UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

Departamento de Ingeniería Estructural y Mecánica
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales y de Telecomunicación

ESTUDIO DE LA EFICIENCIA Y FENÓMENOS DISIPATIVOS DE ENGRANAJES CON CORRECCIONES DE TALLADO Y MODIFICACIONES DEL PERFIL

TESIS DOCTORAL

Autor: D. Alberto Diez Ibarbia

Directores: Prof. Dr. D. Fernando Viadero Rueda
Dr. D. Alfonso Fernández del Rincón

Santander, Septiembre 2016

Para Elisa, Alberto y Alba

Agradecimientos

En el trabajo, así como en la vida, es necesario contar con la ayuda de personas que permitan la realización tanto personal como de la actividad profesional. En este sentido, he tenido la fortuna de contar con el apoyo del Grupo (Humano) de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cantabria, en ambas facetas. Con estas líneas quiero dejar constancia de mi más profundo agradecimiento a todos y cada uno de los miembros de este grupo, comenzando por mis directores de Tesis, Fernando Viadero y Alfonso Fernández, sin cuyo tesón, guía, ayuda y consejos hubiera sido incapaz de finalizar. En este sentido, no puedo evitar hacer un guiño a mi director de Tesis Alfonso, quien una vez realizó una analogía sobre la "excavación" que el Grupo está realizando en el ámbito de la Ingeniería Mecánica y que resume perfectamente mi sentir. Por ello agradecer individualmente:

A Fernando Viadero, por encontrar y acotar el área de trabajo;
a Alfonso Fernández, por delimitar, empezar y enfocar la excavación;
a Pablo, por proveer las herramientas necesarias para la misma;
a Ana y Miguel, por planificar y fijar la dirección de la excavación;
A José Luis, por mantener la luz encendida en los momentos difíciles;
a Rubén, porque cavar acompañado siempre es mucho más fácil;

No puedo evitar tampoco recordar en estas líneas el apoyo incondicional de mi familia. Especialmente, a mis padres que me han soportado, entendido y animado en todo momento. A mi "Enan" por darme esas dosis de cariño tan necesarias. Al resto de mi familia y amigos, sin los cuales este trabajo no habría sido posible.

In addition, I would like to express my sincere gratitude to Professor Theodossiades, Stephen Walsh and Miguel de la Cruz, for their friendly welcome, great availability and kind courtesy during my stay at the Loughborough University.

Alberto Diez Ibarbia

Resumen

La demanda de sistemas de transmisión mediante engranajes más eficientes y fiables, capaces de operar con niveles de par y velocidad cada vez más elevados, ha dado lugar a un creciente interés por el desarrollo de herramientas de análisis que aporten un mejor conocimiento del comportamiento de estos sistemas. En este contexto surgió el modelo dinámico de partida del presente trabajo, desarrollado en el Grupo de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cantabria (GEar Dynamics University of Cantabria model o modelo GEDUC). Este modelo determina las fuerzas de engrane a partir de un procedimiento híbrido, incorporando el efecto del lubricante así como la fricción por deslizamiento. El efecto del lubricante se introduce en forma de amortiguamiento viscoso, mientras que el rozamiento se formula mediante un modelo de Coulomb, en el cual se asume un coeficiente de fricción invariable a lo largo del ciclo de engrane.

En este trabajo de Tesis se han extendido las capacidades del citado modelo, analizando en detalle los diferentes fenómenos disipativos que aparecen en el contacto entre engranajes, con el fin de evaluar su impacto en la eficiencia.

Con este propósito, se han estudiado transmisiones con engranajes cilíndricos de dientes rectos estándar, corregidos y con rebajes en la punta del diente bajo cargas elevadas. En estas condiciones de operación el fenómeno disipativo más determinante sobre la eficiencia es la fricción por deslizamiento. Para su cálculo se ha empleado un modelo de Coulomb mejorado, mediante la utilización de formulaciones avanzadas para determinar tanto el reparto de carga como el coeficiente de fricción en cada instante.

La obtención del reparto de carga entre las distintas parejas en contacto se lleva a cabo empleando el procedimiento originalmente desarrollado en el modelo GEDUC. Dicho procedimiento considera el efecto del par, y tiene en cuenta las deformaciones en los dientes adyacentes a la pareja en contacto, siendo compatible con la introducción de correcciones y modificaciones de perfil del diente.

Para la implementación del coeficiente de fricción se ha seguido una formulación híbrida, la cual permite reproducir el comportamiento de la fricción en régimen elastohidrodinámico y distinguir entre condiciones de lubricación (extremas, mixtas y completamente fluidas).

Asimismo, se ha desarrollado un procedimiento de cálculo de la eficiencia que considera todos los fenómenos disipativos. En este trabajo el procedimiento ha sido empleado considerando únicamente la fricción por deslizamiento. La eficiencia cuando se tiene en cuenta la fricción por deslizamiento depende de tres factores: la velocidad de deslizamiento, el reparto de carga y el coeficiente de fricción.

La principal fortaleza del procedimiento propuesto reside en la utilización de un reparto de carga avanzado, que no sólo influye directamente en el cálculo de la eficiencia, sino que permite una mejor aproximación del coeficiente de fricción, dado que las formulaciones híbridas son dependientes de la carga aplicada. El procedimiento propuesto, caracterizado por emplear formulaciones avanzadas de reparto de carga y coeficiente de fricción, se ha comparado con otro basado en la utilización de formulaciones analíticas. El objetivo de esta comparativa es correlacionar los resultados de eficiencia, identificando las ventajas de utilizar un procedimiento avanzado. También se ha implementado una mejora al procedimiento basado en formulaciones analíticas, a partir de la inclusión de un reparto de carga variable en las zonas de contacto doble.

Paralelamente al cálculo de la eficiencia de transmisiones por engranajes cilíndricos rectos, otro de los objetivos de este trabajo ha sido analizar el efecto de las modificaciones de perfil y de las correcciones de tallado en dicha eficiencia. Ambas tipologías de dientes son ampliamente utilizadas en la industria dado que mejoran aspectos resistentes y de funcionamiento en régimen dinámico de la transmisión. Es por ello que existe un gran interés en analizar cualquier aspecto que influya en el rendimiento energético de tales transmisiones. A partir de este análisis de la eficiencia, se ha demostrado que existe una modificación de perfil y corrección de tallado óptimas, para las cuales la eficiencia energética de la transmisión es máxima en unas condiciones de operación específicas.

Abstract

The demand for more efficient and reliable gear transmission systems, which are able to operate with increasingly high torque levels and speed, has led to a growing interest in the development of analysis tools that provide a better knowledge of the behaviour of these systems. In this context, the starting dynamic model of this work, which was developed in the Mechanical Engineering Group at the University of Cantabria (University of Cantabria Gear Dynamics model or model GEDUC), emerged. This model determines the meshing forces by means of a hybrid procedure, which takes into account the effect of the lubricant and the sliding friction. The effect of the lubricant is introduced as a viscous damping, whilst friction is formulated by a Coulomb's model, in which an invariable coefficient of friction along the meshing cycle is assumed.

In this thesis work, the capabilities of that starting model have been extended, analysing in detail the different dissipative phenomena which occur in the contact between gears, in order to assess their impact on efficiency.

To this end, spur gear transmissions with standard teeth, with shifting profile and with tip relief in the profile have been studied, under high loads. Under these operating conditions, the most decisive dissipative effect on efficiency is the sliding friction. For its calculation, an enhanced Coulomb's model has been used, by means of the implementation of advanced formulations to determine both the load sharing and the friction coefficient instantaneously.

Load sharing determination is performed by using the procedure originally developed in the GEDUC model, which considers the torque effect and takes into account the profile shifting and tooth profile modifications.

In order to calculate the friction coefficient, a hybrid formulation, which allows to reproduce the friction behaviour in elastohydrodynamic regime of lubrication and distinguish between lubrication conditions (extreme, mixed and fully-flooded), has been applied.

Furthermore, a procedure for calculating the efficiency, which considers all dissipative phenomena, has been developed. In this work, this procedure has been used considering only the sliding friction effect. Efficiency, when only sliding friction is considered, depends on three factors: the sliding velocity, load sharing and the coefficient of friction.

The main strength of the proposed method is the employment of an advanced load sharing, which does not only directly affect the efficiency calculation, but provide a better approximation of the friction coefficient, since the hybrid formulations are dependent on the load applied. This proposed procedure, characterized by employing advanced formulations of load sharing and coefficient of friction, has been compared to another, which is based on the use of analytical formulations. The purpose of this comparison is to correlate the efficiency results, identifying the advantages of applying an advanced procedure. It has also been established an improvement to the procedure based on analytical formulations, by including a variable load sharing distribution in the double-contact regions.

In parallel to the efficiency calculation of spur gear transmissions, another objective of this work was to assess the effect of profile modifications and shifting in such efficiency. Both types of tooth are widely used in Industry, since they improve the resistance of the system and some operating aspects of the transmission in dynamic regime. This is why there is a great interest in analysing any aspect which can affect the energy efficiency of such transmissions. From this efficiency evaluation, it was proven that there is an optimum profile modification and an optimum profile shifting, for which the energy efficiency of the transmission is at maximum in specific operating conditions.

Índice

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

I.1. MOTIVACIÓN I-1
I.2. OBJETIVOS I-2
I.3. ESTRUCTURA DE LA MEMORIA I-2

CAPÍTULO II. ESTADO DEL CONOCIMIENTO

II.1. INTRODUCCIÓN II-1
II.2. MODELOS MATEMÁTICOS DE TRANSMISIONES MEDIANTE ENGRANAJES II-2
II.2.1. Aspectos comunes a los modelos II-2
II.2.2. Correcciones y modificaciones de perfil II-6
II.2.3. Definición de los esfuerzos de contacto II-8
II.3. CÁLCULO DE LA EFICIENCIA II-45
II.3.1. Modelos de cálculo de la eficiencia..... II-45
II.4. SÍNTESIS DEL ESTADO DEL CONOCIMIENTO DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS APLICADOS AL CÁLCULO DE LA EFICIENCIA II-48
II.5. VALORACIÓN CRÍTICA DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS PARA EL CÁLCULO DE LA EFICIENCIA II-50

CAPÍTULO III. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL MODELO DE CONTACTO ENTRE ENGRANAJES

III.1. INTRODUCCIÓN III-1
III.2. NOMENCLATURA Y TERMINOLOGÍA III-2
III.3. MODELO DE PARTIDA (GEDUC LCM) III-4

III.3.1. Descripción de la geometría de las ruedas III-5
III.3.2. Localización de los puntos/áreas de contacto..... III-8
III.3.3. Obtención de los esfuerzos de contacto III-12
III.3.4. Formulación y procedimiento de integración de las ecuaciones dinámicas III-17
III.4. FUNDAMENTOS DE LA TRIBOLOGÍA APLICADOS AL CONTACTO ENTRE ENGRANAJES III-18
III.4.1. Esfuerzo normal III-18
III.4.2. Esfuerzo tangencial III-31

CAPÍTULO IV. MODELO DE CONTACTO Y EFICIENCIA

IV.1. INTRODUCCIÓN IV-1
IV.2. RÉGIMEN DE LUBRICACIÓN IV-2
IV.3. ESFUERZOS EXISTENTES EN EL CONTACTO IV-5
IV.3.1. Esfuerzo normal (FN)..... IV-5
IV.3.2. Esfuerzo tangencial (Ft) IV-9
IV.3.3. Esfuerzo por arrastre de fluido (Tarras) IV-15
IV.3.4. Modelo de contacto IV-20
IV.4. DETERMINACIÓN DE LA EFICIENCIA DEL SISTEMA IV-21
IV.4.1. Metodología de cálculo global de eficiencia..... IV-22
IV.4.2. Metodología de cálculo de eficiencia teniendo en cuenta la fricción por deslizamiento..... IV-23

CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA TENIENDO EN CUENTA LA FRICCIÓN POR DESLIZAMIENTO

V.1. INTRODUCCIÓN V-1
V.2. ESTUDIO DE LA EFICIENCIA EN UNA TRANSMISIÓN POR ENGRANAJES RECTOS ESTÁNDAR V-5
V.2.1. Efecto del reparto de carga..... V-6
V.2.2. Efecto del coeficiente de fricción..... V-12
V.3. ESTUDIO DE LA EFICIENCIA EN UNA TRANSMISIÓN POR ENGRANAJES RECTOS CORREGIDOS V-19
V.3.1. Análisis del par..... V-19
V.3.2. Análisis de los parámetros geométricos: variación de la corrección..... V-28
V.4. ESTUDIO DE LA EFICIENCIA EN UNA TRANSMISIÓN POR ENGRANAJES RECTOS CON REBAJES EN LA PUNTA DEL DIENTE V-57
V.4.1. Análisis del par..... V-58
V.4.2. Análisis de los parámetros geométricos: variación de la longitud y magnitud de rebaje V-65

CAPÍTULO VI. APORTACIONES Y CONCLUSIONES

VI.1. APORTACIONES VI-1
VI.2. CONCLUSIONES VI-2
VI.2.1. Generales VI-2
VI.2.2. Engranajes estándar VI-3
VI.2.3. Engranajes con correcciones de tallado VI-3
VI.2.4. Engranajes con rebajes en la punta del diente VI-4
VI.3. LÍNEAS DE TRABAJO FUTURO VI-4

CHAPTER VI. CONTRIBUTIONS AND CONCLUSIONS

VI.1. CONTRIBUTIONS VI-1
VI.2. CONCLUSIONS VI-2
VI.2.1. General conclusions VI-2
VI.2.2. Standard gears VI-2
VI.2.3. Shifted gears VI-3
VI.2.4. Gears with tip relief VI-3
VI.3. FUTURE WORK VI-4

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Lista de figuras

CAPÍTULO II. ESTADO DEL CONOCIMIENTO

Figura II-1. Descomposición de las deformaciones del modelo de Vedmar [Fernández, 2010] *II-14*
Figura II-2. Esquema de la cinemática en los puntos de contacto *II-28*
Figura II-3. Funciones de ponderación elaboradas por Castro et al., Zhu et al. y Doleschel *II-34*
Figura II-4. Esquema del modelo de pérdidas por arrastre fluido *II-39*
Figura II-5. Esquema pérdidas por arrastre de lubricante *II-40*

CAPÍTULO III. FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL MODELO DE CONTACTO ENTRE ENGRANAJES

Figura III-1 Nomenclatura de los dientes de los engranajes [Fernández, 2010] *III-2*
Figura III-2 Geometría del contacto [Fernández, 2010] *III-2*
Figura III-3 Descripción del perfil de la cremallera [Fernández, 2010] *III-5*
Figura III-4 Proceso de generación de perfiles corregidos y dientes generados para diferentes casos de corrección *III-8*
Figura III-5 Determinación de la distancia entre los puntos de contacto en el caso de contacto evolvente – evolvente *III-9*
Figura III-6 Localización de los puntos de contacto y detalle de los puntos de contacto considerados para las ruedas con factor de corrección igual a 0.7 ..... *III-10*
Figura III-7 Descripción del rebaje en la punta y en la base del diente [Fernández, 2010] *III-11*
Figura III-8 Obtención de la deformación total a partir de la superposición de las deformaciones obtenidas mediante el modelo local y el global *III-13*
Figura III-9 Modelo de Elementos Finitos para el cálculo de la deformación estructural: a) MATLAB y b) MSC PATRAN [Torre, 2011] *III-14*
Figura III-10 Contacto lineal *III-19*

Figura III-11 Curvas de fricción de cuatro fluidos tipo [Schipper, 1995] y [Evans, 1983] *III-21*
Figura III-12 Mecanismo de la cuña de densidad. *III-27*
Figura III-13 Mecanismo de alargamiento *III-28*
Figura III-14 Mecanismo de la cuña física *III-28*
Figura III-15 Mecanismo de presión normal *III-29*
Figura III-16 Mecanismo de presión de translación *III-30*
Figura III-17 Mecanismo de expansión *III-30*
Figura III 18 Fuerzas debidas a la fricción por deslizamiento *III-34*
Figura III-19 Fuerzas debidas a la fricción por deslizamiento (supuesto 1) *III-35*
Figura III-20 Fuerzas debidas a la fricción por deslizamiento (supuesto general) *III-36*
Figura III-21 Fuerza debida a la fricción por rodadura *III-38*
Figura III-22 Superposición de la fricción por rodadura *III-39*
Figura III-23 Fricción por rodadura debida a la deformación de los sólidos en contacto *III-40*

CAPÍTULO IV. MODELO DE CONTACTO Y EFICIENCIA

Figura IV-1. Esquema del contacto fluido entre dientes en los cuatro regímenes de lubricación *IV-3*
Figura IV-2. Esquema del contacto entre dientes en los tres condiciones de lubricación de la elastohidrodinámica *IV-4*
Figura IV-3. Diagrama de Greenwood correspondiente con los regímenes de lubricación del capítulo de resultados y curva de Stribeck genérica donde se pueden apreciar los regímenes y condiciones de lubricación *IV-4*
Figura IV-4. Esquema de esfuerzos presentes en el contacto entre engranajes *IV-5*
Figura IV-5. Representación de la distribución de presiones en el contacto elastohidrodinámico y en el contacto hertziano *IV-6*
Figura IV-6. Esquema pérdidas por arrastre fluido *IV-15*
Figura IV-7. Esquema pérdidas por arrastre de lubricante *IV-16*
Figura IV-8. Esquema de incremento de pérdidas por arrastre de lubricante por el sentido de rotación *IV-17*
Figura IV-9. Esquema de esfuerzos presentes en el contacto entre engranajes *IV-20*
Figura IV-10. Esquema contacto fluido en régimen elastohidrodinámico *IV-21*
Figura IV-11. Representación del coeficiente de fricción de Niemann *IV-24*
Figura IV-12. Representación del reparto de carga "Analítico ISO/TC-60" *IV-25*
Figura IV-13. Representación y ecuaciones de la formulación de reparto genérico *IV-26*
Figura IV-14. Representación de los repartos de carga analíticos utilizados (h=0, h=1/5, h=1/3) *IV-27*
Figura IV-15. Representación del reparto de carga "Avanzado GEDUC" y las formulaciones de coeficiente de fricción de Niemann, Castro y Zhu. *IV-29*

CAPÍTULO V. ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA TENIENDO EN CUENTA LA FRICCIÓN POR DESLIZAMIENTO

Figura V-1. Reparto de carga "Avanzado GEDUC" mostrando las diferentes zonas de contacto.....V-6

Figura V-2. Comparativa entre ambos procedimientos en una transmisión de engranajes estándar. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas (159 Nm y 3000 rpm).....V-7

Figura V-3. Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos estándar implementando diferentes formulaciones de reparto de carga y coeficiente de fricción de Niemann. V-8

Figura V-4. Relación de contacto teórica y efectiva para diferentes valores de par resistivo.....V-9

Figura V-5. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas para el procedimiento analítico en las condiciones de operación a estudio. V-10

Figura V-6. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas para el enfoque propuesto en las condiciones de operación a estudio. ...V-11

Figura V-7. Procedimiento avanzado: Reparto de carga "Avanzado GEDUC", coeficientes de fricción de "Niemann", "Castro" y "Zhu" y factor de pérdidas instantáneas (159 Nm y 3000 rpm).....V-12

Figura V-8. Coeficientes de fricción de Niemann, Castro, Zhu y Hai Xu con un par resistivo de159 Nm y una velocidad angular de 3000 rpm. V-13

Figura V-9. Reparto de carga "Avanzado GEDUC" cuando se implementan los coeficientes de fricción de "Niemann", "Castro" y "Zhu" con un par resistivo de159 Nm y una velocidad angular de 3000 rpm. V-14

Figura V-10. Diagrama de Greenwood de los regímenes de lubricación correspondientes a las condiciones de operación estudiadas.....V-14

Figura V-11. Curva de Stribeck de los regímenes de lubricación en diferentes condiciones de operación.....V-15

Figura V-12. Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos cuando se implementan los coeficientes de fricción de Niemann, Castro y Zhu.....V-15

Figura V-13. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas cuando se implementa el coeficiente de fricción de Castro en las condiciones de operación a estudio.....V-17

Figura V-14. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas cuando se implementa el coeficiente de fricción de Zhu en las condiciones de operación a estudio.....V-18

Figura V-15. Comparativa entre ambos procedimientos en una transmisión de engranajes corregidos (x1=0.7). Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas (159 Nm y 3000rpm).....V-20

Figura V-16. Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos corregidos implementando diferentes formulaciones de reparto de carga y coeficiente de fricción de Niemann. V-21

Figura V-17. Relación de contacto teórica y efectiva para diferentes valores de par resistivo.....V-22

Figura V-18. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas para el procedimiento analítico en las condiciones de operación a estudio. V-23

Figura V-19. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas para el procedimiento avanzado en las condiciones de operación a estudio. V-24

Figura V-20. Curva de Stribeck de los regímenes de lubricación en diferentes condiciones de operación. V-25

Figura V-21. Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos corregidos analizada cuando se implementan los coeficientes de fricción de Niemann, Castro y Zhu. V-25

Figura V-22. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas cuando se implementa el coeficiente de fricción de Castro y Zhu en las condiciones de operación a estudio. V-27

Figura V-23. Esquema de la localización y longitud del segmento de contacto en los diferentes escenarios. V-29

Figura V-24. Reparto de carga cuando se implementa el coeficiente de fricción de Castro et al., sin correcciones y con las correcciones máximas de los tres escenarios (Par=159 Nm y 1500 rpm). V-29

Figura V-25. Comparativa entre ambos enfoques. Valores de eficiencia para diferentes valores de factor de corrección y condiciones de operación. V-31

Figura V-26. Comparativa entre relaciones de contacto teórica y efectiva para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm). V-31

Figura V-27. Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del procedimiento analítico para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm). V-32

Figura V-28. Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del procedimiento avanzado para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm). V-32

Figura V-29. Reparto de carga para los casos de corrección x1=0 y x1=0.2, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm). V-33

Figura V-30. Factor de pérdidas instantáneas para los casos de corrección x1=0 y x1=0.2, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm). V-34

Figura V-31. Factor de pérdidas instantáneas para las cinco condiciones de operación. V-34

Figura V-32. Valores de eficiencia para diferentes factores de corrección y condiciones de operación. V-36

Figura V-33. Comparativa entre relaciones de contacto teórica y efectiva para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm). V-36

Figura V-34. Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del procedimiento analítico para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm). V-37

Figura V-35. Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del procedimiento avanzado, para las condiciones de operación OC2 en rojo (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).....V-37

Figura V-36. Reparto de carga para los casos de corrección x1=0 y x1=0.5, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).....V-38

Figura V-37. Factor de pérdidas instantáneas para los casos de corrección x1=0 y x1=0.5, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).....V-39

Figura V-38. Factor de pérdidas instantáneas para todas las condiciones de operación con factores de corrección x1=0 y x1=0.5. .....V-40

Figura V-39. Valores de eficiencia para diferentes factores de corrección y condiciones de operación.....V-40

Figura V-40. Comparativa entre relaciones de contacto teórica y efectiva, para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).....V-41

Figura V-41. Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del procedimiento analítico para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).....V-42

Figura V-42. Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del procedimiento avanzado para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).....V-42

Figura V-43. Reparto de carga para los casos de corrección x1=0 y x1=0.7, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).....V-43

Figura V-44. Factor de pérdidas instantáneas (IPL) para los casos de corrección x1=0 y x1=0.7, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).....V-44

Figura V-45. Factor IPL para todas las condiciones de operación con factores de corrección x1=0 y x1=0.7. .....V-45

Figura V-46. Diagrama de Greenwood de las condiciones de operación estudiadas en el punto primitivo.....V-45

Figura V-47. Curva Stribeck para las condiciones de operación estudiadas en el supuesto sin corrección.....V-46

Figura V-48. Curva Stribeck para las condiciones de operación estudiadas en el supuesto sin corrección.....V-46

Figura V-49. Valores de eficiencia para diferentes valores de factor de corrección y condiciones de operación para los tres coeficientes de fricción a) Niemann, b) Castro y c) Zhu. V-47

Figura V-50. Comparativa de los coeficientes de fricción para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm). V-48

Figura V-51. Comparativa de los factores instantáneas de pérdidas para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm). V-49

Figura V-52. Factores de pérdidas instantáneas para todas las condiciones de operación con factores de corrección x1=0 y x1=0.2.....V-50

Figura V-53. Valores de eficiencia para diferentes valores de factor de corrección y condiciones de operación para los tres coeficientes de fricción a) Niemann, b) Castro y c) Zhu.....V-51

Figura V-54. Comparativa de los coeficientes de fricción para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).....V-52

Figura V-55. Comparativa de los factores de pérdidas instantáneas para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).....V-53

Figura V-56. Factores de pérdidas instantáneas para todas las condiciones de operación con factores de corrección x1=0 y x1=0.5.....V-54

Figura V-57. Valores de eficiencia para diferentes valores de factor de corrección y condiciones de operación para los tres coeficientes de fricción: a) Niemann, b) Castro y c) Zhu.....V-54

Figura V-58. Comparativa de los coeficientes de fricción para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).....V-55

Figura V-59. Comparativa de los factores instantáneas de pérdidas para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).....V-56

Figura V-60. Factores de pérdidas instantáneas para todas las condiciones de operación con factores de corrección x1=0 y x1=0.7.....V-57

Figura V-61. Esquema de en qué engranajes se introducen los rebajes en los diferentes supuestos.....V-58

Figura V-62. Reparto de carga cuando se implementan el coeficiente de fricción de Castro sin modificaciones (-) y con rebajes en: piñón (--), rueda conducida (--) y ambos engranajes (-) (Par=19.9 Nm y 3000 rpm).....V-59

Figura V-63. Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos con rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos.....V-60

Figura V-64. Relación de contacto teórica y efectiva para diferentes valores de par resistivo: rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos.....V-60

Figura V-65. Error de transmisión para el enfoque propuesto en las condiciones de operación a estudio: rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos.V-61

Figura V-66. Curva Stribeck para los valores extremos y medio de par aplicado: rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos. V-61

Figura V-67. Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos con rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos, para los coeficientes de fricción de Niemann, Castro y Zhu.....V-62

Figura V-68. Reparto de carga cuando se implementan el coeficiente de fricción de Castro et al., con rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos engranajes, en las condiciones de operación objeto de estudio.....V-62

Figura V-69. Coeficientes de fricción con inclusión de rebajes en el piñón, rueda conducida y ambos engranajes, en las condiciones de operación objeto de estudio.....V-63

Figura V-70. Factor de pérdidas instantáneas para las tres formulaciones de coeficiente de fricción, con rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos engranajes, en las condiciones de operación objeto de estudio.....V-64

Figura V-71. Esquema de en qué engranajes se introducen los rebajes en los diferentes escenarios. V-66

Figura V-72. Valores de eficiencia para diferentes valores de magnitud de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud.....V-67

Figura V-73. Valores de eficiencia para diferentes valores de longitud de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud.....V-67

Figura V-74. Relación de contacto para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-68

Figura V-75. Relación de contacto para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-69

Figura V-76. Reparto de carga (Niemann) para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).....V-70

Figura V-77. Reparto de carga (Niemann) para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-70

Figura V-78. Coeficientes de fricción para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-72

Figura V-79. Coeficiente de fricción para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-73

Figura V-80. Factor de pérdidas instantáneas para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).....V-75

Figura V-81. Factor de pérdidas instantáneas para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-76

Figura V-82. Valores de eficiencia para diferentes valores de magnitud de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud.....V-77

Figura V-83. Valores de eficiencia para diferentes valores de longitud de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud.....V-77

Figura V-84. Relación de contacto para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-78

Figura V-85. Relación de contacto para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-79

Figura V-86. Reparto de carga para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). V-79

Figura V-87. Reparto de carga para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-80*

Figura V-88. Coeficiente de fricción para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-81*

Figura V-89. Coeficiente de fricción para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-82*

Figura V-90. Factor de pérdidas instantáneas para diferentes valores de magnitud de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-84*

Figura V-91. Factor de pérdidas instantáneas para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-85*

Figura V-92. Valores de eficiencia para diferentes valores de magnitud de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. *V-86*

Figura V-93. Valores de eficiencia para diferentes valores de longitud de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. *V-86*

Figura V-94. Relación de contacto para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-87*

Figura V-95. Relación de contacto para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-87*

Figura V-96. Reparto de carga para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-88*

Figura V-97. Reparto de carga para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-89*

Figura V-98. Coeficiente de fricción para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-90*

Figura V-99. Coeficiente de fricción para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-91*

Figura V-100. Factor de pérdidas instantáneas para diferentes magnitudes de rebaje (CT =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-93*

Figura V-101. Factor de pérdidas instantáneas para diferentes longitudes de rebaje (LT =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm). *V-94*

Lista de tablas

CAPÍTULO II ESTADO DEL CONOCIMIENTO

Tabla II-1. Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Terekhov [1975] *II-39*
Tabla II-2. Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Boness [1989] *II-40*
Tabla II-3. Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Changenet [2006] *II-41*
Tabla II-4. Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Changenet [2011] *II-41*
Tabla II-5. Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Changenet [2011] *II-41*
Tabla II-6. Valores de las constantes para diferentes regímenes *II-44*

CAPÍTULO IV MODELO DE CONTACTO Y EFICIENCIA

Tabla IV-1. Valores de las constantes para diferentes números de Reynolds *IV-16*
Tabla IV-2. Valores de las constantes dependiendo del número de Reynolds *IV-17*
Tabla IV-3. Valores de las constantes para diferentes regímenes *IV-19*

CAPÍTULO V ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA TENIENDO EN CUENTA LA FRICCIÓN POR DESLIZAMIENTO

Tabla V-1. Resumen gráfico de los estudios realizados. *V-4*
Tabla V-2. Parámetros geométricos de la transmisión objeto de estudio. *V-5*
Tabla V-3. Resumen del análisis del par en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos estándar. *V-5*
Tabla V-4. Parámetros geométricos de la transmisión objeto de estudio *V-19*

Tabla V-5. Resumen del análisis del par en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos estándar..... V-20
Tabla V-6. Condiciones de operación de la transmisión objeto de estudio. V-28
Tabla V-7. Resumen de la descripción de los escenarios..... V-28
Tabla V-8. Resumen del análisis de las correcciones en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos. V-30
Tabla V-9. Resumen de los regímenes de lubricación por condiciones de operación. V-46
Tabla V-10. Valores medios de coeficiente de fricción para el caso sin corrección y con máxima corrección. V-49
Tabla V-11. Valores medios de coeficiente de fricción para el caso de máxima corrección (x=0.5)..... V-52
Tabla V-12. Valores medios de coeficiente de fricción para el caso de máxima corrección (x=0.7)..... V-56
Tabla V-13. Parámetros geométricos de la transmisión objeto de estudio..... V-57
Tabla V-14. Resumen del análisis del par en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos con rebajes. V-59
Tabla V-15. Condiciones de operación de la transmisión objeto de estudio. V-65
Tabla V-16. Resumen de la descripción de los escenarios..... V-65
Tabla V-17. Resumen del análisis de los rebajes en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos..... V-66

Glosario de términos

NOMENCLATURA Y UNIDADES

a	[m]	Semi-ancho de contacto Hertziano
A	[m^2]	Área
ad		Addemdum
b	[m]	Ancho del engranaje
C	[Ns/m]	Amortiguador viscoso
C_r		Coeficiente de restitución
C_R	[mm]	Magnitud del rebaje
dd		Deddemdum
D		Número de Débora
D_f	[m]	Diámetro del deflector
E	[m]	Distancia entre la superficie y la interfase en el interior del cuerpo
E	[GPa]	Módulo elástico material
F	[N]	Fuerza
F_{hous}		Factor que introduce el impacto de la carcasa
Fr		Número de Froude
f_λ		Función de ponderación
G_t	[GPa]	Módulo elástico transversal del material
G_e		Parámetro de Greenwood que aglutina las propiedades de los materiales
G_v		Parámetro de Greenwood que aglutina las propiedades reológicas del fluido
G		Parámetro adimensional relacionado con las propiedades del material
h	[m]	Espesor de película fluida
h_{oil}	[m]	Altura del baño de fluido
i		Relación de transmisión
j_a	[m]	Distancia entre deflector y rueda
J_i	[kg m^2]	Inercia polar del engranaje i-ésimo

K	[N/m]	Rigidez lineal
K^t	[Nm]	Rigidez torsional
m	[mm]	Módulo
$\vec{n}$		Dirección normal
N		Nº de puntos de contacto potencial
p	[GPa]	Presión
P_h	[GPa]	Presión hertziana máxima
$\dot{q}$	[m^3/s]	Caudal de fluido
Q	[J/kgºK]	Calor
R	[mm]	Radio primitivo
R_a	[µm]	Rugosidad media
Re		Número de Reynolds
Rec		Número de Reynolds crítico
$\vec{r}$	[m]	Vector posición
s	[mm]	Distancia al punto primitivo
S	[m^2]	Superficie / Área sumergida
SR		Ratio de deslizamiento-rodadura
$\vec{t}$		Dirección tangencial
t	[s]	tiempo
T	[Nm]	Par
u	[m/s]	Velocidad en la dirección *x*
U		Parámetro adimensional relacionado con las propiedades del fluido
v	[m/s]	Velocidad en la dirección *y*
V	[m^3]	Volumen
V_{ent}	[m/s]	Velocidad de entrada del fluido
V_t	[m/s]	Velocidad tangencial en el punto primitivo
V_{oil}	[m^3]	Volumen de fluido en el baño
w	[m/s]	Velocidad en la dirección *z*
W		Parámetro adimensional relacionado con la carga aplicada en ambiente fluido
W_N	[N/m]	Carga por unidad de longitud
x		Factor de corrección del perfil
X_L		Factor incorpora comportamiento del lubricante
z		Número de dientes

SÍMBOLOS GRIEGOS

α	[Pa^{-1}]	Coeficiente viscoso de presión
β_1, β_2	[1/s], [s]	Constantes amortiguamiento Rayleigh
γ		Deformación transversal
ε_α		Relación de contacto
ε_i		Relación de contacto del segmento de aproximación o alejamiento
λ		Parámetro de Stribeck
κ	[m]	Radio de curvatura medio de las asperezas
μ		Coeficiente de rozamiento
μ_s		Coeficiente de rozamiento de las asperezas

ΔL	[mm]	Longitud del rebaje
υ_i		Coeficiente de Poisson de la rueda i-ésima
ν	[m^2/s]	Viscosidad cinemática
v_o		Umbral de velocidad relativa
η	[Pa s]	Viscosidad dinámica
η_{ef}		Eficiencia
ζ		Densidad de asperezas
ρ	[kg/m^3]	Densidad
ρ_o	[m]	Radio base
ς		Factor de desplazamiento de la resultante
σ	[Pa]	Tensión normal
τ	[Pa]	Tensión tangencial
φ_i		Ángulo de presión
χ		Factor de amortiguamiento histerético
δ	[m]	Distancia entre puntos potenciales de contacto medida sobre la normal a los perfiles / solapamiento
ξ		Coeficiente de amortiguamiento relativo
θ	[rad]	Ángulo de giro
ϕ		Factor de reducción térmica

SUBÍNDICES

0	Inicial
1	Piñón
2	Rueda conducida
B	En la base del diente (*Bottom*)
C	Central
Churning	Arrastre de lubricante
ehl	Elastohidrodinámica
eq	Equivalente
hl	Hidrodinámica
hys	Debido a la histéresis de los materiales
lub-cont	Debido al lubricante cuando existe contacto
lub-ncont	Debido al lubricante cuando no existe contacto
L	Contactos lineales (*Line contacts*)
m	Medio
min	Mínima
N	Normal
pitch	En el punto primitivo (*Pitch point*)
P	Contactos puntuales (*Point contacts*)
Roll	Rodadura o fricción por rodadura
Sliding	Deslizamiento o fricción por deslizamiento
Squeeze	Estrangulamiento del fluido
T	En la punta del diente (*Tip*)
t	Tangencial
Windage	Aerodinámica
x	Dirección *x*
y	Dirección *y*

SUPERÍNDICES

BL	Condiciones de lubricación extremas (*Boundary lubrication*)
DC	Contacto seco (dry contact)
FL	Condiciones de lubricación completamente fluidas (*Fully flooded lubrication*)
Isoterm	En condiciones isotérmicas
ML	Condiciones de lubricación mixtas (*Mixed lubrication*)
Squeeze	Estrangulamiento del fluido
t	Torsional
˙	Derivada primera de la variable
¨	Derivada segunda de la variable

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

I.1. Motivación

Las transmisiones mecánicas se utilizan en todo tipo de aplicaciones industriales como mecanismo o sistema encargado de transferir potencia de un elemento generador de energía a otro receptor de la misma. Una de las más empleadas es la que utiliza como elemento transmisor de energía ruedas dentadas o engranajes. Este tipo de transmisiones es muy común por sus características de robustez, fiabilidad y compacidad. Sin embargo, si destaca una característica que defina y haya hecho que se imponga al resto de transmisiones, es su alta eficiencia energética en los regímenes de operación más adversos. Aunque, por otra parte, son uno de los sistemas mecánicos de mayor complejidad de diseño por el elevado número de elementos que los constituyen. Como consecuencia, este tipo de transmisiones sufren un alto número de averías y fallos inesperados, provocando un aumento en los costes de operación y mantenimiento. La necesidad de conocer el comportamiento del conjunto y de desarrollar técnicas y herramientas que proporcionen esta información, dio lugar al modelo dinámico, desarrollado por Fernández del Rincón [Fernández, 2010] e Iglesias Santamaría [Iglesias, 2013], del que parte este trabajo de Tesis.

Paralelamente al estudio de las transmisiones por engranajes, en el contexto actual los combustibles fósiles son una fuente de energía no renovable, que resulta cara y contaminante, la cual es de interés reducir su consumo.

A este respecto, existe la necesidad de emplear transmisiones cada vez más eficientes, no solo por la reducción inherente del consumo energético y por tanto de los costes de operación, sino por cumplir los cada vez más estrictos requisitos medioambientales [Euro 6, 2008]. Las políticas medioambientales han obligado a reducir el nivel de emisiones, así como el ajuste de la economía de consumo de combustible. Aunque estas dos razones son suficientes para la investigación en este ámbito, en paralelo existen otras razones para mejorar este aspecto. Es lógico pensar, que cuanto más eficiente es una transmisión, menos calor va a disipar y por tanto, menor va a ser su temperatura de operación. Todo ello va a redundar en que la probabilidad de ocasionar fatiga superficial en el diente o un fallo prematuro del engranaje sea menor. Por lo tanto, aumentar la eficiencia no sólo va a producir una reducción de los costes de operación y mantenimiento en el corto plazo, sino que también va a disminuir el número de averías en el medio y largo plazo.

I.2. Objetivos

Teniendo en cuenta el contexto descrito en la sección anterior, este trabajo es la continuación del realizado previamente y recogido en sendas memorias de Tesis de Fernández [2010] e Iglesias [2013]. El objetivo último es incrementar el conocimiento acerca de las transmisiones por engranajes en el ámbito de los fenómenos disipativos presentes en el contacto y en el ámbito de la eficiencia energética.

Teniendo presente este objetivo global, se plantean los siguientes objetivos parciales:

1. Realizar el análisis de los fenómenos disipativos presentes en transmisiones por engranajes. El fin es mejorar el cálculo de esfuerzos del modelo de partida, mediante formulaciones analíticas que no ralenticen el cálculo de las ecuaciones dinámicas.

2. Estudiar el impacto de estos fenómenos disipativos en la eficiencia del sistema, con el objetivo de determinar cuál es su importancia dependiendo de las condiciones de operación.

3. Elaborar una metodología de cálculo de la eficiencia para transmisiones por engranajes que permita tener en cuenta todos los fenómenos disipativos.

4. Analizar el efecto de las correcciones de tallado y modificaciones de perfil en la eficiencia. Utilizadas para mejorar las características dinámicas de la transmisión, pero no está suficientemente probado su interés desde el ámbito de la eficiencia energética.

I.3. Estructura de la memoria

Esta memoria de Tesis consta de seis capítulos estructurados como se detalla a continuación.

En el presente *Capítulo I* se establece la motivación y los objetivos a abordar en el trabajo desarrollado.

En el *Capítulo II* se presenta el estado del conocimiento relativo a la simulación dinámica de transmisiones mediante engranajes. Se presentarán algunos de los modelos matemáticos de transmisiones por engranajes encontrados en la literatura científica, distinguiendo los aspectos que los definen: i) descripción de la geometría de las ruedas; ii) localización de los puntos o áreas de contacto; iii) definición de los esfuerzos de contacto y iv) formulación y procedimiento de integración de las ecuaciones dinámicas. Una vez definidos los aspectos comunes a todos los modelos dinámicos, se centrará el estudio en los fenómenos disipativos presentes en el contacto y las metodologías de cálculo de la eficiencia. Finaliza este capítulo con la síntesis y valoración crítica de los modelos matemáticos para al cálculo de la eficiencia.

El *Capítulo III* tiene como objetivo presentar los fundamentos teóricos del modelo de contacto entre engranajes. En este capítulo inicialmente se muestra la terminología y se describe el modelo de partida desarrollado previamente en la Universidad de Cantabria (modelo GEDUC). Esta descripción se realiza con la misma estructura realizada en el *Capítulo II*, distinguiendo los cuatro aspectos expuestos para la definición de los modelos. En éstos se detallan las capacidades del modelo de partida aplicadas a este trabajo. Una vez expuesto el modelo de partida, se presentan los fundamentos del contacto mecánico y la tribología necesarios para la comprensión de los modelos propuestos en el *Capítulo IV*.

En el *Capítulo IV* se presentan las formulaciones que simulan el comportamiento de cada uno de los fenómenos disipativos, distinguiendo en qué condiciones de operación y régimen de lubricación son válidos. Para terminar este capítulo, se muestra la metodología propuesta para el cálculo de la eficiencia cuando se tienen en cuenta todos los fenómenos previamente expuestos. Además, se particulariza para la fricción por deslizamiento por ser el fenómeno que más afecta la eficiencia en las condiciones de operación a estudiar. Paralelamente al procedimiento propuesto, se incluye otro procedimiento basado en formulaciones analíticas ampliamente utilizado en la comunidad científica y que servirá de comprobación de los resultados obtenidos.

En el *Capítulo V* se aborda el análisis de los resultados de eficiencia para una transmisión por engranajes cilíndricos rectos con tres tipos de dientes: i) estándar; ii) con correcciones de tallado; y iii) con modificaciones de perfil (rebajes en la punta). Para ello se realiza el análisis cuasi-estático de la transmisión para las tres tipologías de dientes y se calcula su eficiencia cuando se tiene en cuenta la fricción por deslizamiento. En este capítulo se presentan cinco análisis, tres en los que se varía el nivel de par aplicado a la transmisión (uno por cada tipo de diente) y dos en los que se varían los parámetros geométricos del diente. Concretamente uno cuando se varía el parámetro que define la corrección y otro cuando se varían los parámetros que definen los rebajes en la punta del diente.

Por último, en el *Capítulo VI* se recopilan las principales aportaciones y conclusiones de esta Tesis Doctoral y se presentan las líneas de investigación que quedan abiertas.

NOTA ACLARATORIA: La Universidad de Cantabria, en la cual se deposita esta Tesis Doctoral, recoge en los artículos 37 y 38 (CG 26/9/11) de su Normativa de Estudios de Doctorado los Requisitos para la Mención Internacional en doctorados regidos por reales decretos anteriores al RD 99/2011. Dicta como requisito que "*parte de la tesis doctoral, al menos el resumen y las conclusiones, se haya redactado y sea presentado en una de las lenguas habituales para la comunicación científica en su campo de conocimiento, distinta a cualquiera de las lenguas oficiales en España*". Por ello, tanto el resumen como las conclusiones presentadas en esta Tesis se encuentran escritos en inglés, con su correspondiente traducción al español.

Capítulo II

ESTADO DEL CONOCIMIENTO

II.1. Introducción

Las transmisiones mediante engranajes se utilizan en numerosas aplicaciones que abarcan diferentes ámbitos de la Industria (sector de la automoción, energético, agrícola, manufacturero, etc…). Existe una demanda creciente de transmisiones más eficientes que permitan reducir los costes de operación y mantenimiento y, además, cumplan con los cada vez más estrictos requisitos medioambientales [Euro 6, 2008].

Con el objetivo de analizar el comportamiento de las trasmisiones mediante engranajes, la comunidad investigadora ha tratado de dar respuesta a dicha demanda, creando modelos matemáticos capaces de reproducir las características reales de este sistema mecánico. Esto conduce a dos vertientes diferenciadas; una experimental basada en la recogida y tratamiento de datos medidos en transmisiones in-situ (en operación o mediante ensayos experimentales) y otra más teórica centrada en el desarrollo de herramientas matemáticas, capaces de reproducir el comportamiento real del sistema.

Existe una amplia gama de soluciones y enfoques al problema de modelizado de estos sistemas mecánicos. Por esta razón, en la literatura científica se pueden encontrar diversos trabajos recopilatorios que tratan de establecer una cierta clasificación de los distintos modelos.

Özgüven y Houser [Özgüven, 1988a] realizaron una revisión de los modelos dinámicos, estableciendo la clasificación a partir de diferentes aspectos (tensiones de flexión, cargas actuantes en otros elementos, nivel de ruido emitido, eficiencia de la transmisión, fiabilidad,

durabilidad, frecuencias naturales, etc…). Dada la amplia variedad de modelos existentes para el análisis del comportamiento dinámico de este sistema, en dicho trabajo se destacó la dificultad de agruparlos. Otro autor que propuso una clasificación de modelos fue Wang [2003b]. En su trabajo recopilatorio se centró en los aspectos no lineales que caracterizan el comportamiento dinámico de este tipo de transmisiones, por ejemplo la rigidez variable, la presencia de holguras y la fricción.

Este trabajo de Tesis se centra en el desarrollo de un modelo matemático planteando, como trabajo futuro, su correlación con medidas experimentales. Por esta razón, en este capítulo se va a presentar los modelos matemáticos de transmisiones mediante engranajes que han servido de soporte para el desarrollo del presente trabajo. Concretamente, uno de los objetivos principales de esta memoria es la mejora del modelo de contacto entre dientes. La revisión literaria se orientará a esta temática, no obviando el resto de características necesarias para implementar el análisis en régimen cuasi-estático y dinámico. No es objetivo de esta memoria aportar una descripción detallada de todos los modelos existentes, aunque sí se pretende, al menos, proporcionar las bases de los distintos enfoques relativos al diseño y análisis de este tipo de elementos, tratando de presentar las dificultades que es necesario abordar.

II.2. Modelos matemáticos de transmisiones mediante engranajes

En esta sección se presentan los modelos de transmisiones mediante engranajes que han servido de apoyo, y referencia, al desarrollo del trabajo. Como se ha planteado, el objetivo último es la mejora del modelo de esfuerzos de contacto del modelo dinámico de partida GEDUC. Por el alcance de este trabajo de Tesis, se va a abordar el análisis en régimen cuasi-estático de la transmisión, planteando incorporar como línea futura el análisis en régimen dinámico. Por esta razón, aunque en este trabajo no se vaya a realizar el análisis dinámico, en la revisión bibliográfica si se estudiarán los aspectos comunes a este tipo de modelos. Esto implica que las formulaciones no deberán llevar asociado un gran coste computacional (analíticas), que haga inabordable la resolución de las ecuaciones dinámicas del movimiento.

II.2.1. Aspectos comunes a los modelos

Con carácter general, a partir del análisis de distintos modelos dinámicos de transmisiones por engranajes encontrados en la literatura, se han observado aspectos comunes a todos:

- Descripción de la geometría de las ruedas
- Localización de los puntos/áreas de contacto
- Definición de los esfuerzos de contacto
- Formulación y procedimiento de integración de las ecuaciones dinámicas

A continuación se detallan en qué consiste cada uno de estos aspectos, así como las singularidades de los enfoques y modelos más extendidos para implementar cada uno de ellos.

II.2.1.1. Descripción de la geometría de las ruedas

Una adecuada descripción de la forma de las ruedas es crucial para establecer los valores de flexibilidad de los dientes. De aquí que el primer problema que se plantea es la descripción de

los perfiles de los dientes (normalmente de evolvente), arcos de redondeo y trocoide. Esta primera etapa determina el grado de precisión del modelo global desarrollado, dado que además de tener un gran impacto sobre la flexibilidad/rigidez del sistema, también influye en otros parámetros de vital importancia tales como las fuerzas de contacto y el error de transmisión.

La descripción geométrica de las ruedas podría enmarcarse en una disciplina comúnmente conocida como teoría de engrane [Litvin, 1995, 2004], que es definida como la rama de la ciencia relacionada con la geometría diferencial, la fabricación, diseño y la metrología de engranajes. A través de la teoría de engrane, se determina la geometría de los perfiles de los dientes, la elaboración de las herramientas de generación de los engranajes, así como los procedimientos necesarios para su fabricación y verificación. Uno de los procedimientos más extendidos, para la construcción de los perfiles de los dientes, es el basado en el enfoque vectorial propuesto por Litvin [1960, 1994, 2004]. Consiste en determinar el perfil de los engranajes analíticamente a partir de los perfiles de los útiles de generación y es análogo al proceso industrial con el que son fabricados.

La cremallera y el piñón tallador son los útiles de generación más utilizados para la obtención de ruedas exteriores e interiores respectivamente [Fernández, 2010], [Iglesias, 2013]. A partir de las ecuaciones vectoriales que definen los perfiles de la herramienta y la ecuación de engrane (con la imposición de la condición de tangencia de las superficies) de la ecuación (II.1), se obtiene la descripción de los perfiles de los engranajes por tramos. Específicamente, cada tramo del engranaje corresponderá a uno de los tramos del útil de generación utilizado.

$$\vec{n}^{S}_{perfil} \cdot \vec{v}^{S}_{relativa} = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

Donde $\vec{n}^{S}_{perfil}$ es el vector de la dirección normal de los perfiles en contacto y $\vec{v}^{S}_{relativa}$ la velocidad relativa entre ellos.

Otras propuestas para abordar el problema de la definición de la geometría de los dientes se pueden encontrar en [Di Puccio, 2005, 2006].

Dentro de este aspecto mención especial tiene el tallado de ruedas con correcciones y modificaciones de perfil. Por la importancia que tienen en este trabajo de Tesis, se realizará una revisión bibliográfica de estudios relacionados en la sección II.2.2.

II.2.1.2. Localización de los puntos/áreas de contacto

Una vez que se ha determinado la geometría de las ruedas, el siguiente aspecto en el que los autores adoptan diferentes soluciones es la localización de los puntos o áreas de contacto. Una de las metodologías más extendidas es la desarrollada por Litvin [1987], que plantea un procedimiento similar al utilizado para la descripción de la geometría. Consiste en establecer los puntos de contacto potencial mediante la imposición de la condición de tangencia de las superficies de ambos engranajes. Una vez definida la localización del contacto, a partir de la curvatura de las superficies definidas en el proceso de generación, se determinan las elipses de contacto (teoría de Hertz). A este procedimiento generalmente se le denomina análisis de contacto del diente y es también conocido con las siglas TCA (*Tooth Contact Analysis*). En este planteamiento no se considera el efecto de la carga en los dientes de los engranajes, de modo que podría hablarse de diseño cinemático de los perfiles. Existen diversas aplicaciones de TCA, y variantes de este procedimiento, que ayudan en el diseño de transmisiones, proporcionando las trayectorias de los puntos de contacto, así como la orientación de las

correspondientes elipses de contacto (engranajes cónicos espirales [Argyris, 2002], hipoidales [Zhang, 2007] y engranajes de tornillo sin fin [Seol, 1996]). Algunos autores recurren a otras alternativas, como la obtención de la mínima distancia entre las superficies de cada diente [Sheveleva, 2007], [MacLennan, 2002], incorporando el efecto que los errores de perfil [Wink, 2005, 2007] y el desgaste del diente [Wojnarowski, 2003].

Debido al coste computacional asociado, la localización de los puntos de contacto adquiere gran importancia en el caso de los modelos dinámicos. La elección del tipo de procedimiento para resolver este problema dependerá del propósito final del modelo a desarrollar. Si el objetivo final del modelo es analizar el comportamiento dinámico de la transmisión, la mayor parte de los modelos suelen recurrir a la representación idealizada del comportamiento cinemático de la transmisión (método de Litvin), limitando la existencia de los contactos a la línea o plano de engrane [Blankenship, 1995a, 1995b], [Velex, 1996]. De este modo, partiendo de una posición inicial y conociendo los movimientos de la rueda y el piñón, considerados como sólidos rígidos, es posible obtener los puntos en contacto, así como la profundidad de penetración entre los perfiles (solapamiento). Los métodos de cálculo de mínima distancia llevan asociados un coste computacional difícilmente asumible en paralelo con la integración numérica de las ecuaciones dinámicas.

II.2.1.3. Definición de los esfuerzos de contacto

Una vez determinados los puntos/áreas de contacto entre dientes, se calculan los esfuerzos de contacto. Existe una gran variedad de modelos y formulaciones para incorporar el comportamiento del contacto entre dientes. A partir del análisis de los distintos modelos encontrados en la literatura científica, se han propuesto dos grandes clasificaciones dependiendo del objetivo perseguido:

- **Modelos detallados del contacto.** Dada su precisión en el cálculo de esfuerzos, suelen llevar asociado un gran coste computacional derivado de la integración numérica de ecuaciones basadas en teorías de contacto mecánico y de mecánica de fluidos. Este enfoque suele utilizarse en modelos de engranajes que realizan el análisis en régimen cuasi-estático.
- **Modelos simplificados del contacto.** Utilizan las mismas teorías de cálculo de esfuerzos pero, en vez de ser integradas numéricamente en cada instante o posición, emplean expresiones analíticas que reducen considerablemente el tiempo de simulación. Este segundo tipo de expresiones son menos precisas, dado que llevan asociadas una serie de aproximaciones para alcanzar el compromiso precisión-esfuerzo computacional deseado para el modelo. Esta implementación de los esfuerzos de contacto suele utilizarse en modelos de engranajes centrados en el análisis del comportamiento dinámico del sistema.

Como se ha planteado, este trabajo tiene como uno de sus objetivos principales analizar el contacto entre dientes. Acorde con su importancia, se plantea un apartado específico (sección II.2.3), en el que se realizará una revisión bibliográfica de modelos de contacto utilizados en la literatura científica.

II.2.1.4. Formulación y procedimiento de integración de las ecuaciones dinámicas

Dado que el comportamiento dinámico de las transmisiones mediante engranajes queda fuera del alcance de este trabajo, no se van a incluir las ecuaciones dinámicas del modelo de partida en esta memoria. Sin embargo, si se incluirán algunas clasificaciones de modelos dinámicos que pueden encontrarse en la literatura, con el objetivo de contextualizar el modelo de partida GEDUC. Por último, se hará una breve mención al procedimiento de integración de las ecuaciones dinámicas, por ser un aspecto importante en el análisis dinámico.

Clasificación de los modelos dinámicos

Özgüven y Houser [Özgüven, 1988a], en su trabajo recopilatorio, reconocen cinco grupos distintos en los que ubicar los diferentes modelos dinámicos: de factores de amplificación, con flexibilidad del diente, dinámicos, rotor-dinámicos y torsionales. Los autores presentaron una descripción detallada de cada uno de ellos, reconociendo la dificultad de ubicar algunos como dinámicos o rotor-dinámicos. Dentro de esta clasificación, el modelo de partida GEDUC, se enmarca en el tercer grupo: modelos dinámicos.

En la práctica la clasificación propuesta por Özguven y Houser es de poca utilidad. En general, se realiza partiendo del modo de abordar la excitación paramétrica, que surge como consecuencia de la fluctuación en la rigidez de contacto [Kahraman, 1991b]. La clasificación propuesta por Kahraman y Singh [Kahraman, 1991b] considera las siguientes alternativas para describir los esfuerzos de contacto:

- Modelo Lineal y rigidez constante (*Linear Time Invariant LTI*)
- Modelo Lineal y rigidez variable (*Linear Time Variant LTV*)
- Modelo No-Lineal y rigidez constante. (*Non Linear Time Invariant NLTI*)
- Modelo No-Lineal y rigidez variable. (*Non Linear Time Variant NLTV*)

Dentro de esta clasificación el modelo de partida GEDUC se puede considerar NLTV, dado que la formulación de los esfuerzos de contacto es no lineal y la rigidez es variable, debido entre otros efectos al de la consideración de una o más parejas de dientes en contacto.

La incorporación de grados de libertad, debido a la consideración de ejes y rodamientos para la simulación de una pareja de ruedas, permite a su vez una nueva clasificación de los modelos. En esta línea se encuentra la clasificación de Wang, Li y Peng [Wang, 2003b], en la cual los modelos se agruparían en:

- Modelos de 1 g.d.l.
- Modelos de múltiples grados de libertad con una sola pareja de ruedas.
- Modelos de múltiples grados de libertad con múltiples parejas de ruedas sin considerar ejes de transmisión y soportes.
- Modelos de múltiples grados de libertad para una o múltiples parejas de ruedas incorporando ejes, soportes, carcasa, etc.

Dentro de esta clasificación, el modelo de partida GEDUC se enmarca en el último grupo, aunque en esta memoria de Tesis no se hayan considerado los ejes y rodamientos.

El interés creciente en la incorporación de la flexibilidad de un mayor número de elementos permitiría una última clasificación [Fernández, 2010] distinguiendo entre:

- Modelos de parámetros concentrados
- Modelos de elementos finitos
- Modelos híbridos

El modelo de partida GEDUC se enmarca en el último grupo de modelos híbridos. Para realizar el cálculo de esfuerzos se utiliza un modelo de elementos finitos, el cual calcula las deformaciones globales, y un modelo no lineal, que obtiene las deformaciones locales mediante teoría hertziana.

Procedimiento de integración de las ecuaciones dinámicas

Las principales dificultades, para la integración de las ecuaciones dinámicas, radican en la variabilidad de la rigidez y en la presencia de no linealidades. Las no linealidades surgen por la pérdida de contacto y posible contacto en el flanco opuesto, así como al cambio de sentido de los esfuerzos de fricción. La resolución de estos problemas requiere la utilización de diversos métodos, y estrategias, en función del objetivo del análisis (esfuerzos, tensiones, comportamiento dinámico, efecto de las modificaciones en la forma de los dientes, etc.) y del tipo y número de ecuaciones diferenciales que es preciso integrar.

Velex, Maatar y Raclot [Velex, 1997] desarrollaron diversos procedimientos de tipo numérico en su modelo dinámico [Velex, 1996], distinguiendo, en función del dominio de trabajo, dos métodos: en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia.

El método más utilizado es la integración numérica directa en el dominio temporal [Velex, 1996], [Padmanabhan, 1995]. La principal ventaja de esta alternativa radica en su aplicabilidad en el análisis tanto de la respuesta estacionaria como transitoria.

La integración en el dominio de la frecuencia presenta la dificultad adicional de que la matriz de rigidez depende del tiempo. Por esta razón su utilización está menos extendida, aunque existen autores que se decantan por este método [Perret-Liaudet, 1996], [Velex, 1997].

II.2.2. Correcciones y modificaciones de perfil

Uno de los objetivos de este trabajo es el análisis de engranajes con correcciones y modificaciones en el perfil del diente, así como su impacto en la eficiencia del sistema. Por esta razón, en esta sección se presentarán trabajos relacionados con este tipo de transmisiones y su impacto en el funcionamiento del sistema.

II.2.2.1. Correcciones de perfil

La corrección del perfil de los dientes es un procedimiento ampliamente utilizado en la Industria. Tiene como objetivo principal equiparar la durabilidad de parejas de ruedas con relación de transmisión diferente de la unidad. Consecuentemente muchos autores se han interesado en el estudio del comportamiento dinámico de este tipo de ruedas.

Townsend [1979] realizó una comparativa entre engranajes corregidos de baja relación de contacto (entre 1 y 2) y de alta relación de contacto (entre 2 y 3) en aspectos como la fatiga superficial, desgaste y de la flexibilidad de los dientes. Kuang [1989] analizó la influencia de la corrección en la concentración de tensiones en los dientes de engranajes rectos.

Posteriormente, Wang [2006] propuso un método para la reducción del ruido a partir de la introducción de la corrección de perfil óptima, con resultados muy satisfactorios. Imreck [2008] analizó la influencia de las correcciones en el desgaste a partir de ensayos experimentales, llegando a la conclusión que influían negativamente en este aspecto. Cuanto mayor era el factor de corrección, mayor era el daño acumulativo. Sánchez [2012] analizó el efecto en engranajes no estándar, en los que se modifica el addendum, alargando o acortando el diente, en el reparto de carga. El efecto producido del alargamiento y acortamiento de la parte superior del diente tiene el mismo impacto que la introducción de correcciones, de aquí que se pueda equiparar el análisis. Baglioni [2012] analizó el efecto de las modificaciones del addendum en la eficiencia, llegando a la conclusión de que existe un factor de corrección que produce que la eficiencia sea máxima, es decir, un factor de corrección óptimo. Además, analizó el efecto para diferentes distancias de trabajo y relación de transmisión de las ruedas.

De esta revisión se ha concluido que, aunque existen trabajos en el ámbito de la fatiga superficial y comportamiento dinámico de este tipo de engranajes, es necesario ampliar el conocimiento en el ámbito de eficiencia energética.

II.2.2.2. Modificaciones de perfil

La comunidad científica también ha mostrado interés por el análisis de engranajes con modificaciones de perfil, tanto en la punta como en la base del diente. El objetivo de las modificaciones de perfil es, generalmente, suavizar el efecto del cambio de número de dientes en contacto en el comportamiento dinámico del sistema. Concretamente, se dimensiona el rebaje para que la relación de contacto sea la unidad, en el régimen nominal de funcionamiento de la trasmisión (para un par específico).

Lin y Townsend [Lin, 1988] analizaron la influencia de las modificaciones de perfil en la punta del diente de ambos engranajes de la transmisión, con el objetivo de minimizar el efecto de la carga dinámica. A partir de la introducción de diferentes longitudes de rebaje, se observó que existía una longitud que conseguía que el error de transmisión no tuviera "salto", es decir, que la transición entre el contacto doble y simple se eliminó, consiguiendo que el contacto fuera aproximadamente simple ($\varepsilon_\alpha \approx 1$). Los mismos autores extendieron su trabajo [Lin, 1989, 1990] al caso en el que además de la longitud, se variaba la magnitud del rebaje y la tipología de la modificación (lineal o parabólica), para engranajes con baja y alta relación de contacto ($1 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2$ y $2 \leq \varepsilon_\alpha \leq 3$). Huang [2010] es otro autor que investigó sobre el comportamiento dinámico, al incluir modificaciones de perfil en la punta y base del diente en engranajes rectos y helicoidales. Al ser un modelo basado en la técnica de elementos finitos en tres dimensiones, también pudo abordar otra modificación de perfil como el "*crowning*". Faggioni [2011] presentó un método para la optimización (método Newton-Raphson) del comportamiento de engranajes rectos a partir de la inclusión de modificaciones de perfil en la base y punta del diente. Posteriormente, los autores propusieron la mejora del proceso de optimización a partir de la utilización de algoritmos genéticos en [Barbieri, 2012]. Chen [2013] presentó el cálculo y análisis de la rigidez de engrane de un modelo de engranajes rectos con baja y alta relación de contacto, con el objetivo de obtener la modificación de perfil que optimizaba el comportamiento dinámico para un valor de par aplicado determinado.

De esta revisión se ha obtenido una conclusión similar que para el caso de correcciones de perfil. Aunque existen trabajos relativos a las modificaciones de perfil, éstos están dirigidos

más al comportamiento dinámico que a la eficiencia energética. De aquí que exista interés en ampliar el conocimiento en este ámbito.

II.2.3. Definición de los esfuerzos de contacto

Como se ha explicado brevemente en la sección II.2.1.3, la definición de los esfuerzos de contacto es un aspecto crucial en el modelado de engranajes. A partir del análisis de esta problemática se han realizado dos grandes clasificaciones de modelos, dependiendo del objetivo a alcanzar.

- Modelos detallados del contacto
- Modelos simplificados del contacto

El primer grupo se centra en el análisis del contacto (generalmente en régimen cuasi-estático), calculando de forma precisa los esfuerzos y distribución de presión existente en el contacto. Para ello se recurre a métodos de elementos de finitos y al cálculo numérico de ecuaciones basadas en el contacto mecánico y, en el caso de presencia de fluido lubricante, en teorías de la mecánica de fluidos. El segundo grupo, orientado al análisis dinámico de la transmisión, utiliza las mismas teorías y bases de conocimiento para el cálculo de esfuerzos. Sin embargo implementa expresiones analíticas obtenidas a partir de aproximaciones, las cuales reducen considerablemente el tiempo de simulación. Dadas las simplificaciones realizadas, los resultados de estas expresiones analíticas son menos precisos que los obtenidos mediante cálculo numérico. Sin embargo, la mayoría de modelos dinámicos optan por ellas, a causa del alto coste computacional derivado de la integración de las ecuaciones dinámicas.

En esta sección se va a presentar, inicialmente, algunos de los modelos de engranajes enmarcados en cada grupo, que han servido de base para el desarrollo y mejora del modelo de contacto del modelo GEDUC. A su vez, estos modelos de contacto necesitan de formulaciones que representen el comportamiento de los esfuerzos en distintos regímenes de funcionamiento y lubricación. En esta línea, las teorías de contacto mecánico y la tribología establecen la base de conocimiento para la definición de dichas formulaciones. De lo anterior se concluye el interés de presentar, en la sección II.2.3.3., una revisión bibliográfica de las diferentes formulaciones utilizadas para implementar las fuerzas en contacto, independientemente de su naturaleza (normales, tangenciales o pares de arrastre), en modelos de transmisiones por engranajes.

II.2.3.1. Modelos detallados del contacto

En este primer grupo se enmarcan los modelos de engranajes cuya metodología para el cálculo de esfuerzos, permite resolver los fenómenos del contacto con una alta precisión. Concretamente, se van a distinguir los modelos basados en el método de los elementos finitos con mallado de alta densidad y los modelos con precisión suficiente para captar los fenómenos locales de contacto (calculo numérico de la distribución de presiones).

Modelos basados en MEF con mallado de alta densidad

En estos modelos, el mallado se determina generalmente a partir del análisis previo del proceso de contacto (TCA). Este procedimiento proporciona los puntos de contacto y la posición de cada una de las ruedas. Una vez definido el modelo de elementos finitos, el análisis cuasi-estático se resuelve empleando las herramientas disponibles para abordar el problema de contacto. Un ejemplo de éstos es el modelo de Argyris [2002], quien propuso la

construcción de únicamente una porción de los dientes de la rueda y el piñón para engranajes cónicos espirales. Litvin, siguiendo un procedimiento análogo al de Argyris, realizó su propuesta para ruedas de cara con piñón de dientes rectos [Litvin, 2002], para engranajes cilíndricos helicoidales [Litvin, 2003] y para transmisiones mediante tornillo sin fin [Litvin, 2006]. En dicho modelo se consideró empotrado el contorno de la rueda, mientras que los dientes del piñón se situaban en superficies rígidas indeformables. Otros autores en vez de utilizar un mallado denso en todo el conjunto analizado, han optado por un enfoque de mallado de alta densidad en las zonas potenciales de contacto, estableciendo un mallado menos denso en el resto del cuerpo del engranaje. En esta línea está la propuesta de Li [2007], que presentó un modelo 3D con mallado de mayor densidad en las proximidades a los puntos de contacto, que resuelve el problema de contacto mediante la utilización de un algoritmo basado en el método *Simplex*. Propuestas similares se encuentran en los trabajos de Wang [2003a] para 2 y 3D y Sirichai [1999] exclusivamente para 2D. Ambos casos emplearon una aplicación comercial con mallado automático. Brauer propuso el procedimiento de construcción de un modelo de ruedas cónicas a través de MEF [Brauer, 2002, 2003, 2004], con posibilidad de contacto en ambos flancos y con alta densidad de mallado en las zonas de contacto. Posteriormente lo extendió a 3D [Brauer, 2005].

En todos estos casos se recurre a la simulación conjunta de la pareja de ruedas que constituyen la transmisión. Este planteamiento exige la resolución de un sistema de ecuaciones de gran tamaño y con la existencia de no linealidades, lo que requiere un elevado esfuerzo computacional.

Modelos basados en el cálculo numérico de la distribución de presiones

Estos modelos calculan la distribución de presiones en el contacto fluido, con el fin de conocer las deformaciones locales y otros parámetros de interés, como son el espesor de la película de lubricante, la temperatura, etc… Como ya se ha mencionado el método de cálculo es numérico y a continuación se presentarán algunos modelos desarrollados por la comunidad científica.

Dowson y Higginson [Dowson, 1959] utilizaron un proceso iterativo para resolver el contacto fluido en régimen de lubricación elastohidrodinámico. Concretamente, resolvieron la ecuación de Reynolds numéricamente dentro de la teoría de la elasticidad para contactos lineales. Este proceso seguía dos métodos diferenciados dependiendo de la carga aplicada al contacto. El primero de estos métodos (método directo), utilizaba como dato de partida la forma de la película fluida, obteniendo a partir del proceso iterativo la distribución de presiones así como las deformaciones en el contacto. El segundo método (método inverso) empleaba como dato inicial la distribución de presiones y la función objetivo era el espesor de película de lubricante. El método directo se implementó para el caso de bajas cargas en el contacto, mientras que el método inverso fue utilizado para la resolución de problemas con cargas elevadas. Posteriormente, Hamrock y Dowson [Hamrock, 1977a, 1977b] extrapolaron el método directo a la resolución de problemas de contacto puntual.

Okurama [1982] presentó un enfoque novedoso hasta la fecha, partiendo del método por diferencias de Euler y el enfoque de Newton-Raphson, para resolver el problema del contacto lineal en presencia de lubricante. Aunque fueron Houpert y Hamrock [Houpert, 1986] los que a partir del uso de esta metodología, obtuvieron soluciones satisfactorias en el problema de contacto lineal para presiones Hertzianas máximas cercanas a 5 GPa. A partir de ese momento, se empezaron a adoptar *solvers* multinivel, siendo Lubrecht [1987] el primero que aportó soluciones precisas y rápidas para contactos tanto puntuales como lineales utilizando

técnicas de mallado múltiple (*multigrid*). Dowson y Yao [Dowson, 1990] desarrollaron un enfoque novedoso, en aquel momento, consistente en la aplicación del método Newton-SOR (*sucessive over relaxation*) a la resolución del problema de contacto. En línea con el método de la relajación de parámetros, Venner [1990, 1991, 1992] introdujo esquemas de relajación distributiva para resolver problemas de elastohidrodinámica para altas cargas. Yang [1992] estudió el comportamiento de fluidos no Newtonianos en contactos lineales bajo cargas dinámicas. Para ello resolvió, numéricamente, las ecuaciones de la energía y de Reynolds, obteniendo la temperatura y distribución de presiones en cada punto de contacto.

Actualmente, los métodos de resolución numérica del contacto fluido siguen basándose en los fundamentos y métodos expuestos, aunque contando con herramientas de cálculo más potentes y rápidas. Por ejemplo, De la Cruz [2011] presentó su modelo numérico de contacto en régimen elastohidrodinámico, en él combina la ecuación de Reynolds con el modelo de cavitación de Elrod. Para la integración numérica de dichas ecuaciones, se basó en el método de diferencias finitas propuesto por Vijayaraghavan [1989] y el método modificado de Newtow-Raphson, que ya había sido utilizado por Jalali [1998] y Kushwaha [2004]. Para la resolución del problema utilizó las técnicas de iteración de Gauss-Seidel, así como parámetros de relajación para encontrar la solución más rápidamente. Bobach [2011] propuso un modelo tridimensional elastohidrodinámico que tiene en cuenta el efecto de la temperatura, incorporando la fricción en condiciones de lubricación mixtas (teniendo en cuenta la rugosidad de los perfiles). El modelo está basado en el cálculo numérico de la ecuación de Reynolds, la de la energía y la transmisión de calor de Fourier. Anuradha [2011] estudió el cambio de las propiedades del lubricante en engranajes rectos paralelos, a través de la resolución numérica las ecuaciones de Reynolds y de la energía. Las propiedades reológicas de los fluidos se implementaron a través del modelo de Tait, el cual calcula la densidad en función de las condiciones de presión y temperatura [Bair, 2007], [Krupka, 2010] y del modelo de Doolittle para el cálculo de la viscosidad [Bair, 2007], [Kumar 2009]. Habchi [2012] propuso un modelo de elementos finitos para el cálculo de la distribución de presiones en el contacto bajo lubricación elastohidrodinámica en régimen cuasi-estático y presentó técnicas para la reducción del modelo con el objetivo de "aligerar" el proceso de cálculo. Este enfoque suele ser el elegido por muchos autores como Almqvist [2008] y Hartinger [2008], que utilizan códigos comerciales basados en *Computational Fluid Dynamics* (CFD), como FLUENT o ANSYS. Zhu [2012] propuso un modelo numérico para la resolución de la distribución de presiones en engranajes helicoidales considerando el efecto de la temperatura. Posteriormente Mihailidis [2013] presentó un modelo de cálculo de presiones, bajo condiciones de lubricación elastohidrodinámica extremas, en contactos lineales y fluidos no Newtonianos. Además, Jamali [2015] propuso un modelo similar para engranajes helicoidales, analizando el efecto de los rebajes en la punta de los dientes en la distribución de presiones.

II.2.3.2. Modelos simplificados del contacto

En este segundo grupo se enmarcan los modelos de engranajes cuyo cálculo de esfuerzos de contacto permite resolver las ecuaciones dinámicas que rigen el movimiento en un tiempo asequible. Para poder abordar esta problemática, normalmente es necesario adoptar algún tipo de simplificación en el cálculo de esfuerzos. Con el objetivo de reducir el coste computacional, la mayor parte de los modelos dinámicos son del tipo multi-cuerpo o de parámetros concentrados [Viadero, 2013].

Fue Lewis en 1892 quién a partir de considerar el diente como una viga empotrada, aportó la primera formulación de tipo analítico. En ella relacionó la carga en un diente con la tensión en la base del mismo. La conocida fórmula de Lewis, con diversas correcciones, continúa siendo una herramienta de diseño en la que se fundamentan diversas normas todavía vigentes. Baud y Peterson, Walter, Weber, Attia o Cornell han desarrollado diversas propuestas de tipo analítico partiendo de este planteamiento, reduciendo el problema al caso bidimensional. En esta misma línea, Weber [1949], mediante el cálculo de la energía de deformación debida a los esfuerzos de flexión, axiales, y hertzianos, obtuvo la deformación en un punto del diente. Yang [1985] solo consideró la rigidez de contacto de carácter Hertziano, que, posteriormente, amplió incluyendo los esfuerzos de flexión y axiales [Yang, 1987]. Incluso en la actualidad, autores como De la Cruz [2011] propone varios modelos dinámicos, basados en formulaciones analíticas del contacto entre dientes en presencia de fluido lubricante. Uno de estos modelos reproduce el comportamiento del contacto entre engranajes bajo cargas considerables (EHL) y otro en baja carga (HL), ambos de 1 grado de libertad (g.d.l.). Para la implementación de los esfuerzos de contacto bajo cargas elevadas (EHL), este autor tomó la aproximación de que el contacto era hertziano, incorporando la expresión de Votsios y Teodorescu (Ecuación (II.18)). Para cargas reducidas (HL) incorporó la formulación de Rahnejat (Ecuación (II.52)). Además desarrolló un modelo de una caja de cambios de 7 g.d.l., compuesta por siete parejas de engranajes, extendiéndolo, posteriormente, a un modelo de 13 g.d.l. a partir de la consideración de rodamientos y ejes. Se ha expuesto previamente que dicho modelo cuenta con la posibilidad de calcular numéricamente la distribución de presiones y el espesor de película. Este modelo numérico de cálculo, de la distribución de presiones, sustituiría al modelo analítico de contacto Hertziano en caso de necesitar mayor precisión en el cálculo de esfuerzos. Esto implicaría un aumento considerablemente del proceso de simulación.

Uno de los enfoques más extendidos en la comunidad científica es el que calcula los esfuerzos de contacto a partir del producto de las deformaciones sufridas en el contacto por la correspondiente rigidez de engrane. Partiendo de esta premisa, diversos autores han tratado de conseguir expresiones de la rigidez de engrane que permitan su aplicación en modelos dinámicos, sin llevar asociado un gran coste computacional. Para ello existen diversas propuestas analíticas, semi-analíticas y numéricas, así como diferentes enfoques para determinar el valor de rigidez de los dientes del engranaje. Normalmente parten del análisis de la deformación del diente en condiciones de carga.

Este valor de rigidez se ha estimado como un valor constante, igual al valor promedio de la rigidez en un ciclo de engrane [Kahraman, 1993], o como una onda cuadrada en el caso de engranajes rectos [Lin, 2002] o como el sumatorio de una serie de funciones armónicas, tanto en engranajes rectos como en helicoidales [Kasuba, 1981], [Theodossiades, 2001a]. Cai y Hayashi [Cai, 1994], aproximaron la rigidez de cada pareja de dientes mediante una parábola proponiendo la siguiente expresión:

$$k(t)=\frac{K(t)}{K_m}=\left[\frac{-1.8}{(\varepsilon_\alpha t_z)^2}t^2+\frac{1.8}{\varepsilon_\alpha t_z}t+0.55\right]\frac{1}{0.85\varepsilon_\alpha} \qquad \text{(II.2)}$$

Donde *k(t)* es la rigidez normalizada con respecto al valor promedio (K_m) y t_z es el periodo de engrane. El valor de K_m [Amabili, 1997] puede determinarse a partir de la rigidez máxima proporcionada por la norma ISO/DIS 6336-1.2 (1990) (actualizada por ISO 6336 de 2006). Esta expresión solamente proporciona la rigidez de una pareja de dientes, por lo que en el

caso de múltiples parejas en contacto éstas son combinadas como resortes en paralelo, obteniendo así la rigidez del conjunto.

El cálculo de la rigidez de engrane mediante formulaciones analíticas es de utilidad en determinados aspectos. Sin embargo resulta demasiado aproximado, si lo que se desea es un mejor conocimiento acerca del comportamiento dinámico de la transmisión. En este sentido hay que destacar que uno de los aspectos que caracterizan el comportamiento dinámico de las transmisiones por engranajes es precisamente la denominada frecuencia de engrane. Dicha frecuencia surge a partir de la variabilidad de la rigidez con el tiempo (o el ángulo), la cual está originada, entre otros aspectos, por el cambio en el número de parejas de dientes en contacto. Otros autores han abordado el problema desde el punto de vista numérico, como en el caso de Kuang [1992] quien, a partir de diversos análisis empleando un modelo plano de elementos finitos en condiciones de deformación plana, propone una formulación simplificada para el caso de engranajes de dientes rectos.

Hasta este punto, las formulaciones de rigidez descritas (Cai o Kuang), no tienen en cuenta las deformaciones producidas en los dientes adyacentes cuando una o varias parejas de dientes están transmitiendo el movimiento. Ebrahimi y Eberhard [Ebrahimi, 2006] trataron de definir un modelo simple que incorporara este aspecto, de forma que pudiera ser incluido en aplicaciones de análisis de sistemas multi-cuerpo (*Multibody Systems*) de propósito general.

Otro procedimiento común, que han aplicado diversos autores, para el cálculo de la rigidez fue el que utiliza un análisis previo mediante elementos finitos. Utilizando este enfoque, Howard [2001] y Jia [2006] obtuvieron la rigidez de engrane a lo largo del contacto entre una pareja de dientes para transmisiones ordinarias, He [2007] para trenes epicicloidales, o, más recientemente, Chung [2007] para engranajes de tornillo sin fin.

Otro enfoque habitual para el cálculo de los esfuerzos de contacto, es considerar que las deformaciones de los engranajes involucran fenómenos a dos escalas muy diferentes; por un lado se encuentra la escala local, debida a la distribución de carga sobre la superficie de los dientes en el contacto, y por otro el comportamiento del conjunto de la transmisión a una escala global. A ésta, además de la flexibilidad de los propios dientes y de la interacción entre parejas, se puede incorporar los efectos de otros componentes como los ejes, los elementos de apoyo y la propia carcasa. Se puede deducir de lo anterior, que lo ideal sería disponer de un modelo muy preciso al simular tanto el comportamiento local del engranaje como el global. Sin embargo, se ha comprobado el gran esfuerzo computacional necesario para proporcionar una buena resolución del comportamiento local del diente. Como consecuencia se requiere un compromiso entre la velocidad de simulación (esfuerzo computacional) y la precisión del modelo adoptado.

El primer intento de alcanzar este compromiso se debe a Blankenship y Singh [Blankenship, 1995a], quienes propusieron un modelo tridimensional con 6 grados de libertad por rueda, el cual permite la incorporación de momentos en la dirección perpendicular al plano de la transmisión. Este modelo no fue analizado inicialmente, sino que se simplificó de modo que la propuesta final estaba basada en la introducción de una excitación externa, que se obtenía mediante un análisis estático previo. Dicho modelo fue convenientemente linealizado y aplicado al caso particular de una transmisión mediante engranajes helicoidales [Blankenship, 1995b] y, posteriormente, extendido al caso de transmisiones simples con ruedas intermedias [Vinayak, 1995]. Velex y Maatar [Velex, 1996] formularon un modelo válido para engranajes cilíndricos de dientes rectos y helicoidales. En él se consideraba cada rueda dentada como un cilindro rígido con 6 g.d.l. Estos cilindros estaban conectados mediante una serie de resortes

asociados a los puntos de contacto potencial, dispuestos en el plano de engrane. Cada línea de contacto se discretizó en una serie de celdas, incorporando en cada una de ellas los posibles errores de perfil, paso, excentricidades y desalineamientos. El mayor de sus inconvenientes es la definición del valor correspondiente a la rigidez de contacto de cada celda. En dicha propuesta, la rigidez fue supuesta uniforme para todas las celdas y calculada solo teniendo en cuenta la deformación del diente (no la deformación propia del cuerpo de la rueda). Pimsarn y Kazerounian [Pimsarn, 2002, 2003] presentaron un método para la estimación de la fuerza de contacto a partir de la interferencia geométrica entre los cuerpos en contacto (método *Pseudo-Inteference Stiffness Estimation* o método PISE). Eritenel y Parker [Eritenel, 2005] calcularon la rigidez a través de la superposición de dos componentes, una que engloba la debida al cuerpo del engranaje, la flexión y la cortadura del diente y otra propia del contacto. Como particularidad de este modelo, la estimación de ambas rigideces se obtiene a partir de un análisis cuasi-estático previo, implementado mediante un modelo de elementos finitos. Este modelo de elementos finitos fue desarrollado expresamente para el análisis del contacto entre engranajes. Posteriormente, los autores [Eritenel, 2012] desarrollaron un modelo analítico de 6 g.d.l de parámetros concentrados en transmisiones de engranajes helicoidales. Como novedad, se presentó un modelo de rigidez equivalente formado por la rigidez traslacional y por la rigidez al doblado (*twist-spread*), reducidas ambas al centro de rigidez. Ajmi y Velex [Ajmi, 2005] realizaron la superposición de tres aspectos, la deformación debida al cuerpo del engranaje, la deformación del diente y la deformación de contacto. La deformación del cuerpo del engranaje se describe mediante un modelo de elementos finitos de tipo viga que considera flexión, torsión y tracción. La deformación del diente se formula a través de la teoría de Pasternak y la deformación del cuerpo del diente y su base se define a través de un modelo de rebanadas, cuyo comportamiento viene definido por la rigidez del punto de contacto.

