hoy, ayer no te diste cuenta, pero hoy viendo este problema para ti la "x" es el precio, el 3 es el número de soldados, ¿y la "y"?

Alberto: Es que la "y", cuando es 1, no hace falta ponerle un 1, entonces... ya está.

Mónica: Cuando es 1... esto quiere decir un chewbacca [*señalando la "y" en la pizarra*]

Alberto: Sí, un chewbacca. Porque si pones "1y" es lo mismo que poner "y".

Mónica: Es lo mismo que poner "y". ¿Y entonces la "y" qué es?

Algunos alumnos: El chewbaccca

Alberto: La "y" es el precio de chewbacca.

Mónica: ¿Es el precio de qué?

[4] - Conexiones entre representaciones ↑

Continúa haciendo la conexión con la representación algebraica del primer problema.

M05-1524 Muchos estudiantes estaban otra vez hablando al mismo tiempo. Mónica pidió que se tranquilizasen, intentando que atendiesen a aquello que Alberto estaba diciendo:

Mónica: Alberto me dice que esto [*señalando la "x" en la pizarra y escribiendo*] es el precio de quién, del soldado.

Alberto: Del soldado y después el del chewbacca.

Mónica: Y esto, es el precio...

Algunos alumnos: Del chewbacca

Mónica: ¿Estáis de acuerdo?

Algunos alumnos: Sí.

[4] - Conexiones entre representaciones ↑

M05-1538 Una alumna había dicho que no estaba de acuerdo. No entendía estas explicaciones, así que Mónica decidió preguntarle.

Ana: Yo lo he hecho diferente, porque yo he puesto que la "x" es 4, porque este, o sea, si pones un número y la "x" al lado, es multiplicar.

Mónica: Bueno, cuando... sí. Pero ¿por qué? Si pones esto [*escribiendo "4x" en la pizarra*], esto quiere decir que tienes 4 por "x".

Ana: Por eso, 4 por "x".

Mónica: Tienes cua... sí, 4 por "x" es tener 4 "x"'s. Es como tener esto [*escribiendo en la pizarra x x x x*], 4 "x"'s. ¿Tengo 4 "x"'s?

[4] - Respuestas a las ideas de los alumnos ↓ Conexiones entre representaciones ↓ Modelización del profesor ↓

La profesora no interpreta bien el razonamiento que ha hecho la alumna. Así que decide centrarse en aclarar cuál era el significado de "4x". La interpretación que hace Mónica puede llevar a una mala interpretación de la suma de variables ya que en ningún momento está diciendo que la letra "x" es un número y lo que está haciendo es concatenar las letras. Por ejemplo, este argumento dejaría de ser significativo si el coeficiente de la variable "x" fuese un número irracional y difícil de explicar si fuese un número racional.

Ana: Sí.

Mónica: Vale. ¿Y si solo tengo esto? [*escribiendo una "y"*]. ¿Cuántas...?

Todos Una.

Mónica: Vale.

Francisco: Por eso...

Mónica: Por eso si no pongo nada delante... cuántas tengo... una. ¿Sí? Vale, entonces, tú qué has dicho.

Ana: Yo he puesto que en la "x" era 4, porque entonces es 3 por 4, que es 12...

Mónica: ¿Sí?

Ana: Más... eh, la "y", que yo he puesto que, eh, es, o sea 19. Que es el precio del chewbacca. Sí, pero lo que he cambiado por un soldado, es que la "x" no es el precio del soldado...

Mónica: ¿Qué has puesto que es?

Ana: ... Yo he puesto que la "x" es 4.

[Algún alumno hace un comentario en voz alta y otros hablan entre ellos]

Mónica: ¿Y esto está bien?

Muchos alumnos:	No.
Mónica:	¿Cómo lo puedes comprobar? ¿Cómo puedes qué?
Francisco:	Con la segunda.
Mónica:	A ver.
Ana:	2 por 4 es 8,... [mirando la segunda ecuación]
Mónica:	O sea, que esto de aquí es 8. Más...
Ana:	... más 2 por 19, 38...
Mónica:	¿Da 62?
Muchos alumnos:	No.
Mónica:	No. Pues está mal. ¿Vale? Te has equivocado. Entonces, ¿en qué te has equivocado Ana?
Ana:	Que solo lo hice en una pero faltaba hacerlo en la otra.
Mónica:	Claro. Solo lo hiciste de uno, y cuando tienes este símbolo aquí, quiere decir que las... la, la "x" es la misma para las dos líneas, para las dos ecuaciones. ¿Vale? Tiene que ser el mismo valor. Se tiene que cumplir en las dos.

[4] - Respuestas a las ideas de los alumnos ↓

Una vez que la profesora ha entendido qué era lo que en realidad quería decir la alumna, solo comprueban en la segunda ecuación lo que ella pensaba que podría ser una solución no lo era. En la primera ecuación tampoco era válida y no lo comenta.

M05-18:11 Mónica volvió a preguntar si después de toda la discusión ya todos pensaban que los dos problemas eran realmente el mismo. Una alumna dijo lo siguiente:

Blanca:	(...) [*durante el examen*] Es que yo me di cuenta, o sea, yo al principio no me había dado cuenta de que era lo mismo que el otro, pero me di cuenta de que lo podríamos haber hecho de la misma manera. Entonces dibujé, a ver, en vez de soldaditos, pues "x". Hay 3 "x"s, y una "y", y después me di cuenta que era lo mismo.
Mónica:	Ah sí. Claro. Es exactamente eso. ¿Sí? Vale. Entonces, este era el mismo. ¿Podíamos haberlo hecho rápido? Sí. Yo sabía que la "x" ¿cuánto tiene que valer? 12.
Alumno:	12.
Mónica:	¿Y la "y"?
Muchos alumnos:	19.
Emma:	Y una cosa, no es mi caso. Pero si hubiésemos hecho el problema 2 antes que el 1, que yo, por ejemplo, me bloqueé en el primero, si hubiésemos puesto, en el 1, ponía, raona la resposta. Si tú lo has puesto, eh, me ha salido esto porque he hecho el problema 2, y me he enterao que "3x" vale ta ta ta. ¿Estaría bien eso?
Mónica:	Sí. Lo que tendrías que decirme que has identificado que esos dos problemas eran similares. ¿Y tú identificaste, Carlota, que el segundo era igual que el primero? O sea, habéis identificado de las dos maneras. Que el primero era igual que el segundo, es decir, que los soldaditos eran igual que este que hemos visto, y al revés también veis la relación ahí. Si veis esto, ¿podéis dibujar soldaditos, no?

[4] - Respuestas a las ideas de los alumnos ↑ Decisiones sobre la secuenciación ↑ Conexiones entre procedimientos ↑ Conexiones entre representaciones ↑

Mónica aprovecha la intervención de una alumna para relacionar de nuevo los dos problemas, pero esta vez dejando claro que esta relación es simétrica. Es decir, hizo ver a los alumnos que cada representación de los problemas daba a su vez un procedimiento diferente para resolver

-

el problema, y que estas representaciones y procedimientos son intercambiables entre ellos.

M05-2113 Mónica pidió a una alumna, Raquel, que saliese a la pizarra otra vez para explicar cómo había resuelto el problema 3. Antes de dejar que esta alumna resolviese el problema, preguntó a otra alumna cómo lo había hecho ella, para que lo explicase sentada desde su sitio:

Mónica:	Jenny, ¿cómo lo has resuelto? ¿cómo has pensado en resolverlo? ¿cuál ha sido tu estrategia?
Jenny:	He pensado en que "a" y "a" serían lo mismo, entonces...
Mónica:	"a" y "a" sería lo mismo...
Jenny:	Y... la diferencia está en que en la primera hay "2a" y en la segunda hay "4a".
Mónica:	Sí.
Jenny:	Entonces he restado 29 menos 18 porque sería la diferencia.
Mónica:	Vale. O sea, has pensado en que las "a" serían como soldaditos o... pizzas, pero en vez de pizzas, son "a". ¿No? Y has ido haciendo relaciones.

[4] - Decisiones sobre la secuenciación 🡅 Conexiones entre procedimientos 🡅 Conexiones entre representaciones 🡅 Base teórica de didáctica 🡇

Mónica relaciona el problema 3 de esta secuencia, que estaba representado algebraicamente, con el primer problema y su representación icónica. De la misma forma, hace una conexión con los problemas que habían estado trabajando en las sesiones anteriores. Con esta intervención queda claro que los problemas podían ser equivalentes pero no iguales: el problema 3 de esta hoja quedó caracterizado como un problema más general que los que se habían representado icónicamente.

Por otro lado, Raquel dijo que había utilizado la estrategia de los soldados, pensando que el sistema era una nueva compra. La alumna lo resolvió escribiendo esto en la pizarra:

$$a + a + b = 18$$
$$a + a + a + a + b = 29 \quad \rightarrow 29/2 \;=\; 14.5$$
$$a + a + \frac{1}{2}b \;=\; 14.5$$
$$18 - 14.5 \;= 3.5$$
$$b = 2 \cdot 3.5 = 7$$
$$18 - 7 = 11$$
$$a = \frac{11}{2} = 5.5$$

Durante la explicación de Raquel, la profesora solo hizo una intervención. Cuando Raquel escribió la división, en primer lugar lo hizo cometiendo un error de encadenamiendo con el signo igual. Mónica paró un momento a la alumna, se lo dijo, y Raquel borró lo que había escrito y lo escribió bien sin más indicaciones.

[4] - Identificación de errores 🡅
Base teórica de didáctica 🡅
Conexiones entre representaciones 🡇

La profesora identifica el error de escritura del signo igual, cuyo significado en el contexto de resolución de ecuaciones es especialmente delicado. No ha tenido que insistir mucho en por qué era importante corregir ese error, porque los alumnos en seguida parecen convencidos

-

de que no estaba bien escrito.
Por otra parte, no le da importancia a cómo la alumna había utilizado la manipulación algebraica para resolver el problema. La alumna en su discurso oral recurre a los iconos del problema 1 para relacionar su significado con las letras del problema 3, pero utiliza las letras para escribir. Es la primera vez que en la pizarra queda escrita una resolución de una ecuación utilizando el lenguaje algebraico.

Para comprobar las soluciones, lo que hizo la alumna fue sustituir los valores de "a" y "b" en el sistema inicial, pero los alumnos y la profesora no habían utilizado en ningún momento la palabra sustituir, dicen "poner". Mónica utiliza la palabra una vez, solo al final de la intervención y sin remarcarla.

CIERRE - Sesión 2

Mónica acabó la sesión introduciendo una nueva actividad que no pertenece a los datos de esta investigación.

14. Análisis de la última tarea

Los profesores habían planeado realizar una sesión conjunta ligada a las cuatro primeras tareas que habían implementado. Esta sesión tenía como dinánica un role play que permitiría que tres de los profesores observasen activamente al profesor que lideró la sesión. En este capítulo describiremos la sesión conjunta y analizaremos la sesión posterior de cada uno de los profesores de nuevo con sus alumnos y cada uno en su aula. Así veremos cómo el conocimiento de los profesores se vio claramente influído por la sesión conjunta.

14.1 El *role play* de puntos y rectas

Después de la implementación en las aulas de las cuatro primeras tareas, los profesores habían planificado una sesión conjunta. En aquella sesión participaron todos los alumnos de 2º de ESO y todos los profesores del Departamento de Matemáticas. Se trata de una sesión que llevan a cabo habitualmente, pero era la primera vez que lo hacían con todos los alumnos juntos en un solo espacio (en este caso el auditorio de la escuela). La sesión fue conducida por el mismo profesor que había sido el responsable de compartir la unidad didáctica con el resto de profesores. Mientras, los otros profesores estaban en el auditorio ayudando a los alumnos cuando tenían dudas y al profesor que conducía la actividad.

Esta sesión tuvo una influencia clara en las implementaciones de la última tarea que vamos a analizar. Influyó en los tres profesores, incluso en el propio profesor que había conducido la actividad. Por eso creemos que es importante hacer una descripción de cómo se desarrolló esta sesión , aunque no lo haremos etiquetando los momentos y no analizaremos cómo utiliza su conocimiento el profesor que la conduce, ya que lo que nos interesa es hacer un estudio comparativo entre lo que ocurre en las sesiones anteriores a ésta y lo que sucede posteriormente.

El *role play* de puntos y rectas empieza haciendo que los alumnos se distribuyan y se sienten en forma de cuadrícula (Figura 14.1). La primera fila representará el eje de abcisas y la primera columna el eje de ordenadas. A cada alumno se le asignan unas coordendas cartesianas, de manera que el alumno en el extremo izquierdo de la primera fila sea el origen, (0,0), y, a partir de aquí, se asigna la primera y la segunda coordenada a cada alumno.

Una vez que los alumnos ya sabían sus coordenadas, el profesor que dirigía la actividad empezó a plantear diferentes condiciones sobre las coordenadas de los alumnos para que se levantaran aquellos que las cumplían. Algunas condiciones las dictaba usando lenguaje verbal (Figura 14.2) y otras las proyectaba en una pantalla utilizando lenguaje algebraico (Figura 14.3). De esta forma, iba conectando los diferentes lenguajes y explicitando que para cada condición había diferentes representaciones. Finalmente, tal y como se puede ver en la Figura 14.4, se refirió a la manera de utilizar estas representaciones gráficas que estaban emulando los alumnos al levantarse para resolver sistemas de ecuaciones: la persona que se había levantado dos veces porque cumplía las dos condiciones, era la que tenía las coordenadas que resolvían el sistema de ecuaciones formado por esas dos condiciones.

Figura 14.1: Los alumnos están sentados en forma de cuadrícula. Todos saben cuáles son sus coordenadas

Figura 14.2: Se levantan aquellos alumnos cuyas coordenadas suman 4

Figura 14.3: Se levantan aquellos alumnos cuyas coordenadas cumplen la ecuación $y=x-2$

Figura 14.4: Las coordenads del alumno que se ha levantado dos veces son la solución del sistema de ecuaciones formado por las dos condiciones anteriores

Una vez que los alumnos se habían levantado diversas veces según sus coordenadas y las condiciones que iba dictando el profesor, éste quiso mostrar una diapositiva en la que se relacionaban las diversas representaciones de la información que habían estado trabajando y se veía cómo se podían utilizar todas para resolver sistemas de ecuaciones (en la Figura 14.5 se puede ver un ejemplo).

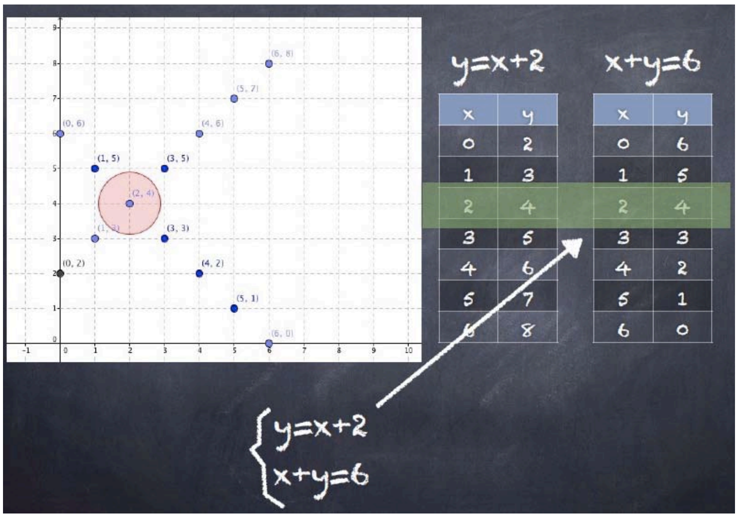


Figura 14.5: Ejemplo de uso de las representación gráfica y de la tabla de valores para resolver un sistema de ecuaciones

Al acabar la sesión, Mónica y Jorge, los profesores que estaban haciendo de ayudantes, se acercaron a Ángel, que era el profesor que había dirigido la sesión y le hicieron algunos comentarios sobre lo que había pasado aquél día. Por un lado, Jorge dijo que ahora había entendido qué era lo que quería decir que las tablas de valores se podían usar para resolver sistemas de ecuaciones. Y Mónica comentó que ahora le había quedado claro a qué se refería Ángel cuando en la reunión hablaba sobre usar diferentes representaciones de la información para resolver sistemas. Veremos a continuación cómo realmente esta sesión influyó a los tres profesores en las siguientes sesiones, las que tenían que utilizar para concluir la unidad didáctica.

14.2 Tarea 5: La colección de problemas

Después de la sesión conjunta que hemos explicado en el apartado anterior, los tres profesores debían finalizar la unidad didáctica en una o dos sesiones (una en el caso de Jorge y Ángel y dos sesiones en el caso de Mónica). Para ello, debían elegir algunos problemas que tenían en una lista de problemas que contenía 10 problemas y utilizarlos como les pareciese conveniente para desarrollar la sesión. Lo que habían acordado en una reunión informal después de la sesión conjunta fue que debían utilizar ese tiempo para sintetizar lo que habían trabajado con los alumnos durante la unidad didáctica y que si había alguna cosa a la que creían que no habían prestado la suficiente atención, la repasarían con los alumnos aprovechando esa lista de problemas.

Lo que pasó a la práctica es que los tres profesores decidieron utilizar un solo problema para trabajar, pero los tres eligieron problemas diferentes. La lista completa de problemas se puede encontrar en el ANEXO D. Ángel llevó a clase el problema 4, Jorge el problema 2 y Mónica el 5.

14.3 Professor 1: Ángel

Número de sesiones: 1
Fecha: 29/01/2015

INTRODUCCIÓN

Ángel escogió un problema en el que se pedía encontrar un sistema de ecuaciones que se pudiese solucionar utilizando al gráfico de la Figura 14.6. El profesor proyectó el enunciado del problema en la pizarra.

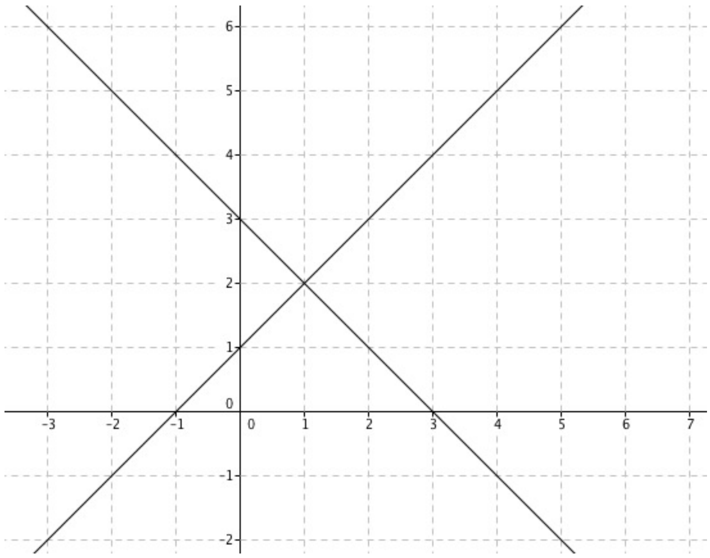


Figura 14.6: Gráfico que aparece en el enunciado del problema escogido por Ángel

Lo hizo sin pedir a los alumnos que leyesen el enunciado del problema y sin preguntar cuál era la tarea que se les pedía, Ángel empezó a hacer preguntas sobre el gráfico que habían proyectado. Los alumnos dijeron que este problema les recordaba a la sesión conjunta que habían desarrollado en el auditorio, el *role play* de rectas y ecuaciones.

[5] - Decisiones sobre la secuenciación ↑
Adherencia a los libros de texto ↑
Consciencia del propósito ↑

El profesor ha decidido elegir una tarea que le permite conectar la actividad que habían realizado durante la sesión conjunta con el estudio de la gráfica de una recta. Ese profesor todavía no había propuesto a sus alumnos ningún problema en el que se partiese de la representación gráfica de una condición para llegar a otras representaciones. Además decide que, en un primer momento, en vez de centrarse en resolver el problema que estaba planteado en el material que habían preparado los profesores, focalizará la primera parte de la sesión en relacionar esa tarea con la actividad conjunta y con lo que habían aprendido en las sesiones anteriores a aquella, cuando estaba implementando las cuatro primeras tareas.

DESARROLLO

A06-0600 El profesor preguntó qué relación veían entre el gráfico que les estaba mostrando a los alumnos y la actividad que habían realizado en el auditorio hacía unos días. A esto, lo primero que dijeron los alumnos era que las rectas parecían perpendiculares. El profesor decidió descartar estos comentarios e insistir en que lo que quería era que le diesen toda la información que les podía ayudar a relacionar ese gráfico con la actividad desarrollada en el auditorio:

Ángel:	Llavors, a part de que siguin perpendiculars, jo estava parlant de a què s'assemblen al que vam fer l'altre dia a l'auditori.
Clara:	Que cada línia correspon a una qualitat i...
Ángel:	Cada línia correspon a una...
Rita:	Condició...
Clara:	Bueno, cada punt que forma la línia compleix la condició...
Ángel:	una condició, o sigui...
Clara:	... en comuna.
Ángel:	... aquesta línia [Ángel marcó una de las líneas y apuntó sobre la pizarra lo que decía la alumna], els punts, què dius? què tenen...
Clara:	Tots els puntets tenen una qualitat en comú.
Algunos alumnos:	Condició.
Clara:	Condició.
Ángel:	Tots els punts tenen una condició, vol dir qualtitat, en comú [*escribiendo en la pizarra*]. Alejandro.
Alejandro:	I el punt del mig és el que compleix, eh, el que compleix les dues condicions.
Ángel:	El punt del mig és el que compleix les dues condicions. [*Escribiendo en la pizarra*] Aquest punt compleix les dues condicions. Molt bé. En què més s'assembla?
	[Silencio]
Mónica:	En que es diuen en coordenades. Primer vertical i després horitzontal.
Ángel:	Es diuen en coordenades?
Mónica:	Bueno, que per anomenar cada punt primer es diu el número horitzontal i després el vertical.
Ángel:	Vale. Els punts, s'anomenen, es nombren, amb coordenades [*escribiendo en la pizarra*] amb coordenades. I sempre es diu què?
Mónica:	Primer l'horitzontal...
Ángel:	... primer horitzontal [*escribiendo en la pizarra*]
Algunos alumnos:	La "x".
Ángel:	... horitzontal i vertical.

[5] - Decisiones sobre la secuenciación ↑

La razón por la que el profesor ha decidido no empezar la sesión directamente utilizando el enunciado del problema que estaba propuesto es que lo que pretende el profesor es conectar

-

explícitamente el *role play* que habían llevado a cabo los alumnos en la sesión anterior con la representación gráfica de una recta. Consigue que los alumnos hagan esta conexión preguntando por las similitudes entre el *role play* y la imagen que les está mostrando. Veremos ahora cómo enriquece la conexión pidiendo a los alumnos que busquen las diferencias.

A06-0851 Después de pedir a los alumnos que dijesen todo lo que les parecía que tenían en común ese problema y la actividad del auditorio, el profesor pidió cuáles eran las diferencias que veían entre las dos situaciones.

Ángel: Això són les coses que s'assemblen. En quines coses es diferencies?

[5] - Decisiones sobre la secuenciación ↑

El profesor sabe que para poder comparar dos cosas es importante fijarse tanto en aquello que tienen en común como en sus diferencias. Precisamente en este caso será en las diferencias dónde encontrará más riqueza conceptual.

Clara: Les línies?

Ángel: Sí. Això, del que vam fer l'altre dia a l'auditori. A veure Hanna.

Hanna: En les coordenades de nombres negatius.

Ángel: Hi ha coordenades negatives. O sigui, aquí són, similituds [*escribiendo un título sobre lo que había escrito antes*]. Diferències [*escribiendo un título sobre otra parte diferente de la pizarra*]. Hi ha coordenades... com era la frase?

Hanna: Negatives.

Ángel: Negatives [muchos alumnos hablan a la vez].

Clara: Hi ha coordenades formades per nombres negatius.

Ángel: O sigui, hi ha punts... [otra vez muchos alumnos hablan a la vez, pero hay una voz que se oye por encima del resto]

Alejandro: Hi ha punts representats amb nombres negatius.

Ángel: Però què és el que està representat amb nombres negatius?

Jaro: Les coordenades.

Ángel: Les coordenades. A veure, fem la frase. Hi ha punts...

Algunos alumnos: ...de coordenades negatives [*hablando algunos alumnos a la vez*]

Ángel: [*Escribiendo en la pizarra*] Hi ha coordenades, o sigui, hi ha punts que tenen coordenades...

Jaro: De vegades és un...

Ángel: Doncs farem així: amb algun negatiu?

Algunos alumnos: O dos!

Ángel: ... o dos. Com a mínim. Què tal? Sí? O sigui que hi ha positius i negatius. Crec que heu dit alguna cosa més. Sara.

Sara: Que probablement les condicions seran diferents a les que ens va dir a l'auditori.

Ángel: Vale. Les condicions no són les mateixes. Vale. Això no m'ho apunto. El que vull és que veieu una... què més?

Mónica: Pues que... que cada línia té unes condicions diferents?

Ángel: Cada línia té condicions diferents. I això no passava?

-

Mónica:	Sí.
Ángel:	Les línies que estàvem dibuixant allà tenien condicions diferents o iguals?
Mónica:	Ah!
Ángel:	Diferents. no?
Mónica:	O sigui, que hem de diferenciar el que vam fer l'altre dia...
Ángel:	Sí. O sigui, quines diferències hi ha entre el que vam fer l'altre dia i aquest problema? Hem trobat les similituds i ara vull trobar les diferències.
Martina:	Les línies es creuen en punts diferents...
Ángel:	Vale. Però això no m'ho apunto, perquè és un problema diferent, no? Vull unes diferències més significatives. Mónica.
Mónica:	Em, a l'auditori també ho vam demostrar de diferents maneres, és a dir, amb lletres, o amb números en comptes amb gràfic?
Ángel:	O sigui, aquí hi ha només... què és lo que hi ha aquí només?
Algunos alumnos:	Un gràfic.
Ángel:	Un gràfic. I és una...
Algunos alumnos:	Una representació gràfica.
Ángel:	Només hi ha una representació. [*Escribiendo en la pizarra*] Aquí només ens mostren la representació gràfica. De què?

[5] - Conexiones entre representaciones ↑
Consciencia del propósito ↑

El profesor no consigue que le digan lo que está esperando. Esto se verá después cuando vuelva a hacer preguntas sobre las diferencias que ven. Pero aprovecha para insistir en que lo que están viendo es una representación posible de unas condiciones.

Algunos alumnos:	De les dades. De la condició.
Ángel:	De les dades, de la condició. Sí? O sigui és només la representació gràfica de les dades, de la condició... alguna paraula més que pugui fer servir? Del problema, no? Una de les representacions, una, que en aquest cas és la gràfica, amb la que ens diuen que hem de treballar. I que ens estan demanant en aquest problema?

A06-1215 Entonces el profesor empezó a hacer preguntas sobre la demanda que se hace en el problema:

Mónica:	Que mostrem d'una altra manera...
Ángel:	Que ho mostrem d'una altra manera. Molt bé. Què ens estan demanant?
Pati:	Ehm, eh, bueno, equacions.
Ángel:	Però què ens estan demanant?
Pati:	Les condicions.
Ángel:	Dues condicions, per tant el que ens estan demanant és que fem un... de la representació.
	[Silencio]
Carlos:	Una altra manera de representar les dades.

Ángel:	Correcte. Ens estan dient, agafa el mateix problema i canvia la seva representació. En comptes de que sigui gràfica, què ens demanen?
Algunos alumnos:	Equacions.
Ángel:	Una representació algebraica. Sí? Ens estan demanant la representació algebraica. Perquè el sistema també està aquí [*señalando el gráfico en la pizarra*]. Això és un sistema que està representat gràficament. Igual que aquí [*mostrando otro problema de la misma hoja de problemas que estaba representado icónicamente*] hi ha un sistema que està representat amb un dibuix. O aquí [*mostrando otro*], o un esquema, no? Però ara estem aquí [*volviendo a proyectar el problema sobre el que estaban trabajando inicialmente*]

[5] - Conexiones entre representaciones ↑
Decisiones sobre la secuenciación ↑
Consciencia del propósito ↑

Es en este momento cuando el profesor se empieza a centrar en trabajar sobre la demanda que hace el problema. Con esta forma de introducir el problema ha conseguido que sean los alumnos los que digan que lo que se está pidiendo en ese problema es que cambien el lenguaje de representación de la información.

A06-1328 Una vez se había discutido el objetivo del problema, el profesor volvió a insistir sobre las diferencias que había con la actividad que se había desarrollado en el auditorio. Dijo que había alguna diferencia importante que todavía no habían apuntado en la pizarra.

[5] - Decisiones sobre la secuenciación ↓
Consciencia del propósito ↑

El profesor vuelve a intentar que los alumnos le digan una diferencia concreta entre la actividad que hicieron en el auditorio y la imagen que hay proyectada en la pizarra. Podría haber ido más rápido dando alguna pista más clara, pero finalmente consigue que le digan lo que él quiere para poder desencadenar la siguiente discusión, aunque no esta vez. Primero tendrá lugar una discusión que se desvía del tema que están tratando.