El método de elementos finitos (MEF) constituye una herramienta fundamental en el planteamiento de muchos de los modelos descritos previamente. De hecho algunos autores han tratado de elaborar modelos híbridos que combinen las prestaciones del MEF, con formulaciones apropiadas para la descripción del contacto. En la práctica lo que proponen es distinguir entre deformaciones globales (de carácter lineal) y locales (de naturaleza no-lineal). Las deformaciones globales se abordan mediante un modelo de elementos finitos, mientras que las locales se describen mediante una formulación de tipo analítico.

Vijayakar [1991] propuso una formulación basada en la combinación de un análisis de elementos finitos tradicional y la solución de Bousinesq para una carga puntual actuando en un espacio semi-infinito. El modelo obtiene los términos de rigidez a partir de la descomposición de la deformación en dos zonas, una interior y otra exterior. Además, resuelve el problema de contacto aplicando un procedimiento basado en el método Simplex [Vijayakar, 1988]. Parker, Vijayakar e Imajo, [Parker, 2000a] aplicaron la metodología anterior al caso de una transmisión simple mediante engranajes de dientes rectos. Se consideró que las deformaciones elásticas se superponen al movimiento de sólido rígido. La integración de dicho sistema se lleva a cabo mediante el método de Newmark, transformando de este modo el problema dinámico en uno estático equivalente. Este procedimiento se ha incorporado en diversas aplicaciones comerciales, que se han empleado en el análisis estático y dinámico de transmisiones mediante engranajes cilíndricos rectos, helicoidales e hipoidales [Cheng, 2003] e incluso en el caso de transmisiones planetarias [Bodas, 2003], [Parker, 2000b], [Yuksel, 2004]. Vedmar y Henrikson [Vedmar, 1998, 2003] consideraron que la masa de cada rueda se encontraba concentrada en su centro geométrico y aplicaron un procedimiento similar al descrito por Vijayakar [1991] para la formulación de los esfuerzos

de contacto. Para ello, siguieron el trabajo previo de Vedmar [1981] aplicado al caso estático. Consideraron que las deformaciones de los puntos en contacto se dividen en dos términos, uno local y otro global. Los desplazamientos locales de los puntos de contacto con respecto a un punto situado a una profundidad ***h*** se obtienen mediante la formulación derivada por Weber y Banashek. Esta formulación se particularizó para el caso de la deformación (Ecuación (II.13)) y tensión (Ecuación (II.14)) plana. Las deformaciones globales se obtienen a partir de la superposición de dos modelos de elementos finitos. El objetivo era eliminar la distorsión local debida a la aplicación de una carga puntual. Frente al modelo de Vijayakar, el modelo de Vedmar evita la obtención de la presión actuante en la zona de contacto. Para ello, se sustituye la discretización del área de contacto y la integración de la solución de Bousinesq, por una formulación analítica en forma cerrada derivada de la teoría de Hertz. Este hecho junto con la consideración de masas concentradas, en lugar de distribuidas, simplifica el problema. Sin embargo en este caso se plantea la problemática de que la formulación para la obtención de la deformación local es una función no-lineal. En la Figura II-1 se muestra la descomposición de las deformaciones y los modelos de elementos finitos necesarios para la obtención de los coeficientes de flexibilidad**.**

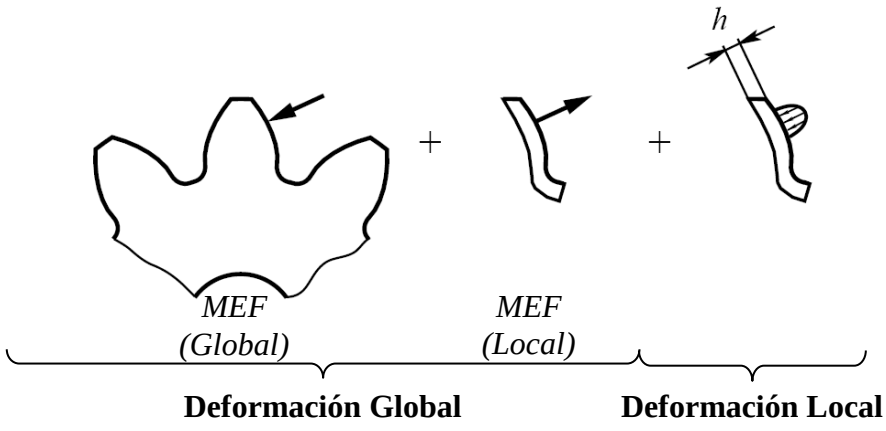


Figura II-1 Descomposición de las deformaciones del modelo de Vedmar [Fernández, 2010]

Andersson y Vedmar [Andersson, 2003] extendieron este método al caso de transmisiones con engranajes cilíndricos de dientes helicoidales. Lundvall, Strömber y Klarbring, [Lundvall, 2004] plantearon un procedimiento similar al descrito por Vedmar [1998, 2003], en cuanto a la consideración de masas concentradas y la utilización de un modelo de elementos finitos para la obtención de los esfuerzos de contacto. Posteriormente, Fernández [2010], apoyándose en un planteamiento similar al de Vedmar, propone un modelo para el cálculo de las fuerzas de contacto en el que se incorpora la posibilidad de contacto en el contra flanco.

II.2.3.3. Modelización de la tribología en el cálculo de los esfuerzos de contacto

En esta sección se presentarán algunas de las formulaciones de cálculo de esfuerzos de contacto incorporadas a modelos de transmisiones por engranajes, distinguiéndolas por tipología de esfuerzos:

- Esfuerzo normal (F_N)
- Esfuerzo tangencial (F_t)
- Esfuerzo por arrastre de fluido (T_{arras})

Para el análisis de estos modelos de cálculo de cada tipo de esfuerzos, se ha realizado un estudio bibliográfico desde el punto de vista de la teoría del contacto mecánico y la tribología. El objetivo principal de realizar el estudio con esta orientación es sentar las bases, y conceptos, de las formulaciones de los fenómenos disipativos existentes en el contacto. Además, se relacionarán con los modelos cuasi-estáticos y dinámicos de transmisiones que las utilizan.

II.2.3.3.1. Esfuerzos normales

Como se ha visto en secciones anteriores, existen modelos dinámicos que incorporan las fuerzas de contacto a partir de la rigidez equivalente de los engranajes, multiplicada por las deformaciones producidas. Por esta razón, para modelizar el esfuerzo normal en el contacto entre engranajes se recurre a la superposición de dos fenómenos, el término elástico (F_K), el cual está asociado a la rigidez de engrane, y el término debido al amortiguamiento viscoso (F_C), asociado a los fenómenos disipativos presentes en el contacto.

$$F_N = F_K + F_C \tag{II.3}$$

Término elástico

Para analizar el término elástico de la fuerza de contacto entre sólidos es necesario hacer mención al científico Heindrich Hertz, pionero en el estudio de los esfuerzos de contacto entre dos cuerpos perfectamente elásticos [Hertz, 1881]. Hertz, considerado uno de los padres del contacto mecánico, relacionó la fuerza de contacto normal con la deformación sufrida por ambos perfiles a través de una función no lineal (Ecuación (II.4)).

$$F_K = K\delta^n \tag{II.4}$$

Donde F_N es la fuerza normal, K es la rigidez, δ es la deformación y n es el exponente de no linealidad. Además percibió que cuando dos sólidos elásticos entraban en contacto, inicialmente, dicho contacto era en un punto o una línea y que cuando la carga de contacto crecía, este punto o línea de contacto se transformaba en un área de contacto, en la que la carga se repartía debido a las deformaciones elásticas. Aun cuando el contacto inicialmente era puntual, al aumentar la carga el área de contacto era, generalmente, elíptica (pudiendo ser circular dependiendo de las propiedades y geometría de los sólidos). En este caso se toma como aproximación que ambos sólidos en contacto son esferas equivalentes, cuyos radios son iguales a los de curvatura de los sólidos. Sin embargo, cuando el contacto era lineal, al aumentar la carga el área de contacto tendía, idealmente, a ser rectangular, asumiéndose entonces que este contacto es equivalente al que se produce entre dos sólidos cilíndricos.

La siguiente problemática que surgió, a partir de la teoría desarrollada por Hertz, es el cálculo de la rigidez entre dos sólidos en contacto con propiedades y geometrías diferentes. Han sido muchos los autores que centraron sus esfuerzos en el cálculo de dicha rigidez, en diferentes condiciones y tipos de contacto. Uno de estos autores fue Sabot [1998], quien desarrolló un modelo analítico para el cálculo de la rigidez de contacto en el caso de dos esferas de materiales isotrópicos. Este modelo es función de los radios de ambas esferas y de las propiedades de los materiales (Ecuación (II.5)).

$$K = \frac{4}{3\left(\frac{1-\upsilon_1^2}{E_1} + \frac{1-\upsilon_2^2}{E_2}\right)}\sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} \tag{II.5}$$

Donde υ_i es el coeficiente de Poisson de la rueda *i-ésima*, E_i el módulo de Young y R_i el radio primitivo.

Sabot [1998] utilizó también una simplificación de dicho modelo a partir de obtener las propiedades geométricas y de los materiales equivalentes (E_{eq} y R_{eq}) entre dos cuerpos esféricos en contacto. Considera que no existen impactos en la aproximación entre perfiles (Ecuación (II.6)).

$$K = \frac{2E_{eq}\sqrt{R_{eq}}}{3} \rightarrow \begin{cases} E_{eq} = \dfrac{2}{\left(\dfrac{1-\upsilon_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\upsilon_2^2}{E_2}\right)} \\ R_{eq} = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{cases} \tag{II.6}$$

Otro autor que propuso un modelo similar fue Rigaud [2003], quien estudió el comportamiento experimental de contactos Hertzianos precargados ante vibro-impactos (Ecuación (II.7)).

$$K = \frac{E_{eq}\sqrt{R_{eq}}}{3\sqrt{2}} \tag{II.7}$$

En todos los casos expuestos el exponente *n* de la ley de Hertz (Ecuación (II.4)) es igual a 1.5, dado que el contacto es entre cuerpos esféricos y por tanto el área de contacto es elíptica (contacto puntual). Este exponente es susceptible de tener otro valor dependiendo del material de ambas esferas en contacto, el cual debiera calcularse mediante análisis experimental.

Además del contacto puntual, hay autores que han analizado el contacto lineal, presente en transmisiones por engranajes rectos. Brändlein [1998], a través de ensayos experimentales, propuso que las fuerzas de contacto y la deformación estaban relacionadas a través de la ecuación (II.8):

$$F_K = K\delta^{1.08} \tag{II.8}$$

Posteriormente, las investigaciones de Yang [1985] en este ámbito demostraron que la linearización de la ley de Hertz es válida para el contacto lineal. Además, utilizó esta premisa en su modelo de contacto para engranajes rectos (Ecuación (II.9)).

$$F_K = K\delta \tag{II.9}$$

Este autor también propuso una formulación analítica de la rigidez de contacto para el caso de engranajes rectos. Supuso que ambas ruedas estaban fabricadas con los mismos materiales (Ecuación (II.10)).

$$K = \frac{\pi E b}{4(1-\upsilon^2)} \tag{II.10}$$

En esta misma línea, Timoshenko [1951] planteó que para dos cilindros de longitud *b* en contacto, el ancho del área de contacto (2a) y la distribución de presiones dependían de la carga aplicada (Ecuaciones (II.11) y (II.12)).

$$a = \left(\frac{8W_N R_{eq}}{\pi E_{eq}}\right)^{1/2} \quad donde \quad W_N = \frac{F_K}{b} \tag{II.11}$$

$$p(x) = \frac{2W_N}{\pi a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \rightarrow P_h = p(x=0) = \frac{2W_N}{\pi a} = \sqrt{\frac{W_N E_{eq}}{2\pi R_{eq}}} \tag{II.12}$$

Weber [1953] propuso un modelo analítico de cálculo de deformaciones locales, para problemas bidimensionales, conocido como modelo de *Weber-Banashek*. De acuerdo con estos autores, la deformación entre un punto situado en la superficie de un diente y un punto localizado a una profundidad ***e,*** cuando se dan condiciones de deformación plana, se obtiene mediante la expresión:

$$\delta = \frac{2\left(1-\upsilon^2\right)}{\pi E} W_N \left[\log\left(\frac{e}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{e}{a}\right)^2} \right) - \frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(\frac{e}{a}\right)^2 \left(\sqrt{1+\left(\frac{a}{e}\right)^2} - 1 \right) \right] \tag{II.13}$$

En el caso de tensión plana la formulación anterior se modifica dando lugar a:

$$\delta = \frac{2}{\pi E} W_N \left[\log\left(\frac{e}{a} + \sqrt{1+\left(\frac{e}{a}\right)^2} \right) - \upsilon\left(\frac{e}{a}\right)^2 \left(\sqrt{1+\left(\frac{a}{e}\right)^2} - 1 \right) \right] \tag{II.14}$$

Donde *a* se obtiene en función de la carga, las características geométricas y de los materiales de los cuerpos en contacto como:

$$a = \sqrt{\frac{4}{\pi}\left(\frac{1-\upsilon_1^2}{E_1} + \frac{1-\upsilon_2^2}{E_2} \right) \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} W_N} \tag{II.15}$$

Otra propuesta fue la que presentó Dubowsky [1971], que relacionó la deformación con la fuerza de contacto a través de la rigidez de los sólidos (Ecuación (II.16)):

$$\delta = A\left[\log\left(\frac{B \cdot b^2}{R_1 R_2} \right) + 1 \right] \rightarrow \begin{cases} A = F_K \left(\dfrac{\dfrac{1-\upsilon_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\upsilon_2^2}{E_2}}{b} \right) \\ B = \dfrac{b(R_1 - R_2)}{F_K \left(\dfrac{1-\upsilon_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\upsilon_2^2}{E_2} \right)} \end{cases} \tag{II.16}$$

En el ESDU-78035 Tribology Series [ESDU, 1978] se presentó un modelo similar al de Dubowsky (Ecuación (II.17)), siendo *A* y *B* los parámetros expuestos en la ecuación (II.16).

$$\delta = A\left[\log(4B) + 1 \right] \tag{II.17}$$

Votsios y Teodorescu [Votsios, 2003] propusieron otra formulación analítica derivada del contacto Hertziano, definiendo la rigidez, y la deformación del contacto, a partir de parámetros geométricos y de los materiales:

$$F_K = \left[\frac{\pi b E_{eq}}{2\left[\log\left(\dfrac{2b}{a} + 0.5 \right) \right]} \right] \delta \tag{II.18}$$

$$\delta = \left[\frac{2\left[\log\left(\dfrac{2b}{a} + 0.5 \right) M \dot{\delta}^2 \right]}{\pi L E_{eq}} \right]^{1/2} \quad \text{donde} \quad M = b\rho\pi {R_{eq}}^2 \tag{II.19}$$

Donde $\dot{\delta}$ es la velocidad de aproximación entre sólidos, *M* la masa y *a* es el semi-ancho de contacto, siendo un parámetro del que existen varios modelos para caracterizar su comportamiento. Por ejemplo, De la Cruz [2011] es uno de los autores que utilizó la formulación anterior para el cálculo de esfuerzos normales de contacto (Ecuación (II.18) y

(II.19)), calculando el semi-ancho de contacto *a* mediante la propuesta de Gohar [2008] (Ecuación (II.20)).

$$a = \left(\frac{4W_N R_{eq}}{\pi E_{eq}} \right)^{1/2} \tag{II.20}$$

Término debido al amortiguamiento viscoso

Además de los modelos puramente elásticos, como los expuestos hasta este punto, existen modelos que tienen en cuenta la energía de disipación en el contacto normal. Estos modelos dependen de la velocidad de aproximación y alejamiento de los perfiles en contacto. Como consecuencia se modelizan generalmente como fuerzas viscosas a través de la expresión:

$$F_C = C_{eq}\dot{\delta} \tag{III.21}$$

La existencia de fluido lubricante y el régimen de operación de la transmisión determinan qué fenómenos disipativos están presentes en el contacto. Asimismo, el amortiguamiento equivalente vendrá determinado por el comportamiento histerético del material (F_{hys}), si existe deformación de los perfiles, y por el del fluido (F_{lub}), en caso de que esté presente en el contacto.

$$F_C = F_{hys} + F_{lub} = C_{eq}\dot{\delta} \tag{III.22}$$

Amortiguamiento histerético

Este fenómeno disipativo está asociado a la pérdida de energía durante la deformación-impacto de los perfiles. Los primeros en presentar un enfoque que tenía en cuenta la energía disipada en este proceso fueron Kelvin y Voigt [Goldsmith, 1960]. En su propuesta, además de considerar una rigidez lineal para modelizar las deformaciones, añadieron un término dependiente de la velocidad de deformación, que se ha denominado "a posteriori" como amortiguamiento histerético (Ecuación (II.23)). Denominado así por las pérdidas debidas al ciclo de histéresis de los materiales de los dos sólidos en contacto.

$$F_{hys} = C_{hys}\dot{\delta} \tag{II.23}$$

Donde C_{hys} es el amortiguamiento viscoso equivalente debido a la histéresis del material. Por su simplicidad, este modelo ha sido utilizado por un amplio número de investigadores como Dubowsky [1971, 1977], Rogers [1977] y Khulief [1987] entre otros.

Kasuba [1981] y Lin [1988a, 1988b], siguiendo el modelo de Kelvin-Voigt, relacionaron el valor del amortiguamiento viscoso con la rigidez de contacto *K* mediante el coeficiente de amortiguamiento relativo ξ, de acuerdo con la siguiente expresión:

$$C_{hys} = 2\xi\sqrt{K\frac{J_1 J_2}{J_1 \rho_{0_1}{}^2 + J_2 \rho_{0_2}{}^2}} \tag{II.24}$$

Donde J_i es la inercia polar del engranaje *i-ésimo* y ρ_{0i} es el radio base. Para la determinación del coeficiente de amortiguamiento relativo, son muchos los autores que proporcionan valores indicativos. Kasuba [1981] aplica valores entre 0.05 y 0.15, Umezawa [1984, 1986a, 1986b] entre 0.06 y 0.07, Lin [1988], por ejemplo, propone adoptar valores entre 0.03 y 0.17 y Özgüven [1988] toma un valor de 0.1. En algunos casos es posible encontrar modelos que consideran un valor de amortiguamiento constante [Ozgüven, 1988b], mientras que en otros varían en función de la rigidez de contacto [Kasuba, 1981], [Amabili, 1997].

Yang [1985, 1987] consideró que el amortiguamiento se debe exclusivamente a la deformación local de tipo Hertziano. En base a esta hipótesis la fuerza de amortiguamiento se introduce como una función de la magnitud de penetración (δ):

$$C_{hys} = \frac{6(1-C_r)K}{\left[(2C_r-1)^2+3\right]\dot{\delta}^{(-)}}\delta \rightarrow C_r = 1-0.022\left(\dot{\delta}^{(-)}\right)^{0.36} \quad \text{(II.25)}$$

Donde C_r es el coeficiente de restitución, calculado a partir de la velocidad relativa al inicio del impacto ($\dot{\delta}^{(-)}$) y K es la rigidez del contacto. De este modo, el amortiguamiento solamente tiene un valor positivo si la velocidad es de aproximación ($\dot{\delta}>0$) y no de alejamiento.

En otros casos se ha considerado un amortiguamiento de Rayleigh, combinación lineal de la masa y la rigidez. Este tipo de alternativa ha sido adoptada por Parker, Vijayakar e Imajo [Parker, 2000a] de forma que la matriz de amortiguamiento del sistema se expresa en función de la correspondiente a la masa (M) y a la rigidez (K):

$$C_{hys} = \beta_1 M + \beta_2 K \quad \text{(II.26)}$$

Los valores de los coeficientes $\boldsymbol{\beta_1}$ y $\boldsymbol{\beta_2}$ se ajustan mediante el análisis de la respuesta del modelo teórico frente a una excitación de tipo impulsional, concretamente, se determinan aplicando el método del decremento logarítmico y el error de transmisión dinámico resultante debe proporcionar una relación de amortiguamiento del 7%. Lundvall, Strömberg y Klarbring [Lundvall, 2004] también consideraron la inclusión de este tipo de amortiguamiento adoptando los siguientes valores para las constantes $\boldsymbol{\beta_1}$ = 0.4 10^{-3} (1/s) y $\boldsymbol{\beta_2}$ =0.5 10^{-3} (s).

El modelo de Kelvin-Voigt considera que la disipación de energía en la fase de compresión es igual que la de restitución a la forma original. Este hecho no se ajusta al comportamiento real. De aquí que Hunt y Crossley [Hunt, 1975] propusieran una formulación que tuviera en cuenta este aspecto (Ecuación (II.27)).

$$F_{hys} = \chi \delta^n \dot{\delta} \quad \text{(II.27)}$$

Donde χ es el factor de amortiguamiento histerético y proponiendo para su cálculo la siguiente expresión:

$$\chi = \frac{3(1-C_r)}{2}\frac{K}{\dot{\delta}^{(-)}} \quad \text{(II.28)}$$

Donde $\dot{\delta}^{(-)}$ es la velocidad de impacto inicial. Este modelo es válido para el caso en el que el contacto directo se produzca en el centro de la distribución de tensiones y sin considerar los efectos de la fricción. Dicho modelo ha sido utilizado por muchos investigadores, como por ejemplo Guess [2010], Marhefka [1999] y Papetti [2011]. Este modelo presenta la limitación de que solo proporciona resultados que se adecuan al comportamiento real cuando el coeficiente de restitución es alto ($C_r \approx 1$). Por esta razón, Herbert y McWhannell [Herbert, 1977] propusieron un modelo en el cual el parámetro de mayor incidencia en el factor de amortiguamiento histerético es el coeficiente de restitución (Ecuación (II.29)).

$$\chi = \frac{6(1-C_r)}{\left[(2C_r-1)^2+3\right]}\frac{K}{\dot{\delta}^{(-)}} \quad \text{(II.29)}$$

En línea con esta propuesta, muchos autores han realizado aportaciones para el cálculo del factor de amortiguamiento histerético. La propuesta de Lankarani y Nikravesh [Lankarani, 1990] se basa en el cálculo de la energía cinemática perdida en los impactos en función del

coeficiente de restitución. El factor de amortiguamiento histerético, cuando las características de amortiguamiento son iguales en ambas fases de compresión y restitución, se define como:

$$\chi = \frac{3\left(1-C_r^2\right)}{4}\frac{K}{\dot{\delta}^{(-)}} \tag{II.30}$$

Este modelo es válido, en general, para contactos en que la energía disipada es pequeña comparada con la máxima energía elástica absorbida (C_r es prácticamente la unidad).

Todos los modelos presentados parten de la premisa de que el área de contacto es pequeña y, por tanto, es considerada puntual. Por lo que cuando los sólidos sufren grandes deformaciones locales y el área de contacto es mayor (elíptica), se necesitan otros modelos como el presentado por Gonthier [2004]:

$$\chi = \frac{\left(1-C_r^2\right)}{C_r}\frac{K}{\dot{\delta}^{(-)}} \tag{II.31}$$

Otra propuesta es la de Flores [2011], la cual determina la energía de disipación a partir de la indentación máxima (deformación en el vibro-impacto).

$$\chi = \frac{8\left(1-C_r\right)}{5C_r}\frac{K}{\dot{\delta}^{(-)}} \tag{II.32}$$

Todos los modelos basados en la propuesta de Hunt y Crossley son extrapolables al caso de contacto lineal, cambiando el coeficiente *n* de no linealidad. Los autores sugieren que este valor oscile entre 1 y 1.5 en este tipo de contacto. Por ejemplo, Dietl [2000], para el contacto de elementos de rodamientos de fricción consideró que el coeficiente de no linealidad era 1.08 propuesto por Brändlein [1998].

Amortiguamiento del lubricante

Este fenómeno está relacionado con la energía disipada por la interacción de los perfiles con el fluido. Para representarlo, muchos autores se han basado en el modelo de Kelvin-Voigt (amortiguamiento viscoso equivalente), siendo capaces de simular el comportamiento del fluido cuando los dos dientes se acercan, se alejan o contactan.

$$F_{lub} = C_{lub}\dot{\delta} \tag{II.33}$$

Para su cálculo y análisis son necesarios conceptos relativos a la mecánica de fluidos y a la lubricación, que se define como la ciencia que estudia el comportamiento de un fluido que se encuentra en el contacto entre elementos de máquinas [Currie, 1993]. Esta ciencia comprende el mecanismo de lubricación por película fluida y la teoría de lubricación hidrodinámica postulada por Osborne Reynolds [Reynolds, 1886]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h\left(u_1+u_2\right)}{2}\right) + \rho\left(w_1 - w_2 - u_2\frac{\partial h}{\partial x}\right) + h\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{II.34}$$

Donde p es la presión a la que está sometido el fluido, ρ es su densidad, h es el espesor de película fluida, η es la viscosidad dinámica y u_i y w_i son las velocidades de la rueda *i-ésima* en la dirección x y z respectivamente.

Mediante la ecuación de Reynolds, se puede definir la distribución de presiones en el medio fluido, a partir del conocimiento del espesor de película o viceversa. Por esta razón, para calcular analíticamente la distribución de presiones en un contacto fluido, es necesario hacer

alguna aproximación con respecto al espesor de película fluida. En régimen elastohidrodinámico, autores como Ertel y Grubin [Grubin, 1949] asumen que la película de lubricante en el contacto es constante. En régimen hidrodinámico, los autores (por ejemplo Guibault y Wiegert [Guibault, 2012], [Wiegert, 2013]) aproximan la forma de los perfiles de los dientes a una función parabólica.

Todo lo expuesto justifica que haya autores que propongan formulaciones analíticas que determinen el espesor de película fluida en los distintos regímenes de lubricación; estas formulaciones servirán como paso previo para calcular la distribución de presiones en dichos regímenes y, por tanto, la fuerza viscosa debida al lubricante. Todo lo anterior induce el interés por analizar los siguientes aspectos:

- Formulaciones del espesor de la película fluida
- Formulaciones de fuerzas viscosas en régimen elastohidrodinámico
- Formulaciones de fuerzas viscosas en régimen hidrodinámico

Formulaciones del espesor de la película fluida

El modelo de Ertel y Grubin es el precursor de la elastohidrodinámica, como área de conocimiento, y su trabajo es considerado la primera aportación en este ámbito. Ertel y Grubin [Grubin, 1949] concluyeron que bajo grandes cargas, el contacto entre sólidos elásticos en presencia de fluido producía pequeñas deformaciones en sus superficies (definidas por la teoría de Hertz), mientras que la viscosidad aumentaba drásticamente (descrito previamente por el modelo de Barus [1893]). A partir del trabajo de Ertel y Grubin, se ha observado que en el régimen elastohidrodinámico: i) la forma del área de contacto es similar que la relativa a la teoría Hertziana; ii) se forma una película entre sólidos indeformable y, como consecuencia, las superficies de contacto pueden considerarse paralelas, iii) la distribución de presiones es semejante a la de la teoría Hertziana; y iv) la viscosidad del lubricante, en la zona de contacto, aumenta debido a la presión a la que está sometido el fluido.

A partir de incluir estas aproximaciones en la ecuación de Reynolds, aplicando las condiciones de contorno oportunas e implementando el modelo de viscosidad propuesto por Barus, se llega a la expresión analítica original de Ertel y Grubin (Ecuación (II.35)). En esta expresión se relaciona el espesor de película central de lubricante y los parámetros que definen el contacto de la siguiente forma:

$$h_C = 2.076 R_{eq} \left(\frac{\alpha \eta_o V_{ent}}{R_{eq}} \right)^{8/11} \left(\frac{E_{eq} R_{eq}}{W_N} \right)^{1/11} \tag{II.35}$$

Esta fue la primera de las ecuaciones analíticas para el cálculo del espesor de película fluida (central) existente en el contacto entre sólidos en presencia de lubricante. A partir de aquí han sido muchos los investigadores que han centrado sus esfuerzos en aportar trabajos a este respecto.

Dowson y Higginson [Dowson, 1961] realizaron una propuesta analítica, que reproduce el espesor de película mínima para contactos lineales (contacto entre dos cilindros) en condiciones extremas de lubricación elastohidrodinámica (Ecuación (II.36)).

$$h_{\min,L}^{BL} = R_{eq} 1.6 \left(\frac{G^{0.6} U^{0.7}}{W^{0.13}} \right) \tag{II.36}$$

Donde *G*, *U* y *W* son parámetros adimensionales dependientes de la carga, velocidad, propiedades reológicas y del material de los sólidos en contacto, definidos a partir de la ecuación (II.37).

$$G = 2\alpha E_{eq}, \quad U = \frac{\eta V_{ent}}{E_{eq} R_{eq}} \quad y \quad W = \frac{W_N}{2E_{eq} R_{eq}} \tag{II.37}$$

Donde α es el coeficiente viscoso de presión del fluido y V_{ent} es la velocidad de entrada de fluido.

Posteriormente, Archard y Cowking [Archard, 1965] desarrollaron una formulación analítica para el cálculo del espesor de película mínima, en el caso de contactos puntuales (Ecuación (II.38)).

$$h_{\min,P} = R_{eq} 2.04 \frac{(\Lambda G U)^{0.74}}{W^{0.074}} \rightarrow \Lambda = \frac{1}{1 + \frac{2R_{eq}}{3R_y}} \tag{II.38}$$

Dowson y Higginson [Dowson, 1968] modificaron su propuesta previa llegando a la siguiente expresión:

$$h_{\min,L}^{BL} = R_{eq} 2.65 \left(\frac{G^{0.54} U^{0.7}}{W^{0.13}} \right) \tag{II.39}$$

Hamrock y Dowson [Dowson, 1975] desarrollaron las bases teóricas para resolver, numéricamente, el espesor de película en contactos puntuales. Para ello, se ayudaron de la propuesta de Martin en régimen hidrodinámico (Ecuación (II.40)):

$$h_{\min,P}^{HL} = h_{C,P}^{HL} = R_{eq} 4.9 \left(\frac{U}{W} \right) \tag{II.40}$$

Además, los mismos autores [Dowson, 1976] propusieron una formulación, que a través del conocimiento de la película fluida en contactos lineales, se podía extrapolar a contactos puntuales. Para ello definieron el parámetro de "elipticidad", *k*, que relaciona los radios de curvatura equivalentes en las direcciones *x* e *y*.

$$h_{\min,P}^{BL} = h_{\min,L}^{BL} \left[1 - 1.6 e^{-0.62k} \right] \rightarrow k = \left(R_y / R_{eq} \right)^{2/3} \tag{II.41}$$

Ese mismo año también realizaron un propuesta para el cálculo del espesor de película en contactos puntuales, en condiciones de lubricación totalmente fluidas en vez de extremas [Dowson, 1976]. Asimismo relacionaron ambas condiciones de lubricación, entre sí, mediante parámetros adimensionales (*m* y *m**).

$$\left.\begin{aligned} h_{\min,P}^{FL} &= R_{eq} 3.63 \left(\frac{G^{0.49} U^{0.68}}{W^{0.073}} \right) \left(1 - e^{-0.68k} \right) \\ h_{C,P}^{FL} &= R_{eq} 2.69 \left(\frac{G^{0.53} U^{0.67}}{W^{0.067}} \right) \left(1 - 0.61 e^{-0.73k} \right) \end{aligned}\right\} \rightarrow \left\{\begin{aligned} h_{\min,P}^{BL} &= h_{\min,P}^{FL} \left(\frac{m-1}{m^*-1} \right)^{0.25} \\ h_{C,P}^{BL} &= h_{C,P}^{FL} \left(\frac{m-1}{m^*-1} \right)^{0.25} \end{aligned}\right. \tag{II.42}$$

Además de las formulaciones expuestas, muchos autores han hecho propuestas para el cálculo del espesor de película fluida en régimen de lubricación elastohidrodinámico, e incluso en otros regímenes.

Chittenden [1985] reformuló la ecuación de Dowson y Hamrock (Ecuación (II.39)) para contactos puntuales, en los que el fluido entraba por la parte de mayor semieje de la elipse. Rahnejat y Gohar [Rahnejat, 1985], estudiando el campo de las vibraciones en rodamientos de bolas y sus esfuerzos en régimen hidrodinámico, desarrollaron una formulación analítica para el cálculo del espesor de película fluida, a partir de los movimientos de entrada y estrangulamiento del fluido. Hooke [1988] desarrolló una formulación para el cálculo del espesor mínimo de película en contactos puntuales en EHL, utilizando el modelo de Barus para calcular la viscosidad. Greenwood [1988] es otro de los autores que ha propuesto formulaciones relativas al cálculo del espesor de película en contactos puntuales. Posteriormente, Hamrock [1991] presentó una formulación del espesor central de película fluida para contactos lineales (Ecuación (II.43)).

$$h_{C,L}^{FL} = R_{eq}\, 2.922 \left(\frac{G^{0.47} U^{0.692}}{W^{0.166}} \right) \qquad \text{(II.43)}$$

La Ecuación (II.43) se desarrolló para condiciones de lubricación completamente fluida, por lo que se tomó la aproximación de que las superficies de ambos sólidos eran idealmente lisas. Para el caso que las condiciones de lubricación sean mixtas o extremas, el efecto de la rugosidad no se puede omitir. Hamrock, para esta situación, consideró un parámetro corrector (γ_1) que aporta el comportamiento de la rugosidad en el cálculo del espesor central de película en condiciones de lubricación mixtas.

$$h_{C,L}^{ML} = h_{C,L}^{FL} \cdot \gamma_1 \qquad \text{(II.44)}$$

Moes [2000] presentó una formulación para el cálculo del espesor de película central, en cualquiera de los cuatro regímenes de lubricación. Para ello, superpuso el efecto de cuatro ecuaciones correspondientes a los límites de cada uno de los regímenes de lubricación. Esta formulación es capaz de predecir la película central, en los cuatro regímenes de lubricación, con una precisión del 90% dependiendo de ciertos parámetros geométricos, de carga y reológicos.

Formulaciones de fuerzas viscosas en régimen elastohidrodinámico

En el caso del régimen de lubricación elastohidrodinámico, muchos autores se han basado en el modelo de Kelvin-Voigt para representar el efecto del fluido en el contacto normal entre engranajes (Ecuación (II.45)). Debido a la deformación entre las superficies la mayoría de autores, que han desarrollado formulaciones analíticas a este respecto, parten de la premisa que el contacto se produce entre dos paredes idealmente lisas y, por tanto, el espesor de película es constante. Como resultado, solo consideran el efecto del estrangulamiento del fluido (*Squeeze*) en la ecuación de Reynolds, también denominado término de Empuje. El efecto producido por el estrangulamiento del fluido es proporcional a la velocidad de aproximación de ambas superficies, a la geometría de la transmisión y a las propiedades reológicas del fluido.

$$F_{ehl} = F_{Squeeze} = -C_{eq}^{Squeeze} \cdot \dot{h} \qquad \text{(II.45)}$$

Donde el signo negativo indica que esta fuerza es positiva cuando hay acercamiento de los perfiles ($\dot{h} < 0$).

Uno de los autores que analizó el efecto del fluido en el contacto normal entre engranajes fue Koster [1974] a partir de la siguiente expresión:

$$C_{eq}^{Squeeze} = 3\sqrt{2}\pi\eta b\left(\frac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2} \tag{II.46}$$

Donde h_C es el espesor de película fluida entre perfiles y η la viscosidad dinámica del fluido.

Guibault [2012], para el cálculo del amortiguamiento viscoso, obtuvo previamente la distribución de presiones en el contacto. Realizó la integración de la ecuación de Reynolds y aplicó las condiciones de contorno, por las cuales la presión es nula tanto a la entrada como a la salida del contacto ($p(a) = p(-a) = 0$). La fuerza normal debida al lubricante cuando hay contacto se obtiene integrando la presión a lo largo del contacto, quedando el amortiguamiento equivalente expresado como:

$$C_{eq}^{Squeeze} = \frac{8\eta b a^3}{{h_C}^3} \tag{II.47}$$

Otro modelo para simular el comportamiento del fluido cuando se produce acercamiento de los perfiles de los dientes, fue el propuesto por Li [2013]. En este trabajo presentó la mejora del modelo tribo-dinámico que había presentado anteriormente [Li, 2010]. Consideró tres efectos en el cálculo de fuerzas cuando las superficies de los sólidos son rugosas: el *squeeze*, la fricción por rodadura y la fricción por deslizamiento del fluido. El amortiguamiento viscoso lineal, debido al estrangulamiento del fluido (*squeeze*), lo formuló como:

$$C_{eq}^{Squeeze} = b\int_{-a}^{a}\frac{\eta(x,t)}{h(x,t)}dx \tag{II.48}$$

Formulaciones de fuerzas viscosas en régimen hidrodinámico

Para representar el efecto del fluido en el contacto normal entre engranajes en régimen hidrodinámico, muchos autores se han basado también en el modelo de Kelvin-Voigt. Sin embargo, en este régimen de lubricación, además del estrangulamiento del fluido alojado entre ambas superficies, existe otro fenómeno: físicamente, debido a que los dientes no sufren deformación, la entrada de fluido no se produce entre dos superficies paralelas, lo cual influye directamente en la distribución de presiones (denominado cuña física en el capítulo III). Ambos efectos son proporcionales a la velocidad (velocidad de aproximación de ambas superficies y velocidad de entrada de fluido), a la geometría de la transmisión y a las propiedades reológicas del fluido. Este tipo de modelos tiene especial interés en aquellas situaciones en las que se espera la separación de los flancos y la posibilidad de contactos intermitentes, como sucede en el traqueteo (*rattle*) de las transmisiones en vehículos.

Con el objetivo de utilizar la misma nomenclatura para todas las formulaciones presentadas y de tener en cuenta ambos fenómenos, se va a seguir la terminología presentada en la ecuación (II.49).

$$F_{HL} = F_{Entraining} + F_{Squeeze} = C_{eq}^{Entraining}\cdot V_{ent} - C_{eq}^{Squeeze}\cdot\dot{h} \tag{II.49}$$

Donde el signo negativo en el término del estrangulamiento del fluido indica que esta fuerza es positiva cuando hay acercamiento de los perfiles ($\dot{h} < 0$).

Sasaki [1962] fue uno de los primeros autores en presentar una formulación analítica para modelizar el comportamiento de la fuerza del contacto en este régimen de lubricación. Lo hizo a partir de la superposición del efecto de entrada y el del acercamiento del fluido:

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 2\eta b\dfrac{R_{eq}}{h_C} \\ C_{eq}^{Squeeze} = \dfrac{3\sqrt{2}R}{2}\eta b\left(\dfrac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2}\left[1-\dfrac{\sqrt{3}\pi\dot{h}}{2V_{ent}\sqrt{\dfrac{h_C}{R_{eq}}}+\sqrt{3}\pi\left|\dot{h}\right|}\right] \end{array}\right\} \tag{II.50}$$

Posteriormente, el modelo de Sasaki fue mejorado al incluir la consideración que realizó Martin [1916] en el término debido a la entrada de fluido.

$$\left\{C_{eq}^{Entraining} = \sqrt{6}\eta b\frac{R_{eq}}{h_C}\right\} \tag{II.51}$$

En la literatura [Wiegert, 2013], se ha comprobado experimentalmente que sin la parte dinámica de la fuerza ($F_{squeeze}$), esta constante pasa de tener un valor de 2 a tener uno de $\sqrt{6}$, por lo que la consideración de Martin en el modelo de Sasaki es necesaria.

Rahnejat [1984, 1985] desarrolló una propuesta para el cálculo de las fuerzas normales en régimen hidrodinámico para contactos puntuales, en condiciones iso-viscosas, y la particularizó para contactos lineales [De la Cruz, 2011]. Para ello, superpuso el efecto del estrangulamiento de fluido y el de la velocidad de entrada del fluido, obteniendo dos valores de fuerzas independientes que al final sumó.

$$\left\langle\begin{array}{ll} \left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 2b\eta\dfrac{R_{eq}}{h_C} \\ C_{eq}^{Squeeze} = \dfrac{3\pi b\eta}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{R_{eq}}{h_C}\right)^{\frac{3}{2}} \end{array}\right\} & \text{si} \quad \dot{h}<0 \\ \left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 2b\eta\dfrac{R_{eq}}{h_C} \\ C_{eq}^{Squeeze} = 0 \end{array}\right\} & \text{si} \quad \dot{h}>0 \end{array}\right\rangle \tag{II.52}$$

Se observa, en la ecuación (II.52), que el contacto se formula diferentemente si las superficies se acercan o se alejan, existiendo el efecto del estrangulamiento del fluido al acercarse los perfiles ($\dot{h}<0$) y no al alejarse ($\dot{h}>0$).

Bracanti, Rocca y Russo, [Brancati, 2005, 2007], [Rocca 2011] plantearon una expresión para el cálculo la fuerza normal teniendo en cuenta solo el estrangulamiento del fluido:

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 0 \\ C_{eq}^{Squeeze} = 3\eta b\left(\dfrac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2}\left[\dfrac{a\left(a^2-R_{eq}h_C\right)\sqrt{R_{eq}h_C}+\left(a^2-R_{eq}h_C\right)^2\arctan\left(\dfrac{a}{\sqrt{R_{eq}h_C}}\right)}{\left(a^2+2R_{eq}h_C\right)^2}\right] \end{array}\right\} \tag{II.53}$$

Dado que el modelo propuesto presenta una discontinuidad cuando el espesor de película tiende a cero, los autores interpretan que una vez alcanzado un determinado valor de espesor mínimo $h_C = h_{min}$ la lubricación es de tipo elastohidrodinámico. A partir de este valor de espesor de película (h_{min}) el amortiguamiento adopta un valor constante.

Gill-Jeong [2009] fue otro de los autores que planteó el efecto del contacto normal debido al fluido como un amortiguamiento viscoso.

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 3\eta b\left(\frac{a}{R_{eq}}\right)\left(\frac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2}\left[\frac{a\left(a^2 - R_{eq}h_C\right)\sqrt{R_{eq}h_C}}{\left(a^2 + 2R_{eq}h_C\right)^2} + \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{R_{eq}h_C}}\right)\right] \\ C_{eq}^{Squeeze} = 3\eta b\left(\frac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2}\left[\frac{a\left(a^2 - R_{eq}h_C\right)\sqrt{R_{eq}h_C}}{\left(a^2 + 2R_{eq}h_C\right)^2} + \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{R_{eq}h_C}}\right)\right] \end{array}\right\} \quad \text{(II.54)}$$

Guibault [2012] para el cálculo de su propuesta también se basó en la modelización del efecto del estrangulamiento del fluido en el acercamiento de los perfiles.

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 0 \\ C_{eq}^{Squeeze} = 6\sqrt{2}\eta b\left(\frac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2}\left[\frac{\sqrt{2}a\sqrt{R_{eq}h_C}}{\left(a^2 + 2h_C R_{eq}\right)} + \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{2h_C R_{eq}}}\right)\right] \end{array}\right\} \quad \text{(II.55)}$$

Wiegert [2013] fue otro autor que realizó una propuesta analítica para el cálculo de la fuerza normal en régimen de lubricación hidrodinámico. Esta propuesta está compuesta por el efecto de entrada de fluido y por el estrangulamiento del mismo, siguiendo la metodología de Sasaki [1962] y Rahnejat [1984].

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 3\eta b\frac{R_{eq}}{h_{fr}} \\ C_{eq}^{Squeeze} = 3\eta b\left(\frac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2}\left[\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{x_{fr}\sqrt{h_C}}{h_{fr}\sqrt{R_{eq}}} + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{x_{fr}}{\sqrt{2R_{eq}h_C}}\right)\right] \end{array}\right\} \quad \text{(II.56)}$$

En la ecuación (II.56) se observa que la fuerza depende de la posición de ruptura x_{fr} (donde acaba la distribución de presiones), del espesor de película fluida en dicha posición (h_{fr}) y en la posición central (h_c). Para el cálculo de la posición de ruptura es necesario el uso de métodos numéricos (Newton-Raphson).

Con el objetivo de plantear una expresión analítica donde no sea necesario recurrir a un método numérico, Wiegert plantea algunas formulaciones encontradas en la literatura. En la primera de ellas (Ecuación (II.57)) se plantea el cálculo de la fuerza en régimen de lubricación hidrodinámico, cuando existe estrangulamiento puro del fluido.

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 0 \\ C_{eq}^{Squeeze} = 3\sqrt{2}\pi\eta b\left(\frac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2} \end{array}\right\} \quad \text{(II.57)}$$

En la segunda formulación se tuvo en cuenta el estrangulamiento y la entrada de fluido (Ecuación (II.58)).

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = 2\eta b \dfrac{R_{eq}}{h_C} \\ C_{eq}^{Squeeze} = \left(\dfrac{3\pi^2 - 16}{2\pi}\right)\sqrt{2}\pi\eta b\left(\dfrac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2} \end{array}\right\} \tag{II.58}$$

Wiegert, nuevamente, basándose en las formulaciones encontradas en la literatura, realizó dos propuestas analíticas para el cálculo de las fuerzas de contacto en régimen hidrodinámico. Estimó que la primera (Ecuación (II.59)) introduce un error del 2% con respecto a la formulación que necesita métodos numéricos para el cálculo de la posición de ruptura (Ecuación (II.56)). La segunda (Ecuación (II.60)) es susceptible de introducir hasta un 20% de error.

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = \sqrt{6}\eta b \dfrac{R_{eq}}{h_C} \\ C_{eq}^{Squeeze} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\pi\eta b\left(\dfrac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2}\left[1 - \dfrac{2}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{3R_{eq}}{h_C}}\dfrac{\dot{h}}{2V_{ent}}\right)\right] \end{array}\right\} \tag{II.59}$$

$$\left\{\begin{array}{c} C_{eq}^{Entraining} = \sqrt{6}\eta b \dfrac{R_{eq}}{h_C} \\ C_{eq}^{Squeeze} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\pi\eta b\left(\dfrac{R_{eq}}{h_C}\right)^{3/2}\left[1 - \dfrac{\sqrt{3}\pi\dot{h}}{2V_{ent}\sqrt{\dfrac{h_C}{R_{eq}}} + \sqrt{3}\pi\left|\dot{h}\right|}\right] \end{array}\right\} \tag{II.60}$$

La primera expresión, evidentemente, se supone más precisa que la segunda, sin embargo esta segunda expresión es interesante desde el punto de vista numérico, dado que la función *atan(x)* podría presentar algunos problemas computacionales. A partir de las formulaciones correspondientes a Sasaki (Ecuación (II.50)), Sasaki corregida con el factor de Martin (Ecuación (II.51)) y la de Rahnejat (Ecuación (II.52)), Wiegert realizó una comparativa con sus dos propuestas (Ecuaciones (II.59) y (II.60)) en régimen dinámico. Implementó las cinco formulaciones para un oscilador de 1 grado de libertad. Concluyó que el comportamiento dinámico de sus dos propuestas y la de Sasaki corregida son muy similares, no siendo así con las otras dos formulaciones (Sasaki y Gohar). La razón de estos comportamientos es que las formulaciones parten de condiciones de contorno diferentes (*Swift-Stieber* en sus propuestas y *Half-Somerfeld* en el caso de Sasaki y Gohar). Además plantea la posibilidad de extender esta formulación, en principio válida solo para régimen hidrodinámico, a la lubricación elastohidrodinámica. Lo consiguió incorporando un sistema muelle-amortiguador en paralelo con el relativo a la hidrodinámica. Este sistema muelle-amortiguador es el encargado de implementar el comportamiento estructural de los cuerpos, mediante la inclusión de deformaciones de tipo Hertziano con amortiguamiento histerético (modelo Kelvin-Voigt o Hunt-Crossley).

II.2.3.3.2. Esfuerzos tangenciales

Se denomina fricción a la resistencia que existe al movimiento relativo entre dos elementos o superficies en contacto. Hay dos tipos de fricción dependiendo del movimiento relativo entre superficies: de deslizamiento y la rodadura. Además, la existencia de lubricante puede modificar en gran medida la hipótesis de rozamiento. Por esta razón, para el análisis de la fricción es necesario discriminar por movimiento relativo y por tipo de contacto:

- Fricción por deslizamiento
  - Fricción seca (deslizamiento entre sólidos)
  - Fricción fluida (deslizamiento entre capas de fluido)
- Fricción por rodadura
  - Rodadura debida a la deformación de los perfiles
  - Rodadura debida al fluido

$$F_{Fric} = F_{Sliding} + F_{Roll} \rightarrow \begin{cases} F_{Sliding} = F^{b}_{Sliding} + F^{v}_{Sliding} \\ F_{Roll} = F^{b}_{Roll} + F^{v}_{Roll} \end{cases} \quad \text{(II.61)}$$

Fricción por deslizamiento

La fricción por deslizamiento es un fenómeno disipativo, que existe cuando dos superficies en contacto deslizan entre sí. Debido a que los engranajes son de perfil de evolvente, esta velocidad de deslizamiento es perpendicular a la línea de engrane, como se presenta en la Figura II-2. En esta figura se muestra la velocidad de cada uno de los perfiles en contacto en la dirección de la línea de transmisión y en su perpendicular, así como la cinemática necesaria para la comprensión de esta sección. Donde *i* se corresponde con el contacto *i-ésimo*, el color rojo se corresponde con las velocidades del engranaje 1 y el azul con las del engranaje 2.

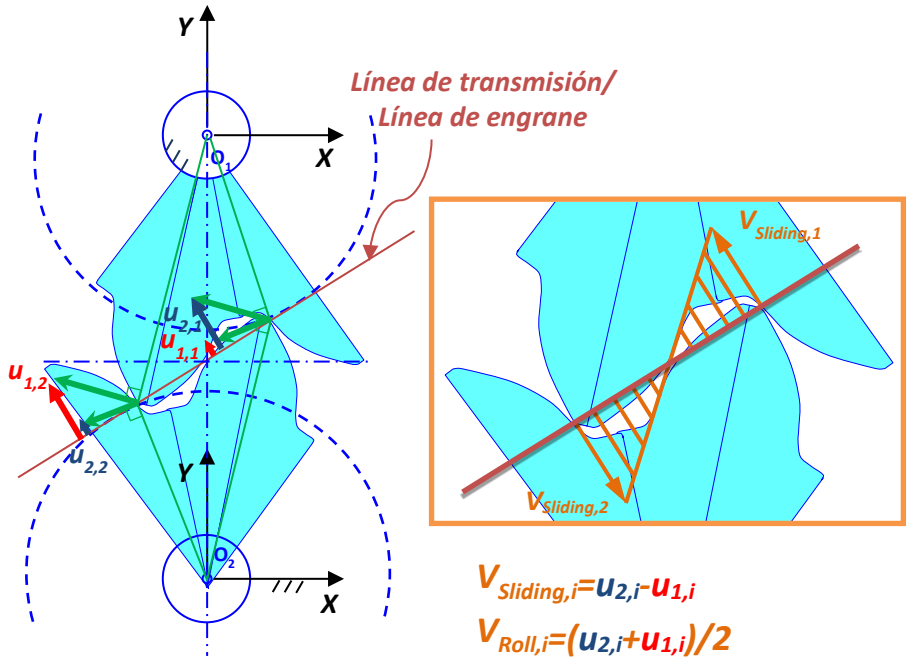


Figura II-2 Esquema de la cinemática en los puntos de contacto

Diversos autores han corroborado, experimentalmente, la importancia del rozamiento como excitación de fenómenos dinámicos en dirección perpendicular a la línea de engrane. En este sentido, Rebbechi [1996] analizó la fricción de una transmisión de engranajes rectos y comparó su modelo con el de Benedict [1961]. El objetivo era determinar la influencia de la fricción en la dinámica del engranaje. Hochmann y Houser [Hochmann, 2000] observaron que la magnitud de los desplazamientos en la dirección perpendicular puede ser varias veces superior al desplazamiento en la dirección de la línea de transmisión. Velex y Cahouet [Velex, 2000] analizaron la importancia de las fuerzas de rozamiento en el caso de bajas y medias velocidades, mediante el registro experimental de los esfuerzos en los apoyos. Marques [2015] analizó el efecto de la fricción en el reparto de carga en régimen cuasi-estático. Este autor observó una dispersión en el reparto de carga entre el caso sin rozamiento y el caso con coeficiente de fricción constante, tanto en la zona de contacto doble como simple.

Existen varias formas de modelizar este fenómeno disipativo:

- Modelo de Coulomb: la fricción se simula como una fuerza tangencial opuesta al movimiento relativo, de valor igual a una porción de la fuerza normal entre superficies en contacto.
- Modelo estadístico: la fricción se obtiene a partir del análisis de la topografía de las superficies en contacto, superponiendo la fricción debida al fluido y la debida al contacto entre las asperezas.
- Integración de la tensión tangencial: la fricción se calcula a partir de la integración de la tensión tangencial en el área de contacto.

Modelo de Coulomb

A través de este modelo, la fricción por deslizamiento se formula como una fuerza tangencial opuesta al movimiento relativo de valor igual a una fracción de la fuerza normal que actúa entre ambas superficies (Ecuación (II.62)).

$$F_{Sliding} = F^{b}_{Sliding} + F^{v}_{Sliding} = \mu F_N \tag{II.62}$$

Este factor de proporcionalidad entre la fuerza normal y la tangencial es lo que se denomina coeficiente de fricción (μ). A lo largo de años se ha formulado una gran cantidad de coeficientes de fricción, obtenidos mediante estudios experimentales aplicados a diferentes materiales, rugosidades y lubricantes. Sin embargo, el hecho de introducir el modelo de Coulomb genera una serie de inconvenientes numéricos, relacionados con la velocidad de deslizamiento nula en el punto primitivo. En el caso de engranajes con perfil de evolvente, supone que el sentido de la velocidad de deslizamiento entre perfiles experimente un cambio en esta región, que provoca el valor nulo del coeficiente de rozamiento en este punto. Desde el punto de vista de la integración numérica de las ecuaciones del movimiento, este hecho implica una discontinuidad que tiene consecuencias en el esfuerzo computacional y que debe ser abordada adecuadamente para evitar una excesiva ralentización del modelo resultante.

Muchas aportaciones, la mayor parte basadas en resultados experimentales, han tratado de explicar el comportamiento del coeficiente de rozamiento, así como su influencia en el comportamiento global de la trasmisión. De aquí el interés de estudiar este parámetro, decisivo, en el comportamiento dinámico del sistema. A continuación se presentarán formulaciones de interés, de coeficiente de fricción, así como estudios fundamentados en su análisis.

Uno de los primeros autores que trabajó en este aspecto fue Misharin [1958], quien propuso la siguiente formulación de coeficiente variable:

$$\mu = 0.325\left(V_{Sliding}V_{Roll}\nu\right)^{-0.25} \rightarrow \begin{cases} V_{Sliding}/V_{Roll} \in [0.4,1.3] \\ P = F_N / A_{cont} \geq 2.5 kg/cm^2 \\ \mu \in [0.02, 0.08] \end{cases} \quad \text{(II.63)}$$

Donde $V_{Sliding}$ es la velocidad de deslizamiento, V_{Roll} la velocidad de rodadura, ν la viscosidad cinemática (η/ρ), P la presión de contacto, F_N la fuerza normal, A_{cont} el área de contacto y μ el coeficiente de fricción.

Posteriormente, O'Donoghue y Cameron [O'Donoghue, 1960] propusieron la siguiente formulación de coeficiente de fricción, en las unidades del sistema británico:

$$\mu = 0.6\left[\frac{\left(R_a + 22\right)}{35}\right]\left(\eta^{1/8}V_{Sliding}{}^{1/3}V_{Roll}{}^{1/6}R_{eq}^{1/2}\right)^{-1} \rightarrow \begin{cases} R_a : \mu in \\ V_{Sliding}, V_{Roll} : in/s \\ R_{eq} : in \end{cases} \quad \text{(II.64)}$$

Donde R_a es la rugosidad media de los perfiles en contacto.

Otros autores que realizaron una propuesta de coeficiente de fricción en presencia de lubricante fueron Drozdov y Gavrikov [Drozdov, 1961], formulada en la expresión:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \left[0.8\sqrt{\nu}V_{Sliding} + V_{Roll}\psi + 13.4\right]^{-1} \\ \psi &= 0.47 - 1.3\cdot 10^{-3}P_h - 4\cdot 10^{-2}\nu \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} V_{Sliding} \leq 15\cdot V_{Roll} \in [3,20] \\ \nu \in [4,500] \\ P_h \in [0.4,2] GPa \end{cases} \quad \text{(II.65)}$$

Benedict y Kelley [Bendict, 1961] desarrollaron una formulación basada en la fricción en el contacto seco, a partir del ángulo de presión (φ_i) y las velocidades de deslizamiento y rodadura. Su aplicación es limitada dado que actualmente la mayoría de transmisiones son lubricadas.

$$\mu = 0.0127\log_{10}\left(\frac{14.83}{\cos(\varphi_i)V_{Sliding}V_{Roll}{}^2}\right) \quad \text{(II.66)}$$

Niemann [1983] propuso una formulación de coeficiente de fricción medio a lo largo de todo el ciclo de engrane:

$$\mu_m = 0.048\left(\frac{\frac{F_N}{b}}{V_{\Sigma C}\rho_{0_{eq}}}\right)^{0.2}\eta^{-0.05}R_a^{0.25} \rightarrow V_{\Sigma C} = 2V_{t_{pitch}}\sin(\varphi_i) \quad \text{(II.67)}$$

Donde V_{tpitch} es la velocidad tangencial en el punto primitivo, b es el ancho de cara y ρ_{0eq} es el radio de curvatura equivalente en el punto primitivo.

En esta misma línea se encuentra el coeficiente de fricción medio propuesto por la norma ISO 6336-4 [ISO6336, 1996], la cual se expresa como:

$$\mu_m = 0.143\left[\frac{F_N R_a}{\eta V_{\Sigma C} b\rho_{0_{eq}}}\right]^{0.25} \quad \text{(II.68)}$$

Iida [1985] desarrolló un coeficiente de rozamiento en función de la velocidad relativa de deslizamiento, con un modelo discontinuo definido por dos tramos rectilíneos. El primero, de pendiente positiva, pasa por el origen y el segundo, con pendiente negativa, se inicia en un valor dado de la velocidad de deslizamiento. La intersección de dichos tramos se produce en el punto de coeficiente de rozamiento máximo, cuya magnitud se obtiene a partir de:

$$\mu = c_1 \left(\frac{b\eta V_{Roll}}{F_N} \right)^{\beta} \tag{II.69}$$

Lin, Huston y Coy [Lin, 1988b] elaboraron un modelo torsional que incluía momentos resistentes debidos al rozamiento como consecuencia del deslizamiento relativo entre perfiles de dientes. Los autores hicieron dos propuestas de coeficiente de fricción, a consecuencia de la falta de consenso en cuanto a la formulación más adecuada. La primera, atribuida a Buckingham y utilizada por Pimsarn [2005a, 2005b], da el valor del coeficiente de rozamiento en función de la velocidad relativa de deslizamiento entre perfiles (*in/s*) según la expresión:

$$\mu = 0.05e^{-0.125V_{Sliding}} + 0.002\sqrt{V_{Sliding}} \tag{II.70}$$

La segunda alternativa (Ecuación (II.71)), propuesta por Benedict y Kelley, utiliza otros parámetros para calcular el valor del coeficiente de fricción: la magnitud de la carga aplicada (*lb*), el ancho de cara de la rueda (*in*), la viscosidad del lubricante (*lb s/in*) y la velocidad de rodadura (*in/s*).

$$\mu = 0.0127 \log_{10} \left(\frac{45.94 F_N}{\eta V_{Sliding} b V_{Roll}{}^2} \right) \tag{II.71}$$

Posteriormente, Bartz [1989] calculó el coeficiente medio para todo el ciclo de engrane, incluyendo los parámetros correspondientes al punto primitivo en la expresión:

$$\mu_m = 0.12 \left[\frac{F_N R_a}{\eta V_{ent} b R_{eq}} \right]^{0.25} \tag{II.72}$$

Vaishya y Houser [Vaishya, 2000, 2001a, 2001b, 2003] expusieron que en el cálculo del coeficiente de rozamiento era necesario tener en cuenta el régimen de lubricación. Para determinar el régimen de lubricación a considerar, analizaron el parámetro de Stribeck λ. Según sus estimaciones, para el rango de trabajo considerado, el valor de dicho factor era de 1.06, pudiendo incluso ser menor para cargas mayores o velocidades menores. De todo esto concluyeron que no era posible aplicar una formulación basada, exclusivamente, en la consideración de régimen elastohidrodinámico en condiciones de lubricación completamente fluidas. En este trabajo describieron tres formulaciones alternativas, válidas en condiciones de lubricación mixtas. Tras contrastarlas con resultados experimentales concluyeron que la formulación de Kelley y Lemanski (Ecuación (II.73)) era la que mejor se ajustaba a los resultados en el caso de lubricantes de viscosidad elevada, no proporcionando, para valores de viscosidad baja, ninguna de las formulaciones resultados satisfactorios.

$$\mu = 0.0099 \frac{1}{1 - \frac{R_a}{45}} \log_{10} \left(\frac{3.5 \cdot 10^8 F_N \eta_{ref}}{\eta^2 V_{Sliding} b V_t{}^2 \left(\rho_{0_1} + \rho_{0_2} \right)^2} \right) \tag{II.73}$$

Donde V_t es la velocidad tangencial, η y η_{ref} las viscosidades dinámicas del fluido y de referencia respectivamente. Los autores incorporaron esta y otras formulaciones en un modelo dinámico, revelando que existía una diferencia de comportamiento de los coeficientes de rozamiento a lo largo del ciclo de engrane. Sin embargo, esta variación no implicaba cambios significativos en el comportamiento dinámico de la transmisión, concluyendo que utilizar un coeficiente de fricción constante a lo largo del ciclo es suficientemente preciso para la mayor parte de los análisis dinámicos [Vaishya, 2003].

Velex [2000] estudió la influencia de la fricción en engranajes rectos y helicoidales a través de un modelo dinámico tridimensional basado en el MEF. Para la definición de las fuerzas de fricción empleó un coeficiente de fricción constante y las formulaciones de Benedict y Kelley (Ecuación (II.71)) y Kelley y Lemanski (Ecuación (II.73)), llegando a una conclusión semejante a la de Vaishya [2003]. Según estos autores parecía que la forma exacta del coeficiente de rozamiento era de importancia secundaria y que la respuesta dinámica venía determinada por el cambio de la dirección de la fuerza de fricción en el punto primitivo.

Doleschel [2002] calculó el coeficiente de fricción medio a partir de la combinación de la fricción seca y fluida mediante una función de ponderación (f_λ).

$$\mu_m = \mu_m^{EHL} f_\lambda + \mu_m^{DC}(1-f_\lambda) \rightarrow \begin{cases} f_\lambda = 1-\left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 & \text{si } \lambda<2 \\ f_\lambda = 1 & \text{si } \lambda \geq 2 \end{cases} \tag{II.74}$$

Para el cálculo de los coeficientes de fricción (μ_m^{EHL} y μ_m^{DC}) utilizó coeficientes de fricción de referencia, calculados experimentalmente (superíndice *R*).

$$\left.\begin{aligned} \mu_m^{EHL} &= \mu_m^{EHL,R}\left(\frac{p_h}{p_R}\right)^{\alpha_{EHL}}\left(\frac{V_{\Sigma C}}{V_{R,EHL}}\right)^{\beta_{EHL}}\left(\frac{\eta}{\eta_{R,EHL}}\right)^{\gamma_{EHL}} \\ \mu_m^{DC} &= \mu_m^{DC,R}\left(\frac{p_h}{p_R}\right)^{\alpha_{DC}}\left(\frac{V_{\Sigma C}}{V_{R,DC}}\right)^{\beta_{DC}} \end{aligned}\right\} \alpha_{EHL}, \beta_{EHL}, \gamma_{EHL}, \alpha_{DC} \text{ y } \beta_{DC} \rightarrow \text{Cálculo experimental} \tag{II.75}$$

Donde p_h y p_R son las presiones Hertziana máxima y de referencia respectivamente.

Posteriormente, Xu [2005] presentó una formulación de coeficiente de fricción variable, calculada a partir de la correlación del modelo con resultados experimentales. Los ensayos experimentales se realizaron en condiciones de lubricación complemente fluidas (EHL).

$$\mu(\theta) = e^{f(SR,P_h,\eta_{oil},R_a)} P_h^{\,b_2} |SR|^{b_3} V_{ent}^{\,b_6} \eta_{oil}^{\,b_7} \rho_{0_{eq}}^{\,b_8} \tag{II.76}$$

SR es el parámetro que relaciona la velocidad de deslizamiento con la de rodadura ($V_{Sliding}/V_{ent}$), P_h la presión Hertziana máxima en GPa y $f(SR, P_h, \eta_{oil}, R_a)$ se obtiene de la siguiente expresión:

$$f(SR, P_h, \eta_{oil}, R_a) = b_1 + b_4 |SR| P_h \log_{10}(\eta_{oil}) + b_5 e^{-|SR|P_h \log_{10}(\eta_{oil})} + b_9 e^{R_a} \tag{II.77}$$

Donde el vector de constantes **b**, se ha calculado a partir de regresión lineal y tiene un valor (-8.916465, 1.03303, 1.036077, -0.354068, 2.812084, -0.100601, 0.752755, -0.390958, 0.620305).

Martins [2006] mejoró el modelo propuesto por Niemann (Ecuación (II.67)) para el cálculo del coeficiente de fricción medio. Incorporó un parámetro que define el comportamiento del lubricante (X_L).

$$\mu_m = 0.048\left(\frac{\frac{F_N}{b}}{V_{\Sigma C}\rho_{0_{eq}}}\right)^{0.2}\eta^{-0.05}R_a^{0.25}X_L \rightarrow \begin{cases} V_{\Sigma C} = 2V_{t_{pitch}}\sin(\varphi_i) \\ X_L = \left(\frac{F_N}{b}\right)^{-d} \quad \text{y} \quad d = 0.0651 \end{cases} \tag{II.78}$$

He [2007a, 2007b, 2007c, 2008] analizó el efecto del coeficiente de fricción y el efecto de los rebajes de la punta del diente en la rigidez y el error de transmisión con su modelo dinámico de 6 g.d.l. Para ello implementó cuatro formulaciones de coeficiente de fricción distintas: i) constante; ii) condiciones mixtas de EHL (Benedict y Kelley); ii) condiciones completamente fluidas de EHL (formulación de Xu); y iv) función tipo arco tangente. Analizó el impacto del coeficiente de fricción en el comportamiento dinámico. Llegando a la conclusión de que las diferencias en el coeficiente de fricción no tienen apenas influencia en el comportamiento dinámico. Además, propuso una formulación de coeficiente de rozamiento compuesta con varios modelos, existentes en la literatura, según el tipo de régimen de lubricación.

Las conclusiones anteriores, justifican la utilización de formulaciones que simplifican el cálculo de la fuerza de fricción, y que emplean la mayor parte de los modelos dinámicos. En general, puede partirse de una estimación del valor promedio del coeficiente de rozamiento, considerando únicamente un modelo cinemático y aplicando alguna de las formulaciones disponibles [He, 2007a]. Una vez conocido el coeficiente de rozamiento medio, la fuerza de rozamiento puede obtenerse mediante una expresión del tipo [Vedmar, 2003], [Velex, 2000, 2002]:

$$\vec{F}_{roz} = -\mu_m \left|\vec{F}_N\right| \frac{\vec{V}_{Sliding}}{\left|\vec{V}_{Sliding}\right|} \tag{II.79}$$

Donde $V_{Sliding}$ es la velocidad relativa entre perfiles en contacto. En ocasiones esta relación se expresa en forma escalar teniendo en cuenta que la fuerza de rozamiento actúa en la dirección perpendicular al plano de transmisión [Vaishya, 2001a, 2001b], [Gunda, 2003], [He, 2007a]:

$$F_{roz} = -\mu_m F_N sign\left(\vec{V}_{relativa}\right) \rightarrow sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \tag{II.80}$$

De esta forma se evita la singularidad de la expresión anterior cuando la velocidad relativa es nula. Otra práctica muy habitual es aproximar la función *sign* mediante alguna función continua, para evitar problemas durante la integración de las ecuaciones dinámicas [Vaishya, 2003]. Una buena descripción de las diversas alternativas, la encontramos en los trabajos de Flores [2004] o Cheli [2006].

Kahraman [2007] para el cálculo de la fricción incluyó un modelo de Coulomb, cuyo coeficiente de fricción fue el desarrollado por Xu [2005] (Ecuación (II.76)) en su modelo de 6 g.d.l.

$$F_{Sliding} = b\int \tau(x)\,dx = b\int \left[\nu(x)\frac{u_1 - u_2}{h(x)} + \mu_s p(x)\right] dx = \mu_{Xu} F_N \tag{II.81}$$

Feng [2011], en su trabajo sobre engranajes hipoidales, introdujo, mediante el planteamiento de Doleschel [2002] expuesto anteriormente, un modelo de coeficiente de fricción en condiciones mixtas de lubricación. A partir del procedimiento de cálculo de la potencia de pérdidas de fricción, llegó a la siguiente expresión para calcular el coeficiente de fricción de cada elemento finito *i* del perfil:

$$\mu_i^{ML} = \mu_i^{EHL}\left(f_\lambda\right)^{1.2} + \mu_i^{BL}(1-f_\lambda) \rightarrow \begin{cases} \text{Castro et al. } f_\lambda = 0.82\lambda^{0.28} \\ \text{Zhu et al. } f_\lambda = \dfrac{1.21\lambda^{0.64}}{1+0.37\lambda^{1.26}} \end{cases} \quad \text{(II.82)}$$

Las funciones de ponderación que utilizar son las propuestas por Castro y Seabra [Castro, 2007] y Zhu y Hu [Zhu, 2001], dependientes del parámetro de Stribeck y que se presentan en la Figura II-3 junto con la correspondiente a Doleschel (Ecuación (II.74)).

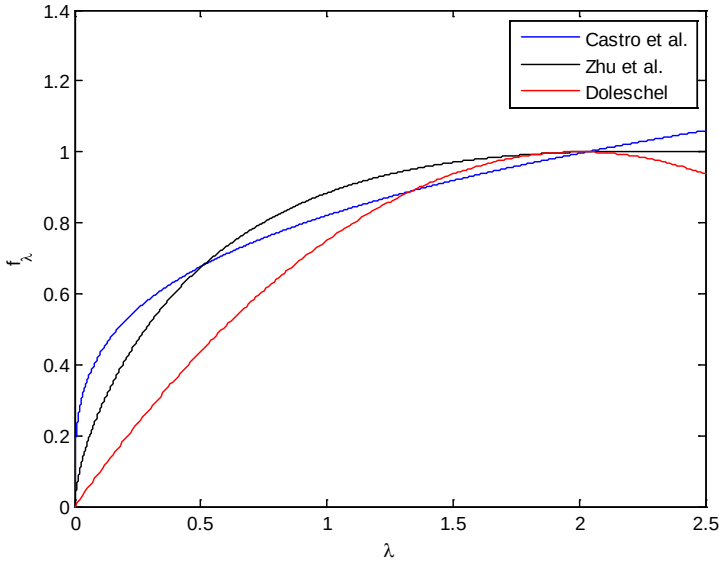


Figura II-3 Funciones de ponderación elaboradas por Castro *et al.*, Zhu *et al.* y Doleschel

A partir de un valor del coeficiente de Stribeck λ, concretamente 2, según estos autores, se deja de estar en condiciones de lubricación mixtas, pasando a tener únicamente el término correspondiente a condiciones de lubricación completamente fluidas. Los autores utilizan estas funciones de ponderación cuando el parámetro de Stribeck toma un valor entre 0.36 y 2.

Además de las funciones de ponderación, también es necesario definir una formulación de coeficiente de fricción en condiciones de lubricación totalmente fluidas (μ^{EHL}) y otra en condiciones extremas (μ^{BL}). La primera se incorporó mediante la formulación de Xu *et al.* (Ecuación (II.76)), mientras que para la segunda se utilizó el enfoque propuesto por Greenwood y Williamson [Greenwood, 1966, 1972], el cual plantea la integración de la tensión tangencial en todo el área de contacto de las asperezas (N es el número de asperezas). Como la fricción se puede incluir partiendo del modelo de Coulomb, el coeficiente de fricción en condiciones de lubricación extremas, se puede obtener como:

$$\left.\begin{aligned} F_{Sliding}^{BL} &= \sum_{i=1}^{N}\int\int_{A_{contasp}} \tau_{contasp}\, dA_{contasp} \\ F_{Sliding}^{BL} &= \mu^{BL} F_N^{BL} \end{aligned}\right\} \mu^{BL} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\int\int_{A_{contasp}} \tau_{contasp}\, dA_{contasp}}{F_N^{BL}} \quad \text{(II.83)}$$

Donde F_N^{BL} está determinado por el enfoque propuesto por el modelo estadístico de Greewood y Williamson [Greenwood, 1966, 1972] expuesto en la Ecuación (II.84).

Feng también plantea la posibilidad de utilizar un coeficiente de fricción en lubricación extrema (μ^{BL}) calculado empíricamente, en concreto, propone el uso de los valores, entre 0.07 y 0.15, obtenidos empíricamente por Castro y Seabra [Castro, 2007], dependiendo de las propiedades reológicas del lubricante y de la rugosidad de la superficie de contacto. Posteriormente, los mismos autores [Brandao, 2012] han presentado las curvas de Stribeck para cinco aceites en condiciones de lubricación mixtas y extremas para diferentes temperaturas, fuerzas normales y relación de velocidades de deslizamiento y rodadura. Su finalidad es proporcionar datos precisos para la utilización de este tipo de modelos.

Modelo Estadístico

Todas las expresiones presentadas hasta este punto, se fundamentan en la utilización del modelo de Coulomb. Sin embargo, con las nuevas técnicas para el conocimiento de la topografía de las superficies en contacto y el creciente conocimiento de la lubricación en el contacto, el modelo para definir el comportamiento de la fricción entre superficies ha evolucionado.

Greewood y Williamson [Greenwood, 1966, 1972] propusieron un modelo de cálculo de la fuerza normal a partir del contacto entre asperezas mediante la siguiente expresión:

$$F_N = \frac{2}{3}\zeta\kappa R_a\sqrt{\frac{R_a}{\kappa}}E_{eq}f_{3/2} \rightarrow f_{3/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_\lambda^\infty (s-\lambda)^{3/2}e^{-s^2/2}ds \qquad \text{(II.84)}$$

Donde R_a es la rugosidad media de las superficies, ζ la densidad de asperezas y κ el radio de curvatura medio de las asperezas.

Greenwood y Tripp [Greenwood, 1970] presentaron un modelo donde las fuerzas de fricción por deslizamiento se dividen en dos términos (Ecuación (II.61)): la fricción seca ($F_{Sliding}^b$) y la fricción fluida ($F_{Sliding}^v$).

La formulación del primer término ($F_{Sliding}^b$) viene determinada por la tensión tangencial de Eyring (τ_0), el área efectiva donde hay contacto entre asperezas (A_e), el coeficiente de presión de la tensión tangencial (ξ) y la carga soportada por las asperezas (W_e). El área efectiva donde hay contacto entre asperezas y la carga soportada por las asperezas se determina mediante la ecuación (II.85). Estos parámetros vienen definidos por variables experimentales (ζ, κ, R_a y λ) obtenidos a través del análisis de los perfiles de los dientes con microscopio óptico y funciones estadísticas (f_2 y $f_{5/2}$).

$$F_{Sliding}^b = \tau_0 A_e + \xi W_e \rightarrow \begin{cases} A_e = \pi^2\left(\zeta\kappa R_a\right)^2 A f_2\lambda \\ W_e = \dfrac{8\sqrt{2}}{15}\pi\left(\zeta\kappa R_a\right)^2\sqrt{\dfrac{R_a}{\kappa}}E^* A f_{5/2}\lambda \end{cases} \qquad \text{(II.85)}$$

El coeficiente de presión de la tensión tangencial límite para interacción directa entre asperezas (ξ) es aproximadamente 0.17 [Teodorescu, 2003]. Las funciones estadísticas son las propuestas por Teodorescu [2003] y las determinó asumiendo que la distribución de asperezas era gaussiana (Ecuaciones (II.86) y (II.87)).

$$f_2 = -0.0018\lambda^5 + 0.0281\lambda^4 - 0.1728\lambda^3 + 0.5258\lambda^2 - 0.8043\lambda + 0.5003 \quad \text{(II.86)}$$

$$f_{5/2} = -0.0046\lambda^5 + 0.0574\lambda^4 - 0.2958\lambda^3 + 0.7844\lambda^2 - 1.0776\lambda + 0.6167 \quad \text{(II.87)}$$

Para la formulación del segundo término ($F^v_{Sliding}$), se debe calcular la tensión tangencial del fluido (τ_{xz}) y multiplicarla por el área efectiva del contacto en la que existe fluido atrapado. Esta área se determina mediante la resta del área efectiva donde hay contacto entre asperezas (A_e) y el área total de contacto (A) (Ecuación (II.88)).

$$F^v_{Sliding} = \tau_{xz}\left(A - A_e\right) = \eta\left(\frac{u_2 - u_1}{h}\right)\left(A - A_e\right) \quad \text{(II.88)}$$

Behesti [2013] desarrolló un modelo, en condiciones de lubricación mixtas, para el cálculo de la fuerza de contacto a partir de la presión en el contacto entre asperezas y en el fluido. Para calcular la presión en el contacto de las asperezas, se basa en el modelo de Kogut [2003], quien analizó el contacto seco de dos superficies rugosas, bajo la aproximación de distribución Gaussiana de las asperezas. Manoylov [2013] propuso un modelo de contacto seco para el cálculo de la fricción y desgaste debido a las asperezas, similar al de Behesti.

Integración de la tensión tangencial

Otra alternativa al modelo estadístico, en el caso de contactos fluidos, es la integración de la tensión tangencial, aplicada a fluidos Newtonianos, en perfiles idealmente lisos o rugosos.

Li y Kahraman [Li, 2010] presentaron un modelo, para calcular la fricción por deslizamiento, en el que se distingue el área donde existe contacto directo y en el que hay fluido atrapado entre superficies (Ecuación (II.89)).

$$F_{Sliding} = b\int\left[\nu(x)\frac{u_1 - u_2}{h(x)} + \mu_s\, p(x)\right]dx \quad \text{(II.89)}$$

Fricción por rodadura

Este tipo de fricción está presente cuando existe movimiento relativo de rodadura entre dos superficies en contacto. La mayoría de autores que estudian la eficiencia en transmisiones por engranajes ignoran este efecto, por ser un orden de magnitud menor al correspondiente a la fricción por deslizamiento [Li, 2007]. Sin embargo, hay autores que afirman que, dependiendo del régimen de funcionamiento de la transmisión, este fenómeno puede ser importante desde el punto de vista de la eficiencia [Ghosh, 2015]. Por esta razón, se va a analizar este término que, dependiendo del tipo de contacto y régimen de lubricación, a su vez se puede formular a partir de la superposición de la rodadura debida a la deformación de los perfiles y a la del fluido.

$$F_{Roll} = F^b_{Roll} + F^v_{Roll} \quad \text{(II.90)}$$

Rodadura debida a la deformación de los perfiles

La distribución de presiones, en un contacto en el que existe movimiento de rodadura entre los perfiles, cambia respecto al caso en el que la carga es estática o el movimiento es de acercamiento / alejamiento. La teoría de contacto mecánico propone una distribución de presiones parabólica, y simétrica respecto del punto de contacto, cuando la carga es estática o existe movimiento de acercamiento. Esto no se cumple para el caso en el que los perfiles

ruedan entre sí. Esto resulta en que la localización de la resultante de la distribución de presiones propuesta por la teoría de Hertz, es coincidente con el centro geométrico del contacto, mientras que en el caso con rodadura, la resultante está desplazada respecto a dicho punto. Por esta razón, uno de los modelos más utilizados, para implementar la fricción por rodadura, es el que aplica la ley de Coulomb-Amontons, que traslada la resultante al punto de contacto, como una fuerza resultante y un momento resistente a la rodadura (T_{Roll}). El par para vencer la resistencia a la rodadura viene descrito a través de la fuerza normal (resultante de la distribución de presiones) y el coeficiente de resistencia a la rodadura (C_R), el cual es igual a la distancia que la fuerza normal se ha trasladado (Ecuación (II.91)).

$$T_{Roll} = F_N C_R \tag{II.91}$$

Una variante del método es aproximar este coeficiente de rodadura, como la multiplicación del semi-ancho del contacto Hertziano *a* por un coeficiente (ς), el cual depende de las propiedades de los materiales, entre otros parámetros.

$$T_{Roll} = F_N \varsigma a \tag{II.92}$$

Ghosh [2015], uno de los autores que utiliza este modelo, propuso que el valor de este factor, en el caso de rodadura en condiciones de contacto seco, se aproxime a 0.3 ($\varsigma \simeq 0.3$). En la práctica, el par para vencer la rodadura se modeliza como una fuerza ficticia en la dirección tangencial. Por lo que la fuerza de fricción por rodadura debida a la deformación de los perfiles es dependiente del radio base del engranaje:

$$F_{Roll}^{b} = \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} \tag{II.93}$$

Estos dos modelos están fundamentados en el contacto directo (seco) entre perfiles y, además, están sujetos a la existencia de deformaciones en dichos perfiles. En la lubricación hidrodinámica, donde no existe deformación de los cuerpos en contacto, este fenómeno no tendrá ningún impacto, mientras que en el caso de la EHL se debe considerar.

Rodadura debida al fluido

Este fenómeno disipativo se produce cuando dos cuerpos, en ambiente fluido, tienen movimiento relativo de rodadura entre ellos. Como consecuencia, se produce una tensión proporcional a la distancia entre perfiles y a la distribución de presiones normales en el fluido.

Crook [1963] propuso un modelo para determinar la fuerza de fricción por rodadura entre dos cilindros en régimen elastohidrodinámico (Ecuación (II.94)).

$$F_{Roll} = F_{Roll}^{b} + F_{Roll}^{v} = C_1 hb \rightarrow C_1 = 9 \cdot 10^7 \, N/m^2 \tag{II.94}$$

Donde *h* es el espesor de película y *b* el ancho de cara.

Posteriormente, Anderson [1980c], presentó su propuesta, que está basada en la utilización de un factor de reducción térmica (ϕ):

$$F_{Roll} = C_R h \phi b \rightarrow \begin{cases} \phi = \dfrac{1 - 13.2\left(P_h / E_{eq}\right)\left(L^*\right)^2}{1 + 0.213\left(1 + 2.23SR^{0.83}\right)\left(L^*\right)^{0.64}} \text{ donde } L^* = -\dfrac{\partial \eta}{\partial T}\dfrac{V_{Roll}^2}{K_f} \\ C_R = 9 \cdot 10^4 \, N/m^2 \end{cases} \tag{II.95}$$

Donde L^* es el parámetro de carga térmica, K_f la conductividad térmica del fluido, P_h la presión hertziana máxima y V_{Roll} la velocidad de rodadura.

Wu [1991] propuso una formulación, para el cálculo de las fuerzas de rodadura entre fluidos, en condiciones isotermas (Ecuación (II.96)). Además, consideró su aplicación a condiciones no isotermas, mediante el coeficiente de reducción térmica presentado en la Ecuación (II.95).

$$F_{Roll} = \phi F_{Roll}^{Isoterm} \rightarrow F_{Roll}^{Isoterm} = 4.318\left(\frac{\alpha\eta\left(u_1+u_2\right)}{R_{eq}}\right)^{0.658}\left(\frac{F_N}{E_{eq}R_{eq}}\right)^{0.0126}\frac{R_{eq}}{\alpha} \qquad \text{(II.96)}$$

Siendo α el coeficiente de presión-viscosidad del fluido.

Otra propuesta basada en análisis experimental es la de Ghosh [2015], quien, a partir del modelo mostrado en la ecuación (II.92), propuso tener en cuenta el efecto de la rodadura debida de la deformación de los perfiles y el de la rodadura debido al lubricante (EHL), mediante la definición del valor ς =0.7.

$$F_{Roll} = \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} \rightarrow T_{Roll} = 0.7 \cdot F_N a \qquad \text{(II.97)}$$

Li y Kahraman [Li, 2010] implementaron la fricción por rodadura del fluido a través de la formulación analítica de Goksen [1978]:

$$F_{Roll}^{v} = \frac{4.318(GU)^{0.658}W^{0.0126}R_{eq}}{\alpha} \qquad \text{(II.98)}$$

Los autores incorporaron una serie de mejores a su modelo tribo-dinámico [Li, 2013], entre ellas, el cálculo las fuerzas de rodadura mediante la integración de la tensión tangencial en ambiente fluido:

$$F_{Roll}^{v} = b\int -\frac{h\left(x\right)}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx \qquad \text{(II.99)}$$

II.2.3.3.3. Esfuerzos por arrastre de fluido

Además de las pérdidas dependientes de la carga, como son las de fricción por deslizamiento y por rodadura, las pérdidas por histéresis y las debidas al estrangulamiento del fluido, existen pérdidas que no dependen de ella. Este tipo de pérdidas son, generalmente, dependientes de la velocidad de rotación, de parámetros geométricos y de las propiedades del fluido. Dentro de este grupo, se encuentran las pérdidas por arrastre de fluido, que, dependiendo del fluido con el que estén en contacto, se suelen diferenciar en dos tipos:

- Pérdidas por arrastre del lubricante (*Churning losses*)
- Pérdidas aerodinámicas (*Windage losses*)

A continuación se mostrará la revisión de modelos para el cálculo de los esfuerzos de arrastre de fluido en transmisiones por engranajes. Esta revisión centrará en formulaciones analíticas, dado que la implementación de técnicas numéricas y herramientas *Computer Fluid Dynamics* (CFD), basadas en la dinámica de fluidos, es inabordable con la integración de las formulaciones dinámicas. Aunque, cabe destacar que, hay autores que han utilizado estas herramientas computacionales para comprender el comportamiento del fluido en régimen

dinámico y su efecto en las pérdidas de transmisiones por engranajes (Farrall [2005], Rapley [2005, 2007], Al-Shibl [2007], Marchasse [2011, 2012] y Pallas [2013] entre otros).

La mayor parte de modelos analíticos simulan estas pérdidas mediante un amortiguamiento torsional equivalente, que, a su vez, se puede calcular a partir de la superposición de los dos fenómenos comentados (Ecuación (II.100)).

$$P_{arrastre} = P_{churning} + P_{windage} = C_{eq}^{t}\dot{\theta}^2 \tag{II.100}$$

La mayoría de autores realizan la superposición de ambos, aunque también hay autores que consideran que es un único fenómeno debido a la mezcla de ambos fluidos.

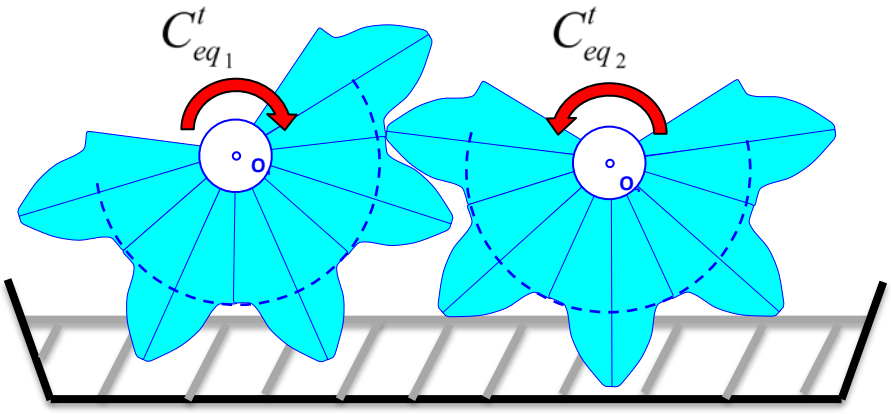


Figura II-4 Esquema del modelo de pérdidas por arrastre fluido

Pérdidas por arrastre de lubricante

Terekhov [1975] es pionero en la modelización del arrastre de fluido de engranajes sumergidos en lubricante. Incorporó su comportamiento a través de un amortiguamiento viscoso torsional, localizado en el centro de rotación de cada uno de los engranajes en contacto con el fluido, mediante las expresiones:

$$P_{churning} = C_{eq_{churning}}^{t}\dot{\theta}^2 \rightarrow C_{eq_{churning}}^{t} = C_m \rho \dot{\theta} b R_{eq}^4 \tag{II.101}$$

$$C_m = \psi_1 \left(\frac{b}{R_{eq}}\right)^{\psi_2} \left(\frac{h_{oil}}{R_{eq}}\right)^{\psi_3} \left(\frac{V_{oil}}{V_{oil_0}}\right)^{\psi_4} R_e^{\psi_5} F_r^{\psi_6} \rightarrow \begin{cases} R_e = \dfrac{\dot{\theta}R^2}{\nu} \text{ donde } \nu = \dfrac{\eta}{\rho} \\ F_r = \dfrac{\dot{\theta}^2 R}{g} \end{cases} \tag{II.102}$$

Tabla II-1 Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Terekhov [1975]

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
$Re<2250$ y $Re^{-0.6}Fr^{-0.25}>8.7\times10^{-3}$	4.57	-0.4	1.5	1.5	-0.6	-0.25
$Re<2250$ y $Re^{-0.6}Fr^{-0.25}<8.7\times10^{-3}$	2.36	-0.17	1.5	-0.73	-0.6	-0.25
$2250<Re<36000$	0.373	-0.124	1.5	-0.567	-0.3	-0.25

Donde $P_{churning}$ es la potencia de pérdidas por arrastre de lubricante, $C^t_{eq_{churning}}$ el amortiguamiento torsional equivalente, θ el ángulo de rotación, C_m el amortiguamiento torsional adimensional equivalente, h_{oil} la altura de fluido, V_{oil} el volumen de lubricante, Re es el número de Reynolds, Fr es el número de Froude, g la aceleración de la gravedad, ν es la viscosidad cinemática y ρ es la densidad.

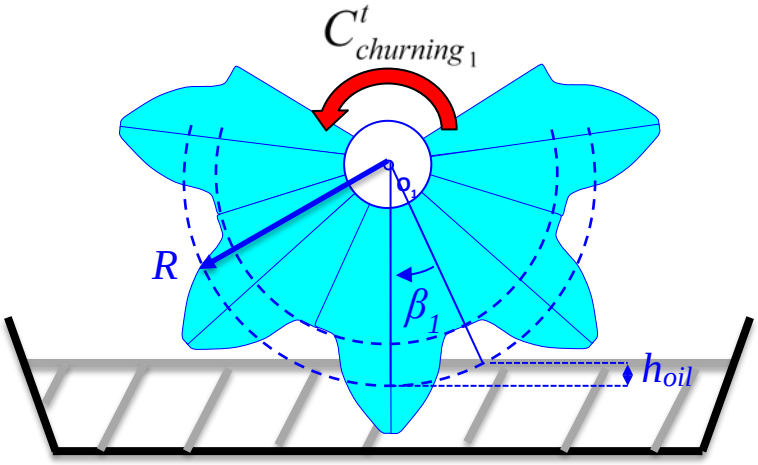


Figura II-5 Esquema pérdidas por arrastre de lubricante

Lauster [1983], siguiendo el mismo modelo presentado previamente por Terekhov, realizó su propuesta aplicada a transmisiones de camiones.

$$C_m = 2.95\left(\frac{b}{R_{eq}}\right)^{-0.4}\left(\frac{h_{oil}}{R_{eq}}\right)^{1.5}\left(\frac{V_{oil}}{V_{oil_0}}\right)^{0.5} R_e^{-0.15} F_r^{-0.7} \qquad \text{(II.103)}$$

Boness [1989], como principal novedad respecto a sus predecesores, incorporó el término relativo al área sumergida, S.

$$C^t_{eq_{churning}} = \frac{1}{2} C_m \rho \dot{\theta} S R^3_{eq} \qquad \text{(II.104)}$$

Siguiendo la misma nomenclatura que la utilizada en la expresión de Terekhov (Ecuación (II.102)), la Tabla II-2 presenta los valores que propuso Boness, para el cálculo del amortiguamiento equivalente adimensional C_m.

Tabla II-2 Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Boness [1989]

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
Re<2000	20	0	0	0	-1	0
2250<Re<10^5	8.6x104	0	0	0	1/3	0
Re>10^5	5x108	0	0	0	-2	0

Changenet y Velex [Changenet, 2006] presentaron un modelo de amortiguamiento viscoso torsional que también depende de la superficie sumergida (S), calculada mediante la superposición de las áreas laterales y de los dientes en contacto con el fluido:

$$C^t_{eq_{churning}} = \frac{1}{2} C_m \rho \dot{\theta} S R^3_{eq} \text{ donde } S = S_{lateral} + S_{diente} \rightarrow \begin{cases} S_{lateral} = R^2_{eq}\left(2\beta_i - \sin(2\beta_i)\right) \\ S_{diente} = 2R_{eq} b \beta_i + \dfrac{2z\beta_i h_{oil} b}{\pi \cos(\varphi_i)} \end{cases} \qquad \text{(II.105)}$$

La superficie de contacto depende, a su vez, del ángulo de inmersión del engranaje (β_i), así como de otros parámetros mostrados en la Figura II-5: la altura del fluido (h_{oil}), el ángulo de presión (φ_i) y el número de dientes (z).

El amortiguamiento adimensional del fluido, C_m, depende de las propiedades del fluido, implícitas en los números adimensionales de Reynolds y de Froude (Ecuación (II.106)), así como de las constantes obtenidas empíricamente mostradas en la Tabla II-3.

$$C_m = \psi_1 \left(\frac{b}{2R_{eq}} \right)^{\psi_2} \left(\frac{h_{oil}}{2R_{eq}} \right)^{\psi_3} \left(\frac{V_{oil}}{\left(2R_{eq}\right)^3} \right)^{\psi_4} R_e^{\psi_5} F_r^{\psi_6} \quad \text{y} \quad R_{ec} = \frac{\dot{\theta} R_{eq} b}{\nu} \tag{II.106}$$

Tabla II-3 Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Changenet [2006]

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
Rec<6000	1.366	0	0.45	0.1	-0.21	-0.6
Rec>9000	3.644	0.85	0.1	-0.35	0	-0.88

Los autores, posteriormente [Changenet, 2011], pormenorizaron el amortiguamiento adimensional dependiendo de las propiedades del régimen del fluido. C_m adopta dos formulaciones, en función de un parámetro que simula la aceleración de deformación $\ddot{\gamma} = \dot{\theta}^2 (Rbm)^{1/3}$:

Si $\ddot{\gamma} < 750\ m/s^2$

$$C_m = \psi_1 \left(\frac{b}{R_{eq}} \right)^{\psi_2} \left(\frac{h_{oil}}{2R_{eq}} \right)^{\psi_3} \left(\frac{V_{oil}}{\left(2R_{eq}\right)^3} \right)^{\psi_4} R_{ec}^{\psi_5} F_r^{\psi_6} \tag{II.107}$$

Tabla II-4 Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Changenet [2011]

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
Rec<4000	1.366	0.21	0.45	0.1	-0.21	-0.6
Rec>4000	0.239	0.21	0.45	0.1	0	-0.6

Si $\ddot{\gamma} > 1250\ m/s^2$

$$C_m = \psi_1 \left(\frac{b}{2R_{eq}} \right)^{\psi_2} \left(\frac{h_{oil}}{2R_{eq}} \right)^{\psi_3} \left(\frac{V_{oil}}{\left(2R_{eq}\right)^3} \right)^{\psi_4} R_{ec}^{\psi_5} F_r^{\psi_6} \tag{II.108}$$

Tabla II-5 Valores de las constantes para diferentes valores de Reynolds propuestos por Changenet [2011]

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
Rec<4000	20.797	0.85	0.1	-0.35	-0.21	-0.88
Rec>4000	3.644	0.85	0.1	-0.35	0	-0.88

Además, los autores [Changenet, 2007] añadieron una corrección en el amortiguamiento torsional, cuando el sentido de giro del piñón es anti-horario. Este incremento en las pérdidas se explica porque la rueda conducida es salpicada y la altura a la que está sumergida aumenta.

$$\Delta C_m = 17.7 F_r^{-0.68} \frac{i-1}{i^8} \left[1 - \left(\frac{h_{oil}}{R} \right)_{Gear} \right] \tag{II.109}$$

Donde *i* es la relación de transmisión y *R* el radio primitivo.

En otra de sus aportaciones [Changenet, 2008], los autores incluyeron la existencia de flancos axiales a los engranajes, los cuales no permiten que el lubricante fluya libremente, y su influencia en las pérdidas (Ecuaciones (II.110) y (II.111)). Para la existencia de este tipo de pérdidas, la longitud del flanco (D_f) debe ser mayor que el diámetro de la rueda.

Si $\ddot{\gamma} < 750\ m/s^2$ y Rec < 4000

$$\frac{P}{P_{ref}} = 0.76\left(\frac{2R_{eq}}{D_f}\right)^{3/4}\left(\frac{j_a}{R_{eq}}\right)^{0.383\left(2R_{eq}/D_f\right)} \rightarrow j_a \le R\left[\frac{1}{2.17}\left(\frac{D_f}{2R_{eq}}\right)^{3/4}\right]^{2.61\left(D_f/2R_{eq}\right)} \quad \text{(II.110)}$$

Si $\ddot{\gamma} > 1250\ m/s^2$ y Rec > 4000

$$\frac{P}{P_{ref}} = 0.76\left(\frac{D_f}{2R_{eq}}\right)^{0.48}\left(\frac{j_a}{\sqrt{mb}}\right)^{0.548\left(2R_{eq}/D_f\right)} \rightarrow j_a \le \sqrt{mb}\left[\frac{1}{0.76}\left(\frac{2R_{eq}}{D_f}\right)^{0.48}\right]^{1.82\left(D_f/2R_{eq}\right)} \quad \text{(II.111)}$$

Siendo j_a la distancia axial entre el engranaje y el flanco y m el módulo. Posteriormente analizaron la influencia, en las pérdidas por arrastre de fluido, de la existencia de aire encerrado en el propio fluido [Leprince, 2011]. Los resultados indicaron que, en ciertos regímenes de lubricación, era necesario incluir un modelo que incorpore las propiedades del aire (tensión superficial y solubilidad).

Schlegel [2009], en su análisis de las pérdidas en engranajes, hizo una recopilación de varios modelos para la modelización de pérdidas por arrastre de fluido. Particularizó el estudio para dos tipos de lubricación: en baño de aceite (*splash*) y mediante pulverizado por "*spray*".

Para el primer caso de lubricación (baño de aceite), las pérdidas se definen a través de dos efectos: las pérdidas por desplazamiento de fluido en el área de contacto ($P_{pocketing}$) y por movimiento de aire o de mezcla de aire y fluido ($P_{ventilation}$).

$$P_{churning}^{splash} = P_{pocketing} + P_{ventilation} \quad \text{(II.112)}$$

Para el segundo caso de lubricación (spray), las pérdidas se definen a través de tres efectos: las pérdidas por desplazamiento de fluido en el área de contacto, por movimiento de aire o de mezcla de aire y fluido y, además, el efecto del spray en las pérdidas ($P_{spray\text{-}impulse}$).

$$P_{churning}^{spray} = P_{pocketing} + P_{spray-impulse} + P_{ventilation} \quad \text{(II.113)}$$

Posteriormente, Seetharaman y Kahraman [Seetharaman, 2009a, 2009b, 2009c] propusieron un modelo, para calcular las pérdidas por arrastre de fluido, que las desagrega en dos efectos. El primero se corresponde con el arrastre individual de fluido de cada uno de los engranajes (P_d) y el segundo se debe a la interacción entre engranajes (P_p).

Pérdidas aerodinámicas

Shipley [1958, 1962] presentó un primer modelo, para calcular las pérdidas aerodinámicas, que solo es válido para engranajes con diámetros menores a 0.51 metros y, además, cuenta con la restricción de que el ancho del diente tiene que ser aproximadamente la mitad del diámetro.

$$P_{windage} = 9.226 \cdot \frac{\left(\frac{30 \cdot \dot{\theta}}{\pi}\right)^3 \left(2R_{eq}\right)^5 b^{0.7}}{10^9} \quad \text{(II.114)}$$

Anderson y Loewenthal [Anderson, 1983], pioneros en el cálculo de la eficiencia de transmisiones por engranajes, también son unos de los primeros autores que propusieron un modelo para calcular este tipo de pérdidas (Ecuación (II.115)). Su modelo presenta el inconveniente de que no depende del módulo, por lo que su extrapolación a otra transmisión no es posible.

$$P_{windage} = 2.82 \cdot 10^{-7} \left(\frac{30 \cdot \dot{\theta}}{\pi}\right)^{2.8} \left(1 + 2.3 \frac{b}{R_{eq}}\right) \left(0.028\nu + 0.019\right)^{0.2} \quad \text{(II.115)}$$

La propuesta de Dawson [1984], para simular las pérdidas aerodinámicas, presenta limitaciones para su aplicación, dado que la mayoría de las medidas experimentales, en las que está basado, se realizaron a engranajes de grandes dimensiones y a velocidades angulares medias y bajas.

$$P_{windage} = \left(\frac{30 \cdot \dot{\theta}}{\pi}\right)^{2.9} \left(0.16(2R_{eq})^{3.9} + \left(2R_{eq}\right)^{2.95} b^{0.75} m^{1,15}\right) \cdot 10^{-20} \Phi F_{hous} \quad \text{(II.116)}$$

Donde Φ es un parámetro que representa la cantidad de aire en el fluido, y toma valores entre 0 y 1, siendo 0 cuando está totalmente envuelta en fluido lubricante y 1 cuando no hay presencia de éste, y F_{hous} es un parámetro que aporta el efecto del espacio que tiene para moverse el fluido, pudiendo estar en una carcasa (0.5-0.6) o al aire libre 1.

Esta primera aportación no tiene en cuenta las pérdidas debidas a la interacción entre engranajes, que es un efecto predominante. En su segunda aportación [Dawson, 1988], mejoró dicho modelo mediante la inclusión del factor de forma C_g.

$$P_{windage} = 1.12 \cdot 10^{-8} C_g \left(\frac{30 \cdot \dot{\theta}}{\pi}\right)^{2.85} \rho \nu^{0.15} (2R_{eq})^{4.7} F_{hous} \rightarrow F_{hous} = \begin{cases} F_{hous} = 1 & open \\ F_{hous} = 0.7 & loose \\ F_{hous} = 0.5 & close \end{cases} \quad \text{(II.117)}$$

Townsend [1992] realizó una propuesta mediante la superposición del efecto en las caras frontales y el de los dientes de los engranajes (Ecuación (II.118)).

$$P_{windage} = P_{side} + P_{edge} \rightarrow \begin{cases} P_{side} = \frac{15}{0.746}\left(\frac{0.3 \cdot \dot{\theta}}{\pi}\right)^3 \left(\frac{2R_{eq}}{100}\right)^4 \left(\frac{b}{100}\right) \\ P_{edge} = \frac{15}{0.746}\left(\frac{0.3 \cdot \dot{\theta}}{\pi}\right)^3 \left(\frac{2R_{eq}}{100}\right)^4 \left(\frac{5b}{100}\right) R_a \end{cases} \quad \text{(II.118)}$$

Diab [2004], siguiendo el enfoque utilizado para las pérdidas de arrastre de fluido lubricante de Changenet [2006], modelizó la pérdidas aerodinámicas a través de un amortiguamiento torsional equivalente ($C^t_{eq\ windage}$).

$$P_{windage} = C^t_{eq\ windage} \dot{\theta}^2 \rightarrow C^t_{eq\ windage} = 0.5 C_{windage} \rho \dot{\theta} R^5 \quad \text{(II.119)}$$

Éste se define mediante su homólogo adimensional ($C_{windage}$), que a su vez se calcula a partir de la superposición de dos fenómenos, las pérdidas aerodinámicas debidas a las caras frontal y trasera de los engranajes (C_{side}) y las localizadas en las caras laterales y dientes (C_{edge}).

$$C_{windage} = C_{side} + C_{edge} \tag{II.120}$$

Para el cálculo de las pérdidas aerodinámicas en las caras trasera y frontal, consideró la posibilidad de que coexistieran los regímenes laminar y turbulento. El límite entre los dos regímenes lo fijó en $3x10^5$ del número de Reynolds, al cual denominó número crítico de Reynolds (Rec). A partir de este valor calculó el radio frontera entre regímenes (R^*).

$$\mathrm{Rec} = 3x10^5 = \frac{\rho\dot{\theta}R^{*2}}{\eta} \rightarrow R^* = \sqrt{\frac{\eta \mathrm{Rec}}{\rho\dot{\theta}}} \tag{II.121}$$

Teniendo en cuenta ambos regímenes del fluido, se integra el diferencial de fuerza para toda la sección:

$$C_{side} = \frac{\int_S rdF}{0.5\rho\dot{\theta}^2R^5} = \frac{2\pi n_1}{5m_1 - 2}\left[\frac{R^{*5}}{R^5\,\mathrm{Re}\,c^{m_1}}\right] + \frac{2\pi n_2}{5m_2 - 2}\left[\frac{1}{Re} - \frac{R^{*5}}{R^5\,\mathrm{Re}\,c^{m_2}}\right] \tag{II.122}$$

Donde $n_1, m_1, n_2\ y\ m_2$ son determinados a partir de los valores recogidos de la Tabla II-6.

Tabla II-6 Valores de las constantes para diferentes regímenes

	Re	n	m
Flujo en régimen laminar	<3x105	1.293	0.5
Flujo en régimen turbulento	>3x105	0.074	0.2

Para simular las pérdidas aerodinámicas de la cara lateral, inicialmente el engranaje se modelizó como un cilindro, a partir de la propuesta de Hughes [1999], expresándose el amortiguamiento equivalente (C_{edge}) como:

$$C_{edge} = \frac{4\pi\eta b\dot{\theta}R^2}{0.5\rho\dot{\theta}^2R^5} = \frac{8\pi}{Re}\frac{b}{R} \tag{II.123}$$

Posteriormente, este modelo se mejoró a partir del propuesto de Akin [1975], quien incluyó el efecto de los dientes como:

$$C_{edge} = F_{hous}\frac{z}{4}\frac{b}{R}\left[1 + \frac{2(1+x_A)}{z}\right]^4\left(1-\cos\phi\right)\left(1+\cos\phi\right)^3 \rightarrow \phi = \frac{\pi}{z} - 2\left(\frac{1}{\varphi_{ip}} - \frac{1}{\varphi_{iA}}\right) \tag{II.124}$$

Siendo φ_{i_p} y φ_{i_A} el ángulo de presión en el punto primitivo y en la punta del diente y x_A el coeficiente de corrección del diente.

Petry-Johnson [2008] realizó una propuesta analítica, que presenta el inconveniente de no tener en cuenta el módulo del engranaje entre sus parámetros.

$$P_{windage} = 0.025\pi\dot{\theta}^{2.86}R^{4.72}\eta^{0.14} \tag{II.125}$$

Seetharaman [2009c], siguiendo la metodología utilizada para las pérdidas por arrastre de lubricante, distinguió dos: las pérdidas por arrastre de cada engranaje individualmente (P_{wdi}) y las pérdidas por interacción entre engranajes (P_{wpi}), denominadas pérdidas por aire atrapado entre los dientes en contacto (*pocketing*).

II.3. Cálculo de la eficiencia

Paralelamente al desarrollo del modelo dinámico o cuasi-estático, muchos autores se han centrado en el estudio de la eficiencia de transmisiones por engranajes. A lo largo de este capítulo, se han presentado todos los esfuerzos que pueden producir pérdidas energéticas en este tipo de transmisiones. Todos los autores, que han investigado en este ámbito [Höhn, 2009], [Sánchez, 2012, 2013], llegan a la conclusión de que la clasificación de pérdidas de este sistema mecánico no es trivial, principalmente por la cantidad y naturaleza diversa de los fenómenos disipativos que ocurren en operación. Pese a esta dificultad, se establece una clasificación inicial, en función de la dependencia de la carga aplicada. A este respecto, se podrían incluir dentro de las pérdidas dependientes todos los fenómenos derivados del contacto (fricción por deslizamiento, fricción por rodadura y comportamiento histerético y del fluido en el contacto normal) y en las no dependientes las relativas al arrastre de fluido (*churning y windage losses*).

En esta sección se presentarán algunos de los modelos de cálculo de eficiencia más utilizados por la comunidad investigadora. Todos ellos parten de la definición de eficiencia de un sistema (η), como la relación de la potencia de salida (P_{out}) respecto de la entrada (P_{in}), donde la potencia de salida depende, a su vez, de la potencia de pérdidas del sistema (P_{loss}).

$$\eta_{ef} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{in} - P_{loss}}{P_{in}} \tag{II.126}$$

II.3.1. Modelos de cálculo de la eficiencia

Desde hace más de un siglo, el cálculo de la eficiencia en engranajes es el ámbito de trabajo de muchos investigadores [Reuleaux, 1886], [Buckingham 1949], [Ohlendorf 1958].

Ohlendorf [1958], para el cálculo de la potencia de pérdidas debidas a la fricción por deslizamiento, propuso un modelo mediante, lo que denominó, el coeficiente de pérdidas. Este parámetro, que adopta un valor entre cero y la unidad, lo obtuvo a partir de considerar que el coeficiente de fricción era constante a lo largo del ciclo de engrane y el reparto de carga era uniforme.

$$P_{loss} = \mu_m F_{tmax} V H_v = P_{in} \mu_m H_v \rightarrow H_v = \frac{\pi\left(i+1\right)}{z_1 i}\left(1 - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right) \tag{II.127}$$

Donde μ_m es el coeficiente de fricción medio para todo el ciclo de engrane, F_{tmax} la fuerza tangencial máxima, V la velocidad tangencial en el punto primitivo, H_v el factor de pérdidas por ciclo, ε_α la relación de contacto y ε_1 y ε_2 la relación de contacto en el segmento de aproximación y alejamiento.

Shipley [1958, 1962] calculó la eficiencia de la transmisión, considerando las pérdidas de fricción por deslizamiento y las aerodinámicas, que las determinó mediante la ecuación (II.114).

Buckingham [1963] desarrolló una expresión, basada en las pérdidas de fricción por deslizamiento (Ecuación (II.128)), para el cálculo de la eficiencia. La formulación es dependiente de la relación de contacto de los segmentos de acercamiento y alejamiento (

ε_1 y ε_2), así como del coeficiente de fricción medio en cada uno de los dos segmentos (μ_m^1 y μ_m^2).

$$\eta_{ef} = 1 - \left[\frac{1+(1/i)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\right]\left(\frac{\mu_m^1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{\mu_m^2}{2}\varepsilon_2^2\right) \rightarrow \mu_m^1 = \mu_m^2 = \frac{2}{3}\mu \qquad \text{(II.128)}$$

Merrit [1972] calculó el rendimiento en una transmisión de engranajes rectos, mediante el porcentaje de pérdidas (*f*):

$$\eta_{ef} = 1 - \frac{f}{2}\pi\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right) \rightarrow f = 0.0114\left(\frac{1.6}{\eta^{0.15}V_{ent}^{0.15}V_{Sliding}^{0.35}\rho_{0_{eq}}^{0.5}}\right) \qquad \text{(II.129)}$$

Esta ecuación fue desarrollada a partir de integración numérica de las pérdidas de fricción. Sin embargo, dadas las consideraciones realizadas en el análisis (relación de contacto 1.5 y relación de transmisión igual a la unidad), esta expresión fue considerada una investigación preliminar.

Chiu [1975] calculó la eficiencia teniendo en cuenta las pérdidas de fricción por deslizamiento y por rodadura:

$$\left.\begin{aligned} P_{Sliding} &= 1.54\cdot 10^{-5}\left(R_a + 0.55\right)F_N V_{pitch}^{1/2}\rho_{0_{eq}}^{-1/2}\mu^{-1/8}I_1 \\ P_{Roll} &= 1.43\cdot 10^{-3}\sin\left(2\theta\right)V_{pitch}\left(\frac{\mu V_{pitch}}{E_{eq}\rho_{eq}}\right)^{0.71}E_{eq}\rho_{0_{eq}}bI_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow P_{loss} = P_{Sliding} + P_{Roll} \qquad \text{(II.130)}$$

El coeficiente de fricción utilizado fue el propuesto por O'Donoghue (Ecuación (II.64)) y las constantes I_1 y I_2 se calcularon mediante métodos gráficos recogidos en [Chiu, 1975].

Anderson y Loewenthal [Anderson, 1980a], en su propuesta para el cálculo del rendimiento, consideraron tres tipos de pérdidas en la transmisión por engranajes: i) pérdidas de fricción por deslizamiento, modelizadas mediante un modelo de Coulomb con coeficiente de fricción de Benedict y Kelley (Ecuación (II.66)); ii) pérdidas de fricción por rodadura, incorporadas a través de la formulación de Crook (Ecuación (II.94)); y iii) pérdidas aerodinámicas, calculadas mediante un modelo propuesto por los autores (Ecuación (II.115)).

Realizaron la comparativa entre este modelo de pérdidas y otros encontrados en la literatura (Fletcher, Yada y Ohlendorf) [Anderson ,1980b]. Posteriormente, [Anderson, 1980c] estudiaron la eficiencia en diferentes condiciones de operación y con engranajes de diferentes geometrías. El objetivo fue analizar el efecto de cada tipo de pérdidas individualmente (fricción por deslizamiento y rodadura, rodamientos y aerodinámicas de cada engranaje) y el impacto de las condiciones de operación en las pérdidas globales del sistema. En cuanto a las condiciones de operación, las conclusiones fueron claras, con el aumento de par, las pérdidas de fricción aumentaban y, además, eran las más influyentes en la eficiencia. Sin embargo, cuando la velocidad era elevada (más de 20 m/s en el punto primitivo), las pérdidas aerodinámicas aumentaban considerablemente, aunque seguían siendo un orden de magnitud menor que las correspondientes al resto de fenómenos disipativos.

Martins y Seabra [Martins, 2006] presentaron un modelo de cálculo de eficiencia de una transmisión teniendo en cuenta el efecto de los engranajes, rodamientos y juntas. Para el cálculo de las pérdidas en los engranajes, consideraron la fricción por deslizamiento, las

pérdidas por arrastre de fluido (modelo propuesto por Changenet [2002]) y las pérdidas por transferencia de calor (convección, radiación y conducción). Para la implementación de las pérdidas de fricción por deslizamiento, utilizaron el modelo propuesto por Ohlendorf (Ecuación (II.127)), incorporando la formulación de coeficiente de fricción de Niemann (Ecuación (II.78)). Este modelo de cálculo de eficiencia fue mejorado en [Magalhaes, 2012], donde se analizó el efecto de diferentes lubricantes en la eficiencia, así como la consideración de modificaciones en el perfil del diente. Posteriormente, los autores [Marques, 2013], [Fernandes, 2015a, 2015b] correlacionaron su modelo de eficiencia con datos experimentales y con resultados obtenidos a partir de implementar el coeficiente de fricción de la ISO 6336 (Ecuación (II.68)).

Petry-Johnson [2007] presentó un modelo para el cálculo de las pérdidas en engranajes rectos, mediante la superposición de las pérdidas dependientes de la carga y las debidas al arrastre de fluido (no dependientes de la carga). A partir de la correlación con datos experimentales, concluyó que cuanto mayor era el par, mayores eran las pérdidas mecánicas y cuanto mayor era la velocidad, mayores eran las pérdidas por arrastre fluido.

Pleguezuelos [2007] presentó una formulación analítica para el cálculo del rendimiento de engranajes rectos de relación de contacto entre 1 y 2 (Ecuación (II.131)). Para el desarrollo de esta expresión, tuvo en cuenta únicamente las pérdidas de fricción por deslizamiento.

$$\eta_{ef} = 1 - 2\pi\mu_m \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} d_\alpha (1-2\vartheta)^2 - \vartheta + \vartheta^2 + d_\alpha^2 \left(\frac{4}{9} - \vartheta + \vartheta^2\right)\right] \rightarrow \vartheta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_\alpha} \quad \text{(II.131)}$$

Donde d_α es la longitud del segmento de contacto. Los mismos autores extrapolaron la expresión a engranajes rectos con relación de contacto entre 2 y 3, también denominados engranajes con alto grado de recubrimiento o de alta relación de contacto [Pleguezuelos, 2013].

$$\eta_{ef} = 1 - 2\pi\mu_m \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\frac{1}{60}\left[55 + 34\left(\varepsilon_\alpha - 2\right) + 11\left(\varepsilon_\alpha - 2\right)^2 - 27\varepsilon_\alpha^2\vartheta + 27\varepsilon_\alpha^2\vartheta^2\right] \quad \text{(II.132)}$$

Höhn [2009, 2010] calculó la eficiencia considerando únicamente las pérdidas de fricción por deslizamiento. En su procedimiento utilizó el factor de pérdidas por ciclo propuesto por Ohlendorf (Ecuación (II.127)) y el coeficiente de fricción medio propuesto por Niemann y mejorado por Martins (Ecuación (II.78)).

$$\eta_{ef} = 1 - \mu_m \frac{\pi\left(i+1\right)}{z_1 i}\left(1 - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2\right) \rightarrow \mu_m = 0.048\left(\frac{\frac{F_N}{b}}{V_{\Sigma C}\rho_{0_{eq}}}\right)^{0.2} \eta^{-0.05} R_a^{0.25} X_L \quad \text{(II.133)}$$

Posteriormente, Schlegel [2009] calculó la potencia de pérdidas en una caja de cambios, detallando cada uno de los fenómenos que producían estas ineficiencias. Para las pérdidas en los engranajes (también tuvo en cuenta otros elementos como rodamientos), calculó las pérdidas de fricción por deslizamiento a través del procedimiento de Höhn y, para el cálculo de las pérdidas no dependientes de la carga, utilizó los modelos expuestos previamente en las ecuaciones (II.112) y (II.113).

Velex [2009] presentó una formulación analítica para calcular la eficiencia en transmisiones por engranajes rectos estándar, en la cual tuvo en cuenta únicamente las pérdidas de fricción por deslizamiento. Con el objetivo de correlacionar los resultados obtenidos, los comparó con

los correspondientes a otras formulaciones analíticas (Ecuación (II.128) y (II.133)) y con simulaciones numéricas.

$$\eta_{ef} = 1-\mu_m \frac{\pi}{z_1}(1+i)\varepsilon_\alpha \left\{ \frac{2\kappa_0^2 - 2\kappa_0 + 1}{1-\mu_m \left[\tan\varphi_i (2\kappa_0 - 1) - \frac{\pi}{z_1}\varepsilon_\alpha \left(2\kappa_0^2 - 2\kappa_0 + 1\right)\right]} \right\}$$
$$\rightarrow \kappa_0 = \frac{z_1}{2\pi\varepsilon_\alpha i}\left[\sqrt{\frac{R_{ext}^2}{R_{eq}^2 \cos^2\varphi_i} - 1} - \tan\varphi_i \right] \quad \text{(II.134)}$$

En este mismo trabajo incluyó el desarrollo teórico, para el cálculo de la eficiencia, cuando se incluyen rebajes en la punta del diente.

Kuria [2011] propuso un modelo para predecir la eficiencia de trenes de engranajes multi-etapa. Para formular las pérdidas por arrastre fluido, implementó el modelo de Dawson (Ecuación (II.116)), para las pérdidas de fricción por rodadura utilizó el modelo de Crook (Ecuación (II.94)) y para las pérdidas de fricción por deslizamiento, introdujo la formulación de coeficiente de rozamiento variable de Xu *et al.* (Ecuación (II.76)).

Baglioni [2012] obtuvo la eficiencia en transmisiones por engranajes rectos corregidos, a partir de dos procedimientos, teniendo en cuenta solo las pérdidas de fricción por deslizamiento. El primero es el desarrollado por Höhn y el segundo es un método analítico recogido en [Maldotti, 2007]. Este segundo método permite la utilización de coeficientes de fricción variable, concretamente, implementó el correspondiente a Xu *et al.* Este procedimiento se recoge entre las ecuaciones (II.135) y (II.137) se fundamente en el cálculo de la energía perdida en el ciclo de engrane ($E_{loss,sum}$), mediante la integración de las pérdidas instantáneas ($P_{loss,i}$).

$$P_{loss,i} = \mu_i F_{N,i} \left| V_{Sliding,i} \right| \quad \text{(II.135)}$$

$$E_{loss,sum} = \sum E_i \rightarrow E_i = P_{loss,i} \Delta\theta / \omega_{ent} \quad \text{(II.136)}$$

$$\eta_{ef} = 1 - \frac{E_{loss,sum} z_1}{2\pi T_{ent}} \quad \text{(II.137)}$$

Donde E_i es la energía disipada en el instante *i*, $\Delta\theta$ el paso utilizado entre posiciones *i* e *i-1*, T_{ent} el par a la entrada y ω_{ent} la velocidad de rotación de entrada.

II.4. Síntesis del estado del conocimiento de los modelos matemáticos aplicados al cálculo de la eficiencia

A largo de este capítulo se han mostrado cuatro aspectos comunes a los modelos matemáticos de transmisiones por engranajes. Este trabajo se centra en dos de ellos: i) la descripción de la geometría de la rueda, concretamente en los perfiles corregidos y con modificaciones en el perfil del diente; y ii) la definición de los esfuerzos de contacto. En este apartado se resumen las principales características de ambos aspectos, aplicados al análisis de la eficiencia.

Correcciones y modificaciones de perfil del diente

Las correcciones y los rebajes en la punta del diente modifican el reparto de carga, con respecto al caso de dientes estándar, y, por tanto, afectan directamente a la eficiencia de la transmisión. La consideración de correcciones en el diente resulta en una variación de la rigidez de engrane, consecuencia del cambio de grosor del diente. La inclusión de rebajes en la punta del diente produce que la relación de contacto disminuya. Como consecuencia, el ciclo de engrane se acorta y, a priori, las pérdidas en el contacto se reducen.

Se ha detectado que, aunque existen trabajos que utilizan este tipo de engranajes en el ámbito de la fatiga superficial y comportamiento dinámico, existe la necesidad de ampliar el conocimiento en el ámbito de eficiencia energética. El objetivo es analizar cuan decisivas son en este parámetro.

Definición de los esfuerzos de contacto

La definición de los esfuerzos de contacto es un aspecto crucial en el modelado de engranajes. Este aspecto influye, directamente, en el tipo de modelo de engranajes a desarrollar: i) modelos detallados del contacto; y ii) modelos simplificados del contacto. Los primeros se centran en el análisis específico del contacto, calculando de forma precisa los esfuerzos y la distribución de presión existentes. Los segundos, orientados al análisis dinámico, utilizan expresiones analíticas para el cálculo de los esfuerzos de contacto. El interés de este trabajo es desarrollar un modelo dinámico, mejorando los aspectos relativos al contacto. Por esta razón, el modelo de engranajes de partida (GEDUC) se enmarca en el segundo grupo, aunque, por el alcance del trabajo, únicamente se han realizado análisis cuasi-estáticos.

Se analizan tres tipologías de esfuerzos: i) normales; ii) tangenciales; y iii) de arrastre de fluido. Las formulaciones utilizadas para simular el comportamiento de estos esfuerzos dependen; del tipo de contacto, que puede ser seco o en presencia de fluido, y de las condiciones de operación, que determinan el régimen de lubricación en el contacto.

Los esfuerzos normales se dividen en los correspondientes a la parte elástica de la fuerza, normalmente asociada a la rigidez del sistema, y los correspondientes a los fenómenos disipativos en esta dirección, los cuales se modelizan mediante fuerzas viscosas. Los esfuerzos tangenciales, comúnmente, también se superponen en dos fenómenos, los correspondientes a la fricción por deslizamiento entre perfiles y los debidos a la fricción por rodadura entre dientes. En cuanto a las pérdidas por arrastre fluido, generalmente, se modelan como un amortiguamiento torsional viscoso, cuyo valor depende del tipo de fluido que rodea a la transmisión (lubricante, aire o una mezcla de ambos).

Uno de los objetivos de este trabajo es calcular y analizar la eficiencia de las transmisiones por engranajes. Por ello se ha analizado el impacto de cada uno de los esfuerzos expuestos en este parámetro:

- Las pérdidas asociadas a los fenómenos disipativos, en la dirección normal, suelen tener un impacto mínimo en la eficiencia de la transmisión. Las debidas a la histéresis de los materiales son generalmente despreciadas por la mayoría de los autores, en cualquier régimen de lubricación. El efecto del estrangulamiento de fluido, aunque es varios órdenes de magnitud menor que otros fenómenos disipativos como la fricción por deslizamiento, es importante en ciertos regímenes de lubricación. Generalmente, para simular el comportamiento del fluido, se recurre a un modelo de amortiguamiento viscoso equivalente, el cual se determina mediante los fundamentos de la ecuación de Reynolds.

- Las pérdidas asociadas a la fricción, localizadas en la dirección tangencial al contacto, son las que tienen mayor importancia, cuando el par es elevado, en la eficiencia de la transmisión. En concreto, las pérdidas debidas a la fricción por deslizamiento, dependiendo de las condiciones de funcionamiento y lubricación [Petry-Johnson, 2007], suelen ser mayores al 90% total de las pérdidas del sistema. Para simular el comportamiento de la fricción por deslizamiento, generalmente, se recurre al modelo de Coulomb, que asume una fuerza tangente a la dirección del contacto, la cual es proporcional a la fuerza normal. Las pérdidas debidas a la fricción por rodadura son un orden o dos menores que las producidas por el deslizamiento entre perfiles y, por ello, son obviadas por la mayoría de autores. El modelo más utilizado, para simular la fricción por rodadura, es el de Coulomb-Amontons, que incorpora a una fuerza tangencial equivalente, proporcional al par de rodadura.
- Las pérdidas por arrastre fluido son dependientes de la velocidad de rotación de la transmisión. Estas pérdidas, ya sean aerodinámicas o por movimiento del lubricante, en general son obviadas cuando el par aplicado a la transmisión es considerable. Sin embargo, a partir de velocidades de rotación mayores a 3000 rpm, pueden suponer más de un 5% de las pérdidas totales. Para simular el comportamiento de este fenómeno, generalmente, se utiliza un modelo de amortiguamiento viscoso torsional equivalente.

Existen otros elementos, además de los propios engranajes, que producen pérdidas, como son los rodamientos y las juntas. Las juntas se suelen ignorar, desde el punto de vista de la eficiencia, no siendo así las pérdidas que se producen en los rodamientos. Para velocidades mayores a 5000 rpm, éstas pueden llegar a suponer hasta un 20% de las pérdidas totales [Anderson, 1980c], [Martins, 2006]. Se ha concluido que el error de no considerar otros elementos, además de los engranajes, es asumible en las condiciones de operación de estudio.

II.5. Valoración crítica de los modelos matemáticos para el cálculo de la eficiencia

Respecto al cálculo de la eficiencia, se han detectado dos problemáticas que no han sido abordadas convenientemente en la literatura científica, a las que se pretende dar solución en este trabajo.

La primera surge a partir de no considerar convenientemente geometrías del diente distintas de la estándar o normalizada, en el cálculo de la eficiencia. Es común encontrar métodos de cálculo de eficiencia en la literatura, que no reproducen, fielmente, la inclusión de correcciones de tallado y modificaciones en el perfil del diente. Su incorporación provoca una variación de la rigidez de engrane y cambios en la localización y longitud del contacto. Estos aspectos no son recogidos de forma precisa por la mayoría de modelos. De lo anterior, se concluye el interés de analizar cuan decisivas son en la eficiencia del sistema.

La segunda se corresponde con la adecuada consideración de los esfuerzos de contacto en la eficiencia. Se ha fundamentado que, en las condiciones de operación de estudio (carga elevada), la fricción por deslizamiento produce la mayoría de las pérdidas. Por tanto, es admisible, asumiendo un cierto error, considerar la fricción por deslizamiento como único fenómeno disipativo presente en el contacto. El modelo más extendido en la literatura científica, para implementar el comportamiento de la fricción por deslizamiento, es el de

Coulomb, que es por el que se opta en el modelo GEDUC. Asumiendo esta premisa, la eficiencia depende de tres parámetros: la velocidad de deslizamiento, el coeficiente de fricción y el reparto de carga. El primero viene determinado cinemáticamente, de aquí que, la mayoría de los autores se haya centrado en el estudio de los otros dos parámetros.

La mayor parte de métodos de cálculo de la eficiencia se basan en el uso de formulaciones analíticas de reparto de carga y coeficiente de fricción. En esta línea, se pretende aportar un enfoque más realista, calculando el reparto de carga mediante la aplicación del modelo GEDUC. En la literatura científica, existen modelos que lo determinan mediante la consideración de que en las zonas de contacto doble ambos dientes soportan la misma carga. También hay modelos que, aunque no tienen en cuenta los cambios debidos al par aplicado o a las modificaciones en el perfil del diente, sí representan la variación en las zonas de contacto doble. El modelo de reparto utilizado tiene en cuenta todos estos efectos, dando solución a esta problemática.

Además, es habitual encontrar modelos de esfuerzos de fricción por deslizamiento que incorporan un coeficiente de fricción, el cual es constante a lo largo del ciclo de engrane. Este comportamiento no concuerda con la realidad. Para aportar precisión al cálculo de este fenómeno disipativo, es necesario considerar la variabilidad del coeficiente de fricción. En esta línea, se implementa una formulación de coeficiente de fricción, la cual es dependiente de la carga aplicada y del régimen y condiciones de lubricación. Asimismo, una formulación de reparto de carga más avanzada permite una mejor caracterización del coeficiente de fricción y, por tanto, influye doblemente en la determinación de la eficiencia.

Capítulo III

FUNDAMENTOS TEÓRICOS DEL MODELO DE CONTACTO ENTRE ENGRANAJES

III.1. Introducción

En este capítulo se presentan los fundamentos teóricos necesarios para la comprensión del modelo de contacto entre engranajes desarrollado. Este trabajo de Tesis parte del desarrollado previamente en la Universidad de Cantabria y recogido en sendas memorias de Tesis de Fernández [2010] e Iglesias [2013]. Por lo tanto, para el desarrollo del presente trabajo, es necesario el conocimiento previo de este modelo de partida, planteando un apartado a este cometido. Además, este trabajo se ha orientado al análisis de los fenómenos disipativos y su influencia sobre la eficiencia de este sistema mecánico. Por lo que, también, será necesario plantear los fundamentos teóricos asociados a las mejoras propuestas en el Capítulo IV.

Por todo lo anterior, en el presente capítulo, después de describir brevemente la terminología que será utilizada, se mostrarán las características del modelo de partida GEDUC necesarias para el desarrollo del estudio. Para describir el modelo de partida, se seguirá la misma estructura del capítulo II, es decir, se definirán los modelos correspondientes a la geometría de las ruedas, la localización de los puntos de contacto, el cálculo de los esfuerzos en el contacto y la implementación de las ecuaciones dinámicas. Una vez presentado el modelo de partida, se detallarán los fundamentos tribológicos asociados a las mejoras implementadas al modelo de contacto. Para la descripción de estos modelos, se diferencian tres tipologías de esfuerzos: normales, tangenciales y de arrastre de fluido.

III.2. Nomenclatura y terminología

Con el objetivo de facilitar la interpretación de los desarrollos que se presentarán en este capítulo, en esta sección se revisan diversos conceptos relacionados con la geometría de los engranajes cilíndricos de dientes rectos con perfil de evolvente, indicando los símbolos y unidades adoptadas cuando sea preciso.

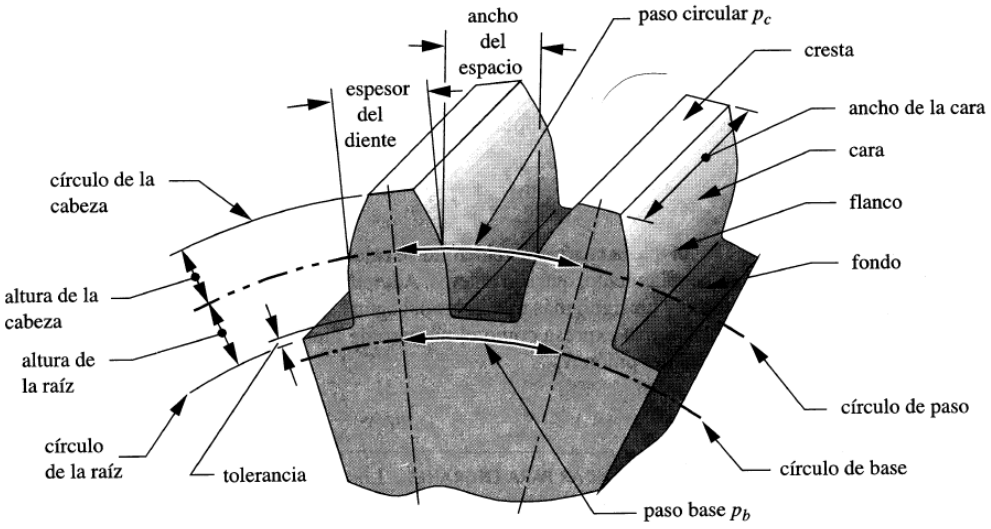


Figura III-1 Nomenclatura de los dientes de los engranajes [Fernández, 2010]

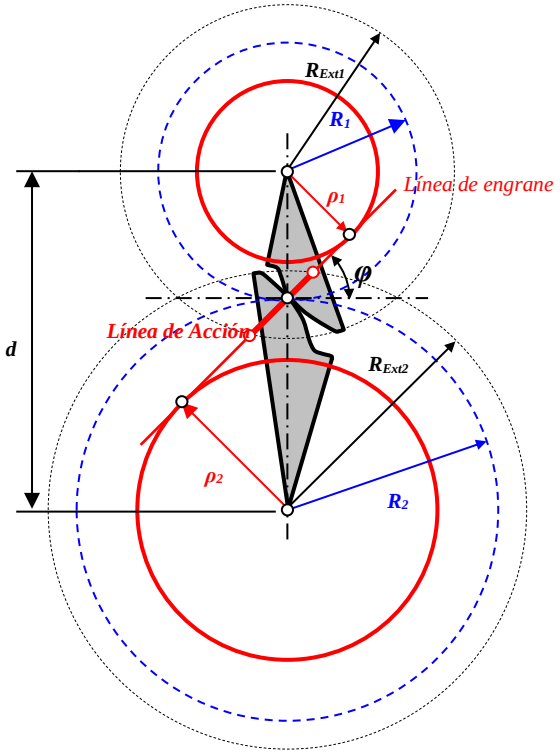


Figura III-2 Geometría del contacto [Fernández, 2010]

Tomando como referencia la Figura III-1 y la Figura III-2, se definen los siguientes términos:

- *Número de dientes (**Z**):* como su propio nombre indica es el número de dientes de la rueda.
- *Radio primitivo (o de paso) (**R**):* radio de la circunferencia primitiva que es la circunferencia teórica que representa el axoide del movimiento relativo entre dos ruedas dentadas. El movimiento de una pareja de engranajes puede representarse mediante el movimiento de sus correspondientes circunferencias primitivas.
- *Punto primitivo:* es el punto de tangencia de las circunferencias primitivas.
- *Paso primitivo (o circular) (**P**):* es el arco, medido sobre la circunferencia primitiva, entre dos puntos homólogos de los perfiles de dos dientes consecutivos. Generalmente se expresa en *mm* y se obtiene dividiendo la longitud de la circunferencia primitiva entre el número de dientes.
- *Piñón:* es la rueda de menor tamaño (de una pareja).
- *Rueda o corona:* es la rueda de mayor tamaño (de una pareja).
- *Radio base (**ρ**):* radio de la circunferencia base que es aquella a partir de la cual se genera el perfil de evolvente.
- *Ancho de cara (**b**):* ancho de la rueda medido en dirección axial.
- *Módulo (**m**):* parámetro obtenido a partir de la división del paso por el número π. Se expresa en *mm* y es el recíproco del paso diametral ("*diametral pitch*" en inglés).
- *Radio exterior ($\boldsymbol{R_{Ext}}$):* radio máximo de la rueda.
- *Radio de fondo ($\boldsymbol{R_{fondo}}$):* radio mínimo del pie, raíz o punto inferior del espacio entre dos dientes consecutivos.
- *Addendum (o altura de cabeza) (**ad**):* diferencia entre el radio exterior y el radio primitivo.
- *Dedendum (o altura de pie) (**dd**):* diferencia entre el radio primitivo y el radio de fondo.
- *Distancia entre centros (**d**):* distancia entre los centros de cada una de las ruedas que constituyen una pareja de engranajes.
- *Línea de engrane (o de presión):* tangente común a las circunferencias base de una pareja de ruedas. Teóricamente el contacto, los esfuerzos y la transferencia de potencia se efectúan a lo largo de esta línea.
- *Línea de acción:* porción de la línea de engrane a lo largo de la cual tiene lugar el contacto.
- *Angulo de presión (**φ**):* ángulo que forma la línea de engrane con la perpendicular a la línea de centros.
- *Espesor del diente (**e**):* arco a lo largo de la circunferencia primitiva entre los flancos opuestos del mismo diente.
- *Hueco o espacio interdental (**h**):* arco a lo largo de la circunferencia primitiva entre los perfiles de dos dientes adyacentes.
- *Relación de contacto (**ε**):* número medio de parejas de dientes en contacto. Se obtiene como el cociente de la línea de acción entre el paso base.

- *Relación de transmisión (**i**):* cociente entre la velocidad de la rueda conducida y la de la rueda conductora. También se puede obtener como el cociente entre el número de dientes de la rueda conductora y el de la rueda conducida. En el caso de engranajes exteriores, la relación de transmisión será positiva, siendo negativa en el caso de ruedas interiores.

III.3. Modelo de partida (GEDUC LCM)

En esta sección se presentan los fundamentos del modelo de partida necesarios para la comprensión y desarrollo de las mejoras introducidas. La motivación para el desarrollo del modelo de partida fue la simulación del comportamiento dinámico de transmisiones mediante engranajes, como técnica de diagnóstico y pronóstico, con aplicación al mantenimiento en condición, mediante el análisis de vibraciones. En el marco de trabajo en el que se desarrolló dicho modelo, existían diversas propuestas que trataban de representar la forma que adopta la señal vibratoria. Sin embargo, no tenían relación directa con el sistema físico real en presencia de defectos. Por lo que, el estudio de nuevas estrategias de mantenimiento y la mejora de la predicción del desarrollo de defecto, requería la utilización de modelos teóricos más avanzados que los meramente relativos a la forma de la señal. De ahí el interés por desarrollar modelos orientados en la incorporación de diversos defectos, tanto en engranajes como en rodamientos.

El modelo de partida incorpora los principales aspectos característicos de este tipo de sistemas. Para la descripción de la geometría de los dientes se sigue el enfoque vectorial de Litvin [1995, 2004] a partir de tallado por cremallera. Una vez se define la geometría y parámetros de funcionamiento de la transmisión, es necesario determinar donde se pueden producir los contactos de la transmisión. Para ello se recurre al procedimiento *Tooth Contact Analysis*. Con el objetivo de encontrar los puntos potenciales de contacto, se definen los solapamientos geométricos entre dientes. Si existe penetración geométrica, se considera que existe contacto y, por tanto, se procede al cálculo de los esfuerzos de contacto. Para la obtención de estos esfuerzos se implementó una formulación híbrida, la cual consiste en la superposición de un modelo de elementos finitos y un modelo analítico de alcance local del contacto. El primero simula el comportamiento estructural del engranaje y el segundo incorpora el comportamiento de las deformaciones en las proximidades del contacto. El cálculo de esfuerzos, además, considera la posibilidad de introducir fuerzas viscosas en la dirección normal y fuerzas de rozamiento en la dirección tangencial. Una vez definido el modelo de contacto, se procede a la integración numérica de las ecuaciones dinámicas que rigen el movimiento del sistema.

Siguiendo la secuencia de funcionamiento del modelo de partida GEDUC, se describen los aspectos necesarios para su comprensión.

- Descripción de la geometría
- Localización de los puntos/áreas de contacto
- Obtención de los esfuerzos de contacto
- Formulación y procedimiento de integración de las ecuaciones dinámicas

III.3.1. Descripción de la geometría de las ruedas

En esta sección se muestra la metodología de cálculo de la geometría de los perfiles. El procedimiento consiste en, inicialmente, definir vectorialmente los tramos del perfil del útil de generación, en este caso una cremallera (Figura III-3). A partir del perfil del útil y aplicando la condición de engrane (Ecuación (III.7)), se determinan los tramos del perfil de los dientes del engranaje generado (Ecuaciones (III.8)-(III.11)).

Perfil del útil de generación

Para determinar el perfil del útil, se define un sistema de coordenadas ligado a la herramienta. En este caso, este sistema se localiza en el centro de un vano, de forma que el espesor del hueco es igual a la mitad del paso ($m\pi/4$). El resto de parámetros que definen la herramienta son el módulo (m), el addendum (ad), el dedendum (dd) y el radio de acuerdo de la punta (r).

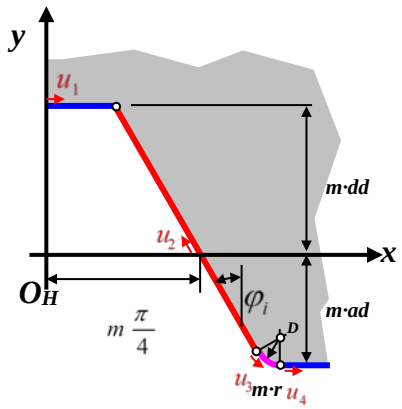


Figura III-3 Descripción del perfil de la cremallera [Fernández, 2010]

$$\vec{r}_1^{\,hta}(u_1,v_1)=\begin{Bmatrix}u_1\\ m{\cdot}dd\\ v_1\end{Bmatrix};\qquad 0\le u_1\le m\left(\frac{\pi}{4}-dd\tan\varphi_i\right) \tag{III.1}$$

$$\vec{r}_2^{\,hta}(u_2,v_2)=\begin{Bmatrix}(1/4)\pi m-u_2\sin(\varphi_i)\\ u_2\cos(\varphi_i)\\ v_2\end{Bmatrix};\qquad -m\left(ad+r\frac{\sin(\varphi_i)-1}{\cos(\varphi_i)}\right)\le u_2\le\frac{mdd}{\cos(\varphi_i)} \tag{III.2}$$

$$\vec{r}_3^{\,hta}(u_3,v_3)=\begin{Bmatrix}D_x-r{\cdot}m\cos(\varphi_i+u_3)\\ D_y-r{\cdot}m\sin(\varphi_i+u_3)\\ v_3\end{Bmatrix};\qquad 0\le u_3\le\frac{\pi}{2}-\varphi_i \tag{III.3}$$

$$\vec{r}_4^{\,hta}(u_4,v_4)=\begin{Bmatrix}u_4\\ -m{\cdot}ad\\ v_4\end{Bmatrix};\qquad D_x\le u_4\le\frac{\pi m}{2} \tag{III.4}$$

Las coordenadas del punto D (centro del arco de redondeo) se obtienen como:

$$D_x=m\left(\frac{\pi}{4}+(ad+r(\sin\varphi_i-1))\tan\varphi_i\right) \tag{III.5}$$

$$D_y=-m\left(ad-r\right) \tag{III.6}$$

Perfil del engranaje generado

Una vez definidos los diferentes tramos del perfil de la herramienta, se definen los tramos del perfil de los dientes generado aplicando la condición de engrane (Ecuación (III.7)). La condición de engrane establece que la normal al perfil de la herramienta debe ser perpendicular a la velocidad relativa del punto de contacto con el perfil de la rueda, que matemáticamente se expresa:

$$\vec{n}^{S}_{perfil} \cdot \vec{v}^{S}_{relativa} = 0 \tag{III.7}$$

Mediante la condición de engrane, se consiguen tantas ecuaciones como tramos tenga la herramienta, que, además, coincide con el número de tramos generados en el perfil del engranaje final (Ecuaciones (III.8), (III.9), (III.10) y (III.11)).

$$\vec{r}_{1P}^{\,Rueda}(\theta, v_1) \equiv \begin{Bmatrix} (m(dd+x)+R)\sin\theta \\ (m(dd+x)+R)\cos\theta \\ v_1 \end{Bmatrix} \tag{III.8}$$

$$0 \le \theta_1 \le \frac{e_{Cabeza}}{2R_{Ext}}$$

$$\vec{r}_{2P}^{\,Rueda}(\theta, v_2) \equiv \begin{Bmatrix} (mx\tan(\varphi_i) + \frac{\pi m}{4} - R\theta)\cos(\varphi_i)\cos(\varphi_i - \theta) + R\sin\theta \\ (mx\tan(\varphi_i) + \frac{\pi m}{4} - R\theta)\cos(\varphi_i)\sin(\varphi_i - \theta) + R\cos\theta \\ v_2 \end{Bmatrix} \tag{III.9}$$

$$\theta\left(R_{Ext}\right) \le \theta_2 \le \theta\left(u_{2\min}\right)$$

$$\theta(u_2) = \frac{\pi m}{4} - \frac{u_2}{R\sin(\varphi)} - \frac{mx}{R\tan(\varphi_i)}$$

$$\vec{r}_{3P}^{\,Rueda}(u_3, \theta, v_3) \equiv \begin{Bmatrix} (D_y - rm\sin(\varphi_i + u_3) + mx)\frac{\cos(\varphi_i + u_3 - \theta)}{\sin(\varphi_i + u_3)} + R\sin\theta \\ (D_y - rm\sin(\varphi_i + u_3) + mx)\frac{\sin(\varphi_i + u_3 - \theta)}{\sin(\varphi_i + u_3)} + R\cos\theta \\ v_3 \end{Bmatrix} \tag{III.10}$$

$$\theta(u_{3\max}) \le \theta_3 \le \theta(u_{3\min})$$

$$\theta(u_3) = \frac{D_x}{R} + \frac{mx - D_y}{R\tan(\varphi_i + u_3)}$$

$$\vec{r}_{4P}^{\,Rueda} \equiv \begin{Bmatrix} (m(x-ad)+R)\sin\theta \\ (m(x-ad)+R)\cos\theta \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{III.11}$$

$$\theta(u_{4\min}) \le \theta_4 \le \theta(u_{4\max})$$

$$\theta(u_4) = \frac{u_4}{R}$$

El tramo 1 conduce a la ecuación de una circunferencia (Ecuación (III.8)), cuyo radio tiene el valor del radio exterior, R_{Ext} (Ecuación (III.12)). El tramo 2 se corresponde con una curva evolvente de círculo (Ecuación (III.9)). En el tramo 3 se obtiene la denominada trocoide, que es la curva de enlace del diente con el cuerpo de la rueda (Ecuación (III.10)), y por último, el tramo 4 se corresponde, de nuevo, con una circunferencia, cuyo radio tiene el valor del radio de fondo, R_{Fondo} (Ecuación (III.13)).

$$R_{Ext} = (m(dd + x) + R) \tag{III.12}$$

$$R_{Fondo} = (m(x - ad) + R) \tag{III.13}$$

En la intersección entre los tramos 2 y 3, es decir, entre la circunferencia exterior y la evolvente, tiene lugar una singularidad. Ésta podría generar dificultades en la estimación de los esfuerzos de contacto. Para evitar este problema derivado de la generación del perfil, se consideró incluir un cierto redondeo en la punta del diente (de radio r_{punta}), que enlazara ambas curvas. El tramo del arco de redondeo se define por las coordenadas que aparecen en la ecuación (III.14).

$$\vec{r}_{5P}^{\,Rueda}(u_5, v_5) \equiv \begin{Bmatrix} \left(R_{Ext} - r_{punta}\right)\cos\gamma + r_{punta}\cos(u_5) \\ \left(R_{Ext} - r_{punta}\right)\sin\gamma + r_{punta}\sin(u_5) \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad \varphi_A - \alpha \le u_5 \le \gamma$$

$$\gamma = \alpha - \left(\varphi_A - \varphi_C\right) \qquad \varphi_A = \arccos\left(\frac{\rho_0}{\left|\overline{OA}\right|}\right) \qquad \varphi_C = \arccos\left(\frac{\rho_0}{\left|\overline{OC}\right|}\right) \tag{III.14}$$

Perfil con correciones

En transmisiones por engranajes con relación de transmisión distinta de la unidad, la problemática surge a partir de que la rueda de menor número de dientes llega al final de su vida útil antes que la de mayor tamaño. En la industria, para paliar este problema, normalmente, se recurre a la corrección de los dientes de ambos engranajes. Para introducir correcciones al perfil del diente, la herramienta de tallado se aleja o acerca, dependiendo del tipo de corrección deseada. Lo que se consigue, con este alejamiento o acercamiento, es tallar un segmento de evolvente diferente al que se tallaría en el caso sin corrección (estándar). Generalmente, se aleja la herramienta de tallado en la rueda de menor tamaño, consiguiendo un aumento en el espesor de sus dientes, y, a su vez, se acerca la herramienta cuando se genera la rueda de mayor tamaño, provocando una reducción del espesor en sus dientes.

Entre las capacidades del modelo se encuentra la posibilidad de introducir correcciones de perfil a los dientes. Con este procedimiento se consigue igualar la vida útil de ambas ruedas, modificando a su vez las características dinámicas y de contacto de la transmisión (se varía la rigidez). De aquí el interés de analizar la características dinámicas de este tipo transmisiones, así como la influencia que tienen en el rendimiento del sistema.

En la Figura III-4, se muestra el esquema del procedimiento de generación de perfiles a través de cremallera, a la cual se le aplica un alejamiento "*mx*" respecto del caso sin corrección. En la misma figura, se recogen algunos perfiles generados para diferentes factores de corrección positivos. Se observa que cuanto más se aleja la herramienta, mayor es el espesor del diente. Este comportamiento concuerda con el correspondiente al engranaje de menor número de dientes.

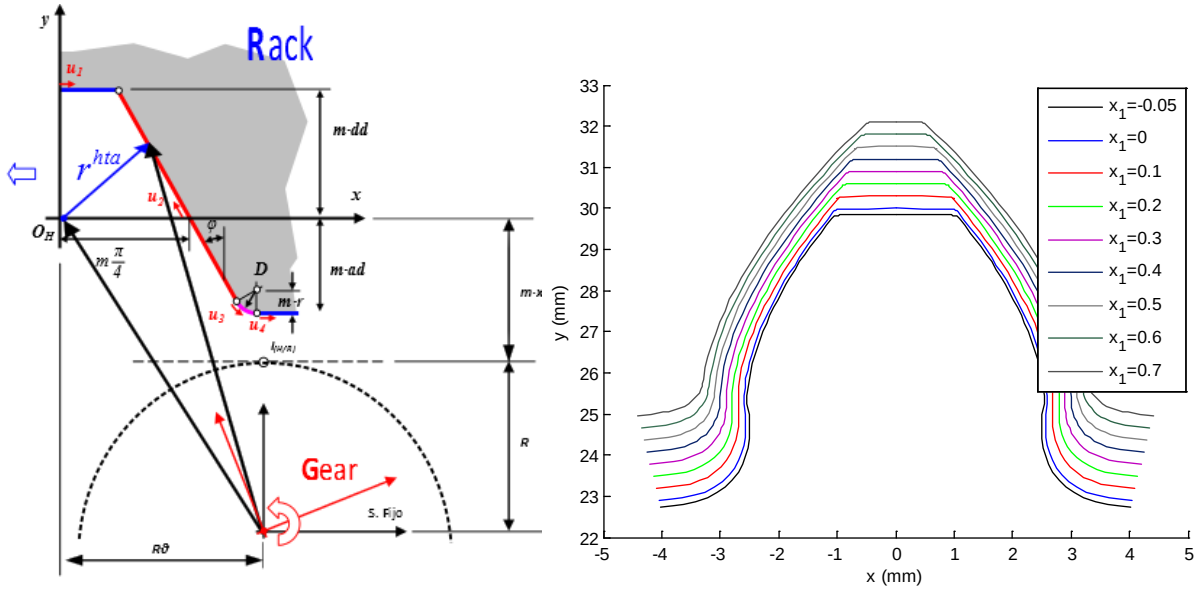


Figura III-4 Proceso de generación de perfiles corregidos y dientes generados para diferentes casos de corrección

III.3.2. Localización de los puntos/áreas de contacto

Una vez definida la geometría de los engranajes, la localización de los puntos de contacto es un aspecto vital dentro del análisis dinámico. En el modelo de partida, se evitó la aplicación de procedimientos numéricos que incrementaran el esfuerzo computacional. Por ello, para obtener la distancia de separación entre perfiles, se optó por una formulación analítica.

El modelo tiene en cuenta el contacto entre los perfiles en el flanco (contacto directo) y en el contra flanco (contacto indirecto), así como la posibilidad de que no exista contacto entre ellos. En el contacto directo, la línea de engrane posee pendiente positiva con respecto a la perpendicular a la línea de centros, mientras que en el inverso, la pendiente es negativa.

El contacto entre dos ruedas perfectamente talladas y con dientes de perfil de evolvente tiene lugar a lo largo de la línea de engrane. La incorporación del arco de redondeo en la punta modifica este planteamiento, añadiendo una dificultad adicional, ya que el contacto potencial tiene lugar fuera de la línea de engrane. Además, a partir de la consideración del arco de redondeo, se tendrán que analizar tres tipos de contactos potenciales entre perfiles: contacto evolvente – evolvente, redondeo – evolvente y evolvente – redondeo, tanto en contacto directo como indirecto.

Análisis geométrico del contacto

Conociendo la posición de referencia y la posición del contacto (Figura III-5), se pueden obtener las distancias entre perfiles, tanto para el contacto directo (Ecuación (III.15)), como para el contacto indirecto (Ecuación (III.16)).

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{Ev-Ev} &= \left(\rho_{0_1}+\rho_{0_2}\right)\left(\tan\varphi_{i_0}+\varphi_{i_T}-\varphi_{i_0}+\psi\right)-\left(\rho_{0_1}\theta_1+\rho_{0_2}\theta_2\right)-d_T\sin(\varphi_T)\\
\delta_{Ev-r2} &= \rho_{0_1}\left(\tan\varphi_{i_0}+\varphi_{i_T}{}^{r2}-\varphi_{i_0}+\left(\psi-\theta_1\right)\right)+\left(\mathrm{R}_{Ext2}-r_{punta2}\right)\sin(\varphi_T{}^{r2}-\lambda_2)+r_{punta2}-d_T\sin(\varphi_T{}^{r2})\\
\delta_{r1-Ev} &= \rho_{0_2}\left(\tan\varphi_0+\varphi_{i_T}{}^{r1}-\varphi_{i_0}+\left(\psi-\theta_2\right)\right)+\left(\mathrm{R}_{Ext1}-r_{punta1}\right)\sin(\varphi_{i_T}{}^{r1}-\lambda_1)+r_{punta1}-d_T\sin(\varphi_{i_T}{}^{r1})
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.15)}$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{EvI-EvI} &= \left(\rho_{0_1}+\rho_{0_2}\right)\left(\tan\varphi_0+\varphi_{i_T}-\varphi_{i_0}-\left(\psi-\theta_*\right)\right)+\left(\rho_{0_1}\theta_1+\rho_{0_2}\theta_2\right)-d_T\sin(\varphi_{i_T}) \\
\delta_{EvI-r2I} &= \rho_{0_1}\left(\tan\varphi_{i_0}+\varphi_{i_{TI}}{}^{r2}-\varphi_{i_0}-\left(\psi-\left(\theta_1+\theta_*\right)\right)\right)+\left(\mathrm{R}_{Ext2}-r_{punta2}\right)\sin(\varphi_{i_{TI}}{}^{r2}-\lambda_2)+r_{punta2}-d_T\sin(\varphi_{i_{TI}}{}^{r2}) \\
\delta_{r1I-EvI} &= \rho_{0_2}\left(\tan\varphi_{i_0}+\varphi_{i_{TI}}{}^{r1}-\varphi_{i_0}-\left(\psi-\left(\theta_2+\theta_*\right)\right)\right)+\left(\mathrm{R}_{Ext1}-r_{punta1}\right)\sin(\varphi_{i_{TI}}{}^{r1}-\lambda_{1I})+r_{punta1}-d_T\sin(\varphi_{i_{TI}}{}^{r1})
\end{aligned}\right\} \quad \text{(III.16)}$$

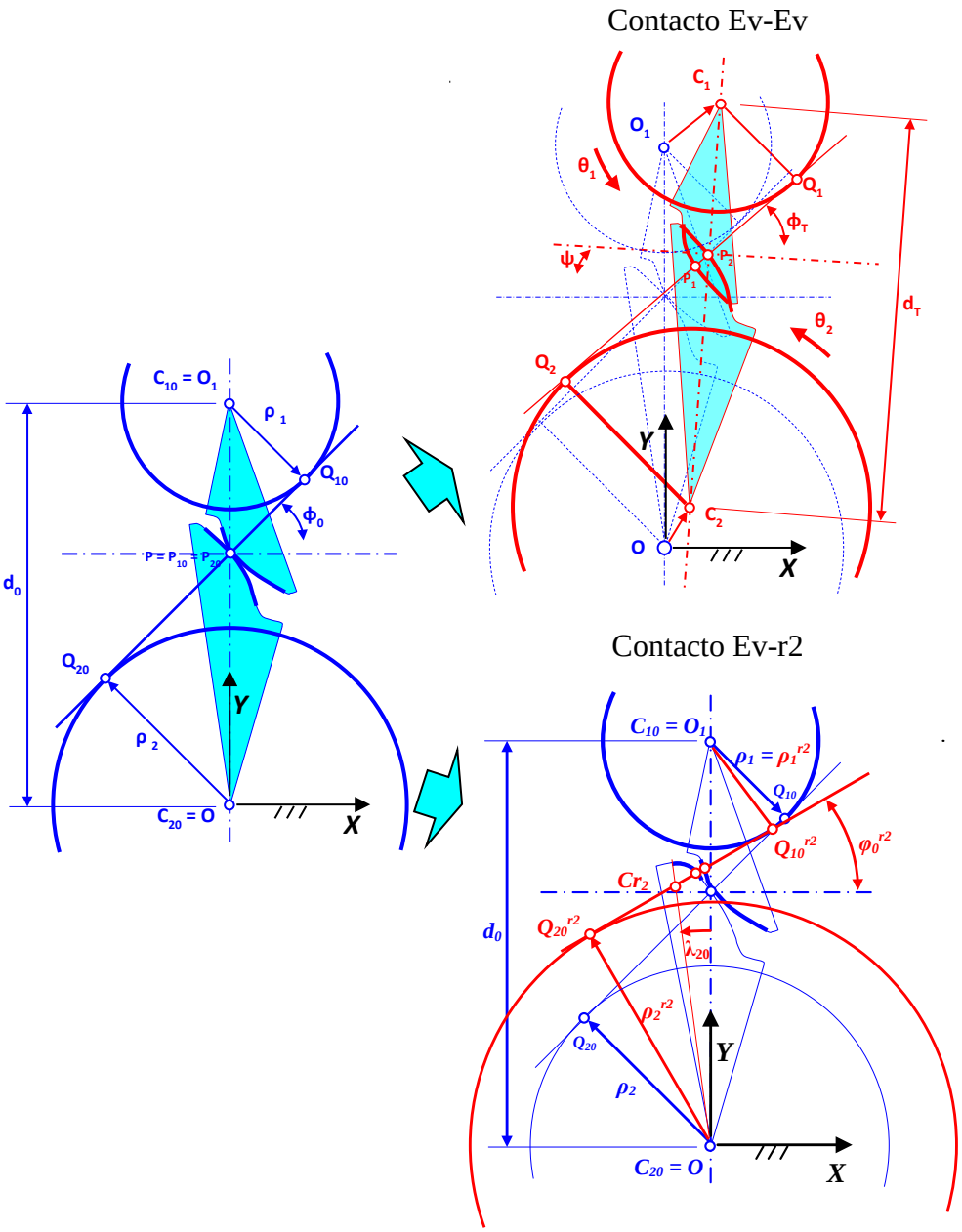


Figura III-5 Determinación de la distancia entre los puntos de contacto en el caso de contacto evolvente – evolvente

Una vez calculadas las distancias entre los puntos potenciales de contacto, es necesario establecer un procedimiento que permita discernir cuál de ellos es el aplicable en cada caso (contacto activo). Se considera que la tipología de contacto que posea mayor ángulo de presión, es el que está activo. Sin embargo, hay que tomar ciertas precauciones a la hora de aplicar este criterio, dado que puede suceder que en algunos casos no sea posible definir el

ángulo de presión para el contacto evolvente-redondeo. Asimismo, a lo largo del proceso de engrane, pueden coexistir más de una pareja de dientes en contacto. Por lo que es necesario aplicar este procedimiento a *N* puntos de contacto potencial (Ecuación (III.17)).

La cantidad de puntos potenciales a analizar viene definida por la relación de contacto de la transmisión (ε_α) (Ecuación (III.18)). En este trabajo, la relación de contacto toma valores, $1 \leq \varepsilon_\alpha \leq 2$, por lo tanto, *N*, definida por la ecuación (III.17), es igual a seis.

$$N = 2\left(Ceil(\varepsilon_\alpha)+1\right) = 6 \tag{III.17}$$

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\left(\sqrt{R_{Ext1}{}^2 - \rho_{0_1}{}^2} + \sqrt{R_{Ext2}{}^2 - \rho_{0_2}{}^2} - \left(\rho_{0_1} + \rho_{0_2}\right)\tan(\varphi_{i_0})\right)}{\pi m \cos(\varphi_{i_0})} \tag{III.18}$$

Donde *Ceil (x)* es una función que redondea *x* hacia el entero inmediatamente superior.

Para clarificar el procedimiento expuesto, se analizan los contactos potenciales de la transmisión con dientes corregidos mostrada en la Figura III-6. En esta figura, se puede observar los puntos potenciales de contacto, correspondiendo el 1, 2 y 3 al contacto directo y 4, 5 y 6 al indirecto. Aplicando el procedimiento, se obtiene que los contactos potenciales en los puntos 2 y 4 son del tipo evolvente – evolvente mientras que 1, 3, 5 y 6 son del tipo evolvente – arco de redondeo.

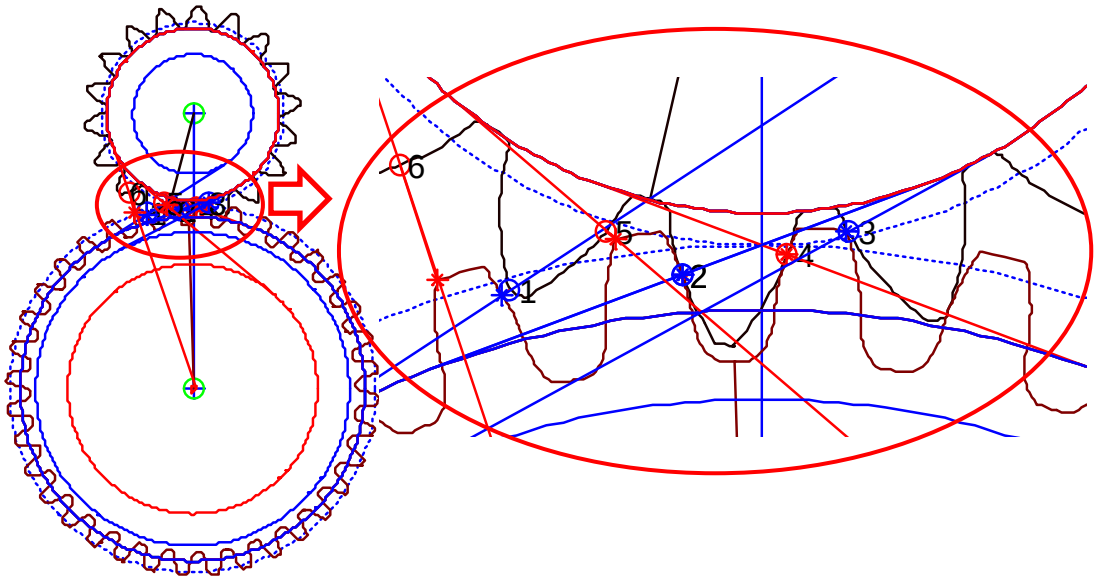


Figura III-6 Localización de los puntos de contacto y detalle de los puntos de contacto considerados para las ruedas con factor de corrección igual a 0.7

Perfil con modificaciones de perfil (rebajes en la cabeza y base del diente)

Como un aspecto ligado a la localización de los puntos de contacto, se analiza la inclusión de modificaciones en el perfil del diente, dado que producen una variación en la distancia entre perfiles.

Entre las capacidades del modelo están, por un lado, la inclusión de defectos relacionados con las condiciones de fabricación y montaje, como los errores de perfil, de paso y las excentricidades, y, por otro, la inclusión de rebajes en la punta y base del diente. En este trabajo, no se analiza específicamente la inclusión de defectos o errores, pero la problemática, derivada del cálculo de la distancia entre perfiles, es la misma que en el caso de las modificaciones de perfil. Esto implica que, aunque los modelos analíticos que definen errores y modificaciones de perfil sean diferentes en magnitud, el fundamento para el cálculo de la distancia en ambos casos es el mismo.

La introducción de rebajes en la cabeza (*Tip relief*) o en la base del diente (*Bottom relief*), práctica habitual en el diseño de engranajes, tiene como finalidad aliviar el nivel de tensiones en los dientes y suavizar el error de transmisión. El modelo utilizado para la inclusión de rebajes viene definido por la magnitud máxima del rebaje $\boldsymbol{C_T}$ para la cabeza o $\boldsymbol{C_B}$ para la base, la longitud de la corrección $\Delta\boldsymbol{L_T}$ o $\Delta\boldsymbol{L_B}$ y la forma del rebaje, lineal o parabólica (Figura III-7).