Ángel:	Què ereu vosaltres?
Algunos alumnos:	Persones.
Ángel:	Persones. I ereu persones allà. Però després, jo agafa les persones i què feia amb elles? Les dibuixava en un gràfic. Què feia amb les persones? Les estava convertint en punts del pla. Estava agafant a les persones i les estava representant com a punts del pla. Quina diferència hi ha, què no podia fer jo allà que aquí sí puc fer?
	[Algunos alumnos dicen alguna cosa que no se entiende en el audio]
Ángel:	Sí! perquè jo puc ara agafar això [*tocando la pizarra*] i dir... vinga! puseu-vos en quadrícula. Si jo esbrinés la condició... o de fet, mirant el gràfic, no us podrieu aixecar? [*algunos alumnos dicen que sí en voz alta*] Sí, no? Jo us podria posar en quadrícula i us podrieu aixecar segons aquesta condició, sí o no? Però... hi ha una diferència.
Clara:	Que aquests punts no representen res.

Ángel: Que aquests punts et són igual, vols dir? [*todos ríen*]

Clara: No, no, no! O sigui, no representen a persones, no representen una... són uns punts.

Ángel: Aquests punts no representen a persones.

Jaro: Home, si volem sí.

Ángel: Si volem sí.

Clara: Sí, però ara ho ficaràs. Ara.

Jaro: Tu pots representar-ho de moltíssimes maneres. Aquesta és una altra.

Ángel: O sigui, que el que estem fent què és? El que estem fent és agafar un problema, que era un problema... pot ser dir-li real és massa, eh? Però era un problema real que teníem allà a l'auditori que tothom volia resoldre i l'hem fet aquí, l'hem posat en un gràfic, sí? I veiem que aquell problema i aquest es poden resoldre de diferents maneres i que aquí ara trobarem una manera matemàtica i a més farem servir l'àlgebra. D'això se'n diu modelitzar. I és l'activitat més important que fem els matemàtics. Modelitzar. O sigui, agafar, què serà modelitzar? Què penseu que és?

Jaro: Igual una persona pot resoldre un problema molt més fàcil si el canvia, si el visualitza d'una altra manera. Una persona igual ho veu més fàcil amb totes aquelles persones que en un gràfic posat. O amb àlgebra, per exemple.

Ángel: O sigui, modelitzar què és, Pilar, per a tu?

Pilar: Fer servir diferents representacions per veure un mateix problema.

Ángel: O sigui, utilitzar diferents representacions per veure una mateixa...?

Pilar: Un mateix problema.

Ángel: Un mateix problema. Per exemple. Podria ser. De fet, el que estem fent és això. Tenim un problema, una situació real, de la vida quotidiana. Sí? Que pot ser més forçada o menys forçada però la tenim. El professor un dia us va portar allà. Per tant, això us va passar a vosaltres, ha passat. Us ha passat a vosaltres, i vosaltres viviu a la vida real, per tant és un problema de la vida real [*los alumnos ríen*]. Estem allà. Sí? I aquell problema de trobar la persona que coincideix en les dues condicions, resulta que el podem resoldre allà aixecant-nos. Però veieu que també el podem resoldre aquí fent àlgebra, fent gràfics i fent taules. Per tant el que hem fet aquí és agafar aquell problema, canviar la representació i el que volem es poder solucionar aquest problema de vàries maneres. Les matemàtiques han de ser una manera en la que aquell problema es solucioni de forma més senzilla. Per exemple, si nosaltres estem veient un partit de bàsquet i estem veient un jugador que tira una pilota, la pregunta que podrien resoldre les matemàtiques seria: abans de veure si la fica o no la fica a la canasta, podríem saber-ho? O sigui, només veient el fotograma anterior, quan està així [*mueve las manos como si tuviera una pelota de básquet y la estuviese tirando*], ho podríem saber?

Jaro: Necessitaríem saber les... [algunos alumnos más dicen cosas que no se entienden en el audio]

Ángel: Necessitaríem saber... una sèrie de coses, no? Les matemàtiques ens podrien ajudar a resoldre aquest problema... si sabem més dades. I com ho farien? Doncs ho farien a través d'un model concret, el que fos. Un gràfic, un... una taula de valors... o... o uns altres. Això és modelitzar. I per això serveixen les matemàtiques. Ara esteu descobrint la potència. Realment, per la cosa que serveixen les matemàtiques de veritat és per modelitzar. I de fet sempre, casi sempre, que estem fent mates estem modelitzant. El que passa és que el que estem fent és modelitzar a diferents nivells. Quan l'any passat estudiàveu el problema dels daus i la seva probabilitat, i allò de que al final la probabilitat tendiria a un cinquè, doncs aquesta probabilitat, aquest càlcul és modelització també. Sí? [*los alumnos asienten*]. Vale, i ara tornem aquí una altra vegada [*señalando la pizarra*]. Però encara no m'heu dit la diferència important. Hi ha una diferència important que encara no està aquí apuntada. Hi ha una cosa, que, que és el problema dels models, hi ha una cosa que aquí puc fer [*señala la pizarra*] i que allà no podia [*señala con la mano en dirección al auditorio del centro*]. Sara.

Sara: Pot ser com no es veu cada punt, nosaltres com persones erem el (1,2), el (1,3), el (1,4), Però aquí pot ser el ú i el dos punt... alguna cosa [*refiriéndose a puntos con coordenadas decimales*]. Pot haver-hi punts amb decimals.

Ángel: És clar. Aquí hi ha punts en mig, eh?

Jaro: No pot haver-hi infinites persones

Ángel: Eh? O sigui, si això ho volguéssim traslladar allà [*señalando en dirección al auditorio de la escuela*], quin problema tindríem? [*una alumna murmura la respuesta que Ángel está repitiendo*] Que no hi ha tantes persones, no? I podria tenir-les?

[Muchos alumnos hablan a la vez diciendo que no, que es imposible]

Jaro: Es que una línia... no entenc molt bé per què es diu que representa un milió de... infinits... no pot representar...

Clara: Clar perquè si...

Jaro: És impossible...

Clara: Cero como cero, cero, cero...

Jaro: Sempre hi haurà... més petit, més petit, més petit.

Ángel: Jo crec que això serà un problema que tractarem més endavant. Però... ho tractarem aquest any. Llavors, la qüestió és que aquí la diferència, ara de moment només m'interessa passar així per la superfície, la diferència és que aquí [*señalando la pizarra*] hi ha representats infinits punts. Encara que només veiem un tros, en aquest tros hi ha infinits punts. De fet, la línia encara continuaria, no? [*muchos alumnos dicen que sí*] Infinitament, però és que només en aquest tros hi ha infinits. I nosaltres, els que podríem aixecar-nos serien aquest, aquest, aquest, aquest, aquest... [*señalando puntos que tienen las dos coordenadas naturales*], sí? Aquest... [*ahora cambia de recta y señala un punto con coordenadas negativas y espera la reacción de los alumnos*].

Jaro: No perquè, el que sí que hi ha, el que sí que hi ha... el punt exacte. El que sí que hi haurà... un 1. Això sí que està.

Ángel: Aquest podrà aixecar-se? L'altre dia...

Martina: Depèn, no, depèn. Perquè l'altre dia vas posar el zero a la punta. Si haguessis posat el zero al mig de tot...

Ángel: Ah, llavors sí, no? Podria canviar les coordenades i llavors sí. Vale, ara ho entenc. Doncs, [*escribiendo en la pizarra*] una altra diferència important... com ho escric això? Algú m'ho dicta?

[silencio. Ángel mira a un alumno, Carlos, esperando a que le empiece a dictar]

Carlos: Bueno, que en aquella línia hi ha un munt de punts...

Ángel: Vinga, diga'm una frase.

Carlos: És que... eh... la diferència és... eh... que allà no podríem posar tantes persones perquè, bueno, hi ha un montón de punts al mig...

[algunos alumnos hablan a la vez]

Ángel: Vinga, comencem així [*Ángel escribe el inicio de la frase en la pizarra*]. En aquesta línia...

Carlos: eh... hi ha més punts dels que... infinits punts.

Ángel: Hi ha més punts que persones i això seria impossible de...

Carlos: de representar.

Ángel: De representar on? Diguem a l'auditori. En aquell tros de l'auditori. Molt bé, llavors ja tenim aquí diferències i similituds entre el problema de l'auditori i el que volíem resoldre avui.

[5] - Conocimiento del tema ↑
Conexiones entre conceptos ↑
Consciencia del propósito ↑

También está explicitando la importancia de que los alumnos sepan hacer cambios de representaciones para resolver problemas y la relación de esto con el proceso de modelización. En definitiva, el profesor está haciendo un discurso sobre la propia naturaleza de las matemáticas.

A06-2322 Ángel acabó la conversación explicándoles a los alumnos que lo que habían hecho el otro día en el auditorio era un *role play*, en el que los alumnos estaban representando puntos, y que cuando los alumnos se levantaban cumpliendo alguna de las condiciones, formaban una recta.

A06-2622 Después de dejar que una alumna sacara una foto de lo que había escrito en la pizarra y pedirle que se la enviase al resto de alumnos, Ángel dijo que ahora iban a resolver el problema que estaba escrito en la lista de problemas. Borró la pizarra y le preguntó a una alumna, Inés, si lo había hecho y cómo.

Inés:	He posat una condició per cada, per... per la línia.
Ángel:	Per cada línia.
Inés:	Per cada línia.
Ángel:	Diga'm una.
Inés:	Ho tinc a l'iPad.
Ángel:	No cal que em diguis la condició, diga'm com l'has pensada. Per això teniu l'iPad apagat, perque pogueu tornar a pensar el problema.
Inés:	Vale. Vaig fer... o sigui... "y" igual a [*Ángel va repitiendo lo que dice Inés y escribiéndolo en la pizarra*] "x" més 1, per exemple.
Ángel:	x+1, ostres, i això què és?
Inés:	O sigui que la coordenada "y" és igual a la coordenada "x" més 1.
Ángel:	Ah! La coordenada "y" és igual a la coordenada "x" més 1. I això què representa?
Inés:	On està la coordenada.

[5] - Conexión entre representaciones ↑
Consciencia del propósito ↑

El profesor le está pidiendo a la alumna que relacione la expresión algebraica que ha encontrado con la representación gráfica que tiene proyectada en la pizarra. En realidad, lo que está haciendo es insistir en el concepto de lugar geométrico. Quiere que los alumnos comprendan que la expresión algebraica $y=x+1$ en realidad representa una de las rectas que hay dibujadas.

Ángel:	Però... on està la coordenada què? Vine.
Inés:	El punt
Ángel:	No, vine, vine [le dice que salga a la pizarra a explicarlo, y cuado llega a la pizarra, Ángel le hace la siguiente pregunta]. Vull que toquis el que representa el que m'acabes de dir.

-

Inés: Bueno, o això o això [assenyalant amb el boli els eixos de coordenades]

Ángel: No ho sé, no ho sé. Què? O això o això, què?

Inés: [*Señalando el eje de ordenadas*] La coordenada... o sigui... el punt... la coordenada de la línia "y".

Ángel: La coordenada de la línia "y" és...

Inés: ... la coordenada de la línia "x", més 1.

Ángel: I això... si això d'aquí [*señalando la expresión algebraica y=x+1*] representa alguna cosa, vol dir que representa alguna cosa que està en el dibuix.

[5] - Conexión entre representaciones 🡅

La alumna interpreta la expresión algebraica como una regla que sirve para calcular las coordenadas de los puntos que hay dibujados, pero el profesor insiste en que esta ecuación en realidad es una estructura abstracta que representa la recta en sí misma (lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas cumplen la relación algebraica).

Inés: Sí.

Ángel: Quina cosa?

[el resto de alumnos comienzan a intervenir]

Jaro: ¡Ah! Es que no está del todo bien...

Mónica: Un punt.

Ángel: Un punt?

Jaro: És que això pot confondre molt!

Ángel: A veure, Carol, vine [*señalando a la alumna*]. No te'n vaig, no te'n vagis [*dirigiéndose a Inés*]. Ajuda a Inés.

Carol: Esto es por aquí una línea, ¿no? [*Señalando una de las rectas que había dibujadas en el gráfico*]. O sigui, seria aquesta. Aquesta línia d'aquí, aquests punts, fan aquesta... o sigui, fan aquesta equació, condició.

Ángel: Per què? O sigui, jo dic que està bé. Però no sé per què.

Carol: A veure. És (-3,-2), doncs [*mientras escribía estas coordenadas en el punto de la recta correspondiente*], la "y" és "x" més 1. Però no sé perquè... o sigui, perque sí.

Ángel: I el següent?

Carol: També. O sigui, tots.

Ángel: Quin és el següent?

Carol: (-2,-1) [escribiendo en un lugar de la pizarra lejos de la recta]

Ángel: (-2,-1)? Això què és?

Carol: Coordenades.

Ángel: Molt bé. Perquè no ho poses al costadet, millor? [Carol borra y escribe las coordenadas al lado del punto correspondiente]. Vale. Quin més? [Carol escribe ahora las coordenadas de muchos puntos que están sobre la recta]. Vale. Aquests punts compleixen aquella condició. Inés, m'ho pots demostrar?

Inés: [*señalando uno de los puntos*] La "y" és 1 i la "x" és 0. 0+1=1.

Ángel: Vale. I algun altre?

Inés: Ah, "y" és 2, "x" és 1, 1+1=2.

Ángel: Sí?

Toda la clase: Sí!

Ángel: Segur tothom?

Toda la clase: Sí!

Ángel: Vale. Llavors, allò d'allà [*señalando la ecuación con la mano*]... tornar-ho a dir a veure si ara ho tens clar [*mirando a Inés*]. Què representa?

Inés: Els punts. I la línia recta. La condició...

Ángel: La condició... [*va completando la frase a medida que los alumnos van diciendo las palabras clave. Está indicado con puntos suspensivos*] que compleixen... tots els punts... que estan sobre la línia. És molt important, eh?, com ho dieu... perquè és que si no, no ho entendreu. Si no al final se t'oblida i t'aprens una frase que després no saps què vol dir. La qüestió és que aquells punts que estan sobre la línia cumpleixen la condició que hi ha allà escrita. Vale, o sigui, el vermell compleix el verd [*la recta estaba pintada de color rojo y la ecuación escrita en color verde*]. Sí?

[5] - Conexión entre representaciones ↑
Uso de terminología matemática ↑

Ángel ayuda a los alumnos a que utilicen terminología matemática para expresar sus pensamientos y les dice explícitamente que el uso de la terminología les ayudará a dotar de significado a los símbolos y a conectar las dos representaciones que están utilizando en ese momento (algebraica y gráfica).

A06-3052 Después de esta conversación, Ángel hizo algunas preguntas individuales a determinados alumnos para comprobar que estaban entendiendo lo que habían hecho sus compañeras en la pizarra. Jaro dijo que los puntos con coordenadas negativas no cumplían la ecuación, pero algunos alumnos se lo explican y acaba diciendo que lo entiende.

A06-3321 Una alumna hizo la siguiente intervención:

Hanna: Y si pones "x=y-1", está bien, ¿no?

Algunos alumnos: Sí, sí...

Hanna: Sí, porque es la inversa.

Ángel: Si escric així [*escribiendo "x=y-1" en la pizarra*], també és correcte?

Muchos alumnos: Sí!!

Ángel: "x" és, "y-1", això esteu d'acord que també serviria?

Muchos alumnos: Sí.

Ángel: Jo també estic d'acord, molt bé Hanna.

A06-3353 La recta que tenía por ecuación "*y=x+1*" tenía los puntos de coordenadas enteras marcados de color rojo (Carol los había marcado anteriormente). Para concluir, Ángel empezó la siguiente conversación con los alumnos una vez que le habían dicho que todos los puntos de la línea recta tenían que cumplir la ecuación, y no solo los puntos que habían pintado de rojo antes:

-

Ángel:	O sigui que, això [*señalando alternativamente las dos ecuaciones*] i això... que pinto de verd [*dibujando de verde la recta que tenía ecuación $y=x+1$*] és equivalent. Són dues representacions del mateix. I podria dir, mireu, això que heu fet aquí [*señalando el gráfico de la recta*] què seria del que vau fer l'altre dia? Això que ha fet aquí la Carol.
Clara:	Com si ens aixequéssim.
Ángel:	O sigui, com si s'aixequessin, no? I si jo ho poso en comptes d'així, ho podria posar així? [*dibuja una tabla de valores en la pizarra y copia algunas coordenadas de la recta*]. Sí, no?
	[Los alumnos le van dictando valores para poner en la tabla y Ángel los va copiando]
	O sigui que això, la taula de valors, em serveix també per representar la línia recta.
Jaro:	Això és una altra modalitat, no?
Ángel:	Això és una altra representació. El procés s'anomena modelització. Podries dir si vols que la representació és un model.

[4] - Identificación de errores ↑
Conocimiento explícito del tema ↑
Uso de terminología matemática ↑

El profesor identifica la confusión de ese alumno en el uso de la terminología matemática y cree saber lo que quiere decir.

Jaro:	Ho sigui que en tenim 3 diferents.
Ángel:	Quatre! Algú de vosaltres m'ha dit una quarta.
Mónica:	Jo! Escrit.
Ángel:	Què vol dir escrit?
Mónica:	Pues, redactat...
Ángel:	Què vol dir? Com seria? Em podrieu dir aquesta en concret?
Sara:	Que la segona coordenada és igual a la primera més ú.
Ángel:	O sigui, això seria una representació verbal.
Mónica:	O escrita.
	[Hacía rato que Hanna tenía la mano levantada]
Ángel:	Dime Hanna.
Hanna:	Però a la taula de valors no hauríem de representar tots els punts? Perquè aquest representa tots els punts [*señala la gráfica*] i l'equació representa tots els punts, i l'escrit també... però aquest no! [*señalando la tabla de valores*].
Ángel:	O sigui que aquesta representació seria una mica més pobra, no?
Hanna:	Sí.
Ángel:	Perquè aquí faltaria informació. Estem d'acord.

[5] - Consciencia del propósito ↑
Conexión entre representaciones ↑

El profesor ha propiciado que los alumnos conecten las diferentes representaciones de la información que había presentado gráficamente: la tabla de valores, la expresión algebraica y la expresión verbal.

A06-3634 Después de la conversación, Ángel ya le pidió a las alumnas (Inés y Carol) que se sentaran, y le pidió a un alumno que le dijese la condición de la segunda línea recta. Un alumno se la dijo usando la expresión verbal "que las dos coordenadas sumen 3". Ángel pidió una expresión algebraica y, después de que le dijeran que "*x+y=3*", pregunta por otra expresión algebraica equivalente. Algunos alumnos dicen "y=3+x". Así que pide la intervención de una alumna, Alexandra.

Ángel:	Algú em diu per què aquesta no és la mateixa que aquesta [*señalando alternativamente "x+y=3" y "y=3+x"*]. Alexandra, va, que avui no has parlat.
Alexandra:	Perquè sí... perquè les dues coordenades sumen 3. I si "x" és 3, 3+3=6, llavors "x" i "y" no poden ser 3.
Ángel:	Molt bé, això no és el mateix que això [*volviendo a señalar las dos ecuaciones*]. Per tant, com podries arreglar aquesta perquè si que fos [*señalando la ecuación "y=3+x"*]?
Alexandra:	Eh... doncs... [*un rato de silencio*] "y=3-x".
Ángel:	"y=3-x" [*escribiendo en la pizarra*]. Estaríeu d'acord?
Algunos alumnos:	Espera, espera... no, no. [algunos alumnos están pensando en voz alta, diciendo que sí y que no... parece que duden. Y discuten entre ellos hablando muchos a la vez. Ángel los deja hasta que todos dicen que sí que están de acuerdo y lo entienden]

CIERRE

A06-4107 Ángel cerró la tarea pidiendo que una alumna hiciese una foto de la pizarra y diciéndole se la envíe a toda la clase. Les dijo que en casa tenían que adjuntar las dos pizarras de aquella sesión a sus apuntes y escribir unas notas para recordar todo lo que habían trabajado. Una vez dicho eso cambió de tarea y pasó a una tarea que no pertenece a los datos de esta investigación.

14.4 Profesor 2: Jorge

Número de sesiones: 1
Fecha: 29/01/2015
Otros factores de contexto: Neus, la segunda profesora, no está presente durante el desarrollo de esta sesión.

INTRODUCCIÓN

El profesor, durante la sesión anterior, había pedido a los alumnos que pensasen cómo hacer en casa el problema que podemos ver en la Figura 14.7. En el problema se pedía calcular el precio de una camiseta y de una pelota.

Figura 14.7: Problema de la lista escogido por Jorge

Después de caminar entre los alumnos mirando si habían hecho o no los deberes, Jorge proyectó en la pizarra el enunciado del problema y, como los alumnos ya lo habían pensado en casa, no realizó ninguna explicación sobre el enunciado. Empezó la discusión sobre las soluciones que habían encontrado preguntando si algún alumno lo había resuelto "haciendo agrupaciones".

DESARROLLO

J07-0954 Un alumo (Isaías) dijo que no había hecho agrupaciones, que había puesto letras a los valores de los precios. Jorge le pidió que saliese a la pizarra para explicarlo. El alumno escribió en la pizarra un sistema de ecuaciones representado algebraicamente que era equivalente al problema que quería resolver.

J07-1122 Después de que el alumno escribiese las dos condiciones utilizando lenguaje algebraico en la pizarra, Jorge empiezó a hacerle preguntas para poner en común la resolución.

Jorge: "2x" més "y" igual a 165... "x" més "2y"... i què val "x"? què vol dir? [*Jorge está situado al fondo de la clase y Isaías está delante de la pizarra*]

Isaías: "x" igualaria samarreta [lo va diciendo mientras escribe y se oye como diversos alumnos están diciendo lo mismo]

Jorge: Però samarreta què? La talla de la samarreta?

Isaías: No!

Jorge: Què?

Isaías: Preu, preu...

Jorge: Vale. Preu de la samarreta, eh? [Isaías borra y vuelve a escribir el significado de las letras]

Isaías: Bueno, i llavorans, això l'he ficat, bueno ehm, he sustituit la "x" per la samarreta i la "y" per la pilota [*señalando alternativamente el enunciado icónico que estaba proyectado y el algebraico que había escrito antes*].

[2] - Conexión entre representaciones ↑
Consciencia del propósito ↑

Con la intención de ayudar a los alumnos a resolver el sistema, Jorge decide conectar la representación icónica del problema con la representación algebraica. Lo hace directamente él, y a partir de este momento será ésta la representación que usarán para resolver el problema.

Jorge:	Perfecte.
Isaías:	Llavorens el que he fet és que he trobat un número que complia les, com vem fer a l'auditori, que complia les...
Jorge:	I com l'has trobat aquest número?
Isaías:	Bueno, pues, jo he anat, he anat provant.
Jorge:	Has anat provant.
Isaías:	He provat per exemple, pots començar... amb 70, i pots anar augmentant de 10 en 10.
Jorge:	O sigui, el que tu has fet és una, una, el que es diu una taula de valors, no? Que la vam veure l'altre dia?

[2] - Respondiendo a las ideas de los alumnos ↑
Consciencia del propósito ↑
Conexión entre procedimientos ↑

En este episodio se aprecia claramente la influencia que tuvo la sesión conjunta donde desarrollaron el *role play*. El profesor demuestra que ha interiorizado el objetivo de aprendizaje que relacionaba el uso de la tabla de valores con la resolución de sistemas de ecuaciones. En los anteriores episodios donde había tenido oportunidad de explicitar este uso, desaprovechó las oportunidades de aprendizaje. En esta ocasión, el alumno dice que ha utilizado la misma estrategia que antes habían llamado "ir probando", y ahora Jorge lo que responde es que en realidad, lo que quiere decir el alumno es que va a usar una tabla de valores para resolver el problema.

Isaías:	Sí.
Jorge:	[*Acercándose a la pizarra*] No? Jo tinc aquí la primera condició, que és aquesta [*señalando la primera de las ecuaciones y escribiendo C1 y C2 al lado de cada condición*], primera condició, segona condició. I tu el que has fet és a la primera condició [*mientras dibuja dos tablas de valores en un lado de la pizarra, y sobre cada una repite el C1 y C2 que había puesto sobre cada ecuación. Las etiquetas de las columnas son "x" e "y"*] has fet una taula. No? Quin preu has suposat per la "x" a la primera prova que vas fer?

[2] - Consciencia del propósito ↑
Elección de representaciones ↑

Debido a la toma de consciencia del propósito, en esta ocasión Jorge elige representar la tabla de valores con el mismo formato que se usaría para representar los valores de una función cualquiera.

Isaías:	Ehm, a la primera 70.

Jorge: 70. 70, no? [escribe este valor sobre la tabla C1, en la columna "x"]. I això que et donava de la "y"?

Isaías: Ehm, de la "y", em donava... em donava... [el alumno está mirando a Jorge, no a la pizarra. Parece que lo intenta recordar en vez de calcularlo en ese momento]

Jorge: Espera, no ho diguis. Álvaro! Si a la primera condició la samarreta val 70, quant val, la pilota?

Álvaro: Si a la primera... a la primera?

Jorge: Sí, a la primera condició, la samarreta val 70 quant val la pilota?

Álvaro: 15. Ah, no, no, no... [algunos alumnos dicen que sí mientras Álvaro todavía mira a la pizarra y el profesor va preguntando mientras muchos alumnos hablan a la vez y otros dicen números]

Jorge: A ver, pero habíamos dicho. En la primera condición que es la de arriba, ¿verdad? si yo supongo que la camiseta vale 70, ¿cuánto me vale el valor de la pelota, que es "y"? Esa es la pregunta. ¿Lo ves Alejandra, por qué?

Alejandra: No.

Jorge: ¿No? ¿Porqué no sustituyes 70 donde tendría que ir en la primera condición, verdad? [*Jorge se acerca a la pizarra y empieza a escribir sobre ella*]. Quizá para que... para que lo vean mejor 2 por 70 más "y" es igual a 165. ¿Estáis de acuerdo? Si yo pongo mi... mi "x" donde toca [*señala la tabla de valores y la expresión algebraica*] ahora lo que tengo que saber es cuánto vale "y". Esta es la pregunta. ¿Cuánto vale "y"? ¿Cómo sabemos aquí [*señalando la ecuación que ha escrito*] cuánto vale "y"? ¿Lo veis? 70 por 2, 140, por lo tanto que me falta aquí para llegar a 165?

[Algunos alumnes dicen la respuesta correcta en voz alta]

Jorge: Muy bien. ¿Eh? Me faltan 25. Por lo tanto yo sé que aquí la "y", ¿eh? me vale 25. Por lo tanto este es el primer punto [*escribe este número en el lugar adecuado de la tabla de valores*]. Por lo tanto si es una prueba y funciona ¿debería cumplir la segunda condición?

[2] - Consciencia del propósito ↓
Conexión entre representaciones ↓

No aprovecha la oportunidad para enseñarles a escribir algebraicamente la relación que hay entre las dos variables. Jorge cree que si tiene la igualdad escrita en la forma $ax+by=c$, para los alumnos esto será equivalente a escribirlo de la forma $y=(c-ax)/b$. Por eso no intenta escribir la expresión de esta forma. Se observa en diversas ocasiones que a los alumnos les cuesta trabajar con la primera expresión.

Algunos alumnos: Sí.

Jorge: ¿Sí? Vamos a probarlo, si cumple la segunda.

Isaías: [señala la tabla de valores mientras dice algunas palabras que no se entienden. Escribe el 70, 25 en la tabla de valores de la segunda condición] ... o sea aquí... que no, que no la cumplía.

Jorge: ¿Esto está bien? ¿70, 25? Entonces, si es el mismo punto sí que cumplirá las dos, ¿no?

Isaías: Ya. Pero entonces, en la segunda condición, entonces aquí sería 70 más 2 por 25... [*escribiendo en la pizarra*]

Jorge: Sí, ¿y eso a qué es igual?

Isaías: Y eso igualaba a...

-

Jorge:	Vale, importante, atendemos todos ahora, ¿eh?
Isaías:	70 más 50, 120.
Jorge:	120, ¿no? ¿y eso está bien?
Algunos alumnos:	No.
Jorge:	Per què?
Algunos alumnos:	Perquè no quadra.
Jorge:	Perquè no quadra. Debería dar 150.
Isaías:	Cumple la primera pero la segunda no.
Jorge:	Muy bien. Yo te pregunto. ¿Qué punto de "y" cumple la segunda condición? Tú me has dicho "x" vale 70. ¿Qué punto de la segunda condición cumpliría que el precio de la camiseta es 70? ¿Cuánto valdrían las pelotas en esa condición?
Isaías:	Eh... 40, ¿no?
Jorge:	40...
Isaías:	Para que cumpla la segunda, tendrían que ser 40.
Jorge:	¿Estáis de acuerdo? ¿Guillem? [*el alumno dice alguna cosa que no se entiende*]. Pero estamos en esto. ¿Estáis de acuerdo en que valdrían 40 en la segunda condición? Si alguien no lo ve que lo diga ahora, ¿eh? ¿No lo ves? Vale.
Isaías:	Mira, si tenemos un 70, 70 más dos veces...
Jorge:	Dos veces ¿qué? dos veces "y".
Isaías:	Dos veces qué...tiene que dar 150 [Jorge borra los cálculos anteriores sobre la segunda condición y pide a Isaías que escriba la ecuación]
Jorge:	Dos veces "y". Apunta, dos veces por "y".

J07-1651 Algunos alumnos preguntaron en voz alta que por qué estaban haciendo "aquello tan complicado" y empiezan a discutir entre ellos, diciendo que lo han hecho de otra manera, intercambiando una pelota por una camiseta y fijándose en la diferencia de precios. Jorge descartó lo que están diciendo los alumnos, diciendo que está bien que lo hagan así como ellos dicen, pero que ahora quería mostrar aquella forma de resolver el problema. Isaías dijo que para él era más fácil así y continuaron discutiendo entre ellos hasta que Jorge consiguió recuperar la atención de los alumnos.