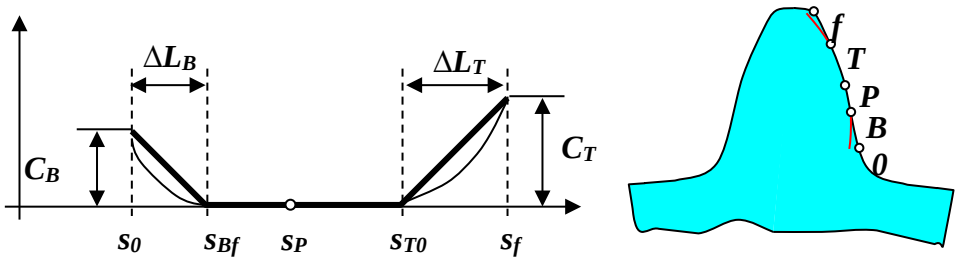


Figura III-7 Descripción del rebaje en la punta y en la base del diente [Fernández, 2010]

La inclusión de rebajes en la punta y base del diente se formula, mediante un modelo que representa la desviación $e_R(s)$ del perfil real con respecto al perfil ideal, de acuerdo con las ecuaciones (III.19) y (III.20). Un valor positivo, para la magnitud del rebaje, indica falta de material, es decir, que el radio de curvatura es menor que el correspondiente a la curva de evolvente teórica.

$$e_{RT}(s) = C_T \left(\frac{(s - s_{T0})}{\Delta L_T} \right)^n \qquad n = 1,2; \qquad s \in [s_{T0}, s_f] \tag{III.19}$$

$$e_{RB}(s) = C_B \left(\frac{(s_{Bf} - s)}{\Delta L_B} \right)^n ; \qquad n = 1,2; \qquad s \in [s_0, s_{Bf}] \tag{III.20}$$

En donde $\boldsymbol{s_0}$ representa el radio de curvatura inferior, $\boldsymbol{s_f}$ el radio de curvatura superior (exterior del diente) y $\boldsymbol{n}$ adoptará el valor 1 si el rebaje tiene forma lineal y 2 en el caso de rebaje parabólico (en el caso de estudio n=1).

III.3.3. Obtención de los esfuerzos de contacto

El modelo de partida descrito tiene como objetivo final modelizar el comportamiento dinámico de transmisiones por engranajes rectos. Por esta razón, las formulaciones utilizadas para calcular los esfuerzos presentes en el contacto son de tipo analítico. Para la obtención de estos esfuerzos, se distingue si están localizados en la línea de engrane (esfuerzo normal) o si por el contrario se encuentran en la tangente a la línea acción (esfuerzo tangencial).

- Esfuerzo normal
- Esfuerzo tangencial

Para el cálculo de los esfuerzos normales de contacto, se implementó una formulación híbrida, que consiste en la superposición de un modelo de elementos finitos, el cual simula el comportamiento estructural del engranaje, y un modelo local, el cual implementa el comportamiento de las deformaciones en las proximidades del contacto.

Además de los propios esfuerzos de contacto, se permite la incorporación de otro tipo de fenómenos en el modelo de contacto, como son la fricción, aplicada en la perpendicular a la línea de acción, y el amortiguamiento viscoso, en la dirección normal al contacto entre perfiles (línea de acción). De aquí la necesidad de determinar los vectores que definen la dirección normal y tangencial para el contacto directo:

$$\vec{n}_{1i}=\begin{Bmatrix}\cos(\psi+\varphi_i)\\ \sin(\psi+\varphi_i)\end{Bmatrix} \text{ y } \vec{t}_{1i}=\begin{Bmatrix}\sin(\psi+\varphi_i)\\ -\cos(\psi+\varphi_i)\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}\vec{n}_{2i}=-\vec{n}_{1i}\\ \vec{t}_{2i}=-\vec{t}_{1i}\end{Bmatrix} \quad i=1,...,\frac{N}{2} \tag{III.21}$$

Y para el contacto inverso:

$$\vec{n}_{1i}=\begin{Bmatrix}-\cos(\varphi_i-\psi)\\ \sin(\varphi_i-\psi)\end{Bmatrix} \text{ y } \vec{t}_{1i}=\begin{Bmatrix}\sin(\varphi_i-\psi)\\ \cos(\varphi_i-\psi)\end{Bmatrix}\rightarrow\begin{Bmatrix}\vec{n}_{2i}=-\vec{n}_{1i}\\ \vec{t}_{2i}=-\vec{t}_{1i}\end{Bmatrix} \quad i=\frac{N}{2}+1,...,N \tag{III.22}$$

III.3.3.1. Esfuerzo normal

Para modelizar el esfuerzo normal en el contacto entre engranajes, se recurre a la superposición de dos términos, el término elástico y el término debido al amortiguamiento viscoso. El primero está asociado, generalmente, a la rigidez de los engranajes, mientras que el segundo se asocia a los fenómenos disipativos presentes en el contacto.

Término elástico

La obtención de los esfuerzos normales elásticos de contacto se realiza a través del procedimiento de Vedmar [1981, 1998, 2003]. Se considera que las deformaciones debidas al contacto pueden dividirse en dos contribuciones, locales y globales o estructurales (Figura III-8). El primer tipo de deformación es implementado mediante un modelo analítico de tipo Hertziano y el segundo a través de un modelo de elementos finitos, que incluye el comportamiento estructural del engranaje. Este procedimiento permite tener en cuenta la deformación que la carga aplicada a un diente produce en los dientes adyacentes, así como eliminar el carácter puntual de la carga. La primera afirmación se consigue a partir del modelo global de elementos finitos, el cual relaciona las deformaciones de todo el conjunto mediante la definición de la matriz de flexibilidad/rigidez. Respecto a la segunda afirmación, se conoce, a partir de las teorías de contacto, que la resultante de la distribución de tensiones se localiza en el centro del contacto y, además, tiene la dirección de la línea de engrane. Sin embargo, de acuerdo con el planteamiento hertziano, la fuerza no está aplicada en un único punto, sino que

está distribuida en un área de contacto. Para aportar esta característica de distribución de la deformación, se implementa el modelo local de *Weber-Banashek*, el cual está basado en la teoría hertziana de contacto seco entre superficies. Otra opción para aportar este comportamiento, sin la superposición de modelos global y local, es elaborar un modelo de elementos finitos con un mallado lo suficientemente denso, en las proximidades del contacto, como para poder representar adecuadamente el comportamiento local (expuesto en el capítulo II). El procedimiento elegido permite reducir el esfuerzo computacional, con una precisión más que aceptable para la aplicación deseada.

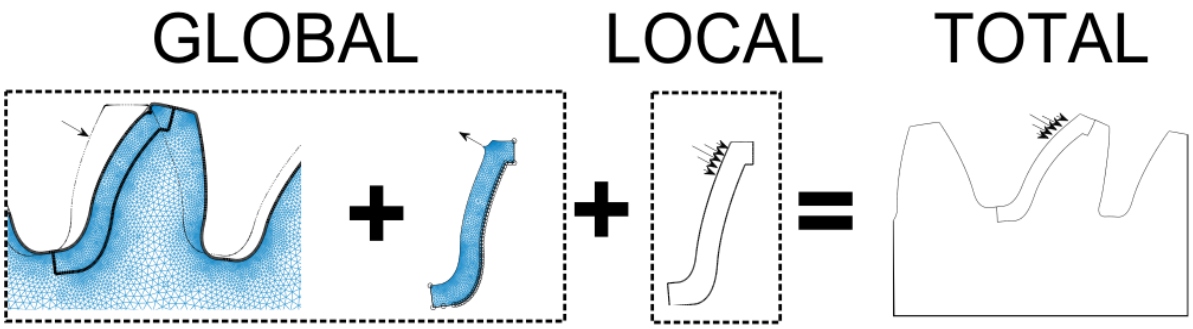


Figura III-8 Obtención de la deformación total a partir de la superposición de las deformaciones obtenidas mediante el modelo local y el global

Una vez planteada la estrategia a seguir para el cálculo de deformaciones, se presentan los fundamentos de ambos modelos, el modelo local y el modelo global o estructural.

Modelo local

Las deformaciones locales se formulan aplicando la propuesta de *Weber-Banashek* para problemas bidimensionales. En general, el espesor de los engranajes es significativo frente a su diámetro, por lo que mayoritariamente se emplea la condición de deformación plana. De acuerdo con estos autores, la deformación entre un punto situado en la superficie de un diente y un punto localizado a una profundidad *e*, en condiciones de deformación plana, se relacionan como:

$$u_{Local}(q)=\frac{2\left(1-\upsilon^2\right)}{\pi E}W_N\left[\log\left(\frac{e}{L}+\sqrt{1+\left(\frac{e}{L}\right)^2}\right)-\frac{\upsilon}{1-\upsilon}\left(\frac{e}{L}\right)^2\left(\sqrt{1+\left(\frac{L}{e}\right)^2}-1\right)\right] \qquad \text{(III.23)}$$

Donde *2L* es la extensión de la distribución de presiones en las proximidades de aplicación de la carga o ancho de contacto. Este parámetro, el cual depende de la carga y de las características geométricas y de los materiales de los cuerpos en contacto, se calcula mediante la expresión:

$$L=\sqrt{\frac{4}{\pi}\left(\frac{1-\upsilon_1^2}{E_1}+\frac{1-\upsilon_2^2}{E_2}\right)\frac{\rho_{0_1}\rho_{0_2}}{\rho_{0_1}+\rho_{0_2}}W_N} \qquad \text{(III.24)}$$

Modelo global o estructural

La deformación global se obtiene mediante un modelo de elementos finitos bidimensional, que, a su vez, es la superposición de dos sub-modelos, uno relativo al engranaje completo y otro de la región local. La razón, para elaborar la superposición de deformaciones de estos dos modelos con signo contrario, es eliminar la distorsión provocada por el carácter puntual de la carga (Figura III-9a).

El objetivo de este modelo es proporcionar el comportamiento estructural, teniendo en cuenta la flexión y el cortante de los dientes, la torsión del cuerpo de la rueda y la influencia que una pareja de dientes en contacto puede tener en el contacto de las parejas adyacentes. Para ello, se elabora un modelo individual de cada rueda, en el que se define un número limitado de dientes (*N*), que es función de la relación de contacto. El modelo de elementos finitos se implementa en el entorno MATLAB®, empleando la *Partial Differential Equation Toolbox*. El motivo para la elección de esta toolbox de elementos finitos es implementar todo el modelo en el mismo entorno, incluyendo las simulaciones dinámicas (SIMULINK®). Esta herramienta tiene la restricción de que el tipo de elementos usados son triangulares y, por tanto, posee prestaciones limitadas en cuanto a la generación de la malla. Sin embargo, se realizó la validación de dicho modelo, a través del análogo diseñado en MSC PATRAN® (Figura III-9b), obteniendo diferencias despreciables entre ambos modelos [Torre, 2011].

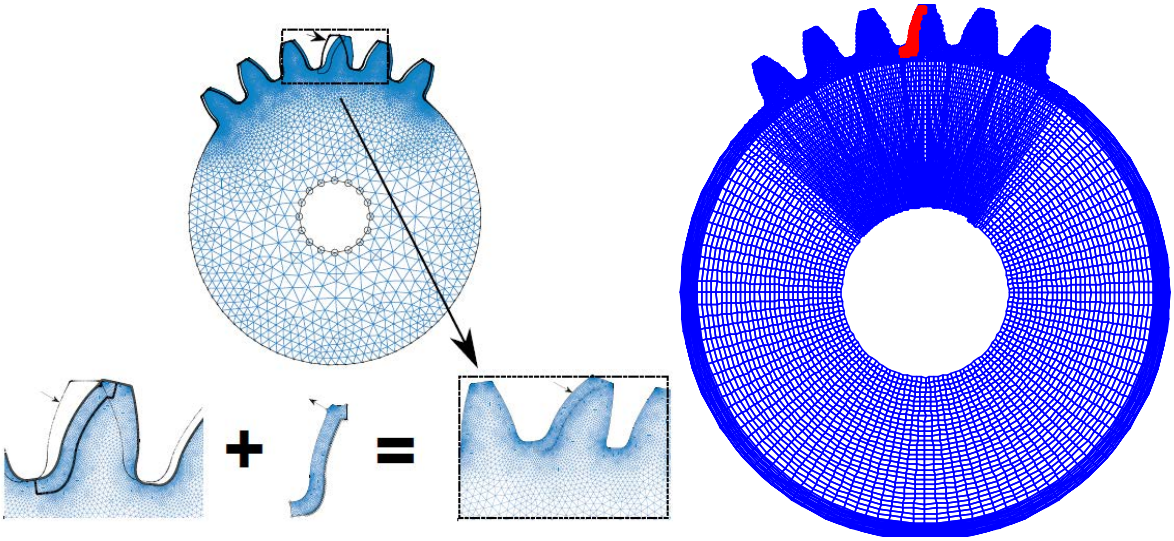


Figura III-9 Modelo de Elementos Finitos para el cálculo de la deformación estructural: a) MATLAB y b) MSC PATRAN [Torre, 2011]

Cálculo de esfuerzos

Una vez definidos los modelos de deformaciones globales de ambas ruedas (matriz de flexibilidad [λ]), es posible obtener las fuerzas de contacto. Para ello es necesario imponer la *condición de complementariedad* (Ecuación (III.25)) y plantear la *compatibilidad de desplazamientos*.

Primero se aplica la condición de complementariedad, la cual evita, para el cálculo de las deformaciones, la existencia de esfuerzos de contacto de tracción (negativos).

$$\left\{\delta(q)\right\} = \left\{u_{Local}^{Piñon}\left(q, F_N\right)\right\} + \left\{u_{Local}^{Rueda}\left(q, F_N\right)\right\} + \left[\lambda(q)\right]\left\{F_N\right\} \rightarrow F_N \geq 0 \qquad \text{(III.25)}$$

En donde [$\lambda(q)$] son las matrices de flexibilidad, obtenidas a partir del modelo de elementos finitos (deformaciones lineales), u_{Local} las deformaciones no lineales calculadas a partir del

modelo local, $\{F_N\}$ el vector de esfuerzos normales y las variables de posición están agrupadas en el vector $q = \{x_1, y_1, \theta_1, x_2, y_2, \theta_2\}^T$.

Calcular las deformaciones es la primera etapa para definir los esfuerzos de contacto. La segunda es el cálculo de los esfuerzos de contacto, mediante el planteamiento del equilibrio estático o dinámico en función del tipo de análisis realizado (compatibilidad de desplazamientos). En el caso cuasi-estático, se aborda mediante un procedimiento iterativo, que obtiene las fuerzas de contacto de acuerdo a la restricción de que el par resistivo sea igual al generado por las fuerzas existentes en el contacto. Específicamente, el problema se reduce a determinar el valor de giro que es preciso aplicar a la *rueda 2*, para conseguir un par T_{Ext}, considerando que la *rueda 1* se encuentra en una posición angular determinada. En este procedimiento, se adopta, como solución inicial de las fuerzas de contacto, la obtenida considerando únicamente las deformaciones de tipo estructural. La resolución del problema no lineal puede llevarse a cabo mediante una iteración de punto fijo, expresando el vector de fuerzas como:

$$\{F_N\} = \left[\lambda(q)\right]^{-1}\left[\{\delta(q)\} - \{u_{Local}^{Piñon}(q, F_N)\} - \{u_{Local}^{Rueda}(q, F_N)\}\right] \tag{III.26}$$

Dentro de este proceso iterativo, además de la eliminación de fuerzas negativas de contacto, se tiene en cuenta la posibilidad de aparición de nuevos contactos, como consecuencia de la deformación de los dientes adyacentes. En el caso de que aparecieran nuevos contactos, se repetiría el proceso hasta que, en dos iteraciones consecutivas, se considerasen los mismos contactos activos y, además, se cumpliesen los requisitos de precisión del valor de las fuerzas (criterios de parada).

Una vez obtenidas las fuerzas de contacto, son reducidas al centro geométrico de cada una de las ruedas (fuerzas de engrane).

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{Bmatrix}_{Engrane} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{N} F_{N_i}\vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} F_{N_i i}\rho_{0_{1i}} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{N} F_{N_i i}\rho_{0_{1i}} \\ \sum_{i=1}^{N} F_{N_i}\vec{n}_{2i} \\ \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} F_{N_i i}\rho_{0_{2i}} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{N} F_{N_i i}\rho_{0_{2i}} \end{Bmatrix} \tag{III.27}$$

Término debido al amortiguamiento

El procedimiento de cálculo de las fuerzas viscosas considera dos fenómenos, el debido al contacto entre sólidos o histerético y el correspondiente al estrangulamiento del lubricante. Si existe contacto entre sólidos en el contacto *i-ésimo*, el amortiguamiento es el correspondiente a la histéresis del material (C_{hys}). El amortiguamiento debido al efecto del lubricante está activo, únicamente, cuando haya aproximación entre los perfiles y no exista contacto entre ellos. La estrategia expuesta se resume en la ecuación (III.28).

$$\left(\vec{F}_C\right)_{1i} = -C_{eq_i}\left(\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{n}_{1i}\right)\vec{n}_{1i} \rightarrow C_{eq_i} = \begin{cases} C_{hys_i} & si \quad F_{N_i} > 0; \\ \left.\begin{matrix} 0 & si \quad \vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{n}_{1i} \geq 0 \\ C_{lub_i} & si \quad \vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{n}_{1i} < 0 \end{matrix}\right\} & si \quad F_{N_i} = 0; \end{cases} \tag{III.28}$$

A continuación se muestran las formulaciones adoptadas para calcular ambos fenómenos.

Amortiguamiento histerético

Este fenómeno se considera proporcional al coeficiente de amortiguamiento relativo ξ y dependiente de la rigidez de contacto (K), inercias (J_i) y radios bases de las ruedas (ρ_{0i}).

$$C_{hys} = 2\xi\sqrt{K\frac{J_1 J_2}{J_1\rho_{0_1}^2 + J_2\rho_{0_2}^2}} \tag{III.29}$$

Amortiguamiento del lubricante

Para implementar el comportamiento del estrangulamiento del lubricante, cuando los perfiles de los dientes se aproximan entre sí, se siguió la formulación de Koster [1974]:

$$C_{lub} = 12\pi\eta b\left(\frac{1}{2h}\frac{\rho_{0_1}\rho_{0_2}}{\rho_{0_1}+\rho_{0_2}}\right)^{3/2} \tag{III.30}$$

Donde η es la viscosidad dinámica del fluido, b el ancho del diente y h la distancia entre perfiles (espesor de película fluida).

Una vez definidas las fuerzas viscosas de cada contacto, se reducen al centro geométrico de cada rueda mediante la siguiente expresión:

$$\left\{\begin{matrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{matrix}\right\}_{Amortiguamiento} = \begin{Bmatrix} -\sum_{i=1}^{N} C_{eq_i}\left(\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{n}_{1i}\right)\vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N}\left(-C_{eq_i}\left(\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{n}_{1i}\right)\vec{n}_{1i}\right)\times\overline{C_1P_i} \\ \sum_{i=1}^{N} C_{eq_i}\left(\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{n}_{1i}\right)\vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N}\left(C_{eq_i}\left(\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{n}_{1i}\right)\vec{n}_{1i}\right)\times\overline{C_2P_i} \end{Bmatrix} \tag{III.31}$$

III.3.3.2. Esfuerzo tangencial

Para la formulación del esfuerzo tangencial, se tiene en cuenta el efecto de la fricción por deslizamiento, la cual se implementa a través del modelo de Coulomb. En la formulación se incluye una función sigmoidea (tangente hiperbólica), que permite evitar problemas durante la integración del punto primitivo, donde la velocidad relativa es nula.

$$\left(\vec{F}_{Roz}\right)_{1i} = -F_{N_i}\mu\tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right)\frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|}\cdot\vec{t}_{1i}; \tag{III.32}$$

En el modelo de partida, aunque sólo se realizaron análisis con coeficientes de fricción constantes, se puede observar que la formulación permite coeficientes de fricción variables.

Finalmente, se reducen estas fuerzas al centro geométrico de cada una de las ruedas, obteniendo los esfuerzos debidos a la fricción, mediante la expresión:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{Bmatrix}_{Sliding} = \begin{Bmatrix} -\sum_{i=1}^{N} F_{N_i}\mu \tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right)\frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|}\cdot\vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N}\left(-F_{N_i}\mu \tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right)\frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|}\cdot\vec{t}_{1i}\right)\times\overline{C_1P_i} \\ \sum_{i=1}^{N} F_{N_i}\mu \tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right)\frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|}\cdot\vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N}\left(F_{N_i}\mu \tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\cdot\vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right)\frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|}\cdot\vec{t}_{1i}\right)\times\overline{C_2P_i} \end{Bmatrix} \quad \text{(III.33)}$$

III.3.4. Formulación y procedimiento de integración de las ecuaciones dinámicas

El modelo de partida es un modelo plano de parámetros concentrados de 20 g.d.l., que emplea funciones no lineales para la determinación de los esfuerzos de contacto en engranajes y rodamientos. Recopila los principales fenómenos involucrados en el comportamiento dinámico de transmisiones mediante engranajes cilíndricos de dientes rectos: i) rigidez de engrane variable y no lineal, ii) rigidez del rodamiento variable y no lineal, iii) efecto de las holguras (en engranajes y rodamientos), iv) flexibilidad de los ejes y soportes y v) defectos en engranajes y rodamientos.

El modelo se puede categorizar como un modelo *No Lineal con rigidez variable (NLTV)* con la clasificación de Kahraman y Singh [Kahraman, 1991b], un *modelo dinámico* en relación al agrupamiento propuesto por Özguven y Houser [Özgüven, 1988a], un *modelo híbrido* con respecto al procedimiento de resolución del problema de contacto entre engranajes [Fernández, 2010] y se puede enmarcar en el último de los grupos descritos por Wang [2003b], por la consideración de ejes y soportes.

Por simplicidad, no se muestran las ecuaciones dinámicas que rigen el movimiento, dado que el modelado dinámico está fuera del alcance de este trabajo. Sin embargo, a modo resumen se explicará el procedimiento de cálculo a partir de su expresión matricial.

$$[M]\ddot{q}+[C]\dot{q}+[K]q+f_b(q)+f_R(q,\dot{q})=f_{Ext}(t) \quad \text{(III.34)}$$

Donde ***[M]*** es la matriz de masa, ***[C]*** es la matriz de amortiguamiento y ***[K]*** es la matriz de rigidez, siendo todas ellas matrices de términos constantes. El vector $\boldsymbol{f_{Ext}(t)}$ incluye todos los esfuerzos externos como la gravedad, el par aplicado, los posibles desequilibrios, etc. El comportamiento no lineal se recoge en el vector $\boldsymbol{f_b}$ que representa las fuerzas en los rodamientos y en el vector $\boldsymbol{f_R}$ que contiene los esfuerzos debidos al contacto entre engranajes.

Las ecuaciones dinámicas resultantes se integran numéricamente, empleando el software SIMULINK® y diversas funciones implementadas en MATLAB® para la obtención de los esfuerzos en los distintos elementos. Para ello, la citada ecuación (III.34), se desarrolla en forma de diagrama de bloques, reformulando y despejando el término de aceleración.

$$\ddot{q}=[M]^{-1}(f_{Ext}(t)-[C]\dot{q}-[K]q-f_b(q)-f_R(q,\dot{q})) \quad \text{(III.35)}$$

El modelo proporciona, como resultados, las variables de posición, velocidad y aceleración de cada g.d.l. (***q***), así como los esfuerzos de contacto en engranajes y rodamientos.

III.4. Fundamentos de la tribología aplicados al contacto entre engranajes

Este trabajo de Tesis se centra en el estudio y análisis de los fenómenos disipativos presentes en transmisiones por engranajes. Para modelizar el comportamiento de estos fenómenos disipativos, se utilizan formulaciones analíticas, que están fundamentadas en teorías de contacto directo entre sólidos o de contacto en presencia de lubricante. De aquí que sea necesario el conocimiento de los fundamentos tribológicos asociados a los esfuerzos en el contacto. Por la naturaleza de los esfuerzos se distinguen tres tipos:

- Esfuerzo normal (F_N)
- Esfuerzo tangencial (F_t)
- Pérdidas por arrastre fluido (T_{arras})

A continuación, para la comprensión de los modelos presentados en el capítulo IV, se presentarán los fundamentos de cada tipología de esfuerzo necesarios.

III.4.1. Esfuerzo normal

Para la modelización del esfuerzo normal en el contacto entre engranajes, se recurre a la superposición de dos términos:

- Término elástico
- Término debido al amortiguamiento viscoso

El primer término está relacionado con la rigidez de engrane y el segundo está ligado a los fenómenos disipativos en la dirección normal. La formulación de cada término viene determinada por el tipo de contacto y el régimen de lubricación presente en el contacto.

III.4.1.1. Término elástico

Para analizar el término elástico de la fuerza de contacto entre sólidos, es necesario hacer mención al científico alemán Heindrich Hertz [1881], pionero en estudiar los esfuerzos de contacto directo entre dos cuerpos perfectamente elásticos, quien propuso que la deformación sufrida por ambos perfiles en contacto (δ) es proporcional a la fuerza de aplicada (F_N), a través de una función no lineal (Ecuación (II.36)).

$$F_N = K\delta^n \tag{III.36}$$

Donde K es la rigidez lineal y n el exponente de no linealidad.

Para el desarrollo de dicha propuesta se tomaron una serie de aproximaciones:

- Las superficies de los sólidos en contacto son continuas, perfectamente lisas, no conformes (no son dos cilindros concéntricos por ejemplo) y sin fricción.
- El área de contacto debe ser pequeña comparada con las dimensiones de los cuerpos en contacto, despreciando así las tensiones debidas a dichas deformaciones.
- La deformación se evalúa utilizando la teoría de semi-espacio elástico.
- El espacio entre las superficies indeformables h se puede aproximar como $h = Ax^2 + By^2$ en el caso de esferas en contacto y $h = Ax^2$ para cilindros.

Dependiendo del tipo de contacto entre cuerpos (contacto puntual o contacto lineal), el exponente *n* de la ley de Hertz (Ecuación (II.36)) toma diferentes valores. En el caso de contactos puntuales, para aceros, se suele utilizar un valor de 1.5. No obstante, es susceptible de tener otro valor, dependiendo del material de ambas esferas en contacto, y debiera ser determinado a través de análisis experimental. En el caso de contactos lineales, Brändlein [1998] propuso un valor de exponente, *n*, igual a 1.08, determinado a través de ensayos experimentales. Posteriores investigaciones de Yang [1985] en este ámbito, llegaron a la conclusión que la linearización de la ley de Hertz es válida (Ecuación (II.37)).

$$F_N = K\delta \tag{III.37}$$

En el caso de engranajes rectos, el tipo de contacto es el lineal y, por tanto, es el equivalente a dos cilindros en contacto (Figura III-10). Con el objetivo de explicar los fundamentos generales del contacto lineal hertziano, se analiza la propuesta de Timoshenko [1951], en la cual se plantea que la distribución de presiones de dos cilindros de longitud, *b*, en contacto sigue una función parabólica (Ecuación (II.38)) y que el semi-ancho de contacto, *a*, depende de la carga aplicada (Ecuación (II.39)).

$$p(x) = \frac{2W_N}{\pi a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} \rightarrow P_h = p(x=0) = \frac{2W_N}{\pi a} = \sqrt{\frac{W_N E_{eq}}{2\pi R_{eq}}} \tag{III.38}$$

$$a = \left(\frac{8W_N R_{eq}}{\pi E_{eq}}\right)^{1/2} \quad \text{donde} \quad W_N = \frac{F_N}{b} \tag{III.39}$$

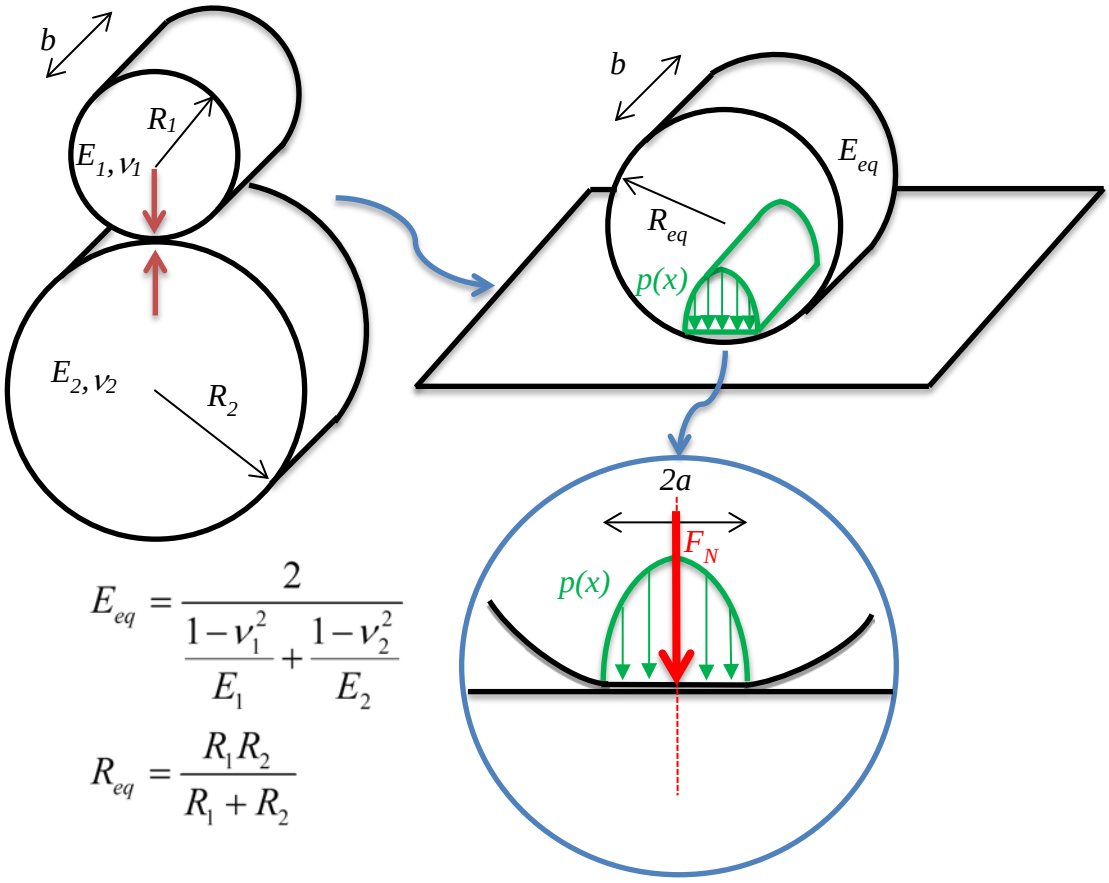


Figura III-10 Contacto lineal

III.4.1.2. Término debido al amortiguamiento

Como se expuso previamente, este término está asociado a los fenómenos disipativos en el contacto. Para analizar este efecto será necesario distinguir dos fenómenos:

- Amortiguamiento histerético
- Amortiguamiento del fluido

Estos modelos dependen de la velocidad de aproximación y alejamiento de los perfiles en contacto, por lo que normalmente se modelizan como fuerzas viscosas:

$$F_C = F_{hys} + F_{lub} = C_{eq}\dot{\delta} \tag{III.40}$$

Amortiguamiento histerético

Además de los modelos puramente elásticos, como los expuestos hasta este punto, existen modelos que tienen en cuenta la energía de disipación durante el proceso de contacto-impacto. Los primeros en presentar un enfoque que tuviera en cuenta la energía disipada en este proceso fueron Kelvin y Voigt [Goldsmith, 1960]. En su enfoque, además de considerar una rigidez lineal para modelizar las deformaciones, añadieron un término dependiente de la velocidad de deformación, denominado amortiguamiento histerético (Ecuación (II.41)).

$$F_{hys} = C_{hys}\dot{\delta} \tag{III.41}$$

Este término aglutina la energía de disipación del proceso de contacto, siendo C_{hys} el amortiguamiento viscoso equivalente debido a la histéresis del material.

Sin embargo, el modelo de Kelvin-Voigt presenta limitaciones, dado que considera que la energía disipada en la fase de compresión es igual a la disipada en la fase de restitución a la forma original. Este hecho no se ajusta al comportamiento real, de aquí que Hunt y Crossley [1975], con el objetivo de modelizar de una manera más precisa el comportamiento histerético de los sólidos en contacto, modelaron las fuerzas a través de la formulación presentada en la ecuación (II.42).

$$F_{hys} = \chi\delta^n\dot{\delta} \tag{III.42}$$

Donde χ es el factor de amortiguamiento histerético y su determinación es experimental. El cálculo de este factor está basado en la determinación de la energía perdida en la fase de compresión y restitución del sólido ante impactos.

Amortiguamiento del fluido

En este tipo de contacto, además de la histéresis de los materiales cuando existe deformación, hay que considerar los efectos relativos a la presencia del lubricante. Para poder explicar el comportamiento del contacto entre dos sólidos en presencia de lubricante, se expuesto en el capítulo II la necesidad de conceptos de contacto hertziano y de mecánica de fluidos.

Para simular el comportamiento del fluido, generalmente, se opta por un modelo de amortiguamiento viscoso (Ecuación (III.43)).

$$F_{lub} = C_{lub}\dot{\delta} \tag{III.43}$$

Para determinar el valor del amortiguamiento viscoso debido al efecto del lubricante, es necesario desarrollar la ecuación de Reynolds, que es la base para el cálculo de la distribución de presiones en el contacto fluido. El interés de desarrollarla reside en tener un conocimiento

más exhaustivo de los conceptos y aproximaciones realizadas, sabiendo así las limitaciones de los modelos utilizados. Previamente al desarrollo y análisis de la ecuación de Reynolds, serán necesarios fundamentos de mecánica de fluidos, que definan el comportamiento del fluido en el contacto, como:

- Tipos de fluidos
- Propiedades reológicas de los fluido

Tipos de fluidos

Para poder analizar el contacto fluido entre los dientes de transmisiones por engranajes, el primer aspecto estudiado es el tipo de lubricante utilizado. Los fluidos, dependiendo de sus propiedades reológicas y de su deformación ante tensiones tangenciales, pueden ser clasificados de diferentes formas. En la Figura III-11, se pueden apreciar las curvas de cuatro fluidos, que relacionan la velocidad de deslizamiento del fluido ($\dot{\gamma}$) y la tensión tangencial aplicada (τ_H). En todas ellas se pueden apreciar tres regiones distintas, una primera región con comportamiento lineal, una segunda no lineal con pendiente positiva y otra tercera no lineal con pendiente negativa.

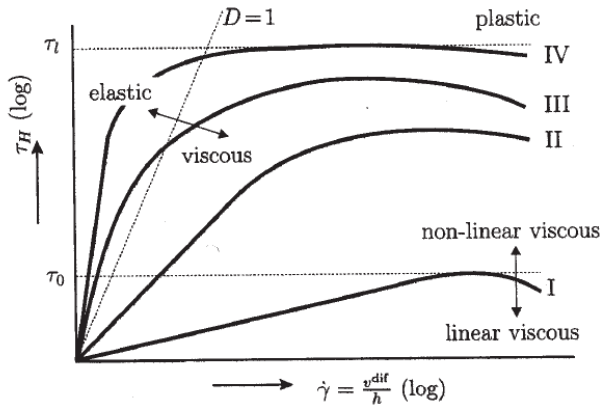


Figura III-11 Curvas de fricción de cuatro fluidos tipo [Schipper, 1995] y [Evans, 1983]

Como se expuso, en la primera región de la curva, el comportamiento del fluido es lineal y es considerado análogo al de un fluido newtoniano. En esta región, la relación entre la velocidad de deformación tangencial y la tensión de cortadura aplicada son proporcionales. En la segunda región, la relación entre la velocidad de deformación y la tensión tangencial ya no es lineal, como se puede apreciar, pero la tensión aumenta con la velocidad de deformación. A este comportamiento se le denomina no newtoniano (relación viscosa no lineal). En la tercera región, la relación entre la tensión tangencial y la velocidad de deformación sigue siendo no lineal (fluido no Newtoniano) y, además, la tensión empieza a decrecer con el aumento de la velocidad de deformación tangencial. Esto es debido a que el incremento de la temperatura genera una reducción en la viscosidad y, como consecuencia, se produce una reducción en la tensión tangencial.

Por otro lado, dependiendo de la relación entre la tensión tangencial y la velocidad de deformación del fluido, se observa que el comportamiento del fluido puede ser viscoso o elástico. Concretamente, con el aumento de la presión, la pendiente de la curva empieza a ser mayor y el fluido pasa de tener un comportamiento viscoso (baja pendiente) a uno visco-elástico, e incluso uno puramente elástico. La transición del fluido entre el comportamiento viscoso y elástico se determina, generalmente, mediante el número de Deborah:

$$D = \frac{\eta V_{ent}}{G_t a} \tag{III.44}$$

Donde V_{ent} es la velocidad de entrada del fluido y G_t el módulo elástico transversal del material. Para valores del número de Deborah mucho menores que la unidad, el comportamiento del fluido es totalmente viscoso. Para valores mucho mayores que la unidad, el comportamiento es predominantemente elástico, siendo en la región cercana a la unidad, donde existe un comportamiento visco-elástico. Dentro del comportamiento viscoso de los fluidos, si se supera un límite de tensión tangencial (tensión de Eyring), el comportamiento del fluido es viscoso no lineal, mientras que por debajo de este valor es viscoso lineal.

Una vez analizados los diferentes comportamientos que puede adoptar un fluido, se estudiarán los modelos que son capaces de reproducirlos. A continuación se han presentado algunas de las formulaciones analíticas más utilizadas, para modelizar el comportamiento de los fluidos Newtonianos y no Newtonianos.

El comportamiento viscoso Newtoniano, correspondiente a la región lineal de los cuatro fluidos mostrados en la Figura III-11, se puede describir a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta} \tag{III.45}$$

En cuanto a la caracterización de la región no lineal de los fluidos, hay más controversia. Un fluido tiene un comportamiento no Newtoniano, generalmente, cuando la velocidad de deformación es media o alta, como se observó en la Figura III-11. Para simular el comportamiento de fluidos no Newtonianos, uno de los modelos utilizados es el de Eyring (Ecuación (II.46)).

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau_0}{\eta}\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \rightarrow \text{si} \left\{ \begin{array}{c} \tau \ll \tau_0 \\ \sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) = \frac{\tau}{\tau_0} \end{array} \right\} \rightarrow \overbrace{\dot{\gamma} = \frac{\tau_0}{\eta}\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\tau}{\eta}}^{Fluido\ Newtoniano} \tag{III.46}$$

Se demuestra, a través de la expresión, que para tensiones tangenciales por encima de la de Eyring (τ_0), el fluido tiene un comportamiento no lineal. Sin embargo, cuando $\tau \ll \tau_0$, el comportamiento expresado por la ecuación (II.46) es el de un fluido Newtoniano.

Para combinar el comportamiento elástico y el viscoso no lineal, Johnson y Tevaarwerk [Johnson, 1977] concluyeron que la velocidad de deformación tangencial se relaciona con la tensión a través de dos términos, uno relativo al comportamiento elástico y otro al viscoso:

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_v = \frac{1}{G_t}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau_0}{\eta}\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \tag{III.47}$$

Además, como se puede ver en la Figura III-11, hay un cierto valor de tensión tangencial límite (τ_l), en el que el fluido se comporta plásticamente. El modelo de Johnson y Tevaarwerk no tiene en cuenta esta consideración, dado que la tensión tangencial puede crecer ilimitadamente. Para solucionar esta problemática, Bair y Winer [Bair, 1979] realizaron una propuesta alternativa.

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{G_t}\frac{d\tau}{dt} + \frac{\tau_l}{\eta}\sinh\left(\frac{\tau}{\tau_l}\right) \tag{III.48}$$

Propiedades reológicas de los fluidos

Para caracterizar el comportamiento de los fluidos, se observa que todas las formulaciones dependen de la viscosidad dinámica (η).

Barus [1983] propuso un modelo que caracteriza la viscosidad ante la variación de la presión, a partir de la expresión:

$$\eta(p) = \eta_0 e^{\alpha p} \tag{III.49}$$

Donde η_0 es la viscosidad dinámica a presión ambiente y α el coeficiente viscoso de presión. Esta formulación se ajusta bien al comportamiento real de los fluidos cuando están sometidos a bajas presiones. Sin embargo, para el caso de presiones altas, se opta, en general, por la propuesta por Roelands [1966].

$$\eta(p) = \eta_\infty \left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^{\left(1+ p/p_r\right)^z} \tag{III.50}$$

Donde η_∞ y p_r son constantes de valor 6.35 x 10^{-5} Pa s y 196.2 x 10^6 Pa respectivamente y z es un índice de viscosidad-presión que se obtiene como $z = \frac{\alpha}{5.1x10^{-9}[\log+9.67]}$. Además, Roelands incluyó el efecto de la temperatura (T en ºK):

$$\eta(p) = \eta_\infty \left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^{(1+ p/p_r)^z \left[(T_0+135)/(T+135)\right]^{S_0}} \quad \text{donde } S_0 = \frac{\beta(T_0-138)}{\log(\eta_\infty)+9.67} \tag{III.51}$$

Houpert [1985], utilizando el enfoque de Barus, propuso una variación del coeficiente viscoso que dependía de la presión y temperatura (T) del fluido (Ecuaciones (II.52) y (II.53)), obteniendo valores más realistas que los de Roelands.

$$\eta(p) = \eta_0 e^{\alpha^* p} \tag{III.52}$$

$$\alpha^* = \frac{1}{p}\left[\log(\eta_\infty)+9.67\right]\left\{ \left(\frac{(T_0-138)}{(T-138)} \right)^{S_0} \left[\left(1+\frac{p_h}{1.98x10^8} \right)^z - 1 \right] \right\} \tag{III.53}$$

Donde β es el coeficiente de viscosidad-temperatura y P_h la presión Hertziana máxima.

Este trabajo de Tesis se ha centrado principalmente en el comportamiento newtoniano de los fluidos, dado que se han tenido en cuenta condiciones isotérmicas del fluido en el contacto. El efecto de la temperatura y la implementación del comportamiento de los fluidos no newtonianos quedan fuera del alcance de este trabajo de Tesis. Sin embargo, han sido muchos autores los que han investigado acerca del efecto de la temperatura en los fluidos y los cambios a nivel local y global que ello provoca. A partir de estos trabajos [De la Cruz, 2011], se concluye que en modelos que necesitan precisión en el cálculo de la distribución de presiones, este efecto no se puede obviar. Por el contario, en un modelo cuyo objetivo final es el análisis dinámico del sistema, se puede realizar dicha aproximación.

Desarrollo de la ecuación de Reynolds

La expresión de Reynolds proviene de la ecuación de Navier-Stokes [Currie, 1993], la cual, a su vez, deriva de la ecuación de la conservación del momento, en fluidos newtonianos. La ecuación de la conservación del momento (cantidad de movimiento) expresa, conceptualmente, que si una partícula tiene movimiento, es debido a la acción de la suma de las fuerzas externas e internas, que matemáticamente se expresa como:

$$\frac{D}{Dt}\int_V \rho\vec{u}dV = \int_S \vec{p}dS + \int_V \rho\vec{W}dV \tag{III.54}$$

Desarrollando las derivadas parciales:

$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial u_k} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho W_j \tag{III.55}$$

Donde ***u*** es el vector velocidad, ***p*** el vector de presiones externas (fuerza externa por unidad de área), ***W*** el vector de fuerzas internas por unidad de masa, ***x*** el vector de coordenadas espaciales y $\boldsymbol{\sigma}$ el tensor de tensiones. Además, el tensor de tensiones a las que está sometido el fluido se expresa como:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \rightarrow \begin{cases} \delta_{ij} = 0 \Rightarrow i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \Rightarrow i = j \end{cases} \tag{III.56}$$

De la expresión anterior, se deduce que las tensiones están compuestas por una componente normal y otra tangencial. Además, dicho tensor tiene que satisfacer una serie de condiciones en un fluido newtoniano [Currie, 1993]:

1. Cuando el fluido está en reposo, la tensión es hidrostática y la presión que ejerce dicho fluido es la presión termodinámica.
2. El tensor de tensiones σ_{ij} es linealmente dependiente del de deformaciones.
3. Las propiedades del fluido son puntuales, dado que no tiene predilección por una dirección concreta.

Asimismo, un fluido newtoniano es aquel cuya tensión tangencial depende, exclusivamente, de las propiedades del fluido y del gradiente de velocidades:

$$\tau_{ij} = \alpha_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} \tag{III.57}$$

Relacionando las tensiones (Ecuación (III.57)) con las distorsiones angulares y aplicando la condición de isotropía, se llega a la relación constitutiva de tensiones en fluidos newtonianos:

$$\sigma_{ij} = -\boldsymbol{p}\delta_{ij} + \Gamma\delta_{ij}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{III.58}$$

Donde η es conocida como la viscosidad dinámica del fluido y Γ como el segundo coeficiente de viscosidad. Introduciendo la ecuación de las tensiones a las que está sometido el fluido (Ecuación (III.58)), en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (Ecuación (III.55)), se llega a la conocida como ecuación de Navier-Stokes:

$$\rho\frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k\frac{\partial u_j}{\partial u_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\eta\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right] + \rho F_j \tag{III.59}$$

Para el desarrollo de la ecuación de Reynolds, es necesario aplicar el concepto de la conservación de la masa, en un fluido, a la ecuación de la continuidad (Ecuación (III.60)). A partir de esta expresión, se relaciona el campo de velocidades con el de desplazamientos, para fluidos incompresibles, es decir, para fluidos cuya densidad es constante ($\frac{D\rho}{Dt} = 0$).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \tag{III.60}$$

Partiendo de esta premisa y de la ecuación de Navier-Stokes, además, se asume que: i) el fluido es Newtoniano e incompresible; ii) el flujo es laminar; iii) el diente es suficientemente largo (infinitamente largo) para que no existan fugas laterales de fluido; iv) no existe deslizamiento entre los bordes del perfil de diente y la capa más externa de fluido; v) la película de lubricante es muy delgada, por lo que la presiones generadas a lo largo de su espesor se pueden despreciar $\left(\frac{\partial p}{\partial z} = 0\right)$; vi) las fuerzas de los cuerpos (gravitacionales y magnéticas) son despreciables; vii) las fuerzas inerciales del fluido se pueden despreciar; viii) no actúan fuerzas externas sobre el fluido; y ix) la curvatura de los dientes es lo suficientemente grande comparada con el espesor de película del lubricante, que la velocidad de la superficie de los perfiles no varía en dicha dirección *x*.

Después de lo expuesto, la ecuación (III.59) de Navier-Stokes queda reducida a:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{III.61}$$

Despejando e integrando dos veces, se obtiene la expresión de la velocidad en función de las constantes de integración, las cuales se determinan a partir de las condiciones de contorno. En el caso de estudio, las condiciones de contorno vienen definidas por la velocidad del piñón (u_1) y la de la rueda conducida (u_2) en la dirección *x*. Por lo que la distribución de velocidades del fluido queda expresada como:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_1}{\eta} \rightarrow u = \frac{z^2}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{z}{\eta}C_1 + C_2 \begin{Bmatrix} z = 0 \Rightarrow u = u_1 \\ z = h \Rightarrow u = u_2 \end{Bmatrix} \rightarrow u = \frac{\left(z^2 - zh\right)}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{z}{h}(u_2 - u_1) + u_1 \tag{III.62}$$

Para obtener la ecuación de Reynolds, es necesario determinar el caudal de fluido en la dirección *x:*

$$q_x = \int_0^h u dz = \frac{-h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{(u_2 - u_1)}{2}h \tag{III.63}$$

El fluido debe cumplir con la ecuación de continuidad:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} = 0 \rightarrow \int_0^h \left[\frac{D\rho}{Dt} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dz = 0 \tag{III.64}$$

La variación de la velocidad en la dirección *y* puede ser obviada, ya que el espesor del diente es varios ordenes superior al espesor de película fluida. Además, aplicando la regla de integración de Liebnitz (Ecuación (III.65)) a la ecuación de la continuidad, se obtiene la expresión (III.67).

$$\int_0^h \frac{\partial[f(x,z)]}{\partial x} dz = -f(x,h)\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^h f(x,z)\, dz\right] \tag{III.65}$$

$$\int_0^h \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dz = -(\rho u)\big|_{z=h} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho \int_0^h u dz\right] = -\rho u_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho q_x\right] \tag{III.66}$$

$$h\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho u_2 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h(u_1+u_2)}{2}\right) + \rho(w_1 - w_2) = 0 \tag{III.67}$$

Reordenando, se llega a la ecuación de Osborne Reynolds [Reynolds, 1886]:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)}_{Poiseulle} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h(u_1+u_2)}{2}\right)}_{Couette} + \underbrace{\rho\left(w_1 - w_2 - u_2\frac{\partial h}{\partial x}\right)}_{Empuje} + \underbrace{h\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\substack{Expansión \\ local}} \tag{III.68}$$

Donde p es la presión a la que está sometido el fluido, ρ es su densidad, h es el espesor de película fluida, η es la viscosidad dinámica y u_i y w_i son las velocidades de la rueda i-ésima en la dirección x y z respectivamente.

Cada uno de los términos de la ecuación de Reynolds tiene un significado físico, el cual es importante tener en cuenta para saber cuál de ellos puede ser decisivo en el análisis posterior [Hamrock, 1991]. En la ecuación (III.68), el término a la izquierda del igual se le denomina de Poiseulle y describe la razón neta del flujo, debido al gradiente de presión a lo largo del perfil del diente. El primer término después de la igualdad se denomina de Couette, el segundo término es el llamado término de empuje y el tercer término es el denominado de expansión local. A su vez, tanto el término de Couette, como el del empuje, se pueden extender en varios sub-términos:

- Término de Poiseulle
- Término de Couette
  - Cuña de densidad
  - Cuña de alargamiento
  - Cuña física
- Término de empuje
  - Mecanismo de presión normal
  - Mecanismo de presión por translación
- Término de expansión local

Una vez definidos los términos involucrados en la ecuación de Reynolds, se analiza cada uno de ellos.

Término de Couette

El primer término después de la igualdad, denominado de Couette, puede dividirse en tres efectos, aplicando la regla de la cadena:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho h\left(u_1+u_2\right)}{2}\right)}_{Couette}=\underbrace{\frac{h\left(u_1+u_2\right)}{2}\frac{\partial \rho}{\partial x}}_{\substack{Cuña\\de\\densidad}}+\underbrace{\frac{\rho h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u_1+u_2\right)}_{\substack{Cuña\\de\\alargamiento}}+\underbrace{\frac{\rho\left(u_1+u_2\right)}{2}\frac{\partial h}{\partial x}}_{\substack{Cuña\\física}} \qquad \text{(III.69)}$$

El primero se denomina cuña de densidad, el segundo cuña de alargamiento y el tercero cuña física. Por claridad, en las figuras relativas a estos términos, la velocidad del piñón u_1 es nula.

La cuña de densidad está directamente relacionada con la variación de la densidad en la dirección del deslizamiento *x*. Si la densidad del lubricante disminuye en dicha dirección, los perfiles de velocidad difieren a lo largo de la película fluida, como puede apreciarse en la Figura III-12.

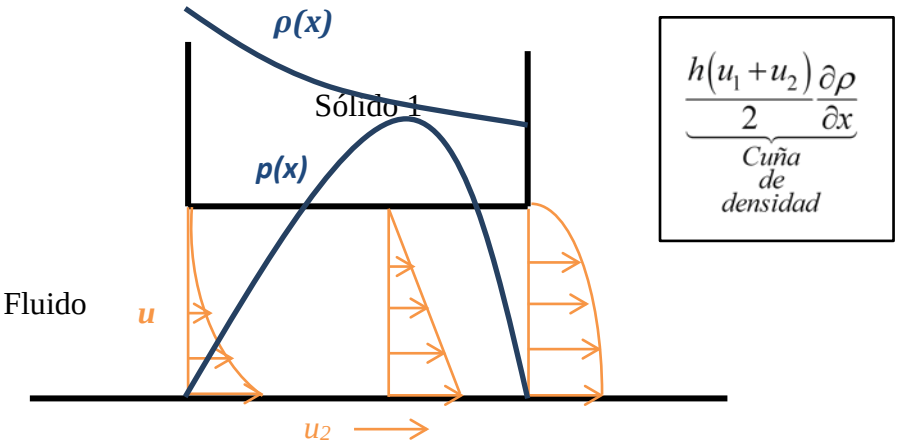


Figura III-12 Mecanismo de la cuña de densidad.

La cuña de alargamiento depende de la variación de la distribución de velocidades de ambos sólidos. En la Figura III-13, se observa que esta distribución de velocidades varía porque la velocidad del perfil del sólido dos (u_2) no es constante en la dirección *x*. Este efecto ocurre si los sólidos son elásticos o si las propiedades del material cambian sustancialmente, es decir, se alargan en diferente medida.

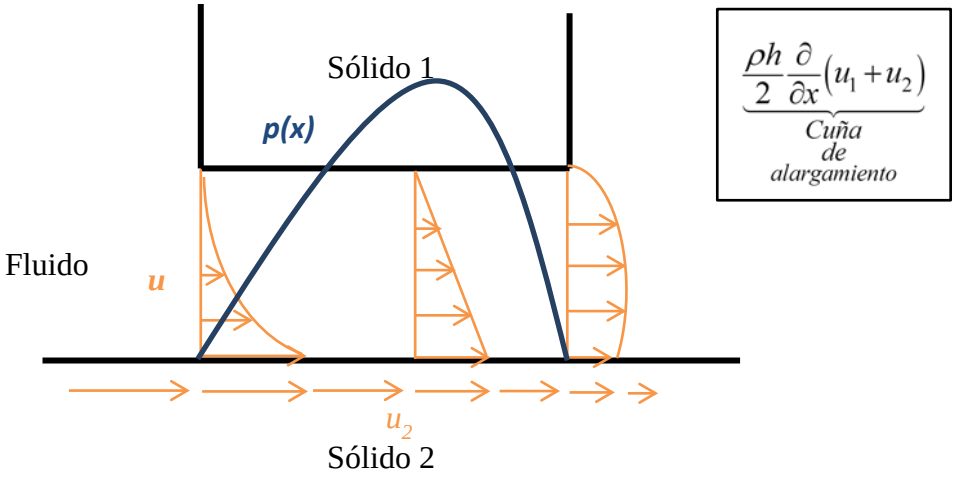


Figura III-13 Mecanismo de alargamiento

La cuña física depende de la variación de la película fluida entre perfiles, como es en el caso de engranajes. Físicamente, se produce una variación de la distribución de velocidades con el espesor de película, siendo mayores las velocidades cuanto menor es el espesor de película (el sentido de la velocidad del perfil dos es el mismo que el del fluido), consiguiendo un efecto parecido al de una tobera (Figura III-14).

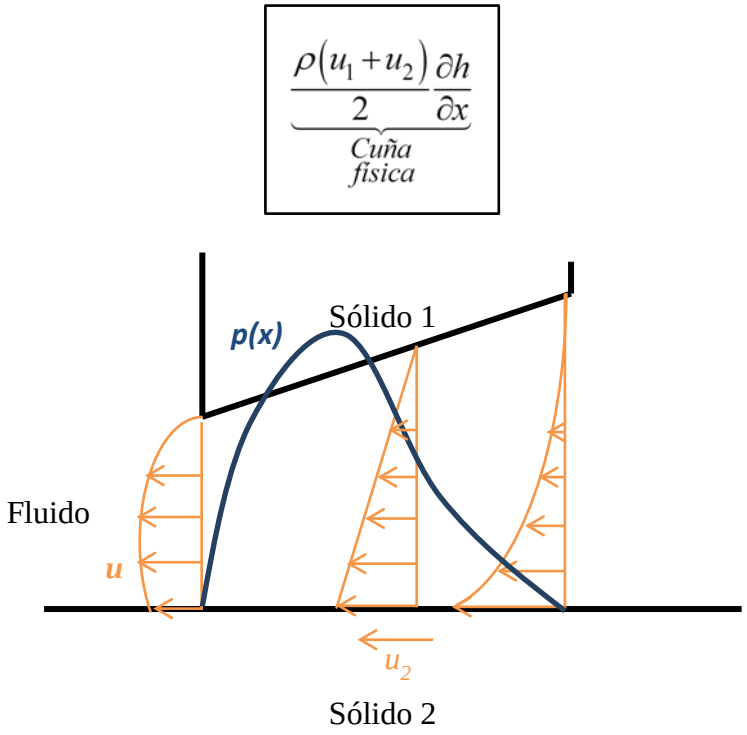


Figura III-14 Mecanismo de la cuña física

Término de Empuje

El segundo término después del igual de la ecuación de Reynolds (Ecuación (III.68)), es el llamado término de empuje, que a su vez puede ser descrito a partir de dos efectos:

$$\underbrace{\rho\left(w_1 - w_2 - u_2\frac{\partial h}{\partial x}\right)}_{\text{Término de empuje}} = \underbrace{\rho\left(w_1 - w_2\right)}_{\text{Mecanismo de presión normal}} - \underbrace{\rho u_2\frac{\partial h}{\partial x}}_{\text{Mecanismo de presión por translación}} \qquad \text{(III.70)}$$

El primero de los efectos de la ecuación (III.70) es el mecanismo de presión normal, que se produce por diferencia de velocidades en la dirección *z*, y el segundo es el denominado mecanismo de presión por translación.

El mecanismo de presión normal surge por la diferencia de velocidades de los perfiles en la dirección *z*. Concretamente la distribución de presiones es positiva si hay acercamiento entre perfiles (Figura III-15).

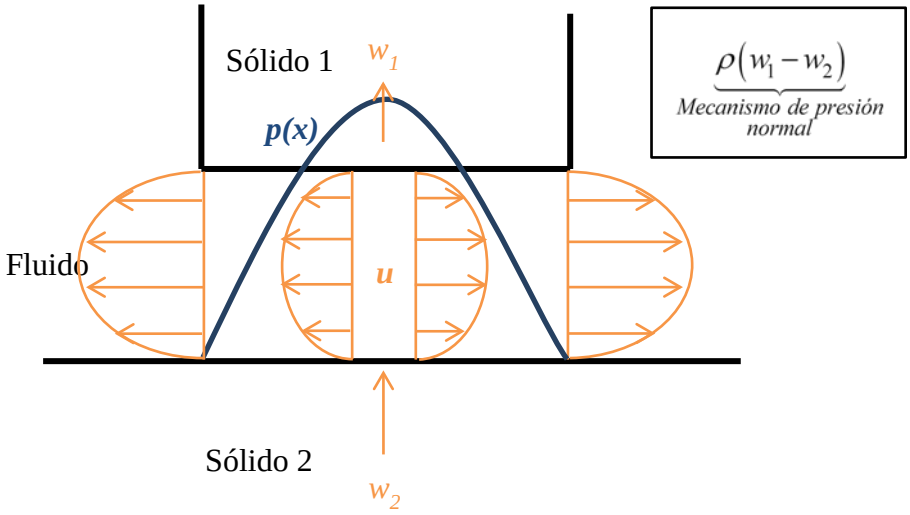


Figura III-15 Mecanismo de presión normal

El mecanismo de presión de translación depende de la variación de la película fluida. El concepto físico se deriva de la variación de la distribución de velocidades en el fluido. Concretamente, debido a que el perfil del piñón se desplaza con una velocidad u_1 y los perfiles no son paralelos, se produce que las distribuciones de velocidades del fluido a lo largo del eje *x* sean diferentes (Figura III-16).

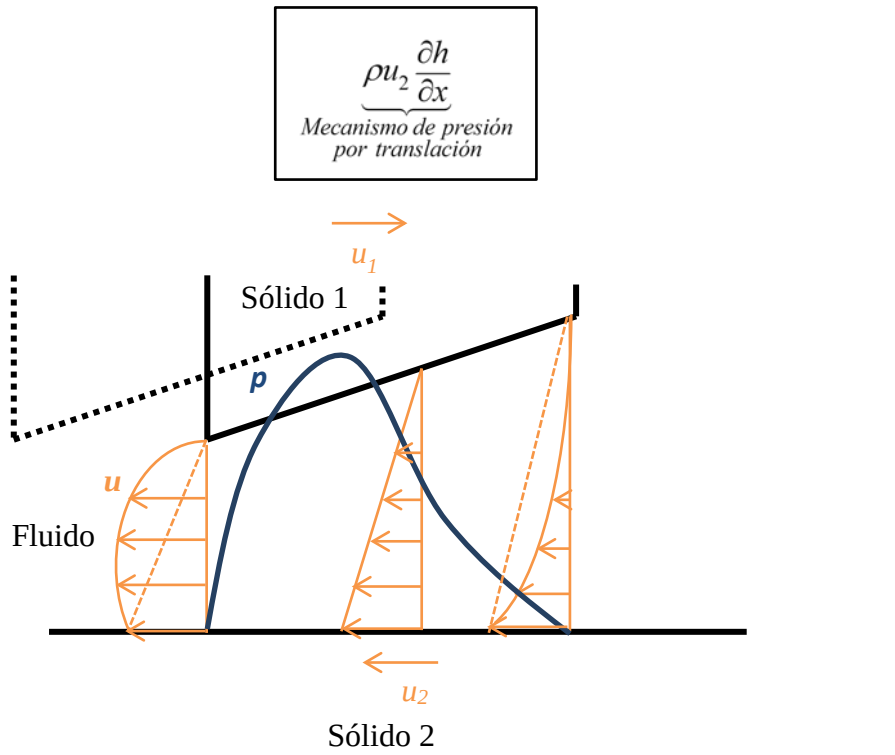


Figura III-16 Mecanismo de presión de translación

Término de expansión local

Por último, el tercer término después del igual de la ecuación de Reynolds (Ecuación (III.68)), es el denominado de expansión local. Este efecto surge a partir de la variación de la densidad. Físicamente, existe un aporte de calor al lubricante que provoca cambios en sus propiedades reológicas (Figura III-17).

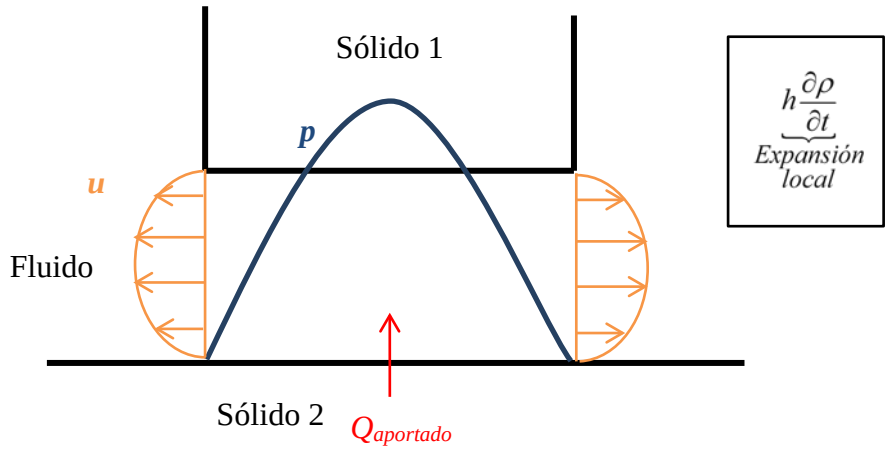


Figura III-17 Mecanismo de expansión

Cálculo de la fuerza viscosa

Una vez desarrollada la expresión de Reynolds y analizados cada uno de sus términos en profundidad, se procede a calcular la fuerza debida al comportamiento del fluido. Para ello es necesario adecuar la ecuación de Reynolds, a su forma más simplista, a partir de una serie de aproximaciones. El primer paso es la conversión del término del empuje y considerar que las propiedades del fluido (densidad y viscosidad) no varían con el tiempo, ni a lo largo del contacto (Ecuación (III.71)).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h\left(u_1+u_2\right)}{2}\right)+\left(w_1-w_2-u_2\frac{\partial h}{\partial x}\right) \tag{III.71}$$

A partir de la ecuación de la derivada material, se obtiene la velocidad de película fluida $\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)$:

$$\frac{Dh}{Dt}=\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}\rightarrow\left\{\begin{array}{c} u_2=\frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{Dh}{Dt}=w_1-w_2 \end{array}\right\}\rightarrow\frac{\partial h}{\partial t}=w_1-w_2-u_2\frac{\partial h}{\partial x} \tag{III.72}$$

Por lo que la ecuación de Reynolds quedaría ordenada como:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{12\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h\left(u_1+u_2\right)}{2}\right)+\frac{\partial h}{\partial t} \tag{III.73}$$

Aplicando las aproximaciones del estudio y definiendo la media de velocidades de los perfiles, como velocidad de entrada del fluido o "*entraining velocity*", la ecuación de Reynolds se expresa a partir de la ecuación (III.74):

$$\frac{1}{12\eta}\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{\left(u_1+u_2\right)}{2}\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial t}\rightarrow\left\{V_{ent}=\frac{\left(u_1+u_2\right)}{2}\right\}\Rightarrow\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)=12\eta V_{ent}\frac{\partial h}{\partial x}+12\eta\frac{\partial h}{\partial t} \tag{III.74}$$

La ecuación de Reynolds, en su expresión más simplista, queda formulada:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right)=12\eta V_{ent}\frac{\partial h}{\partial x}+12\eta\frac{\partial h}{\partial t} \tag{III.75}$$

Para el cálculo de la fuerza debida al fluido, hay que determinar la distribución de presiones, para el régimen y condiciones de lubricación del contacto, y con ella integrarla a lo largo del área de contacto.

$$F_{lub}=b\int_{-a}^{a}p\left(x\right)dx \tag{III.76}$$

III.4.2. Esfuerzo tangencial

La fricción es un fenómeno disipativo que surge cuando dos elementos o superficies están en contacto y hay un movimiento relativo entre ellas. A la resistencia que hay entre esos dos cuerpos al movimiento relativo, se la conoce como fricción. Para evitar este fenómeno, se recurre a la acción del lubricante, el cual, además de mejorar el funcionamiento global de la transmisión, reduce el desgaste entre dientes y ejerce de fluido refrigerante, disminuyendo así la temperatura en la región de contacto. Por esta razón se estudia la fricción en ambiente fluido, sin obviar la posibilidad que exista contacto seco. A continuación, y a modo

introductorio, se presentan los fundamentos necesarios para calcular los esfuerzos de fricción en un fluido newtoniano, los cuales servirán para sentar las bases del procedimiento posterior de cálculo de la fricción en cualquier régimen.

En fluidos Newtonianos, como axioma general, la velocidad de deformación y la tensión tangencial aplicada, se relacionan mediante la viscosidad.

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} \tag{III.77}$$

Una vez determinada la distribución de velocidades en un fluido Newtoniano (Ecuación (III.62)), se sustituye en la ecuación de la tensión tangencial (Ecuación (III.77)). Ésta queda finalmente expresada como:

$$\tau_{xz} = \eta \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{2z-h}{2} \right) \frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{u_2 - u_1}{h} \right) \eta \tag{III.78}$$

Si se particulariza la ecuación anterior, para la capa en contacto con el piñón ($z=0$) y para la correspondiente a la rueda conducida ($z=h$), se obtienen las siguientes expresiones:

$$\tau_{xz}(z=0) = \underbrace{-\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\substack{\text{Fricción por rodadura} \\ \text{en el fluido}}} + \underbrace{\left(\frac{u_2 - u_1}{h} \right) \eta}_{\substack{\text{Fricción por deslizamiento} \\ \text{en el fluido}}} \tag{III.79}$$

$$\tau_{xz}(z=h) = \underbrace{\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}}_{\substack{\text{Fricción por rodadura} \\ \text{en el fluido}}} + \underbrace{\left(\frac{u_2 - u_1}{h} \right) \eta}_{\substack{\text{Fricción por deslizamiento} \\ \text{en el fluido}}} \tag{III.80}$$

Se observa que la tensión tangencial en ambas superficies es igual, pero de signo contrario, en el término correspondiente a la fricción por rodadura en el lubricante. Como las dos ecuaciones son análogas, únicamente se analiza la relativa al piñón.

Hasta este punto, sólo se han tenido en cuenta las tensiones tangenciales debidas al fluido para el caso de perfiles idealmente lisos. Es necesario tener en cuenta, tanto las tensiones tangenciales debidas al contacto directo entre asperezas, como las debidas a la deformación de los perfiles en el movimiento relativo de rodadura. Para ello, inicialmente, se añade un término que considera la tensión producida por el contacto entre las asperezas de las superficies de los sólidos, que relaciona la presión normal con la tangencial, a partir de un parámetro denominado coeficiente de fricción de las asperezas o de contacto directo (μ_s). La expresión de la tensión tangencial, en el piñón, queda finalmente definida como:

$$\tau_{xz} = -\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{u_2 - u_1}{h} \right) \eta + \underbrace{\mu_s p}_{\substack{\text{Fricción por contacto} \\ \text{entre asperezas}}} \tag{III.81}$$

A partir de la integración de la tensión tangencial a lo largo del área de influencia del contacto, se calculan las fuerzas tangenciales en el contacto (fricción). Estas fuerzas tangenciales se clasifican en fuerzas de fricción por rodadura (*rolling friction*) y fuerzas de fricción por deslizamiento (*sliding friction*).

$$F_{Fricción} = -b\int \tau_{xz} dx = F_{Roll} + F_{Sliding} \rightarrow \begin{cases} F_{Roll} = -b\int \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} dx \\ F_{Sliding} = b\left[\int \eta\left(\frac{u_2 - u_1}{h}\right) dx + \int \mu_s \, p dx\right] \end{cases} \quad \text{(III.82)}$$

El otro aspecto a incluir en la ecuación de las tensiones tangenciales, es el efecto de la deformación de los perfiles en el movimiento relativo de rodadura. Este fenómeno se produce porque la resultante de la distribución de presión normal, no coincide con el centro geométrico del contacto. Se suele modelizar como una fuerza tangencial, que incluye el efecto de la deformación de los perfiles cuando hay micro-deslizamiento en el contacto (rodadura de un perfil sobre otro). Como resultado, la fuerza de rodadura (F_{Roll}) está formada por dos componentes: la debida a la rodadura en presencia de fluido y la correspondiente a la rodadura entre perfiles.

$$F_{Roll} = -b\int \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} dx + \underbrace{\frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}}}_{Rodadura\ entre\ perfiles} \quad \text{(III.83)}$$

Donde T_{Roll} es el par de resistencia a la rodadura entre los sólidos.

Como resumen, se muestra la formulación de la fricción por deslizamiento y por rodadura. A su vez, cada uno de ellos está compuesto por dos términos, que serán analizados a continuación:

$$\begin{cases} F_{Sliding} = b\left[\int \eta\left(\frac{u_2 - u_1}{h}\right) dx + \int \mu_s \, p dx\right] \\ F_{Roll} = -b\int \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} \end{cases} \quad \text{(III.84)}$$

III.4.2.1. Fricción por deslizamiento ($F_{Sliding}$)

Se denomina fricción por deslizamiento, como su propio nombre indica, al tipo de fricción que se produce cuando un cuerpo está en contacto con otro y, además, existe una velocidad relativa periférica entre sus perfiles, en el punto de contacto. Independientemente del modelo utilizado para calcular el valor de dicha fuerza de rozamiento, la fricción por deslizamiento plantea la disyuntiva del cálculo del sentido de la fuerza. A este respecto, un hecho contrastado es que la fuerza de fricción por deslizamiento se opone a la velocidad relativa de deslizamiento (Figura III-18). En el caso de transmisiones por engranajes, dado que hay instantes de tiempo en el que coinciden dos o más contactos simultáneos de dientes, y en regiones diferentes, coexisten varias fuerzas y sentidos de rozamiento. Este hecho produce que, en ciertos casos, la fuerza de fricción cree un par que "ayude" al movimiento, es decir, que el par de entrada aplicado y el par ejercido por la fuerza de fricción tengan el mismo sentido. Sin embargo, generalmente, el par debido a la fricción tiene sentido opuesto al par de entrada y ocasiona pérdidas en el conjunto. Por tanto, se puede concluir que, dependiendo del sentido de la velocidad de rotación, de la dirección del par de entrada y de la localización del contacto, se plantean varias posibilidades de sentidos de las fuerzas de fricción.

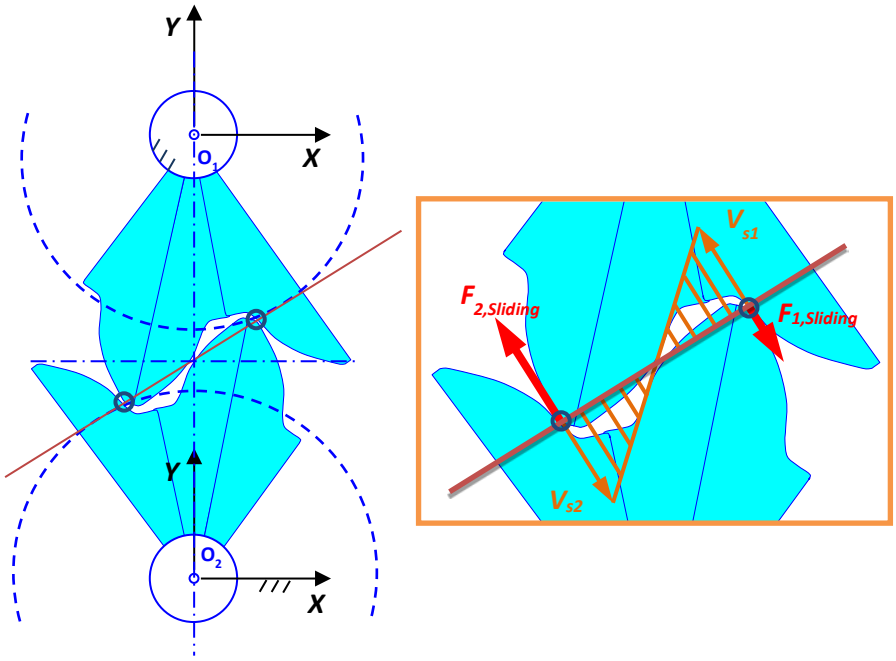


Figura III-18 Fuerzas debidas a la fricción por deslizamiento

A continuación se abordará la problemática derivada de la determinación del sentido de la fuerza de fricción por deslizamiento, para posteriormente presentar los diferentes modelos que simulan el comportamiento de este fenómeno disipativo.

III.4.2.1.1. Determinación del sentido de la fuerza de fricción por deslizamiento

En transmisiones por engranajes, el punto primitivo es el polo del movimiento. Como consecuencia, la velocidad de deslizamiento queda definida cinemáticamente. Este hecho influye directamente en el sentido de la fuerza de fricción. Estos sentidos dependen de los de la rotación de las ruedas, del correspondiente al par resistivo y de la localización del contacto. De aquí se extrae el interés de analizar las diferentes posibilidades, con el objetivo de determinar el sentido de las fuerzas de fricción en todos los supuestos. Para ello se plantean los cuatro escenarios potenciales de contacto doble, en función de los sentidos de rotación del par y velocidad angular de entrada, porque los casos de contacto simple están incluidos en ellos. Los supuestos a analizar son:

- Sentido anti-horario (positivo) del par y de la velocidad angular de entrada
- Sentido horario (negativo) del par y anti-horario de la velocidad angular de entrada
- Sentido anti-horario (positivo) del par y horario de la velocidad angular de entrada
- Sentido horario del par y de la velocidad angular de entrada

A continuación, a modo ejemplo, se muestra el análisis del primer supuesto (Figura III-19). Posteriormente, se resumen los cuatro supuestos en una formulación general, que permite conocer el efecto de la fricción por deslizamiento, en función de los sentidos de rotación y par aplicado (Figura III-20).

Sentido anti-horario del par y de la velocidad angular de entrada

El primer caso de estudio se corresponde al supuesto en que la velocidad de rotación y par de entrada tienen sentido anti-horario. A partir del sentido de rotación, se determina cinemáticamente la velocidad de deslizamiento, fijando así los sentidos de las fuerzas de rozamiento (Figura III-19). A partir de las fuerzas de rozamiento y las de contacto (respecto del piñón), se realiza el equilibrio estático:

$$\left|T_1\right| = \rho_{o_1}\left(F_{1,N} + F_{2,N}\right) - d_1 F_{1,Sliding} + \left(d_1 + d_2\right) F_{2,Sliding} = \left|T_{1,N}\right| + \left|T_{2,N}\right| - \left|T_{1,Sliding}\right| + \left|T_{2,Sliding}\right| \qquad \text{(III.85)}$$

Se observa, en este supuesto, que si el punto de contacto se sitúa a la izquierda del punto primitivo, el par de la fuerza de fricción en dicho punto "ayuda" al par de contacto ($T_{1,Sliding}$). Si la suma de los pares debidos a las fricción es negativo (por ejemplo ocurre cuando hay contacto simple antes del punto primitivo), el par de entrada necesario es menor que el correspondiente en el caso en que la suma sea positiva. Análogamente, cuando la suma de pares debidos a la fricción es positiva, se incrementa el par de entrada necesario para vencer el par resistivo en la rueda conducida y el correspondiente a la fricción.

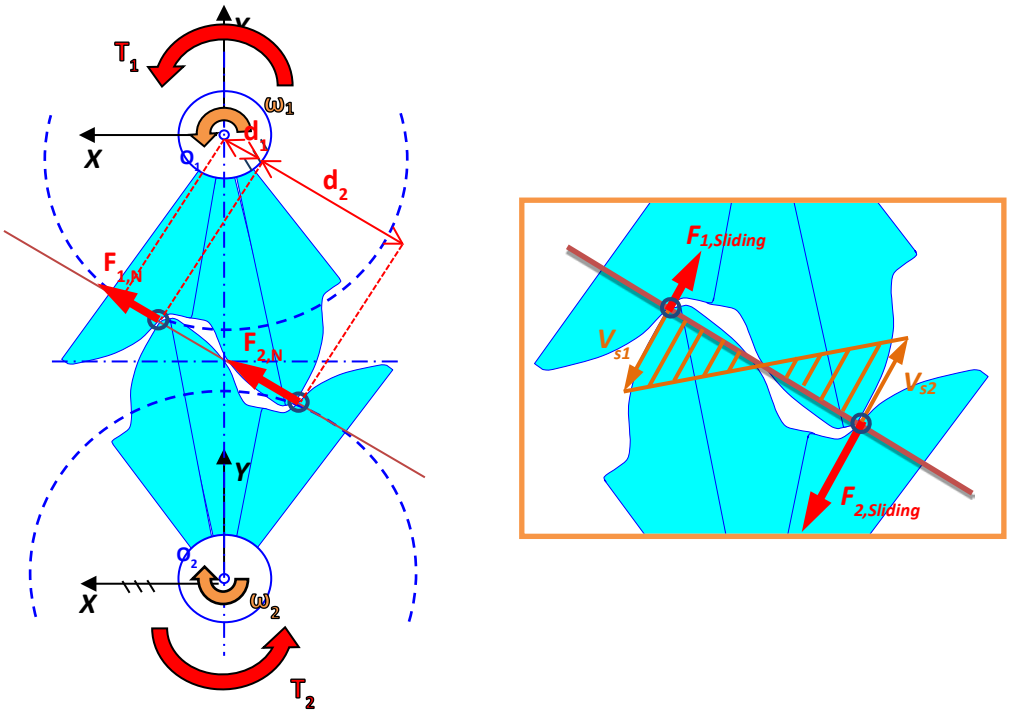


Figura III-19 Fuerzas debidas a la fricción por deslizamiento (supuesto 1)

Supuesto general

El procedimiento de análisis de los tres supuestos restantes es el mismo que el expuesto. Para no incurrir en la reiteración, se muestra una formulación general en la que se incluyen los cuatro supuestos a analizar. A partir de ésta, se pueden determinar los sentidos de los pares de fricción, en función de los sentidos del par y de los de la velocidad de rotación (Ecuación (III.86)).

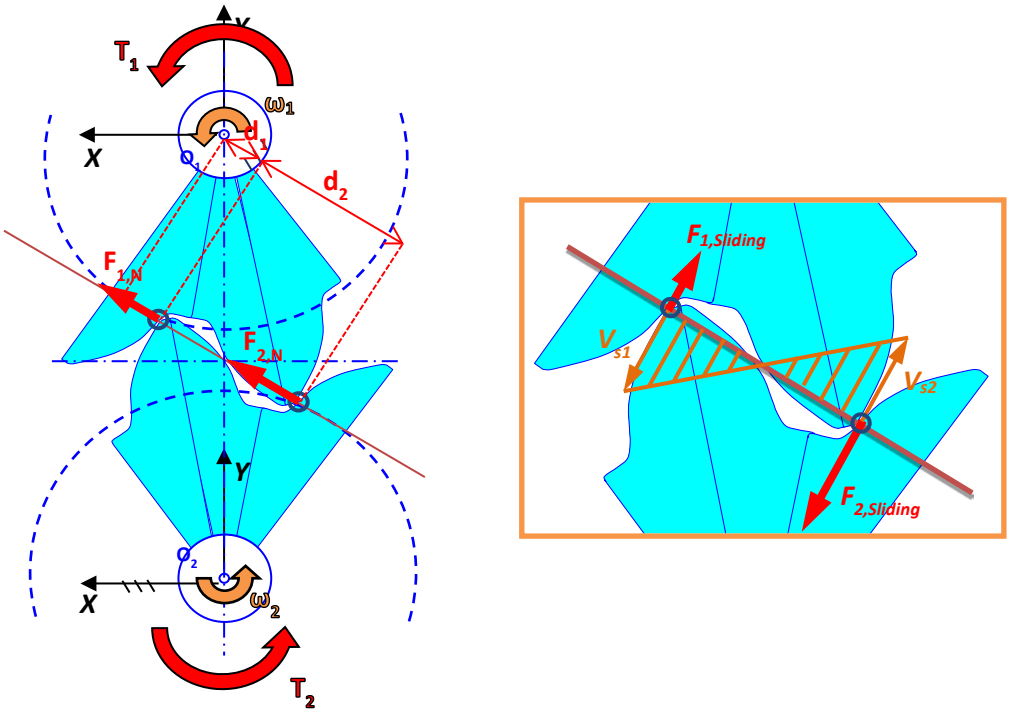


Figura III-20 Fuerzas debidas a la fricción por deslizamiento (supuesto general)

A partir del análisis de los cuatro supuestos, el par de entrada al realizar el equilibrio estático se puede expresar como:

$$\begin{aligned}|T_1| &= \rho_{o_1}\left(F_{1,N}+F_{2,N}\right)+sign(T_1\cdot\omega_2)\left[d_1F_{1,Sliding}\right]+sign(T_2\cdot\omega_1)\left[\left(d_1+d_2\right)F_{2,Sliding}\right] \\ &= |T_{1,N}|+|T_{2,N}|+sign(T_1\cdot\omega_2)|T_{1,Sliding}|+sign(T_2\cdot\omega_1)|T_{2,Sliding}|\end{aligned} \quad \text{(III.86)}$$

La función ***sign(x)*** traslada el signo de la variable *x*.

III.4.2.1.2. Modelos de las fuerzas de fricción por deslizamiento

En el capítulo II se presentaron tres tipologías de modelos, que simulan el comportamiento de las fuerzas de fricción por deslizamiento ($F_{Sliding}$):

- Modelo de Coulomb
- Modelo estadístico
- Integración de la tensión tangencial

Modelo de Coulomb

Como se aprecia, el modelo de Coulomb lo que hace es aglutinar el efecto del lubricante y del contacto entre asperezas en un solo término, denominado coeficiente de fricción. Por esta razón, es de vital importancia la elección del coeficiente de fricción y su validez para los diferentes regímenes y condiciones de lubricación.

$$F_{Sliding} = b\left[\int\eta\left(\frac{u_2-u_1}{h}\right)dx+\int\mu_s\,p\,dx\right]=\mu F_{Normal} \quad \text{(III.87)}$$

Modelo estadístico

Esta formulación superpone la fricción debida al contacto directo entre asperezas y la correspondiente al fluido (Ecuación (III.88)). Para ello es necesario definir el área en la que existe contacto directo y en la que existe fluido entre ambos perfiles.

$$F_{Sliding} = b\left[\int\eta\left(\frac{u_2-u_1}{h}\right)dx+\int\mu_s\,p dx\right] = F^{v}_{Sliding}+F^{b}_{Sliding} \rightarrow \begin{cases} F^{v}_{Sliding} = b\int\eta\left(\frac{u_2-u_1}{h}\right)dx \\ F^{b}_{Sliding} = b\int\mu_s\,p dx \end{cases} \quad \text{(III.88)}$$

Fricción seca o extrema ($F^{b}_{Sliding}$)

La formulación del término correspondiente a la fricción entre asperezas, viene determinada por la tensión tangencial de Eyring (τ_0), por el área efectiva donde hay contacto entre asperezas (A_e), por el coeficiente de presión de la tensión tangencial límite para interacción directa entre asperezas (ξ) y por la carga soportada por las asperezas (W_e). Éstos vienen determinados experimentalmente, a partir de ensayos con microscopio óptico de los perfiles del diente, en los que se obtienen los parámetros estadísticos que definen la superficie del diente.

$$F^{b}_{Sliding} = \tau_0 A_e + \xi W_e \quad \text{(III.89)}$$

Fricción fluida ($F^{v}_{Sliding}$)

Para la formulación del término correspondiente a la fricción fluida, se debe calcular la tensión tangencial del fluido e integrarlo para el área correspondiente, es decir, al área de contacto en el que exista fluido atrapado. Esta área es igual a la total menos el área donde hay contacto entre asperezas.

$$F^{v}_{Sliding} = \tau_{xz}\left(A - A_e\right) \quad \text{(III.90)}$$

Integración de la tensión tangencial

Este modelo de cálculo de la fricción por deslizamiento se limita a tener en cuenta el término correspondiente al fluido. Por esta razón, este modelo sólo es aplicable a regímenes de lubricación donde la distancia entre perfiles es considerable, es decir, que no hay contacto entre sólidos.

$$F_{sliding} = F^{v}_{Sliding} = b\int_{-a}^{a}\tau_{xz}dx \quad \text{(III.91)}$$

Incluir el contacto entre sólidos complicaría la problemática de la integración y obtención de la fuerza, analíticamente. En este caso, se recurre a los otros dos tipos de modelos.

III.4.2.2. Fricción por rodadura (F_{Roll})

Se denomina fricción por rodadura, al tipo de fricción que se produce cuando un cuerpo está en contacto con otro y, además, tienen una velocidad angular relativa entre ambos, en el eje paralelo a su plano tangente [Johnson, 1985]. En el caso de los engranajes, se puede apreciar (Figura III-21) que este tipo de fricción se localiza en el contacto entre dientes.

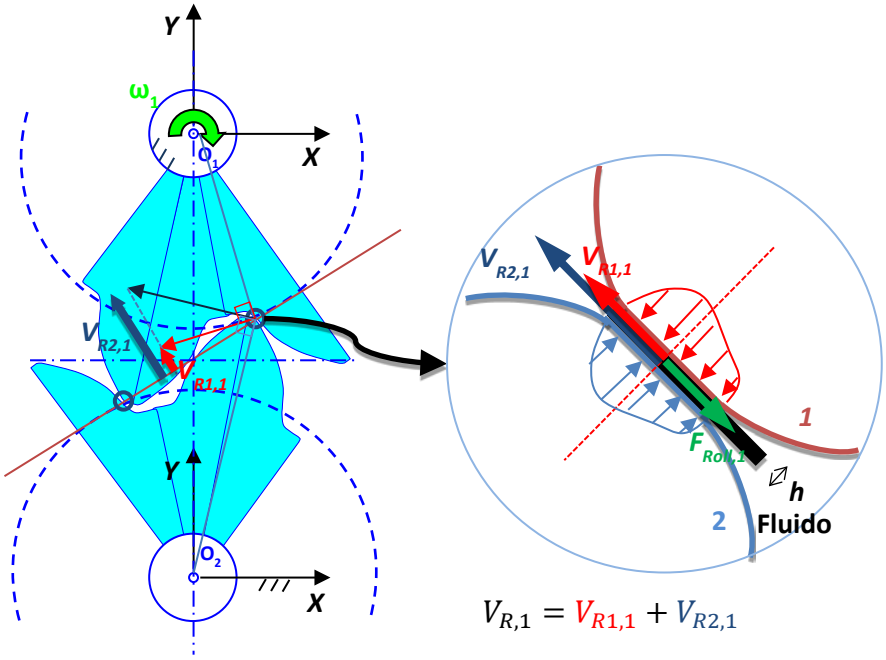


Figura III-21 Fuerza debida a la fricción por rodadura

La fricción por rodadura se puede descomponer en dos fenómenos (Ecuación (III.84)), la rodadura en ambiente fluido y la rodadura entre perfiles que sufren deformación. El primero se produce como resultado de la expulsión de fluido, en el sentido opuesto a la velocidad de rodadura (Figura III-22). El segundo se produce porque la resultante de la distribución de presiones no coincide con el centro del contacto. De hecho, esta resultante está localizada en una paralela a la línea de engrane. Para modelizar este fenómeno, normalmente, se traslada dicha resultante a la línea de engrane y, después, se modeliza como una fuerza ficticia en la dirección tangencial. Para ello, se calcula el par producido para trasladarla a la línea de engrane y se la divide por el radio base de la rueda.

Los fenómenos antes relatados se modelizan a partir de un enfoque analítico, en el cual se parte de la expresión:

$$F_{Rolling} = -b\int \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} = F^{v}_{Roll} + F^{b}_{Roll} \rightarrow \begin{cases} F^{v}_{Roll} = -b\int \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx \\ F^{b}_{Roll} = \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} \end{cases} \quad \text{(III.92)}$$

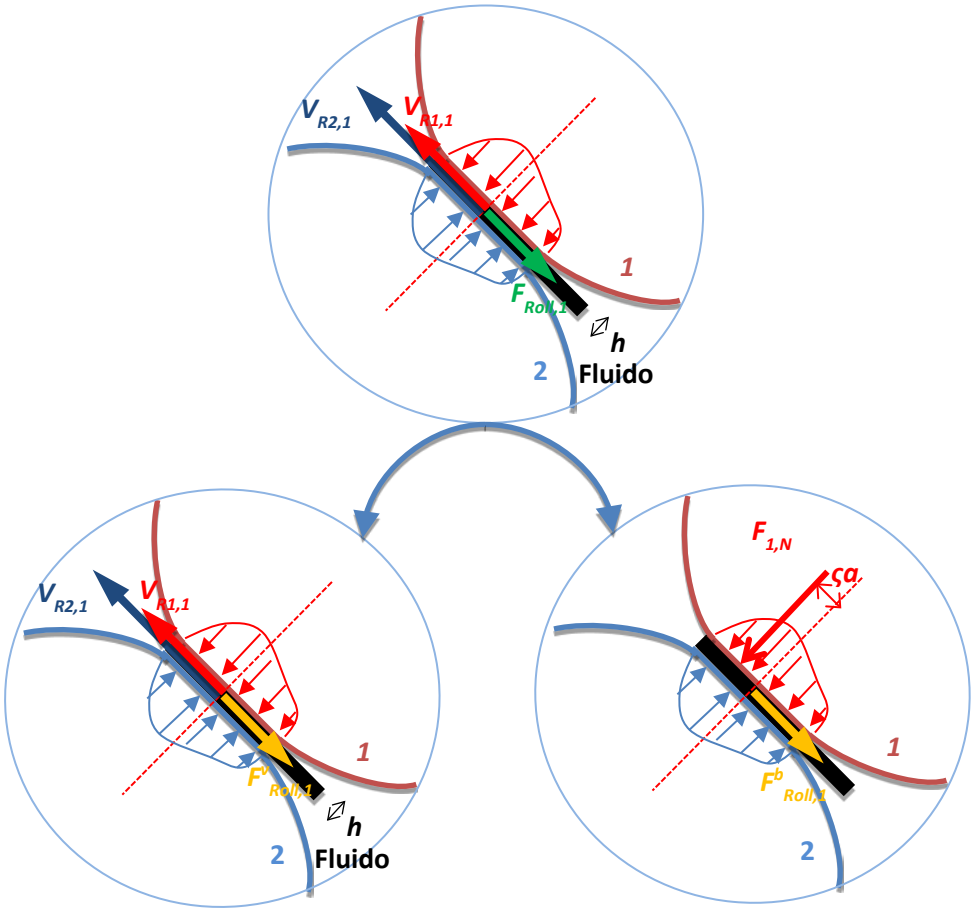


Figura III-22 Superposición de la fricción por rodadura

Rodadura debida al fluido (F^{v}_{Roll})

La fuerza de fricción por rodadura debida al fluido (Ecuación (III.93)), es dependiente de la derivada de la presión en el fluido. Por esta razón, para el cálculo de este esfuerzo, será necesario establecer el régimen de lubricación del contacto. La finalidad es conocer la distribución de presiones.

$$F^{v}_{Roll} = -b\int \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx \qquad \text{(III.93)}$$

Rodadura debida a la deformación de los perfiles (F^{b}_{Roll})

Para el cálculo de la fuerza de fricción por rodadura debida a la deformación de los sólidos en contacto (F^{b}_{Roll}), es necesario trasladar la fuerza resultante del contacto a la línea de engrane. A partir del par de traslación (par resistente a la rodadura), la fricción por rodadura se expresa como una fuerza en la dirección tangencial (Figura III-23), de valor:

$$F^{b}_{Roll} = \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} \qquad \text{(III.94)}$$

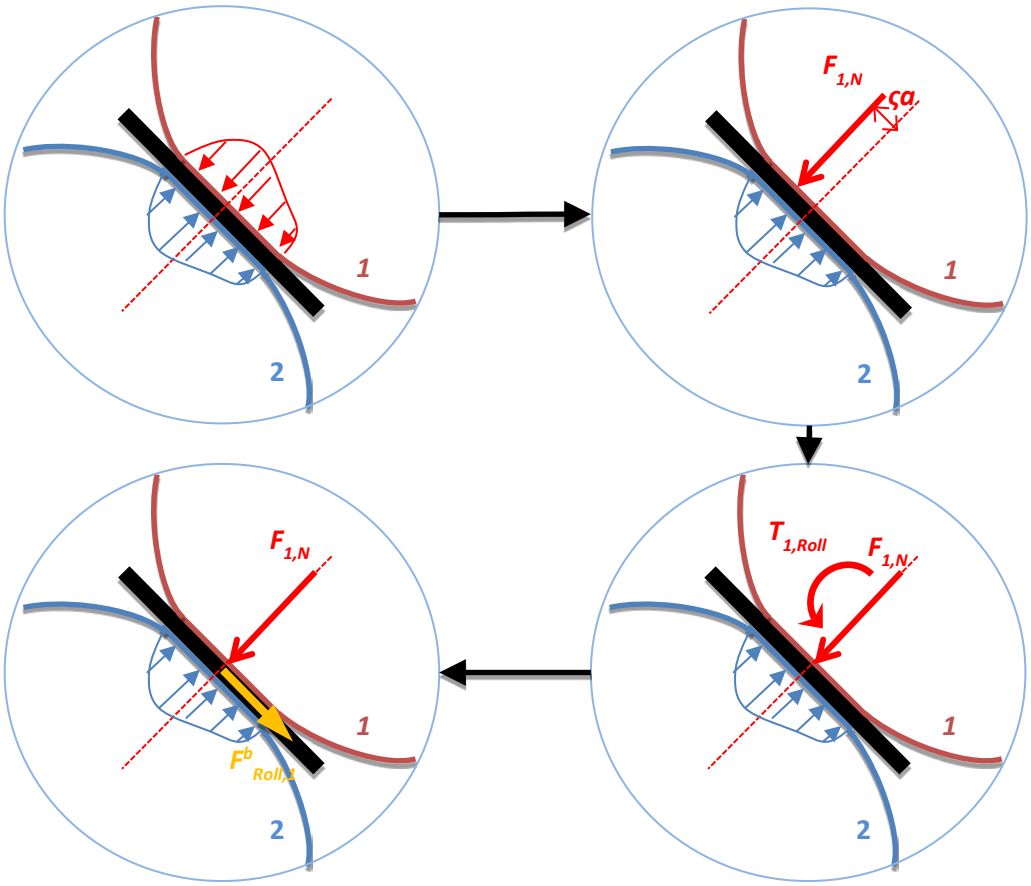


Figura III-23 Fricción por rodadura debida a la deformación de los sólidos en contacto

Se puede observar que la distancia existente entre la resultante y la línea de engrane, se puede expresar en función del semi-ancho de contacto de la teoría Hertziana (a), definiendo el par de translación, como:

$$T_{Roll} = F_N \varsigma a \tag{III.95}$$

Donde el valor del parámetro que marca la desviación entre la resultante y la línea de engrane, ς, se calcula empíricamente. Conceptualmente, se podrían aglutinar los dos efectos de fricción por rodadura (fluido y deformación de los perfiles), a través de la formulación presentada (Ecuación (III.95)), cambiando el valor del parámetro de desviación entre resultante y línea de engrane.

Capítulo IV

MODELO DE CONTACTO Y EFICIENCIA

IV.1. Introducción

El principal objetivo de una transmisión por engranajes, como su propio nombre indica, es transmitir la potencia aplicada en un eje, a través de ruedas dentadas, a otro eje que tiene solidario una resistencia, la cual absorbe dicha potencia. Entre sus características más destacadas están la compacidad, robustez, fiabilidad y resistencia, entre otras. Sin embargo, si una destaca sobre las demás, es su alta eficiencia energética. El resultado de estas bajas pérdidas en el contacto entre engranajes, provoca el uso generalizado de este tipo de transmisión en la Industria. En este sistema mecánico, la transmisión de potencia se produce por medio de contacto directo entre los dientes de los engranajes (contacto seco) o por contacto en presencia de fluido lubricante (contacto fluido). Como resultado del régimen de funcionamiento y del tipo de contacto entre engranajes, se producen una serie de pérdidas energéticas. La comunidad investigadora ha mostrado gran interés en simular, con precisión, el comportamiento de estos fenómenos disipativos, como se expuso en el capítulo II. Además, con la incorporación del comportamiento de estos fenómenos, los autores no sólo pretenden obtener resultados realistas de los parámetros cuasi-estáticos y dinámicos de interés (como pueden ser el reparto de carga y el error de transmisión), sino calcular fielmente el rendimiento de la transmisión. Por todo lo expuesto, este trabajo de Tesis se ha centrado en el estudio y análisis de los fenómenos disipativos y su influencia sobre la eficiencia de este sistema mecánico.

En el capítulo III, se presentaron las particularidades del modelo avanzado de contacto entre engranajes, de las que parte este trabajo de Tesis. Está fundamentado en el contacto seco o directo de naturaleza Hertziana, permitiendo incorporar tanto el comportamiento de las fuerzas viscosas, debidas al fluido y al contacto entre sólidos en la dirección de la línea de engrane, como las fuerzas de rozamiento por deslizamiento. El objetivo de este modelo GEDUC era el de disponer de un modelo que tenga en cuenta todos estos efectos, no estando entre sus finalidades, el realizar un análisis exhaustivo de los fenómenos disipativos. Por esta razón, en este documento de Tesis se ha profundizado en este ámbito.

En esta sección, se realizará el análisis de los fenómenos disipativos y de las formulaciones necesarias para simular su comportamiento, las cuales son susceptibles de variar con el régimen de lubricante. Por esta razón, inicialmente, se presentarán los diferentes regímenes de lubricación presentes en el contacto entre engranajes, y, posteriormente, se analizarán y presentarán, para cada uno de los esfuerzos existentes, las formulaciones propuestas. Para el desarrollo de este análisis, será necesario basarse en los fundamentos y teorías expuestos en el capítulo III, los cuales servirán como herramienta para el cálculo de cada tipo de esfuerzos. Para finalizar el capítulo, se presentará la metodología de cálculo de la eficiencia desarrollada.

IV.2. Régimen de lubricación

Para el conocimiento de qué formulaciones y conceptos determinan los esfuerzos en el contacto, es primordial discernir cuál es el régimen de lubricación del contacto a estudiar.

El régimen de lubricación es diferente dependiendo de la carga aplicada, propiedades geométricas, propiedades reológicas y de la rugosidad. A este respecto, la teoría del espesor de película fluida distingue, principalmente, cuatro tipos de regímenes de lubricación en el contacto fluido [Johnson, 1970]:

I. Rígida Iso-viscosa (RI): Es la que se conoce comúnmente como hidrodinámica. En este tipo de lubricación no hay deformación de los sólidos en contacto y no hay cambios importantes en las propiedades reológicas del lubricante.
II. Elástica Iso-viscosa (EI): Se conoce comúnmente como elastohidrodinámica suave o local. Al contrario que en el anterior régimen de lubricación, sí existe deformación de los sólidos en contacto, aunque sólo localmente, y no hay cambios considerables en las propiedades reológicas del lubricante.
III. Rígida viscosa (RV): En este tipo de lubricación no hay deformación de los sólidos en contacto, pero si hay variaciones de las propiedades reológicas del lubricante.
IV. Elástica viscosa (EV): Se conoce comúnmente como elastohidrodinámica (EHL). Las variaciones de presión y temperatura en el contacto provocan la deformación de los sólidos en contacto (elástica), así como cambios significativos en las propiedades reológicas del lubricante.

Al analizar los cuatro regímenes de lubricación expuestos, se observa que hay dos características del contacto que varían: la deformación de los dientes y las propiedades reológicas del fluido. En la Figura IV-1, se presenta el esquema de los diferentes regímenes de lubricación, resumiendo las características expuestas.

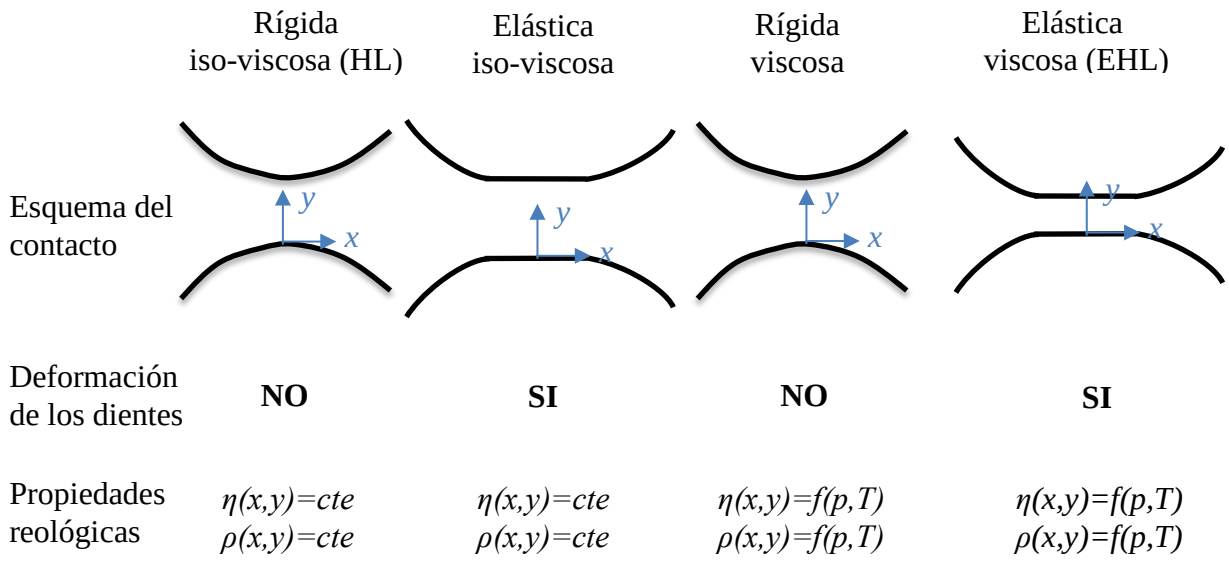


Figura IV-1 Esquema del contacto fluido entre dientes en los cuatro regímenes de lubricación

En la literatura científica existen diversos parámetros que permiten discernir en qué régimen de lubricación se encuentra el contacto. En este estudio se utilizan dos:

- Diagrama de Greenwood
- Curva de Stribeck.

Diagrama de Greenwood

El diagrama de Greenwood representa los cuatro tipos de regímenes de lubricación del contacto, mediante cuatro regiones, las cuales se definen a partir de dos parámetros adimensionales, G_v y G_e.

$$G_v = \frac{GW^3}{U^2} \qquad y \qquad G_e = \frac{W^{8/3}}{U^2} \tag{IV.1}$$

A su vez, estos parámetros dependen de la carga, de la velocidad, de las propiedades reológicas del fluido y de las del material de los sólidos en contacto.

$$G = 2\alpha E_{eq}, \qquad U = \frac{\eta V_{ent}}{E_{eq} R_{eq}} \quad y \quad W = \frac{W_N}{2E_{eq} R_{eq}} \tag{IV.2}$$

Curva de Stribeck

La curva de Stribeck utiliza un parámetro adimensional, λ, que relaciona el espesor de película fluida con la rugosidad de la superficie. El resultado aporta una primera aproximación del régimen de lubricación.

Se considera lubricación hidrodinámica si el espesor de la película fluida es, al menos, diez veces mayor que la rugosidad. Es lubricación elastohidrodinámica en caso contrario. En esta última, se pueden distinguir, a su vez, tres condiciones de lubricación (Figura IV-2):

I. Condiciones de lubricación extremas o "*Boundary lubrication*" (BL): No existe apenas lubricante entre los sólidos en contacto. Generalmente, estas condiciones de lubricación ocurren cuando el parámetro de Stribeck es menor que uno, por lo que existe contacto directo (seco) parcial entre sólidos ($\lambda<1$).

II. Condiciones de lubricación mixtas o "*Mixed lubrication*" (ML): Hay fluido entre los sólidos en contacto, pero también existe contacto entre asperezas. Se diferencia del anterior caso porque existe mayor cantidad de lubricante entre sólidos. Generalmente, estas condiciones de lubricación existen cuando el parámetro de Stribeck es mayor que la unidad y menor que tres, aproximadamente ($1<\lambda<3$).

III. Condiciones de lubricación completamente fluidas o "*Fully-flooded lubrication*" (FL): No existe contacto entre sólidos, es decir, siempre hay fluido entre los perfiles en contacto. Generalmente, estas condiciones de lubricación ocurren cuando el espesor de película es mayor que tres veces la rugosidad ($3<\lambda<10$).

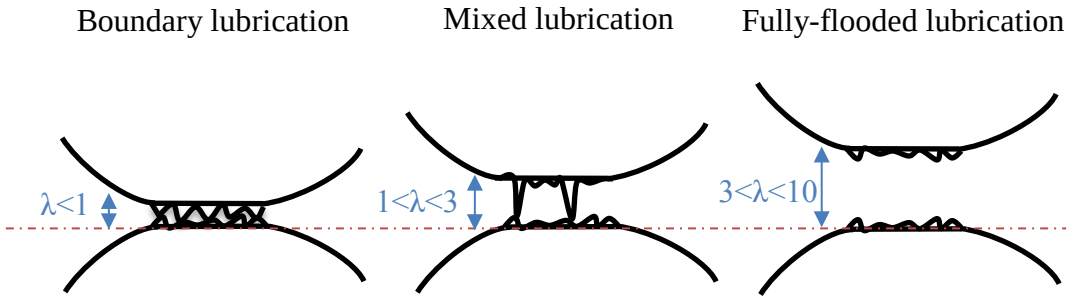


Figura IV-2 Esquema del contacto entre dientes en los tres condiciones de lubricación de la elastohidrodinámica

Estos valores del parámetro de Stribeck son orientativos y, por lo tanto, es necesario información adicional acerca del tipo de lubricación en el contacto, sobre todo en las regiones límite. Con la finalidad de obtener esta información, se opta por los parámetros de Greenwood, como se había adelantado. A modo de ejemplo, en la Figura IV-3, se muestran el diagrama de Greenwood y una curva de Stribeck genérica.

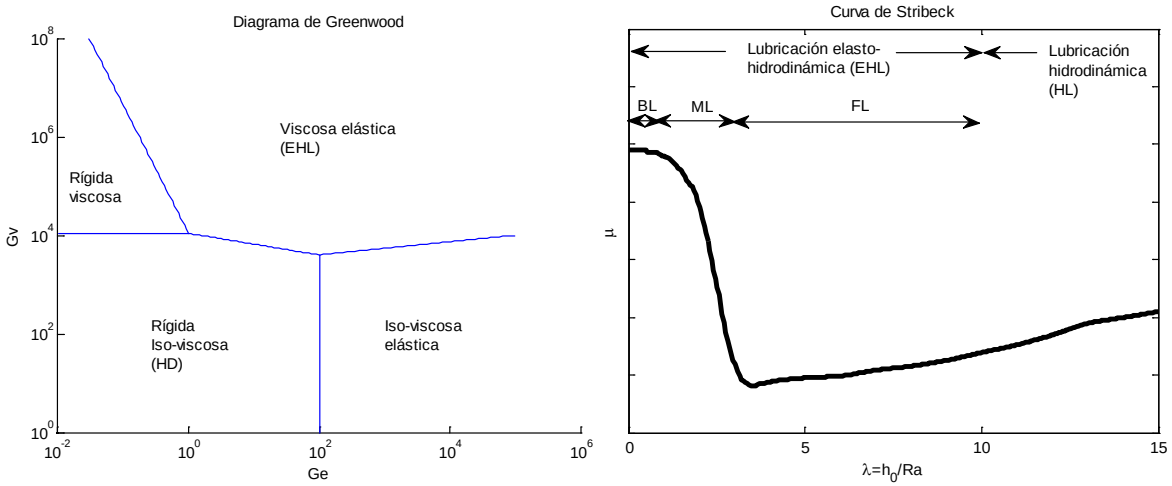


Figura IV-3 Diagrama de Greenwood correspondiente con los regímenes de lubricación del capítulo de resultados y curva de Stribeck genérica donde se pueden apreciar los regímenes y condiciones de lubricación

IV.3. Esfuerzos existentes en el contacto

Una vez definidos los regímenes y condiciones de lubricación, se presentan los modelos de cálculo de los esfuerzos presentes en el contacto entre engranajes (Figura IV-4), distinguiendo:

- Esfuerzo normal (F_N)
- Esfuerzo tangencial (F_t)
- Esfuerzo por arrastre de fluido (T_{arras})

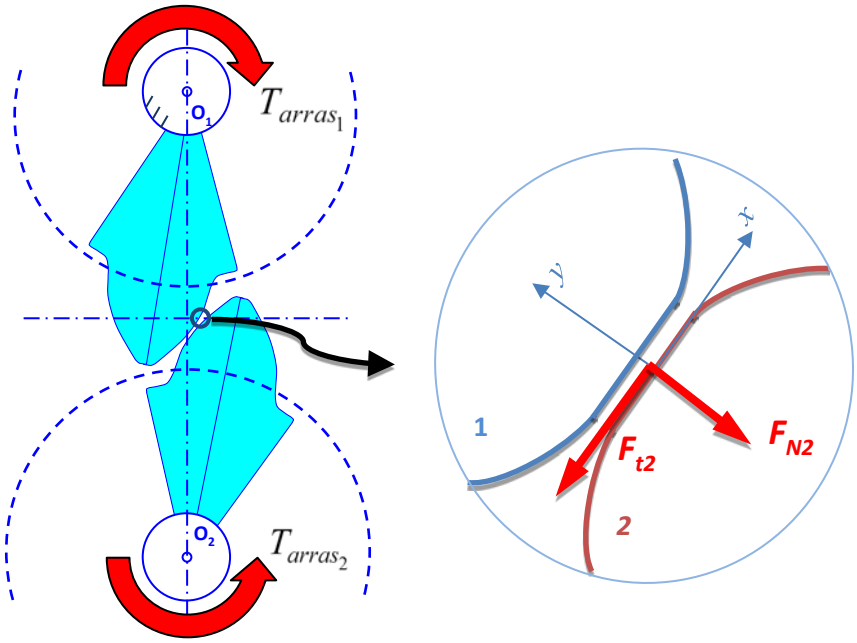


Figura IV-4 Esquema de esfuerzos presentes en el contacto entre engranajes

IV.3.1. Esfuerzo normal (F_N)

Para modelizar el esfuerzo normal en el contacto entre engranajes, se recurre a la superposición de dos términos, el término elástico (F_K) y el término debido al amortiguamiento viscoso (F_C).

$$F_N = F_K + F_C \tag{IV.3}$$

El primer término está asociado, generalmente, a la rigidez de los engranajes. El segundo se corresponde con los efectos disipativos presentes en el contacto. Dependiendo del tipo de contacto y lubricación, cada uno de estos términos se modelizará de forma diferente, como se presentará a continuación.

IV.3.1.1. Término elástico (F_K)

Está asociado con las deformaciones elásticas que sufren los engranajes, en concreto, con la rigidez en el contacto entre dientes y a la rigidez del cuerpo de los engranajes. Para calcular la fuerza normal entre engranajes, una de las formulaciones más utilizadas es la correspondiente

al científico Heindrich Hertz. La ley de Hertz relaciona las fuerzas elásticas de contacto, mediante una función no lineal, con la deformación producida (Ecuación (IV.4)).

$$F_K = K\delta^n \tag{IV.4}$$

Para la modelización de los esfuerzos elásticos normales de contacto, la formulación utilizada en este trabajo se basa en la teoría Hertziana, tanto en el caso de contacto seco, como en algunos casos de contacto fluido (EHL). Partiendo de esta premisa, se considera que la distribución de presiones en el contacto es de tipo parabólico y, que por la deformación de los perfiles en contacto, está aplicada a dos superficies paralelas y totalmente lisas. En el contacto seco es evidente que la formulación es válida, dado que el desarrollo de la teoría Hertziana está vinculado al contacto directo entre sólidos. En el caso de contacto fluido en régimen de lubricación elastohidrodinámica, es posible la implementación de la formulación Hertziana, a partir de la aproximación de Grubin y Ertel (capítulo II), sabiendo que se está cometiendo un error, aunque es asumible, con respecto a la calculada numéricamente (Figura IV-5).

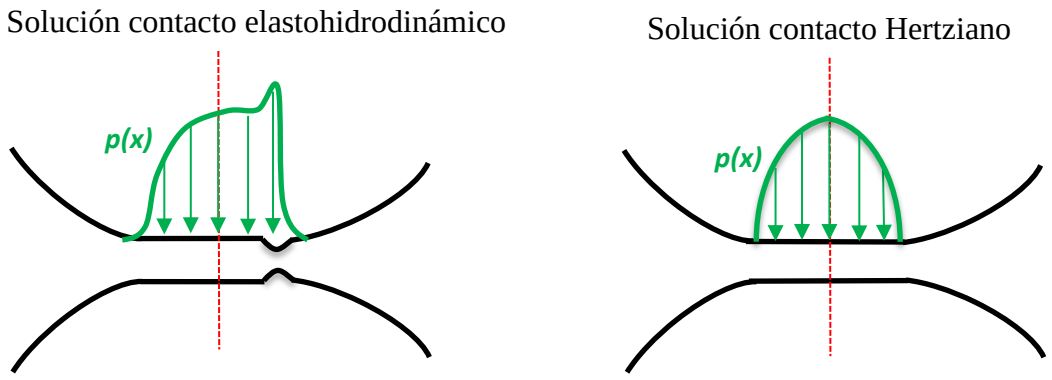


Figura IV-5 Representación de la distribución de presiones en el contacto elastohidrodinámico y en el contacto hertziano

De lo anterior, se concluye que, para el cálculo de la componente elástica de las fuerzas de contacto, se puede obtener de la misma forma, tanto en el contacto seco, como en el contacto fluido en régimen elastohidrodinámico. Sin embargo, para el caso de lubricación en régimen hidrodinámico, al no existir deformación entre los dientes, esta formulación no es válida, existiendo solo el comportamiento correspondiente al fluido.

En el modelo presentado en este trabajo de Tesis, el término elástico se calcula a partir de la superposición de una componente lineal, formulada a través de un modelo de elementos finitos de los engranajes, y una componente no lineal, calculada a partir de la formulación de *Weber-Banashek* para problemas bidimensionales (Ecuación III.23). Los fundamentos de estas formulaciones se presentaron en el capítulo III.

Una vez obtenidas las fuerzas normales debidas al comportamiento elástico del contacto, denominadas también como fuerzas de engrane, son reducidas al centro geométrico de cada una de las ruedas.

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{Bmatrix}_{Elásticas} = \begin{Bmatrix} \sum_{i=1}^{N} F_{K_i} \vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} F_{K_i} \rho_{0_{1i}} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{N} F_{K_i} \rho_{0_{1i}} \\ \sum_{i=1}^{N} F_{K_i} \vec{n}_{2i} \\ \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} F_{K_i} \rho_{0_{2i}} - \sum_{i=\frac{N}{2}+1}^{N} F_{K_i} \rho_{0_{2i}} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.5)}$$

IV.3.1.2. Término debido al amortiguamiento (F_C)

Además de la componente elástica de la fuerza normal, existen fenómenos de disipación de energía, los cuales dependen de la velocidad de aproximación y alejamiento de los perfiles en contacto. Comúnmente, para calcular los esfuerzos asociados a estos fenómenos, se recurre a un modelo como el de Kelvin-Voigt (Ecuación (IV.6)).

$$F_C = C_{eq} \dot{\delta} \quad \text{(IV.6)}$$

Este amortiguamiento equivalente, dependiendo del tipo de contacto y régimen de lubricación, puede contener el comportamiento histerético del material (C_{hys}) y el del fluido (C_{lub}). Adoptando una configuración en serie de los amortiguamientos debidos a cada efecto, el amortiguamiento equivalente se expresa:

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_{hys_1}} + \frac{1}{C_{lub}} + \frac{1}{C_{hys_2}} \right)^{-1} \quad \text{(IV.7)}$$

Una vez obtenido el amortiguamiento equivalente, se reduce los esfuerzos al centro geométrico de cada rueda, a partir de la expresión:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{Bmatrix}_{Amortiguamiento} = \begin{Bmatrix} -\sum_{i=1}^{N} C_{eq_i} \left(\vec{v}_{P_i(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i} \right) \vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N} \left(-C_{eq_i} \left(\vec{v}_{P_i(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i} \right) \vec{n}_{1i} \right) \times \overline{C_1 P_i} \\ \sum_{i=1}^{N} C_{eq_i} \left(\vec{v}_{P_i(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i} \right) \vec{n}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N} \left(C_{eq_i} \left(\vec{v}_{P_i(1/2)} \cdot \vec{n}_{1i} \right) \vec{n}_{1i} \right) \times \overline{C_2 P_i} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.8)}$$

Una vez definido el procedimiento de cálculo de las fuerzas viscosas en la dirección normal, se muestran las formulaciones adoptadas para calcular los amortiguamientos debidos al comportamiento histerético de los materiales y al fluido.

Amortiguamiento histerético

Para modelizar el amortiguamiento histerético, se reemplaza el modelo de Kelvin-Voigt por el correspondiente a Hunt y Crossley (Ecuación (IV.9)).

$$C_{hys} = \chi \delta^n \rightarrow n = 1 \quad \text{(IV.9)}$$

En vez de utilizar un amortiguamiento viscoso, se utiliza el factor de amortiguamiento histerético (χ). Para determinar su valor, Hunt y Crossley realizaron una propuesta, recogida en el Capítulo II, la cual fue mejorada, posteriormente, por Lankarani y Nikravesh (Ecuación (IV.10)).

$$\chi = \frac{3\left(1-C_r^{\,2}\right)}{4}\frac{K}{\dot{\delta}^{(-)}} \rightarrow C_r = 0.8 \qquad \text{(IV.10)}$$

Donde C_r es el coeficiente de restitución, K es la rigidez del contacto y $\dot{\delta}^{(-)}$ es la velocidad al inicio del impacto.

Amortiguamiento del lubricante

Para el cálculo del comportamiento del fluido, se parte de la teoría de lubricación hidrodinámica, postulada por Osborne Reynolds [1886] y mostrada en la ecuación (IV.11).

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) = 12\eta V_{ent}\frac{\partial h}{\partial x} + 12\eta\frac{\partial h}{\partial t} \qquad \text{(IV.11)}$$

Partiendo de esta expresión, para calcular la presión del fluido en la región de contacto, es necesario conocer en cuál de los regímenes de lubricación se encuentra el contacto.

- Lubricación elastohidrodinámica
- Lubricación hidrodinámica

Lubricación elastohidrodinámica

En este régimen de lubricación, existe deformación de los dientes en contacto. Siguiendo la aproximación de Grubin y Ertel, la película fluida en el contacto entre dientes se considera constante ($h = h_C = cte$). Como consecuencia, la ecuación de Reynolds queda reducida a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{12\eta}{h_C^{\,3}}\frac{\partial h}{\partial t} \qquad \text{(IV.12)}$$

Integrando dos veces, a lo largo de la dirección *x*, y sabiendo que la longitud de contacto es *2a*, se obtiene la ecuación de presiones en el contacto fluido:

$$p(x) = \frac{12\eta}{h_C^{\,3}}\iint \dot{h}dxdx = \frac{6\eta}{h_C^{\,3}}\dot{h}(x^2 + C_1 x + C_2) \qquad \text{(IV.13)}$$

Aplicando las condiciones de contorno, en las cuales se adopta que la presión es nula, tanto al inicio, como al final del contacto ($p(a) = p(-a) = 0$), la ecuación de la presión queda finalmente expresada:

$$p(x) = \frac{6\eta}{h_C^{\,3}}\dot{h}(x^2 - a^2) \qquad \text{(IV.14)}$$

La fuerza normal debida al lubricante, cuando hay contacto, se obtiene integrando la presión a lo largo del contacto.

$$F_{lub-EHL} = b\int_{-a}^{a} p(x)dx = -\frac{8\eta b a^3}{h_C^{\,3}}\dot{h} = -C_{lub-EHL}\dot{h} \qquad \text{(IV.15)}$$

Donde el signo negativo sólo indica que esta fuerza es positiva cuando hay acercamiento de los perfiles ($\dot{h} < 0$).

Lubricación hidrodinámica

En este segundo régimen de lubricación, no existe deformación de los perfiles, creándose una diferencia de presiones en el fluido, a partir del acercamiento o alejamiento de los mismos. En este caso, el espesor de película (h) depende del perfil de los dientes. La ecuación del espesor de película se puede aproximar a los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor de la ecuación de los perfiles (Ecuación (IV.16)).

$$h = h_C + \frac{x^2}{2R} \tag{IV.16}$$

Partiendo de la ecuación de Reynolds:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 12\eta \frac{\partial h}{\partial t} \tag{IV.17}$$

Y aplicando las condiciones de contorno, en las cuales se considera que la presión es nula, tanto a la entrada, como a la salida del contacto ($p(\infty) = p(-\infty) = 0$), la distribución de presiones queda expresada:

$$p(x) = 12\eta \dot{h} \int \frac{x}{h^3} dx = -\frac{6\eta R}{h^2} \dot{h} \tag{IV.18}$$

La fuerza normal debida al lubricante se obtiene integrando la presión a lo largo de la zona de influencia.

$$F_{lub-HL} = b \int_{-a}^{a} p(x)\, dx = -2\eta b \left[3\sqrt{2\left(\frac{R}{h_C} \right)^3} \arctan\left(\frac{a}{\sqrt{2h_C R}} \right) + \frac{6aR^2}{h_C\left(a^2 + 2h_C R \right)} \right] \dot{h} = -C_{lub-HL} \dot{h} \tag{IV.19}$$

IV.3.2. Esfuerzo tangencial (F_t)

En la sección anterior, se presentó el procedimiento de cálculo y las formulaciones que definen el contacto normal. Además, existen otros fenómenos disipativos en transmisiones por engranajes, entre los que se encuentran las pérdidas de fricción. Este tipo de pérdidas son dependientes de la carga y se modelizan como fuerzas tangenciales a la línea de acción.

Para la simulación de las fuerzas de fricción, se recurre a la superposición de dos fenómenos, la fricción por deslizamiento y la fricción por rodadura (Ecuación (IV.20)).

$$\begin{cases} F_{Sliding} = b\left[\int \eta \left(\frac{u_2 - u_1}{h} \right) dx + \int \mu_s\, p\, dx \right] \\ F_{Roll} = -b \int \frac{h}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} \end{cases} \tag{IV.20}$$

Se observa que, en ambas formulaciones, existe un término asociado al comportamiento del fluido y otro a la interacción directa entre sólidos.

Una vez definida la metodología cálculo, se presentan las formulaciones utilizadas para simular cada uno de los efectos.

IV.3.2.1. Fricción por deslizamiento ($F_{Sliding}$)

Para formular el comportamiento de las fuerzas de fricción por deslizamiento ($F_{Sliding}$), se estudian tres modelos:

- Modelo de Coulomb
- Modelo estadístico
- Integración de la tensión tangencial

Modelo de Coulomb

Este modelo calcula la fricción por deslizamiento como un porcentaje de la fuerza normal existente en el contacto (Ecuación (IV.21)).

$$F_{Sliding} = b\left[\int\eta\left(\frac{u_2-u_1}{h}\right)dx+\int\mu_s\,pdx\right]=\mu F_N \qquad \text{(IV.21)}$$

Como se aprecia, el modelo de Coulomb aglutina, el efecto del lubricante y del contacto directo, en un solo término, denominado coeficiente de fricción. Por esta razón, es de vital importancia la elección del coeficiente de fricción y su validez para los diferentes regímenes de lubricación. En esta memoria de Tesis, se opta por la implementación de dos formulaciones totalmente diferentes. La primera, conocida como formulación de Niemann, es un coeficiente de fricción medio, constante, a lo largo del ciclo de engrane. El segundo tipo de formulación, denominada formulación híbrida, es un coeficiente de fricción variable, válido para las diferentes condiciones de lubricación en régimen elastohidrodinámico. A continuación se presentan ambas formulaciones de coeficiente de fricción.

Formulación de Niemann

Es un coeficiente de fricción constante a lo largo del ciclo de engrane, el cual se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\mu_m = 0.048\left(\frac{\frac{F_{N_{pitch}}}{b}}{V_{\Sigma C}\rho_{0_{eq}}}\right)^{0.2}\eta^{-0.05}R_a^{0.25}X_L \rightarrow V_{\Sigma C}=2V_{t_{pitch}}\sin(\varphi_i) \text{ y } X_L=\left(\frac{F_{N_{pitch}}}{b}\right)^{-d} \qquad d=0.0651 \qquad \text{(IV.22)}$$

Donde F_{Npitch} es la fuerza normal en el punto primitivo, b el ancho del engranaje, ρ_{0eq} el radio de curvatura equivalente en el punto primitivo, η la viscosidad dinámica del fluido, R_a la rugosidad media de los perfiles y V_{tpitch} la velocidad tangencial en el punto primitivo.

Formulación híbrida

Para la implementación del coeficiente de fricción a partir de la formulación híbrida (Ecuación (IV.23)), son necesarios; i) un coeficiente de fricción en condiciones de contacto seco (μ^{DC}), ii) un coeficiente de fricción en condiciones de lubricación totalmente fluida (μ^{FL}) y iii) una función de ponderación. A partir de estos tres parámetros dependientes de la rugosidad, propiedades geométricas y reológicas, de la carga aplicada y de la velocidad, se puede estimar el valor de coeficiente de fricción en cualquier régimen de lubricación.

$$\mu^{ML}=\mu^{FL}f_\lambda+\mu^{DC}(1-f_\lambda)\rightarrow\left\{\begin{array}{ll} f_\lambda=0.82\lambda^{0.28} & Castro \\ f_\lambda=\dfrac{1.21\lambda^{0.64}}{1+0.37\lambda^{1.26}} & Zhu \end{array}\right\}\lambda\in(0,2] \qquad \text{(IV.23)}$$

Para el caso de estudio, se utiliza el coeficiente de fricción en condiciones de contacto seco, obtenido por De la Cruz [2012] para acero, $\mu^{DC} = 0.227098$.

Con respecto al coeficiente de fricción en condiciones de lubricación totalmente fluida, se utiliza la formulación de Xu *et al.*, la cual es variable y calculada a partir de regresión lineal de medidas experimentales, en EHL en condiciones de lubricación complemente fluidas:

$$\mu^{FL} = e^{f(SR,P_h,\eta,R_a)} P_h^{\,b_2} \left|SR\right|^{b_3} V_{ent}^{\,b_6} \eta^{b_7} \rho_{eq}^{\,b_8} \tag{IV.24}$$

$$f\left(SR,P_h,\eta,R_a\right) = b_1 + b_4 \left|SR\right| P_h \log_{10}(\eta) + b_5 e^{-\left|SR\right| P_h \log_{10}(\eta)} + b_9 e^{R_a} \tag{IV.25}$$

Donde el vector de constantes **b**, se define como; (-8.916465, 1.03303, 1.036077, -0.354068, 2.812084, -0.100601, 0.752755, -0.390958, 0.620305), P_h es la presión Hertziana máxima en el contacto, *SR* el sliding-to-rolling ratio, V_{ent} la velocidad de entrada del fluido y ρ_{eq} el radio de curvatura equivalente.

En este trabajo de Tesis, se analiza el efecto del lubricante en condiciones isotérmicas, considerando que la viscosidad no varía en todo el contacto. El lubricante elegido es el aceite mineral 75W90, cuya viscosidad dinámica es 10.6 mPa para una temperatura de 100 ºC. Además, la rugosidad media de las superficies de ambas ruedas es 0.8 µm.

A partir del modelo de Coulomb, la reducción de las fuerzas al centro geométrico de cada rueda se realiza mediante la siguiente expresión:

$$\left\{\begin{matrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{matrix}\right\}_{Roz.Deslizamiento} = \left\{\begin{matrix} -\sum_{i=1}^{N} F_{N_i} \mu \tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N} \left(-F_{N_i} \mu \tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \right) \times \overline{C_1 P_i} \\ \sum_{i=1}^{N} F_{N_i} \mu \tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N} \left(F_{N_i} \mu \tanh\left(\frac{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)} \cdot \vec{t}_{1i}\right|}{v_0}\right) \frac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \right) \times \overline{C_2 P_i} \end{matrix}\right\} \tag{IV.26}$$

Modelo estadístico

Este modelo de cálculo de la fricción, basado en el uso de datos estadísticos de la topografía de las superficies en contacto, superpone la fricción debida al contacto directo entre asperezas, a la correspondiente al fluido. Esto se consigue a partir de la definición de la porción de área de contacto en la que existe contacto metal-metal y en la que existe fluido entre ambos perfiles. Como se extrae del planteamiento, las fuerzas de fricción por deslizamiento están divididas en dos términos, el primero debido a la fricción seca o extrema ($F^b_{Sliding}$) y otro por la fricción fluida ($F^v_{Sliding}$):

$$F_{Sliding} = b\left[\int \mu_s \, p dx + \int \eta \left(\frac{u_2 - u_1}{h}\right) dx\right] = F^b_{Sliding} + F^v_{Sliding} \rightarrow \left\{\begin{matrix} F^b_{Sliding} = b\int \mu_s \, p dx \\ F^v_{Sliding} = b\int \eta \left(\frac{u_2 - u_1}{h}\right) dx \end{matrix}\right. \tag{IV.27}$$

Fricción seca o extrema ($F^b_{Sliding}$)

Esta formulación viene determinada por la tensión tangencial de Eyring (τ_0), el coeficiente de presión de la tensión tangencial límite (ξ), que es aproximadamente 0.17 [Teodorescu et al, 2003], del área efectiva donde hay contacto entre asperezas (A_e) y de la carga soportada por las asperezas (W_e). Estos dos últimos vienen determinados, experimentalmente, a partir de ensayos con microscopio óptico de los perfiles del diente, en los que se obtienen los parámetros estadísticos que definen la superficie $(\zeta, \kappa, R_a, \lambda)$ y de funciones estadísticas (f_2 y $f_{5/2}$).

$$F^b_{Sliding} = \tau_0 A_e + \xi W_e \rightarrow \begin{cases} A_e = \pi^2 \left(\zeta \kappa R_a\right)^2 A f_2 \lambda \\ W_e = \dfrac{8\sqrt{2}}{15} \pi \left(\zeta \kappa R_a\right)^2 \sqrt{\dfrac{R_a}{\kappa}} E^* A f_{5/2} \lambda \end{cases} \quad \text{(IV.28)}$$

Las funciones estadísticas f_2 y $f_{5/2}$ se calculan, asumiendo que la distribución de asperezas es gaussiana, a través de las siguientes expresiones:

$$f_2 = -0.0018\lambda^5 + 0.0281\lambda^4 - 0.1728\lambda^3 + 0.5258\lambda^2 - 0.8043\lambda + 0.5003 \quad \text{(IV.29)}$$

$$f_{5/2} = -0.0046\lambda^5 + 0.0574\lambda^4 - 0.2958\lambda^3 + 0.7844\lambda^2 - 1.0776\lambda + 0.6167 \quad \text{(IV.30)}$$

Fricción fluida ($F^v_{Sliding}$)

Para su determinación, se debe calcular la tensión tangencial del fluido e integrarlo para el área de contacto en el que exista fluido atrapado. Para ello, se calcula el área efectiva del contacto donde existe fluido, como el área total de contacto menos el área de contacto entre asperezas, llegando a la siguiente expresión:

$$F^v_{Sliding} = \tau_{xz}\left(A - A_e\right) = \eta\left(\frac{u_2 - u_1}{h}\right)\left(A - A_e\right) \quad \text{(IV.31)}$$

Las fuerzas de rozamiento por deslizamiento se reducen al centro de gravedad de cada rueda mediante la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{Bmatrix}_{Roz.Deslizamiento} = \begin{Bmatrix} -\sum_{i=1}^{N} F_{Sliding_i} \dfrac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N} \left(-F_{Sliding_i} \dfrac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \right) \times \overline{C_1 P_i} \\ \sum_{i=1}^{N} F_{Sliding_i} \dfrac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N} \left(F_{Sliding_i} \dfrac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \right) \times \overline{C_2 P_i} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.32)}$$

Integración de la tensión tangencial

Este modelo sólo es abordable analíticamente si no existe contacto directo entre sólidos, dado que la integración de la tensión tangencial en las asperezas supondría una dificultad adicional, en cuyo caso podría abordarse utilizando otro procedimiento (por ejemplo modelos estadísticos). Partiendo de esta premisa, este método se aplicará a los dos siguientes supuestos:

- Régimen elastohidrodinámico con condiciones de lubricación completamente fluida
- Régimen hidrodinámico

En estos regímenes y condiciones de lubricación, la distancia es al menos tres veces mayor que la rugosidad, por lo que los perfiles están lo suficientemente alejados, para que no haya contacto entre asperezas.

Régimen elastohidrodinámico con condiciones de lubricación completamente fluida

La fuerza de fricción por deslizamiento, se calcula mediante la integración de la tensión tangencial del fluido a lo largo de toda el área de contacto, quedando expresada como:

$$F_{sliding} = F^{v}_{Sliding} = b\int_{-a}^{a} \tau_{xz} dx = b\int_{-a}^{a} \eta\left(\frac{u_2 - u_1}{h_C}\right) dx = 2ab\eta\frac{(u_2 - u_1)}{h_C} \qquad \text{(IV.33)}$$

Régimen hidrodinámico

De igual manera, la fuerza de fricción por deslizamiento se obtiene mediante la integral de la tensión tangencial, que sufre el fluido a lo largo de toda el área de contacto. La tensión tangencial es diferente que en el caso anterior, porque la película fluida no es constante a lo largo de la dirección *x*.

$$F_{sliding} = F^{v}_{Sliding} = b\int_{-a}^{a} \tau_{xz} dx = b\int_{-a}^{a} \eta\left(\frac{u_2 - u_1}{h_C + \frac{x}{2R}}\right) dx = 2bR\eta\left(u_2 - u_1\right)\log\left(\frac{2Rh_C + a}{2Rh_C - a}\right) \qquad \text{(IV.34)}$$

Las fuerzas de rozamiento por deslizamiento resultantes, se reducen al centro de gravedad de cada rueda a partir de la ecuación (IV.32).

En el capítulo V, se mostrarán únicamente los resultados a partir de la implementación del modelo de Coulomb presentado en la ecuación (IV.21), planteándose, como trabajo futuro, la correlación de los resultados obtenidos mediante la consideración del resto de modelos.

IV.3.2.2. Fricción por rodadura (F_{Roll})

La fricción por rodadura se calcula a partir de la superposición de dos términos, uno debido a la rodadura entre sólidos y otro a la rodadura en medio fluido (Ecuación (IV.35)).

$$F_{Roll} = \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} - b\int\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx = F^{b}_{Roll} + F^{v}_{Roll} \rightarrow \begin{cases} F^{b}_{Roll} = \dfrac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} \\ F^{v}_{Roll} = -b\displaystyle\int\frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx \end{cases} \qquad \text{(IV.35)}$$

Por esta razón, se presentan las formulaciones correspondientes a cada término:

- Rodadura debida a la deformación de los perfiles
- Rodadura debida al fluido

Rodadura debida a la deformación de los perfiles (F^b_{Roll})

Para el cálculo de esta fuerza, se desarrolla un procedimiento, por el cual se traslada la fuerza resultante de la distribución de presiones en el contacto, a la línea de engrane. A partir del par de translación, la fricción por rodadura se puede expresar como una fuerza en la dirección tangencial de valor:

$$F^b_{Roll} = \frac{T_{Roll}}{\rho_{o_1}} \rightarrow T_{Roll} = F_N \varsigma a \tag{IV.36}$$

Donde el valor del parámetro que marca la desviación entre la resultante y la línea de engrane, ς, se calcula a partir de modelos empíricos. En el caso de contacto seco, el valor adoptado es aproximadamente 0.3.

Asimismo, mediante la formulación presentada (Ecuación (IV.36)), se podrían considerar conjuntamente los dos efectos de fricción por rodadura (fluido y deformación). El único cambio es el valor del parámetro de desviación entre resultante y línea de engrane, calculado en base a análisis experimentales, que pasaría a valer 0.7.

Rodadura debida al fluido (F^v_{Roll})

La formulación de la fricción por rodadura debida al fluido depende, directamente, de la derivada de la presión en el fluido. Por esta razón, el régimen de lubricación determina la formulación de este fenómeno disipativo, siendo necesario diferenciar en:

- Lubricación elastohidrodinámica
- Lubricación hidrodinámica

Lubricación elastohidrodinámica

Como se expuso previamente, en este régimen de lubricación, se puede adoptar la aproximación de Grubin, por lo que la película fluida entre sólidos es constante e igual a h_C. A partir de introducir esta premisa en la ecuación de Reynolds, la derivada de la presión queda expresada como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{12\eta}{{h_C}^3}\dot{h}x \tag{IV.37}$$

Integrando a lo largo del área de influencia del contacto, la fuerza queda expresada como:

$$F^v_{Roll-EHL} = -b\int_{-2.5a}^{1.5a} \frac{h_C}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx = \frac{12\eta b a^2}{{h_C}^2}\dot{h} \tag{IV.38}$$

Lubricación hidrodinámica

En este régimen de lubricación el espesor de película fluida no es constante, contrariamente al caso anterior, y es dependiente del perfil de los dientes ($h = h_C + \frac{x^2}{2R}$), por lo que la derivada de la presión queda expresada como:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{12\eta x}{h^3}\dot{h} \tag{IV.39}$$

Integrando la tensión tangencial a lo largo del área de influencia de rodadura, la fuerza de fricción por rodadura se expresará como:

$$F^v_{Roll-HL} = -b\int_{-2.5a}^{1.5a} \frac{h}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx = \frac{768a^2R^2\eta b}{(9a^2 + 8h_C R)(25a^2 + 8h_C R)}\dot{h} \tag{IV.40}$$

Una vez calculada la fuerza de fricción por rodadura, se reduce al centro geométrico de cada rueda a partir de la expresión:

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ T_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ T_2 \end{Bmatrix}_{Roz.Rodadura} = \begin{Bmatrix} -\sum_{i=1}^{N} F_{Roll_i} \dfrac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N} \left(-F_{Roll_i} \dfrac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \right) \times \overline{C_1 P_i} \\ \sum_{i=1}^{N} F_{Roll_i} \dfrac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \\ \sum_{i=1}^{N} \left(F_{Roll_i} \dfrac{\vec{v}_{P_i(1/2)}}{\left|\vec{v}_{P_i(1/2)}\right|} \cdot \vec{t}_{1i} \right) \times \overline{C_2 P_i} \end{Bmatrix} \quad \text{(IV.41)}$$

IV.3.3. Esfuerzo por arrastre de fluido (T_{arras})

Como se expuso en el capítulo II, para modelizar el comportamiento de este tipo de pérdidas, se utiliza un amortiguamiento torsional equivalente. Se puede adoptar este tipo de modelo, porque las pérdidas son directamente proporcionales a la velocidad de rotación de la transmisión. Dependiendo del fluido que envuelve a la transmisión, se pueden diferenciar en pérdidas por arrastre del lubricante (*Churning losses*) y pérdidas aerodinámicas (*Windage losses*):

$$P_{arrastre} = P_{churning} + P_{windage} = C_{eq}^{t} \dot{\theta}^2 \quad \text{(IV.42)}$$

Una vez definidos los valores correspondientes a cada fenómeno, los esfuerzos por arrastre de fluido se reducirán al centro de gravedad de ambas ruedas (Figura IV-6), a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}_{Amortiguamiento} = \begin{Bmatrix} -C_{eq_1}^{t} \dot{\theta}_1 \\ -C_{eq_2}^{t} \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} \rightarrow C_{eq_i}^{t} = C_{eq\,windage}^{t} + C_{eq\,churning}^{t} \quad \text{(IV.43)}$$

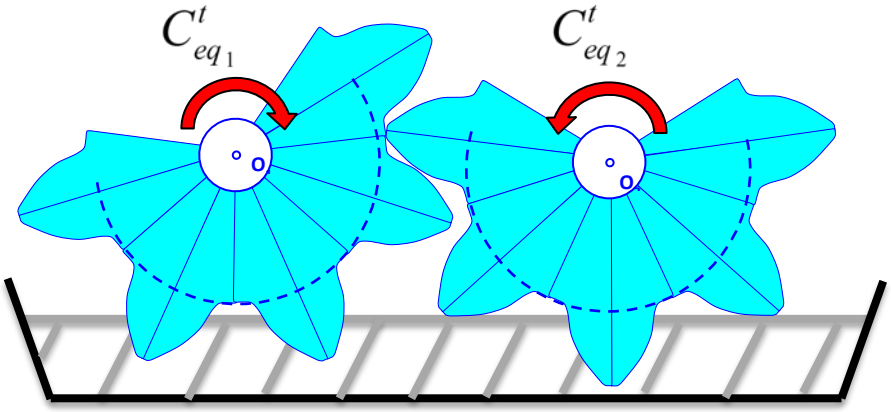


Figura IV-6 Esquema pérdidas por arrastre fluido

Una vez desarrollado el procedimiento de cálculo del amortiguador torsional equivalente, será necesario determinar las formulaciones correspondientes a cada fenómeno.

IV.3.3.1. Perdidas por arrastre de lubricante ($T_{churning}$)

El modelo de amortiguador torsional equivalente propuesto por Changenet y Velex, fundamentado en el análisis dimensional de ensayos experimentales, se calcula a través de la siguiente expresión:

$$P_{churning} = C^{t}_{eq_{churning}} \dot{\theta}^2 \rightarrow C^{t}_{eq_{churning}} = \frac{1}{2} C_{churning} \rho \dot{\theta} S R^3 \qquad \text{(IV.44)}$$

Donde *S* es la superficie de contacto entre el engranaje y el fluido, la cual se obtiene mediante la superposición de las superficies de las caras frontales y de las caras laterales, como:

$$S = S_{frontal} + S_{lateral} \rightarrow \begin{cases} S_{frontal} = R^2 \left(2\beta_i - \sin(2\beta_i)\right) \\ S_{lateral} = 2Rb\beta_i + \dfrac{2z\beta_i h_{oil} b}{\pi \cos(\varphi_i)} \end{cases} \qquad \text{(IV.45)}$$

La superficie de contacto depende del ángulo β_i, así como de otros parámetros geométricos, como la altura del fluido (h_{oil}) o del ángulo de presión (φ_i) mostrados en la Figura IV-7.

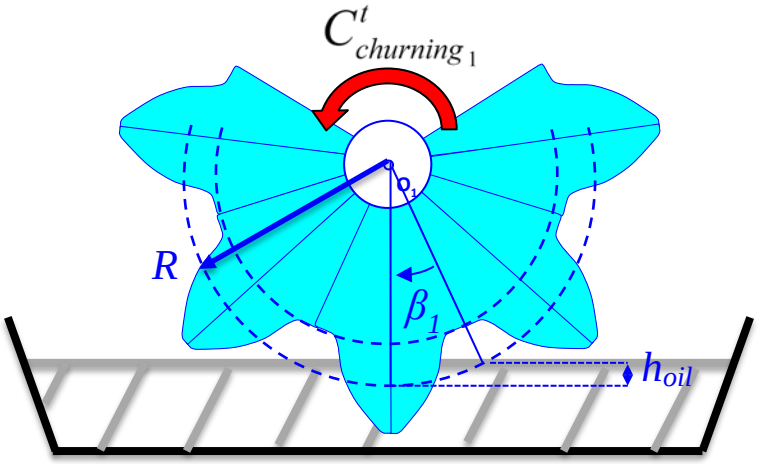


Figura IV-7 Esquema pérdidas por arrastre de lubricante

El amortiguamiento torsional adimensional ($C_{churning}$) depende de las propiedades reológicas del fluido, del número adimensional de Reynolds, así como de un parámetro que simula la aceleración de deformación $\ddot{\gamma} = \dot{\theta}^2 (Rbm)^{1/3}$.

Si $\ddot{\gamma} < 750\ m/s^2$

$$C_{churning} = \psi_1 \left(\frac{b}{R}\right)^{\psi_2} \left(\frac{h_{oil}}{2R}\right)^{\psi_3} \left(\frac{V_{oil}}{(2R)^3}\right)^{\psi_4} R_e^{\psi_5} F_r^{\psi_6} \qquad \text{(IV.46)}$$

Tabla IV-1 Valores de las constantes para diferentes números de Reynolds

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
Re<4000	1.366	0.21	0.45	0.1	-0.21	-0.6
Re>4000	0.239	0.21	0.45	0.1	0	-0.6

Si $\ddot{\gamma} > 1250\ m/s^2$

$$C_{churning} = \psi_1 \left(\frac{b}{2R}\right)^{\psi_2} \left(\frac{h_{oil}}{2R}\right)^{\psi_3} \left(\frac{V_{oil}}{(2R)^3}\right)^{\psi_4} R_e^{\psi_5} F_r^{\psi_6} \qquad \text{(IV.47)}$$

Tabla IV-2 Valores de las constantes dependiendo del número de Reynolds

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6
Re<4000	20.797	0.85	0.1	-0.35	-0.21	-0.88
Re>4000	3.644	0.85	0.1	-0.35	0	-0.88

Además, el modelo tiene en cuenta el sentido de giro de la transmisión, concretamente, el valor del amortiguamiento torsional equivalente se corrige cuando el sentido de giro del piñón es anti-horario. La razón para realizar dicha corrección es que la altura a la que está sumergida la rueda conducida aumenta, repercutiendo directamente en las pérdidas (Figura IV-8).

$$\Delta C_{churning} = 17.7 F_r^{-0.68} \frac{i-1}{i^8} \left[1 - \left(\frac{h_{oil\,2}}{R_2}\right)\right] \qquad \text{(IV.48)}$$

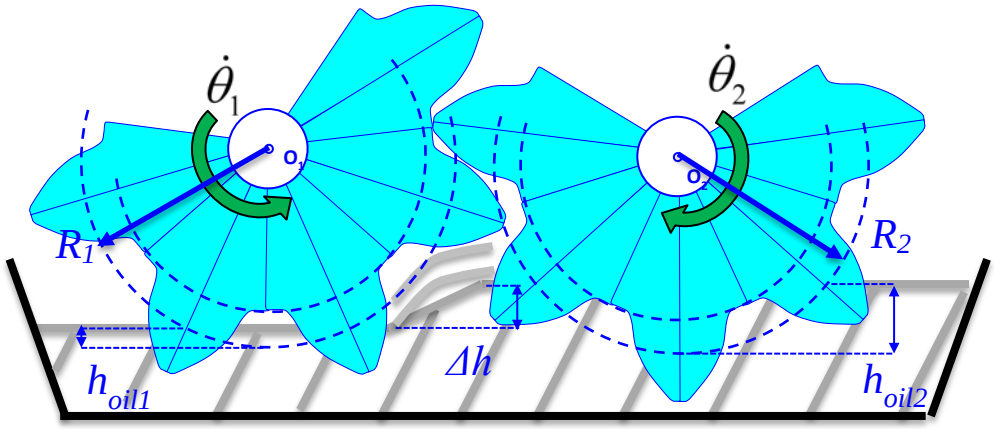


Figura IV-8 Esquema de incremento de pérdidas por arrastre de lubricante por el sentido de rotación

También se tiene en cuenta el efecto de los flancos axiales a los engranajes, es decir, que existan tapas que no permitan que el lubricante fluya libremente. Este fenómeno se modeliza a través de las siguientes expresiones:

Si $\ddot{\gamma} < 750\ m/s^2$ y Rec < 4000

$$\frac{P}{P_{ref}} = 0.76 \left(\frac{2R}{D_f}\right)^{3/4} \left(\frac{j_a}{R}\right)^{0.383\left(2R/D_f\right)} \quad cuando\ j_a \le R\left[\frac{1}{2.17}\left(\frac{D_f}{2R}\right)^{3/4}\right]^{2.61\left(D_f/2R\right)} \qquad \text{(IV.49)}$$

Si $\ddot{\gamma} > 1250\ m/s^2$ y Rec > 4000

$$\frac{P}{P_{ref}} = 0.76 \left(\frac{D_f}{2R}\right)^{0.48} \left(\frac{j_a}{\sqrt{mb}}\right)^{0.548\left(2R/D_f\right)} \quad cuando\ j_a \le \sqrt{mb}\left[\frac{1}{0.76}\left(\frac{2R}{D_f}\right)^{0.48}\right]^{1.82\left(D_f/2R\right)} \qquad \text{(IV.50)}$$

Donde j_a es la distancia entre el flanco axial y el engranaje y D_f la longitud del flanco. Este efecto no tiene incidencia cuando la longitud del flanco es menor que el diámetro primitivo de la rueda.

IV.3.3.2. Pérdidas aerodinámicas ($T_{windage}$)

El enfoque utilizado es el mismo que en el caso anterior, calculando las pérdidas aerodinámicas a través de un amortiguador torsional equivalente ($C^t_{eq_{windage}}$), que, a su vez, depende de un amortiguador torsional adimensional equivalente ($C_{windage}$):

$$P_{windage} = C^t_{eq_{windage}} \dot{\theta}^2 \rightarrow C^t_{eq_{windage}} = 0.5 C_{windage} \rho \dot{\theta} R^5 \tag{IV.51}$$

Para el cálculo del amortiguador adimensional equivalente, se diferencian las pérdidas aerodinámicas producidas en las caras frontal y trasera de los engranajes y las producidas en los laterales y en los dientes.

$$C_{windage} = C_{frontal} + C_{lateral} \tag{IV.52}$$

Caras frontal y trasera

Para la determinación de la fuerza aerodinámica en las caras frontal y trasera, es necesario plantear, inicialmente, el diferencial de esta fuerza:

$$dF = 0.5 C_x \rho \dot{\theta}^2 r^2 dS = \pi C_x \rho \dot{\theta}^2 r^3 dR \rightarrow C_x = \frac{n}{\left(\frac{\rho \dot{\theta} r^2}{\eta} \right)^m} \tag{IV.53}$$

Donde el coeficiente aerodinámico (C_x) se obtiene a partir de valores experimentales y de parámetros reológicos del fluido (aire o mezcla aire-lubricante) y los coeficientes *n* y *m* se determinan experimentalmente.

Integrando el diferencial de fuerza a lo largo del área de influencia (circunferencia), se obtiene la fuerza aerodinámica. A partir de esta fuerza, se puede obtener el amortiguamiento adimensional equivalente, mediante la siguiente expresión:

$$C_{frontal} = \frac{\int_S r dF}{0.5 \rho \dot{\theta}^2 R^5} = \frac{2\pi}{R^5} \frac{n}{\left(\frac{\rho \dot{\theta}}{\eta} \right)^m} \int_0^R r^{4-2m} dr = \frac{2\pi n}{\mathrm{Re}^m \left(5m - 2 \right)} \tag{IV.54}$$

En esta expresión no se tiene en cuenta el tipo de régimen del fluido en la superficies de las caras (laminar y turbulento), es decir, el régimen es laminar en toda la superficie. Para considerar la posibilidad de que coexistan los dos regímenes, laminar y turbulento, es necesario plantear el límite entre ambos. Esto se consigue a partir de obtener el radio frontera entre regímenes (R^*), que se determina a partir del número crítico de Reynolds, fijado, en este estudio, en $3x10^5$.

$$\mathrm{Rec} = 3x10^5 = \frac{\rho \dot{\theta} R^{*2}}{\eta} \rightarrow R^* = \sqrt{\frac{\eta \mathrm{Rec}}{\rho \dot{\theta}}} \tag{IV.55}$$

Teniendo en cuenta ambos regímenes del fluido, la ecuación (IV.54) se convierte en:

$$C_{frontal} = \frac{2\pi}{R^5}\frac{n_1}{\left(\frac{\rho\dot{\theta}}{\eta}\right)^{m_1}}\int_0^{R^*} r^{4-2m_1}dr + \frac{2\pi}{R^5}\frac{n_2}{\left(\frac{\rho\dot{\theta}}{\eta}\right)^{m_2}}\int_{R^*}^{R} r^{4-2m_2}dr \qquad \text{(IV.56)}$$

Realizando la integración del diferencial de fuerza en ambas regiones, el amortiguamiento adimensional de las caras frontales y traseras quedaría expresado como:

$$C_{frontal} = \frac{2\pi n_1}{5m_1-2}\left[\frac{R^{*5}}{R^5\,\mathrm{Re}\,c^{m_1}}\right] + \frac{2\pi n_2}{5m_2-2}\left[\frac{1}{Re} - \frac{R^{*5}}{R^5\,\mathrm{Re}\,c^{m_2}}\right] \qquad \text{(IV.57)}$$

Donde los valores $n_1,\ m_1,\ n_2\ y\ m_2$ son determinados a partir de los valores recogidos de la Tabla IV-3.

Tabla IV-3 Valores de las constantes para diferentes regímenes

	$\boldsymbol{Re}$	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{C_x}$
Flujo en régimen laminar	<3x10^5	1.293	0.5	$\frac{1.293}{Re^{0.5}}$
Flujo en régimen turbulento	>3x10^5	0.074	0.2	$\frac{0.074}{Re^{0.2}}$

Caras laterales

Para simular las pérdidas aerodinámicas de la cara lateral, se calcula el amortiguamiento adimensional equivalente de las caras laterales, bajo la consideración de que el engranaje es un cilindro que gira, incluyendo a posteriori el efecto de los dientes (Ecuación (IV.58)).

$$C_{lateral} = F_{hous}\frac{z}{4}\frac{b}{R}\left[1+\frac{2(1+x_A)}{z}\right]^4\left(1-\cos\phi\right)\left(1+\cos\phi\right)^3 \rightarrow \begin{cases} F_{hous} = \begin{cases} 1 & open \\ 0.7 & loose \\ 0.5 & close \end{cases} \\ \phi = \frac{\pi}{z} - 2\left(\frac{1}{\varphi_{ip}} - \frac{1}{\varphi_{iA}}\right) \end{cases} \qquad \text{(IV.58)}$$

Donde φ_{i_p} y φ_{i_A} son los ángulos de presión en el punto primitivo y en la punta del diente, x_A el coeficiente de corrección del diente y F_{hous} la función que incluye el efecto de la carcasa.

IV.3.4. Modelo de contacto

Con el objetivo de presentar todos los fenómenos considerados en la modelización del contacto, se realiza el resumen de formulaciones propuestas (Figura IV-9).

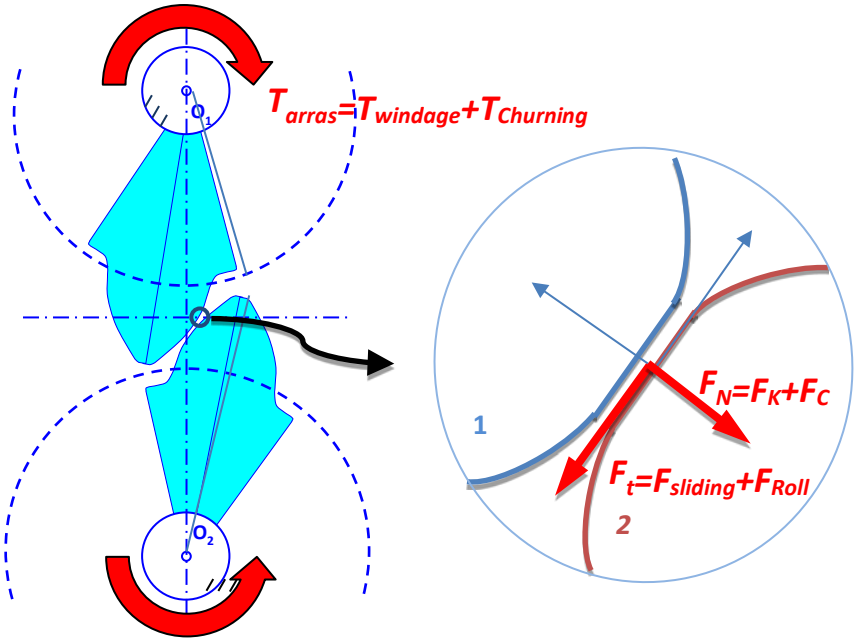


Figura IV-9 Esquema de esfuerzos presentes en el contacto entre engranajes

En la Figura IV-10, se pueden apreciar las formulaciones propuestas para la implementación de los diferentes esfuerzos presentes en el contacto entre engranajes.

Para la modelización de las fuerzas normales elásticas, se recurre a una formulación que superpone una componente lineal, calculada a través del MEF, y otra no lineal, obtenida a través de la formulación de Weber-Banashek (formulación Hertziana). El cálculo de las fuerzas normales, debidas al amortiguamiento viscoso, se divide en dos fenómenos, la histéresis de los materiales, mediante la formulación de Lankarani, y el comportamiento del lubricante en el contacto, a partir del modelo de Guibault.

Las fuerzas tangenciales también se dividen en dos efectos, la fricción por deslizamiento, implementada a partir de un modelo de Coulomb, y la fricción por rodadura, que se superpone, a su vez, en otros dos fenómenos, el debido a la rodadura entre sólidos y el correspondiente a la rodadura en ambiente fluido. La rodadura entre sólidos, se determina a partir de la ley de Coulomb-Amontons, la cual calcula la fuerza en la dirección perpendicular a la línea de engrane, mediante el par de resistencia a la rodadura. La rodadura en ambiente fluido, se determina a partir de la integración del producto del espesor de película y la derivada de la distribución de presiones.

Las pérdidas por arrastre de fluido se dividen en dos efectos, los aerodinámicos y los de arrastre de lubricante. Para simular ambos comportamientos, se recurre a un modelo de amortiguamiento torsional adimensional equivalente, que consideran las pérdidas en las caras, frontales y laterales, y en los dientes.

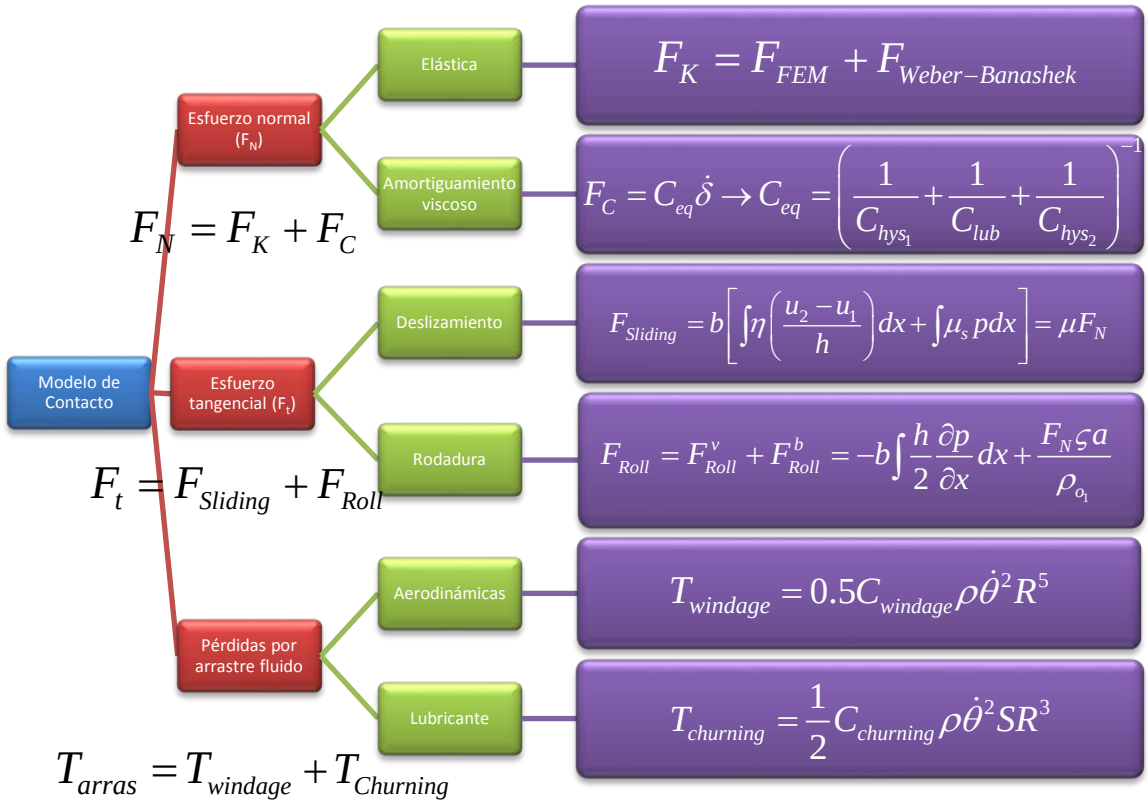


Figura IV-10 Esquema contacto fluido en régimen elastohidrodinámico

Una vez expuesto el resumen de los modelos propuestos para considerar cada uno de los fenómenos disipativos presentes en una transmisión por engranajes, se quiere reseñar que, a partir de este capítulo, el trabajo se va a centrar en uno de ellos, ***la fricción por deslizamiento***.

Una doble motivación conduce a ello:

- Se constató que las pérdidas de fricción por deslizamiento, en las condiciones de operación del estudio, suponen más de un 90% de las totales.
- La limitación temporal imposibilita la implementación de todas estas formulaciones propuestas en el modelo de partida. Se plantea, como trabajo futuro, implementar dichos modelos y obtener resultados ligados a la eficiencia, que verifiquen y ratifiquen la premisa de este trabajo.

IV.4. Determinación de la eficiencia del sistema

Además de la robustez, fiabilidad y compacidad, una de las principales características que define una transmisión por engranajes es su alto rendimiento energético, transmitiendo más del 95% de potencia del eje de entrada al de salida. Muy pocos sistemas mecánicos presentan una eficiencia comparable a la de esta transmisión, convirtiéndola en una opción muy interesante desde el punto de vista económico y medioambiental. A lo largo de este capítulo, se han presentado todos los fenómenos disipativos que producen pérdidas energéticas en una transmisión por engranajes de dientes rectos, en presencia de fluido lubricante (no se incluyen rodamientos, juntas y elementos auxiliares).

En esta sección, se expone, inicialmente, una metodología de cálculo de la eficiencia, teniendo en cuenta todos los fenómenos disipativos estudiados. Sin embargo, por el alcance del trabajo, en esta memoria, se mostrarán los resultados de eficiencia teniendo únicamente en cuenta la fricción por deslizamiento, por ser el efecto que más pérdidas genera en las condiciones de operación objeto de estudio. En esta línea, después de la metodología teniendo en cuenta todos los fenómenos disipativos, se detallarán los dos procedimientos para el cálculo de la eficiencia, considerando sólo la fricción por deslizamiento, utilizados en este trabajo.

- Procedimiento basado en formulaciones analíticas
- Procedimiento propuesto incluyendo modelos avanzados de reparto de carga y coeficiente de fricción

IV.4.1. Metodología de cálculo global de eficiencia

La eficiencia mecánica, se puede definir como la relación entre la potencia de salida (P_{out}) y de entrada (P_{in}), siendo la potencia a la salida igual que la de entrada, menos la potencia perdida a lo largo del contacto (P_{loss}).

$$\eta_{ef} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{in} - P_{loss}}{P_{in}} \tag{IV.59}$$

Donde las pérdidas energéticas a lo largo del ciclo de engrane, se obtienen mediante la integración de las pérdidas instantáneas:

$$P_{loss} = \frac{\int_{\theta_A}^{\theta_E} P_{loss,inst}\, d\theta}{\theta_N} \tag{IV.60}$$

Para determinar las pérdidas instantáneas, se realiza la diferencia entre la potencia de entrada y la de salida en cada instante de tiempo (Ecuación (IV.61)):

$$P_{loss,inst} = T_{1,inst}(\theta)\dot{\theta}_{1,inst}(\theta) - T_{2,inst}(\theta)\dot{\theta}_{2,inst}(\theta) \tag{IV.61}$$

Donde $T_{1,inst}(\theta)$ y $T_{2,inst}(\theta)$ son los pares instantáneos de entrada del piñón y salida de la rueda de conducida respectivamente y se calculan a partir de los esfuerzos correspondientes a los fenómenos disipativos, mediante la expresión:

$$T_{j,inst}(\theta) = T_{j,N}^{inst}(\theta) + T_{j,Sliding}^{inst}(\theta) + T_{j,Roll}^{inst}(\theta) + T_{j,Windage}^{inst}(\theta) + T_{j,Churning}^{inst}(\theta) \tag{IV.62}$$

Siendo *j=1, 2* el subíndice que indica el engranaje (1 el piñón y 2 la rueda conducida), $T_{j,N}^{inst}(\theta)$ el par debido a los esfuerzos normales (Ecuaciones (IV.5) y (IV.8)), $T_{j,Sliding}^{inst}(\theta)$ el par debido a los esfuerzos de fricción por deslizamiento (Ecuación (IV.26)), $T_{j,Roll}^{inst}(\theta)$ el par debido a los esfuerzos de fricción por rodadura (Ecuación (IV.41)), $T_{j,Windage}^{inst}(\theta)$ el par debido a los esfuerzos por arrastre de lubricante (Ecuación (IV.43)) y $T_{j,Churning}^{inst}(\theta)$ el par debido a los esfuerzos aerodinámicos (Ecuación (IV.43)).

Se puede observar que, a partir de esta metodología, se podría tener en cuenta todos los fenómenos disipativos para calcular la eficiencia global del sistema o términos individuales. En este trabajo, solamente, se tendrá en cuenta la fricción por deslizamiento. Partiendo de esta

premisa, se desarrolla la metodología de cálculo de la eficiencia, a partir de esta consideración.