Durante la discusión, un alumno dijo que "y" no podía ser 25. Entonces Jorge se dio cuenta de que en la tabla de valores había apuntado 25 para la segunda condición, y lo borró. Finalmente llegaron a ver que en la segunda condición, si "x" era 70, la "y" tenía que ser 40.

J07-1747

Isaías:	Pero entonces está mal, porque ehm, porque tiene que ser el mismo número, entonces lo que he hecho... [*coge el borrador y parece que quiera borrar los valores que acaban de poner sobre la tabla de valores*]
Jorge:	Espera, espera, no borres, no borres. Muy bien, ¿vale? Entonces, ya tenemos... tú has supuesto que este precio era correcto, lo has sustituido en la siguiente ecuación y te has dado cuenta de que no cumplía la segunda. Por lo tanto tendrás que buscar otro punto. ¿Sí? Podríamos actuar de esta manera, o sea podríamos ir, podríamos ir siguiendo, ¿hasta qué? Hasta que estos dos puntos [*señalando la tabla de valores*] sean iguales. ¿Sí? ¿Os acordáis del experimento que hicimos allí, verdad? [*está haciendo referencia al role play*]. Por lo tanto, ¿y qué era esto? [*señalando el sistema de ecuaciones expresado algebraicamente*]. Cuando yo hacía esta

condición que decía dos camisetas más una pelota es igual a 165, ¿qué forma tenía esa condición? ¿qué forma geométrica? Cuando decíamos, que se levanten aquellos cuya "x" y "y" sumen 6. ¿Cómo se expresa eso? cuya "x"... más la suma de la "x" y la "y" sumen 6. Es una condición, ¿no? ¿puedes escribir, que la suma de que la "x" y la "y" sume 6? Coordenada "x" más "y" igual a 6. Igual a 6, ¿no? [*Isaías escribe en la pizarra "x+y=6"*]. Y esto, ¿qué forma tenía? ¿Qué puntos? ¿Los puntos que cumplían esta condición qué forma tenían?

Algunos alumnos: Una línea recta.

[2] - Consciencia del propósito ↑
Conexión entre representaciones ↑
Uso de terminología matemática ↑

Ahora el profesor, para conectar la representación en tabla de valores con la representación gráfica que quiere hacer, empieza a utilizar vocabulario geométrico para referirse a las coordenadas: dice que los valores representan puntos.

Jorge: Una línea recta, ¿verdad? ¿Creéis que los puntos que cumplan esta condición [*señalando la ecuación "2x+y=165"*] van a ser también líneas rectas?

Algunos alumnos: Sí, podría ser.

Jorge: Podría ser. Podría ser, ¿eh? ¿Cómo podríamos comprobar? Si hubiéramos tenido más puntos en esta tabla, podríamos generar más puntos, por ejemplo, si el precio es 50 ¿cuánto vale la "y"? O sea entendéis que si yo, que fue la primera, lo primero que empezamos con lo de las pizzas y las amanidas, que si yo os daba solo una, me decíais que esto tenía infinitas soluciones, ¿verdad? Porque yo tengo que suponer un precio y me da otro. Yo pongo uno y me da otro. Infinitas, ¿no? Infinitas soluciones ¿de qué? de una recta. Esto de aquí [*ahora señalando la segunda ecuación*] ¿qué me da? infinitas soluciones de una recta. Aquél punto donde se cortan, las dos, es el punto que yo busco.

Isaías: Si tienes, o sea, si te quitan esto [*señalando la segunda condición representada icónicamente*] y solo te da esto [*refiriéndose a la primera condición*], entonces no se podría hacer esto porque...

Jorge: No tendrías información.

Isaías: Pero entonces, yo he visto que, he puesto 60, entonces, aquí lo que he hecho, lo que he hecho es 60, he hecho es 2 por 60 más "y" que me da 165, bueno, he hecho esto y entonces he hecho 60 por 2 que es 120, y he visto que lo que me quedaba para que diera 165, es 45. Entonces ahora he supuesto que esto [*borrando la "y" y apuntando 45 en su lugar*] era 45. Entonces esto me daba bien. Entonces lo que tenía que hacer era, en la segunda condición ver esto. Entonces he puesto 60 que era "x" más 45 por 2 y que me tiene que dar 150. Entonces esto he visto que sí que cumplía porque 45 por 2 son 70, y 60 más 70...

Jorge: Más 90, ¿no?

Isaías: Ay, 90. 60 más 90 daba 150. Así he visto que cumplen.

Jorge: ¿Veis? Él ha ido probando puntos. Lo que ha ido haciendo... ¿puedes entonces completar que esos dos puntos cumplen las dos tablas de valores de las ecuaciones? ¿no? 60, 45 está en los dos. ¿Verdad? A ver, es una manera de solucionar el problema. ¿Porqué seguramente os parece más fácil de la otra? Porque los productos que yo tengo son fáciles. ¿Sí? Pero si yo pongo a lo mejor otro tipo de productos más difíciles, no lo podréis hacer de una manera así más lógica cogiendo, agrupando, ¿verdad? ¿Me entendéis? Entonces tenéis que ir a otro recurso. ¿Qué recurso hemos aprendido? Probar números. Probar números es hacer aquellas tablas, y coger el que yo necesite. Perdón, el que me, el que me cumpla las dos condiciones. ¿Eh? Es otra manera de hacerlo. Incluso, la solución puede ser gráfica. Ahora, ahora lo veremos. Pero esto es un método de resolución, que sería mediante la tabla de valores ¿sí? Vale.

J07-2234 Jorge pidió a Isaías que se sentase y caminó hacia la pizarra. Dibujó unos ejes de coordenadas y empezó a establecer relaciones entre los números que se habían escrito en las tablas de valores y el dibujo que acaba de hacer.

Jorge:	¿Cómo se llama esto que represento aquí? [*señalando los ejes que acababa de dibujar*]
Muchos alumnos:	Gráfica.
Jorge:	Es una gráfica. Vinga, són uns eixos de coordenades. Vale? Com es diu aquest eix? [*señalando el eje de abcisas*]
Muchos alumnos:	"x"
Jorge:	Val, horitzontal, "x". Aquest "y". [*escribiendo las letras en los extremos de los ejes correspondientes*]. Això qué són? [*Ahora señala la tabla de valores de la primera condición*]. 70, 25, què és? Físicament, què és? 70, 25? Si jo us dic 70, 25, aquí, en aquest context [*señalando la tabla de valores*]?
Mariano:	El preu d'una samarreta i una pilota.
Jorge:	Sí. I aquí? [ahora señala los ejes de coordenadas]
Pablo:	70 la "x" i 25 la "y"
Jorge (alumno):	Unes coordenades
Jorge:	Un punt. Un punt, no? En aquesta gràfica. Vaig a buscar-lo, el 70, 25.

[6] - Consciencia del propósito ↑
Conexión entre representaciones ↑

El profesor utiliza la conexión entre la tabla de valores y el gráfico para resolver el sistema.

J07-2403 El profesor empezó a dibujar sobre los ejes unas cuantas marcas para poner números, y representó el primer punto de cada una de las tablas de valores, el (70,25) de la primera y el (70, 40) de la segunda tabla. Mientras acababa de dibujar el segundo de los puntos, un alumno le preguntó para qué servía el gráfico que estaban dibujando. Después de decirle que ahora verían cuál era la utilidad, Jorge decidió borrar las coordenadas del punto que constituía la solución del problema, y pidió a los alumnos que calculasen las coordenadas de un nuevo punto para cada tabla de valores, a partir de suponer que "x" valía 50 para la primera condición y que "x" valía 40 para la segunda condición. Jorge pidió a diferentes alumnos que le dijesen los valores de "y" correspondientes. Después de haber apuntado estos valores en las tablas correspondientes, representó en el gráfico los dos puntos de la primera tabla de valores. Por lo tanto, ahora tenía dos nuevos pares de valores que cumplían la primera y la segunda condición representados como puntos sobre el plano cartesiano.

J07-2717 Con los dos puntos representados, Jorge empezó la siguiente puesta en común:

Jorge:	Si yo tengo... ¿Qué necesito para, para dibujar una recta? ¿Cuántos puntos como mínimo necesito para dibujar una recta? ¿Uno o dos?
Muchos alumnos:	Dos.
Pablo:	Uno.
Muchos alumnos:	Uno.

[La mayoría de los alumnos, al incio, habían dicho que dos. Pero el alumno que dijo uno, el único que el audio capta que lo dice, hace que todos los demás empiecen a decir que uno]

Jorge: ¿Con uno dibujo la recta? [Jorge dibuja un punto en la pizarra, lejos de todo lo otro que había escrito antes]. ¿Cuál es? ¿Esta o esta? [estaba dibujando líneas rectas que pasan por el punto que había dibujado]

Jorge (alumno): La de la izquierda, la primera que has dibujado. [Había muchos alumnos hablando a la vez y diciendo cosas diferentes, pero es este el comentario que Jorge decide compartir con los demás alumnos]

Jorge: ¿Cuál? ¿Esta? [Los alumnos hablaban unos sobre otros, discutiendo sobre qué recta de las que había dibujado era la correcta. Las rectas estaban fuera de los ejes que había dibujado para representar el problema] Necesitas dos, Jorge. Necesito decirte dos para saber qué recta te estoy diciendo. Porque con un punto puedo hacer, ¿cuántas rectas? ¡Infinitas! Por lo tanto, fijaos, si tengo dos puntos ya puedo dibujar una recta.

Álvaro: Y, o sea, ha de ser con dos. [Mientras tanto, Jorge iba dibujando la línea recta que representaba los valores posibles de la primera condición, uniendo los dos puntos que tenía dibujados]

Jorge: Como mínimo necesito dos. Si tengo tres, podría tener otro punto aquí, pues mejor, pues me apoyo. Pero con dos, tengo una recta. La dibujo. Vamos a ver este punto [*ya empezó a dibujar los puntos de la segunda tabla de valores sobre la misma gráfica*], el (40, 55) ¿dónde está? [*dibujando este punto*]. Lo dibujo con mucha imprecisión porque fijaos lo estoy haciendo sin líneas ni nada. Este es el (40,55). Y esto me da una recta que une estos dos puntos, ¿lo veis? [*mientras unía el primer punto de la segunda tabla que ya tenía dibujado anteriormente con este que acababa de dibujar*]. Por lo tanto, todos los valores de precio de camisetas y pelota que me cumplen la primera condición forman una recta [*señalando la primera recta que había dibujado*]. Todos los precios que me cumplen la segunda condición, de combinaciones de camisetas y pelotas, forman otra recta [*señalando la segunda recta que había dibujado*]. Cuando se encuentran las dos rectas, ¿qué es? La solución del problema. Porque me cumple las dos. ¿Y qué punto es? ¿Cuál habíamos dicho? (60, 45), ¿no? ¿Está aquí el (60,45)? Mira, 60, y aquí, bueno, permitidme la impresición de esto, pero estaríamos por aquí, en 45 [*apuntando las coordenadas sobre el punto de intersección*]. Por lo tanto, yo podría encontrar mi punto que es el (60,45) de manera gráfica.

Pedro: ¡Si así es más fácil!

Álvaro: Que lío...

Jorge: ¿Vale? yo podría encontrar mi punto de manera gráfica. Podría hacerme dos tablas de valores de cada ecuación dibujarme una gráfica y cuando llegue aquí, miro a ver dónde está cada cosa, ¿eh?

[6] - Consciencia del propósito ↑
Conexión entre representaciones ↑

El profesor utiliza la conexión entre la tabla de valores y el gráfico para resolver el sistema.

J07-3000 Los alumnos pasaron un tiempo dando su opinión en voz alta, sobre si aquél proceso que acaban de ver en la pizarra les parecía fácil o difícil. Jorge pidió que escribieran en sus apuntes todo lo que él había escrito en la pizarra. Durante ese tiempo se produjo la siguiente conversación:

Jorge: Fijaos que ya hemos sustituido los cuadrados y los circulitos por "x" y por "y". ¿Somos capaces ya de utilizar la "x" y por "y"? ¿la "x" y "y", de ahora en adelante?

Muchos alumnos: ¡Sí!

Jorge: ¿Vale? ¿ya? Podemos evitar ya el uso de cuadraditos y círculos y podemos ir ya a "x", "y".

Después de ese tiempo que los alumnos habían tenido para copiar lo que había escrito en la pizarra, Jorge pidió al alumno que había resuelto el problema al inicio utilizando la representación icónica que volviese a explicar su estrategia. El alumno volvió a salir a la pizarra y lo volvió a explicar igual que antes.

TANCAMENT

Jorge cerró la sesión con el siguiente discurso:

Jorge: A ver, lo que hemos hecho hasta ahora, todo este tipo de problemas, el hecho de poder asignar unos símbolos, ¿verdad? a este problema [*señalando el enunciado icónico del problema que habían resuelto durante la sesión*]. Este problema puede ser un tíquet que yo cojo del suelo y en el tíquet veo que hay un total, pero no sé los precios de los productos, ¿verdad? Luego cojo otro tíquet y tengo más información, y lo que estamos haciendo con esto es modelizar este problema. Esto es un problema real, que nos puede pasar, estamos, ¿verdad? en un restaurante y queremos saber el precio de lo que vale un producto y no tengo suficiente información. Lo que se llama hacer este, este tipo de problemas en matemáticas se le llama modelización. Modelización, ¿eh? ¿por qué? Porque estamos cogiendo algo real, lo estamos transformando en un lenguaje simbólico, ¿vale? en un lenguaje de símbolos y después se convierte en un lenguaje algebraico, ¿verdad? que esas condiciones que yo hablo, que digo que dos camisetas más una pelota valen 165 lo puedo escribir, lo puedo expresar de una manera simbólica, o con símbolos, o con álgebra, y eso lo puedo tratar después de una manera gráfica, incluso, ¿no? Esto de aquí [*señalando a la primera condición representada icónicamente*] hemos descubierto que es una gráfica, ¿verdad? ¿Por qué es una gráfica? Porque todos los posibles precios de estas combinaciones de precios que tengo aquí tienen una forma de recta. ¿Sí? Y esta es otra [*señalando la segunda condición*], y donde se encuentran... ¿veis? y hemos pasado de un problema que es, totalmente de la vida cotidiana, hemos modelizado, hemos hecho un modelo que podemos estudiar matemáticamente, ¿lo véis? Podemos analizarlo y estudiarlo matemáticamente. Lo podríamos ver por lógica, como empezamos, ¿no? empezamos haciendo una manera de ir haciendo agrupaciones, ¿verdad? diciendo que esto se parece a esto y por tanto deduzco lo otro, una manera de verlo, y hemos pasado a que eso lo podemos transformar en un problema, que lo podemos analizar matemáticamente, con gráficos, con tablas, con puntos y con álgebra ¿eh? Y esto se le llama modelización.

[5] - Consciencia del propósito ↑
Conexión entre representaciones ↑
Conocimiento explícito del tema ↑

En su discurso de cierre de la tarea, Jorge relaciona las diferentes representaciones que han estado utilizando para resolver el problema y explicando también que aquello que están haciendo forma parte del proceso de modelización.

14.5 Profesora 3: Mónica

Número de sesiones: 2
Fechas: 29/01/2015 & 30/01/2015
Otros factores de contexto: Mónica dedicó la última parte de la primera sesión y la primera

parte de la segunda sesión que vamos a analizar para implementar la Tarea 5.

INTRODUCCIÓN - Sesión 1

Mónica eligió un problema en el que se podía ver una imagen como la de la Figura 14.8. Empezó la clase explicando el enunciado (les ha enviado el archivo a los alumnos pero no les dejó leerlo antes de explicarlo). En el problema se les pedía a los alumnos que sustituyesen los coeficientes de la primera ecuación por tres números pares consecutivos y los de la segunda ecuación por tres números impares consecutivos. Después debían resolver el sistema.

$$\square x + \square y = \square$$
$$\square x + \square y = \square$$

Figura 14.8: Enunciado del problema elegido por Mónica

Para explicarles el problema, Mónica centró la atención en explicarles lo que significaban las palabras *consecutivos, coeficientes*, y también tiene que aclarar lo que quiere decir *impar*, porque un alumno decía que no sabía lo que quería decir esa palabra en catalán (es extrangero). Finalmente eligen poner los números 2, 4 y 6 para la primera ecuación y 3, 5 y 7 para la segunda condición.

[5] - Consciencia del propósito ↓

Mónica decide usar un problema que, tal y como estaba diseñado, se podría haber usado para realizar práctica productiva de resolución de sistemas de ecuaciones y, o bien decide no implementarlo tal y como dice el enunciado, o bien no es consciente de la riqueza que podría tener este problema.

La cuestión es que, como veremos más adelante, ella quiere usar este problema con otra finalidad. Querrá conectar diferentes representaciones. Ahora bien, en vez de elegir un enunciado difícil como el de este problema, podría haber escrito directamente un sistema de ecuaciones cualquiera en la pizarra, y la implementación podría haber sido la misma.

DESARROLLO - Sesión 1

M06 0451 Una vez habían planteado el problema y elegido los coeficientes que usarían para resolverlo, varios alumnos empezaron a preguntarle a Mónica qué era lo que había que hacer en ese problema. O bien no tenían claro qué quería decir resolver un sistema de ecuaciones, o quizá el hecho de que Mónica no les dejase leer el enunciado antes de empezar a explicárselo. Ante estas preguntas, Mónica centró su discurso en explicar qué significaba resolver un sistema de ecuaciones:

Mónica: ¿Qué es resolver? Saber lo que vale "x" y saber los que vale "y".

Carolina: ¡Pero si ya lo pone!

Mónica: ¿Dónde lo pone?

Estela: No, esto. Porque "2x" y "4y" te va a dar 6. Y es "x", e "y".

Carolina: "y" es igual a 7 menos "3x"

[Están hablando muchos alumnos a la vez. Se han transcrito las voces que destacan en el audio, que son las que Mónica va escuchando antes de intervenir]

Clara: Imagínate que la "x" es 1, pues "2x" serían dos unos.

Estela: ¡Es lo mismo que los soldados!

Mónica: Sí, es lo mismo que los soldados.

Clara: "x" es el precio del soldado.

M06 0536 Los alumnos siguieron hablando unos momentos más entre ellos, de forma desordenada y Mónica les dejó para que se aclarasen entre ellos cuál era la demanda de la tarea que estaban haciendo.

Una vez que Mónica creyó que la demanda ya estaba clara, empezó a preguntar por las estrategias que podrían usar para resolverla.

Mónica: Vale. ¿Qué maneras tenéis de resolverlo? ¿Qué estrategia vas a usar, Emma? Mira, puedes hacer como hacíamos con los soldaditos, que ibamos haciendo grupos... Podemos hacer esa. Aunque no sé si nos saldrá, porque ¿recordais que cuando eran así decimales era un poco difícil resolverlo? Bueno, podéis usarlo, podéis usarlo si queréis. ¿Qué más podemos hacer Gerard?

[5] - Conexiones entre procedimientos ↑
Conexiones entre representaciones ↑
Consciencia del propósito ↑

Mónica conecta los procedimientos que habían aprendido a hacer con los problemas de "pizzas y ensaladas" con el problema que están haciendo en ese momento, que está expresado en lenguaje algebraico. Los alumnos parecen no dudar de que podrían transferir los métodos aprendidos a este nuevo problema. Pero Mónica no quiere que los alumnos usen esas estrategias, por eso sigue preguntando.

Gerard: Podemos hacer una tabla y los dos números que sean iguales, pues...

Mónica: Podemos hacer una tabla, y los dos números que sean iguales...

Carolina: Pero una tabla ¿de qué?

Mónica: ¿Una tabla de qué Gerard?

[2] - Respondiendo a las ideas de los alumnos ↑
Consciencia del propósito ↑

La profesora aprovecha la oportunidad que le da Gerard para utilizar la tabla de valores para resolver el problema.

Gerard:	Una tabla como la que hemos hecho...
Carolina:	¿Pero con qué información? ¡No tenemos nada!
Mónica:	[Mónica dibuja una tabla de valores en la pizarra y escribe "x" e "y" como etiquetas en las columnas] ¿Una tabla así? Y entonces, vamos rellenando, ¿no?
Carolina:	¿Pero el qué? ¿Rellenando el qué?
Mónica:	Pero un momento, un momento. Dice Carlota, sí, es ir rellenando, pero rellenando ¿el qué? Carlota, rellenando.
Carlota:	Eh, por ejemplo, 2.
Mónica:	Primera... pregunta, ¿vale? [*escribiendo sobre la tabla de valores*]
Carlota:	En la primera, por ejemplo...
Mónica:	En la primera... esto es la primera y esto es la segunda, ¿vale? [*Mónica escribe un 1 y un 2 respectivamente en cada ecuación*]
Carlota:	Vale. Podría ser que "x" valiera 2...
Mónica:	Vale, venga va. [Mónica escribe un 2 en la primera tabla de valores].
Carlota:	... Y "y" valiera 4...
Mónica:	Si la "x" vale 2, ¿cuánto vale la "y" en la primera condición?
Carlota:	En este caso, 2 por 2, que da 4, 4 menos 6...
Mónica:	Bueno, 6 menos 4...
Carlota:	Entonces "y" es 0.5
Carolina:	¡Uih pero esto es infinito!
Mónica:	Esto es infinito, claro.

M06 0730 Algunos alumnos dijeron que se habían perdido. Así que Mónica decidió recapitular:

Mónica:	Lo que ha dicho Gerard es: una estrategia que tenemos, habíamos dicho la de hacer grupitos, Gerard ha dicho podemos hacer una tabla y los dos puntos que coincidan, esa es la solución. Entonces ha surgido la pregunta, ¿una tabla de qué? Entonces, como hemos hecho con los soldaditos, Emma, cogemos la primera condición y hacemos una tabla. Es decir, si la "x" vale 2, le voy dando valores a la "x", ¿vale? si la "x" vale 2 ¿cuánto tiene que valer la "y" para que se cumpla esta condición? [*señalando la primera ecuación*] Pues mira, 2 por 2 es 4, más 4 por "y", que no sé lo que vale, igual a 6. Entonces yo sé que para llegar a 6 [*va escribiendo en la pizarra los cálculos intermedios*], ¿cuánto me falta aquí? 2, ¿no? Esto tiene que valer 2 [*señalando el 4y*]. que "4y" tiene que valer 2. Pues, ¿cuánto tiene que valer la "y" para que valga 2? 0.5, ¿no? [*los alumnos han ido dando respuestas a las preguntas que Mónica iba planteando, y al final asienten diciendo que lo entienden*].

[2] - Consciencia del propósito ↑
Conexiones entre procedimientos ↓
Conexiones entre representaciones ↓

Mónica es plenamente consciente de que lo que quiere es enseñar a los alumnos a utilizar la tabla de valores para resolver este problema. Por eso, cuando ve que los alumnos no están siguiendo los cálculos, vuelve a repetir lo que han hecho y lo explica con más detalle. Podría haber aprovechado la oportunidad para enseñarles a los alumnos a escribir algebraicamente la relación explícita entre las dos variables. Esto hubiera facilitado el cálculo y hubiera conectado dos procedimientos, ya que, como iremos viendo a lo largo de las dos sesiones, este cálculo representa un problema para los alumnos.

M06 0831 Mónica volvió a hacer las mismas preguntas con un valor diferente de la "x", ahora sustituyó por 0 y preguntó cuál era el valor de "y" que cumplía la ecuación. Después de una pequeña discusión, llegaron a la conclusión de que "y" tenía que valer 1.5. Así, con los dos pares de coordenadas apuntados en la tabla de valores, una alumna dijo lo siguiente:

Emma: ¡Ah! Entonces con estos dos valores ya podemos hacer la recta.

Mónica: ¿Con estos dos valores ya podemos hacer la recta? Pues venga, vamos a hacer la recta.

[Hay un poco de desorden en la clase y Mónica hace callar a los alumnos. Acaba por no dibujar la recta y empezar a hablar sobre la otra condición]

[6] - Consciencia del propósito ↑
Conexión entre representaciones ↑

Mónica comienza a cumplir con su objetivo. Relacionar la representación algebraica con la tabla de valores y esta, a su vez, con la representación gráfica. Y ver como estos cambios de representaciones pueden servir para resolver problemas en este caso utilizando la representación gráfica.

Mónica: Ahora también tenemos que coger dos puntos de la otra condición. ¿Quién me da dos puntos de la otra condición? Julia, dame uno. De esta segunda condición, dame dos puntos.

Julia: Pues por ejemplo, 4.

Mónica: Si la "x" vale 4, ¿cuánto vale la "y"? [escribiendo sobre otra tabla de valores que ha dibujado para escribir los valores de la segunda ecuación]

Julia: La "y" vale... ehm...

Mónica: Si quieres voy apuntando aquí, mira. Si la "x" vale 4, pues sería 3 por 4, 12, ¿no? Más, "5y" que no sé lo que es [*va escribiendo en la pizarra los cálculos*], ¿igual a qué? a 7. ¿No? Para que esto sea 7, ¿esto cuánto tiene que valer?

[Vuelven a hablar todos los alumnos a la vez. Uno de los alumnos dice que "-1", lo que genera una pequeña discusión sobre números enteros. Una alumna dice que no entiende de dónde han salido los coeficientes del sistema y Mónica decide volver a recapitular]

Mónica: ... así que "5y" tiene que ser "-5". Vale. ¿Cuánto tiene que valer la "y" para que 5 por "y" me dé "-5"?. -1, ¿no?

[2] - Conexiones entre procedimientos ↓
Conexiones entre representaciones ↓

El camino que estaba marcando Mónica para conectar ambas representaciones se verá

-

truncado por la dificultad que tienen los alumnos para calcular una de las variables sabiendo la otra. Ante estas dificultades de nuevo vuelve a perder la oportunidad de escribir algebraicamente una relación explícita entre las dos variables.

CIERRE - Sesión 1

El timbré sonó e interrumpió la explicación de la profesora. Algunos alumnos empezaron a levantarse y otros decían que seguían sin entender los cálculos que estaban haciendo. Mónica les dijo a todos que resolviesen el problema en casa para comentarlo el próximo día y mientras algunos alumnos se marchan aclara las dudas de algunas alumnas que le hacían preguntas sobre de dónde había salido que la "y" era "-1".

INTRODUCCIÓN - Sesión 2

Mónica empezó la clase preguntándoles a los alumnos si alguien había encontrado la relación entre el problema de "los chewbacas" (Tarea 4) y el sistema descontextualizado. Los alumnos dijeron que sí en voz alta, y Mónica les preguntó si les había salido el problema. Después de asegurarse de que algunos alumnos sabían qué quería decir "resolver el sistema" (descubrir qué era "x" e "y"), Mónica decidió que unas alumnas saldrían a la pizarra para explicar el problema.

DESARROLLO - Sesión 2

Las alumnas que seleccionó (Carlota y Ana) salieron a la pizarra y enseñaron lo que habían hecho para resolver ese problema, proyectándolo en la pizarra tal y como se ve en la Figura 14.9. Decían que, a partir de los coeficientes que habían decidido en la sesión anterior, habían resuelto el sistema de ecuaciones utilizando la tabla de valores.

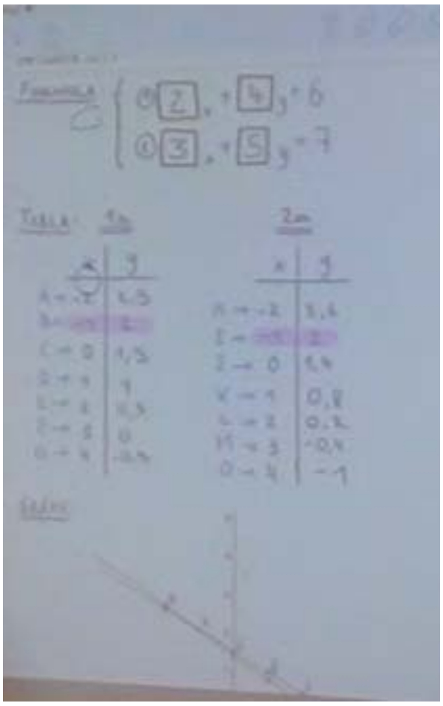


Figura 14.9: Solución del problema seleccionado por Mónica en la pizarra

-

M07 0202 Mónica intervino cuando las alumnas explicaban cómo habían usado la tabla de valores para resolver el problema. Quería hablar de las diferentes estrategias que se podían utilizar para resolver ese problema:

Mónica: O sea, la estrategia que habéis usado, ¿recordáis que podemos usar varias estrategias? La primera era la que hacíais con los Chubacas, que era haciendo... ehm... grupitos... ¿sí? ¿os acordáis de esa estrategia?

[2] - Conexión entre procedimientos ↑

La profesora quiere conectar las estrategias que habían utilizado anteriormente para resolver sistemas de ecuaciones con el uso de tablas de valores. Lo que pretende es que los alumnos sepan que ese mismo problema se podría resolver usando las estrategias que ya conocían y también otras nuevas.

Carlota y Ana: Sí.

Mónica: Es la vuestra, que os salió... natural, sin que yo os explicara nada. Después hemos visto otras estrategias que son: hacer una tabla y hacer un gráfico. Habéis decidido usar ¿qué estrategia?

[2-6] - Conexiones entre procedimientos ↑
Uso de terminología matemática ↑

Ahora conecta los procedimientos "hacer un tabla" y "dibujar un gráfico" con las estrategias icónicas y algebraicas (ya que está diciendo que todas sirven para resolver el mismo problema). Además, utiliza explícitamente estas palabras para hacerlo, mejorando en este sentido la práctica anterior de la profesora, que no solía hacer incidencia en la terminología matemática.

Carlota: La tabla, porque... porque podíamos ver la información que teníamos de esto, más fácilmente.

Ana: Sí, es más fácil hacer la tabla para nosotros, porque puedes buscar, eh... una combinación de números que se repita en vez de hacer lo de las "x" y esto, ¿como en el examen de los Chewbaccas?

Mónica: Sí.

Ana: Pues nos parecía más fácil.

Carlota: Porque aquí [*señalando la tabla de valores de la izquierda*] a la mínima que tienes dos seguidas ya ves una relación. Por ejemplo, cuando teníamos estos dos, ya vimos que era de 0.5 en 0.5. Entonces ya pudimos averiguarlo todo [*se refiere a que podía calcular los valores de la tabla sin recurrir a la expresión algebraica porque había encontrado una regla que les servía para hacerlo*].

Ana: Y aquí igual [refiriéndose a la tabla de la derecha], de 0.6 en 0.6.

M07 0309 Ahora la profesora pidió a las alumnas que explicasen cómo habían construido la tabla de valores.

Mónica: Bueno, explicadnos ahora cómo habéis construido la tabla y después el gráfico ese que habéis hecho, que no sé si os ha servido de algo o no. Nos explicáis qué habéis hecho, venga va.

Ana: Al hacer las tablas íbamos bajando, para tener como un...

Mónica: ¿Patrón?

Ana: Patrón, eso. Eh, y... cuando hicimos las dos tablas buscamos una combinación que se repitiera, y es esta, la que está en rosa [*señalando la solución del sistema, que estaba escrita y subrayada en la tabla de valores*].

Carlota: Lo hicimos primero de 4 a -2 [marcando los valores de la "x" en la tabla de valores de la izquierda].

Mónica: Vale. Quiero saber una cosa antes. ¿Puedes bajar un poquito [*refiriéndose al documento que estaba proyectado*] para que se vea el sistema, la fórmula, las dos ecuaciones? [*las alumnas lo hacen*] Vale, habéis marcado la primera y la segunda. Vale, para la primera ecuación habéis hecho la tabla de la izquierda. Vale, ¿cómo habéis encontrado la "y"? Vosotras ibais dándole valores a las "x" por lo que yo he entendido que me habéis dicho. ¿Cómo encontrabais la "y"? Para -2 habéis dicho que la "y" es 2.5. ¿Cómo lo habéis hecho?

Carlota: Primero probamos con números positivos, que nos parecía más fácil y a lo que teníamos ya dos, pues vas bajando hasta llegar a la "y". En plan, restando.

Mónica: ¿Sí? O sea, si la "x" vale 2, ¿cómo sabéis que la "y" vale 0.5, por ejemplo?

[2] - Conexión entre representaciones ↓↑

Hace preguntas para asegurarse de que las alumnas saben cómo calcular el valor de una variable en función de la otra, refiriéndose a la expresión algebraica y a la tabla. Así conecta estas dos representaciones. Pero como nunca ha hablado de la posibilidad de expresar este proceso de cálculo con una fórmula compacta, los alumnos siguen dudando de cómo hacerlo.

Carlota: ¡Ah! Porque hacíamos, que si la "x" vale 2, pues hacíamos 2 por 2, que da 4, entonces a 6, quedan, eh, 2, y hacemos 2 entre 4, y da 0.5.

Mónica: Vale, [*dirigiéndose a toda la clase*] ¿alguien no sabe cómo encontrar la "y" cuando te dan la "x"?

M07 0518 Una alumna dice que no había entendido cómo se había hecho este cálculo, así que Mónica le pidió a las dos alumnas de la pizarra que explicasen lo mismo con otro ejemplo. Las alumnas lo vuelven a explicar entre las dos, y parece que le aclararon la duda a la alumna. Pero entonces otra alumna preguntó, y explicaron todavía un tercer ejemplo.

M07 0755 Otra alumna dice que no entiende qué es lo que están haciendo y que no sabe por qué están escogiendo esos valores para la "x". Así que Mónica decide intervenir:

Mónica: [dirigiéndose a la alumna (Laura) que decía que no entendía lo que hacían] Mira, Laura, ¿tú te acuerdas de las pizzas y las ensaladas? Que teníamos una condición... dos pizzas valen... [señalando al sistema que estaba proyectado en la pizarra]. Dos pizzas más cuatro ensaladas valen seis euros. Dos pizzas más cuatro ensaladas valen seis euros [repite]. Vale, pues, si la pizza vale 1€, ¿cuánto vale la ensalada? Eso es lo que están haciendo ellas.

[2] - Decisiones sobre la secuenciación ↓
Respondiendo a las ideas de los alumnos ↑
Conexión entre representaciones ↓

Algunos alumnos siguen teniendo dificultades para entender cómo se calculan los valores que las alumnas están escribiendo en la tabla de valores. Mónica decide recurrir al contexto de las "pizzas y las ensaladas", en el que los alumnos no tuvieron dificultad para realizar estos cálculos. Y de nuevo, en este contexto, no tienen problemas para operar. Esto evidencia que la dificultad viene dada porque el problema está representado algebraicamente. Es posible que utilizando la expresión algebraica de la relación explícita entre las dos variables, estas dificultades hubieran sido menores, ya que hubiera sido una transición más suave entre el lenguaje icónico y el lenguaje algebraico.

Laura: Ah...

Mónica: Si la pizza vale... dadle valores a la "x". Si la pizza vale un euro, ¿cuánto valen las ensaladas?

Carolina: Pero eso no quiere decir que la "x" valga esto, o esto [*marcando diversos valores en la tabla de la izquierda*]. A lo mejor vale esto [*señalando otro valor*] ¿sabes?

Mónica: Puede tomar todos esos valores.

Laura: O sea, que todos estos tienen sentido.

Mónica: Todos estos cumplen...

Ana: ... la primera condición. Pero la segunda no.

Mónica: Y ahora, para la segunda, vamos a ver quién la cumple.

Ana: Y para saber cuál de estos es el que lo cumple...

Laura: [*interrumpiendo a Ana*] Pero las dos "x" tienen que valer lo mismo.

Ana: Claro, has de saber qué combinación de números de este, este... [*señalando las tablas de valores*] cualquier combinación que la "x" y la "y" valgan lo mismo. La "x" de aquí y aquí. Para saberlo, haces otra tabla con la segunda condición, y toda esta tabla [*señalando la tabla de la derecha*] cumple la segunda condición. Todo esto, si sumas, todas sirven.

Mónica: Ahora hay que buscar los que coinciden.

M07 0950 Mónica dijo que si tenían más dudas, que les preguntasen a las alumnas que estaban en la pizarra. Y eso hacen los alumnos, a partir de ese momento, hablaron los alumnos entre ellos y eran las alumnas las que dirigían la clase.

M07 1109 Cuando los alumnos dejaron de hacer preguntas, Mónica volvió a intervenir:

Mónica: ¿Sabemos hacer todos las tablas? ¿Sabríais cómo hacer una tabla? ¿Para cualquier sistema? Bueno, para cualquier... uhm... cuando digo sistema me entendéis, ¿verdad?

[5] - Uso de terminología matemática ↓

Parece que la profesora no hubiera querido decir "sistema". Esto es una evidencia más de hasta qué punto Mónica intenta huir de la terminología matemática para comunicarse con los alumnos.

Algunos alumnos: Sí... ¿condición?

Mónica: Para cualquier par de condiciones. ¿Sí? Una condición sería lo que sería una fórmula sola, una ecuación, y las dos juntas, si se tienen que cumplir a la vez, a eso es a lo que llamo sistema. ¿Vale? A varias condiciones.

[Las alumnas intentan continuar pero Mónica las interrumpe]

Un momento chicas. Con la tabla, con esta tabla que habéis hecho, ¿ya véis la solución del... del sistema?

Carolina: Sí, hemos marcado las que eran en común. Bueno, las que eran en común de entre los números que elegimos. En plan, a lo mejor si lo hubiéramos hecho hasta 10, a lo mejor hubieran habido más. ¿Sabes?

Mónica: Vale. Creéis... [*dirigiéndose a la clase*]. A lo que ha dicho Carolina. Carolina dice: si hubiéramos hecho más valores, a lo mejor nos hubieran salido más puntos. ¿Es cierto?

[5] - Respondiendo a las ideas de los alumnos ↑
Consciencia del propósito ↑
Conexión entre representaciones ↑

Mónica, aprovechando la intervención de una alumna, hace la pregunta adecuada para que los alumnos tengan que conectar la representación gráfica con la tabla de valores. Los alumnos ahora tienen la oportunidad de utilizar la representación gráfica para resolver un sistema.

Algunos alumnos: Sí.

Mónica: ¿Estáis seguros?

Algunos alumnos: Sí... no....

Mónica: ¿Por qué? No podéis cambiar de opinión si no sabéis...

Carolina: Porque es como la multiplicación, hay veces que coinciden, por ejemplo, 5 por 5, 25, 5 por 6, 30.... también coincide...

Mónica: [*dirigiéndose a la clase*] ¿Podría haber más de una solución? A ver, quiero, sí... [*algunos alumnos intervienen de forma desordenada*]. Mira, sí, ella dice que podría ser, Carolina también dice que podría ser... Vamos a ver, quiero oir a Estela. ¿Podría o no podría ser?

Estela: Si tú no supieras que la "g" era 4 y -0.5, tu igualmente si coges dos puntos y haces las dos líneas...

Mónica: Sí...

Estela: ... ya ves el punto de encuentro y puedes poner las coordenadas...

Mónica: Sí.

Estela: Entonces...

Mónica: Pero la pregunta es ¿podría haber más de una solución? ¿Jenny?

Ana: ¡Ah! ¡no! [*Mónica señala a Ana para que todos la escuchen*] Porque las líneas no son para... no son paralelas, o sea, se van a cruzar. O sea, solo va a haber un punto de encuentro.

Mónica: ¡Ah! solo va a haber un punto de encuentro.

M07 1330 La profesora había oído un comentario de una alumna, Raquel, que le llamó la atención, y decidió intervenir para que todos la escuchasen:

Mónica: Mira lo que dice Raquel, a ver si es verdad.

Raquel: Que si fueran, si fueran, eh... si fueran paralelas las dos irían, en este caso, de 0.5 en 0.5, o de 2 en 2...

Mónica: ¿Sí? Si fueran paralelas las dos rectas serían... de 0.5 en 0.5 o de 2 en 2.

Laura: Sí, porque serían proporcionales.

Mónica: ¿Sí? Si fueran paralelas, ¿crecerían de la misma manera?

Emma:	Si fuesen paralelas, claro.
Carolina:	Y nunca se cruzarían, porque las paralelas...
Mónica:	Ah...
Carolina:	... nunca se cruzan.
Mónica:	¡Nunca se cruzarían!
Ana:	Pero si fuera una encima de la otra, sí.
Carolina:	Pero entonces no sería paralelo
Mónica:	Bueno, sería una encima de la otra... sería la misma recta. Vale, y entonces, Carlota, ya que ha salido esto, si fuera un sistema, yo hicera la gráf... yo hiciera el gráfico, y me salieran paralelas, a este sistema, ¿qué le pasaría? Jenny.
Jenny:	Que está mal.
Mónica:	Que está mal, ¿qué quiere decir que está mal? ¿Cuál es la solución?
Javi:	Cuando se junten.
Mónica:	Pero si son paralelas... ¿se juntan Javi?
Carlota:	Que no hay solución.
Mónica:	¡Ah! ¡no hay solución! ¡no hay solución! Correcto. Si son paralelas, no hay solución. Nunca se cruzan.

M07 1443 Cuando Mónica había dado por zanjada la discusión, una alumna levanta la mano para participar.

Jenny:	Antes han dicho que era más fácil hacerlo con la tabla que con el gráfico y yo creo que no es verdad, porque si lo haces con la tabla hay muchos decimales y es infinito.
Mónica:	¡Muy bien Jenny! O sea, hay veces que no vamos a encontrar finalmente con la tabla una solución. A lo mejor estamos probando "x" que no son la solución, con lo cual no me sale un par de valores que son los correctos. Ahora, ¿con la gráfica lo vamos a ver? Claro, aunque sean con decimales, con el gráfico voy a ver enseguida la solución porque es el único punto donde se, donde se cortan.

[6] - Consciencia del propósito ↑
Conexiones entre procedimientos ↑
Conexiones entre representaciones ↑

La profesora usa la discusión anterior para acabar concluyendo que el gráfico puede ser útil en algunas ocasiones para resolver sistemas de ecuaciones. Les dice a los alumnos que en el caso de que con la tabla de valores sea difícil ver la solución, el gráfico siempre nos va a permitir ver dónde está la intersección. Lo que no dice es que si en la tabla de valores fuera difícil ver la solución porque tiene muchos decimales, entonces al utilizar el gráfico nos pasaría lo mismo, lo que obtendríamos sería una solución aproximada.

M07 1517 Al acabar esta explicación un alumno preguntó qué pasaría si los coeficientes del sistema fueran diferentes. En realidad, eso era lo que decía el problema que tenían que hacer. Cuando Mónica les explicó al resto de alumnos lo que estaba preguntando su compañero, para hacer referencia a los coeficientes del sistema utiliza el símil del número de pizzas y el número de ensaladas. Finalmente Mónica decidió que no era aquello lo que le interesaba hacer con el problema en ese momento, que quería seguir resolviendo el problema que habían planteado el día anterior. Solo le pidió a ese alumno que investigase en casa lo que acababa de decir, y que se lo viniese a explicar el próximo día. Por último les dijo a los alumnos que lo que pasaría es que encontrarían una solución diferente dependiendo de los coeficientes.

Consciencia del propósito ↓
Respondiendo a las ideas de los alumnos ↓

Este alumno había leído el enunciado, y estaba interesado en hacer el problema tal y cómo estaba descrito en él. Mónica podría haber aprovechado el problema como práctica productiva, pidiendo que todos los alumnos lo resolviesen y poniéndolos de acuerdo para utilizar diferentes números, por ejemplo.

M07 1730 Ahora las alumnas que estaban en la pizarra explicaron cómo habían utilizado el gráfico para resolver el problema. Dijeron que habían escrito en Geogebra todos los puntos de la tabla de valores y habían visto como las dos rectas se cruzaban en la misma solución que habían obtenido con la tabla. Finalmente, un alumno intervino diciendo que dibujando solo dos puntos ya hubiera sido suficiente.

M07 1840 Mónica dijo que, ahora que habían visto diversas estrategias para resolver sistemas, quería que los alumnos le dijesen de qué maneras se podía representar una condición.

Mónica: ¿De qué manera podemos representar una condición?
Carlota: ¿Con fórmulas?
Mónica: Con fórmulas...
Carlota: Tablas...
Martas: Tablas...
Carlota: Gráficos...
Mónica: Gráficos...
Estela: ¡Ecuaciones!
Emma: Y... aih... lo del comienzo... ¡verbal!
Mónica: Verbal.

[5] - Consciencia del propósito ↑
Uso de terminología matemática ↑
Conexiones entre representaciones ↑

Finalmente Mónica decide explicitar las conexiones entre representaciones que habían estado haciendo.

M07 1859 Mientras esta conversación tenía lugar, las alumnas que todavía estaban en la pizarra fueron apuntando las palabras: "fórmula, tabla, gráfico y verbal". De repente, Gerard volvió a intervenir. Era el alumno que antes había querido cambiar los coeficientes del sistema para saber cómo esto afectaba a las soluciones.

Gerard: Lo he vuelto a hacer y sale la misma solución.
Mónica: ¿Qué?

-

Gerard:	Sale la misma solución.
Mónica:	¿Sale la misma solución?
Gerard:	Sí, sale la misma solución agrandando los números da igual.
Mónica:	¿Sí? Vale. ¿Y luego me puedes explicar por qué crees que pasará eso?

Consciencia del propósito ↓
Respondiendo a las ideas de los alumnos ↓

Vuelve a intervenir el alumno que había leído el enunciado, y además está diciendo la respuesta correctamente. Mónica quería cambiar de tarea y decidió no continuar con el razonamiento de Gerard.

CIERRE - Sesión 2

Sin hacer más comentarios, Mónica se giró hacia las alumnas que estaban en la pizarra y dijo que ya habían recapitulado todas las maneras en las que se podía representar una condición. En ese momento les dijo a los alumnos que iban a empezar a hacer una actividad nueva, que no pertenece a los datos de esta investigación.

--- QUINTA PARTE ---
CONCLUSIONES

15. Resolver problemas para aprender álgebra

En este apartado veremos las conclusiones referidas al diseño de la secuencia, partiendo de nuestra concepción del álgebra escolar y llegando a ver qué resultados hemos obtenido sobre el aprendizaje de los alumnos.

15.1 La competencia algebraica

Recordemos que partimos de Kaput (2000) para construir nuestra concepción de álgebra escolar. Hemos caracterizado esta concepción según las siguientes dimensiones:

1. Generalización y formalización
2. Representación de estructuras abstractas
3. Estudio de relaciones y funciones
4. Modelización

A partir del reconocimiento de esta multidimensionalidad, la hemos formulado en términos de competencias (capítulo 9. p. 71). Se pueden reconocer estas habilidades dentro de una de las agrupaciones de Niss (2011, p. 51) para las competencias: "*to deal with mathematical language and tools*". Que las alumnas desarrollen las competencias de este grupo será fundamental para que puedan construir el lenguaje algebraico en todas sus dimensiones y a su vez, que construyan el lenguaje algebraico será fundamental para el desarrollo de estas competencias.

Otro aspecto que cabe destacar de la multidimensionalidad que hemos querido evidenciar en el aprendizaje del álgebra, es el orden que hemos escogido para su formulación. Siempre que diseñamos un proceso de enseñanza-aprendizaje tenemos que determinar una secuencia. Esto se da con un carácter más general cuando se secuencia un curso completo o incluso una etapa educativa, y con un carácter más específico cuando lo que se secuencia es solo una unidad didáctica o una tarea concreta. Entendemos que el desarrollo de la competencia algebraica exige una determinada secuenciación. Por eso el orden que hemos seguido a la hora de determinar cuáles son las habilidades que debemos desarrollar para que los alumnos construyan el álgebra no es aleatorio. Los alumnos tendrían que poseer en primer lugar habilidades propias del *Early Algebra*, es decir, el pensamiento algebraico necesario para generalizar a partir de relaciones aritméticas, describir la variación y modelizar (Kaput 2008). Solo cuando el alumno tiene una cierta competencia en estos aspectos, está preparado para empezar a utilizar símbolos para expresar estos pensamientos. De la misma forma, para que un alumno pueda comprender el proceso de resolución de ecuaciones, debe en primer lugar ser capaz de dar significado a letras y símbolos, y para ello tiene que haberlos usado para comunicar generalizaciones. Difícilmente un alumno podrá darle significado a un modelo matemático en el que necesite comprender los parámetros de una determinada función si antes no ha tenido experiencias con el lenguaje algebraico para expresar funciones. Esta secuencia de hablidades la hemos ejemplificado en el capítulo 9. pp. 71-89. Sin embargo, es importante decir que esta secuenciación no tiene por qué ser única. Podría haber otras igualmente válidas, siempre que tengan en cuenta las características del diseño que hemos señalado.

Por otro lado, y con respecto a la secuenciación de la que hablábamos, es habitual argumentar que los problemas que los alumnos pueden resolver mediante operaciones aritméticas no son buenos problemas para introducir el uso del álgebra (Puig y Cerdan, 1990). En esta investigación hemos demostrado lo contrario: hay problemas que se puedan resolver sin usar el álgebra pero que, sin embargo, dotan a los alumnos de las habilidades necesarias para desarrollar el lenguaje algebraico como se desprende del análisis realizado en el apartado 13.4 y se constata en nuestra publicación (de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016).

15.2 Relación entre la resolución de problemas y el aprendizaje del álgebra

Consideramos que el desarrollo de la competencia en resolución de problemas es un buen medio para desarrollar el aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, y de acuerdo con Arcavi (1999), la teoría constructivista del aprendizaje, sobre la cual nos hemos posicionado, puede guiar el diseño curricular. Por ello, cuando hemos diseñado para esta investigación los problemas que forman parte de las secuencias que los profesores iban a implementar en las aulas, hemos tenido en cuenta las características que nos proporciona Arcavi (1999, p. 52). De ellas, nos gustaría destacar las siguientes:

- **Los alumnos pueden usar su experiencia previa y el sentido común para avanzar en la resolución:** En el caso de la secuencia analizada, de acuerdo con de la Fuente, Deulofeu y Rowland (2016), las estrategias icónicas que van aprendiendo mientras resuelven problemas (tareas 1, 2 y 3), sirven a los alumnos para resolver problemas puramente algebraicos (tareas 4 y 5) mediante la trasferencia de aquellas estrategias al nuevo lenguaje.

- **Como los problemas se pueden resolver de más de una manera, estos permiten a las profesoras generar diálogos conducentes a conectar formas diferentes de pensar:** Los problemas están pensados para que sea fácil que diferentes alumnos piensen diferentes estrategias de resolución. Debido a esto, los problemas facilitan a los profesores generar diálogos en los que se conecten diferentes estrategias de resolución y diferentes representaciones (tablas de valores, gráficos, iconos, lenguaje algebraico…).

- **Como la respuesta a estos problemas no es siempre el resultado de una operación sino también, por ejemplo, formulaciones de argumentos o comparaciones, estos problemas permiten a los alumnos conectar conceptos o traducir representaciones entre**

-

diferentes lenguajes: Hay ejemplos como estos en todas las tareas. Por ejemplo, en la tarea 1 los profesores tienen oportunidad de pedir a los alumnos que muestren diferentes representaciones de una misma información (de la Fuente y Deulofeu, 2016, p.2)

Este diseño nos ha permitido, además, caracterizar tres destrezas heurísticas (Puig 1996, p.44) nuevas:

- Manipulación de una igualdad para obtener otras equivalentes, no necesariamente expresadas en lenguaje algebraico.

- Manipular dos igualdades no equivalentes para obtener una tercera que permita resolver un problema

- Construir una tabla de valores: en Polya (1945) ya se habla de hacer una tabla como heurístico, y en Puig (1996) se clasifica como una destreza heurística, refiriéndose ambos a construir una tabla para ordenar de una determinada manera los datos de un problema. En este caso, nos referimos al proceso concreto de, dada una igualdad (representada como sea), generar una tabla de posibles valores para las dos variables.

Estos heurísticos permiten que los alumnos construyan métodos para resolver sistemas de ecuaciones. Los alumnos utilizan las destrezas de resolución que usaban con las expresiones icónicas, así como su familiaridad con el uso de letras gracias a las unidades anteriores en las que se han implementado actividades de generalización para resolver problemas y transfieren estos aprendizajes a la resolución de sistemas de ecuaciones expresados algebraicamente (de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016).

15.3 Aprendizaje de los alumnos

Aunque hemos centrado la tesis en el estudio de las acciones del profesorado, esta investigación nos ha permitido destilar algunos resultados importantes al respecto del aprendizaje de los alumnos.

En primer lugar, hemos podido comprobar cómo los alumnos son capaces de resolver problemas que requieren pensamiento algebraico y que han sido representados icónicamente utilizando las habilidades propias del *Early Algebra* sin la necesidad de recurrir al uso del lenguaje simbólico (Espinoza, Barbé y Gálvez 2009, p.165) .

Durante la implementación de la Tarea 5, la primera en la que los alumnos se deben enfrentar a la resolución de un sistema de ecuaciones expresado usando lenguaje algebraico, podemos observar cómo los alumnos se sienten confiados con el lenguaje simbólico, a pesar de ser la primera vez que lo ven en este contexto. Recordemos que los alumnos no habían sido enseñados a resolver ecuaciones de ningún tipo anteriormente. En las clases de Ángel y Mónica la mayoría de los alumnos saben resolver el problema 2 (un problema en que se pide a los alumnos que resuelvan un sistema de ecuaciones expresado con lenguaje algebraico, equivalente al problema anterior, que estaba planteado icónicamente), y aunque en la clase de Jorge algunos alumnos no saben resolver este problema, ninguno de ellos muestra dificultades para comprender el lenguaje y discutir posteriormente con el profesor las estrategias para resolverlo. En resumen, la mayoría de los alumnos de Ángel y Mónica son capaces de transferir las estrategias de resolución de problemas icónicos a este nuevo lenguaje ya durante la resolución individual de la Tarea 5, mientras que los alumnos de Jorge son capaces de hacerlo durante la discusión en gran grupo.

Para la transición del lenguaje icónico al lenguaje algebraico se ha mostrado especialmente útil la Tarea 5. Los iconos de los que los alumnos debían calcular los precios: un "Chewbacca" y un "soldado del imperio", son difíciles de dibujar. Esto tuvo como consecuencia que en la resolución de este problema, tanto los alumnos como los profesores, tendiesen a representar los iconos de otra manera, ya fuese con unos iconos más fáciles de dibujar o bien directamente utilizando letras para representar los valores.

Cuando los alumnos resuelven sistemas de ecuaciones, ya sea representados icónicamente o algebraicamente, el método preferido por ellos es el de reducción. Esto ocurre porque los alumnos descubren cómo utilizar las destrezas heurísticas 1 y 2, de las que hemos hablado antes, para manipular ecuaciones y encontrar otras equivalentes(de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016). En el apartado 13.4.1 , al realizar el análisis, podemos ver cómo una alumna explicita el método que ella ha sistematizado para resolver sistemas de ecuaciones (A05-4005).

Otra evidencia relevante de que esta secuencia es útil para dar significado al lenguaje algebraico es que cuando los alumnos resuelven sistemas de ecuaciones expresados algebraicamente, no solamente calculan el valor de una de las variables, sino que calculan el valor de las dos variables con naturalidad y además, saben cómo comprobar si el resultado es correcto.

Podemos concluir, por tanto, que la secuencia analizada permite que los alumnos construyan sus propios métodos para resolver sistemas de ecuaciones a través de la resolución de problemas. Pero no podemos olvidar que la gestión por parte de los profesores es indisociable del aprendizaje, tal y como veremos en el capítulo siguiente.

16. Emergencia del conocimiento durante la práctica

Queremos destacar en primer lugar que la grabación continuada de sesiones ha influido sobre las actuaciones del profesarado de forma positiva, aportando especial naturalidad al análisis.

Siguiendo con las conclusiones relativas al análisis, en este capítulo veremos las razones por las cuales el marco que nos proporciona el KQ ha resultado útil para evidenciar los momentos en los cuales los profesores hacen emerger su conocimiento, lo compararemos con el MKT y explicaremos algunas características del KQ que hemos detectado al realizar el análisis.

Por otra parte, estudiaremos estas evidencias estructurándolas a través de las dimensiones del KQ y concluiremos cuál es la relación entre éstas y la enseñanza del lenguaje algebraico. Así veremos cómo uno de los puntos clave para el desarrollo de la compencia en el uso del álgebra pertenece a un código contribuyente dentro de la dimensión de Conexiones que hasta ahora no aparecía en el KQ.

16.1 Grabación intensiva de vídeos

Durante el curso 2014-15 grabamos en vídeo un gran número de clases de cuatro profesores, además de todas las reuniones del departamento de matemáticas. En total, 177 horas de grabación (ver la Tabla 11.1 en la página 95), de las que hemos seleccionado para su análisis 17 (ver la Tabla 11.2 en la página 96). La selección de los datos que hemos analizado se discute ampliamente en el 11.2 en la página 95. Esta intensidad en las grabaciones nos ha permitido:

1) Tener una perspectiva global de la intervención de cada uno de los profesores en todas las clases en las que se trataron aspectos de álgebra y poder seleccionar aquellas clases más relevantes desde el punto de vista de las dimensiones del lenguaje algebraico

2) Disponer de todos los datos del proceso que hemos llamado de diseño-implementación que se muestra en la Figura 11.1, en la página 97.

3) Realizar comparaciones entre las implementaciones de los distintos profesores sin tener que imponerles una temporización estricta para implementar las tareas acordadas.

4) Conseguir que la cámara estuviese siempre en el aula, y que tanto alumnos como profesores

se olvidasen de su existencia. Esto se evidencia cuando los profesores empiezan a encargar a los alumnos de que sean ellos los que traigan la cámara a clase con total normalidad. Es decir, la cámara se convirtió en un objeto más de la clase.

5) Disponer de un conjunto enorme de datos que se podrán aprovechar en próximas investigaciones.

En resumen, hemos podido obtener datos en un ambiente natural y podemos afirmar que en las conclusiones sobre el análisis del conocimiento del profesor que vamos a explicar a continuación, la influencia de la investigación se centra en el aprendizaje de los profesores y no en la presencia de una cámara en clase que haga que se tengan que preparar especialmente las clases que van a ser analizadas, porque no sabían cuáles iban a ser.