IV.4.2. Metodología de cálculo de eficiencia teniendo en cuenta la fricción por deslizamiento

El cálculo de la eficiencia, considerando la fricción por deslizamiento, también parte de la definición de la eficiencia mecánica. En este caso, como se utiliza un modelo de Coulomb para calcular las fuerzas de fricción por deslizamiento, las pérdidas instantáneas se pueden definir como:

$$P_{loss,inst} = F_{Sliding}(\theta) V_{Sliding}(\theta) = \mu(\theta) F_N(\theta) V_{Sliding}(\theta) \tag{IV.63}$$

A partir de las pérdidas instantáneas, se definen las correspondientes al ciclo de engrane, integrándolas desde el inicio (θ_A) hasta el final del contacto (θ_E).

$$P_{loss} = \int_{\theta_A}^{\theta_E} P_{loss,inst}\, d\theta = \frac{F_{tmax}}{\cos(\varphi_i)} \frac{V_{t_{pitch}}}{\theta_N} \int_{\theta_A}^{\theta_E} \frac{\mu(\theta) F_N(\theta) V_{Sliding}(\theta)}{F_{Nmax} V_{t_{pitch}}} d\theta \tag{IV.64}$$

Donde F_{Nmax} es la fuerza máxima de contacto, F_{tmax} la fuerza tangencial máxima, V la velocidad en el punto primitivo y φ_i el ángulo de presión.

Para analizar el valor de eficiencia, se define un parámetro adimensional denominado factor de pérdidas instantáneas. Está compuesto por todos los factores que están dentro de la integral (Ecuación (IV.65)). El objetivo de definir este parámetro es identificar cuál es el impacto de cada factor sobre las pérdidas energéticas.

$$H_{vinst}(\theta) = \frac{\mu(\theta) F_N(\theta) V_{Sliding}(\theta)}{F_{Nmax} V_{t_{pitch}}} \tag{IV.65}$$

Fusionando las ecuaciones (IV.64) y (IV.65), se determinan las pérdidas energéticas, como la integral del factor de pérdidas instantáneas a lo largo del ciclo de engrane, multiplicado por un factor de escala (potencia de entrada).

$$P_{loss} = \frac{F_{tmax}}{\cos(\varphi_i)} \frac{V_{t_{pitch}}}{\theta_N} \int_{\theta_A}^{\theta_E} H_{vinst}(\theta)\, d\theta \tag{IV.66}$$

Como se puede extraer de la ecuación de las pérdidas por ciclo, son tres factores los que influyen en este valor: i) el coeficiente de fricción ($\mu(\theta)$); ii) la velocidad de deslizamiento ($V_{Sliding}(\theta)$); y iii) la fuerza normal aplicada en el diente ($F_N(\theta)$), o analizándolo más en detalle, las pérdidas dependen del factor de velocidad de deslizamiento ($V_{Sliding}(\theta)/V_{t_{pitch}}$), del reparto de carga ($F_N(\theta)/F_{Nmax}$) y del coeficiente de fricción. Donde $F_{Nmax} = T_G/\rho_{0_2}$, siendo T_G el par resistivo aplicado a la rueda conducida.

IV.4.1.1. Procedimiento basado en formulaciones analíticas

El procedimiento de cálculo de la eficiencia, utilizando formulaciones analíticas de reparto de carga y coeficiente de fricción, se basa en el propuesto por Höhn [2009]. Para el desarrollo de

este procedimiento, se parte de los fundamentos previamente expuestos en esta sección IV.4.2.

Para calcular las pérdidas se introducen ***dos aproximaciones*** a la ecuación (IV.66):

La ***primera aproximación*** consiste en utilizar un coeficiente de fricción medio a lo largo de todo el ciclo. Las pérdidas energéticas quedan expresadas como:

$$P_{loss} = \mu_m \frac{F_{tmax}}{\cos(\varphi_i)} \frac{V}{\theta_N} \int_{\theta_A}^{\theta_E} \frac{F_N(\theta) V_{Sliding}(\theta)}{F_{Nmax} V_{t_{pitch}}} d\theta \qquad \text{(IV.67)}$$

Definiendo el factor de pérdidas como:

$$H_v = \frac{1}{\cos(\varphi_i)\theta_N} \int_{\theta_A}^{\theta_E} \frac{F_N(\theta) V_{Sliding}(\theta)}{F_{Nmax} V_{t_{pitch}}} d\theta \qquad \text{(IV.68)}$$

Y reordenando la ecuación (IV.67) correspondiente a las pérdidas energéticas, quedan expresadas:

$$P_{loss} = \mu_m F_{tmax} V H_v = P_{in} \mu_m H_v \qquad \text{(IV.69)}$$

Concretamente, la formulación de coeficiente de fricción, que se utilizará en este trabajo, es la de Niemann (constante a lo largo del ciclo de engrane), la cual se presentó previamente en la ecuación (IV.22) y se muestra gráficamente en la Figura IV-11.

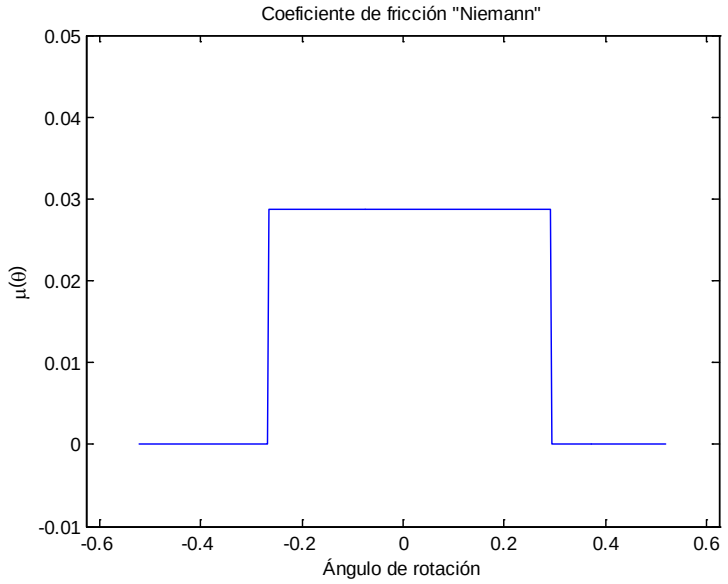


Figura IV-11 Representación del coeficiente de fricción de Niemann

La ***segunda aproximación*** consiste en utilizar el reparto de carga uniforme, el cual se utiliza entre otros por la norma ISO/TC-60 y se muestra en la Figura IV-12.

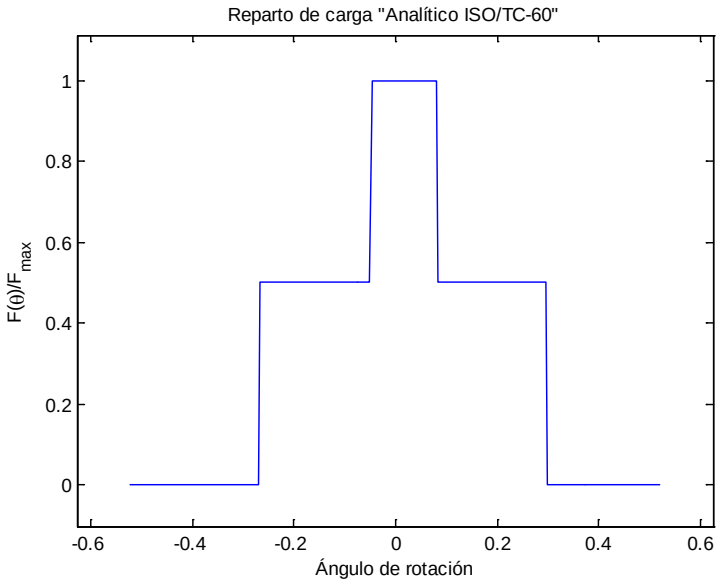


Figura IV-12 Representación del reparto de carga "Analítico ISO/TC-60"

En el apartado de resultados, al reparto de carga calculado de esta manera se denomina "analítico ISO/TC-60".

A partir de introducir el reparto de carga analítico ISO/TC-60 y sabiendo que el factor de velocidad de deslizamiento se puede expresar a partir de la distancia al punto primitivo, el factor de pérdidas se reduce a:

$$H_v = \frac{\pi(i+1)}{z_1 i}(1-\varepsilon_\alpha+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2) \qquad \text{(IV.70)}$$

Donde el factor de pérdidas (H_v) depende de la relación de transmisión (i), de la relación de contacto (ε_α) y de las relaciones de contacto del segmento de aproximación (ε_1) y alejamiento (ε_2).

Sustituyendo la ecuación de las pérdidas por ciclo de engrane (Ecuación (IV.69)), en la correspondiente a la eficiencia (Ecuación (IV.59)), se obtiene la expresión que relaciona el rendimiento del sistema con el factor de pérdidas y el coeficiente de fricción medio:

$$\eta_{ef} = \frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{P_{in}-P_{loss}}{P_{in}} = \frac{P_{in}-P_{in}\mu_m H_v}{P_{in}} = 1-\mu_m H_v \qquad \text{(IV.71)}$$

IV.4.1.2. Mejora del procedimiento basado en formulaciones analíticas

Con el objetivo de mejorar el procedimiento de cálculo de la eficiencia basado en formulaciones analíticas, presentado en la sección IV.4.1.1, se incorpora un reparto de carga más preciso y cercano al real, que el utilizado originalmente.

La mejora del procedimiento reside en la inclusión de una formulación genérica de reparto de carga (Figura IV-13), la cual tiene en cuenta la posible variación de la pendiente de la zona de contacto doble (*h*). Como consecuencia de introducir esta formulación de reparto de carga, el coeficiente de pérdidas, H_v, se verá afectado.

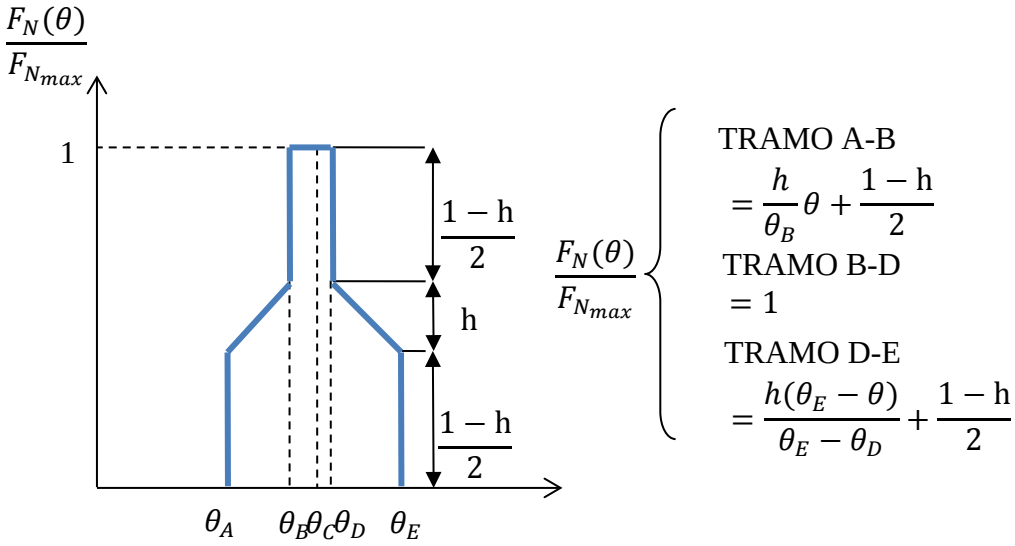


Figura IV-13 Representación y ecuaciones de la formulación de reparto genérico

Donde θ_A se corresponde con la posición de inicio del primer contacto doble, θ_B con la posición final del primer contacto doble e inicio del contacto simple, θ_C es la posición del punto primitivo, θ_D el final del contacto simple e inicio del segundo contacto doble y θ_E el final del segundo contacto doble.

Respecto del reparto de carga uniforme ISO/TC-60 (Figura IV-12), el genérico tiene en cuenta la carga y descarga del diente en las zonas de contacto doble, por lo que, a priori, los resultados de eficiencia, incorporando esta formulación, serán más cercanos al real. Se puede observar que, si *h=0* en la formulación genérica del reparto de carga, se obtiene el reparto de carga uniforme ISO/TC-60 (Figura IV-12).

Una vez definida la mejora, se presenta el desarrollo del procedimiento incluyéndola.

Partiendo de la definición del factor de pérdidas (Ecuación (IV.68)) y transformando el factor de velocidad, como el ángulo desde el punto primitivo a dicho punto, *s(θ)*, por un factor de escala calculado cinemáticamente, el factor de pérdidas queda expresado como:

$$H_v = \frac{i+1}{i}\frac{1}{R_1\cos(\varphi_i)\theta_N}\int_{\theta_A}^{\theta_E}\frac{F_N(\theta)}{F_{Nmax}}s(\theta)\,d\theta \rightarrow \frac{V_s(\theta)}{V_{t_{pitch}}} = \frac{(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)s(\theta)}{\dot{\theta}_1 R_1} = \frac{i+1}{i}\frac{s(\theta)}{R_1} \quad \text{(IV.72)}$$

Se calcula la integral de la ecuación (IV.72) en los diferentes tramos, donde el ángulo *s(θ)* depende de los ángulos correspondientes al primer y segundo tramo del segmento de contacto θ_1 y θ_2, obteniendo la siguiente expresión:

$$\int_{\theta_A}^{\theta_E}\frac{F_N(\theta)}{F_{Nmax}}s(\theta)d\theta=\int_{\theta_A}^{\theta_B}\left[\frac{h\cdot\theta}{\theta_B}+\frac{1-h}{2}\right](\theta_2-\theta)d\theta+$$
$$\int_{\theta_B}^{\theta_C}1\cdot(\theta_2-\theta)d\theta+\int_{\theta_C}^{\theta_D}1\cdot(\theta-\theta_2)d\theta+\int_{\theta_D}^{\theta_E}\left[\frac{h\cdot(\theta_E-\theta)}{(\theta_E-\theta_D)}+\frac{1-h}{2}\right](\theta-\theta_2)d\theta \quad \text{(IV.73)}$$

Realizando las operaciones oportunas de la integral, multiplicando y dividiendo por el segmento equivalente al paso de un diente al cuadrado y sustituyendo en la ecuación del factor de pérdidas (Ecuación (IV.72)), se obtiene:

$$H_v=\frac{i+1}{i}\frac{1}{R_1\cos(\varphi_i)\frac{2\pi R_1\cos(\varphi_i)}{z_1}}\frac{(\pi m\cos(\varphi_i))^2}{(\pi m\cos(\varphi_i))^2}\cdot$$
$$\left[(1+\theta_1^2+\theta_2^2)\left(1-\frac{h}{3}\right)-(\theta_1+\theta_2)\left(1-\frac{2h}{3}\right)-\theta_1\theta_2\frac{2h}{3}\right]= \quad \text{(IV.74)}$$
$$\frac{i+1}{i}\frac{(\pi m\cos(\varphi_i))^2}{R_1\cos(\varphi_i)\frac{2\pi R_1\cos(\varphi_i)}{z_1}}\left[(1+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\left(1-\frac{h}{3}\right)-\varepsilon_\alpha\left(1-\frac{2h}{3}\right)-\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{2h}{3}\right]$$

Despejando, se determina el factor de pérdidas mediante la inclusión del reparto de carga genérico:

$$H_v=\frac{\pi(i+1)}{z_1 i}\left[(1+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2)\left(1-\frac{h}{3}\right)-\varepsilon_\alpha\left(1-\frac{2h}{3}\right)-\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{2h}{3}\right] \quad \text{(IV.75)}$$

En este estudio, el factor de pérdidas se particulariza para tres valores de *h* (*h=0*, *h=1/5* y *h=1/3*). El primer valor corresponde a la formulación de reparto de carga analítico ISO/TC-60, el segundo valor de *h* es el reparto de carga equivalente al que se obtiene con el modelo GEDUC y el último valor de *h* es el que se utiliza en [Pleguezuelos, 2011] y en la norma AGMA. Por claridad, estas formulaciones de reparto de carga son presentadas en la Figura IV-14.

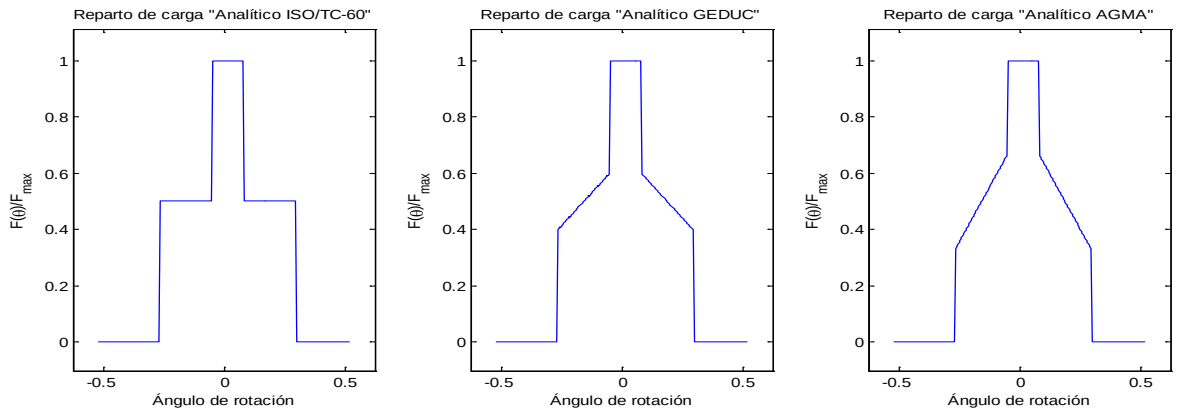


Figura IV-14 Representación de los repartos de carga analíticos utilizados (h=0, h=1/5, h=1/3)

En el apartado de resultados, a los repartos de carga calculados de esta manera se les denomina “analítico GEDUC” y “analítico AGMA”, respectivamente.

Sustituyendo para los valores especificados de *h*, los factores de pérdidas quedan expresados:

$$H_v(h=1/5)=\frac{14}{15}\frac{\pi(i+1)}{z_1 i}\left[\left(1+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)-\varepsilon_\alpha\frac{13}{14}-\frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}{7}\right] \quad \text{(IV.76)}$$

$$H_v(h=1/3)=\frac{8}{9}\frac{\pi(i+1)}{z_1 i}\left[\left(1+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)-\varepsilon_\alpha\frac{7}{8}-\frac{(\varepsilon_1\varepsilon_2)}{4}\right] \quad \text{(IV.77)}$$

IV.4.1.3. Procedimiento propuesto incluyendo modelos avanzados de reparto de carga y coeficiente de fricción

Este procedimiento de cálculo de la eficiencia está basado en la utilización de modelos avanzados de reparto de carga y coeficiente de fricción. Los fundamentos de cálculo de la eficiencia, aplicados a este procedimiento, se han expuesto a lo largo del capítulo, en la secciones IV.4.1 y IV.4.2. En este apartado, se comentarán únicamente las capacidades y las ventajas de utilizar este procedimiento, con respecto a otros modelos más simples:

- Permite la utilización de formulaciones numéricas, tanto de reparto de carga, como de coeficiente de fricción.
- El reparto de carga obtenido, mediante el modelo GEDUC, tiene en cuenta el efecto del par, de las correcciones y de las modificaciones de perfil. Este hecho se ve reflejado en el cálculo de la eficiencia.
- Permite la utilización de formulaciones de coeficiente de fricción variables. Las formulaciones de coeficiente de fricción implementadas, presentan la ventaja de considerar el régimen y condiciones de lubricación.

A modo de conclusión de todo lo anterior, se pretende que los valores obtenidos, a partir de este procedimiento, sean más precisos que los obtenidos a partir de otros basados en formulaciones analíticas.

Para demostrar todo lo expuesto, en el capítulo V se realizará una comparativa entre procedimientos, con la finalidad de correlacionar los resultados. Para ello, será necesario implementar la misma formulación de coeficiente de fricción en ambos procedimientos (formulación de Niemann).

A modo de ejemplo, se muestran los parámetros de los que depende la fricción por deslizamiento, particularizados para el procedimiento propuesto, en concreto, en la Figura IV-15 se muestra el reparto de carga calculado mediante el modelo GEDUC (“avanzado GEDUC”) y los modelos de fricción de Niemann (Ecuación (IV.22)), Castro y Zhu (Ecuación (IV.23)).

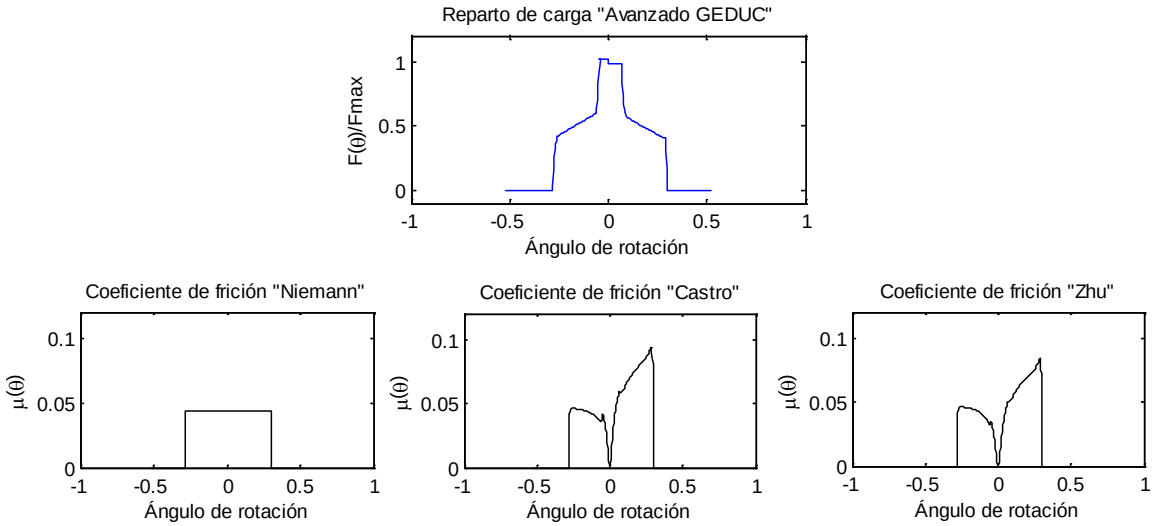


Figura IV-15 Representación del reparto de carga “Avanzado GEDUC” y las formulaciones de coeficiente de fricción de Niemann, Castro y Zhu.

Capítulo V

ANÁLISIS DE LA EFICIENCIA TENIENDO EN CUENTA LA FRICCIÓN POR DESLIZAMIENTO

V.1. Introducción

En este capítulo se presenta el estudio de la eficiencia de una transmisión de engranajes cilíndricos rectos con dientes estándar, con correcciones de tallado y con modificaciones en el perfil del diente. Para el cálculo de la eficiencia, se tiene en cuenta la fricción por deslizamiento como único fenómeno disipativo, por su gran importancia en las condiciones de operación analizadas.

A lo largo de esta memoria, se ha comprobado que la eficiencia, teniendo en cuenta este fenómeno disipativo, depende principalmente de tres factores: la velocidad de deslizamiento, el coeficiente de fricción y el reparto de carga. El primero de estos factores viene impuesto cinemáticamente a partir del conocimiento del punto primitivo. Por esta razón, el análisis de los otros dos parámetros y su impacto en la eficiencia global del sistema es de gran interés y uno de los objetivos de este trabajo de Tesis.

En este capítulo, primeramente, se llevará a cabo el análisis de la eficiencia, cuando se varían las condiciones de operación, de una transmisión con dientes estándar o normalizados. Para ello, se implementarán dos procedimientos de cálculo de la eficiencia, uno basado en formulaciones avanzadas de reparto de carga y coeficiente de fricción y otro en formulaciones analíticas.

En la primera etapa del análisis, se estudiará el efecto del reparto de carga en la eficiencia mediante la inclusión de cuatro formulaciones, una numérica (avanzado GEDUC), aplicada al *procedimiento avanzado,* y tres analíticas, incorporadas al otro procedimiento. El coeficiente de fricción utilizado, en esta primera etapa, es constante, la finalidad es analizar el efecto del reparto de carga aisladamente. El reparto de carga "avanzado GEDUC", que tiene en cuenta las deformaciones producidas en dientes adyacentes, es fuertemente dependiente del par resistivo aplicado a la trasmisión. Por ello, utilizar este modelo avanzado permite, a priori, obtener un valor de eficiencia más preciso que el obtenido mediante otros procedimientos, basados en modelos analíticos.

En la segunda etapa del análisis se incorpora el efecto del coeficiente de fricción, mediante la implementación de formulaciones variables, basadas en teorías avanzadas de contacto mecánico (hertzianas y de lubricación), conocidas como híbridas. Estas formulaciones dependen, generalmente, de parámetros geométricos, de la velocidad de deslizamiento entre perfiles, de parámetros reológicos del fluido, de la rugosidad de los perfiles y de la fuerza de contacto entre ambos perfiles. Por esta razón, la utilización de un reparto de carga avanzado, además de incidir directamente en la eficiencia, influye en el cálculo del coeficiente de fricción.

Este análisis, además, se aplica a transmisiones con correcciones de tallado y con rebajes en la punta del diente. El objetivo es estudiar el efecto de estas modificaciones del perfil del diente, cuando se varían las condiciones de operación, en el reparto de carga y en el coeficiente de fricción y, por tanto, en la eficiencia. Para evaluar el efecto, tanto del reparto de carga como del coeficiente de fricción, se sigue la misma metodología que para el caso de dientes estándar, mediante dos fases. Se comienza con la evaluación del reparto de carga, incorporando dificultad al análisis a partir de la inclusión de coeficientes de fricción variables.

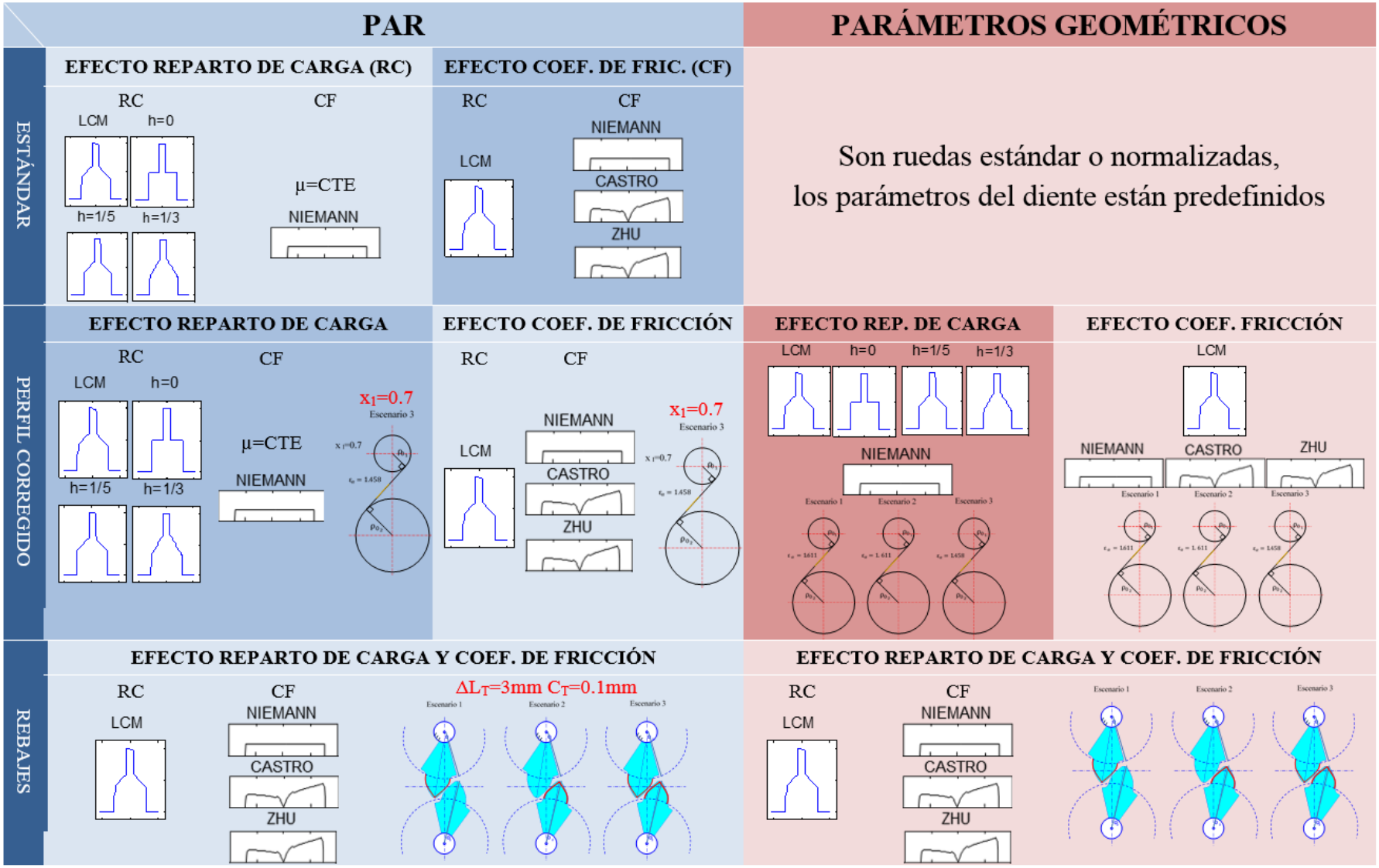
Asimismo, se analiza, en la eficiencia, la variación de los parámetros que determinan las modificaciones de los perfiles antes expuestos, es decir, tanto de la corrección de tallado, como de la longitud y magnitud del rebaje. Para ello, se plantean tres escenarios en cada tipología de diente.

En el caso de las ruedas corregidas, se incorporan diferentes factores de corrección; cuando la longitud y localización del contacto es constante, cuando se modifica la localización del contacto pero su longitud es invariable y cuando se varían ambos.

En el caso de rebajes en la punta del diente, se introducen diferentes longitudes y magnitudes del rebaje en tres supuestos; cuando se incluyen los rebajes en el piñón, cuando se introducen en la rueda conducida y cuando se implementan en ambos engranajes a la vez.

Con el objetivo de clarificar los estudios realizados, se muestra, en el siguiente esquema, el resumen de cada uno de ellos.

Tabla V-1 Resumen gráfico de los estudios realizados.



V.2. Estudio de la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos estándar

En este primer estudio, se muestra el análisis de la eficiencia en una transmisión de engranajes rectos estándar con las características geométricas y de fabricación especificadas en la Tabla V-2.

Tabla V-2 Parámetros geométricos de la transmisión objeto de estudio.

Parámetros geométricos			
Número de dientes del piñón	18	Módulo	3
Número de dientes de la rueda conducida	36	Anchura del engranaje	26.7 mm
Ángulo de presión	20º	Rugosidad media	0.8 μm

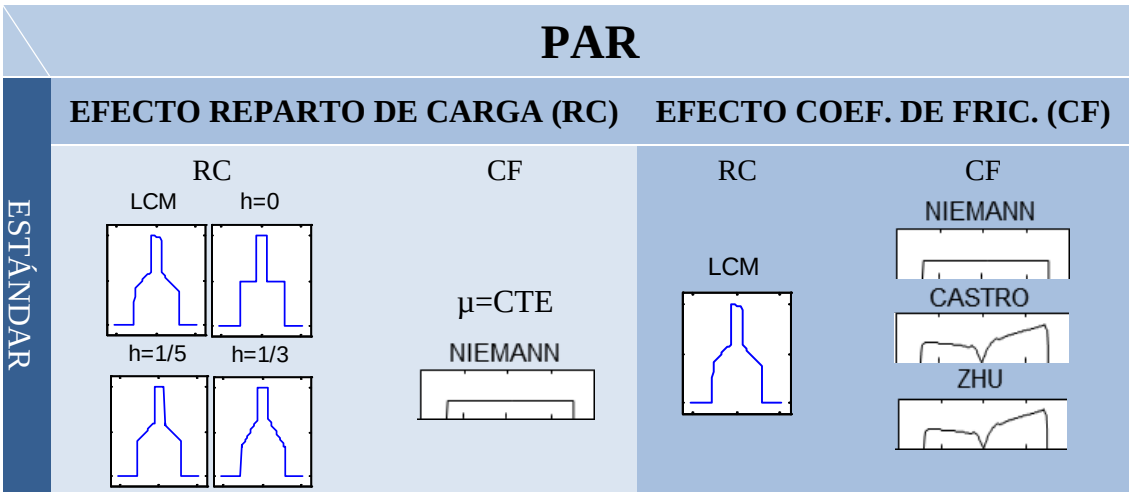
En este análisis se pretende evaluar el efecto del reparto de carga y el del coeficiente de fricción, cuando se varía el par resistivo y se mantiene constante la velocidad de rotación (3000 rpm), en la eficiencia del sistema.

Para analizar el efecto del reparto de carga, se implementa una formulación de coeficiente de fricción constante a lo largo de todo el ciclo de engrane (formulación de Niemann) y cuatro formulaciones de reparto de carga, una numérica, aplicada al *procedimiento avanzado* de cálculo de la eficiencia, y tres analíticas, incorporadas, como su nombre indica, al *procedimiento analítico*.

Para realizar el análisis del efecto del coeficiente de fricción en la eficiencia, se utilizan tres formulaciones, una constante (Niemann) y dos variables a lo largo del ciclo de engrane (Castro y Zhu). Se utiliza el *procedimiento avanzado* de cálculo de la eficiencia porque el *analítico* no permite la incorporación de formulaciones variables. Por tanto, el reparto de carga es el proporcionado por el modelo GEDUC (denominado “avanzado GEDUC”).

En la Tabla V-3 se resume el planteamiento de este análisis.

Tabla V-3 Resumen del análisis del par en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos estándar.



V.2.1. Efecto del reparto de carga

Previamente a presentar el análisis de la eficiencia, se muestra la nomenclatura específica para referirse a las diferentes regiones de contacto (Figura V-1).

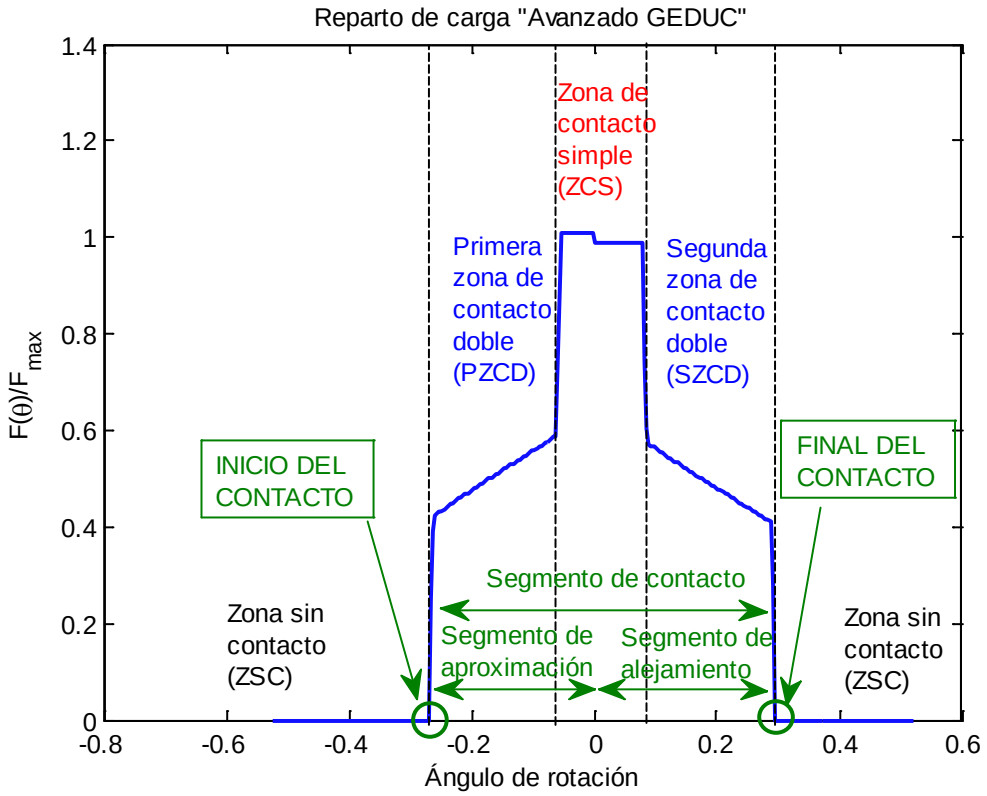


Figura V-1 Reparto de carga "Avanzado GEDUC" mostrando las diferentes zonas de contacto.

En la Figura V-1 se muestra el ciclo de engrane de un diente, reflejado en el reparto de carga. Este ciclo toma como referencia la posición del punto primitivo, cuyo ángulo de rotación es nulo. El ciclo de engrane empieza en posiciones angulares negativas (a la izquierda del punto primitivo) y termina en posiciones positivas (a la derecha de punto primitivo). Inicialmente, existe una zona en donde no existe contacto y, por tanto, el reparto de carga es nulo. En el instante en el que el diente empieza a engranar, existe otro diente en contacto, por lo que ambos transmiten la carga, denominando a esta región "*la primera zona de contacto doble (PZCD)*". Cuando el diente que estaba engranado pierde contacto, empieza la denominada "*zona de contacto simple (ZCS)*", donde el diente analizado transfiere todo la carga aplicada. Esto sucede hasta que el siguiente diente empieza a contactar, la carga de nuevo es transmitida por dos dientes, y comienza la denominada "*segunda zona de contacto doble (SZCD)*". A partir de este punto, el diente va transmitiendo menos carga, hasta que pierde contacto ("*zona sin contacto (ZSC)*"). Como algo reseñable, se observa que en la zona del punto primitivo existe un escalón, debido al cambio brusco de la velocidad de deslizamiento. Este hecho se abordará en profundidad cuando se analice el efecto del coeficiente de fricción en la sección V.2.2.

En la Figura V-2 se presenta la comparativa entre "*el procedimiento propuesto incluyendo modelos avanzados de reparto de carga y coeficiente de fricción*" y "*el procedimiento basado en formulaciones analíticas*". Para ello, se presentan los parámetros que influyen en las

pérdidas de fricción por deslizamiento, donde la velocidad de deslizamiento se omite por ser un parámetro cinemático que no admite variación.

Al primer procedimiento, de este punto en adelante, se le denomina "***procedimiento avanzado***" y al segundo "***procedimiento analítico***". En la primera columna se presenta el *procedimiento avanzado*, donde se puede observar el reparto de carga "Avanzado GEDUC". En las otras tres columnas, *el procedimiento analítico*, con los tres repartos de carga analíticos, los cuales se corresponden con los valores *h=0*, *h=1/5* y *h=1/3* de la formulación genérica presentada en el capítulo IV. En este capítulo se denominan "Analítico ISO/TC-60", "Analítico GEDUC" y "Analítico AGMA" respectivamente. Se observa que el coeficiente de fricción es constante, calculado a partir de la formulación de Niemann.

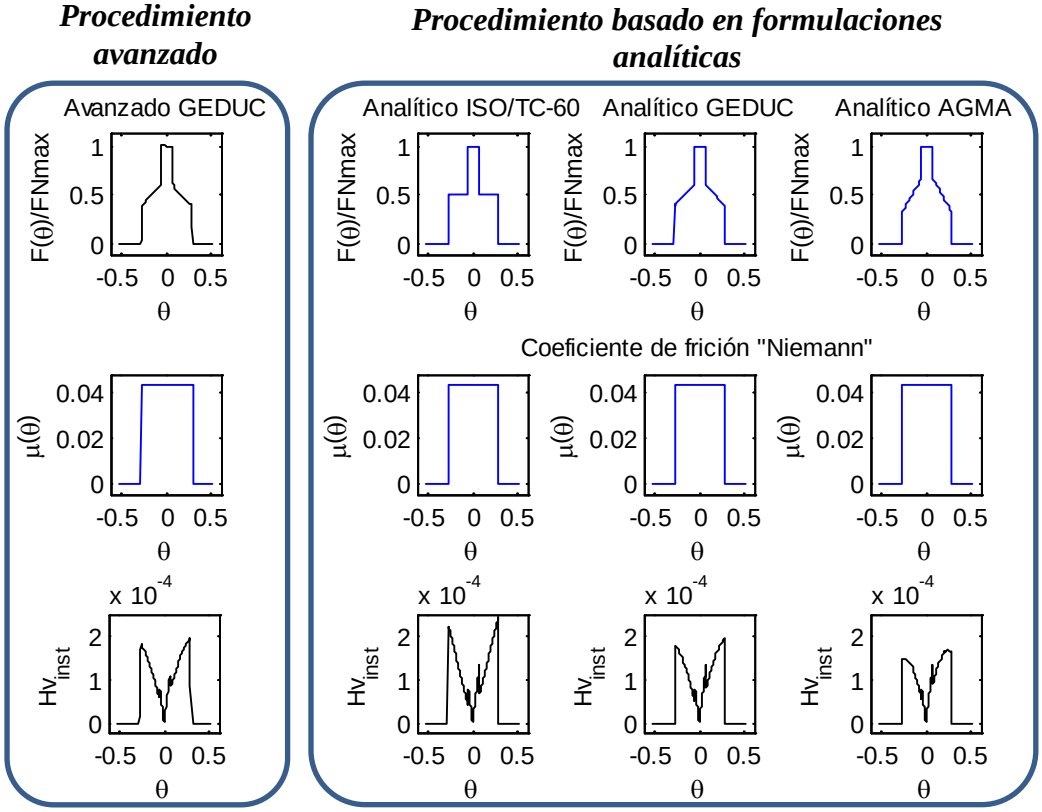


Figura V-2 Comparativa entre ambos procedimientos en una transmisión de engranajes estándar. Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas (159 Nm y 3000 rpm).

El modelo avanzado GEDUC de reparto de carga presenta valores en la zona de contacto doble no uniformes. Esto contrasta enormemente con el reparto de carga ISO/TC-60, que es uniforme en ambas zonas de contacto doble. Por esta razón, la inclusión de una formulación analítica que incluya esta variación puede ser de gran utilidad, en este procedimiento, porque aporta un enfoque más realista. A este respecto, se aprecia que variando el parámetro *h* del reparto de carga, la pendiente de la zona de contacto doble cambia. Esto tiene un efecto directo en las pérdidas instantáneas, particularmente en el inicio y final del contacto, donde la velocidad de deslizamiento es máxima, concretamente, cuanto menor es el parámetro, *h*, mayores son estos valores extremos, produciendo, a su vez, mayores pérdidas. Se concluye que, aplicando el *procedimiento analítico*, el valor más restrictivo de eficiencia corresponde al reparto de carga analítico ISO/TC-60 (*h=0*), seguido del analítico GEDUC (*h=1/5*) y por último el correspondiente al analítico AGMA (*h=1/3*).

Además, se observa que el reparto de carga avanzado GEDUC puede diferir de las formulaciones analíticas por dos razones principales:

i) por la forma del reparto de carga
ii) por la longitud del contacto.

La primera consiste en que el reparto de carga al inicio del primer contacto doble y al final del segundo contacto doble es menor que el analítico ISO/TC-60 (zonas donde la velocidad de deslizamiento es máxima). Si se aislase este fenómeno, la eficiencia del *procedimiento avanzado* sería mayor que la correspondiente al analítico ISO/TC-60, dado que se producirían mayores pérdidas en los extremos en este segundo caso, si tuvieran exactamente la misma longitud de contacto. Con el aumento del parámetro, *h*, en las formulaciones analíticas, este efecto se ve paliado.

La segunda es consecuencia de que el modelo avanzado GEDUC tiene en cuenta la deformación de los dientes adyacentes en contacto y, por tanto, la longitud del contacto en este caso es mayor que en el resto de formulaciones. Si se aislase este fenómeno, la eficiencia en el *procedimiento avanzado* sería menor que en el otro procedimiento.

Una vez planteadas las diferencias entre procedimientos, se procede al análisis de la eficiencia cuando se varía el par resistivo y se mantiene una velocidad angular constante de 3000 rpm (Figura V-3).

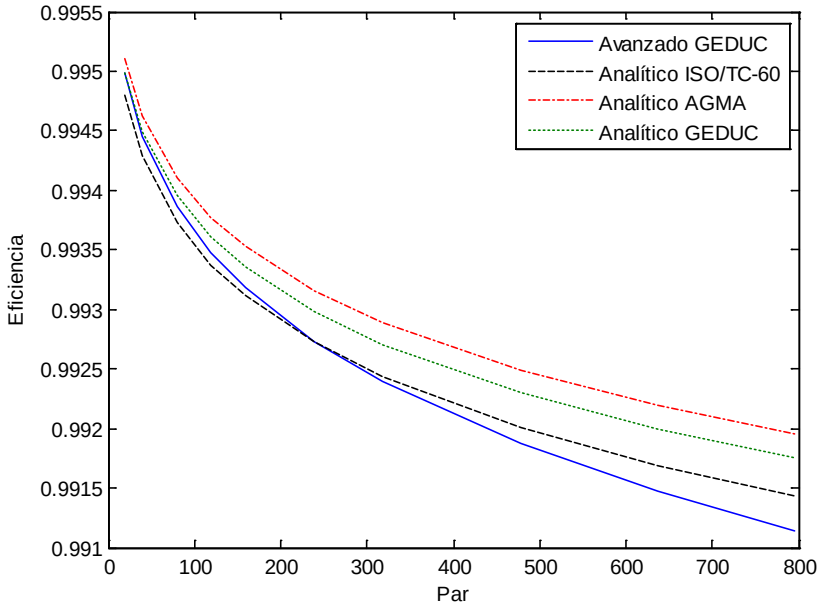


Figura V-3 Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos estándar implementando diferentes formulaciones de reparto de carga y coeficiente de fricción de Niemann.

La tendencia de la eficiencia, con el aumento del par, es reducirse en ambos procedimientos. En el *procedimiento analítico*, las formulaciones de reparto de carga no son dependientes del par aplicado, deduciéndose que la eficiencia es menor por el coeficiente de fricción medio. Mostrar los tres casos analíticos aportaría información redundante. Por esta razón, en los distintos análisis, aunque se presentarán los valores de la eficiencia de las formulaciones analíticas GEDUC y AGMA, solo se realizará el estudio de los parámetros correspondientes al reparto de carga analítico ISO/TC-60, porque aporta el valor de eficiencia menor. Las conclusiones a partir de este reparto de carga son extrapolables al resto de formulaciones analíticas.

Para niveles de par menores de 250 Nm, el *procedimiento avanzado* da valores de eficiencia mayores que el *procedimiento analítico* utilizando la formulación analítica ISO/TC-60, cambiando esta tendencia para niveles de par mayores a 250 Nm. Como el coeficiente de fricción implementado es el mismo en ambos procedimientos, esta tendencia es, por tanto, debida al efecto del reparto de carga en la eficiencia.

Previamente a analizar los factores de los que depende la eficiencia, se muestra la relación de contacto teórica y la efectiva, para los diferentes niveles de par expuestos (Figura V-4). A través de este parámetro se explica, parcialmente, por qué se produce el cambio de tendencia en la comparativa entre valores de eficiencia. Se entiende como relación de contacto efectiva, la relación de contacto en la que se tiene en cuenta otros efectos derivados de la transmisión, además de los meramente teóricos (geometría de ambas ruedas), como son el par y la velocidad de la transmisión.

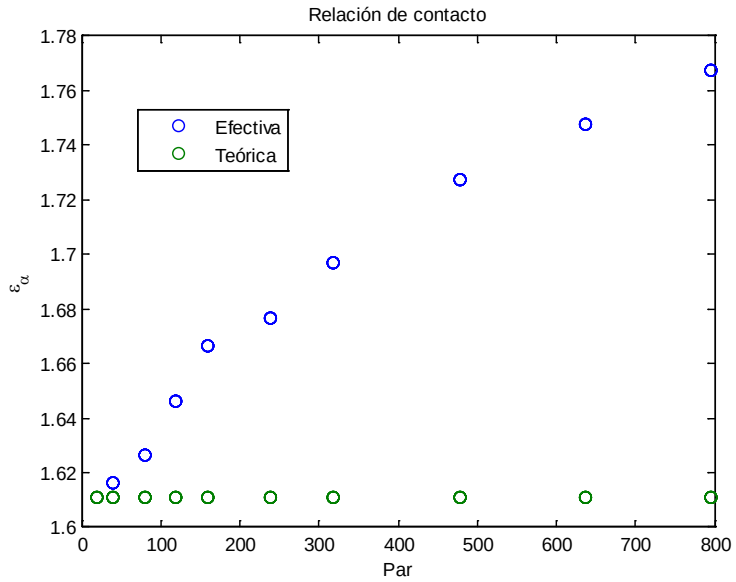


Figura V-4 Relación de contacto teórica y efectiva para diferentes valores de par resistivo.

En la Figura V-4 se observa la diferencia de la longitud de contacto entre procedimientos. Correlacionando la relación de contacto con la eficiencia, cuanto mayor es la relación de contacto efectiva, debida al aumento del par, menor es la eficiencia. Este hecho se ve reflejado en todos los parámetros de los que depende la eficiencia. En las Figura V-5 y Figura V-6 se muestran los repartos de carga y coeficientes de fricción correspondientes a cada uno de los procedimientos y par aplicado, así como su influencia en las pérdidas instantáneas. Por claridad en la comparativa, se superponen todos los casos de estudio.

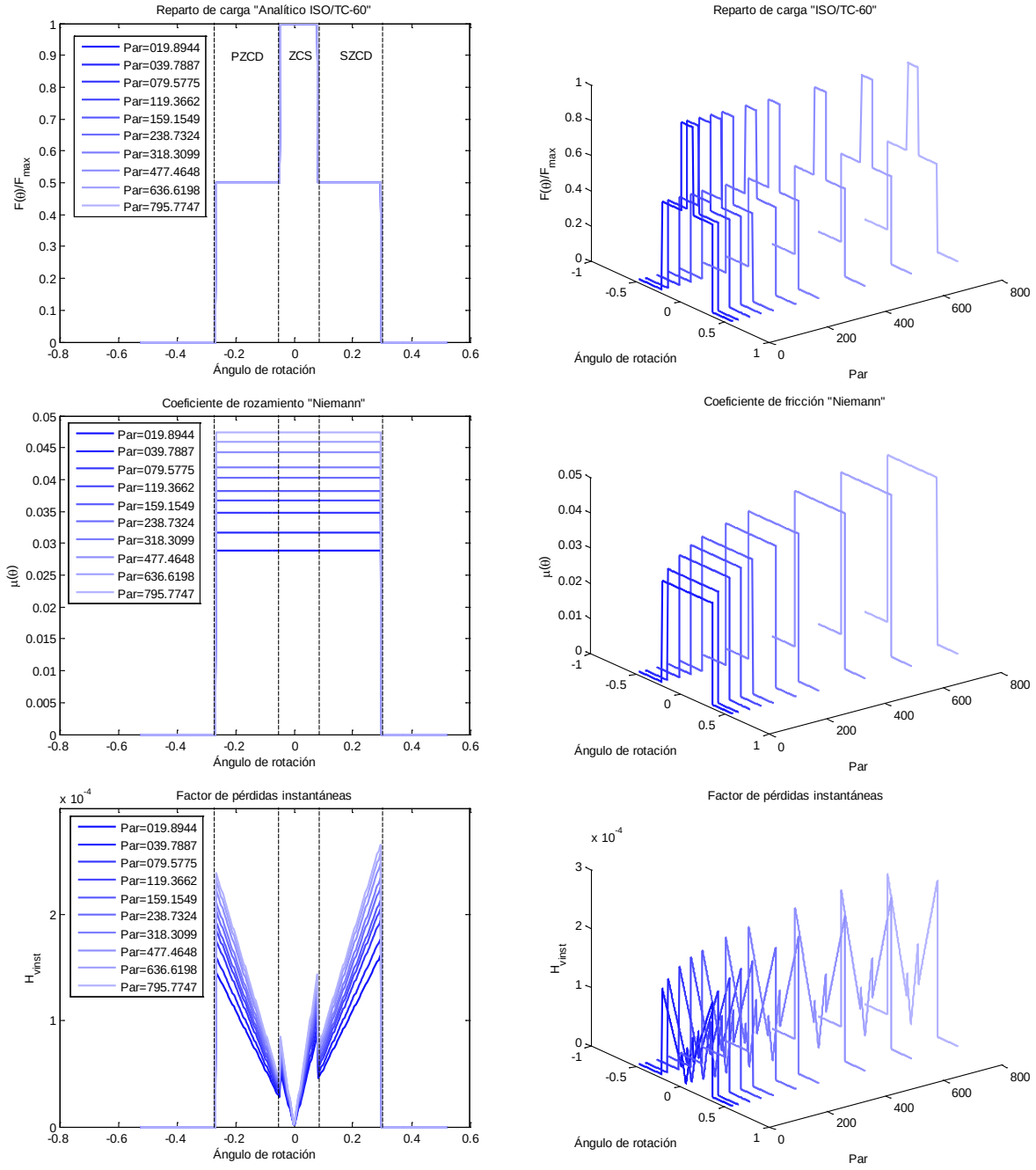


Figura V-5 Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas para el *procedimiento analítico* en las condiciones de operación a estudio.

La Figura V-5 muestra los parámetros de los que depende la eficiencia obtenidos a partir del *procedimiento analítico*. Con el aumento de par aplicado, la relación de contacto teórica no varía y, por tanto, el reparto de carga no se modifica, aunque si lo hace la magnitud del coeficiente de fricción, la cual aumenta. Este efecto tiene un impacto directo en las pérdidas por ciclo, que aumentan también con el par, especialmente en la zona de contacto doble. Este hecho es provocado, principalmente, por el efecto de la velocidad de deslizamiento en los extremos del contacto, la cual es máxima.

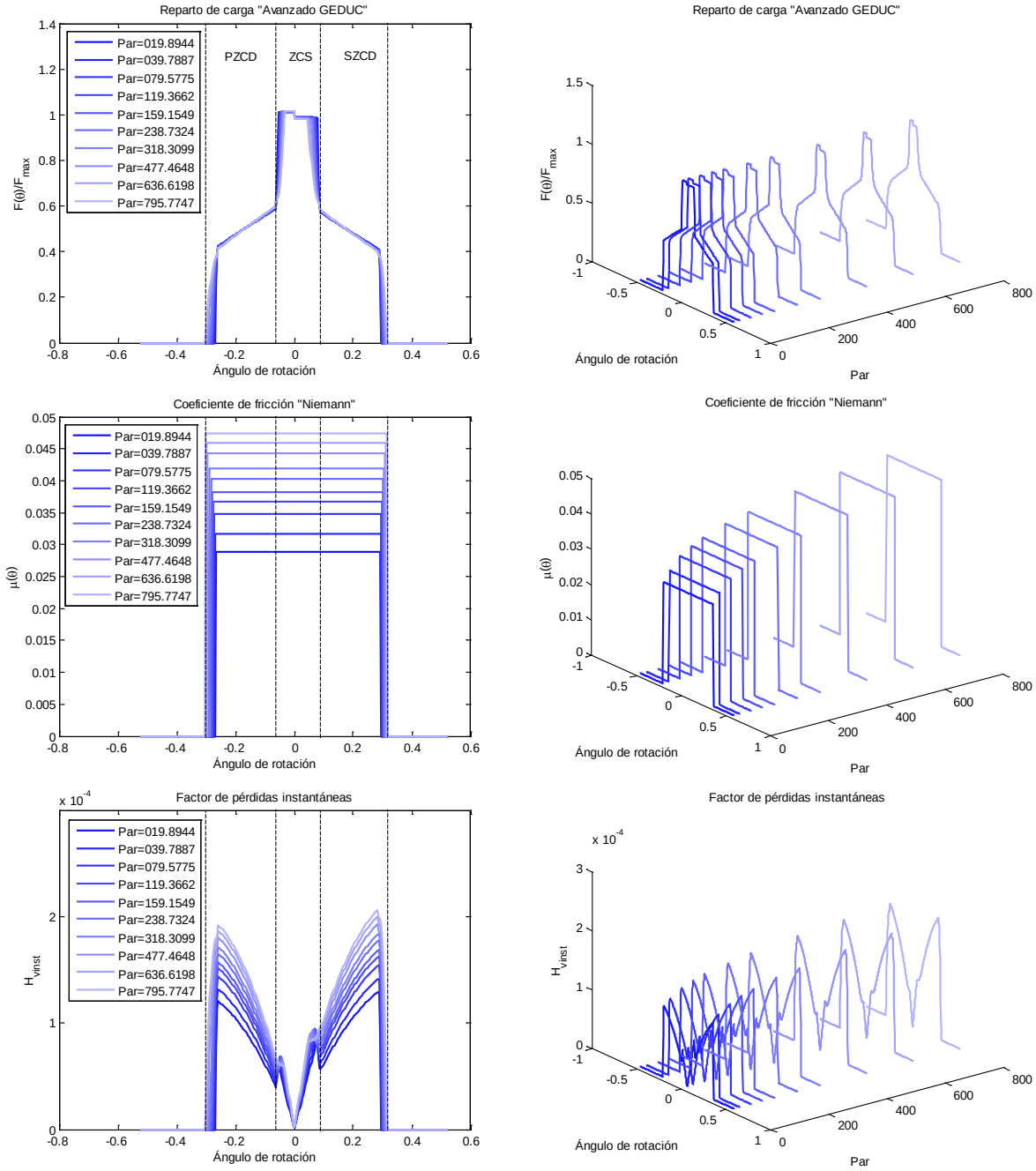


Figura V-6 Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas para el enfoque propuesto en las condiciones de operación a estudio.

La Figura V-6 presenta los parámetros obtenidos a través del *procedimiento avanzado*. La primera diferencia, con el anterior procedimiento, es que con el aumento del par, la relación de contacto si aumenta. Este hecho provoca un contacto más largo, traduciéndose en que el coeficiente de fricción, además de ser mayor en magnitud, también lo es en longitud. Asimismo, el aumento de la longitud del contacto no es simétrico. Al principio del contacto, la longitud de contacto crece más que al final. Se debe principalmente a que la relación de transmisión no es la unidad, en cuyo caso el aumento de la relación de contacto hubiera sido totalmente simétrico.

El efecto del par en los dos parámetros de los que depende la eficiencia, tiene un efecto directo en las pérdidas por ciclo, incrementándolas. Comparando ambos procedimientos, se aprecia que el incremento del par provoca un mayor aumento de pérdidas en el *propuesto* que en el *analítico*.

V.2.2. Efecto del coeficiente de fricción

Para analizar este efecto, de los dos procedimientos de cálculo de la eficiencia, solo el *propuesto* permite implementar coeficientes de fricción variables, por lo que los resultados se limitarán a los de éste. La Figura V-7 presenta el resumen del procedimiento de cálculo de la eficiencia cuando se implementan los tres coeficientes de fricción.

Procedimiento avanzado

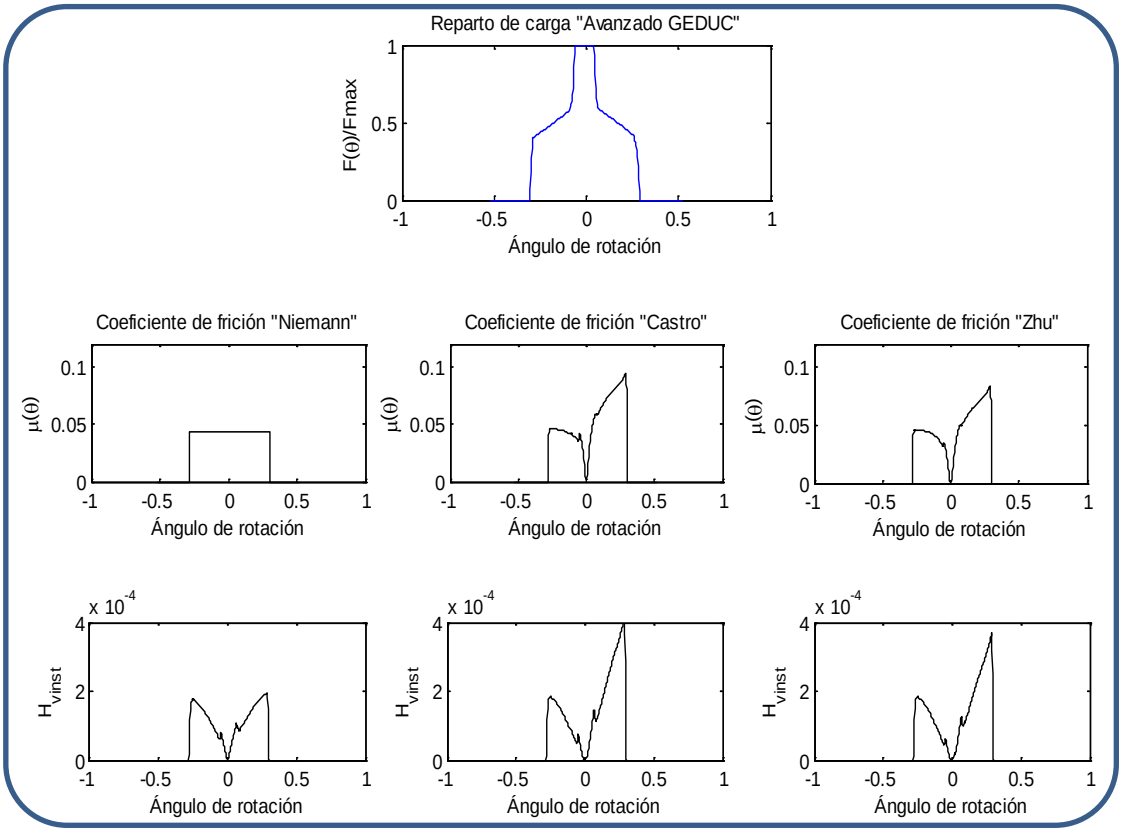


Figura V-7 *Procedimiento avanzado*: Reparto de carga “Avanzado GEDUC”, coeficientes de fricción de “Niemann”, “Castro” y “Zhu” y factor de pérdidas instantáneas (159 Nm y 3000 rpm).

A continuación, se realiza una comparativa entre las formulaciones implementadas en este trabajo, a través de la Figura V-8. En ella se muestran las tres formulaciones de coeficiente de fricción comentadas y la de Hai Xu *et al.* en las mismas condiciones de operación. Ésta última (denominada Hai Xu) se presenta porque es la utilizada para el cálculo de las formulaciones híbridas. Se fundamentó, en el capítulo IV, que esta formulación es válida únicamente en condiciones de lubricación elastohidrodinámica completamente fluidas, percibiendo, a partir de ella, el error que se comete, en el cálculo del coeficiente de rozamiento, al no tener en cuenta el régimen de lubricación del contacto.

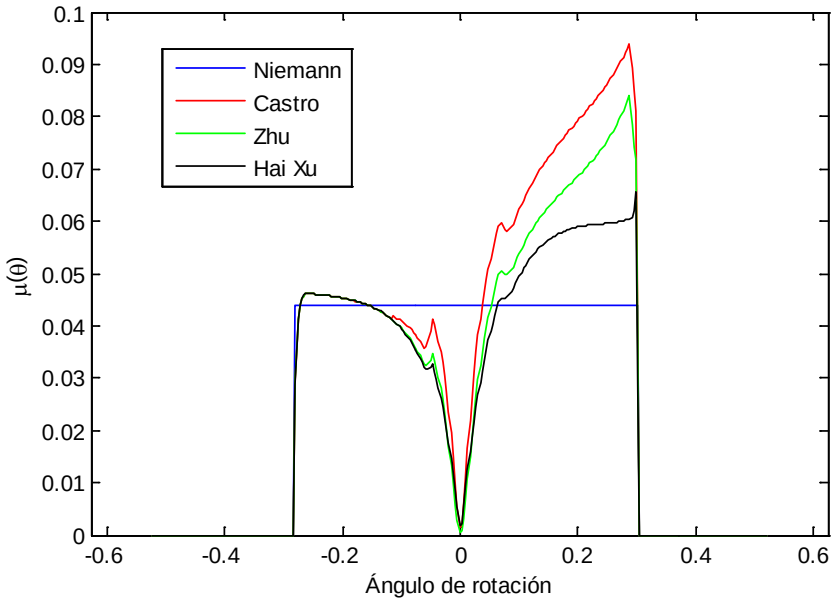


Figura V-8 Coeficientes de fricción de Niemann, Castro, Zhu y Hai Xu con un par resistivo de159 Nm y una velocidad angular de 3000 rpm.

En la Figura V-8 se puede apreciar que, al final del ciclo de engrane, existe una dispersión entre formulaciones híbridas, que no hay al principio del mismo, la cual es resultado de la función de ponderación. En condiciones de lubricación mixtas, extremas o secas, la inclusión de la función de ponderación produce una dispersión no despreciable, respecto al coeficiente de Hai Xu. Además, la función propuesta por Castro aporta valores mayores de coeficiente de fricción que la relativa a Zhu. En consecuencia, esta segunda proporcionará valores de eficiencia mayores.

Además, la inclusión de diferentes formulaciones de coeficiente de fricción tiene un impacto directo en el reparto de carga. En el capítulo III se expuso el procedimiento para el cálculo del reparto de carga a partir del modelo GEDUC. El análisis cuasi-estático consiste en realizar el equilibrio estático del sistema para un numero finito de posiciones del ciclo de engrane. Para realizar este equilibrio, se tienen en cuenta los esfuerzos normales y las fuerzas de fricción por deslizamiento. Como los coeficientes de fricción son diferentes en cada caso de estudio, el reparto de carga de uno a otro enfoque varía ligeramente, como se puede observar en la Figura V-9.

En la Figura V-9 se observa que la diferencia es apreciable en la región de contacto simple. En el supuesto sin fricción, no hay ningún cambio en esta zona porque, solamente, se tienen en cuenta los esfuerzos normales para realizar el equilibrio estático. En el caso en que se implementa la formulación de Niemann, existe un “escalón”, resultado del cambio brusco de sentido de la velocidad de deslizamiento. Sin embargo, en el caso de las formulaciones híbridas, la transición es más suave porque el coeficiente de fricción toma valor nulo en la región del punto primitivo. Se puede creer, que esta diferencia en el reparto de carga, genera una variación en forma y amplitud en el factor de pérdidas instantáneas (factor IPL). Sin embargo, a priori, no afecta en gran medida en las pérdidas en engranajes estándar, al localizarse en la región del punto primitivo, donde la velocidad de deslizamiento es casi nula.

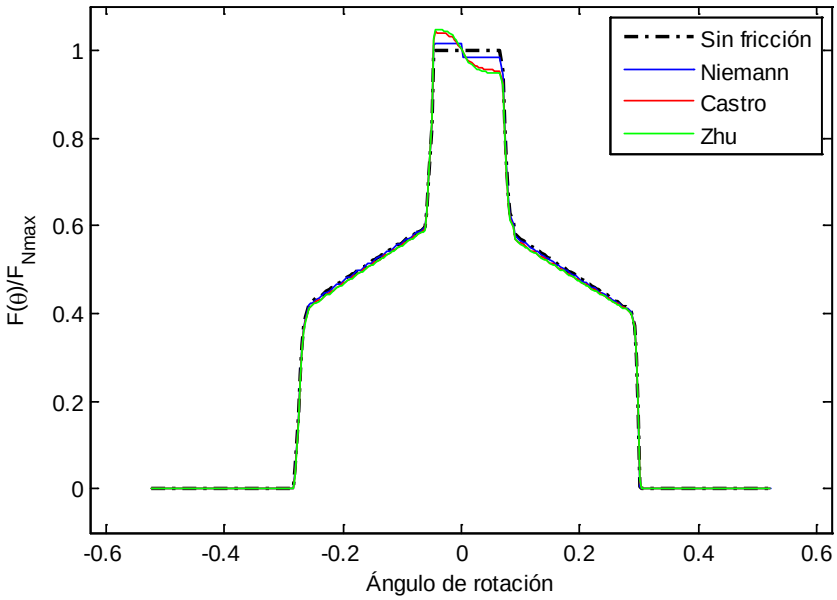


Figura V-9 Reparto de carga "Avanzado GEDUC" cuando se implementan los coeficientes de fricción de "Niemann", "Castro" y "Zhu" con un par resistivo de159 Nm y una velocidad angular de 3000 rpm.

Las formulaciones de coeficiente de rozamiento son dependientes del régimen de lubricación. Por esta razón, previamente a analizar la eficiencia, se considera relevante determinar en qué régimen de lubricación trabaja la transmisión. Para ello se muestra el diagrama de Greenwood (Figura V-10) y la curva de Stribeck (Figura V-11). Con el primero se determina el régimen de lubricación, y si es elastohidrodinámica (premisa del estudio), con la curva de Stribeck, se definen las condiciones de lubricación.

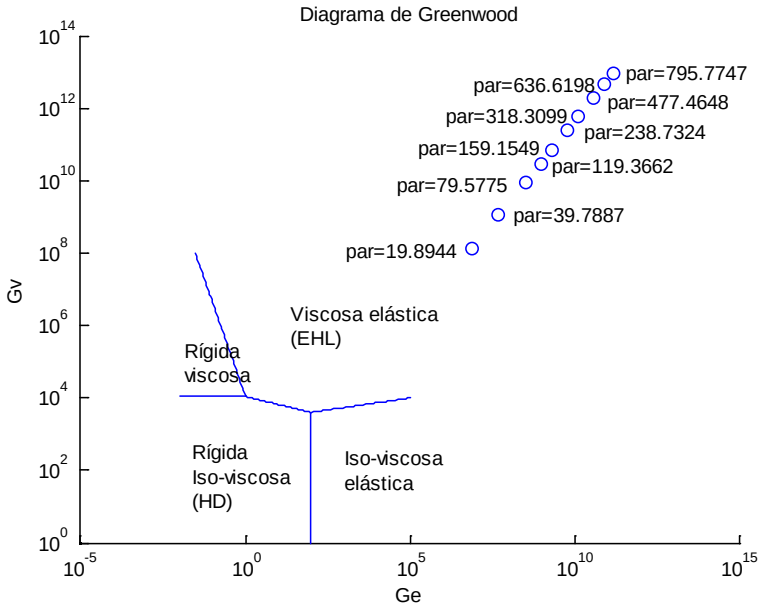


Figura V-10 Diagrama de Greenwood de los regímenes de lubricación correspondientes a las condiciones de operación estudiadas.

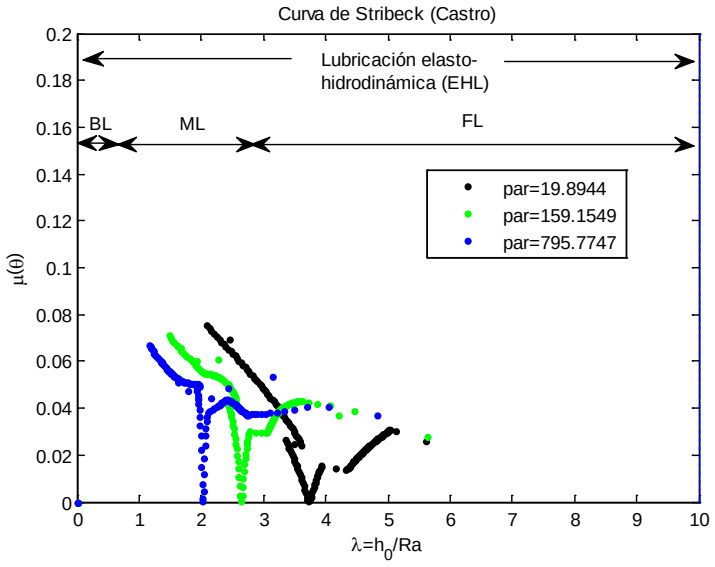


Figura V-11 Curva de Stribeck de los regímenes de lubricación en diferentes condiciones de operación.

Se observa, en la Figura V-10, que, para todos los niveles de par estudiados, el régimen de lubricación es elastohidrodinámico. A partir de la Figura V-11, se aprecia que, para niveles de par menores a 100 Nm, las condiciones de lubricación del contacto son totalmente fluidas, es decir, que hay película de fluido en todos los puntos del contacto ($\lambda>3$). Para niveles de par mayores a 100 Nm, las condiciones de lubricación son mayoritariamente mixtas ($1<\lambda<3$).

Una vez analizado el régimen y condiciones de lubricación del contacto del estudio, se procede al análisis de la eficiencia, cuando se implementan las formulaciones de coeficiente de fricción expuestas. Como estas formulaciones son dependientes de las fuerzas de contacto, este análisis tiene dos objetivos; evaluar el efecto del reparto de carga en el coeficiente de fricción y estudiar el efecto de la utilización de una u otra formulación en la eficiencia.

En la Figura V-12 se muestra la eficiencia de la transmisión, para diferentes niveles de par, cuando se implementan el coeficiente de Niemann y las dos formulaciones híbridas.

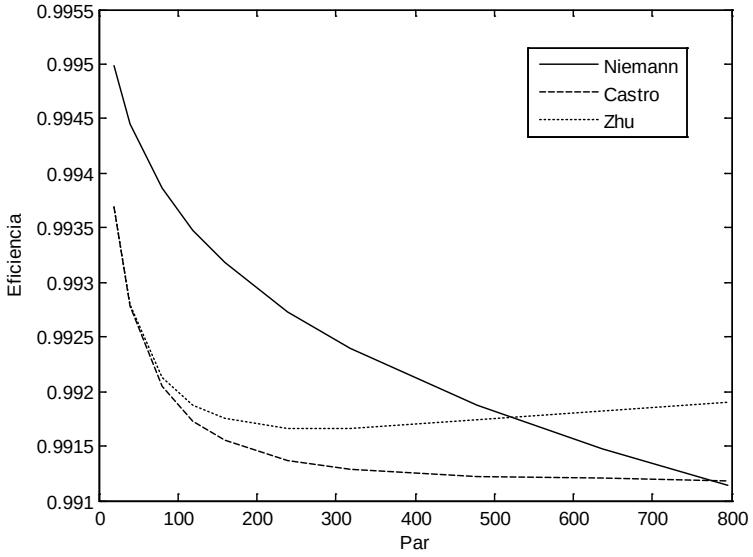


Figura V-12 Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos cuando se implementan los coeficientes de fricción de Niemann, Castro y Zhu.

Hasta este punto del análisis, la tendencia de la eficiencia con el aumento del par era reducirse. Sin embargo, cuando se cambia el coeficiente de fricción, esta tendencia se modifica (Figura V-12). Para valores de par mayores a 100 Nm, la eficiencia, utilizando la formulación de Castro, se mantiene cuasi-constante y, en el caso de la formulación de Zhu, aumenta. Si se compara entre los valores de eficiencia para los tres coeficientes de fricción, con carácter general, los valores obtenidos implementando la formulación de Niemann son los que producen mayor eficiencia, seguidos por los de Zhu y por último los correspondientes a Castro.

Para analizar pormenorizadamente la eficiencia, se estudian los factores de los que depende. Cuando se evalúa la formulación de Niemann, en el *procedimiento avanzado* (analizado en la sección V.2.1), la eficiencia se reduce con el aumento de par, debido principalmente al incremento de la relación de contacto. A continuación se analizará el efecto de implementar las dos formulaciones híbridas, a través de la Figura V-13 (Castro) y Figura V-14 (Zhu).

En la Figura V-13 se muestra el reparto de carga “Avanzado GEDUC”, el coeficiente de fricción y el factor de pérdidas instantáneas cuando se utiliza la formulación de Castro. La magnitud del coeficiente de fricción aumenta, en todas las regiones del contacto, hasta un cierto nivel de par (300 Nm). A partir de éste, el coeficiente de fricción sigue aumentando en la zona de contacto simple, decreciendo en los extremos del contacto. Este hecho es determinante en las pérdidas, dado que en los extremos la velocidad de deslizamiento es máxima y es, por tanto, donde se concentran mayores pérdidas. Sin embargo, la eficiencia es constante con el aumento de par, deduciendo que las pérdidas reducidas en los extremos, son iguales a las generadas en la zona de contacto simple.

En la Figura V-14 se muestran los repartos de carga, coeficientes de fricción y factores de pérdidas instantáneas, cuando se incorpora el coeficiente de fricción de Zhu. La magnitud del coeficiente de fricción sigue la misma tendencia que cuando se implementa la formulación de Castro, aunque más acentuada, porque los valores en los extremos del contacto decrecen en mayor medida a partir de 300 Nm. Este hecho produce que la reducción de pérdidas en los extremos sea mayor al aumento de las generadas en la zona de contacto simple, provocando que la eficiencia aumente con el aumento de par.

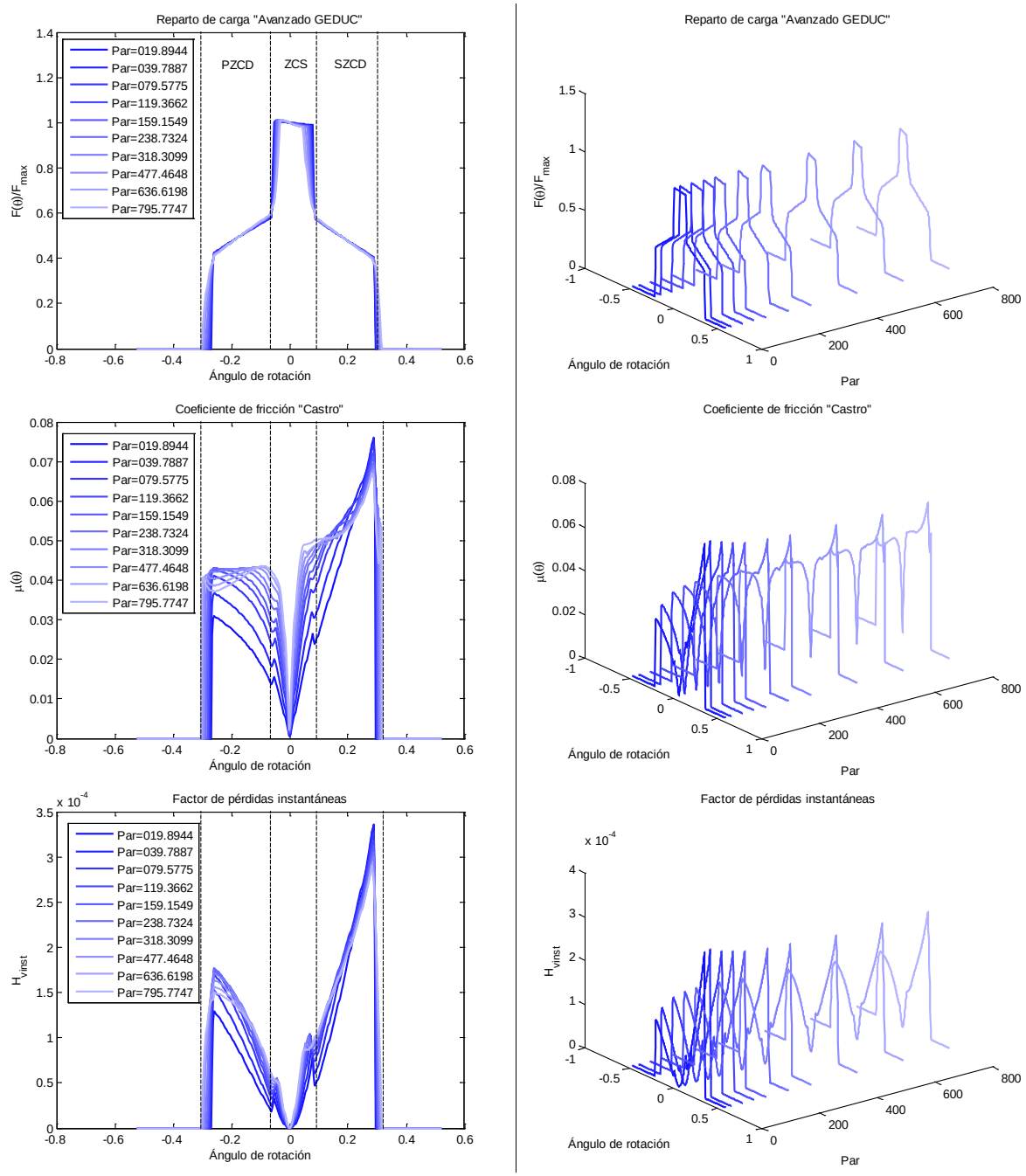


Figura V-13 Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas cuando se implementa el coeficiente de fricción de Castro en las condiciones de operación a estudio.

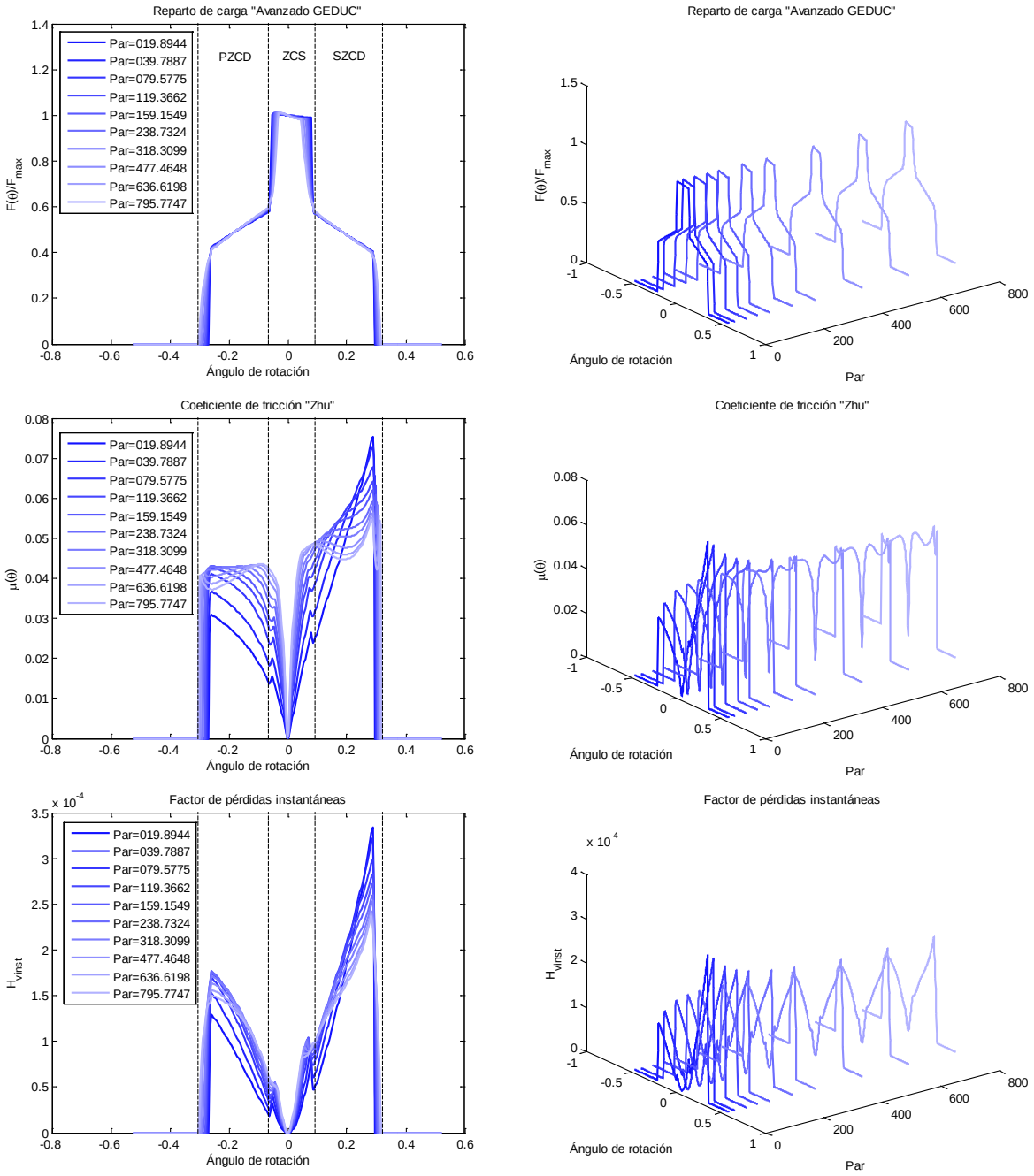


Figura V-14 Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas cuando se implementa el coeficiente de fricción de Zhu en las condiciones de operación a estudio.

V.3. Estudio de la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos corregidos

En este segundo estudio, se muestra el análisis de la eficiencia en una transmisión de engranajes rectos corregidos con las características geométricas y de fabricación especificadas en la Tabla V-4.

Tabla V-4 Parámetros geométricos de la transmisión objeto de estudio

Parámetros geométricos			
Número de dientes del piñón	18	Módulo	3
Número de dientes de la rueda conducida	36	Anchura del engranaje	26.7 mm
Ángulo de presión	20º	Rugosidad media	0.8 μm

Como singularidad con respecto al primer estudio (engranajes estándar), se analiza el efecto de la corrección en los diferentes parámetros de los que depende la eficiencia. Para ello se plantean dos análisis; i) el análisis de la eficiencia de una transmisión corregida específica, cuando se varía el par; y ii) el análisis de la eficiencia de una transmisión cuando se varía el parámetro de la corrección y se mantienen constantes las condiciones de operación.

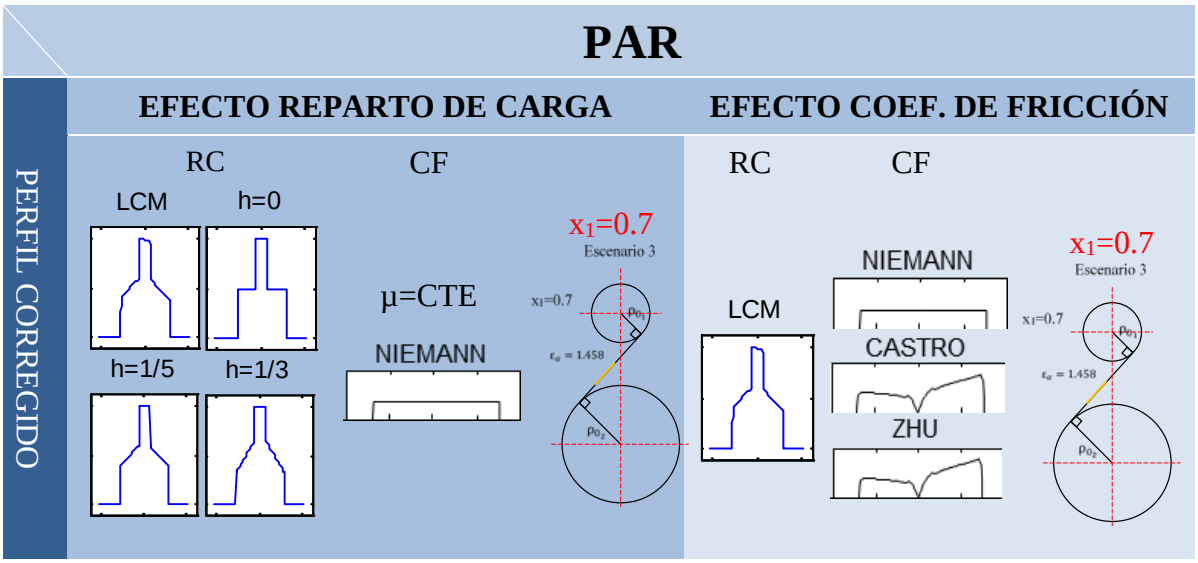
V.3.1. Análisis del par

Este análisis pretende evaluar el efecto del reparto de carga (primera etapa) y el del coeficiente de fricción (segunda etapa), cuando se varía el par resistivo, en la eficiencia del sistema. Para evaluar ambos efectos, se seguirá la misma metodología que en engranajes estándar. En la primera etapa, se implementan las cuatro formulaciones de reparto de carga, una correspondiente al *procedimiento avanzado* y tres al *analítico*, y el coeficiente de fricción de Niemann. En la segunda etapa, se incorporará el efecto del coeficiente de fricción en el *procedimiento avanzado*, mediante las tres formulaciones estudiadas.

La corrección introducida al piñón y a la rueda conducida es la misma pero de sentido contrario. Esto provoca que el grosor de los dientes del piñón sea mayor que el correspondiente al supuesto sin corrección, produciendo el resultado contrario en la rueda conducida. En este análisis, el factor de corrección utilizado es igual a 0.7 que equivale a 2.1 mm de avance o retroceso de la herramienta de corte. Este valor coincide con la corrección máxima utilizada en el segundo análisis, donde se varía el factor de corrección.

En la Tabla V-5 se muestra el planteamiento de este análisis.

Tabla V-5 Resumen del análisis del par en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos estándar



V.3.1.1. Efecto del reparto de carga

En la Figura V-15 se presenta la comparativa entre los parámetros que influyen en las pérdidas de fricción por deslizamiento, para el *procedimiento avanzado* y el *procedimiento analítico.*

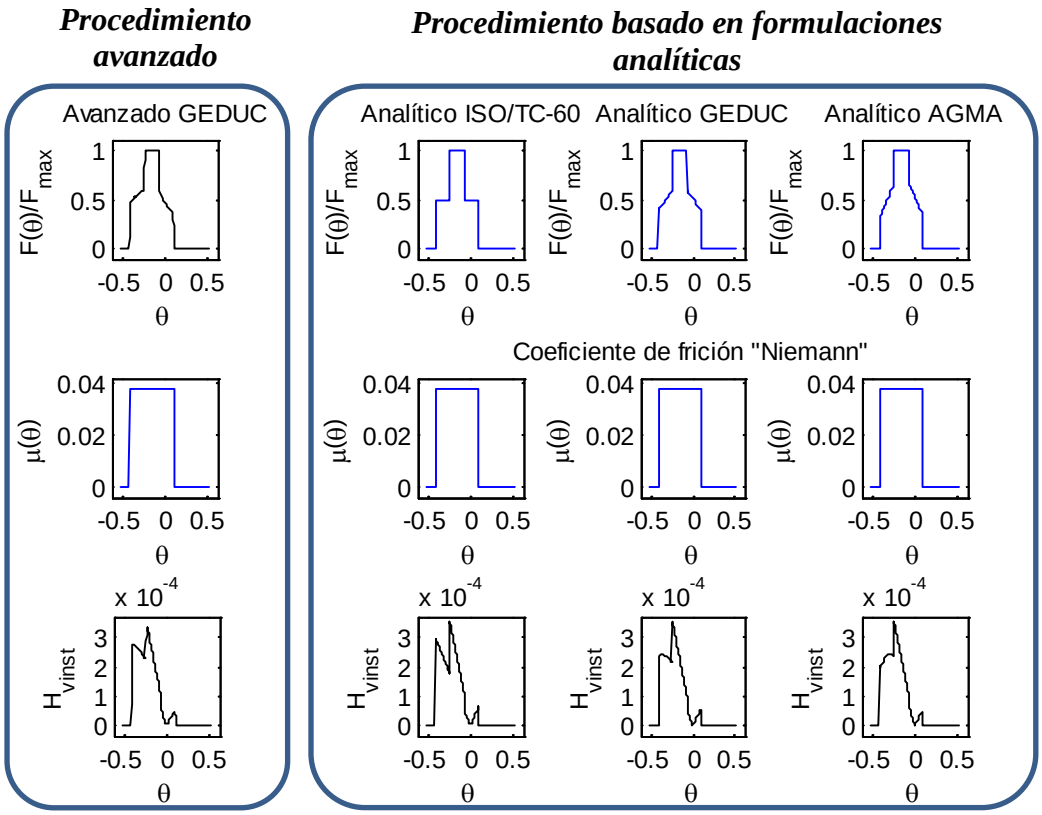


Figura V-15 Comparativa entre ambos procedimientos en una transmisión de engranajes corregidos (x_1=0.7). Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas (159 Nm y 3000rpm).

Con respecto al análisis de engranajes estándar, la región de contacto se desplaza, lo cual produce que las pérdidas antes del punto primitivo se incrementen sustancialmente, mientras que las que tienen lugar después, disminuyan. En las formulaciones analíticas de reparto de carga solo se observa este cambio de localización del contacto, sin embargo, en el modelo avanzado GEDUC, además, se transmite una carga mayor, que en el supuesto sin corrección, en la primera zona de contacto doble (PZCD) y menor en la segunda (SZCD).

Una vez sentadas las diferencias entre procedimientos, considerando las correcciones de tallado, en la Figura V-16 se muestra la eficiencia, cuando se varía el nivel de par resistivo, de esta transmisión de engranajes corregidos.

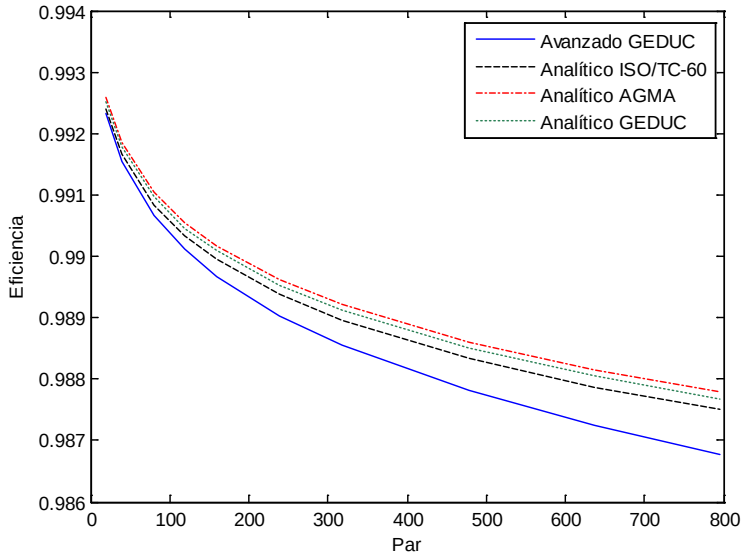


Figura V-16 Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos corregidos implementando diferentes formulaciones de reparto de carga y coeficiente de fricción de Niemann.

La tendencia de la eficiencia de este sistema mecánico, con el aumento del par, es reducirse. La dispersión de la eficiencia, entre ambos procedimientos, es también mayor con el aumento del par aplicado. Si se compara la eficiencia de la transmisión con correcciones, respecto de la correspondiente al supuesto sin correcciones, es menor, para ambos procedimientos. En el *procedimiento analítico*, esto ocurre por el cambio de la localización del contacto con la corrección. En el *procedimiento avanzado*, además del cambio de localización, también influye el efecto del par, el cual produce un aumento de la longitud del contacto. Esto se explica mediante la relación de contacto para las diferentes condiciones de operación mostrada en la Figura V-17.

En la Figura V-17 se observa la diferencia entre relaciones de contacto y, por ende, entre procedimientos. Realizando la correlación con la eficiencia obtenida mediante el *procedimiento avanzado*, se deduce que cuanto mayor es la relación de contacto efectiva, por el aumento del par, menor es la eficiencia. Además, cuanto mayor es el par, mayor es la diferencia entre relaciones de contacto. Esta es la razón por la que aumenta la dispersión entre los valores de eficiencia de los dos procedimientos.

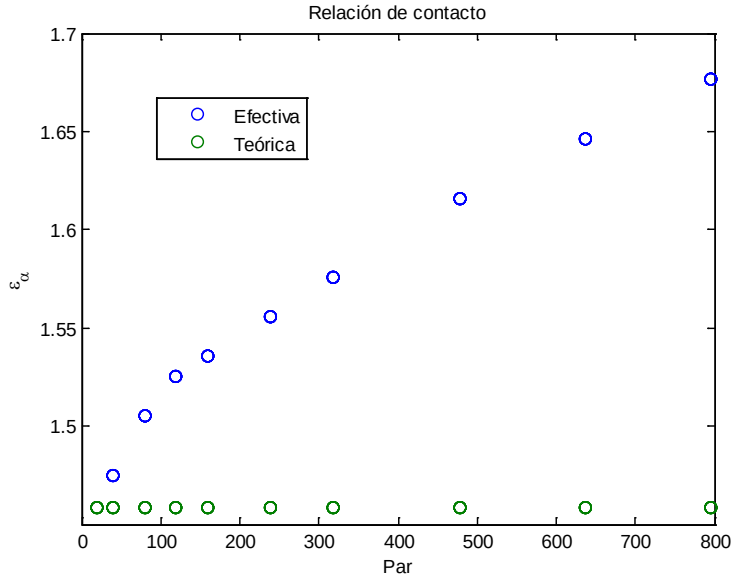


Figura V-17 Relación de contacto teórica y efectiva para diferentes valores de par resistivo.

En las Figura V-18 y Figura V-19 se muestran los repartos de carga, coeficientes de fricción y las pérdidas instantáneas por ciclo correspondientes a cada uno de los procedimientos.

La Figura V-18 presenta los parámetros obtenidos para el *procedimiento analítico*. La única diferencia derivada de la introducción de la corrección del perfil es que el segmento de contacto se desplaza hacia la izquierda, como se había adelantado. Esto provoca que la zona de contacto simple ya no coexista con la región del punto primitivo. Por lo que las pérdidas que se producen en el contacto simple se ven incrementadas.

La Figura V-19 muestra los parámetros obtenidos para el *procedimiento avanzado*. La corrección produce que el engranaje transmita mayor carga en la primera región de contacto doble (PZCD) que en la SZCD. En este caso de corrección, no existe el "escalón" del reparto de carga en la región del contacto simple. Esto se debe a que la ZCS se produce antes del punto primitivo.

El efecto del par produce, al igual que sucedía en el supuesto sin corrección, que la relación de contacto aumente. Sin embargo, la longitud de contacto aumenta más en la zona final del contacto (derecha), que en la inicial (izquierda). En el supuesto sin corrección se observó el resultado contrario, que era debido a que la relación de transmisión es diferente a la unidad. En este caso, la corrección produce que un diente soporte más carga que el otro, lo cual resulta en que el diente más cargado origina una mayor deformación en el menos cargado que a la inversa.

Todo lo expuesto tiene un efecto directo en las pérdidas por ciclo. Comparando con el supuesto sin corrección, hay un aumento de pérdidas en la PZCD y ZCS y una reducción en la SZCD, obteniendo una eficiencia menor. Esto se debe al desplazamiento del segmento de contacto y al aumento del reparto de carga avanzado GEDUC en la SZCD. Además, las pérdidas del *procedimiento avanzado* son mayores que las obtenidas mediante el *analítico*, aumentando la diferencia entre ellos con el incremento de par.

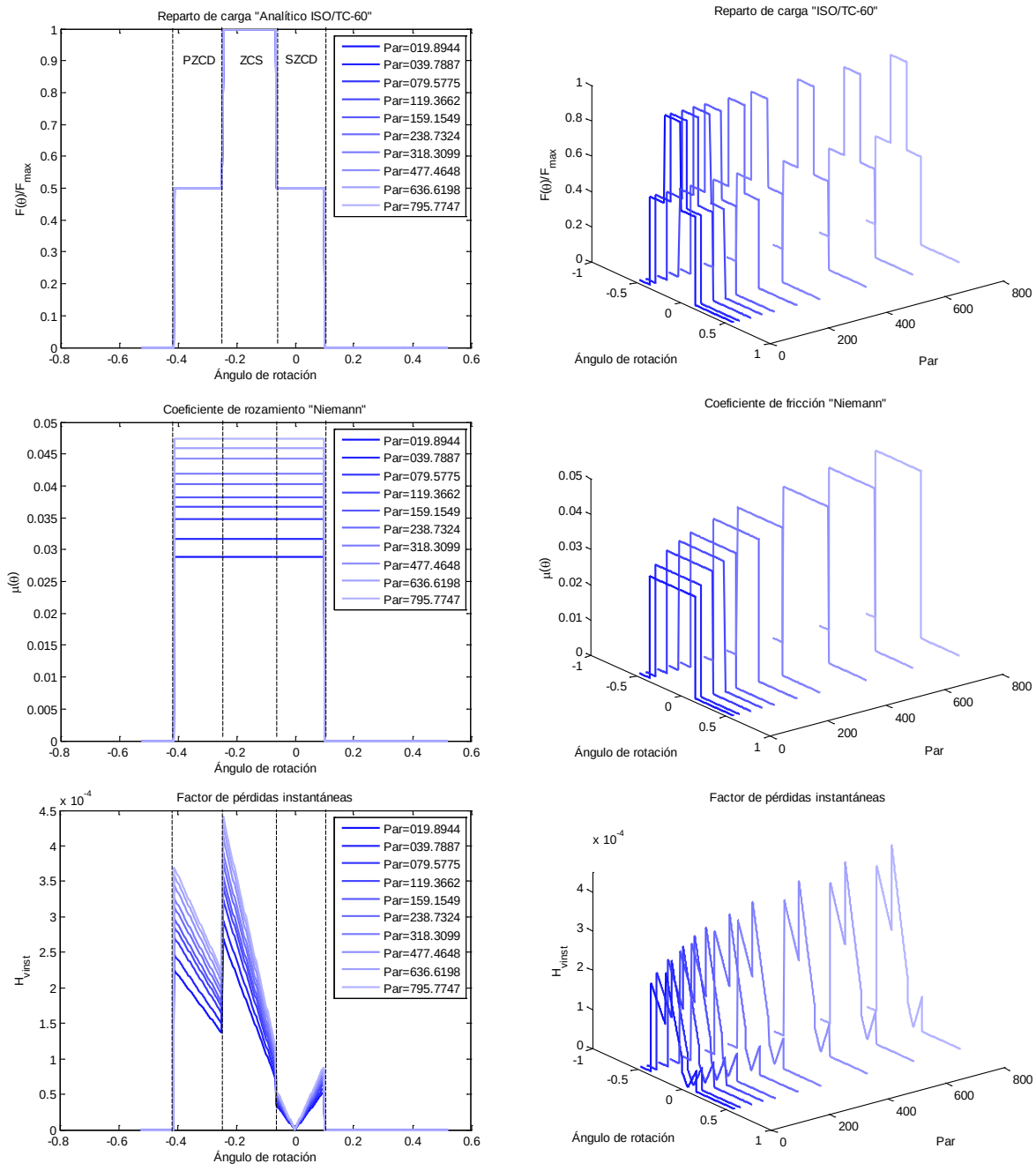


Figura V-18 Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas para el *procedimiento analítico* en las condiciones de operación a estudio.

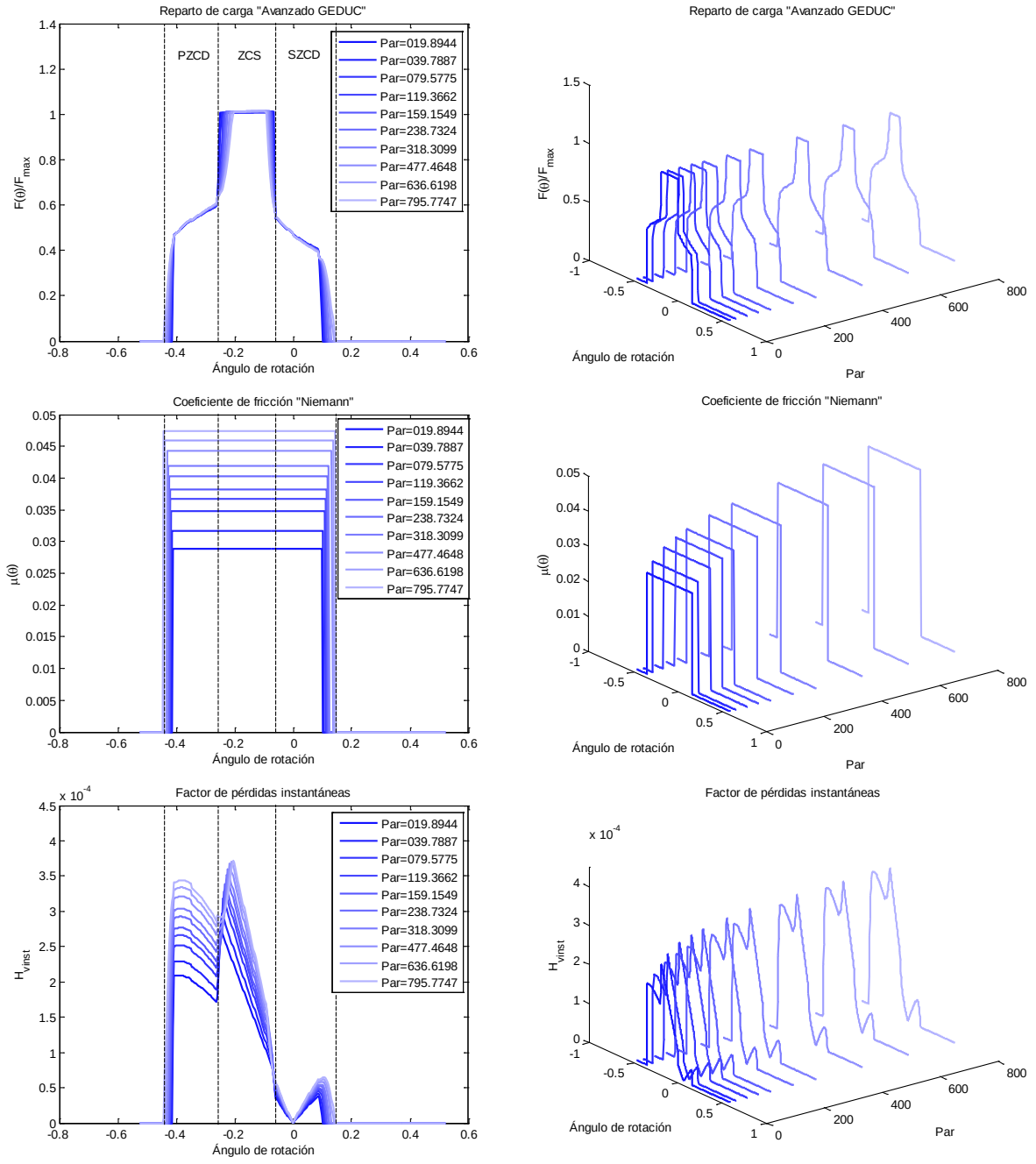


Figura V-19 Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas para el *procedimiento avanzado* en las condiciones de operación a estudio.

V.3.1.2. Efecto del coeficiente de fricción

Para analizar el efecto de utilizar las formulaciones híbridas de coeficiente de fricción, inicialmente, se muestra el régimen de lubricación en el que trabaja la transmisión. En la curva de Stribeck (Figura V-20), se observa que, para pares inferiores a 150 Nm, las condiciones de lubricación son totalmente fluidas, mientras que, para valores superiores a 150 Nm, son mixtas. El parámetro de Stribeck, en todas las condiciones de operación evaluadas, es mayor de 2. Por esta razón, las funciones de ponderación no tienen efecto sobre el coeficiente de rozamiento (toman el valor de la unidad). Como resultado, ambas formulaciones híbridas coinciden con la formulación de Xu *et al.* Por simplicidad sólo se muestran los valores cuando se utiliza la formulación de Castro.

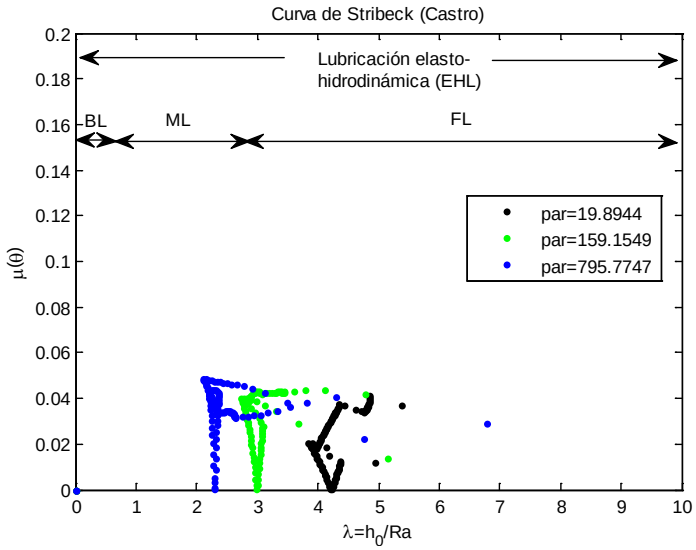


Figura V-20 Curva de Stribeck de los regímenes de lubricación en diferentes condiciones de operación.

En la Figura V-21 se muestra la eficiencia de la transmisión objeto de estudio, para diferentes niveles de par, cuando se implementan los coeficientes de fricción de Niemann, Castro y Zhu.

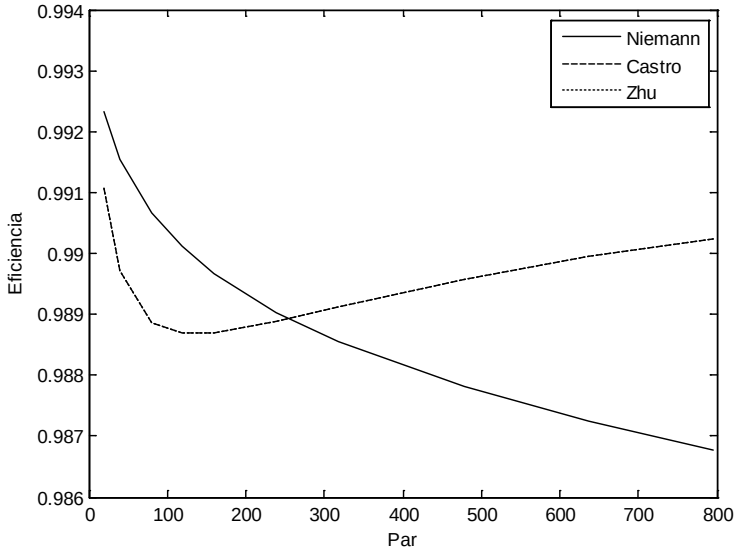


Figura V-21 Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos corregidos analizada cuando se implementan los coeficientes de fricción de Niemann, Castro y Zhu.

La eficiencia correspondiente a los coeficientes de fricción de Castro y de Zhu, como se había predicho, coinciden. Por otra parte, cuando se utiliza la formulación de Niemann, se obtiene una reducción de la eficiencia con el aumento del par. Sin embargo, cuando se implementan las formulaciones híbridas, esta tendencia cambia, dado que, para niveles de par menores a 100 Nm, la eficiencia decrece, aumentando a partir de este nivel de par.

Si se compara con engranajes estándar, la eficiencia es menor, independientemente de la formulación de coeficiente de fricción, concluyéndose que un valor de corrección considerable, produce un decremento en la eficiencia.

Para analizar todo lo antes expuesto respecto a la eficiencia, se evaluarán los factores de los que depende a través de la Figura V-22 (Castro y Zhu).

En la Figura V-22 se muestran los repartos de carga, coeficientes de fricción y factores de pérdidas instantáneas, para las condiciones de trabajo estudiadas, correspondientes al coeficiente de fricción de Castro. El reparto de carga es el mismo que al implementar el coeficiente de Niemann, no existiendo diferencia en la ZCS, lo cual se debe a que la corrección provoca que la ZCS no coincida con el punto primitivo.

La magnitud del coeficiente de fricción aumenta en todas las regiones del contacto hasta un cierto valor de par (100 Nm). A partir de este valor, su magnitud sigue aumentando en la zona cercana al punto primitivo, pero disminuyendo al inicio del contacto (izquierda). Esto repercute en las pérdidas instantáneas.

La mayoría de las pérdidas se producen en la primera zona de contacto doble (PZCD) y en la zona de contacto simple (ZCS). Las pérdidas de la SZCD coinciden con la región del punto primitivo, por lo que son pequeñas (debido a la corrección). Sin embargo, en la PZCD y en la ZCS las pérdidas son importantes porque la velocidad de deslizamiento es máxima y la carga es considerable. Estas pérdidas aumentan y se hacen máximas a 100 Nm, decreciendo a partir de este nivel de par, influenciadas por la tendencia del coeficiente de rozamiento.

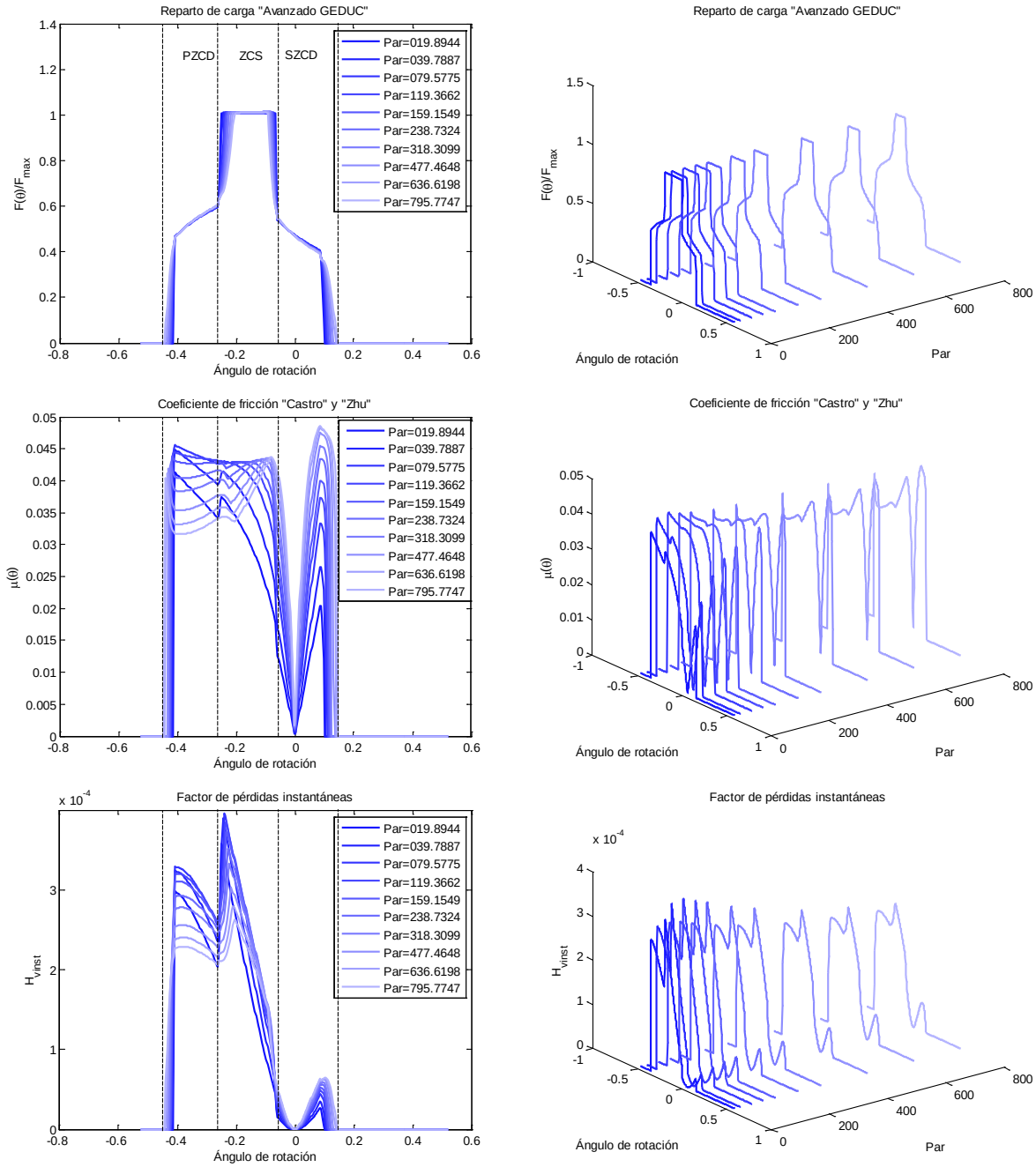


Figura V-22 Reparto de carga, coeficiente de fricción y factor de pérdidas instantáneas cuando se implementa el coeficiente de fricción de Castro y Zhu en las condiciones de operación a estudio.

V.3.2. Análisis de los parámetros geométricos: variación de la corrección

En este análisis se presenta la comparativa entre valores de eficiencia, calculada a partir de ambos procedimientos, para varios factores de corrección, en cinco condiciones de operación específicas (Tabla V-6). Estos valores de par y velocidad se escogen con el objetivo de aportar representatividad de los valores de eficiencia.

Tabla V-6 Condiciones de operación de la transmisión objeto de estudio.

Condiciones de operación	Potencia (kW)	Par (Nm)	Velocidad (rpm)
OC1	25	159	1500
OC2	25	40	6000
OC3	50	159	3000
OC4	100	637	1500
OC5	100	159	6000

Se desea evaluar el efecto del reparto de carga (primera etapa) y el del coeficiente de fricción (segunda etapa) en la eficiencia del sistema, con la variación del factor de corrección. Siguiendo la misma metodología del análisis anterior, en la primera etapa del análisis, se utiliza el coeficiente de fricción de Niemann y las cuatro formulaciones de reparto de carga. En la segunda etapa, se implementan las tres formulaciones de coeficientes de fricción y el reparto de carga proporcionado por el modelo avanzado GEDUC.

Para analizar pormenorizadamente el efecto de las correcciones de perfil, en cada etapa, se plantean tres escenarios. En el primer escenario, se pretende evaluar el efecto de la corrección cuando la longitud y la localización del contacto se mantienen invariables, es decir, evaluar el efecto de la corrección aisladamente. En el segundo escenario, se evalúa el impacto de la corrección en la eficiencia cuando la relación de contacto es constante, pero se modifica la posición del segmento de contacto. En el tercer escenario, se analizan las correcciones cuando se varían, tanto la longitud como la localización del contacto.

Por claridad visual, se presenta en la Tabla V-7 el resumen de las características de cada escenario y en la Figura V-23, a modo de esquema, la localización y longitud del segmento de contacto, cuando no existe corrección y en el caso de máxima corrección de cada escenario.

Tabla V-7 Resumen de la descripción de los escenarios.

Número de escenario	Variación de la longitud del contacto	Variación de la localización del contacto
1	No	No
2	No	Si
3	Si	Si

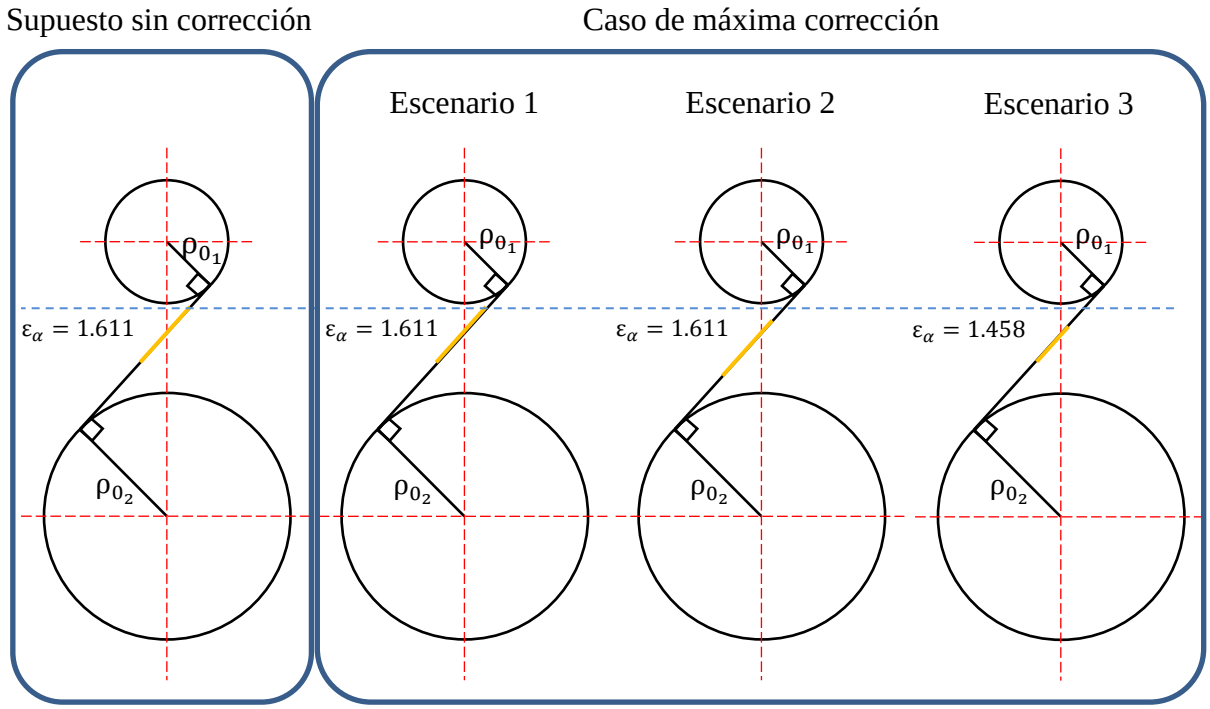


Figura V-23 Esquema de la localización y longitud del segmento de contacto en los diferentes escenarios.

Las correcciones de tallado tienen un impacto importante en el reparto de carga de la transmisión. Con el objetivo de plantear las diferencias entre escenarios, en la Figura V-62 se muestra el efecto de las correcciones máximas de cada escenario en el reparto de carga "Avanzado GEDUC", con respecto al supuesto sin corrección.

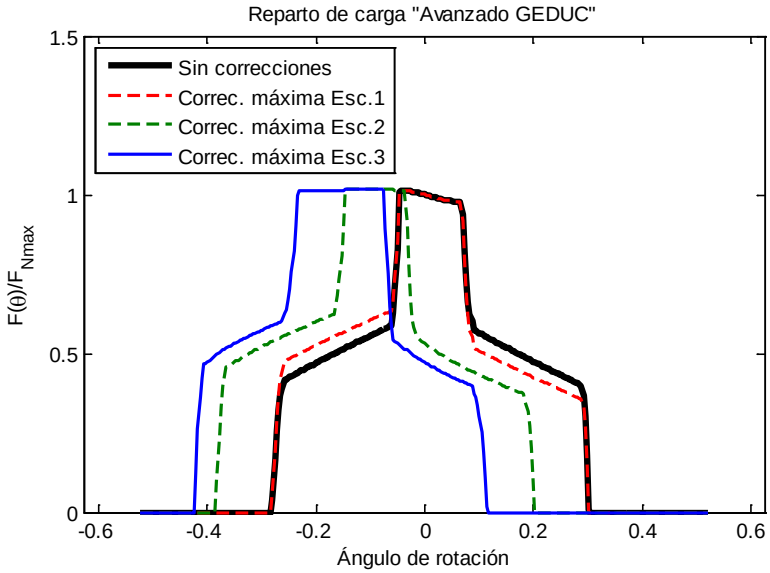
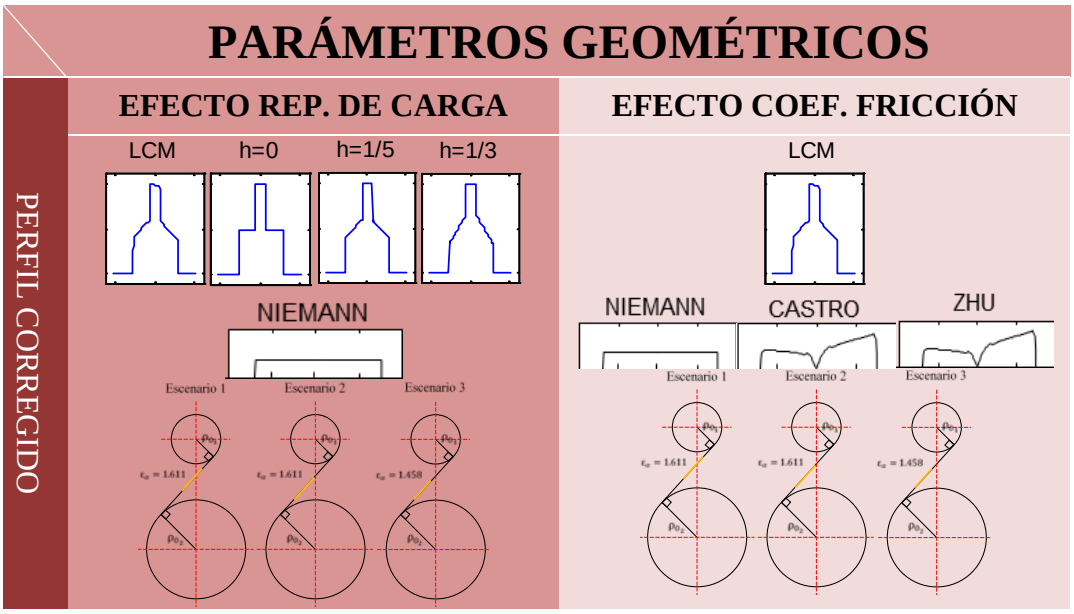


Figura V-24 Reparto de carga cuando se implementa el coeficiente de fricción de Castro *et al.*, sin correcciones y con las correcciones máximas de los tres escenarios (Par=159 Nm y 1500 rpm).

En la Tabla V-8 se presenta el resumen de este análisis.

Tabla V-8 Resumen del análisis de las correcciones en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos.



V.3.2.1. Efecto del reparto de carga

En este análisis, se estudia la eficiencia, calculada a partir de los dos procedimientos mostrados en el capítulo IV, en los tres escenarios de corrección planteados. La finalidad es evaluar el impacto que tiene el factor de corrección en el reparto de carga y, a su vez, el efecto de este último en la eficiencia del sistema.

V.3.2.1.1. Primer escenario: Longitud y localización del contacto fija

En este primer escenario, se restringen los radios exteriores de ambas ruedas, para conseguir, en todos los casos de corrección, que la relación de contacto teórica permanezca constante y el segmento de contacto no se desplace (velocidad de deslizamiento permanece invariable).

En la Figura V-25 se aprecian las principales diferencias entre procedimientos, cuando se varía el factor de corrección, en los valores de eficiencia. El rango del factor de corrección estudiado, desde x_1=-0.05 a x_1=0.2, no es muy amplio, dado que, para valores de factor de corrección mayores de 0.2, se produce interferencia de funcionamiento. Se debe a que existe contacto entre dientes en zonas donde no hay tallado perfil de evolvente o redondeo.

En la Figura V-25 se observa que la variación de la eficiencia con la corrección es testimonial. Comparando entre procedimientos, la eficiencia calculada a través del *procedimiento analítico* es constante, con el aumento de la corrección, para las tres formulaciones de reparto de carga, mientras que en el *procedimiento avanzado*, no lo es. Dentro del *procedimiento analítico*, la eficiencia correspondiente al reparto de carga ISO/TC-60 es menor que con las otras dos formulaciones de reparto de carga. Además, como algo a destacar, en las condiciones de operación con menor nivel de par (OC2), los valores de eficiencia correspondientes a “Analítico GEDUC” y “Avanzado GEDUC” son los mismos. Se deduce que la correlación entre los repartos de carga, para niveles de par reducidos, es buena y que el efecto del par resistente es más determinante, en este escenario, que el de las correcciones. Para el mayor nivel de par (OC4), la dispersión entre procedimientos es mayor y, además,

crece con el aumento de la corrección. Este efecto se puede explicar mediante la diferencia entre las relaciones de contacto tenidas en cuenta por ambos procedimientos (Figura V-26).

Por simplicidad, de este punto en adelante, aunque en todas las conclusiones están incluidas las cinco condiciones de operación, solo se van a mostrar las figuras correspondientes a los pares resistivos extremos considerados (OC2 y OC4), por ser las más representativas.

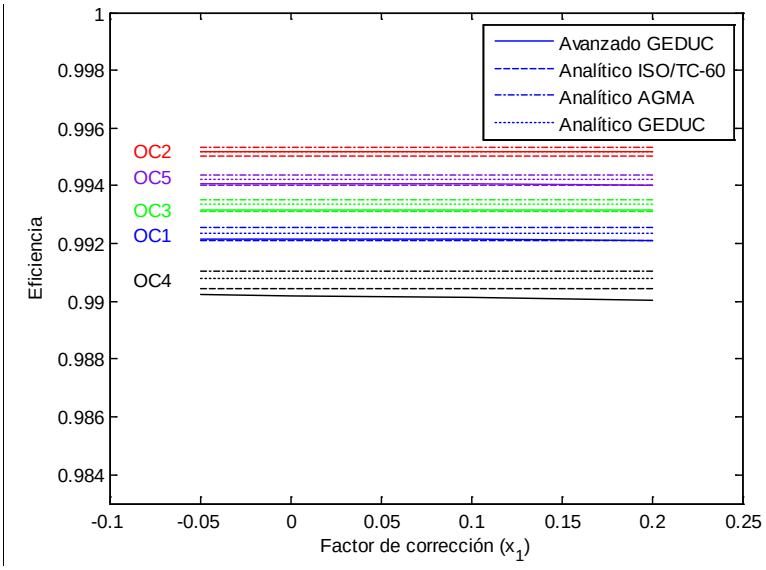


Figura V-25 Comparativa entre ambos enfoques. Valores de eficiencia para diferentes valores de factor de corrección y condiciones de operación.

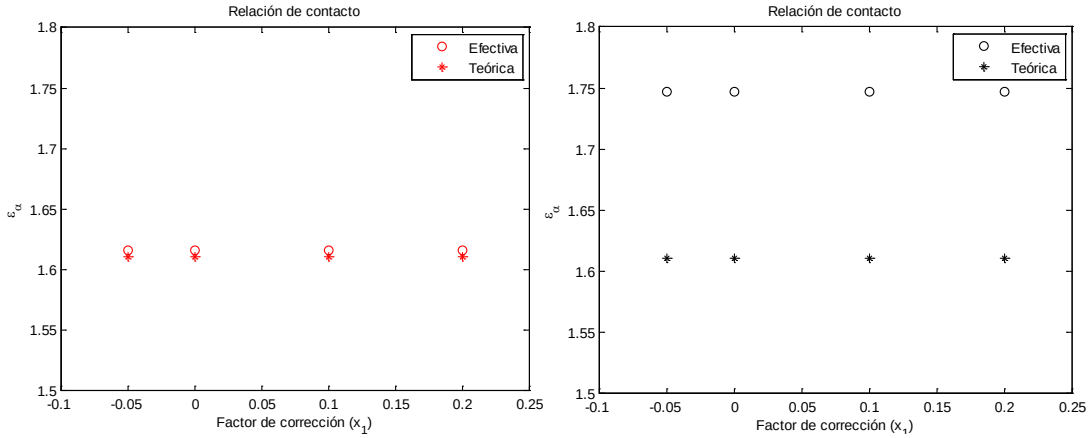


Figura V-26 Comparativa entre relaciones de contacto teórica y efectiva para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

En la Figura V-26 se ilustra la desviación entre las relaciones de contacto teórica y efectiva. La desviación entre ambas relaciones de contacto es menor, y casi despreciable, en el caso de condiciones menos severas (OC2), que en el caso de condiciones más adversas (OC4). Realizando la correlación entre la relación de contacto y la eficiencia (Figura V-25), se observa que la dispersión entre procedimientos es directamente proporcional a la diferencia entre las relaciones de contacto.

En las Figura V-27 y Figura V-28 se muestran los repartos de carga y las pérdidas por ciclo correspondientes a cada uno de los procedimientos. El coeficiente de fricción no se presenta porque no varía con la corrección y, además, se analiza específicamente en la sección V.3.2.2.

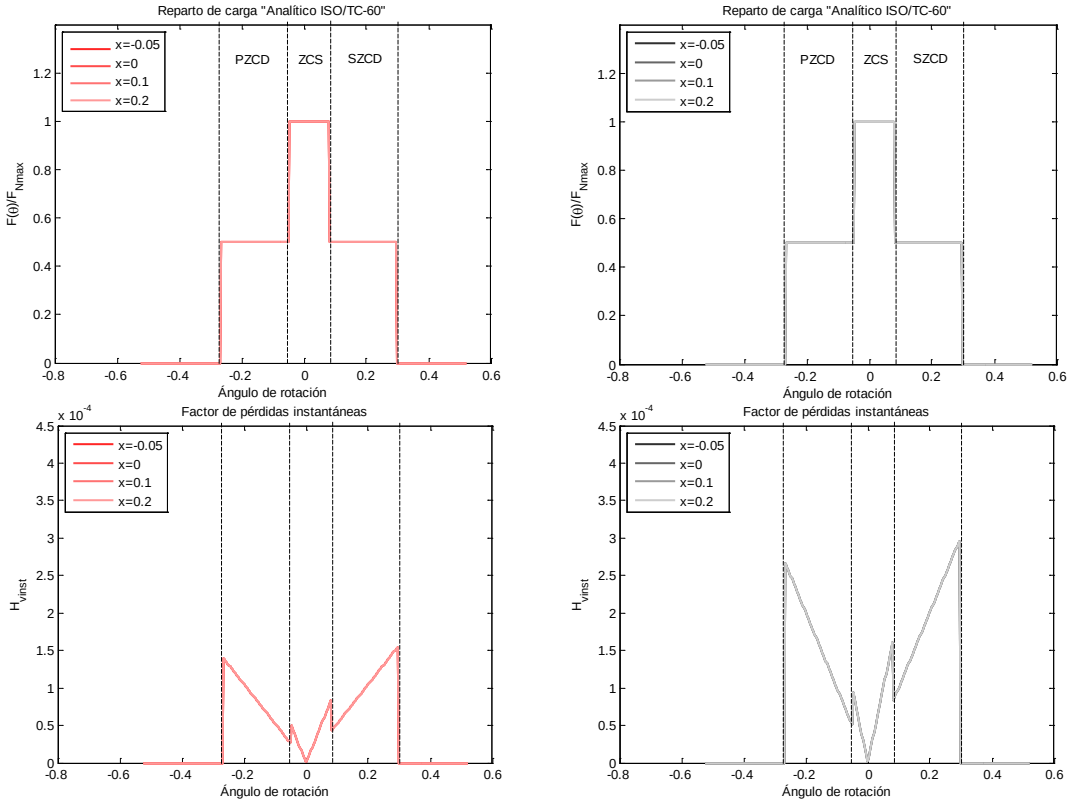


Figura V-27 Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del *procedimiento analítico* para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

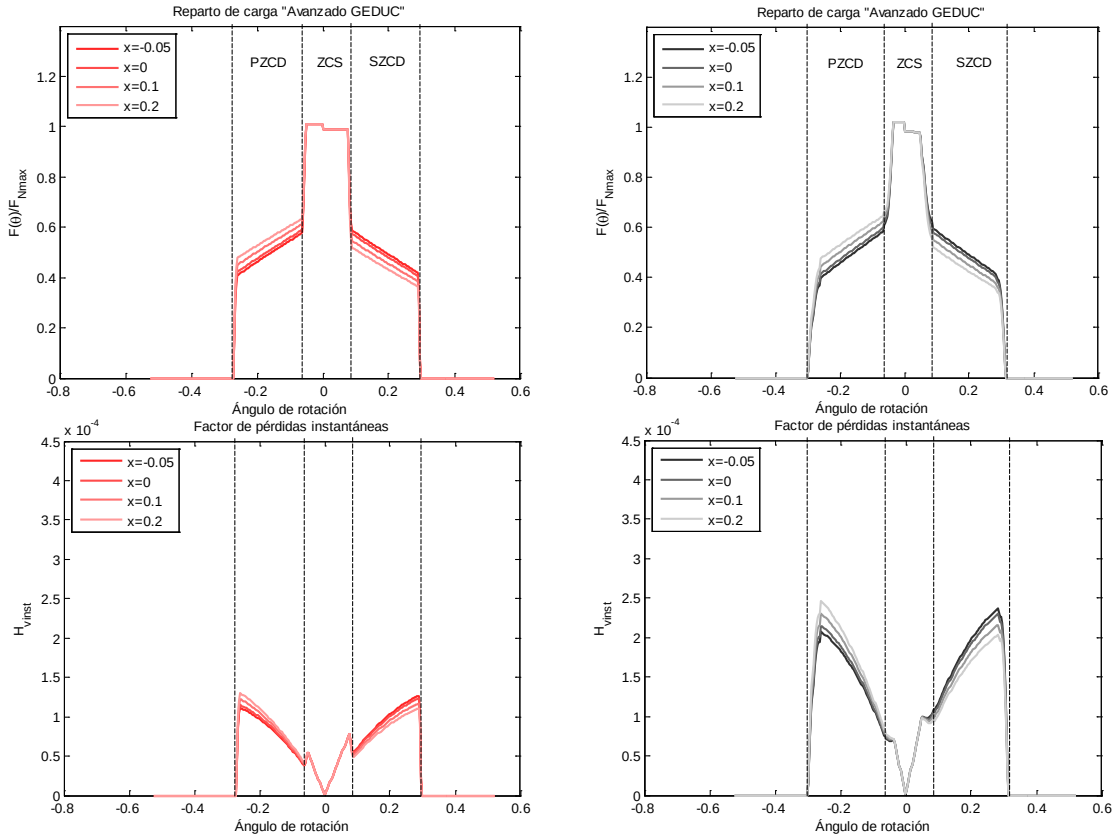


Figura V-28 Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del *procedimiento avanzado* para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

En la Figura V-27 se muestran los parámetros correspondientes al *procedimiento analítico.* No hay cambios en el reparto de carga porque no se ve afectado, ni por la variación de corrección, ni por la de par. Por esta razón, las pérdidas no varían con la corrección y, por ende, la eficiencia es constante.

En la Figura V-28 se muestran los parámetros correspondientes al *procedimiento avanzado*. La influencia del factor de corrección en la forma del reparto de carga provoca que la carga transmitida sea diferente, respecto del supuesto sin corrección, en la primera y segunda región de contacto doble. En concreto, con el aumento del factor de corrección, se carga más la PZCD y la SZCD se descarga, produciendo que las pérdidas en la PZCD aumenten y disminuyan en la SZCD.

En el caso OC2, el aumento de pérdidas en la PZCD es prácticamente igual que la disminución de pérdidas en la SZCD, los cuales serían, exactamente, iguales si la relación de transmisión fuese la unidad. Por esta razón, la eficiencia en los distintos casos de corrección es casi la misma, modificándose únicamente la localización de las pérdidas. Este efecto se ve "acentuado" con el aumento del par (OC4), aunque la variación de la eficiencia es mínima.

Con el objetivo de apreciar las principales diferencias en las formulaciones de reparto de carga, se muestran las cuatro formulaciones implementadas, para las condiciones de operación y supuestos de corrección extremos de los considerados (Figura V-29).

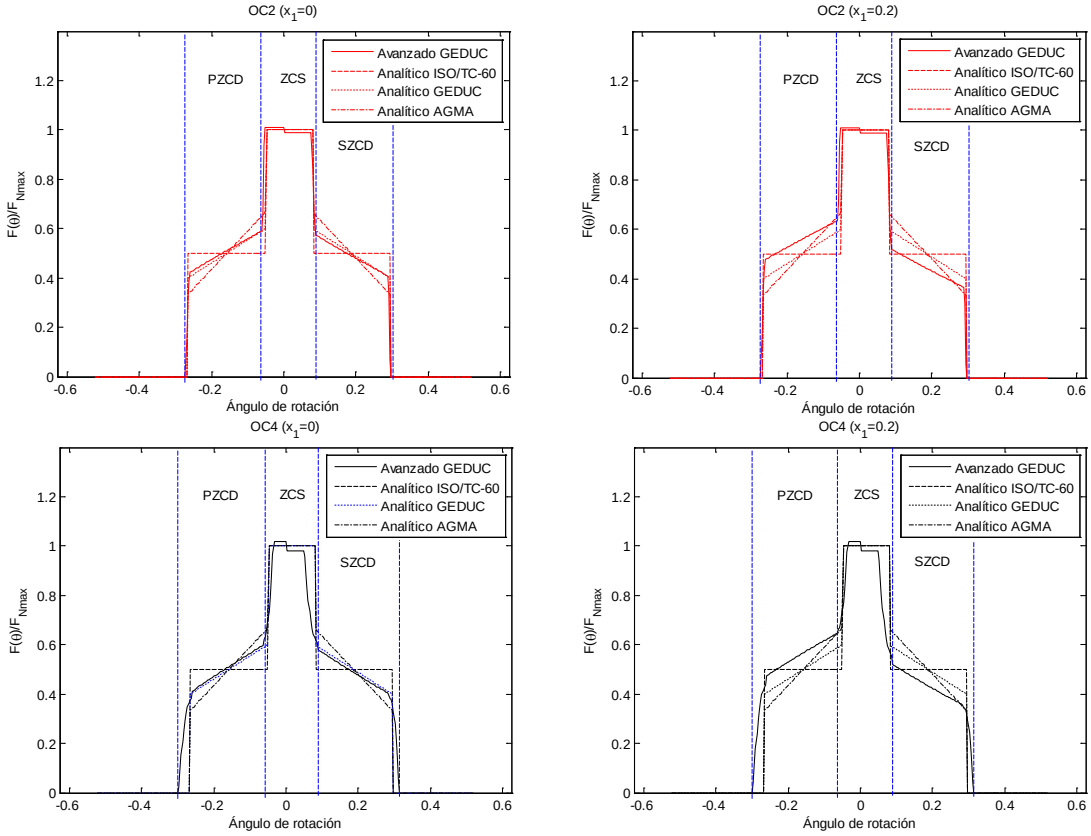


Figura V-29 Reparto de carga para los casos de corrección x_1=0 y x_1=0.2, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

Como era previsible, la única formulación que varía con la corrección es la "Avanzado GEDUC". Para el nivel de par máximo, la dispersión entre esta formulación y las analíticas es mayor.

De forma similar a los repartos de carga, en la Figura V-29 se muestran los diferentes factores de pérdidas instantáneas (IPL), para las cuatro formulaciones de reparto de carga.

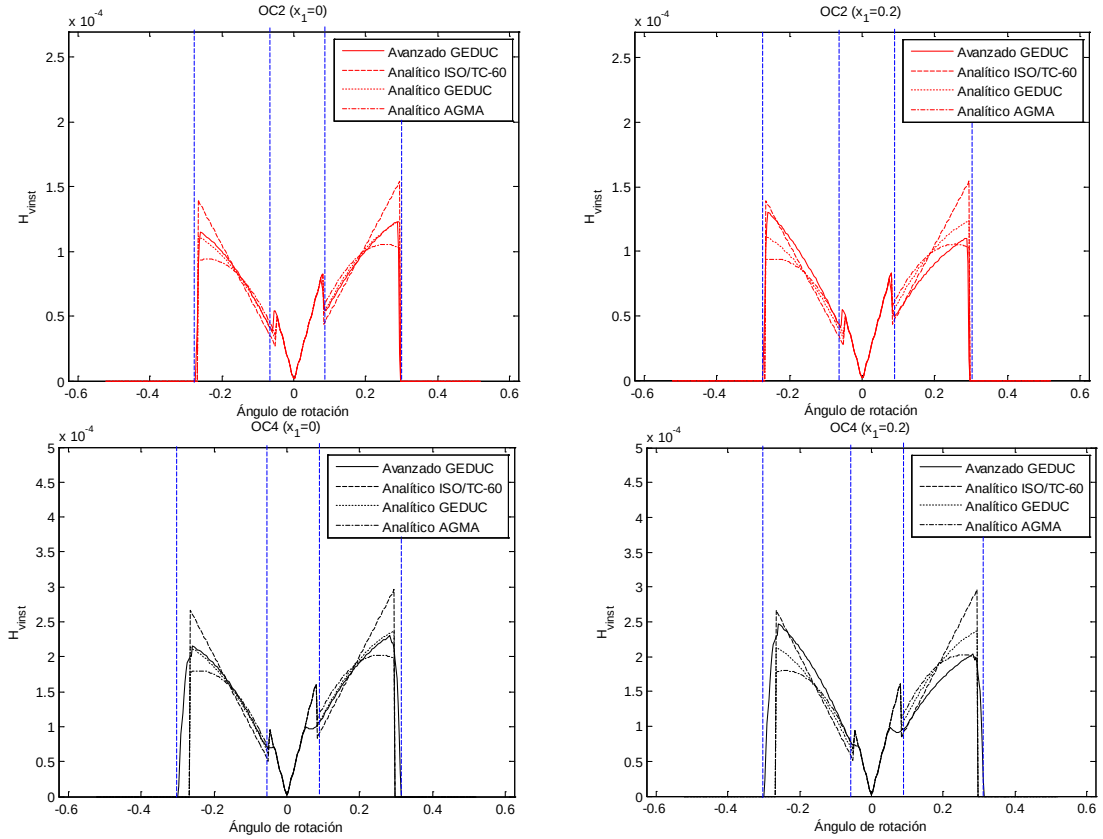


Figura V-30 Factor de pérdidas instantáneas para los casos de corrección x_1=0 y x_1=0.2, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

Al *procedimiento analítico* no le afecta la corrección, aunque si las condiciones de operación. Sin embargo, la forma del factor de pérdidas es exactamente igual en todos los casos de par y velocidad, lo cual indica que la localización de las pérdidas es siempre la misma.

Para analizar el impacto de las condiciones de operación en la eficiencia del *procedimiento avanzado*, se presentan los factores de pérdidas IPL en la Figura V-31.

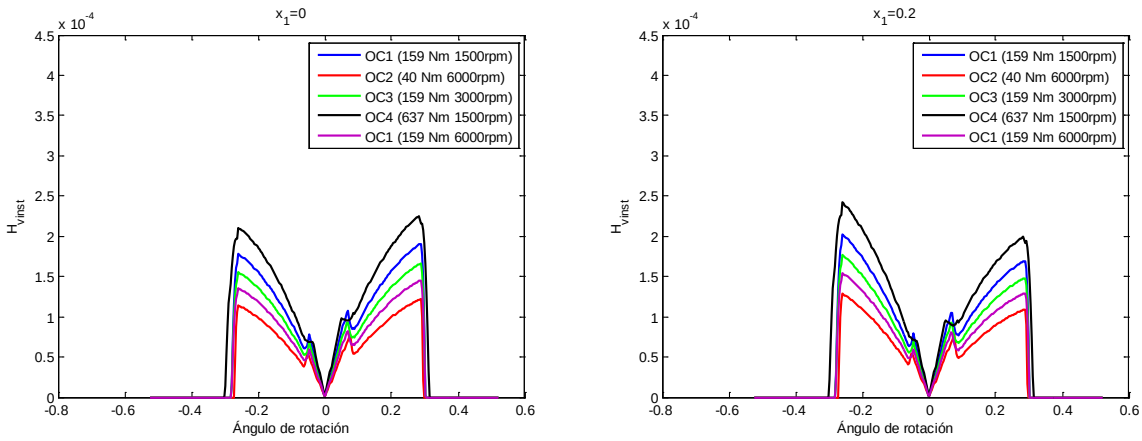


Figura V-31 Factor de pérdidas instantáneas para las cinco condiciones de operación.

Cuanto mayor es el par resistivo, más pérdidas se producen, obteniendo la misma tendencia cuando la velocidad decrece. Además, a través de esta figura queda demostrado que cuanto mayor es el par, mayor es la relación de contacto, lo cual resulta en unas mayores pérdidas. Por otro lado, se justifica, a través de la Figura V-25 y Figura V-31, que la eficiencia depende principalmente del par. Se aprecia que, para el valor menor de par (40 Nm), se alcanza el mayor valor de eficiencia, para el valor medio de par (159 Nm), se obtiene el valor medio de eficiencia (banda de tres condiciones de operación), alcanzándose el menor valor de eficiencia con el mayor nivel de par (637 Nm).

V.3.2.1.2. Segundo escenario: Longitud del contacto fija y localización del contacto variable

En este segundo escenario se varían los radios exteriores de ambas ruedas, para conseguir que la relación de contacto teórica permanezca constante en todos los casos de corrección, a la vez que el segmento de contacto cambia su localización. A partir de esta consideración, se evita el problema de la interferencia de funcionamiento del escenario anterior y, así, se puede evaluar un rango más amplio de factor de corrección. La relación de contacto teórica (ε_α) considerada en este escenario es 1.611, que corresponde al supuesto de corrección nula (dientes estándar). A continuación se presenta la metodología para la determinación del radio exterior de ambas ruedas:

Primero, se calcula el radio exterior del piñón a través de la ecuación (V.1):

$$R_{1ext} = m\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + dd_{hta}\right) \tag{V.1}$$

Siendo m el modulo, z_1 el número de dientes del piñón, x_1 el factor de corrección del piñón y dd_{hta} el dedendum de la herramienta. Una vez calculado el radio exterior del piñón, la relación de contacto del segmento de aproximación se calcula mediante:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{R_{1ext}{}^2 - (R_1\cos(\varphi_i))^2} - R_1\sin(\varphi_i)}{\pi m\cos(\varphi_i)} \tag{V.2}$$

Se determina la relación de contacto correspondiente al segmento de alejamiento:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_\alpha - \varepsilon_1 \tag{V.3}$$

Finalmente, el radio exterior de la rueda conducida se obtiene mediante la expresión:

$$R_{2ext} = \sqrt{(R_2\sin(\varphi_i) + \varepsilon_2\pi m\cos(\varphi_i))^2 - R_2\cos(\varphi_i)^2} \tag{V.4}$$

Una vez definida la metodología para calcular los radios exteriores, en la Figura V-32 se presentan los valores de eficiencia.

Con el aumento del factor de corrección, la eficiencia disminuye en ambos procedimientos, así como la diferencia entre procedimientos aumenta. Con respecto a las condiciones de operación, se mantiene que cuanto mayor par, mayor diferencia entre procedimientos, debido a la diferencia entre las relaciones de contacto teórica y efectiva (Figura V-33).

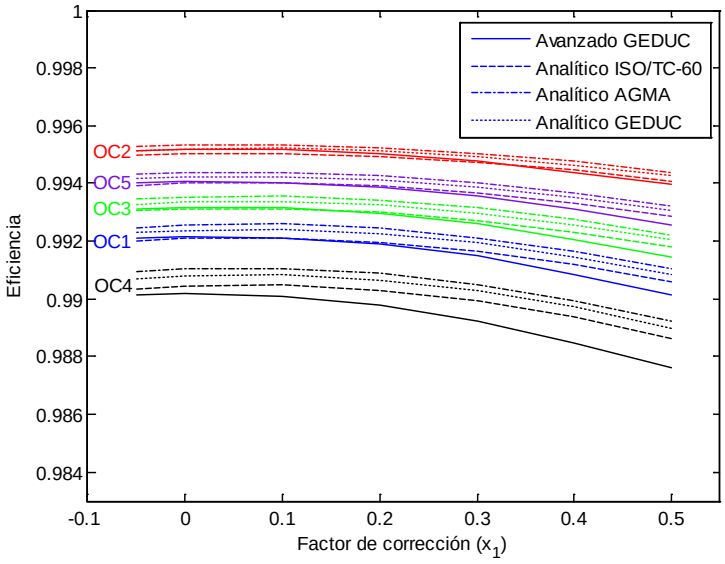


Figura V-32 Valores de eficiencia para diferentes factores de corrección y condiciones de operación.

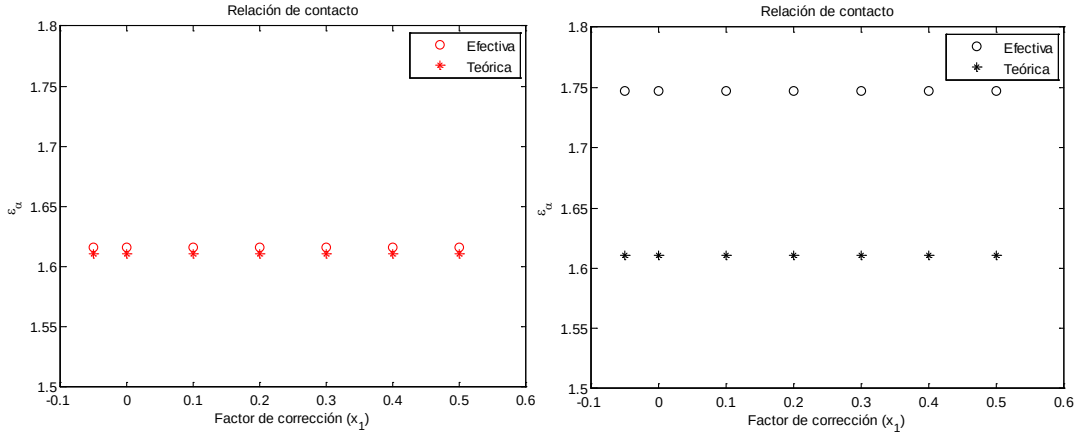


Figura V-33 Comparativa entre relaciones de contacto teórica y efectiva para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

En la Figura V-33 se ilustra la desviación entre las relaciones de contacto teórica y efectiva. Se obtienen los mismos valores de relaciones de contacto teórica y efectiva que en el primer escenario, alcanzándose las mismas conclusiones.

En las Figura V-34 y Figura V-35 se muestran los repartos de carga y las pérdidas por ciclo correspondientes a cada uno de los procedimientos.

En la Figura V-34 se muestran los parámetros correspondientes al *procedimiento analítico*. La corrección produce que el contacto se desplace hacia la izquierda. Como, en todos los casos de corrección, la relación de contacto teórica es constante, las formulaciones analíticas de reparto de carga tienen la misma forma y magnitud. Un aspecto a tener en cuenta es que, con el incremento de la corrección, la zona de contacto simple (ZCS) tiene lugar cada vez más lejos del punto primitivo, produciéndose un aumento de las pérdidas en esta región, donde la velocidad no es nula, resultando en un aumento de las pérdidas. Además, este aumento es mayor que la reducción de pérdidas en la SZCD, traduciéndose en una disminución de la eficiencia (Figura V-32).

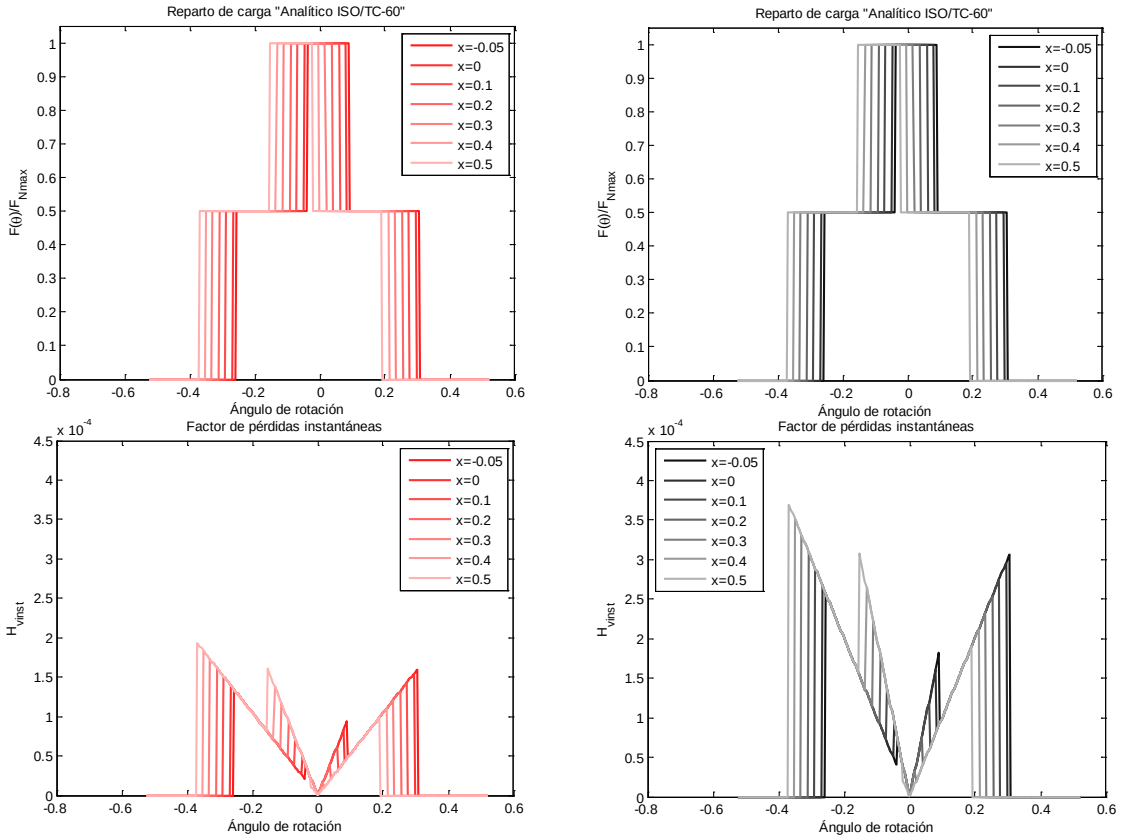


Figura V-34 Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del *procedimiento analítico* para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

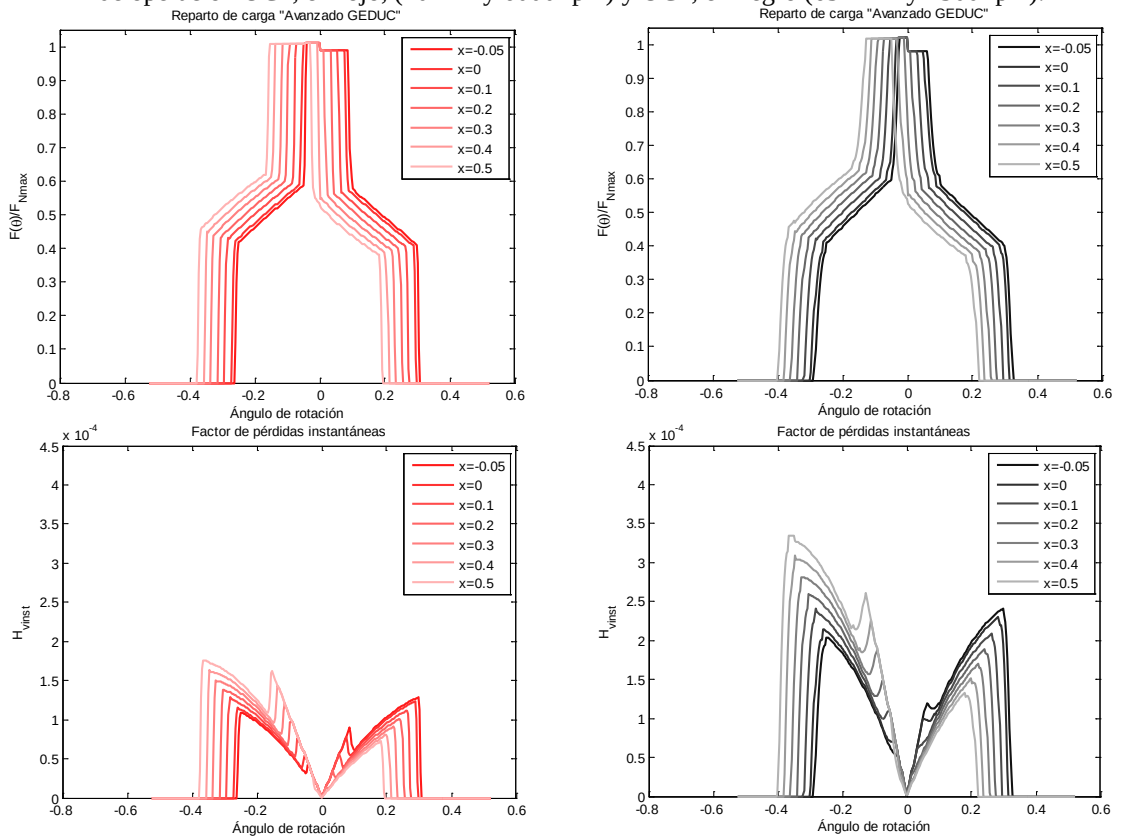


Figura V-35 Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del *procedimiento avanzado*, para las condiciones de operación OC2 en rojo (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

En la Figura V-35 se presentan los parámetros correspondientes *al procedimiento avanzado*. La corrección, además de desplazar el contacto hacia la izquierda, provoca que el reparto de carga aumente en la PZCD y disminuya en la SZCD. Al igual que en el *procedimiento analítico*, como, con el aumento de la corrección, la ZCS se desplaza respecto del punto primitivo, existe un aumento considerable de las pérdidas en esta región. Si se compara este hecho entre los dos procedimientos, el incremento de las pérdidas en la PZCD es mayor en el *procedimiento avanzado*, aumentando la dispersión entre procedimientos.

En la Figura V-36 se muestran los repartos de carga para los supuestos extremos de corrección y condiciones de operación considerados. El objetivo es presentar las diferencias entre formulaciones en los casos de corrección más representativos.

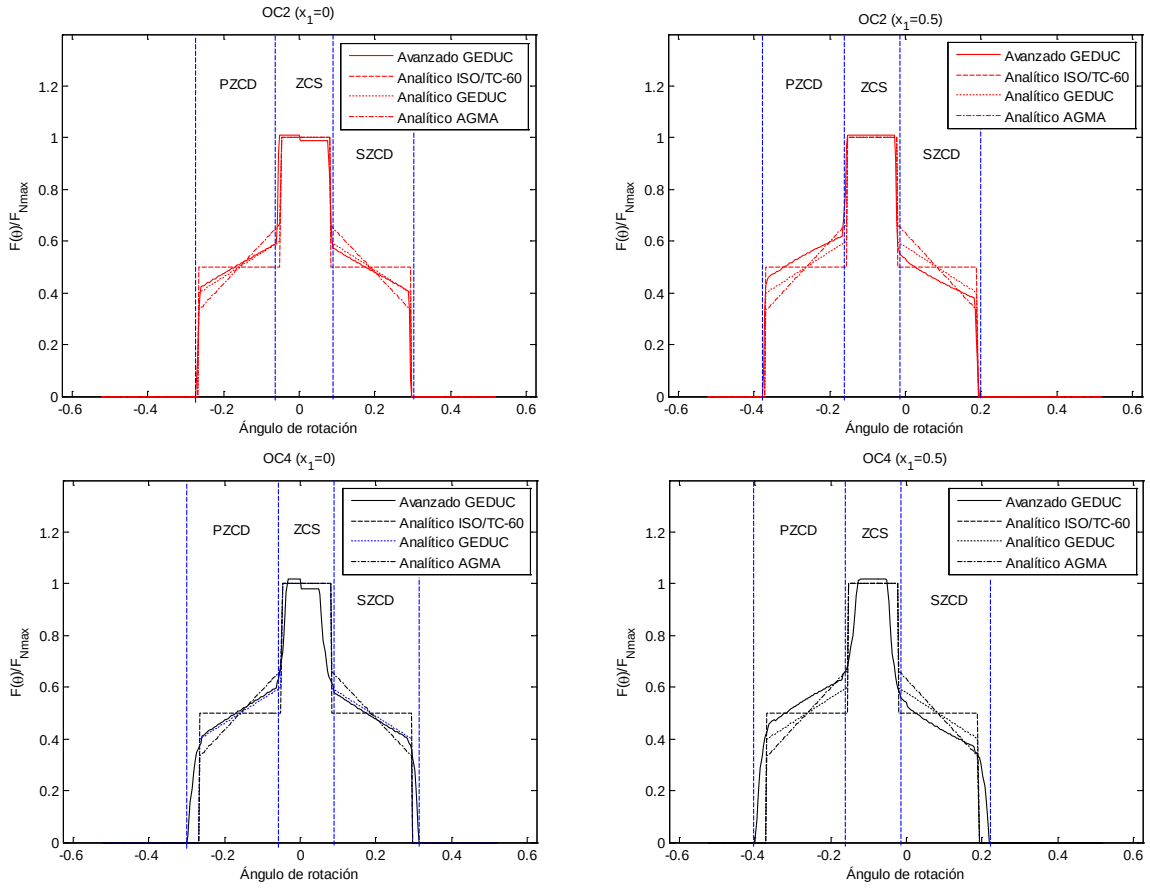


Figura V-36 Reparto de carga para los casos de corrección x_1=0 y x_1=0.5, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

Como algo a destacar, el escalón en la ZCS del supuesto sin corrección, desaparece en el caso de corrección máxima. Sucede porque la ZCS no coincide con el punto primitivo. Asimismo, la dispersión, en las zonas de contacto doble, entre el reparto de carga "Avanzado GEDUC" y el "analítico GEDUC" aumenta con respecto al primer escenario, debido al aumento de la rigidez de los dientes por la corrección.

En la Figura V-37 se presentan, para los casos extremos de corrección y de condiciones de operación considerados, los diferentes factores de pérdidas instantáneas, cuando se utilizan las cuatro formulaciones de reparto de carga.

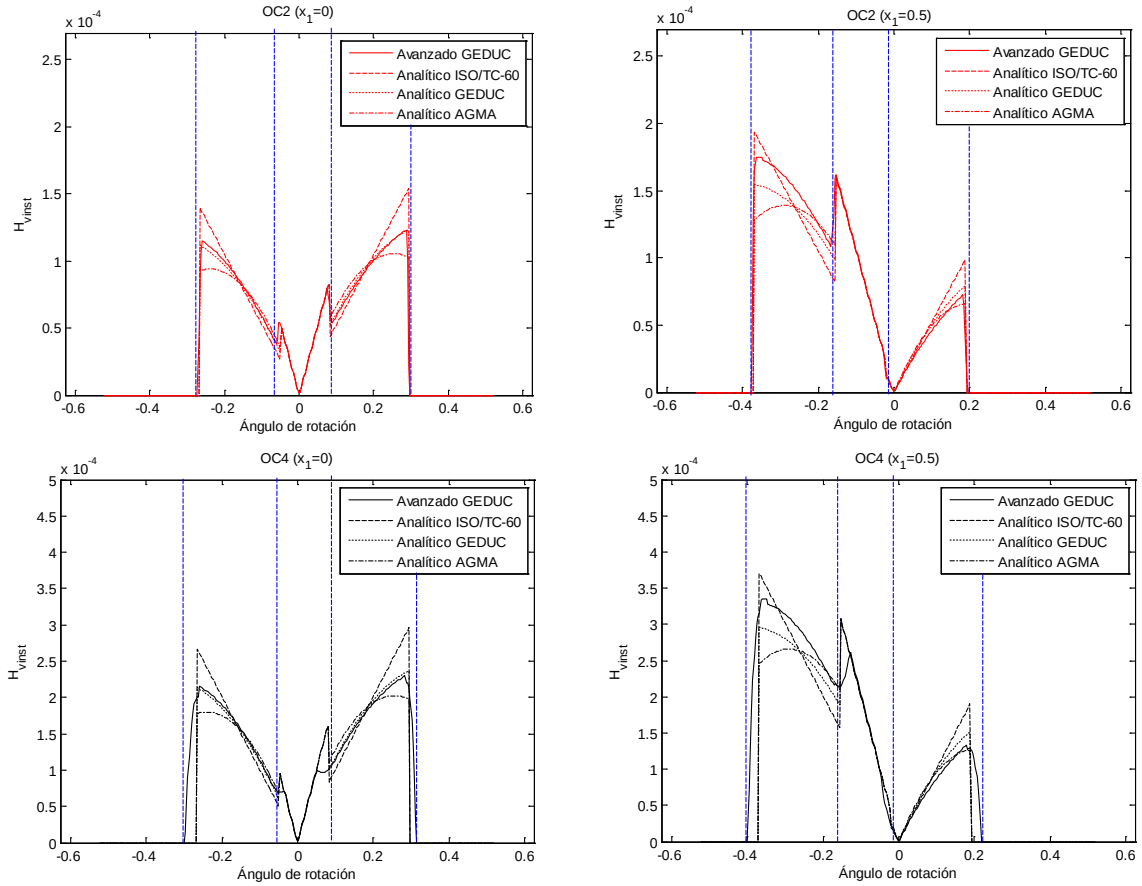


Figura V-37 Factor de pérdidas instantáneas para los casos de corrección x_1=0 y x_1=0.5, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

Si se compara, para ambos procedimientos, entre los factores IPL obtenidos cuando se implementan los cuatro repartos de carga, la distribución de pérdidas es muy similar en todos los casos. Para el supuesto sin corrección, las mayores pérdidas se producen en los extremos del contacto, mientras que en el caso de corrección máxima, se producen antes del punto primitivo (PZCD y ZCS). Por otro lado, el área bajo la curva continua (Avanzado GEDUC), en el supuesto sin corrección, es menor que en el caso de corrección máxima, sucediendo lo mismo para los tres repartos de carga. Se debe a que la corrección cambia la localización del contacto y produce que el reparto de carga aumente en la PZCD. Si a este efecto, se le superpone que la ZCS ya no coincide con la zona del punto primitivo, resulta en unas mayores pérdidas, respecto del caso sin corrección.