16.2 Discusión sobre modelos para analizar la práctica del profesor en el aula de matemáticas: MKT vs. KQ

Para realizar el análisis de las implementaciones de esta investigación hemos utilizado el marco proporcionado por el Knowledge Quartet. El KQ está pensado para observar la práctica docente. En nuestro análisis hemos podido observar que casi todos los códigos se correponden en realidad con acciones del profesor, o reacciones ante eventos. Las excepciones son algunos códigos de la dimensión de "Fundamentos". Esta idea nos ayuda a sacar a la luz lo que es distintivo del KQ con respecto a otros modelos, por ejemplo, al MKT de Ball. En el marco del KQ no es tan importante la categorización del conocimiento en sí misma como la clasificación de las situaciones en las cuales este conocimiento emerge (Rowland y otros 2008, p. 24). Pero precisamente eso es lo que el MKT puede ofrecer al KQ, una vía para categorizar y listar diferentes conocimientos que son deseables para los profesores, observados a partir de buenas prácticas. Esta lista nunca sería exhaustiva, pero podría servir como guía para cursos de formación del profesorado. Lo que aporta el MKT es precisamente un marco que ayuda a comprender la multidimensionalidad y complejidad de los conocimientos necesarios para ejercer la profesión de profesor de matemáticas.

Respecto al análisis que hemos realizado, hemos podido ver cómo los códigos contribuyentes a las dimensiones del KQ se evidencian la mayoría de las veces en grupo. Por ejemplo, podría haber un episodio contingente en el que el profesor elija un ejemplo para realizar una conexión entre dos representaciones. Y, para rizar el rizo, que lo haga secuenciando dos tareas. En este ejemplo estaríamos frente a un episodio que activa cuatro códigos contribuyentes a la vez. Centrándonos en uno de los códigos, podemos ver cómo estos nos ayudan a explicar cuestiones del proceso de enseñanza-aprendizaje orientados a la resolución de problemas, al álgebra, o al uso de uno de estos temas para aprender sobre el otro. En los siguientes apartados hemos seleccionado algunos códigos que nos han ayudado a extraer las conclusiones.

16.3 El KQ como herramienta para caracterizar las actuaciones de los profesores

Cuando los profesores entran en sus aulas, las consignas y los acuerdos a los que han llegado los tres se centran en: objetivos de aprendizaje, tareas y temporización de las secuencias. Estas decisiones se han tomado en las reuniones y están escritas en su programación.

Ahora bien, lo que no han acordado es la gestión del aula o la temporización de cada una de las tareas por separado. Por ello no es de extrañar que la gestión de los profesores sea diversa y que los profesores hayan dedicado más o menos tiempo a cada una de las tareas. Así que, teniendo en cuenta el análisis realizado en los capítulos 13. y 14. , podemos caracterizar las implementaciones de cada uno de los profesores de la siguiente manera:

- Ángel: Suele empezar a implementar las tareas dejando que los alumnos las lean y las empiecen a hacer individualmente. Luego deja un tiempo para que las discutan en pequeños grupos y por último las pone en común, momento en el que aprovecha para institucionalizar el aprendizaje, normalmente usando la voz de los alumnos. En varias ocasiones no puede concluir las sesiones porque suena el timbre marcando el final de la sesión de forma inesperada. Pide que los alumnos le entreguen todo lo que apuntan en clase para evaluarlo y por eso algunas veces no valida las cuestiones que no se han puesto en común.

- Jorge: Se asegura siempre de que los alumnos hayan tenido la oportunidad de pensar las tareas ya sea en casa o en clase antes de empezar a ponerlas en común. Cuando el tiempo que les da es en el aula, siempre lo hace dejándoles trabajar en pequeños grupos desde el principio. En ocasiones pone en común con el gran grupo algunas de las preguntas de las tareas que ha seleccionado, o bien aquellas en las que observa que muchos alumnos necesitan ayuda. Finalmente, siempre vuelve a repasar todas las preguntas una por una, validando las respuestas para lo cual usa, la mayoría de las veces, la voz de los alumnos.

- Mónica: Suele presentar las tareas directamente a través de una discusión con el gran grupo. Normalmente pide primero la opinión de los alumnos a cerca de las respuestas y, después de recoger las respuestas que dan de forma intuitiva, les deja trabajar en pequeños grupos para que justifiquen, argumenten o calculen resultados. Después de esto, vuelve a poner en común las respuestas. La mayoría de las veces valida las respuestas a las demandas de las tareas a través de discusiones en gran grupo.

En las descripciones anteriores no hemos considerado el tercer nivel de análisis (ver apartado 11.5) que es el que nos permitirá hacer una comparación entre los profesores para caracterizar los conocimientos para la enseñanza del álgebra movilizados en el aula.

En los siguientes apartados, las comparaciones entre las implementaciones de los tres profesores las haremos en referencia a la primera parte de la secuencia, es decir, a las cuatro primeras tareas (6 sesiones de Ángel y 5 de Jorge y Mónica). Articularemos las conclusiones a través de las dimensiones del KQ, aunque para la dimensión de Conexión reservaremos un capítulo aparte.

16.3.1 Fundamentos

La dimensión de Fundamentos del KQ incluye, además del conocimiento y comprensión sobre matemáticas y sobre su didáctica, las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre las condiciones en que los alumnos las aprenden mejor. En las implementaciones que hemos analizado hemos podido ver cómo los tres profesores dejan ser a los alumnos los protagonistas de su propio aprendizaje:

- No hay ningún episodio en el que sea el profesor el que resuelve las tareas.

- Los profesores hacen referencia constantemente a las intervenciones de los propios alumnos para avanzar en el aprendizaje del resto, socializando de esta manera el aprendizaje.

  Por ejemplo, Mónica tiene por costumbre recoger las ideas de los alumnos, escribirlas en la pizarra y ponerles nombre antes de resolver un problema. Cuando los alumnos le preguntan dudas a Ángel, este profesor utiliza normalmente el recurso de pedirle a otro alumno que le conteste, o que interprete la demanda que hace una tarea a otro alumno. Jorge suele hacer que los alumnos salgan a la pizarra y expliquen cómo han realizado los problemas que más le interesa resaltar.

- En general, los tres profesores gestionan el aula a través de la comunicación entre alumnos. Esto ocurre tanto cuando los alumnos trabajan formando pequeños grupos como cuando hay discusiones en gran grupo.

De acuerdo con Arcavi (2005, p.14), esta gestión del aula hace que las tareas duren más tiempo del que se planificaría con una gestión más tradicional, pero se consigue un aprendizaje más profundo. Además, este tipo de gestión también facilita que los profesores puedan establecer un contrato de aprendizaje con los alumnos en el que todos sean conscientes de que se les está demandando que su aprendizaje sea relacional en el sentido de Skemp (1978).

Las creencias de los profesores se evidencian también a través del código "Uso de terminología matemática". Por ejemplo, Mónica se resiste a explicitar vocabulario matemático específico del tema en el que están trabajando en el aula (M01-2130). Esto lo hace porque quiere usar un vocabulario que sea cercano a los alumnos. Mónica prefiere institucionalizar el nombre de las tareas para que las relacionen con las estrategias que van aprendiendo: "pizzas y ensaladas", "los chewbaccas"... para dar así a los alumnos palabras clave con un vocabulario propio de ellos que les sirvan para relacionar las tareas con las estrategias que van aprendiendo (Mason y Spence 1999, p.155). La parte negativa de esta actuación es que en las clases de Mónica no se aprecia la institucionalización del vocabulario matemático específico del tema. Ángel, en cambio, prefiere que los alumnos usen el vocabulario específico, pero siempre intenta que sean ellos los que tengan que pensar las palabras adecuadas para explicar, justificar o argumentar. Esto hace que en ocasiones las discusiones se alarguen demasiado. Jorge es el más explícito de los tres profesores en el uso de vocabulario matemático, aunque no es muy exigente con los alumnos cuando son ellos los que se comunican sin usarlo. También podría ser que Mónica (M02-1608) no quiera que los alumnos sepan el nombre específico de los conceptos que están trabajando (proporcionalidad o sistemas de ecuaciones, por ejemplo) para que las familias y profesores particulares tengan más difícil el enseñarles técnicas y procedimientos adelantándose así a lo que pasa en las clases. En Jorge (J06-2317) tenemos un ejemplo de cómo ocurre esto, aunque este profesor constantemente utiliza el vocabulario específico, se asegura de que los alumnos le entienden, pero en cambio no les exige a los alumnos que ellos lo utilicen.

Siguiendo en el ámbito de las creencias, cabe aún una conclusión más: Mónica en diversas ocasiones hace que los alumnos muestren diversas estrategias para resolver los problemas que plantea. Suele felicitar efusivamente a los alumnos que muestran ideas originales, pero nunca pide que escriban formalmente las resoluciones y cuando algún alumno lo hace de forma expontánea, no insiste que el resto se fije estas formalizaciones (Figura 13.16 p. 160). En el otro extremo, Ángel, en cambio, no incide en que los alumnos muestren diversas estrategias para resolver el problema, pero siempre les acaba pidiendo que escriban formalmente sus propias resoluciones (Figura 13.6 p. 147). En ese sentido, Jorge es más equilibrado: hace que los alumnos muestren diversas estrategias en varias ocasiones y también en varias ocasiones pide a los alumnos que escriban formalmente en la pizarra y en sus apuntes.

Los profesores evidencian el código "Identificación de errores" en diversas ocasiones, la gran mayoría de forma positiva: identifican errores de los alumnos en el uso del signo igual (M05-2113), en las concepciones sobre el significado de letras y símbolos que representan variables (A01-4142) y en los cálculos que realizan los alumnos para resolver problemas por falta de significado de las operaciones que están realizando para resolver determinados problemas (J01-3632). De la misma manera, el código "Base teórica de didáctica" sobre todo ligado a la insistencia de los profesores sobre el significado de las letras y símbolos que tienen relación con el lenguaje algebraica.

La "Consciencia del propósito" tiene algunas apariciones positivas y otras negativas. Por ejemplo, Jorge y Mónica desaprovechan muchas oportunidades para establecer formalmente la relación entre dos variables y para el uso de tablas de valores para resolver los problemas de las tareas. Parecen no ser conscientes de la relación entre el lenguaje de las funciones y los problemas que están resolviendo los alumnos, así que no los guían por este camino. Ángel, en cambio, insiste en diversas ocasiones en ayudar a los alumnos a construir estas representaciones (A01-4125, A0).

16.3.2 Transformación

De los cuatro códigos contribuyentes de esta dimensión, el que aparece de forma más significativa en el análisis realizado es "Elección de representaciones".

Por ejemplo, Jorge utiliza la representación icónica en diversas ocasiones para escribir condiciones dadas tanto por los enunciados de las tareas como para traducir a este lenguaje las condiciones que le dicen los alumnos (J04-2613). En cambio, Mónica en una ocasión decide mantener la representación verbal que una alumna le está sugiriendo consiguiendo así que la tarea que a continuación plantea suponga un reto para los alumnos y por lo tanto sea realmente un problema (M02-1000). Ángel hace que los alumnos sean siempre los que escriben las condiciones en la pizarra, así que solo en una ocasión utiliza la representación icónica (A03-3443).

Las otras evidencias del código "Elección de representaciones" surgen cuando Ángel y Jorge utilizan la tabla de valores para representar una condición. Mónica, por su parte, no muestra cómo usar la tabla de valores.

En cambio, hay tres códigos que no aparecen de forma significativa: "Elección de ejemplos", "Modelación del profesor" y "Uso de materiales para la enseñanza". Entendemos que esto es así porque la secuencia de actividades ha sido diseñada por el equipo de trabajo. Así que los ejemplos ya han sido planificados y consensuados en la planificación por lo que no son relevantes en el análisis de las implementaciones. Tampoco hay evidencias del códido "Modelización del profesor (para explicar un procedimiento)" ya que los tres profesores utilizan siempre la voz del alumno para realizar explicaciones de procedimientos, como ya hemos comentado en el apartado 16.3.1 de estas conclusiones.

16.3.3 Contingencia

Las profesoras no pueden predecir todo lo que pasará en una clase: ¿cuáles serán las respuestas de sus alumnas? ¿qué preguntas les harán? ¿se equivocarán ellas mismas dando una explicación? Por eso, en ocasiones, cuando son cogidas por sorpresa, tienen que improvisar de alguna manera. Aún así, muchas veces las profesoras pueden prever algunos aspectos de lo que podría pasar, de la misma forma que viendo el tiempo que hace ahora se podría suponer cómo estará el clima más tarde (Rowland, Twaites y Jared 2011, p.74). Estas situaciones de contingencia en las que las profesoras tienen que realizar algún tipo de improvisación se evidencian en cada sesión, aunque en una cantidad moderada. Es decir, los alumnos actúan la mayoría de las veces según lo previsto, pero aún así se generan contingencias que enriquecen el aprendizaje cuando el profesor las sabe aprovechar.

El caso de Mónica es el más rico en buenas actuaciones delante de la contingencia. Incluso parece que las provoque, haciendo preguntas muy abiertas y fuera del guión (M02-0903) establecido. Mónica se desvía de la agenda en bastantes ocasiones a raíz de las intervenciones de los alumnos para luego reconducir la sesión de nuevo a las tareas que estaban programadas. Ángel y Jorge, en cambio, son más rígidos. En sus clases hay muchas situaciones contingentes provocadas por intervenciones inesperadas de los alumnos que no aprovechan porque están centrados en mostrar cómo los alumnos usan una cierta estrategia (J06-1341) o la introducción de un concepto (A02 1250).

16.4 Las conexiones y el aprendizaje del álgebra

Es muy importante que las profesoras establezcan conexiones y que lo hagan correctamente, pero todavía es más importante que en sus implementaciones brinden a los alumnos oportunidades para conectar lo que están aprendiendo con lo que ya saben, de manera que se facilite el proceso de construcción y reconstrucción del aprendizaje. Si el ambiente de clase es de resolución de problemas y además el protagonismo lo tienen los alumnos, la habilidad para conectar y hacer que los alumnos conecten es aún más primordial, con el objetivo de que la resolución de problemas pueda servir no solo para aprender a pensar matemáticamente sino también para aprender matemáticas.

En las tareas que hemos analizado aparecen muchísimas conexiones. Los códigos contribuyentes que pertenecen a esta dimensión del KQ son, con diferencia, los que más se evidencian, seguidos de los de la dimensión de "Fundamentos".

De acuerdo con de la Fuente, Rowland y Deulofeu (2016, p. 30) una de las conclusiones capitales de esta investigación es que, cuando los profesores implementan actividades de resolución de problemas en clase, realizan conexiones entre diferentes representaciones de una información dada, ayudando así a los alumnos a construir el lenguaje algebraico. Es más, no solo usan estas conexiones sino que les brindan tareas adecuadas para que los alumnos las realicen. Esta componente del conocimiento del profesor no aparece en el Knowledge Quartet, así que proponemos la inclusión de un código llamado *conexiones entre representaciones* en la dimensión de *Conexiones* del KQ.

Jorge evidencia en varias ocasiones el código "decisiones sobre la secuenciación" para conectar la tarea que está implementando en ese momento con otra que quizá implementó durante esa misma sesión o bien en otra, y lo hace precisamente para conectar representaciones (J05-0421). Por ejemplo, durante la implementación de la tarea 4, conecta la representación algebraica del problema 2 con la icónica el problema 1, y la representación del problema 3 de esa misma tarea alternativamente con la del problema 1 y con las de las tres primeras tareas. Es decir, conecta las mismas representaciones decidiendo diferentes secuencias dependediendo de las intervenciones de los alumnos. Ángel y Mónica hacen lo mismo en múltiples ocasiones. La tarea 4 se muestra especialmente rica en cuanto a las conexiones entre las representaciones algebraica e icónica de una condición. Se observa cómo los profesores y los alumnos cambian los iconos del problema 1 (“chewbaccas” y “soldados del imperio”) por otros más fáciles de escribir o dibujar, como letras u otros iconos más sencillos. Esta tarea, por lo tanto, hizo que los profesores pudieran brindar a los alumnos muchas oportunidades para establecer conexiones y en particular conexiones entre representaciones.

Mónica realiza muchas "conexiones entre procedimientos". Como ya hemos comentado anteriormente, esta profesora suele pedir a los alumnos que muestren diversas estrategias para resolver un mismo problema. Así está usando estos problemas como trampolín para que las alumnas generen sus propias estrategias, proponiendo algunos modelos de pericia que han creado otros alumnos (Arcavi 1999, p.42), socializando así el aprendizaje de las alumnas.

Por otro lado, en el análisis de las implementaciones de Mónica se observa cómo algunos alumnos explican sus estrategias oralmente, realizando pequeñas anotaciones sobre los problemas, pero sin escribirlos de manera que luego se puedan volver a leer. Incluso podemos ver cómo una alumna dice que no ha entendido la explicación de otra alumna y lo que tiene que hacer la alumna para explicárselo de nuevo es borrar las anotaciones para explicárselo oralmente otra vez (M03-3348). De acuerdo con Mason, Burton y Stacey (1992), es importante dejar por escrito todo el proceso de resolución de problemas para poder recordar y reconstruir un momento determinado del problema, como un método para superar el bloqueo cuando el resolutor se encuentra sin saber qué hacer.

Ángel, en cambio, no hace que los alumnos se muestren entre ellos las diferentes estrategias que han usado para resolver los problemas, sino que suele elegir a algún alumno para que empiece a explicar la estrategia que ha usado y luego le pide a otro alumno que ha usado una estrategia diferente que continúe el problema desde el punto donde el primer alumno lo ha dejado. Además, es muy insistente con que los alumnos expresen sus soluciones de forma que se puedan releer más adelante (A03-3443). Algunas veces es él mismo quien escribe en la pizarra, y otras veces les pide a los alumnos que lo hagan. Este profesor aprovecha estas ocasiones para conectar explícitamente las representaciones icónica y algebraica, coherentemente con su forma de actuar al respecto del uso del lenguaje matemático, como hemos comentado anteriormente. Jorge y Mónica, por contra, dan oportunidades a los alumnos para hacer conexiones entre representaciones y también las hacen ellos mismos para ayudar a los alumnos a resolver los problemas, pero en ningún momento dicen que están usando representaciones diferentes de una misma información. Estas conexiones entre representaciones evidencian en los tres profesores el código "anticipación de la complejidad", cuando usan las representaciones conocidas por los alumnos para recordar algunas estrategias que han aprendido en ese contexto e intentan que las conecten con los nuevos problemas y de esta forma avanzar en la resolución.

Otra conexión entre representaciones que estaba implícita en los objetivos de aprendizaje de estas tareas era la relación entre la expresión algebraica que nos permite calcular el valor de una variable en función del valor de otra variable y la tabla de valores de estas variables. Siguiendo el análisis realizado, podemos ver que Ángel establece explícitamente esta conexión (A02-2644) y que a su vez conecta la representación icónica con estas dos representaciones.

17. Influencia del proceso de diseño-implementación

En este capítulo vamos a poder ver en qué medida afectó a las actuaciones de los profesores la realización de la clase conjunta que hemos descrito en el apartado 14.1 . Las evidencias las hemos obtenido de los datos correspondientes a la implementación de la Tarea 5. Veremos cómo los profesores ahora toman consciencia de algunos objetivos de aprendizaje y cómo esto les ocurre a todos, incluso al profesor que había implementado la clase conjunta.

Las conclusiones de este apartado las organizaremos según los dos códigos contribuyentes del KQ que más se han evidenciado durante la implementación de esta tarea.

17.1 Consciencia del propósito

Después de la sesión conjunta, los profesores tenían que implementar una tarea constituida por un listado de problemas. Solo tenían 1 o 2 sesiones en la temporización, así que tuvieron que seleccionar. Resultó que los tres profesores decidieron utilizar tres problemas totalmente diferentes. A pesar de esta diferencia, en el análisis se puede apreciar perfectamente cómo los tres profesores toman mayor consciencia de algunos de los propósitos de aquella secuencia.

Mónica y Jorge durante la implementación de las cuatro primeras tareas desaprovecharon diversas oportunidades para mostrar a los alumnos cómo usar tablas de valores para resolver sistemas de ecuaciones o para representar relaciones de dependencia entre variables. Después de la sesión conjunta, en cambio, sí lo hacen. Jorge, por ejemplo, hace evidente que el cambio en su discurso viene dado por la sesión conjunta en el episodio que recordaremos a continuación (J07-1122). Un alumno utiliza exactamente la misma estrategia que habían usado dos veces en las anteriores sesiones dos alumnos diferentes. Durante la primera parte de la secuencia, alumnos y profesor le habían llamado a esa estrategia "ir probando". Pero es después de la sesión conjunta cuando el profesor le dice al alumno que lo que en realidad quería decir no era "ir probando", sino que iba a usar la tabla de valores para resolver el sistema.

Mónica elige un problema que tiene un enunciado muy elaborado y lo simplifica hasta convertirlo en la resolución de un sistema de ecuaciones. Entonces dedica dos sesiones a que los alumnos usen las tablas para resolver el sistema y que expliquen cómo lo hacen.

Hay que tener en cuenta que entre la implementación de la sesión conjunta y la implementación de la siguiente tarea no hubo ninguna reunión de departamento. Otro efecto que tuvo la sesión conjunta fue que ayudó a los profesores a establecer los mismos objetivos de aprendizaje para la Tarea 5. Es decir, Jorge y Mónica, sin haberlo hablado entre ellos, se dieron cuenta de que debían trabajar la tabla de valores, tomaron consciencia de ese propósito. Por otra parte, los tres profesores evidenciaron el código "consciencia del propósito" para desplegar en el aula los mismos objetivos:

[5] Explicitar la conexión entre las diferentes representaciones de las condiciones con las que estaban trabajando los alumnos: expresión verbal, en tabla de valores, gráfica o algebraica.

[6] Utilizar gráficos para resolver sistemas de ecuaciones.

Si se tiene en cuenta que estos objetivos de aprendizaje no estaban escritos en la programación, que los profesores no se pudieron reunir para hablarlos y que los tres decidieron escoger problemas muy diferentes para desarrollarlos, se hace evidente la influencia de la sesión en la que desarrolló el *role play* de puntos y rectas.

Para desarrollar estos objetivos de aprendizaje en el aula, los profesores evidenciaron diversas veces el nuevo código del KQ "conexiones entre representaciones". En el siguiente apartado desarrollaremos esta idea.

17.2 Conexiones entre representaciones

Durante la implementación de la Tarea 5, los tres profesores evidencian el código "conexiones entre representaciones" en múltiples ocasiones, ya sea de forma implícita o explícita.

Ángel dedica toda la sesión a conectar las diferentes representaciones de una función, partiendo de la gráfica y sin decir que lo que están haciendo es trabajar sobre el concepto de función: prefiere decir que están trabajando parte del proceso de modelización. El principal cambio en el registro es que ahora pasa a tener un discurso metamatemático (A06-1215). Constantemente relaciona el *role play* con el problema que están resolviendo, queriendo darle un contexto real a lo que están haciendo.

Mónica, en cambio, y coherentemente con su forma de actuar con respecto al uso de la terminología matemática, solo explicita las diferentes representaciones de una condición al final de la sesión. Eso sí, los alumnos son capaces de decirlas todas cuando Mónica las pregunta. Durante el *role play*, el profesor les había puesto nombre a las diferentes representaciones y los alumnos parece que las habían relacionado con el trabajo que estaban haciendo en clase.

Por otra parte, esta misma profesora evidencia implícitamente este código del KQ conectando la representación icónica con la algebraica, la algebraica con la tabla de valores, y la tabla de valores con el gráfico. Se podría decir que una gran parte de la implementación de Mónica se centró en el cambio de representaciones, igual que la de Ángel, pero sin ser tan explícita.

Jorge, por su parte, aprovecha que la estrategia de resolución de un problema de un alumno para cambiar de registro su discurso y comentar al resto de clase que la estrategia que estaban usando no era algo trivial, que era un procedimiento matemático y que era importante saberlo usar. Así es como conecta la representación icónica con la algebraica, y a su vez esta con la tabla de valores. En esta conexión sucede algo interesante, que por cierto también le sucede a Mónica. El profesor, cuando plantea una ecuación del tipo $ax+by=c$, pide a los alumnos que, dado un cierto valor de "x", le digan el valor correspondiente de "y". Los alumnos muestran muchas dificultades para hacer este cálculo, y tanto en el caso de Jorge como en el de Mónica, lo acaban haciendo los profesores. Mónica encuentra una solución a este obstáculo conectando la representación icónica con la algebraica (aunque el problema no tenía nada que ver con el uso de representaciones icónicas) y consigue que los alumnos sepan cómo hacer los cálculos. Creemos que la dificultad de los alumnos estriba en el hecho de que estos dos profesores en ningún momento han conectado estas dos expresiones algebraicas:

$$ax + by = c \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{c - ax}{b}$$

Es decir, siempre habían usado problemas dentro de un contexto concreto y cercano a los alumnos para hacer los cálculos, y los profesores pensaban que para los alumnos sería más lógico partir de la expresión de la izquierda o que, en todo caso, estas dos estructuras abstractas serían cognitivamente equivalentes.

Podemos concluir pues, que los profesores realicen conexiones entre representaciones y brinden a los alumnos oportunidades para hacerlo, es crucial en el aprendizaje del álgebra.

El conjunto de conclusiones que hemos obtenido nos han llevado a realizar una serie de reflexiones que expondremos en el siguiente apartado, reflexiones que, por un lado, constituirán una conclusión general del trabajo y, por otro, darán continuidad a esta investigación en el futuro.

18. Prospectiva e implicaciones para la formación del profesorado

Esta tesis deja muchos caminos abiertos para próximas investigaciones. Por un lado, desde la idea inicial de mejorar en general la enseñanza del álgebra, en realidad, a través del proceso de embudo del que hablábamos al principio de la memoria, nos hemos quedado en el estudio de dos dimensiones del álgebra. Desde luego, por este camino queda mucho trabajo por hacer.

Por ejemplo, un análisis sistemático del proceso de diseño-implentación que hemos explicado en esta memoria, en el que se puedan estudiar tareas que desarrollen diferentes dimensiones, podría ayudar a identificar y listar cuáles son los conocimientos que debería tener un profesor para ayudar a sus alumnos a construir el lenguaje algebraico en toda su complejidad.

Por otra parte, el modelo que hemos creado se podría exportar sin duda alguna a otros temas matemáticos. El modelo de trabajo se podría resumir en:

1) Toma de consciencia de cuáles son las competencias que necesitan los alumnos para desarrollar su aprendizaje sobre ese tema.
2) Elaboración de una secuencia de aprendizaje general (un curso o una etapa), que tenga en cuenta las características del diseño de Arcavi (1999).
3) Elaboración de tareas que sirvan a los profesores para enseñar esos contenidos y habilidades.
4) Análisis de las implementaciones y detección de aquellas habilidades que los profesores necesitan para conseguir que los alumnos adquieran esas habilidades y aprendan esos contenidos.

Durante este proceso, tanto profesores como investigadores deben estar abiertos y atentos a las oportunidades pedagógicas (en sentido amplio) que se dan en las aulas. Podría darse el caso, como en esta investigación, de que sea a partir de las conexiones que hacen los alumnos que los profesores descubran la potencia de una determinada estrategia, de un procedimiento concreto o de una representación.

Y para terminar, nos gustaría indicar algunas características que se desprenden del proceso de formación del profesorado que hay implícito en esta investigación:

1. El trabajo en equipo en el diseño de tareas es fundamental para que haya reflexión

sobre los objetivos de aprendizaje y dinámicas de trabajo en el aula.

2. La vivencia conjunta, como es el caso del *role play*, ha sido mucho más efectiva que las reuniones para que el conjunto de profesores entiendan plenamente los objetivos que había planteado uno de ellos. Como en los alumnos, un aprendizaje vivencial siempre es más profundo que un aprendizaje teórico.

3. Por lo tanto, observar a otros profesores y comentar a posteriori lo que ha ocurrido, se evidencia como una técnica efectiva para que los profesores reflexionen.

4. Ahora bien, todas estas reflexiones se tienen que hacer sobre algún modelo concreto. De otra manera, se acabará hablando de otros temas que quizá también sean relevantes, pero no versan sobre el conocimiento del profesor. El KQ se ha mostrado como un buen modelo para conseguir esta reflexión.

--- FITH PART ---
CONCLUSIONS

19. Solving problems to learn algebra

In this section we will look at conclusions addressed at the design and sequence, starting from our conception of school algebra and arriving at seeing what results we have obtained on student learning

19.1 Algebraic competence

Let's keep in mind that we are starting from Kaput (2000) to construct our conception of school algebra. We have characterized this conception according to the following dimensions:

1. Generalization and formalization
2. Representation of abstract structures
3. Study of relations and functions
4. Modelization

From the acknowledging of this multidimensionality, we have formulated it in terms of competences (chapter 9. , p. 71). These abilities can be recognized in one of the groupings of Niss (2011, p. 51) of the competences: "to deal with mathematical language and tools". That the students develop the competences of this group will be fundamental in order to construct the algebraic language in all its dimensions and simultaneously, that the construct it will be fundamental for the development of these competences.

Another aspect worth mentioning about the multidimensionality in the learning of algebra, is the order that we have chosen for its formulation. Always, when we design a process of teaching and learning, we have to determine a sequence. This is more general when sequencing a complete course or even an educational period, and is more specific when the sequencing involves just one didactic unit or specific task. We understand that the development of algebraic competence demands a certain sequence. This is why the order we chose in order to determine which abilities we must develop so that students construct algebra is not random. The students should posses firstly their own abilities from *Early Algebra,* that is, the algebraic thinking necessary to generalize from arithmetic relations, describing variation and modeling (Kaput 2008). Only when the student has a certain competence in these aspects, is he ready to start using symbols to express these thoughts. Similarly, in order for a student to understand the process of equation solving, she should be firstly able to give meaning to letters and symbols and for that she must have used them to communicate generalizations. Students will hardly be able to give meaning to a mathematical model in which they need to understand the parameters of a certain function if they haven't had previous experience with algebraic language to express functions. We have exemplified this sequence of abilities in chapter 9. , pp. 72-86. However, it is important to say that this sequencing does not have to be unique. There could be others equally valid as long as they incorporate the characteristics of the design we have outlined.

On the other hand, and with respect to the sequencing we where talking about, it is usual to argue that problems which students can solve through arithmetic operations are not good problems to introduce the use of algebra (Puig and Cerdan, 1990). In this investigation we have shown the opposite: there are problems that can be used without using algebra but, nevertheless, give the students the necessary abilities to develop algebraic language as can be inferred from the analysis in section 13.4 and is included in our paper (de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016).

19.2 The relation between problem solving and learning of algebraic language

We think that the development of the problem solving competence is a good way to develop the learning of mathematics. On the other hand, agreeing with Arcav(1999), the constructivist theory of learning, on which we are positioned, can guide the design of the curriculum. This is why in this investigation, when we designed the problems that are included in the sequences that the teachers where to implement in class, we have taken into account the characteristics given by Arcavi (1999 p. 52). Of these, we would like to highlight the following:

- **Students can use their previous experience and common sense to move forward in the resolution:** In the case of the analyzed sequence, in accordance with de la Fuente, Deulofeu and Rowland (2016), the iconic strategies that the learn while the solve problems (tasks 1, 2 and 3), are useful for students in solving purely algebraic problems (tasks 4 and 5) through the transfer of those strategies to the new language.

- **As problems can be solved in more than one way, they allow teachers to generate dialogs which lead to different ways of thinking:** Problems are designed so that students will easily think of different strategies in the resolution. Because of this, the problems facilitate the generation of dialogs in which different strategies and different representations are connected (tables, graphs, icons, algebraic language...).

- **As answers to these problems are not always the result of an operation but also, for example, production of arguments or comparing, these problems allow students to connect concepts or translate representations between different languages:** There are examples like these in every task. For example in task 1, teachers have the opportunity of asking the students to show different representations of the same information (de la Fuente and Deulofeu 2016, p. 2).

This design has allowed us, furthermore, to characterize three new heuristic abilities (Puig 1996, p44):

- Manipulation of an equality to obtain another which is equivalent, not necessarily expressed in algebraic language.
- Manipulation of two non-equivalent equalities to obtain a third that can solve a problem.
- Construction of a new table of values: in Polya (1945) making a table is already mentioned as heuristic, and in Puig (1996) it is classified as an heuristic ability, both referring to constructing a table to order in a certain way the data of a problem. In this case, we refer the concrete process of, given an equality (represented in any way), generating a table of possible values for both variables.

These heuristics allow students to construct methods for solving systems of equations. Students use the solving abilities they used with iconic expressions, as well their familiarity with the use of letters thanks to the previous units in which implemented generalization activities to solve problems and transfer this learning to the resolution of systems of equations expressed algebraically (de la Fuente, Deulofeu and Rowland, 2016).

19.3 Student learning

Even though we have focused the thesis on the study of the actions of teachers, this research has enabled us to infer some important results with respect to student learning.

Firstly, we have been able to verify how students are able to solve problems which require algebraic thinking and which have been represented iconically using abilities of *Early Algebra* without needing to use symbolic language (Espinoza, Barbé and Gálvez 2009, p. 165).

During the implementation of task 5, the first in which students must face the resolution of a system of equations expressed using algebraic language, we can observe how students feel confident with the symbolic language, even though it is the first time they see it in that context. Recall that students had not been taught previously how to solve equations of any kind. In the classes of Ángel and Mónica, the majority of students know how to solve problem 2 (a problem in which they are asked to solve a system of equations expressed with algebraic language, equivalent to the previous problem, which was given iconically) and, even though in Jorge's class some students are not able to solve this problem, none of them show difficulties to understand the language and discuss later with the teacher the solving strategies. In summary, during task 5, most students in Ángel and Mónica's classes are able to transfer the strategies of iconic problem resolution to this new language, while Jorge's students are able to do it during the discussion in the large group.

For the transition from iconic to algebraic language, task 5 proved especially useful. The icons which students had to calculate where the prices: one Chewbacca and an imperial soldier are hard to draw. The consequence of this was that in solving this problem, both students and teachers tended to represents icons in other ways, using icons which were easier to draw or directly using letters to represent values.

When students solve systems of equations, both represented iconically or algebraically, the preferred method is reduction. This is because students discover how to use heuristic abilities 1 and 2, of which we talked about earlier, to manipulate equations and find other equivalent expressions (de la Fuente, Deulofeu y Rowland, 2016). In section 13.4.1 in peeforming the analysis, we can see how a student explicitly present the method she has systematized to solve systems of equations (A05-4005).

Another relevant evidence that this sequence is useful in giving meaning to algebraic language is that when students solve systems of equations expressed algebraically, they not only calculate the value of one of the variables, but the calculate the value of both variables naturally and, furthermore, they know how to check whether the result is correct.

We can therefor conclude that the analyzed sequence allows students to construct their own methods to solve systems of equations through problem solving. But we cannot forget that the role of the teachers is inseparable from learning, as we will see in the next chapter.

20. Emergence of knowledge during teaching

We want to highlight firstly that the continuous recording of sessions has had a positive influence on the teachers, providing a special ease to the analysis.

Continuing the conclusions relative to the analysis, in this chapter we will look at the reasons why the frame provided by the KQ has been useful to highlight the moments in which teachers make their knowledge emerge. We compare it with the MKT and explain some characteristics of the KQ that we have detected in making the analysis.

On the other hand we will study these evidences by structuring them through the dimensions of the KQ and concluding which is the relation between these and the the teaching of algebraic language- Thus we will see how one of the key points for the development of competence in the use of algebra belongs to a contributing code within the connections dimensions which until now was not included in the KQ.

20.1 Intensive recording of the videos

During the 2014-15 academic year we recorded a great number of classes of four teachers, as well as all the meetings of the maths department. In total, 177 hours of recording (see Tabla 11.1, p. 95), of which we have selected 17 for analysis (see Tabla 11.2, p. 96). The selection of data which we have analyzed is discussed thoroughly in 11.2 in page 95. This intense recording has allowed us to:

1) Have a global perspective of the intervention of each of the teachers in all the classes in which algebraic aspects where involved and being able to select those classes which were more relevant from the point of view of the dimensions of algebraic language.

2) Have available all the data of the process that we have called design-implementation that is

shown in Figure 11.1.

3) Make comparisons between implementations of different teachers without having to impose a strict time constraint in order to implement the agreed tasks.

4) Manage to have the camera always in class and that both students and teachers forgot its presence. This can be seen when teachers start making students in charge of bringing the camera into class in a natural way. The camera was one more object in their class.

5) Have an enormous amount of data that could be useful in subsequent investigations.

In summary, we were able to obtain data in a natural environment and can confirm that in the conclusions about the analysis of the teacher's knowledge that we will now explain, the influence of the investigation focuses on the learning of teachers and not on the presence of a camera in class which might mean that classes were prepared especially, as they did not know which ones would be analyzed.

20.2 Discussion of models to analyze the practice of the teacher in the maths class: MKT vs KQ

In order to carry out the analysis of the implementations of this investigation we have used the frame provided by the Knowledge Quartet. The KQ is designed to observe teaching in practice. En our analysis we have been able to observe that mot of the codes correspond in reality with actions of the teacher, or reactions to those events. The exceptions are some codes in the "Foundations" dimension. This idea helps us to extract what is distinctive about the KQ with respect to other models, lie the MKT of Ball. In the frame of the KQ the categorization of knowledge is not as important in itself as the classification of situations in which this knowledge emerges (Rowland *et al* 2008, p.24). But precisely this is what the MKT is can offer to the KQ, a way of categorizing and listing different knowledges that are desirable for teachers, observed in different teaching practices. This list would not be exhaustive, but could serve as a guide for teacher training courses. What MKT contributes is precisely a frame which helps to understand the multidimensionality and complexity of the knowledge required to exercise the profession of mathematics teacher.

With respect to the analysis that we have carried out, we were able to see how contributing codes to the dimensions of the KQ are present most of the times in groups. For example, there could be an episode of contingency in which the teacher chooses an example to make a connection between two representations. And, on top of that, she does it sequencing two tasks. In this example we would be witnessing an episode that activates four contributing codes at once. Focusing on one of the codes, we can see how these help us explain aspects of the process of teaching-learning oriented towards the resolution of problems, algebra, or the use of one of these to learn about the other. In the following sections we have selected some codes that have helped us extract the conclusions.

20.3 The KQ as a tool to characterize the performance of teachers

When teachers enter their classrooms, the agreements that the three have reached are focused on: learning objectives, tasks and timing of the sequences. These decisions were taken in the meetings and written in their lesson plans.

Now, what the didn't agree on is the managing of the classroom or the timing of each of the separate tasks. This is why it is not surprising that the managing by the teachers is diverse and that they spend more or less time for each task. So, bearing in mind that the analysis of chapters 13. and 14. , we can characterize the implementations of each of the teachers in the following way:

- Ángel: Usually starts implementing tasks letting the students read and start them individually. He then gives some time for discussion in small groups and finally puts the ideas in common in the large group, moment which he uses to institutionalize the learning, normally using the voice of students. In several occasions, he cannot conclude sessions because the bell unexpectedly rings marking the end of the session . He asks students ton hand in everything they write down in class to evaluate which is why he sometimes does not validate issues that where not discussed in the large group.

- Jorge: Always makes sure that students have had the chance to think about the task, be it at home or in class before discussion in the big group. When time is given in class, he always lets them work in small groups from the beginning. Occasionally questions of the tasks are tackled in the big group, sometimes in which many

-

students require help. Finally, he always goes back through the questions one by one, validating the answers for which he mostly uses student answers.

- Mónica: Usually presents tasks directly through a large group discussion. Normally she asks first the opinion of the students on the answers and after collecting the intuitive answers they give she lets them work in small groups so that they justify, argue, or calculate results. After this, she puts answers in common again. The majority of times she validates answers to the tasks through large group discussions.

In the above descriptions we haven't considered the third level of analysis (see section 11.5) which is the one that would let us make a comparison between the teachers in order to characterize the knowledge mobilized in the classroom for teaching of algebra.

In the following sections, the comparisons between the implementations of the three teachers will be made in reference to the first part of he sequence, that is, to the first four tasks (6 sessions of Ángel and 5 of Mónica and Jorge). We will articulate the conclusions through the dimensions of the KQ, although for the connections dimension we will reserve a separate chapter.

20.3.1 Foundations

The dimension of Foundations in the KQ includes, as well as knowledge and understanding of mathematics and its teaching, the beliefs about the nature of mathematics and about the conditions in which the students learn best. In the implementations that we have analyzed we have been able to see how the three teachers let the students be the protagonists of their own learning:

- There are no episodes where the teacher solves the tasks.
- The teachers make constant reference to the interventions made by the students themselves in order to further the learning of the rest, in this way socializing learning.

  For example, Mónica usually collects the ideas of the students, writes them on the board and gives them name before solving a problem. When students ask questions to Ángel, he normally asks some other student to answer, or to

-

interpret what the tasks is demanding to the other student. Jorge normally gets students out to the board to explain how they did the problems that he is most interested in highlighting.

- In general the three teachers manage the classroom through communication between students. This happens both when students work in small groups as in large group discussions.

In line with Arcavi (2005, p. 14), this managing of the classroom makes task run for a longer time than with a more traditional planning, but a deeper learning is achieved. Furthermore, this type of managing also makes it easier for the teachers to establish a learning contract with the students in which they are all aware that they are being demanded that their learning be relational in the sense of Skemp (1978).

The beliefs of the teachers are also shown through the code "use of mathematical terminology". For example, Mónica resists using specific mathematical vocabulary of the topic being worked on in the classroom (M01-2130). She does this because she wants to use a vocabulary that is close to the students. Mónica prefers institutionalizing the name of tasks so that the relate them with the strategies they learn: "pizzas and salads", "the Chewbaccas"... to give that way students keywords within their own vocabulary that allows them to relate tasks with the strategies they learn (Mason and Spence 1999, p.155). The negative consequence of this way of proceeding is that in Mónica's classes, the institutionalized vocabulary specific to mathematics is not appreciated. Ángel, on the other hand, prefers students to use the specific vocabulary, but always tries that it is them who have to think of the right words to explain, justify or argue. This sometimes makes discussions too long. Jorge is the more explicit of the three in the use of mathematical vocabulary, although he is not very demanding on students when they communicate without using it. It could also be that Mónica (M02-1608) does not want the students to know the specific names of concepts that they are working on (proportionality of systems of equations for example) so that families and private teachers find It harder to to teach them techniques and processes, skipping ahead of what goes on in class. In Jorge (J06-2317) we have an example of how this happens, although he constantly uses specific vocabulary, he makes sure that the students understand him, but he does not demand students to use it.

Following the area of beliefs, there is one more conclusion: Mónica on several occasions makes students show multiple strategies to solve problems. She congratulates effusively those students that come up with original ideas, but never asks them to write formally the solutions when students do it spontaneously. On the other extreme, Ángel does not make them show multiple strategies in solving a problem, but always makes them write out formally their own resolutions (Figure 13.16). In that sense, Jorge is more balanced: he makes students show multiple strategies in many occasions and on other several occasions he asks students to write formally on the white board and on their notes.

The teachers provide evidence for the code "Identification of errors" in multiple occasions, mostly in a positive way: the identify mistakes of the students in the use of the equal sign (M05-2113), in the conceptions about the meaning of letters and symbols that represent variables (A01-4142) and in the calculations they carry out to solve certain problems (J01-3632). Similarly, the code "theoretical foundations of didactics", especially tied to the insistence of teachers over the meaning of the letters and symbols that have relation to the algebraic language.

The "consistency of purpose" has some positive and some negative appearances. For example, Jorge and Mónica miss many chances to establish formally the relation between two variables and for the use of tables to solve problems. They don't seem to be aware of the relation between the language of functions and the problems that the students are solving, so they don't guide them through that path. Ángel, however, insists on several occasions in helping students to construct these representations (A01-4125,A0).

20.3.2 Transformation

Of the four contributive codes of this dimension, the one that appears most significantly in the analysis is "Choice of representations".

For example, Jorge uses iconic representation on several occasions both to describe given conditions by the wording of the tasks and to translate to this language the conditions given by students (J04-2613). However, Mónica one occasion decides to maintain the verbal representation of a student that is suggesting, achieving in that way that the task that comes next becomes a challenge for the students and is therefore a real problem (M02-1000). Ángel makes the students the ones that always write conditions on the board, so that only on one occasion does he use iconic representation (A03-3443).

The other evidences of the code "Choosing of representations" come up when Ángel and

Jorge make use of a table of values to represent a condition. Mónica does not show how to use a table of values.

However there are three codes that do not appear significantly: “Choosing of examples”, “Modeling by the teacher” and “Use of materials for teaching”. We understand that this is so because this activity was designed as a team, so the examples were planned ahead and so are not relevant in the analysis of the implementations. Also there is no evidence for the code “Modelization by the teacher (to explain a process)” as the three teachers always use the students' voices to explain processes as commented in section 2.3.1 of these conclusions.

20.3.3 Contingency

The teachers cannot predict everything that is going to happen in a class: What would the answers of their students? What questions would they ask? Will they get it wrong themselves when explaining? This is why sometimes, when they are caught by surprise, they have to improvise somehow. Even so, often teachers can prevent some aspects of what could happen, as we can attempt to predict the weather by looking outside of the window (Rowland, Twaites and Jared 2011, p. 74). These situations of contingency in which teachers have to improvise in some way or another, happen in every session, although moderately. Students are mostly predictable but nevertheless contingencies are generated which enrich learning when the teacher is able to profit from them.

Mónica's case is the richest in good actions in facing contingencies. It even seems she provokes them, making very open questions outside of the established script (M02-0903). Mónica deviates from the agenda on several occasions after student interventions to then re-focus the session again on the programed tasks. Ángel and Jorge, however are more rigid. In their classes there are many contingent situations, caused by unexpected interventions of students, that are not profited because they are focused on showing how students use a certain strategy (J06-1341) or the introduction of a concept (A02-1250).

20.4 Connections and the learning of algebra

It is very important that teachers establish connections and that the do it correctly. But it is more important that in their implementations they give the children chances to connect what they are learning with what they already know, in a way that the process of construction and reconstruction of learning is facilitated. If the atmosphere in class is that of problem solving and the spotlight is on the students, the ability to connect and make students connect is even more essential, with the objective that the resolution of problems can serve not only to learn to think mathematically but also to learn mathematics.

In the tasks that we have analyzed there appear many connections. The contributing codes that belong to this dimension of the KQ are, by far, the most evident, followed by those of the dimension of "Foundation".

In agreement with de la Fuente, Rowland and Deulofeu (2016, p. 30) one of the crucial conclusions of this investigation is that, when teachers implement problem solving activities in class, they make connections between different representations of a given information, helping the students to construct the algebraic language. What is more, not only do the use these connections, but they also give them adequate tasks for the students to carry out. This component of teacher's knowledge does not appear in the Knowledge Quartet, thus we propose the inclusion of a code called "connections between representations" in the dimension of "connections" of the KQ.

Jorge shows on several occasions the code "decisions about sequenciation" to connect the task he is implementing at that time with another that he might have implemented during that session or a previous one, and he does it precisely to connect representations (J05-0421). For example, during the implementation of task 4, he connects the algebraic representation of problem 2 with the iconic representation of problem 1, and the representation of problem 3 of that same task alternatively with that of problem 1 and with the first three tasks. That is, he connects the same representations deciding different sequences depending on the interventions of the students. Ángel and Mónica do the same on several occasions. Task 4 is shown to be specially rich in connections between algebraic and iconic representations of a condition. It is observed how teachers and students change the icons of problem 1 (Chewbaccas and imperial soldiers) by others easier to write or draw, like letters or other simpler icons. This task therefore allowed the teachers to give the students many opportunities to establish connections and in particular connections between representations.

Mónica makes many "connections between procedures". Like we commented previously, this teacher often asks students to show different strategies to solve the same problem. She is thus using these problems as a launchpad for the students to generate their own strategies, proposing some models of expertise that other students have created (Arcavi 1999, p. 42), thus socializing the learning of the students.

On the other hand, in the analysis of the implementations of Mónica it is observed how some students explain their strategies orally, making small annotations on the problems, but without writing them in a way which will later be readable. We can even see how a student says she has not understood the explanation of another student and what the student has to do to explain it again is rub out the annotations to explain it again orally (M03-3348). In agreement with Mason, Burton and Stacey (1992), it is important to leave a written record of the whole process of problem solving in order to remember and reconstruct in a given moment the problem, as a method to overcome the block when the problem solver doesn't know how to proceed.

Ángel, on the other hand, does not make students show each other the different strategies they have used to solve the problems, but he normally chooses a student to start explaining the strategy he has used and then he asks another that has used a different strategy to continue the problem where the other student left it. Also, he is very insistent in students expressing their solutions in a way that the can re-read them later (A03-3443). Sometimes it is he himself who writes them on the board, and other times he asks students to do it. This teacher takes these occasions to connect explicitly the iconic and algebraic representations, in accordance with his way of handling the use of mathematical language, as we commented previously. Jorge and Mónica, on the other hand, give the students opportunities to make connections between representations and they also make them themselves in order to help students to solve the problems, but they never say they are using different representations of the same information. These connections between representations give evidence among the teachers for the code "anticipation of complexity", when the use the representations known by the students to remind some strategies that they have learnt in that context and try that they connect them with the new problems and so move forward in the resolution.

Another connection between representations that is implicit in the learning objectives of these tasks was the relation between the algebraic expression that allows us to calculate the value of a variable as a function of the value of another variable and the table of values of these variables. Following the analysis, we can see that Ángel establishes this connection (A02-2664) and that he also connects the iconic representation of these two representations.

21. Effect of the process of design-implementation

In this chapter we will be able to see to what extent was the performance of the teachers affected by the participation in the conjunct class that we have described in section X. We have obtained the evidence from the data corresponding to the implementation of task 5. We will see how teachers now become aware of some of the learning outcomes and how this happens to all of them, even to the teacher that had implemented the conjunct class.

The conclusions of this section will be organized according to the contributing codes of the KQ that gave more evidences during the implementation of this task.

21.1 Awareness of the purpose

After the conjunct session, the teachers had to implement one task constituted by a set of problems. They only had 1 or 2 sessions in the timing, so they had to choose. It so happened that the three teachers decided to use three completely different problems. Despite this difference, it is very clear in the analysis how the three teachers become more aware of some of the purposes of that sequence.

During the implementation of the first four tasks, Mónica and Jorge missed some opportunities to show the students how to use the tables of values to solve systems of equations or to represent dependency relations between two variables. After the conjunct session however, they start doing it. Jorge, for example, shows clearly that his change in discourse is due to the conjunct session in the following episode (J07-1122). A student uses exactly the same strategy that two other students had used in precious sessions. During the first part of the sequence, students and teacher had called it "start trying". But it is after the conjunct session that the teacher tells the student that really he is not just "trying" but using a table of values to solve the system.

Mónica choses a problem that has a very elaborate wording and simplifies it until it becomes a system of equations problem. She then dedicates two sessions for the students to use tables to solve the system and explain how they do it.

We must bear in mind that between the implementations of the conjunct session and the implementation of the next task, there was no other departmental meeting. Another effect that the conjunct session had was that it helped teachers to establish the same learning outcomes for task 5. That is, Jorge and Mónica, without having talked among them, realized they should work on the table of values, they became aware of that purpose. On the other hand, the three teachers gave evidences of the code "awareness of purpose" to carry out in the classroom the same objectives:

> [5] Make explicit the connection between the different representations of the conditions with which the students are working: verbal expressions, tables of values, graphs or algebraic erxpression.
>
> [6] Use graphs to to solve systems of equations

If we take into account that these learning objectives were not written in the planning, that the teachers could not meet to discuss them and that the three decided to choose very different problems to develop, the effect of the session in which the *role play* of points and straight lines becomes evident.

In order to develop these learning objectives in the classroom, the teachers showed on several occasions the new code of the KQ "Connections between representations". In the next section we expand on this idea.

21.2 Connections between representations

During the implementation of task 5, the three teachers showed evidence for the code "Connections between representations" on multiple occasions, be it implicit or explicitly.

Ángel dedicates the whole session to connect the different representations of a function, starting from the graph and without saying that what he is doing is working on the concept of function: he prefers saying that they are working on part of the process of modelization. The main change is that it is now a mathematical discourse (A06-1215). He is constantly relating the *role play* with the problem they are solving, wanting to give a real context to what they are doing.

Mónica on the other hand, and consistently with her attitude in respect to the use of mathematical terminology, only explicitly states the different representations of a condition at the end of the session. The students however, are able to say them all when Mónica asks them. During the *role play*, the teacher had given name to the different representations and the students seemed to have related the with the work they were doing in class.

This same teacher gives evidence for that same code of the KQ connecting the iconic with the algebraic representation, the algebraic with the table of values, and the table of values with the graph. It could be said that a big part of Mónica's implementation was centered in the change of representations, the same as Ángel, but without being so explicit.

Jorge takes the chance given by a student's strategy in solving a problem to change his discourse and say that the strategy that they were using was not something trivial, that it was a mathematical procedure and that it was important to know how to use it. That is how he connects the iconic with the algebraic representation, and this one in turn with the table of values. Something interesting happens in this connection, which by the way also happens to Mónica. The teacher, when he sets up an equation of the type ax+by=c, asks the students to, given a certain value of "x", tell him the corresponding value of "y". The students show a lot of difficulty in making this calculation and both in Jorge's and Mónica's case, the teachers end up doing it. Mónica finds a solutions to this obstacle connecting the iconic representation with the algebraic (although the problem didn't have anything to do with the use of iconic representations) and manages to get the students to learn how to do the calculations. We think that the difficulty of the students resides in the fact that these two teachers never connected these two algebraic expressions:

$$ax + by = c \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{c - ax}{b}$$

That is, they had always used problems inside a specific context which was close to the students to do the calculations, and the teachers thought that for the students it would be more natural to start with the expression on the left or that, in any case, these two abstract structures would be cognitively equivalent.

We can conclude then, that it is crucial for the learning of algebra that the teachers make connexions between representations and give students opportunities to do so.

The set of conclusions that we have obtained have taken us to make a series of reflections that we will present in the next section, reflections which, on the one hand, will constitute a general conclusion of this thesis and, on the other, will give continuity to this investigation in the future.

22. Perspectives and implications for teacher training

This thesis leaves many paths open for future investigations. On the one hand, from the initial idea of improving in general the teaching of algebra, through the funnel process we talked about at the beginning, we have in practice remained in the study of two dimensions of algebra. Obviously down this road there is a lot of work to be done.

For example a systematic analysis of the process of design-implementation that explained in this thesis, in which tasks which develop different dimensions can be studied, could help to identify and list what knowledge a teacher should have in order to help his students to construct the algebraic language in all its complexity.

On the other hand, the model which we have created could no doubt be exported to other mathematical themes. The working model could by summarized in:

1) Awareness of which are the competences that students need to develop their learning on the topic.
2) Elaboration of a sequence of general learning (a year group or stage), that takes into account the characteristics in the design of Arcavi (1999).
3) Elaboration of tasks that are useful for the teachers to teach those contents and skills.
4) Analysis of the implementations and detection of those skills that the teachers need in order to succeed in the students acquiring of those skills and contents.

During this process, both teachers and researchers must be open and alert to the pedagogical opportunities (in its wide sense) that happen in classrooms. It could well be, like in this investigation, that it is from the connections that students make that the teachers discover the power of a certain strategy, a specific process or a representation.

To conclude, we would like to indicate some characteristics that can be learned from the process of teacher training implicit in this investigation.

1. Team work in the design of tasks is basic for there to be a reflection over the learning objectives and the working dynamics in the classrooms
2. The conjunct experience, as in the case of the *role play*, was much more effective than the meetings for the team of teachers to understand fully the objectives that one of them had set. Like with the students, an experiential learning is always deeper than a theoretical one.
3. Therefore, observing other teachers and commenting later on what happened arises as an effective technique for the teachers to reflect.
4. Now, all these reflections must be done over a concrete model. Otherwise, the focus will end up being on other possibly relevant topics, but not on the teacher's knowledge. The KQ has proven a good model to achieve this reflection.

RESUMEN | SUMMARY

23. Resumen

Este trabajo constituye una aportación a la investigación en Educación Matemática enmarcada en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. En él estudiamos cómo los profesores usan su conocimiento para ayudar a los alumnos a aprender álgebra a través de la resolución de problemas y cómo la reflexión en grupo y el trabajo en equipo ayudan a los profesores en su formación permanente.

Para profundizar en estas ideas, planteamos tres objetivos de logros consecutivos:

1. Diseñar secuencias didácticas que brinden a los alumnos oportunidades para construir el lenguaje algebraico a través de la resolución de problemas y caracterizar las tareas de estas secuencias.

2. Analizar cómo diferentes profesores implementan en el aula una misma secuencia didáctica, teniendo en cuenta que esta ha sido diseñada mediante un proceso de trabajo en equipo.

3. Identificar las características inherentes en la dinámica de trabajo en equipo que ayudan a que los profesores reflexionen sobre su práctica docente y permiten ampliar su conocimiento.

Hemos realizado esta investigación en un centro privado de Barcelona. En concreto, han participado en el estudio los cuatro profesores de matemáticas del primer ciclo de la ESO. En este centro se da la circunstancia de que en cada curso de la ESO hay tres grupos de alumnos y de que cada grupo tiene un profesor responsable diferente. Para mantener la coherencia con el proyecto educativo del centro, los profesores deben ponerse de acuerdo en las unidades didácticas y las tareas que implementarán en sus aulas. Esto no quiere decir que los tres profesores tengan que hacer exactamente lo mismo en sus clases, sino que deben tener unos objetivos de aprendizaje comunes para sus alumnos. Por otra parte, los profesores de matemáticas no usan libro de texto, así que lo que hacen los profesores es diseñar sus propias secuencias de tareas, cosa que en ocasiones hacen adaptando tareas ya existentes o bien elaborando las suyas propias.

Este equipo de profesores está de acuerdo en que el aprendizaje es un proceso en el cual el alumno tiene que tener autonomía para poder construir su propio conocimiento y que los profesores deben actuar como un guía en este proceso, brindando a los alumnos oportunidades de aprendizaje que les permitan la reflexión. Por eso en esta investigación entendemos que enseñar es todo aquello que hace el profesor con la finalidad de que los alumnos aprendan. En consonancia, creemos que los profesores deben propiciar en el aula un ambiente de resolución de problemas, y que este ambiente ayudará a los alumnos a aprender a pensar matemáticamente.

Dado que nuestra visión del conocimiento del profesor incluye saber qué enseñar y por qué hacerlo, para alcanzar el primer objetivo decidimos comenzar por acordar con el equipo de profesores nuestra visión de la enseñanza del álgebra escolar, construida a partir de la literatura de investigación sobre el tema. Además, esto iba en consonancia con un principio que adoptamos desde el inicio de esta investigación: no queríamos alterar la forma de trabajo en equipo habitual de este grupo de profesores, sino monitorizar el proceso de diseño e implementación de unidades didácticas para extraer de él buenas prácticas aplicables a la formación de profesorado. Es habitual en este equipo de profesores formarse asistiendo a cursos todos juntos para reflexionar sobre su práctica docente. Así pues, tras diversas reuniones con el departamento de matemáticas del centro, determinamos que el álgebra escolar debería ser el lenguaje necesario para generalizar, formalizar, estudiar estructuras abstractas, expresar relaciones entre variables y modelizar. Tras ello, analizamos la programación de los dos primeros cursos de la ESO para saber qué dimensiones del álgebra escolar estaban contempladas en las diferentes tareas que implementaban los profesores en el aula. Así fue como observamos los puntos débiles de esta programación y propusimos a los profesores cambiar los objetivos de algunas tareas, rediseñar algunas secuencias e incluir algunos problemas nuevos en estas programaciones. Durante el curso 2014-15 los profesores se dividieron el trabajo en pequeños equipos, realizaron los cambios que sugerimos y, después de usar la reunión semanal para compartir su trabajo con el resto del equipo, implementaron esta programación cada uno con sus alumnos.

Para nuestra investigación hemos grabado las implementaciones de todas las tareas que estaban pensadas para brindar a los alumnos la oportunidad de aprender a usar algún aspecto del lenguaje algebraico y las reuniones semanales del departamento en las que reflexionábamos sobre los cambios que se iban haciendo en la programación.

De todas estas grabaciones, finalmente seleccionamos para el análisis una secuencia de cinco tareas en la que se puede ver todo el proceso de diseño e implementación y donde se contempla enseñar diversas dimensiones del álgebra escolar. Además, durante la implementación de esta secuencia se produce una interacción entre los profesores que no se produce en todas las secuencias de tareas: en un momento dado, llevan a cabo una sesión en la que los tres profesores de ese curso comparten una sala con todos sus alumnos e implementan una tarea conjuntamente dirigida por uno de los tres profesores.

En concreto, las dos primeras tareas consisten en ver qué información podemos obtener a partir de una ecuación que relaciona dos variables y que está representada icónicamente. Por ejemplo, los profesores guían a alumnos para que estos comiencen a utilizar ecuaciones proporcionales o para que expliquen cómo usar la ecuación para calcular una variable en función de la otra. Por otra parte, los alumnos empiezan a construir tablas de valores a partir de una ecuación que relaciona dos variables. En la tercera tarea, encontramos problemas en los que disponemos de dos relaciones entre dos variables, de nuevo expresadas de forma icónica. En ellas los alumnos deben deducir el valor de cada una de las variables a partir de la información que se les ha proporcionado. Se puede ver cómo los alumnos son capaces de resolver estos problemas utilizando el lenguaje icónico, valiéndose para ello de las habilidades propias del *Early Algebra* o usando las tablas de valores que habían aprendido a construir en las dos primeras tareas. En la cuarta tarea se les presenta a los alumnos por primera vez un sistema de dos ecuaciones expresado en lenguaje algebraico, y se les pide que lo resuelvan. Podemos ver entonces cómo muchos alumnos son capaces de transferir las técnicas de cálculo que habían aprendido manipulando el lenguaje icónico a esta nueva manera de representar la relación entre dos variables.

Los profesores dirigen estas tareas en el aula de formas muy diferentes. Se puede ver cómo cada uno de ellos dedica tiempos diferentes a distintas tareas, cómo unos insisten más en que los alumnos formalicen las resoluciones de los problemas y otros en que muestren diversas estrategias de resolución al resto de la clase. Algunos profesores hacen que los alumnos trabajen más tiempo en pequeños grupos en las tareas y otros usan más la puesta en común con el gran grupo para discutir los problemas. Lo que todos comparten es que dejan que sean los alumnos los protagonistas de su propio aprendizaje y no intervienen para enseñar procedimientos concretos de resolución. Además, todos confieren mucha importancia al significado de los símbolos que van apareciendo en clase, tanto cuando deben trabajar con el lenguaje icónico como con el lenguaje algebraico. Constantemente conectan los diferentes problemas que aparecen en las tareas para dar significado a los nuevos problemas que proponen a los alumnos.

Entre la cuarta y la quinta tarea se lleva a cabo una sesión en la que todos los alumnos están en una sala con los tres profesores. En ella desarrollan un *role play* que da pie a que dos de los profesores vean cómo el profesor que dirige la actividad focaliza la atención de los alumnos en algunos aspectos concretos de la secuencia de tareas que habían estado trabajando cada uno en sus aulas. Por ejemplo, en la relación entre la representación gráfica de un sistema de ecuaciones y su tabla de valores o en cómo usar esta relación para resolver un sistema de ecuaciones.

La quinta tarea, ya después del *role play*, consiste en una lista de problemas que los profesores acordaron que serviría para cerrar la secuencia. Los profesores sólo disponían de una o dos sesiones para trabajar con esa lista, así que cada uno tendría que escoger qué problemas proponer a sus alumnos.

Así pues, la secuencia analizada está dividida en dos partes: la primera es una secuencia de tareas que tiene lugar antes de esta sesión conjunta, y la segunda es una tarea que se lleva a cabo posteriormente. Los datos primarios están constituidos por las implementaciones de las tareas de cada profesor, mientras que son datos secundarios las grabaciones de las reuniones y de la implementación de la tarea conjunta.

Hemos realizado un análisis de tres niveles. En primer lugar, después de algunos visionados de las grabaciones, hemos resumido las implementaciones de las diferentes tareas, transcribiendo aquellos episodios en los que profesores y alumnos hablaban sobre álgebra. Posteriormente, gracias a este primer nivel de análisis, identificamos cómo los profesores habían transformado los objetivos de aprendizaje que aparecían en la programación en unos objetivos más concretos directamente relacionados con las tareas que estaban implementando. Así que en el segundo nivel de análisis, clasificamos los episodios según estos objetivos de aprendizaje. Finalmente, ya en el tercer nivel de análisis, utilizamos el *Knowledge Quartet* (KQ), una herramienta que nos proporciona un lenguaje útil para reflexionar sobre la práctica docente, focalizando nuestra atención en cómo utiliza el conocimiento matemático un profesor mientras implementa tareas en el aula. El KQ identifica cuatro categorías de situaciones en las cuales el profesor hace emerger su conocimiento en el aula llamadas: fundamentos, transformación, conexión y contingencia. Estas categorías están formadas por un conjunto de códigos contribuyentes que en su mayoría se identifican con acciones que realiza el profesor.

El análisis nos ha permitido concluir que los profesores utilizan de forma natural y habitual conexiones entre diferentes representaciones de un mismo concepto u objeto matemático para dotar de significado a los símbolos algebraicos. Por ejemplo, en las tres primeras tareas los datos estaban expresados utilizando lenguaje icónico, y los profesores conectaban esta representación de la información con otras formas, como la representación en tabla de valores o la representación verbal. En general se puede observar que para que los alumnos transfieran las técnicas de resolución que van desarrollando de un lenguaje de representación a otro, los profesores establecen constantemente conexiones que facilitan este proceso.

Por eso hemos incorporado al Knowledge Quartet un código contribuyente inédito al que hemos llamado "conexiones entre representaciones" y que hemos clasificado dentro de la categoría de conexiones.

Por otra parte, hemos observado cómo después de la implementación de la sesión conjunta los profesores interiorizaron algunas cuestiones clave. Son ejemplo de ello la toma de consciencia sobre la importancia de explicitar en el aula la conexión entre representaciones que manifiesta una de las profesoras que participó del estudio, o la interiorización de la destreza heurística "hacer una tabla de valores" para resolver un problema.

Finalmente, concluimos que la dinámica de trabajo en equipo que este grupo de profesores utiliza para diseñar tareas, implementarlas en el aula y reflexionar sobre su práctica docente nos permite caracterizar buenas prácticas en la formación del profesorado. Se desprende de ello, de la misma forma que ocurre con los alumnos, que los profesores interiorizan más significativamente el conocimiento cuando este se adquiere vivencialmente. En definitiva, en este trabajo de tesis mostramos cómo la interacción entre profesores, el trabajo en equipo y la planificación pueden contribuir a mejorar la enseñanza de las matemáticas, que es el fin último de la investigación en esta área.

24. Summary

This thesis is a contribution to research in mathematics education, framed in the knowledge of the professional mathematics teacher. In it, we study how teachers use their knowledge in order to help students learn algebra through problem solving and how group reflection and team work help teachers in their constant training.

In order to gain insight into these ideas, we set out three objectives:

1. Design didactic sequences which give the students opportunities to construct the algebraic language through problem solving and characterize the tasks of these sequences.
2. Analyze how different teachers implement the same didactic sequence in the classroom, bearing in mind that it has been designed through a process of team work.
3. Identify the inherent characteristics in the group dynamics which help the teachers reflect on their practice as teachers and allow a furthering of their knowledge.

We have performed this investigation in private school in Barcelona. In particular, four maths teachers from the first years of ESO (12^{th}-14^{th} years old) have participated in the study. This is school is organized in such a way that there are three groups in each year and each one has a different teacher. To maintain the coherence with the school's learning program, the teachers must agree on each didactic unit and the tasks that they will implement in their classes. This does not mean that each one has to do exactly the same in each class, but that they must have common learning objectives for their students. On the other hand, the mathematics teachers do not use textbooks, so they design their own sequences of tasks, sometimes adapting existing tasks and sometimes elaborating their own tasks.

This team of teachers agree in that learning is a process in which the student has to have independence in order to construct his/her own knowledge and that the teachers must act as guides in this process, providing the students with learning opportunities that allow for reflection. For this reason in this investigation we understand that teaching is everything that the teacher does in order for the students to learn. Consequently, we believe that teachers should provide in the classroom an atmosphere of problem solving, and that this atmosphere will help students to learn to think mathematically.

Given that our vision of the teacher's knowledge includes knowing what to teach and why, in order to reach our first goal, we decided to start by sharing and agreeing with the team of teachers our vision of the teaching of school algebra, based on the research literature on the subject. This approach followed from a principle we adopted from the beginning of the investigation: we did not want to alter the way the teachers worked as a team, but monitor the process of design and implementation of the didactic units in order to extract from it good practices applicable to teacher training. It is regular practice for this team of teachers to receive conjunct training in order to reflect on their teaching practices. Thus, after several meetings with the maths department of the school, we determined that school algebra should be the language necessary to generalize, formalize, study abstract structures, express relations between variables and modeling. After this, we analyzed the program of the first two ESO years to know which dimensions of school algebra were contemplated in the different tasks that the teachers implemented in class. That is how we observed the weak points in this program and we proposed to the teachers changes in the objectives of some of the tasks, redesigning some sequences and including some new problems in the programs. During the 2014-2015 course, the teachers divided the work in small teams, performed the suggested changes and, after using the weekly meeting to share their work with the rest of the team, they implemented this program with their own students.

For our investigation we have video-recorded the implementations of all the tasks that were thought to provide students with an opportunity of learning to use some aspect of the algebraic language and the weekly meetings of the department in which we would reflect on the changes that were made on the program.

Of all these recordings, we finally selected for analysis a sequence of tasks in which the whole process of design and implementation can be seen and where the teaching of several dimensions of school algebra are contemplated. Furthermore, during the implementation of this sequence, an interaction between the teachers is programed that does not occur in every sequence: in a given moment, a conjunct session is carried out where the three teachers of that year share in a room and with all of the students together, implement a group task, directed by one of the three teachers.

In particular, the two first tasks consist in seeing what information we can obtain from an equation that relates two variables and that is represented iconically. For example, the teachers guide students so that they start to use proportionality equations or explain how to use the equation to calculate a variable as a function of another. Also, students start constructing tables of values from an equation that relates two variables. In the third task, we find problems in which we have two relations between two variables, again expresses iconically. In them, students must find the value of each of the variables from the given information. It can be seen how students are able to solve these problems using iconic language, using their own abilities from *Early Algebra* or using tables of values which they had learnt how to construct during the two first tasks. In the fourth task they are presented for the first time a system of two equations expressed in algebraic language, and they are asked to solve it. We can then see how many students are able to transfer the techniques they had learnt manipulating iconic language to this new way of representing a relation between two variables.

The teachers implement these tasks in the classroom in very different ways. It can be seen how each of the dedicates different amount of time to each tasks, how some insist more on students formalizing the problem resolutions and others in that the students show different strategies to the rest of the class. Some teachers make the students work longer in small groups and others tend to discuss the problems in the large group. What they all share is that the let the students be the protagonists of their own learning and they don't intervene to teach specific resolution methods. Also, they all stress the importance of the meaning of the symbols, both in the iconic and the algebraic language. They constantly connect the different problems that appear in class to give meaning to the new problems that they propose to the students.

In between the fourth and fifth task, a conjunct session is carried out where all the students are in the same room with the three teachers. In it they develop a role play that leads to two of the teachers to observe how the teacher that directs the activity focuses the student's attention to specific aspects of the sequence they had each been working in class. For example, on the relation between the graphic representation of a system of equations and the table of values, or in how to use this relation to solve a system of equations.

The fifth task, after the role play, consists in a list of problems that the teachers agreed would end the sequence. The teachers only had one or two sessions to work on this list, so each would have to choose which problems present to their students.

Thus, the analyzed sequence is divided in two parts: the first is a sequence of tasks that takes place before this conjunct session, and the second is a task that is carried out later. The primary data are the implementations of tasks by each teacher, while the secondary data are the recordings of the meetings and the implementation of the conjunct session.

We have performed a three-level analysis. In the first place, after watching some of the recordings, we have summarized the implementations of the different tasks, transcribing those episodes in which teachers and students talked about algebra. Later, thanks tho this first level of analysis, we identify how the teachers had transformed the learning objectives which appeared in the program into more concrete objective, related directly with the tasks they were implementing. Thus in the second level of analysis, we classify the episodes according to these learning objectives. Finally, in the third level of analysis, we used the Knowledge Quartet (KQ), a tool that provides a useful language to reflect on the teaching practice, focusing our attention in how the teacher uses his/her knowledge of mathematics while implementing tasks in class. The KQ identifies four categories of situations in which the teacher emerges his/her knowledge in the classroom, they are called: Foundations, Transformation, Connection and Contingency. These categories are made up of a set of contributive codes which are mostly identified with actions that the teacher performs.

The analysis has allowed us to conclude that teachers use naturally and frequently connections between different representations of the same concept or mathematical object in order to give meaning to algebraic symbols. For example, in the three first tasks, the data was expressed using iconic language, and the teachers connected this representation with others, like the table of values or oral representations. In general it can be observed that in order for the students to transfer the techniques that they develop from one representation to another, the teachers establish constantly connections that facilitate this process.

This is why we have incorporated to the Knowledge Quartet a new contributive code which we have named "connections between representations" and we have classified inside the category of connections.

Moreover, we have observed how after the implementation of the conjunct session the teachers internalized some key aspects. Examples of this are the realization of the importance of making explicit in class the connection between representations that one of the teachers manifests, or the internalization of the heuristic skill of "making a table of values" to solve a problem.

Finally we conclude that the work dynamics that this group of teachers use to design tasks, implement them in class and reflect on their teaching practices allows us to characterize good practices in teacher training. It can be seen that, like with students, teachers internalize knowledge more significantly when it is acquired experientially. In conclusion, in this thesis we

-

show how the interaction between teachers, the team work and planning can contribute to improve the teaching of mathematics which is the ultimate goal of this field of research.

ANEXOS

ANNEXO A. Análisis de la programación antes del rediseño de unidades

Con el objetivo de mejorar las Unidades Didácticas que estaban utilizando los profesores hasta antes de realizar la intervención en el centro, en primer lugar decidimos analizar las tareas que hasta el momento estaban usando los profesores de matemáticas. En este apartado describimos las tareas de la programación del Departamento de Matemáticas del curso 2012-13 (el curso anterior a la intervención), seleccionando aquellas que brindan oportunidades para construir el lenguaje algebraico con los alumnos y marcando qué dimensión o dimensiones del lenguaje algebraico se podrían trabajar con ellas. Hemos codificado las dimensiones del lenguaje algebraico de la siguiente manera:

0. Early Algebra (actividades que permiten evaluar el pensamiento algebraico de los alumnos)
1. Generalización y formalización
2. Respresentación de estructuras abstractas y cálculos con ellas
3. Estudio de relaciones y funciones
4. Modelización

<table>
<tr><th colspan="3">CURSO: 1º de ESO</th></tr>
<tr><th>Descripción de la tarea</th><th>Temporización</th><th>D[2]</th></tr>
<tr><td>

El juego del TOC - BUM

Se trata de un juego en el que se les da a los alumnos dos valores numéricos, uno al que llamaremos TOC y otro al que llamaremos BUM. El objetivo es conseguir llegar a un número concreto sumando los suficientes TOCS y BUMS.

Después de jugar un rato, los alumnos puede llegar a sustituir, por ejemplo, TOC TOC TOC por 3TOC. Así, se pueden llegar a presentar en clase expresiones algebraicas sencillas como por ejemplo 3TOC + 2BUM

Fuente: Joan Jareño
http://www.xtec.cat/~jjareno/activitats/toc_bum/intro.htm

</td><td>

1er trimestre
1 sesión

Durante la unidad en la que trabajamos la divisibilidad (en particular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo).

</td><td>2</td></tr>
</table>

[2] Dimensión o forma del razonamiento dentro de nuestra definición de álgebra escolar.

<table>
<tr>
<td>

Precios de Amazon

Se les proporcionan a los alumnos ofertas de Amazon como las siguientes:

Todas la ofertas tienen algún dato borrado, así que se trata de descubrir cuál es el valor del dato que falta. El objetivo es que los alumnos utilicen operaciones inversas para resolver este problema y que lo hagan planteando ecuaciones sencillas, del tipo ax=b.

Fuente: Dan Meyer, actividades en tres actos
https://s3.amazonaws.com/threeacts/amazon.zip

</td>
<td>

2º trimestre
3 sesiones

Durante una unidad en la que se trabaja con porcentajes.

</td>
<td>2</td>
</tr>
<tr>
<td>

Problemas de porcentajes

Estos dos problemas forman parte de una colección de problemas en los que se necesita el lenguaje algebraico para expresar el resultado en función de una cantidad desconocida.

2- EL CENTRE COMERCIAL

En un centre comercial podem aconseguir un descompte del 20%, però, al mateix temps, hem de pagar uns impostos del 15%. Que preferiries que et calculessin primer, el descompte o l'impost?

3- EL RECTANGLE

Imagineu-vos un rectangle qualsevol. Que passaria amb l'àrea d'aquest rectangle si una de les dimensions (per exemple la base) l'augmentem en un 10% i l'altre dimensió la fem disminuir en un 10%?

Fuente: Mason (1992) i Arcavi (1994, p. 26)

</td>
<td>

2º trimestre
2 sesiones

Durante la unidad en la que se trabajan los porcentajes.

</td>
<td>3</td>
</tr>
</table>

-

<table>
<tr>
<td>Geometría: fórmulas de áreas y perímetros

La demostración y el estudio de las fórmulas que nos permiten calcular el área y el perímetro de polígonos y circunferencias se usan como excusa para utilizar el lenguaje algebraico para estudiar relaciones. Esta idea estaba plasmada en la programación, pero no había ningún material específicamente diseñado para trabajar este aspecto.</td>
<td>2º trimestre
3-4 sesiones

Durante la unidad en la que se trabajan las formas geométricas. No solo se trabajan aspectos de representación y de cálculo (de áreas y perímetros), sino también el estudio de las propiedades de las figuras y se utilizan para que los alumnos tengan oportunidades de construir argumentaciones.</td>
<td>3</td>
</tr>
<tr>
<td>Geometría: cover-up

El material de esta tarea consiste en plantearse una serie de problemas donde se pide expresar una determinada magnitud en función de una algunos datos conocidos y algunos otros desconocidos.
También se plantea que estas magnitudes tengan que ser iguales a una cantidad dada, y se pretende que los alumnos manipulen las expresiones hasta llegar a ecuaciones sencillas del tipo ax=b que se pueden resolver mediante la técnica del Cover-Up (aplicando operaciones inversas).

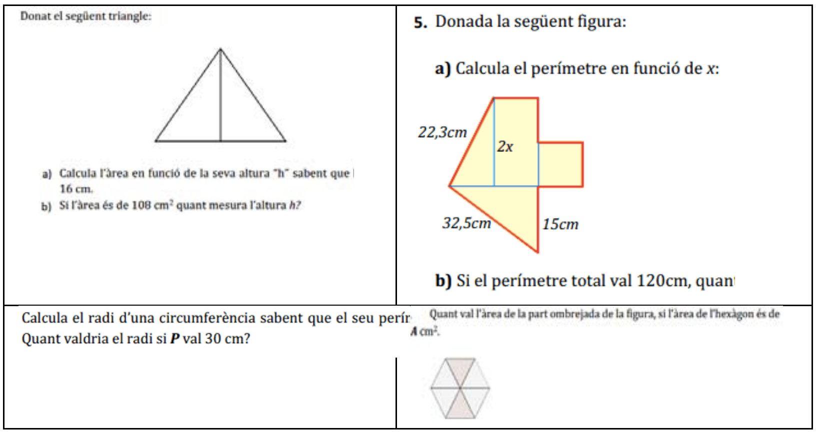

</td>
<td>3r trimestre
4 sesiones</td>
<td>2-3</td>
</tr>
</table>

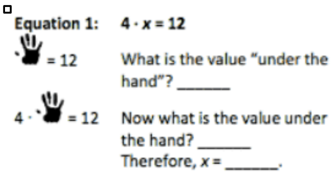
Tabla 24.1: Esquema de les unidades didácticas en las que los alumnos tenían la oportunidad aprender a utilizar el lenguaje algebraico. 1º de ESO, curso 2012-13

-

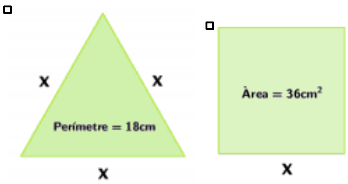
<table>
<tr><th colspan="3">CURSO: 2º de ESO</th></tr>
<tr><th>Descripción de la tarea</th><th>Temporización</th><th>D</th></tr>
<tr><td>

Cover-Up

Como recordatorio del trabajo que se había hecho en el curso anterior de introducción a la ecuación de primer grado, realizamos una tarea para formalizar esta técnica. Los primeros problemas no tienen un contexto:



El segundo bloque de problemas tiene un contexto geométrico:



Y finalmente se plantean una serie de problemas con un enunciado verbal. Por ejemplo:

1. La meva habitació és rectangular i té una superficie de 6 m^2. He mesurat una paret i fa 3m de longitud. Quant fa l'altre paret?

Fuente: Blog Punt Mat
http://puntmat.blogspot.com.es/2011/10/resolucio-dequacions-amb-cover-up.html

</td><td>

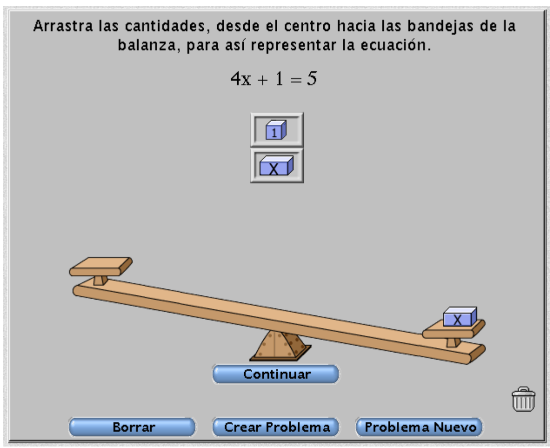
1er trimestre
1-2 sesiones

Durante la unidad en la que se introduce formalmente la ecuación de primer grado.

</td><td>2</td></tr>
<tr><td>

La balanza

Se presenta a los alumnos el siguiente applet:



y otro parecido que permite trabajar con números negativos. Los alumnos tienen que aprender a resolver ecuaciones de primer grado del tipo ax+b =

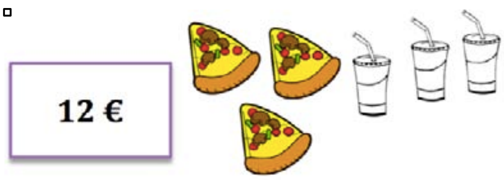
</td><td>

1er trimestre
3 sesiones

Durante la unidad en la que se introduce formalmente la ecuación de primer grado.

</td><td>2</td></tr>
</table>

-

cx +d, utilizando siempre la misma operación en los dos lados de la igualdad. Además, siempre pediremos que escriban las operaciones que hacen, tal y como nos sugiere el applet. Fuente: Blog PuntMat http://puntmat.blogspot.com.es/		
Problemas de ecuaciones Durante algunas sesiones, los alumnos resuelven problemas que están pensados para trabajar la resolución de ecuaciones de primer grado. Hay problemas de varios tipos. Desde problemas tradicionales de enunciado verbal, hasta problemas geométricos, pasando por problemas donde el objetivo es encontrar errores en resoluciones de ecuaciones o completar los pasos en la resolución que otro compañero ha hecho.	**1er trimestre** 8 sesiones Durante la unidad en la que se introduce formalmente la ecuación de primer grado.	2
Sistemas de ecuaciones Presentamos los sistemas de ecuaciones mediante un actividad sobre el precio de pizzas y bebidas. Se empieza dando el precio de un conjunto como el siguiente:  Utilizamos estos datos para intentar extraer conclusiones sobre los precios. Finalmente llegamos a la conclusión de que podemos usar tablas de valores, que podemos encontrar relaciones entre el precio de las bebidas y las pizzas, pero que no podemos calcular el precio de una bebida o una pizza. Para poder hacer ese cálculo, necesitamos una bolsa de la compra más y por tanto más condiciones. Añadiendo nuevos datos, el cálculo se puede hacer fácilmente con el método de reducción o substitución. Una vez acabado este grupo de actividades, el siguiente paso será utilizar una lista de problemas con el que los alumnos tendrán que poner en práctica lo que han aprendido. Finalmente se introduce la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones mediante un *role play*. Los alumnos se tienen que distribuir en forma de cuadrícula, asignarse coordenadas según su posición y levantarse o no de su silla si cumplen una cierta condición que depende de sus coordenadas. Como las condiciones son siempre lineales, se observa que la figura que forman cuando se levantan es una recta. Imponiendo diversas condiciones se ve	**2º trimestre** 10 sesiones Unidad didáctica sobre sistemas de ecuaciones	2-3

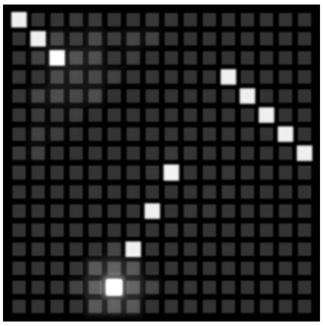
cómo resolver sistemas de ecuaciones de forma gráfica. Fuente: Blog del grup Vilatzara http://blogs.uab.cat/icematematiques/2011/09/01/benvingudes-i-benvinguts/		
El plano musical Una apliacación de internet como la de la imagen nos permite marcar unos cuantos puntos en el plano de la figura. Podríamos decir que el eje de las "x" indica el tiempo y que el eje de las "y" indica el tono de una nota que suena en el momento en el que el tiempo "pasa" por un determinado valor de "x". Esto hace sonar los puntos marcados de color blanco.  Lo que tienen que hacer los alumnos es escribir melodías que después sus compañeros tienen que copiar en su plano, pero sin verlas. Así verán que la mejor forma de codificar una melodía es utilizando la ecuación de la función que define la melodía.	**3r trimestre** 5 sesiones	3-4

Tabla 24.2: Esquema de las unidades didácticas en las que los alumnos tenían la oportunidad aprender a utilizar el lenguaje algebraico. 2º de ESO, curso 2012-13

ANNEXO B. Análisis de las programaciones de 1º y 2º de ESO (2013-14)

Teniendo en cuenta la información recogida en el APÉNDICE A, hicimos un esquema que contiene toda la referencia a todas unidades didácticas y a todas las actividades de estas, tal y como estaban programadas en el curso 2013-14 para poder mostrar a los profesores cuáles eran las dimensiones del lenguaje algebraico que teníamos contempladas en las unidades didácticas y tareas de nuestras programaciones. Esta información debía servirnos para decidir en qué teníamos que modificar las programaciones si queríamos mejorar la enseñanza del álgebra en nuestro centro escolar. La información se encuentra en las tablas siguientes, codificando las dimensiones de la siguiente manera:

0. *Early algebra*
1. Generalización y formalización
2. Estudio y cálculo de estructuras abstractas
3. Estudio de funciones y relaciones
4. Lenguaje de modelización

1º de ESO

	Título de la actividad	Dimensiones del álgebra escolar 0	1	2	3	4
Evaluación inicial	Problemas aritméticos					
	El parque acuático					
	La dieta					
	La factura					
Sistemas de numeración	El juego del 24					
	Apín Capón Zapún Amanicano					
	Divisibilidad					
	La criba de Eratóstenes					
	El juego del TOC BUM					
	Sistemas de numeración					
¿Nos repartimos el pastel?	Fracciones unitarias 1: Concepto, orden y equivalencia					
	Fracciones unitarias 2: Suma y resta					
	Fracciones unitarias 3: Multiplicación y división					
	El papiro rhind y las fracciones					

-

Proporción	¡Escoge tu descuento!					
	Precios de Amazon					
	Problemas de porcentajes					
	Problemas de escala					
	Mi habitación a escala					
El tiempo	Controlemos el tiempo					
	Videomat					
Geometría	Los Polígonos					
	Área y perímetro					
	El decímetro cúbico					
	El triángulo: bases y alturas (área)					
	El ortocentro					
	Mediatriz y circuncentro					
	Clasificación de cuadriláteros					
	Cuadriláteros. Problemas de dibujo					
	De la geometría al álgebra					

-

Números enteros	Enteros y fichas de colores 1: suma y resta					
	Enteros y fichas de colores 2: multiplicación y división					
Probabilidad	¿Cuál es la probabilidad de sacar un 5?					

-

2º de ESO

		Dimensiones del álgebra escolar				
	Título de la actividad	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
Los números enteros	Enteros y fichas de colores 1: suma y resta					
	Enteros y fichas de colores 2: multiplicación y división					
	Los husos horarios					
	Las civilizaciones y sus sistemas de numeración					
Ecuaciones de primer grado	Cover-up					
	La balanza					
	Problemas con ecuaciones					
Sistemas de ecuaciones	Pizzas y bebidas					
	Problemas con sistemas de ecuaciones					
	Role play de sistemas de ecuaciones					
	Solución gráfica de sistemas de ecuaciones					
El plano musical	Las coordenadas					
	La ecuación de la recta					
	Funciones definidas a trozos					

El señor del cero	Problemas y poemas					
	El ábaco de Gerbert					
Geometría del espacioi	El número de Euler					
	Poliedros con guisantes					
	Cálculo del volumen de prismas y pirámides					
Probabilidad	¿Cuál es la probabilidad de sacar un 5?					
	Las monedas de Buffon					

Tabla 24.3: Análisis de las programaciones del curso 2012-13 de 2º de ESO, según las dimensiones del álgebra

ANNEXO C. Análisis de las nuevas unidades didácticas de 1º y 2º de ESO

Una vez localizados los puntos débiles de la programación de matemáticas de primer ciclo con respecto a la enseñanza del lenguaje algebraico, el siguiente paso fue hacer una propuesta de cambios en los objetivos de algunas actividades o de cambios de las propias actividades, con la intención de cubrir aquellos aspectos del lenguaje algebraico que o bien no se trabajaban, o bien se trabajaban de forma residual.

En particular, queríamos promover hábitos de argumentación en la resolución de problemas que provocasen en los alumnos la necesidad de usar el lenguaje algebraico y que desde el primer curso de la ESO empezasen a ver que este lenguaje es necesario para hacer y para aprender matemáticas. En particular, de las programaciones de los cursos anteriores, creíamos necesario dar más oportunidades a los alumnos para tener la necesidad de usar el lenguaje algebraico para generalizar, conseguir que tuviesen que expresar relaciones entre magnitudes y comenzar a presentar la necesidad de modelizar matemáticamente.

Con la finalidad de respetar la manera de trabajar del Departamento de Matemáticas, en primer lugar, Jordi Deulofeu y yo sugerimos algunos cambios en la programación y convocamos una reunión de Departamento para explicar los cambios al resto de profesores. Estos cambios los sugerimos a modo de pincelada general, proponiendo cambios en las preguntas que se hacían en algunas actividades, modificaciones en algunos objetivos y sugerencias de algunas nuevas actividades que podrían resultar de interés. En esa reunión, establecimos equipos de trabajo para cada unidad didáctica, de manera que los profesores fueran los responsables de llevar a cabo los cambios en las unidades y así promover la discusión y la reflexión posterior.

Cuando los diferentes equipos habían rediseñado las unidades didácticas, durante el curso 2014-15 los profesores aprovechaban las reuniones de departamento para explicar los cambios al resto de profesores. Esas reuniones servían también para que todos pudiéramos preguntar dudas sobre las tareas y aportar nuevas ideas.

1º de ESO

	Título de la actividad	Dimensiones del álgebra escolar 0	1	2	3	4
Matemáticas en todas partes	Las Matemáticas como cultura					
	El menú					
	El juego del 24					
	El tangram					
¿Cómo cuentan los Simpson?	Apín Capón Zapún Amanicano					
	Los sistemas de numeración					
Hablemos de múltiplos, divisores y números primos	Divisibilidad					
	La espiral de los números primos					
	El resto también importa					
	La criba de Eratóstenes					
	Pares e impares					

-

Generalización	Pensamiento matemático					
	Un marco de cuadrados					
	¿Lo generalizamos todo?					
Resolución de problemas	La resolución de problemas					
	Fem Matemàtiques					
	Problemas al esprint					
	Canguret					
Repartir el pastel	Fracciones unitarias					
	El papiro Rhind y el ojo de Horus					
	En las rebajas					
	Fracciones y álgebra					
Proporción y escala	Tea spoon					
	La escala de los planos					
	Tarifas de parking					
	Rectángulos crecientes					

-

De la geometría al álgebra	Unidades, áreas y perímetros					
	Triángulos, cuadriláteros y el número π					
Controlemos los gastos	Fichas de colores					
	Husos horarios					
	¿Letras negativas?					
Probabilidad o estadística	¿Cuál es la probabilidad de sacar un 5? ¿Seguro?					
	Monedas de Buffon					
	¿Cuántos garbanzos hay en un quilo de garbanzos?					

-

2º de ESO

	Títol activitat	Dimensiones del álgebra escolar 0	1	2	3	4
Juguemos con la probabilidad	El problema de Monty Hall					
	Carreras de caballos					
	Un juego egipcio de ¿dados? El senet					
	Urnas y bolas					
	Baldufas					
	La mejor estrategia					
	Cursos de probabilidad					
	Combinatoria					
Conozcamos a nuestra clase	El proceso estadístico					
	Cuestionarse y recoger					
	Ordenar y representar					
	Describir e interpretar					
	Predecir, inferir					
	Proyecto estadístico					

-

Las matemáticas del calendario	El misterio de la muerte de Shakespare					
	Las civilizaciones					
	El señor del cero					
	El monasterio de Poblet					
Del precio de una pizza al plano musicall	Pizzes I amanides					
	El sistema cartesià de coordenades					
	Rolle play de sistemas					
	El plano musical					
Resolución de problemas	Fem Matemàtiques					
	Problemes a l'esprint					
	Canguret					
Funciones para ahorrar	Cambiar la representación, no la información					
	Ahorremos					
	La magia del álgebra					

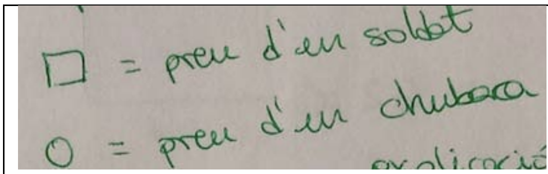
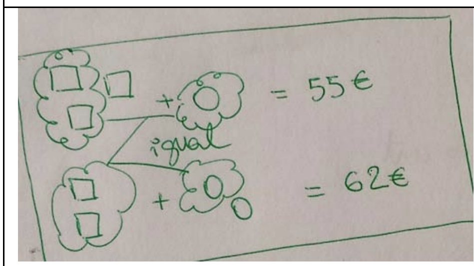
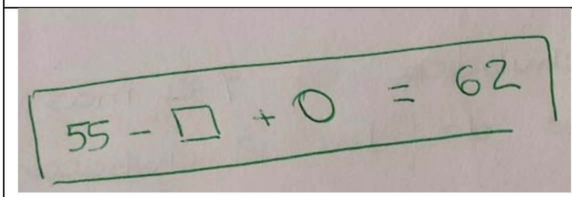
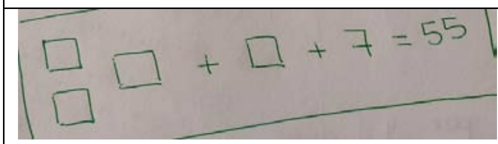
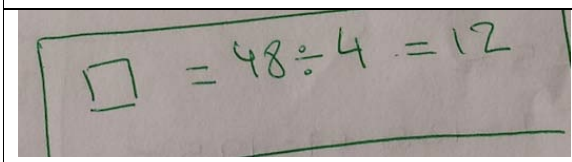
La forma de los objetos	Tratamiento de imágenes					
	Las medidas DIN-A					
	El papiro Rhind					
	Espejito, espejito					
	Resolución de problemas					
Argumentación en geometría	Figuras equivalentes					
	Problemas de geometría					
	El teorema de Pitágoras					
Música y matemáticas	La longitud de una cuerda y su frecuencia					
	Rectángulos isoperimétricos y equivalentes					

ANNEXO D. Listado de problemas de la Tarea 5.

PROBLEMA 1. ¿Recuerdas que un día en clase os pedimos que resolvieseis el siguiente problema?

 55€	 62€

Para resolver este problema, una compañera de clase ha utilizado el siguiente razonamiento. Explica con tus propias palabras qué es lo que está haciendo en cada una de las imágenes.

-

$\bigcirc = 62 + \square - 55$ $\bigcirc = 62 + 12 - 55 = 19$	

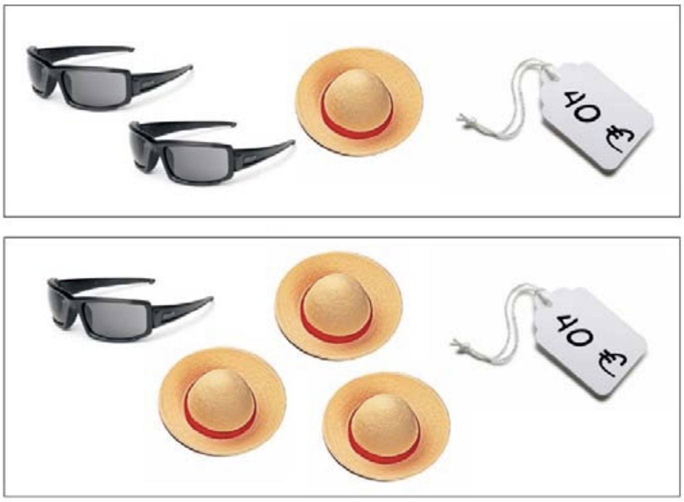
PROBLEMA 2. Ahora intenta resolver estos problemas utilizando razonamientos esquemáticos como el que has podido ver en el problema 1.

Encuentra el precio de un croissant.

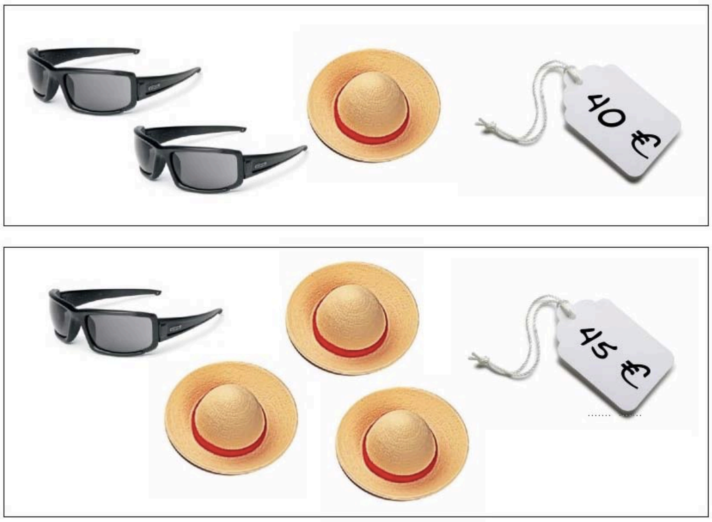
Encuentra el precio de una camiseta y también el de una pelota.

Encuentra el precio de unas gafas y de un sombrero.

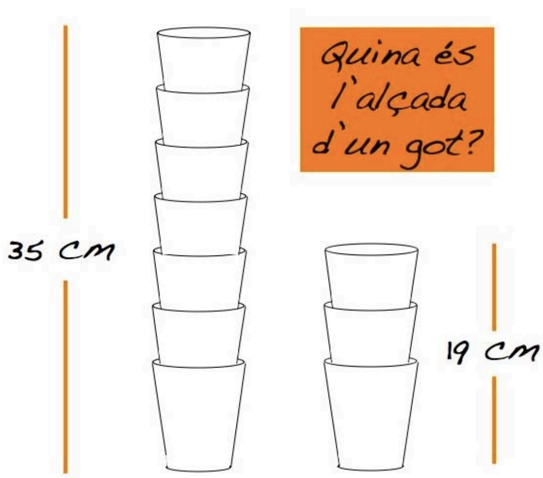
-



Encuentra el precio de unas gafas y de un sombrero.



¿Cuál es la altura de un vaso?



PROBLEMA 3.

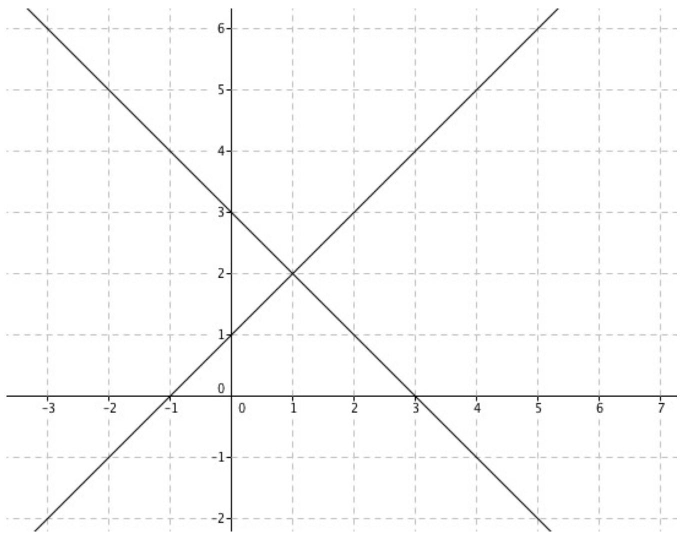
Escribe tres expresiones algebraicas diferentes que sirvan para expresar la condición que cumplen los siguientes puntos del plano:

1) La suma de sus coordenadas es 5

2) El doble de la primera coordenada es igual a la segunda coordenada más 6

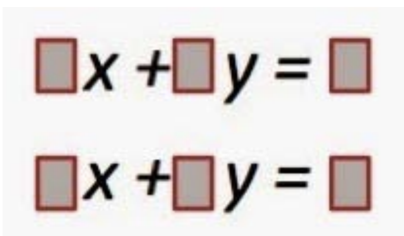
PROBLEMA 4.

Encuentra un sistema de ecuaciones que se pueda solucionar utilizando el siguiente gráfico:



PROBLEMA 5.

Escoge tres números pares consecutivos y utilízalos como coeficientes de la primera ecuación (respetando el orden). Para los coeficientes de la segunda ecuación, escoge tres números impares consecutivos. Resuelve el sistema resultante.



Hazlo de nuevo cambiando la elección de los coeficientes. ¿Qué observas?

PROBLEMA 6.

Escoge tres potencias de base 2 y exponentes consecutivos y utilízalos como coeficientes para la primera ecuación (respetando el orden). Para los coeficientes de la segunda ecuación, escoge tres potencias de base 3 y exponentes consecutivos. Resuelve el sistema resultante.

$$\begin{aligned} \square x + \square y &= \square \\ \square x + \square y &= \square \end{aligned}$$

Hazlo de nuevo cambiando la elección de los coeficientes. ¿Qué observas?

PROBLEMA 7.

Escoge diferentes números enteros para completar las ecuaciones y resuelve el sistema resultante.

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= \square \\ 2x + 3y &= \square \end{aligned}$$

Si es posible, encuentra un caso en el que la solución:

1) Dé valores enteros para "x" e "y"
   a) y que los dos sean pares
   b) y que los dos sean imparres
   c) y que sean uno par y el otro impar
2) No dé valores enteros para "x" o "y"
3) No dé valores enteros ni para "x" ni para "y"

25. Bibliografía

Abrantes, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 8, pp. 7-18.

Aleksandrov, A.D., Kolmogorov, A.N. y Laurentiev, M.A. (1973). *Matemática: contenido, métodos y significado*. Alianza Editorial. Traducción de Manuel López Rodríguez.

Alonso, F.; Barbero, C. y otros (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial síntesis. Madrid.

Ameron Van, B. A. (2002). *Reinvention of early algebra: Development research on the transition from arithmetic to algebra*. Universidad de Utrech, Utrecht.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *Learning of Mathematics*. 14, 3. Vancouver, British Columbia, Canada.

Arcavi, A. (1995). Teaching and Learning Algebra: Past, Present, and Future. *Journal of Mathematical Behavior* 14, 145-162.

Arcavi, A. (1999). ... Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?. *NÚMEROS, revista de didáctica de las matemáticas*, vol. 38, junio de 1999, pág. 39-56.

Arcavi, A y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *Internacional Journal of Computers for Mathematical Learning* 5, 25-45. Kluwer Academic Publishers, printed in the Netherlands.

Arcavi, A. (2005). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formaçao de professores* (pp. 29-48). Lisbon: SEMSPCE.

Arcavi, A. y Resnick, Z. (2008). Generating problems for problems and solutions from solutions. *Mathematics Teacher* V102, nº 1.

Arcavi, A. (2008). Modelling with graphical representations. *For the Learning of Mathematics* 28, 2. FLM Publishing Association, Edmonton, Alberta, Canada.

Arcavi, A. (2008). Algebra: Purpose and Empowerment. *Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics*, 70th Yearbook, pp. 37-49.

Arcavi, A., Tabach, M. y Hershkowitz, R. (2008). Transitions among different symbolic generalizations by algebra beginners in a computer intensive environment. *Educational Studies in Mathematics*. Springer, pag. 53-71.

Arcavi, A., Tabach, M. y Hershkowitz, R. (2008). Learning beginning algebra with spreadsheets in a computer intensive environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 27 ,pag. 48-63.

Armendáriz, M.V.; Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1993). Didáctica de las matemáticas y psicología. *Infancia y aprendizaje*,Vol. 62-63, pag. 77-99.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1998). *Matemáticas ESO. Guías Praxis para el profesorado.* Praxis, Barcelona.

Ball, D. L. (2002). Knowing mathematics for teaching: Relations between research and practice. *Mathematics and Education Reform Newsletter*, 14, (3), 1-5.

Ball, D.L. y Stylianides, A.J. (2004). Studying the mathematical knowledge needed for teaching: The case of teachers' knowledge of reasoning and proof. *Paper prepared for the 2004 Annual Meeting of the American Educational Research Association*, San Diego, CA, April 14, 2004.

Ball, D. L., Hill, H.C, y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), pp. 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D.L.; Hoover M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education*, Vol. 59, number 5, pp. 389-407.

Bishop, A. (1997). *Mathematical enculturation*. Kluwer Academic Publishers.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1988). *Children's difficulties in beginning algebra*. In A. F. Coxford i A. P. Shulte (Eds.), The Ideas of Algebra, K-12: 1988 Yearbook (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Burgués, C. y Sarramona, J. (2013). *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic: Identificació i desplegament a l'educació secundària obligatòria.* Direcció General d'Educació Secundària Obligatòria i Batxillerat, Servei de Comunicació i Publicacions.

Contreras, L. C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Publicaciones de la Universidad de Huelva.

de la Fuente, A. y Deulofeu, J. (2016). Translation between language representation in problem solving as a tool to construct algebraic language. *Paper prepared for the 13th International Congress on Mathematical Education. Hamburg, 24-31 July 2016.*

de la Fuente, A., Deulofeu, J. y Rowland, T. (2016). Developing algebraic language in a problem solving environment: the role of teacher knowledge. *Proceedings of the Bristish Society for Research into Learning Mathematics*. Volume 36 Number 1, Manchester, February 2016, pp. 25-30.

-

de la Fuente, A., Deulofeu, J. y Rowland, T. (2016). Conectar lenguajes y problemas para resolver sistemas de ecuaciones. *Revista UNO,* pendiente de publicación.

Espinoza, L., Barbé, J., & Gálvez, G. (2009). Estudio de fenómenos didácticos vinculados a la enseñanza de la aritmética en la educación básica chilena. *Enseñanza de las ciencias*, 27(2), 157-168.

Delaney, S., Ball, D.L, Hill, H.C., Schilling, S.G. i Zopf, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching: Adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11(3), 171-197.

Solar, H.; Deulofeu, J.; Azcárate, C. (2015). Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las ciencias* 33.2 (2015), pp. 191-210

Filloy E, Rojano T, Solares A. (2002). Cognitive tendencies and the interaction between semantics and algebraic syntax in the production of syntactic errors. *Psychology of Mathematics Education*, Inglaterra. 4 129-136.

Filloy E, Rojano T, Solares A. (2003). Two Meanings of the "Equal" Sign and Senses of Comparison and Substitution Methods. *Psychology of Mathematics Education*, USA 4, 223-2310.

Filloy E, Puig L., Rojano T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(3), pp. 327-342.

Filloy E., Rojano T., Puig L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Empirical Approach*. Springer.

Friedlander, A.; Arcavi, A. (2012). Integrating procedures and thinking processes makes learning more meaningful. *Mathematics Teacher*, Vol. 105 nº 8, pp. 609-614.

García, F.J. (2007). El álgebra como instrumento de modelización. Articulación del estudio de las relaciones funcionales en la educación secundaria. Investigación en educación Matemática XI, Actas SEIEM pp. 71-90. Tenerife, España

García, G.B. (2013). *La construcción del concepto de área a través de la resolución de problemas: Las interacciones y el análisis cognitivo*. Tesis Doctoral, Universidad de Huelva.

Generalitat de Catalunya (2007). DECRET 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria. (DOGC núm. 4915, de 29/06/2007).

Giné, C. (2012). *Coneixements i creences sobre la resolució de problemes dels professors i estudiants de professor d'educació primària i secundària: un estudi sobre la continuïtat en l'ensenyament de les matemàtiques*. Tesis Doctoral, UAB, Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals.

Goldschmied, E.; Jackson, S. (1997). *La educación infantil de 0 a 3 años.* Ediciones Morata, S.L.

Guevara, F.; Contreras, L.C.; Carrillo, J. (1997). Un programa de formación de los profesores de matemáticas desde una aproximación al conocimiento sobre sus creencias. *Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, ISSN 1134-4032, Vol. 3, núm. 2.

Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*. Vol 88, núm. 10, pp. 519-524.

Hiebert, J. i Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. A D. Grouws. *Handbook for research on mathematics teaching ang learning* (p. 65-97). New York: MacMillan.

Hill, H.C.; Schilling, S.G. i Ball, D.L. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary School Journal*, Volume 105(1). The University of Chicago.

Hill, H.C.; Blunk, M.L.; Charalambos, Y.; Phelps, L.S.; Ball, D.L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, Vol. 26, nº 4, pp. 430-511.

Hill, H.C. i Ball, D. L. (2009). The curious - and crucial - case of mathematical knowledge for teaching. *Phi Delta Kappan*, 91(2), 68-71.

Huckstep, P; Rowland, T., Thwaites, A. (2002). Primary teacher's mathematics content knowledge: what does it look like in the classroom? *Paper presented at the Annual Conference of the British Research Association*. University of Exeter.

Kaput, J. (2000). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. University of Massachussets-Dartmouth.

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning? En Kaput, J.; Carraher, D.W. y Blanton, M.L. (2008), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-18). Lawrence Erlbaum Associates: New York.

Kieran, C.; Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las ciencias*, 7 (3), 229-240. Traducción castellana de Luis Puig.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Investigation on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: what is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

Lins, R. i Giménez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. Sao Paulo: Papirus.

-

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo del pensamiento algebraico, visión histórica. *Revista IRICE: del Instituto Rosario de Investigaciones en Ciencias de la Educación*, 13, 105-134.

Mason, J.; Burton. L i Stacey. K. (1992). *Pensar matemáticamente,* Editorial Labor, Barcelona.

Mason, J.; Spence, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: the importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies Publishers*, 38, pp. 135-161. Kluwer Academic Publishers.

Mesa, J.; Adán, M. i de la Fuente, J.A. (2015). Evaluar para motivar. *Actas XVIII JAEM*, Murcia.

Molina, M. (2007). La integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *Investigación en educación Matemática* XI, Actas SEIEM pp. 54-69. Tenerife, España.

Nacional Council of Teachers of Mathematics (2000): *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va. : NCTM. Traducció: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. *Principios y estándares para la Educación Matemática.* Sevilla (2003). Traductor: Manuel Fernández Reyes.

Niss, M.; Tomas, H. (eds.) (2011, a). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. IMFUFA, tekst nr. 485/2011. English Edition. Roskilde University, Denmark . October 2011.

Ortiz, M.A. (1997). El lenguaje algebraico en la escuela: cómo conseguir un equilibrio entre investigación y práctica. *Lenguajes algebraicos, Monográfico Revista UNO*, núm. 14, pp. 47-60.

Palarea M. M. (1999). La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación. *NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas*.Volumen 40, diciembre de 1999, páginas 3-28.

Perrusquía E, Rojano T. (2006). Building up the notion of Dependence Relationship between Variables: A case study with 10 to 12- year old students working with Math Worlds. In Hoyles, Lagrange, Son y Sinclair, Eds. *Proceedings of the Seventeenth ICMI Study Conference*. Hanoi.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México.

Polya, G. (1981). *Mathematical Discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving.* Combined Edition. John Wiley y Sons, Toronto

Puig, L. i Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. *Conferencia invitada al grupo de Álgebra del Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática*, Cuernavaca, Morelos, México, 12-14 de julio de 1990.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Editorial Comares, Granada.

Puig, L. i Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. *Actas de las VIII Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana*.

Puig L. (2010). History of Algebraic Ideas and Research on Educational Algebra. *ICME-10*, Regular Lecture.

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (Anexo, pp. 1-20). Jaén: SEIEM.

Radford, L. i Puig, L. (2006). *Syntax and Meaning as sensous, visual, historical forms of algebraic thinking.* Educational Studies in Mathematics (2007) 66: 145-164. Springer

Rojano T. (2001). Algebraic Reasoning with Spreadsheets. *Proceedings of the International Seminar y Reasoning explanation and proof in school mathematics and their plaice in the intended curriculum*. Qualificactions and Curriculum Authority. Cambridge, UK, pp. 1-16.

Rojano T, Sutherland R. (2001). *Arithmetic World – Algebra World*. Proceedings of the 12th ICMI Study Conference "The Future of the Teaching and Learning of Algebra", Chick, H.; Stacey, K; Vincent, J. y Vincent J. (eds). The University of Melbourne, Australia, diciembre, 2001, 2: 515-522.

Rojano T. (2002). The potential of Spreadsheets in the Learning of Algebra. *The International Journal of Education Policy Research and Practice*, USA.3(2), 91-106.

Rojano T. (2010). Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. *Números: Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Vol. 75, pp. 5-20.

Royo, M.P. (2011). *Coconstrucción de conocimiento algebraico en 1r ciclo de la ESO mediante la participación en foros de conversación electrónicos*. Doctorado interuniversitario de Psicología de la Educación. Universitat de Girona.

Rowland, T.; Huckstep, P.; Thwaites, A. (2004). Reflecting on prospective elementary teachers mathematic content knowledge: the case of Laura. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 121-128.

Rowland, T.; Turner, F. (2007). Developing and Using the Knowledge Quartet: A Framework for the Observation of Mathematics Teaching. *The Mathematics Educator*, Vol. 10, núm. 1, pp. 107-123.

Rowland, T. (2008). Researching teachers mathematics disciplinary knowledge. *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development*, pp. 273-298, Sense Publishers.

Rowland, T.; Turner, F.; Thwaites, A. y Huckstep (2009). *Developing primary mathematics teaching: reflecting on practice with the Knowledge Quartet*. SAGE Publications Ltd. Singapore.

-

Rowland, T.; Ruthven, K. (2011). *Mathematical Knowledge in Teaching.* Mathematics Education Library, Vol. 50, Springer.

Rowland, T.; Thwaites, A.; Jared, L. (2011). Triggers of contingency in mathematics teaching. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 73-80. Ankara, Turkey.

Rowland, T. (2014). The Knowledge Quartet: the genesis and application of a framework for analysing mathematics teaching and deepening teacher's mathematics knowledge. *SISYPHUS Journal of Education,* 1(3), pp. 15-43.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra: orígenes y perspectivas*. Libroz del Zorzal, Argentina, Buenos Aires.

Schoenfeld, A.H. (1985). *Mathematical Problem Solving.* Academic Press, Orlando.

Schoenfeld, A.H. i Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. *Mathematics Teacher*. Septembre 1988, p 420- 427.

Schoenfeld, A.H. (1992a). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Investigation on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schoenfeld, A.H. (1992b). Radical constructivism and the pragmatics of instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23(3), pp. 290-295.

Shulman, L.E. (1986). Those who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, Vol. 15, Núm. 2, pp. 4-14.

Shulman, L.E. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, vol. 57 núm. 1, pp. 1-21.

Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic teacher*, 26 (3), 9-15.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M. i Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis, Madrid.

Socas, M. M. y Palarea, M. (1997). Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, nº 14, pp. 7-24, octubre 1997.

Socas, M.M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. *Investigación en educación Matemática XI*, Actas SEIEM pp. 20-52. Tenerife, España.

Törner, G.; Schoenfeld, A.; Reiss, K.M. (2007). Problem solving around the world: summing up the state of the art. *ZDM The international Journal on Mathematics Education*, October 2007, Volume 39, Issue 5, pp 353-353.

Turner, F. (2012). Using the Knowledge Quartet to develop mathematics content knowledge: the role of reflection on professional development. *Research in Mathematics Education*, Vol 14:3, pp. 253-271.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variable. In A.F. Coxford y A.P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, pp. 8.19). Reston, VA: NCTM.

Vila, A; Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Editorial Narcea, Madrid.

Weston, T.L.; Kleve, B.; Rowland, T. (2012). Developing an online coding manual for The Knowledge Quartet: An international project. *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics* 32(3), pp. 179-184.