De la misma manera que en el anterior escenario, para evaluar el impacto de la condiciones de operación en la eficiencia, se muestra en la Figura V-38 el factor de pérdidas IPL en los casos extremos de corrección (x_1=0 y x_1=0.5).

Tanto en este escenario como en el siguiente, se obtienen las mismas conclusiones, con respecto a las condiciones de operación, que en el primer escenario. Cuanto mayor es el par resistivo, más pérdidas se producen, obteniendo la misma tendencia cuando la velocidad disminuye. Por esta razón, de este punto en adelante, se mostrarán estas figuras pero no se incluirá su análisis.

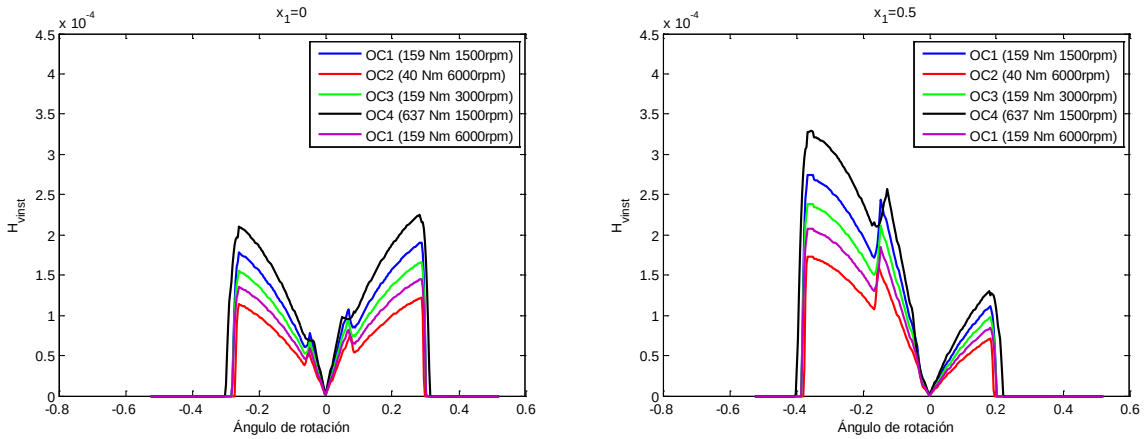


Figura V-38 Factor de pérdidas instantáneas para todas las condiciones de operación con factores de corrección x_1=0 y x_1=0.5.

V.3.2.1.3. Tercer escenario: Longitud y localización del contacto variable

En este escenario se varían los radios exteriores de ambas ruedas, obteniendo, con el aumento de la corrección, que la localización y relación de contacto teórica no son constantes. El objetivo es añadir el efecto de la variación de la relación de contacto, al de las correcciones de perfil, en la eficiencia.

Los radios de ambas ruedas se calculan a través de la ecuación (V.5):

$$R_{1ext} = m\left(\frac{z_1}{2} + x_1 + dd_{hta}\right) \quad y \quad R_{2ext} = m\left(\frac{z_2}{2} + x_2 + dd_{hta}\right) \tag{V.5}$$

En la Figura V-39, se presenta la eficiencia calculada a partir de ambos procedimientos

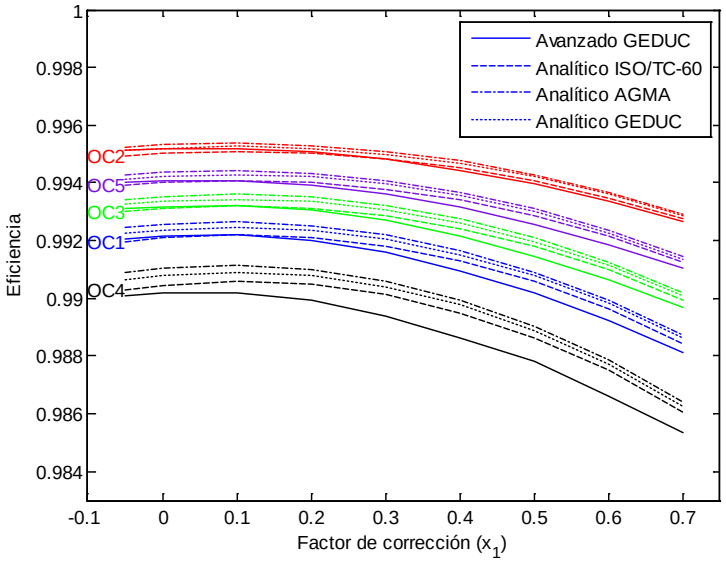


Figura V-39 Valores de eficiencia para diferentes factores de corrección y condiciones de operación.

En la Figura V-39 se observa que, con el aumento del factor de corrección, la eficiencia decrece y la dispersión entre procedimientos aumenta. Comparando entre procedimientos, al igual que en los dos escenarios anteriores, la eficiencia calculada a través del *procedimiento avanzado* es, generalmente, menor que la obtenida a partir del *analítico*. La desviación, entre procedimientos, de la eficiencia es totalmente dependiente de las condiciones de operación.

Para el nivel de menor par (OC2), esta desviación es casi despreciable, no siendo así en el mayor nivel de par resistivo (OC4). Estos efectos se pueden explicar mediante la diferencia entre las relaciones de contacto tenidas en cuenta por ambos procedimientos (Figura V-40).

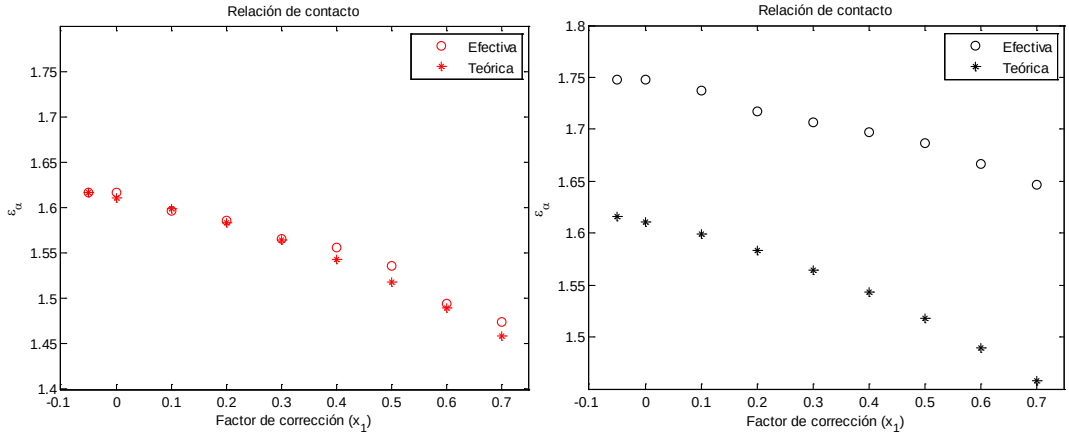


Figura V-40 Comparativa entre relaciones de contacto teórica y efectiva, para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

En la Figura V-40 se observa que, con el incremento de la corrección, ambas relaciones de contacto decrecen (premisa del escenario). De este análisis, se detectan dos aspectos: i) la diferencia entre las relaciones de contacto teórica y efectiva dependiendo de las condiciones de operación; y ii) el aumento de la dispersión entre relaciones de contacto, en las mismas condiciones de operación, con el incremento de la corrección. Respecto al primer aspecto, la diferencia entre relaciones de contacto, en el caso OC2, es despreciable, mientras que, en el caso OC4, no lo es. Respecto al segundo aspecto, tanto en OC2 como en OC4, la diferencia entre relaciones de contacto efectiva y teórica se incrementa, cuanto mayor es la corrección. La tendencia de la eficiencia está íntimamente ligada a ambos aspectos.

Lo observado en las relaciones de contacto, tiene un impacto directo en el reparto de carga y factores de pérdidas de ambos procedimientos (Figura V-41 y Figura V-42).

En la Figura V-41 se muestran los parámetros correspondientes al *procedimiento analítico*. La corrección produce que el contacto se desplace hacia la izquierda y, además, disminuya el segmento de contacto. Asimismo, con el incremento de la corrección, la zona de contacto simple tiene lugar cada vez más lejos del punto primitivo. Esto produce un aumento de las pérdidas en esta región y el descenso de la eficiencia global del sistema (Figura V-39).

En la Figura V-42 se muestran los parámetros correspondientes *al procedimiento avanzado*. La corrección, además de desplazar el contacto hacia la izquierda y cambiar el reparto de carga en las zonas de contacto doble, produce una disminución en el segmento de contacto. Al igual que en el *procedimiento analítico*, como la ZCS, con el aumento de la corrección, se desplaza respecto del punto primitivo, existe un aumento considerable de las pérdidas en esta región. Si se compara este hecho entre los dos procedimientos, con el incremento de la corrección, el aumento de las pérdidas en la PZCD es mayor en el *procedimiento avanzado*.

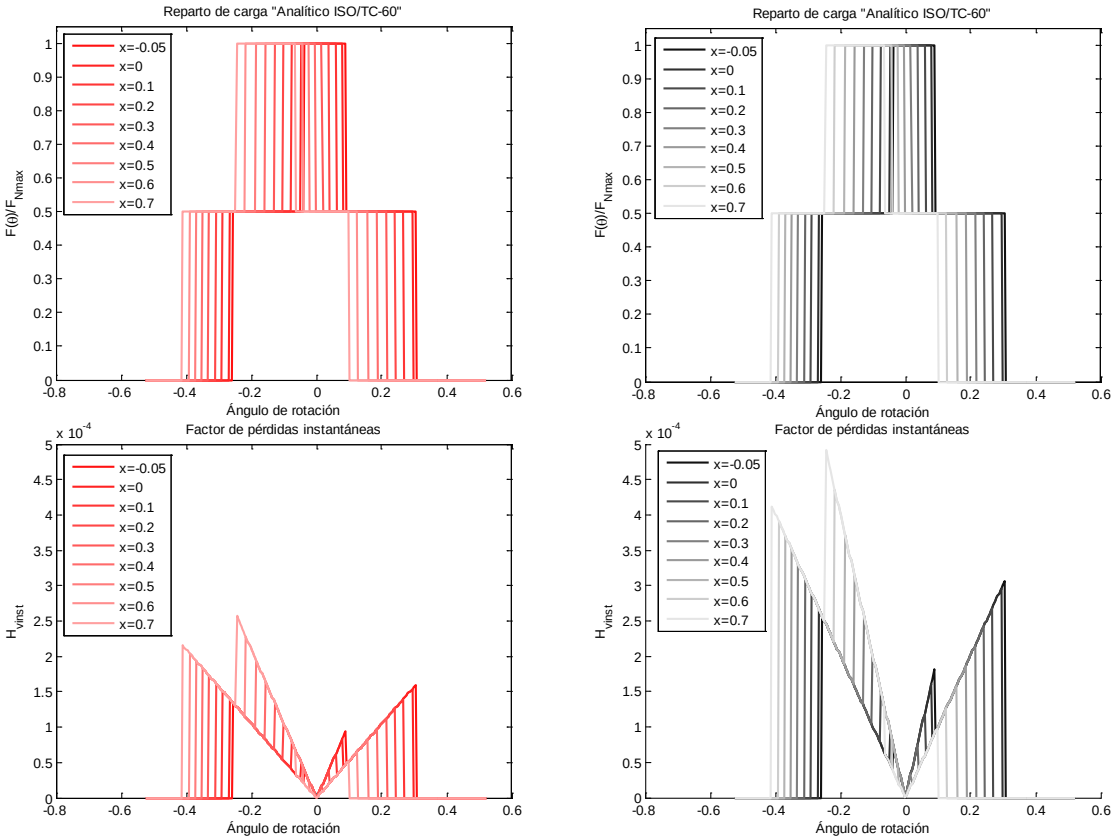


Figura V-41 Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del *procedimiento analítico* para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

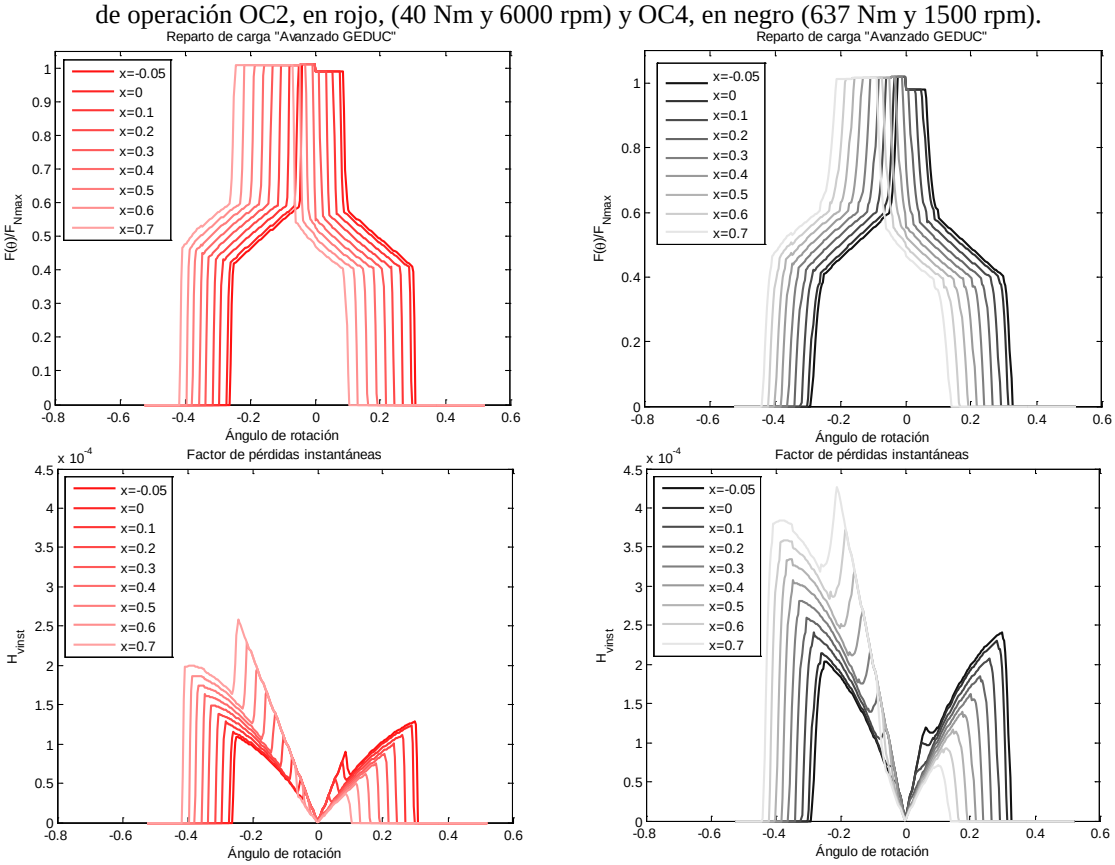


Figura V-42 Reparto de carga y factor de pérdidas instantáneas del *procedimiento avanzado* para las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

Con el objetivo de observar la dispersión entre formulaciones, en la Figura V-43 se presentan, en los casos extremos de corrección y condiciones de operación considerados, los cuatro repartos de cargas.

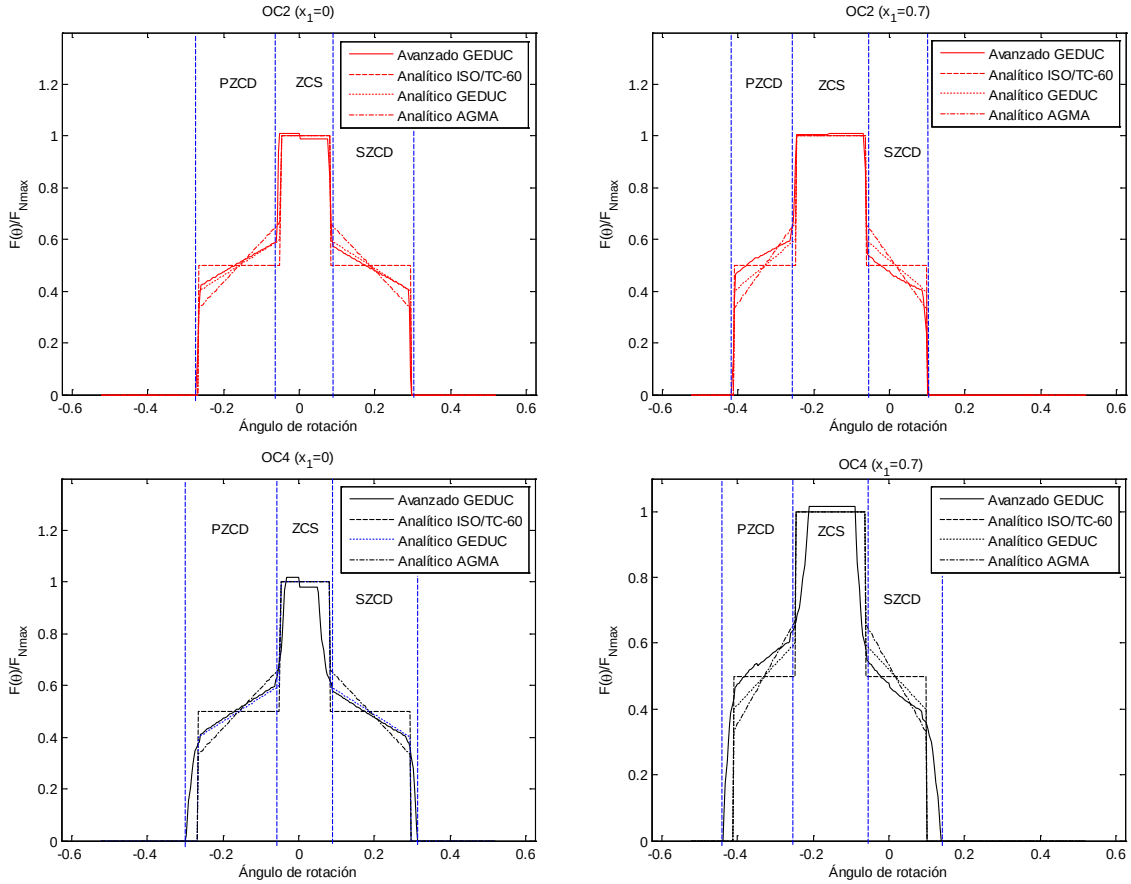


Figura V-43 Reparto de carga para los casos de corrección x_1=0 y x_1=0.7, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

Como algo reseñable, en el supuesto sin corrección en OC4, el aumento del segmento del contacto es mayor en la PZCD que en la SZCD. Sin embargo, en el caso de máxima corrección, ocurre lo contrario. En el primer caso (sin corrección), se debe a que la relación de transmisión es distinta a la unidad y, por tanto, no es simétrico. En el segundo caso (con corrección), se debe al efecto que tiene la corrección en el reparto de carga. Como la PZCD está más cargada que la SZCD, el diente menos cargado está más tiempo en contacto. Ambos aumentos del segmento de contacto se deben a que el modelo "Avanzado GEDUC" tiene en cuenta las deformaciones de los dientes adyacentes. Se concluye su importancia en la formulación del reparto de carga.

En la Figura V-44 se presentan los diferentes factores de pérdidas instantáneas (IPL), cuando se implementan las cuatro formulaciones de reparto de carga, en los supuestos extremos de corrección y de condiciones de operación considerados.

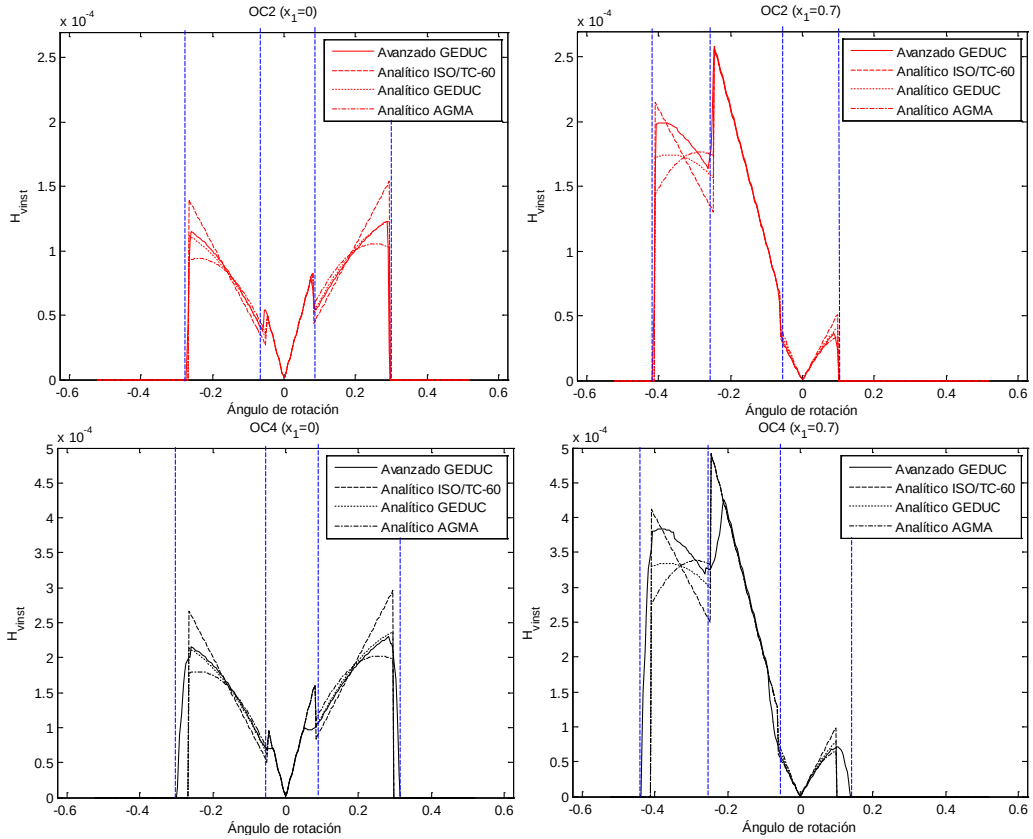


Figura V-44 Factor de pérdidas instantáneas (IPL) para los casos de corrección x_1=0 y x_1=0.7, en las condiciones de operación OC2, en rojo, (40 Nm y 6000 rpm) y OC4, en negro (637 Nm y 1500 rpm).

Para el supuesto sin corrección, las mayores pérdidas se producen en los extremos del contacto (PZCD y SZCD), mientras que en el caso de corrección máxima se localizan antes del punto primitivo (PZCD y ZCS). Para el supuesto sin corrección, el factor de pérdidas correspondiente al reparto de carga "Avanzado GEDUC" y el de "Analítico GEDUC" tienen una correlación casi perfecta, habiendo una dispersión superior, cuanto mayor es el factor de corrección.

Por otro lado, el área bajo la curva de los factores de pérdidas es menor, para los cuatro repartos de carga, en el supuesto sin corrección que en el caso de corrección máxima. Esta conclusión es la misma que la extraída en el segundo escenario. Sin embargo, en este escenario se acentúa el impacto porque la corrección es mayor. Además, la disminución de la relación de contacto produce menores pérdidas en las zonas de contacto doble, aumentando las correspondientes a la ZCS. Este aumento, y el hecho de que esta zona no coincide con la región del punto primitivo, provoca un aumento de las pérdidas.

Como en los dos escenarios anteriores, en la Figura V-45 se muestran los factores de pérdidas en las diferentes condiciones de operación.

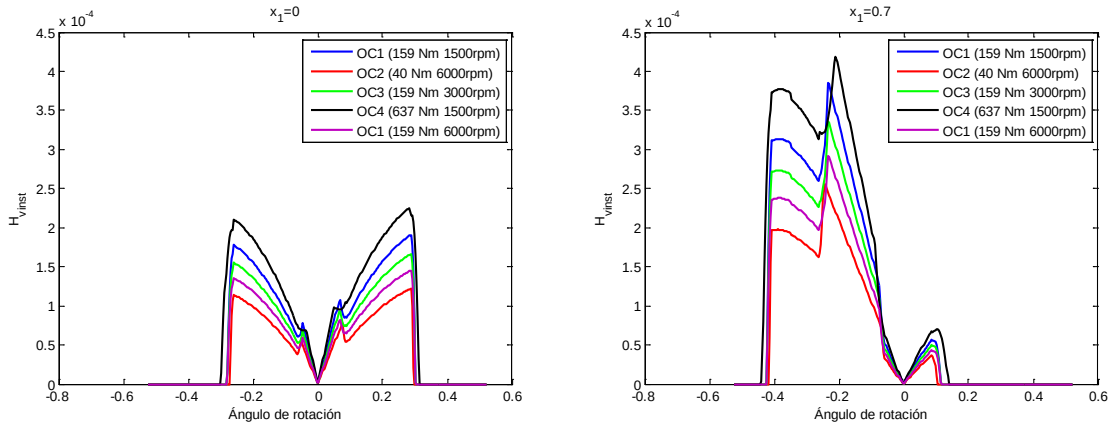


Figura V-45 Factor IPL para todas las condiciones de operación con factores de corrección x_1=0 y x_1=0.7.

V.3.2.2. Efecto del coeficiente de fricción

Para analizar el efecto de utilizar las formulaciones híbridas de coeficiente de fricción en la eficiencia, inicialmente, es necesario conocer el régimen de lubricación en el que trabaja la transmisión. Para ello se muestran el diagrama de Greenwood y la curva de Stribeck.

En el diagrama de Greenwood se aprecia que, para todas las condiciones de operación de la transmisión, el régimen de lubricación es elastohidrodinámico (Figura V-46).

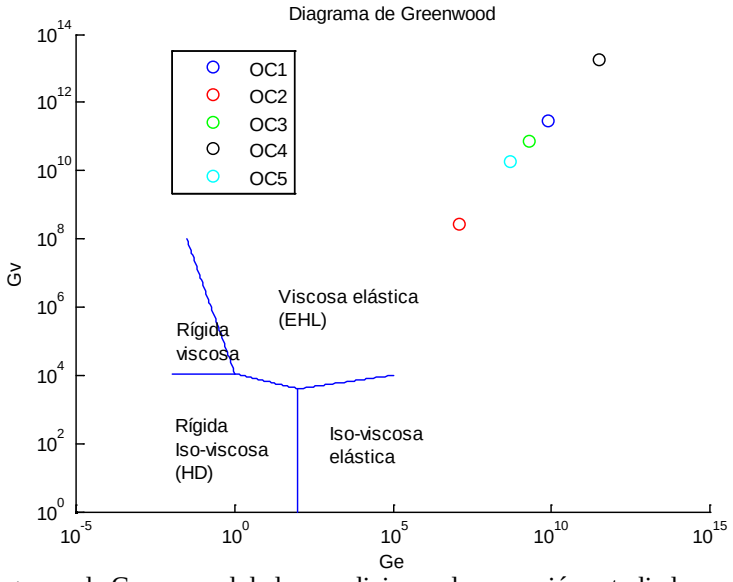


Figura V-46 Diagrama de Greenwood de las condiciones de operación estudiadas en el punto primitivo.

Para poder discernir dentro de la elastohidrodinámica en qué condiciones de lubricación se encuentra la transmisión, se evalúa la Figura V-47, donde se muestra la curva de Stribeck correspondiente a las cinco condiciones de operación, cuando se implementa el coeficiente de fricción de Castro.

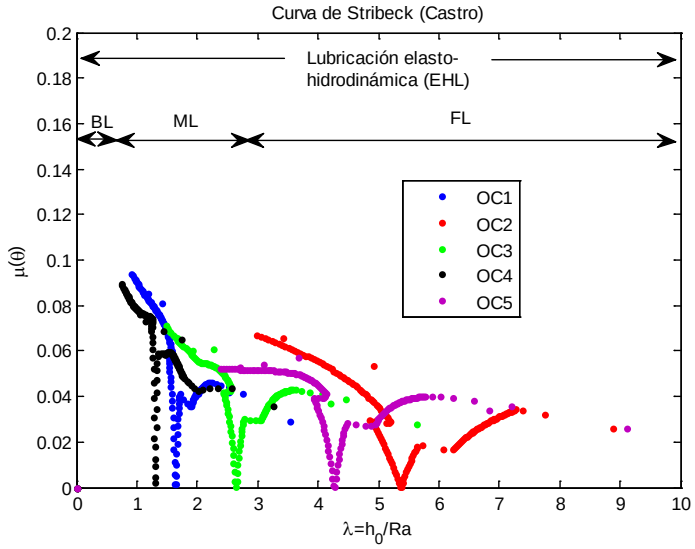


Figura V-47 Curva Stribeck para las condiciones de operación estudiadas en el supuesto sin corrección.

Las condiciones de lubricación de la transmisión están comprendidas entre mixtas y totalmente fluidas, tal y como se recoge en la Tabla V-9.

Tabla V-9 Resumen de los regímenes de lubricación por condiciones de operación.

Condiciones de operación	Par (Nm)	Velocidad (rpm)	Régimen de lubricación	Condiciones de lubricación
OC1	159	1500	EHL	ML / FL
OC2	40	6000	EHL	FL
OC3	159	3000	EHL	ML / FL
OC4	637	1500	EHL	ML
OC5	159	6000	EHL	FL

En la Figura V-48 se presenta el área de la curva de Stribeck correspondiente a las condiciones mixtas de lubricación. El objetivo es establecer las diferencias entre formulaciones híbridas (Castro y Zhu).

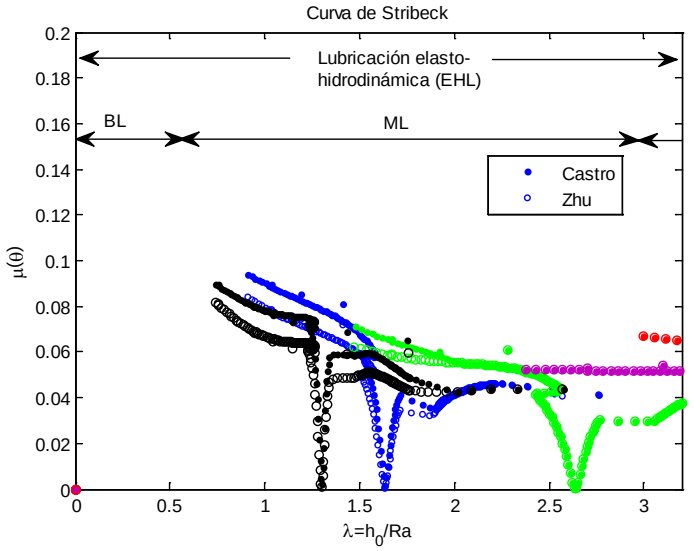


Figura V-48 Curva Stribeck para las condiciones de operación estudiadas en el supuesto sin corrección.

En la Figura V-48 se observa la dispersión entre formulaciones de coeficiente de fricción. Se identifica que las funciones tienen un rol principal, cuando el parámetro de Stribeck está comprendido entre 0.5 y 2. Como curiosidad, hay valores de los coeficientes de rozamiento que llegan a alcanzar el valor nulo. Se corresponden a la región del punto primitivo, donde la velocidad de deslizamiento es nula y, por tanto, la formulación de coeficiente de rozamiento actúa según lo previsto y se anula.

V.3.2.2.1. Primer escenario: Longitud y localización del contacto fija

Al igual que en la evaluación del efecto del reparto de carga, en este escenario se fijan los radios exteriores de ambas ruedas. Se consigue que la relación de contacto teórica permanezca constante en todos los casos de corrección y el segmento de contacto no se desplace.

Para la visualización de las figuras, se ha optado por incluir el parámetro a mostrar, particularizado para cada una de las tres formulaciones de coeficiente de fricción. De esta forma, cada figura estará formada a su vez por tres columnas. En la primera se mostrará el parámetro correspondiente a la formulación de Niemann, en la segunda para la formulación de Castro y en la tercera se incluirá el correspondiente a Zhu.

En la Figura V-49 se muestran los valores de eficiencia, cuando se implementan los tres coeficientes de fricción, para diferentes factores de corrección.

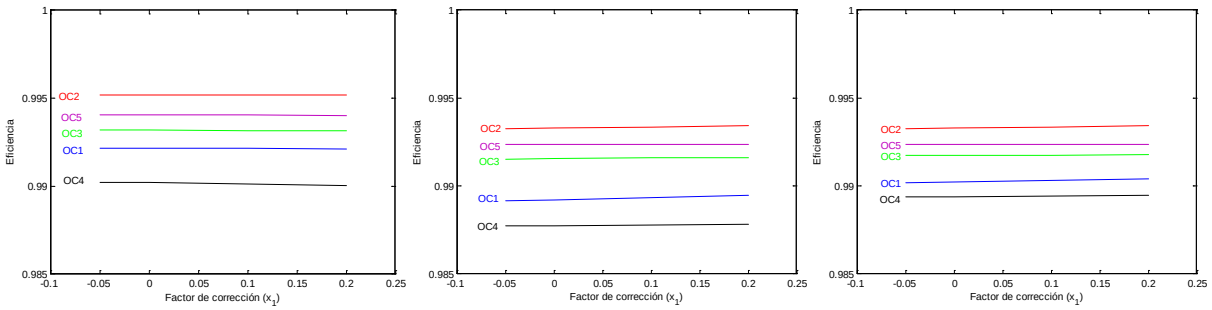


Figura V-49 Valores de eficiencia para diferentes valores de factor de corrección y condiciones de operación para los tres coeficientes de fricción a) Niemann, b) Castro y c) Zhu.

A partir de la Figura V-49, se observa que la variación de la eficiencia, para los tres coeficientes de fricción, dentro de las mismas condiciones de operación son mínimas. Cuanto mayor es el par (OC4), menor es la eficiencia, independientemente de la formulación de coeficiente de fricción. Asimismo, para un mismo nivel de par (OC1, 3 y 5), cuanto menor es la velocidad (OC1), menor es la eficiencia.

Comparando entre los tres coeficientes de fricción a estudiar, la eficiencia en el caso de Castro es menor que en el de Zhu y, a su vez, es menor que en el de Niemann. Además, analizando la dispersión de la eficiencia entre distintos niveles de par (OC1 y OC4), la mayor es la correspondiente a Niemann. Si se analizan velocidades (OC1 y OC3), la mayor dispersión corresponde a la formulación de Castro. De lo anterior se deduce que la formulación de Niemann es fuertemente dependiente del par, siendo las formulaciones híbridas más susceptibles a los cambios de velocidad.

A lo largo de esta subsección se mostrarán las formulaciones de coeficientes de fricción (Niemann, Castro y Zhu), así como su influencia en las pérdidas. No se presentarán los repartos de carga para no caer en la redundancia. Esto se justifica porque la variación de este parámetro al implementar diferentes formulaciones de coeficientes de fricción es despreciable

y solo afecta a la ZCS (subsección V.2.1). Por lo que el análisis del reparto de carga ya se evaluó para el caso de la formulación de Niemann en la subsección V.3.2.1.1 (Figura V-28).

En este estudio, aunque en las conclusiones están incluidas las cinco condiciones de operación, solo se muestran los parámetros correspondientes a OC1, OC2 y OC4. Se añade a las condiciones de mínimo y máximo nivel de par (OC2 y OC4), la relativa a OC1. Se debe a que, en estas condiciones, se detectan diferencias significativas en la eficiencia entre utilizar uno u otro coeficiente de fricción. Por lo tanto es interesante mostrar su análisis específico. Para la visualización de la figuras, se mostrarán las mismas condiciones de operación por fila, manteniendo el código de colores utilizado a lo largo del capítulo. En la primera fila se mostrarán las condiciones de operación 1, en azul, en la segunda las condiciones de operación 2, en rojo, y en la tercera las condiciones de operación 4, en negro.

En la Figura V-50 se muestra el efecto de las correcciones en las tres formulaciones de coeficiente de fricción. Para ayudar a la comprensión de esta figura, se muestra en la Tabla V-10 los valores medios de coeficiente de fricción en el caso de máxima corrección.

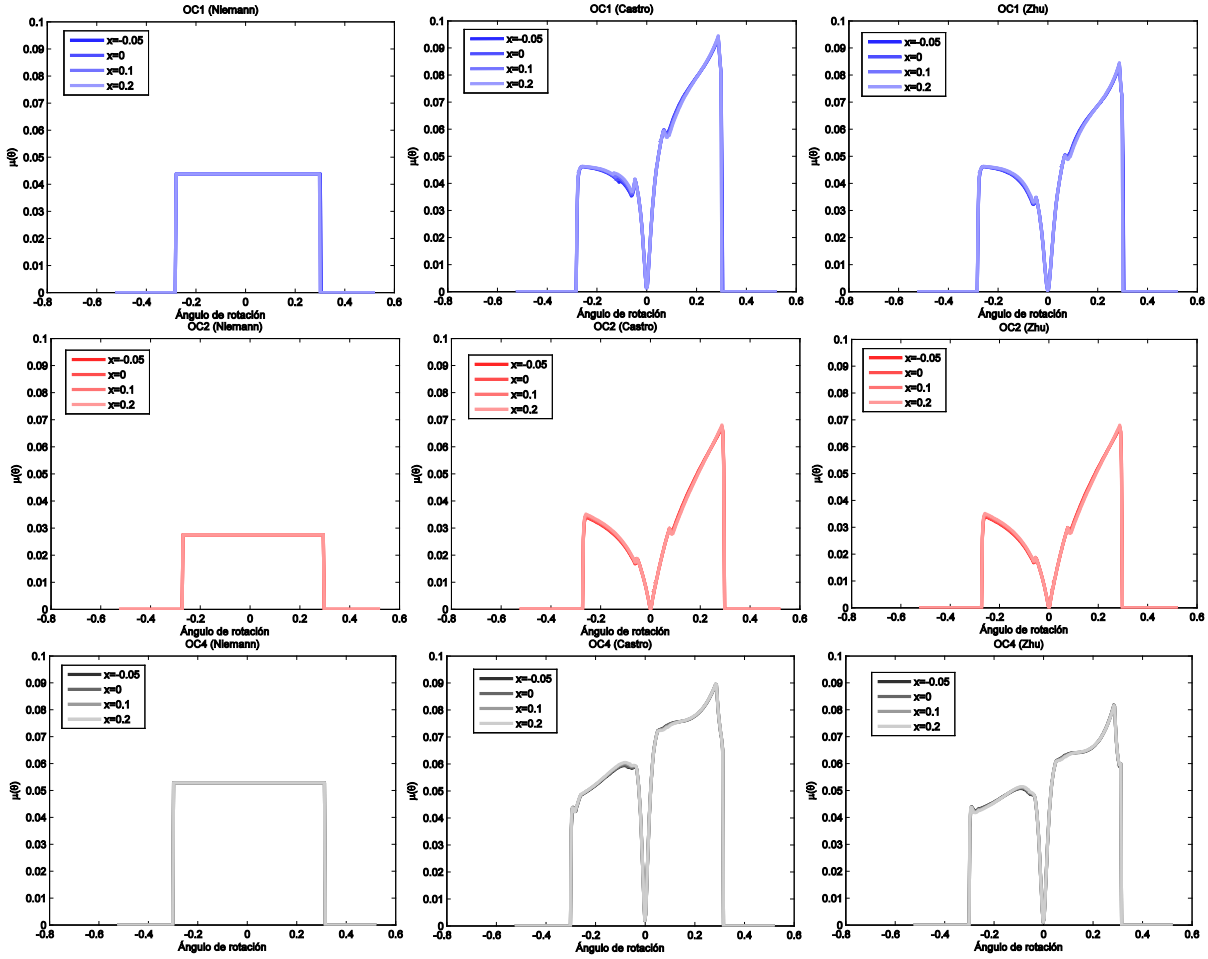


Figura V-50 Comparativa de los coeficientes de fricción para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).

La variación de la corrección provoca que la forma del reparto de carga cambie, cargándose más la PZCD y descargándose en la SZCD. En la Figura V-50 se aprecia que este hecho tiene una incidencia mínima en el coeficiente de rozamiento, independientemente de la formulación. Si se comparan las formulaciones de coeficiente de fricción, las formulaciones híbridas tienen sus valores máximos en las zonas donde la velocidad de deslizamiento es

máximo (inicio de la PZCD y final de la SZCD), mientras que la de Niemann es constante en todo el ciclo de engrane. Comparando entre formulaciones híbridas, son muy similares en la PZCD y en la ZCS, existiendo una distorsión en la SZCD, en la cual es mayor el coeficiente de Castro. Para analizar las condiciones de operación, además de la figura, se plantea la Tabla V-10. Presenta los valores medios del coeficiente de fricción en el caso de corrección máxima. Como la corrección, en este escenario, tiene una influencia mínima en las formulaciones de coeficiente de fricción, los valores medios son también aplicables al supuesto sin corrección.

Tabla V-10 Valores medios de coeficiente de fricción para el caso sin corrección y con máxima corrección.

μ_m(x₁=0.2)	OC1	OC2	OC3	OC4	OC5
Niemann	0.044	0.027	0.038	0.053	0.033
Castro	0.054	0.033	0.042	0.063	0.038
Zhu	0.048	0.033	0.041	0.062	0.038

De la Tabla V-10 se puede concluir que cuanto mayor es el par, mayor es el valor medio del coeficiente de fricción en todas las formulaciones (OC4). De los valores medios de coeficiente de fricción en OC1, OC3 y OC5 (nivel de par medio), se concluye que cuanto mayor es la velocidad, menor es este valor. Si se evalúan los valores medios de coeficiente de fricción dentro de unas condiciones de operación específicas, los valores correspondientes a Niemann son los menores, seguido de los de Zhu y por último los de Castro.

En la Figura V-51 se muestra el impacto de las correcciones en el factor de pérdidas (IPL).

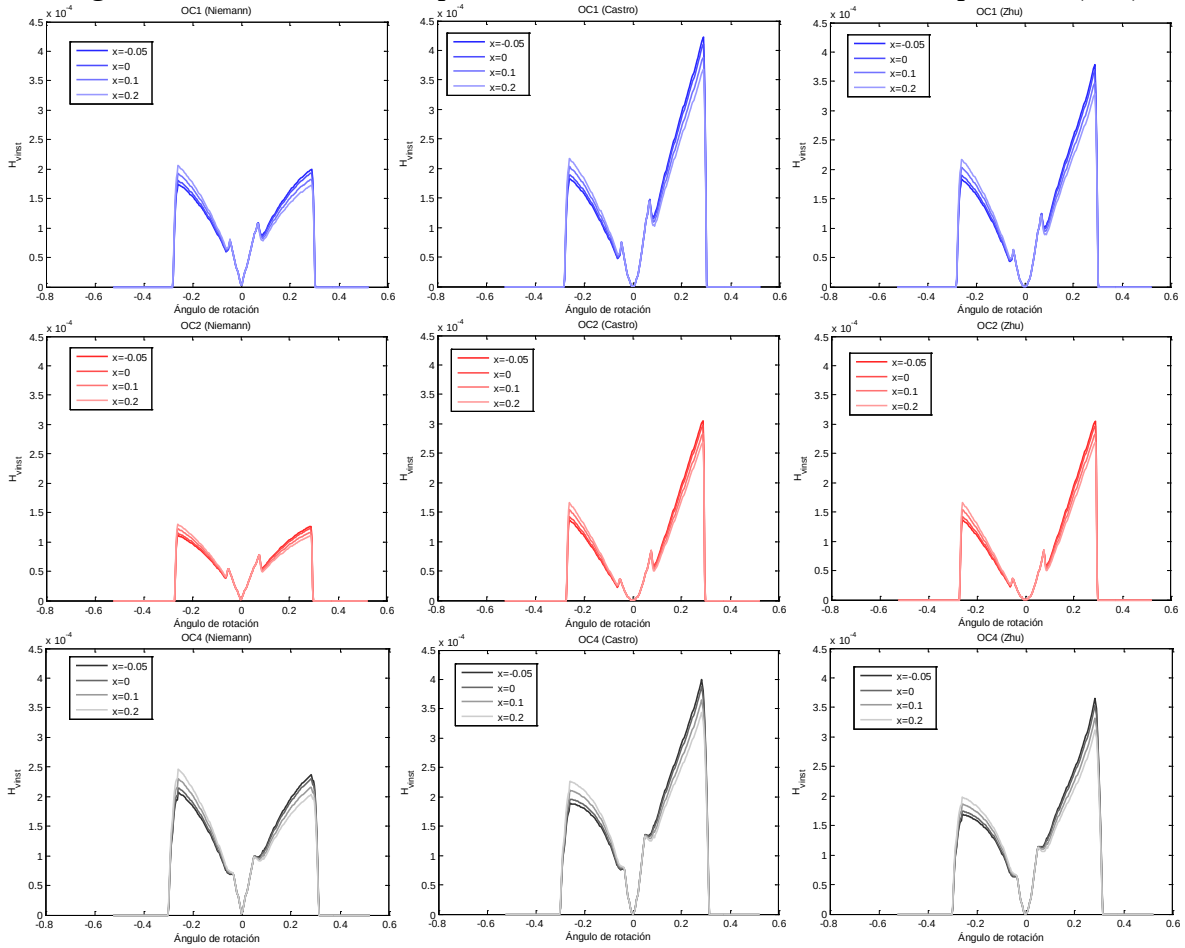


Figura V-51 Comparativa de los factores instantáneas de pérdidas para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).

Se aprecian pequeñas diferencias, con la variación de corrección, entre los valores correspondientes a las mismas condiciones de operación, en los tres coeficientes de fricción. Con el análisis previo del coeficiente de fricción y reparto de carga, se puede extraer que es éste último el que influye en el factor de pérdidas instantáneas. Además, el efecto de la corrección en la eficiencia en este escenario es casi nulo, porque el aumento de pérdidas con el incremento de la corrección al principio del contacto, se ve compensado por la disminución de pérdidas al final del contacto.

Analizando el efecto que tiene el coeficiente de fricción en el factor IPL, para todas las formulaciones de coeficiente de fricción, el factor IPL es muy similar en la PZCD y la ZCS, existiendo dispersión entre formulaciones en la SZCD. Se debe a que las condiciones de lubricación son mixtas en la SZCD, lo cual provoca que haya un aumento en la magnitud del coeficiente de fricción en esta región.

Analizando las condiciones de operación, como regla general, cuanto mayor es el par resistivo, más pérdidas se producen. Se obtiene el mismo resultado cuando la velocidad decrece. Para clarificar estas conclusiones, se presenta el factor IPL para los tres coeficientes de fricción y para los supuestos de máxima y mínima corrección (Figura V-52).

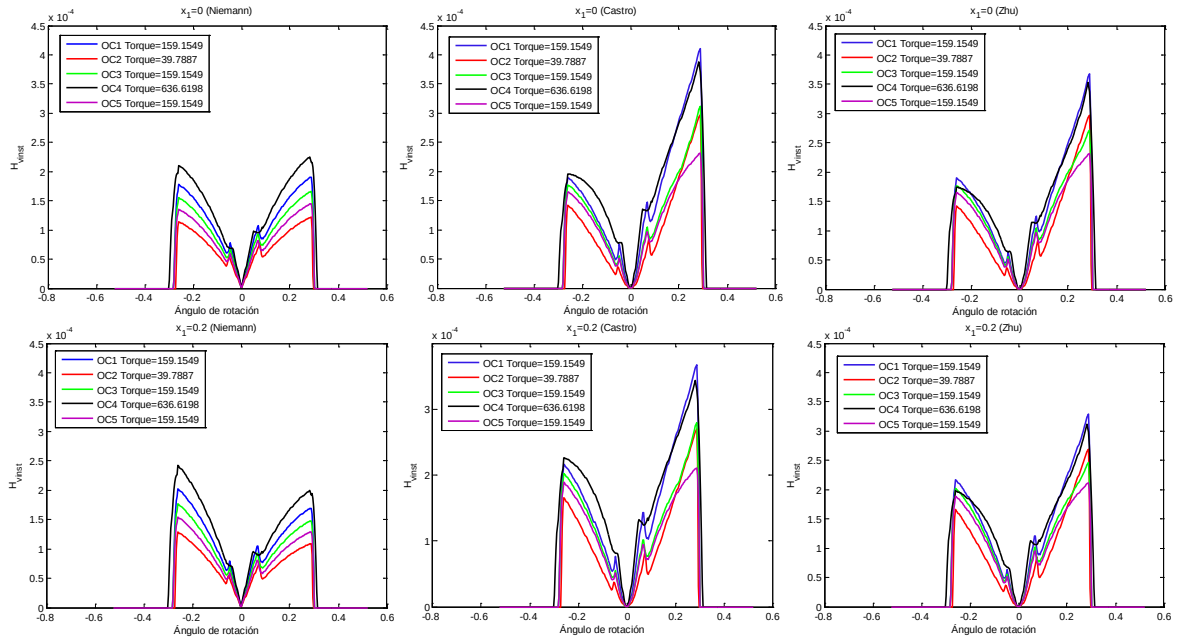


Figura V-52 Factores de pérdidas instantáneas para todas las condiciones de operación con factores de corrección x_1=0 y x_1=0.2.

V.3.2.2.2. Segundo escenario: Longitud del contacto fija y localización del contacto variable

Siguiendo el procedimiento expuesto en la subsección V.3.2.1.2., los radios exteriores de ambas ruedas se calculan manteniendo la relación de contacto teórica constante para cada caso de corrección. En la Figura V-53 se presentan los valores de eficiencia, para diversos casos de factor de corrección y condiciones de operación.

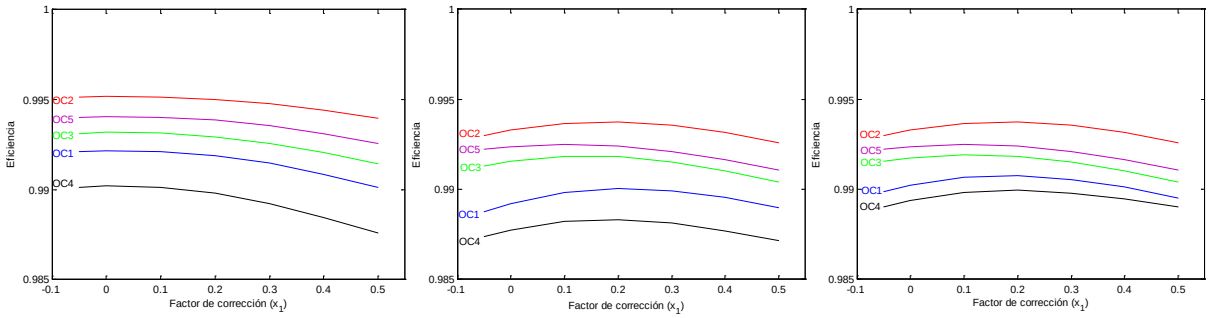


Figura V-53 Valores de eficiencia para diferentes valores de factor de corrección y condiciones de operación para los tres coeficientes de fricción a) Niemann, b) Castro y c) Zhu.

A partir de la Figura V-53, se aprecia que la variación de la eficiencia, con el aumento de la corrección dentro de las mismas condiciones de operación, tiene una tendencia similar en las tres formulaciones. Para unas condiciones de operación especificadas, en los tres casos hay un valor de corrección que hace la eficiencia óptima. Cuando se utiliza la formulación de Niemann, este valor es cercano a 0.1 para todas las condiciones de operación estudiadas. Sin embargo, cuando se implementan los otros dos coeficientes de fricción, no hay un valor general para todas las condiciones de operación. Por ejemplo, para OC1, OC2 y OC4, el factor de corrección que hace máxima la eficiencia es aproximadamente 0.2 en ambas formulaciones híbridas.

Analizando el efecto del coeficiente de fricción en la eficiencia, la calculada a partir del uso del coeficiente de fricción de Castro es la más restrictiva, seguida por la de Zhu, siendo la de Niemann la mayor.

Evaluando el efecto de las condiciones de operación en la eficiencia, se observa que, para las tres formulaciones de coeficiente de fricción estudiadas, se mantiene lo expuesto en el primer escenario. Cuanto mayor es el par y menor la velocidad, menor es la eficiencia.

Para comprender la tendencia seguida por la eficiencia, es necesario evaluar los factores de los cuales depende.

El análisis del reparto de carga, con la variación del factor de corrección, fue abordado en la subsección V.3.2.1.2 (Figura V-42), cuando se implementa el coeficiente de fricción de Niemann.

A través de la Figura V-54, se analiza el efecto de las correcciones y condiciones de operación en el coeficiente de fricción. Además, se incluye la Tabla V-11 con los valores medios de coeficiente de fricción para el de máxima corrección.

En la Figura V-54 se observa que, debido a la corrección, el contacto comienza y finaliza antes. Esto tiene un impacto notable en el coeficiente de fricción. Las dos formulaciones híbridas tienen un valor menor de coeficiente de fricción en la PZCD que en la SZCD. Al aumentar la corrección, el segmento de aproximación se hace más largo y el de alejamiento más corto. Por lo que se produce una reducción de la zona donde el valor de coeficiente de fricción es máximo (SZCD). Si se evalúan las formulaciones de coeficiente de fricción, ambas formulaciones híbridas tienen la misma forma. Sin embargo, hay diferencias en los valores extremos, los cuales son mayores en el caso de Castro.

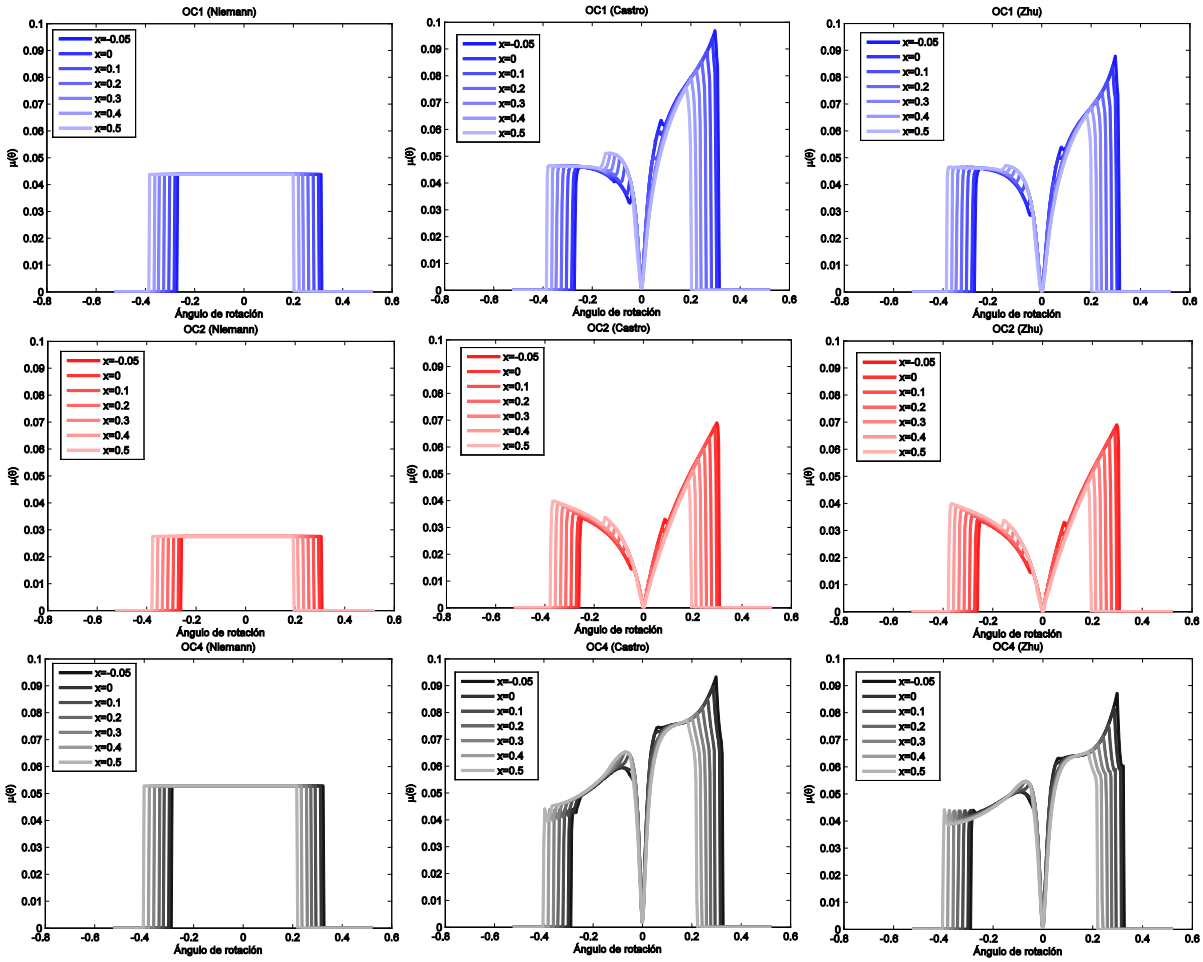


Figura V-54 Comparativa de los coeficientes de fricción para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).

Además, en la Tabla V-11 se muestran los valores medios de coeficiente de fricción para el caso de corrección máxima.

Tabla V-11 Valores medios de coeficiente de fricción para el caso de máxima corrección (x=0.5).

μ_m(x=0.5)	OC1	OC2	OC3	OC4	OC5
Niemann	0.044	0.027	0.038	0.053	0.033
Castro	0.046	0.029	0.039	0.055	0.036
Zhu	0.043	0.029	0.039	0.047	0.036

Se van a analizar los valores medios para el caso de corrección máxima (Tabla V-11) y se van a comparar con los del supuesto sin corrección (Tabla V-10). El coeficiente de fricción medio de Niemann, en el supuesto sin corrección, es menor que las otras dos formulaciones (analizado en el primer escenario). En el caso de corrección extrema, los valores de Niemann se mantienen constantes con respecto al supuesto sin corrección. Sin embargo, los valores medios, para las formulaciones híbridas, se reducen (Tabla V-11).

En la Figura V-55, se muestra el efecto de las correcciones y el de utilizar varias formulaciones de coeficiente de fricción, en los factores de pérdidas instantáneas (IPL).

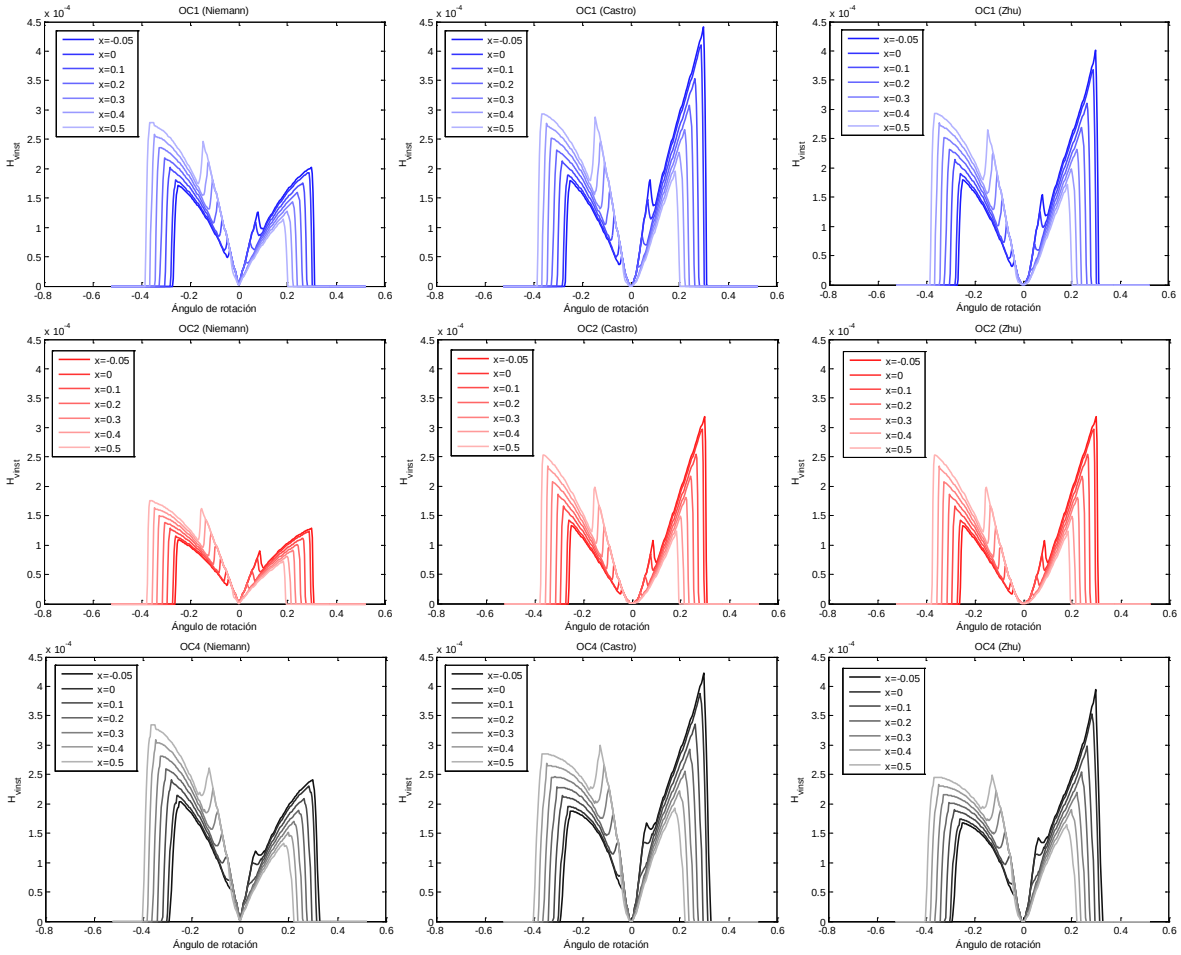


Figura V-55 Comparativa de los factores de pérdidas instantáneas para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).

En la Figura V-55 se observa que el aumento de la corrección provoca que la PZCD se alargue y la SZCD se acorte. A partir del análisis previo y de esta figura, se deduce que el reparto de carga es el factor determinante en la PZCD, ya que los valores del factor de pérdidas instantáneas son muy similares para las tres formulaciones. Asimismo, en la SZCD tanto el reparto de carga como el coeficiente de fricción son factores influyentes. El segundo en mayor medida, porque se aprecian grandes diferencias entre formulaciones.

Comparando entre formulaciones de coeficiente de fricción, para el supuesto sin corrección, en la SZCD las pérdidas, en el caso de las formulaciones híbridas, son mayores que en el de Niemann. Sin embargo, con el aumento de la corrección, se produce una disminución de las pérdidas. Se debe principalmente al acortamiento del segmento de alejamiento y a la reducción del reparto de carga. Por esta razón, la eficiencia aumenta hasta un cierto valor de corrección, denominado "*corrección óptima*", el cual maximiza el valor de eficiencia. Se concluye, por tanto, que la formulación del coeficiente de fricción es determinante para calcular el valor de corrección óptima del sistema.

Analizando las condiciones de operación, como regla general, cuanto mayor sea el par resistivo y menor la velocidad, más pérdidas se producen. Con el fin de justificar esta afirmación, se presenta el factor IPL, en los casos extremos de corrección considerados (x_1=0 and x_1=0.5), para los tres coeficientes de fricción (Figura V-56).

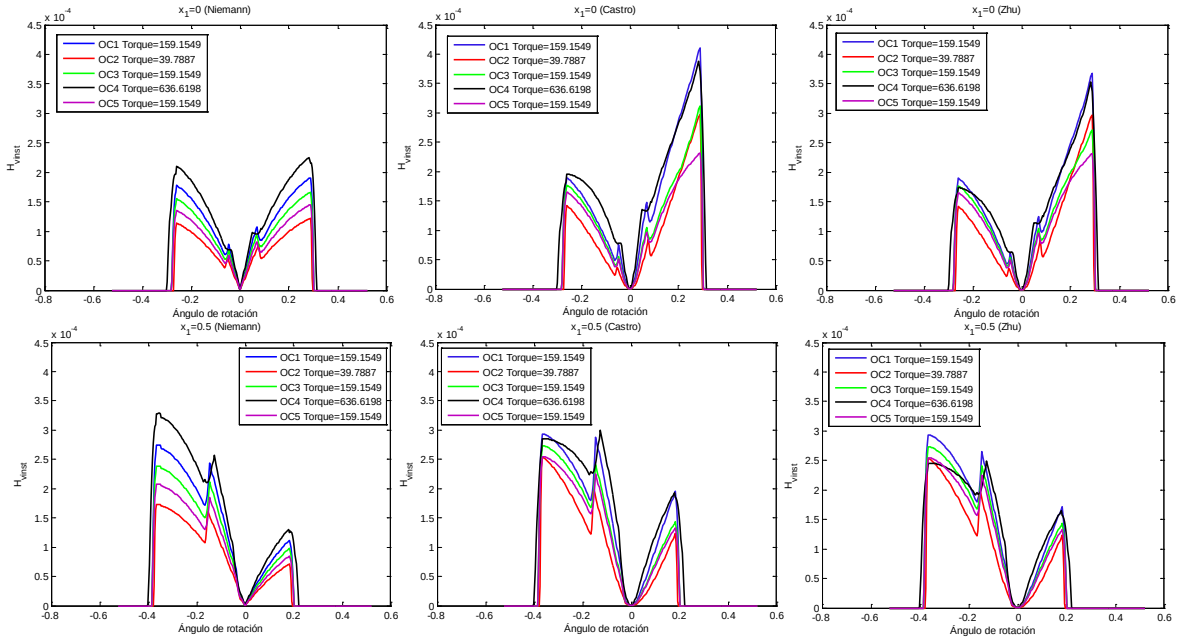


Figura V-56 Factores de pérdidas instantáneas para todas las condiciones de operación con factores de corrección x_1=0 y x_1=0.5.

V.3.2.2.3. Tercer escenario: Longitud y localización del contacto variable

El objetivo de este tercer escenario es añadir el efecto de la variación de la relación de contacto, en la eficiencia, al impacto de las correcciones. Para ello, se varían los radios exteriores de ambas ruedas, de tal manera que la localización y relación de contacto teórica no sean constantes con el aumento de la corrección (Ecuación (V.5)).

En la Figura V-57 se presenta la eficiencia del sistema para diferentes correcciones, condiciones de operación y para las tres formulaciones de coeficiente de fricción.

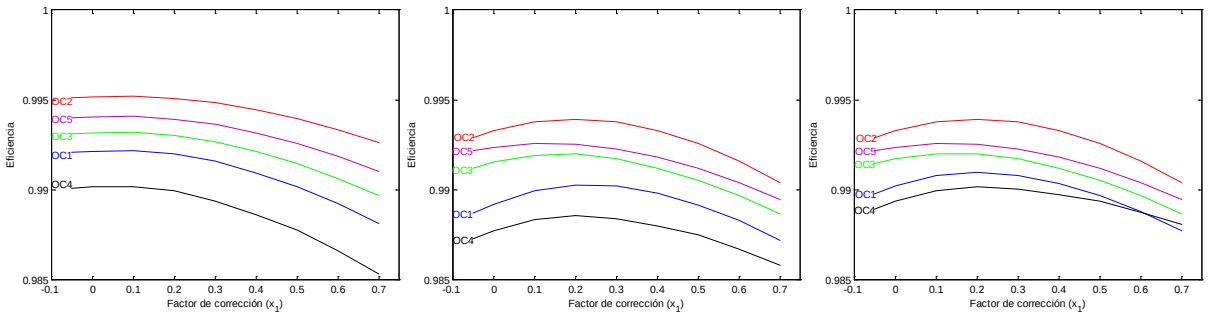


Figura V-57 Valores de eficiencia para diferentes valores de factor de corrección y condiciones de operación para los tres coeficientes de fricción: a) Niemann, b) Castro y c) Zhu.

En la Figura V-57, al igual que en el escenario anterior, se observa que los valores de eficiencia tienen un valor óptimo de corrección, para el cual la eficiencia es máxima.

Analizando las formulaciones de coeficiente de fricción, se mantiene que la eficiencia calculada a partir del coeficiente de fricción de Castro es la menor, seguida de la de Zhu, siendo la mayor la correspondiente a Niemann. Como excepción, en el caso de Zhu, la tendencia de la eficiencia en OC4 cambia susceptiblemente. Con el aumento de la corrección, la eficiencia no disminuye en igual medida que para las otras dos formulaciones.

Para explicar la tendencia de la eficiencia con el aumento de la corrección, se estudiarán, pormenorizadamente, los factores de los cuales depende.

El análisis del reparto de carga con la variación del factor de corrección, ya fue abordado en la subsección V.3.2.1.3 (Figura V-42), implementando el coeficiente de fricción de Niemann.

A través de la Figura V-58, se analiza el efecto de las correcciones y de las condiciones de operación en el coeficiente de fricción. Además, se incluye la Tabla V-12 con los valores medios de coeficiente de fricción, para el caso de máxima corrección.

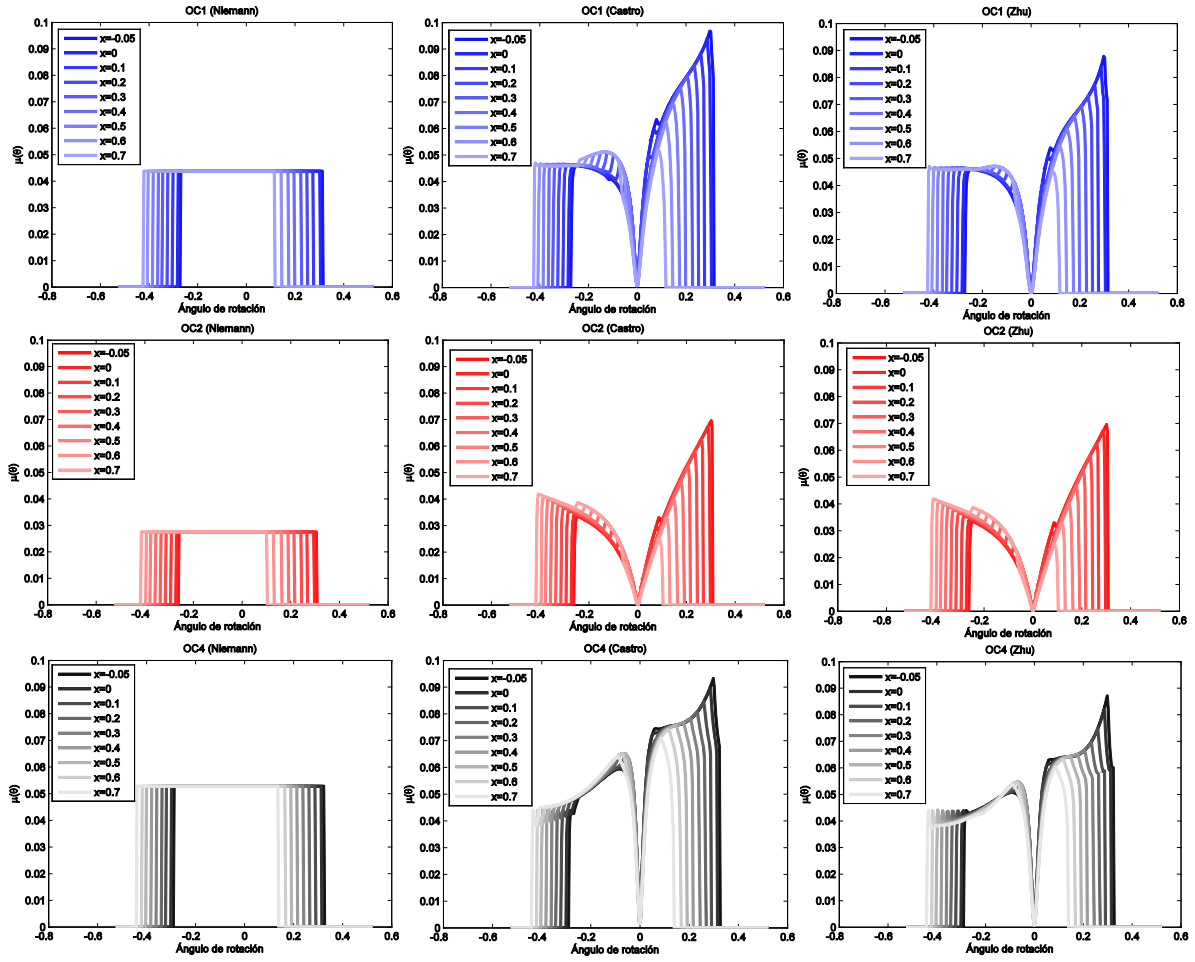


Figura V-58 Comparativa de los coeficientes de fricción para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).

En la Figura V-58 se observa que, con el aumento de la corrección, el contacto comienza y finaliza antes y, además, la longitud del segmento de contacto es más corto. Ambos efectos tienen un impacto notable en el coeficiente de fricción.

Las dos formulaciones híbridas tienen un valor menor de coeficiente de fricción en la PZCD que en la SZCD. Al aumentar la corrección, el segmento de aproximación se hace más largo y el de alejamiento más corto, provocando una reducción de la zona donde el valor de coeficiente de fricción es máximo (SZCD). Para niveles de par reducidos (OC2), los coeficientes de fricción son exactamente iguales, dado que están bajo condiciones de lubricación completamente fluidas en EHL. En los otros casos, la zona donde existe una distorsión más importante, entre formulaciones, son los extremos del contacto. Se debe a la acción de las funciones de ponderación (condiciones de lubricación mixtas).

En la Tabla V-12 se muestran los valores medios de coeficiente de fricción para el caso de corrección máxima.

Tabla V-12 Valores medios de coeficiente de fricción para el caso de máxima corrección (x=0.7).

μ_m(x=0.7)	OC1	OC2	OC3	OC4	OC5
Niemann	0.044	0.027	0.038	0.053	0.033
Castro	0.041	0.028	0.035	0.050	0.033
Zhu	0.039	0.028	0.036	0.042	0.033

Si se comparan los valores medios para el supuesto de corrección máxima (Tabla V-12) y mínima (Tabla V-10), se deduce que las correcciones producen una reducción del valor medio de los coeficientes de fricción en las formulaciones híbridas.

En la Figura V-59, se muestra el efecto de las correcciones y las formulaciones de coeficiente de fricción en los factores de pérdidas instantáneas (IPL).

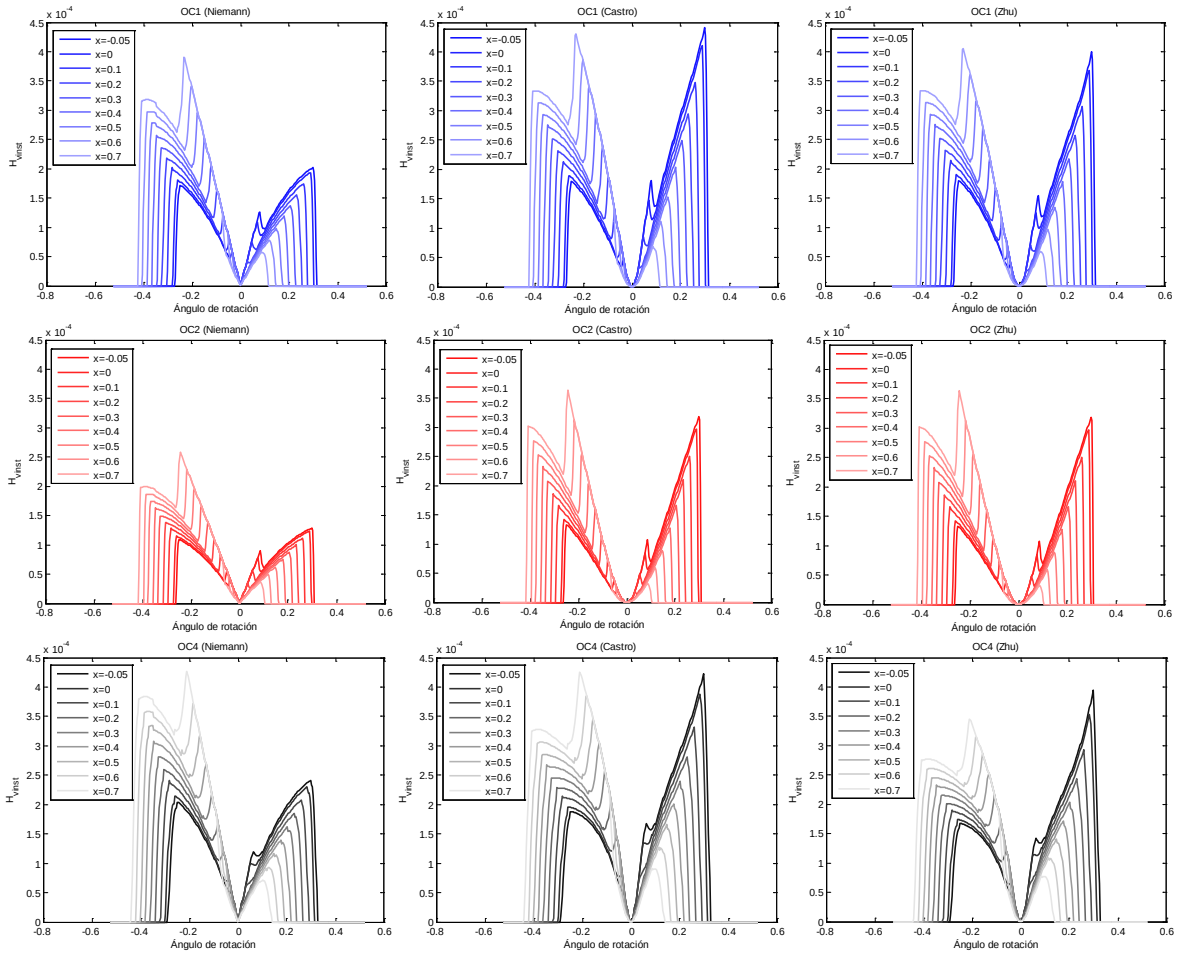


Figura V-59 Comparativa de los factores instantáneas de pérdidas para las condiciones de operación OC1 (159 Nm y 1500 rpm), OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y OC4 (637 Nm y 15000 rpm).

En la Figura V-59 se observa que el aumento de la corrección provoca que la PZCD se alargue y la SZCD se acorte. A partir del análisis previo y de esta figura, se extraen las mismas conclusiones que en el segundo escenario.

En la Figura V-60 se presenta el factor IPL en los supuestos extremos de corrección considerados (x_1=0 and x_1=0.7) y para para los tres coeficientes de fricción.

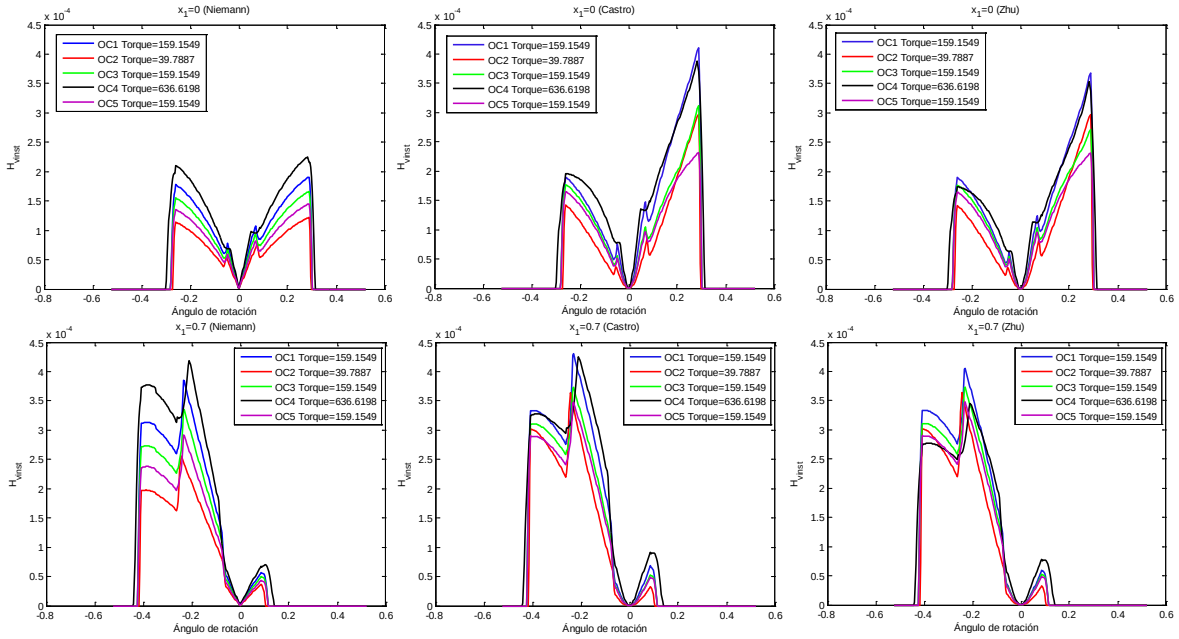


Figura V-60 Factores de pérdidas instantáneas para todas las condiciones de operación con factores de corrección x_1=0 y x_1=0.7.

V.4. Estudio de la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos con rebajes en la punta del diente

En este tercer estudio, se muestra el análisis de la eficiencia en una transmisión de engranajes rectos con rebajes en la punta del diente y características geométricas y de fabricación especificadas en la Tabla V-13.

Tabla V-13 Parámetros geométricos de la transmisión objeto de estudio.

Parámetros geométricos			
Número de dientes del piñón	18	Módulo	3
Número de dientes de la rueda conducida	36	Anchura del engranaje	26.7 mm
Ángulo de presión	20º	Rugosidad media	0.8 μm

Para ello se plantean dos análisis: i) el análisis de la eficiencia de la transmisión con unos rebajes específicos, cuando se varía el par; y ii) el análisis de la eficiencia de la transmisión, cuando se varían los parámetros que definen los rebajes, para unas condiciones de operación específicas.

V.4.1. Análisis del par

Se evalúa el efecto del reparto de carga y del coeficiente de fricción, con la variación del par resistivo, en la eficiencia del sistema. Hasta este punto del capítulo se habían analizado ambos efectos por separado. Pero en este estudio, como las formulaciones analíticas de reparto de carga no se ven afectadas por el rebaje, se realizará una justificación inicial de este hecho, para posteriormente centrar el análisis en el reparto de carga "avanzado GEDUC". Para la justificación inicial, se implementan las cuatro formulaciones de reparto de carga y el coeficiente de fricción de Niemann. Posteriormente, se presentan los resultados correspondientes al reparto de carga "avanzado GEDUC", con las tres formulaciones de coeficientes de fricción, y así estudiar ambos efectos conjuntamente.

En la trasmisión a analizar, el rebaje se introduce al piñón, a la rueda conducida y, además, a ambos engranajes a la vez. El objetivo es mostrar, aisladamente, el efecto del rebaje en cada rueda y, posteriormente, el efecto de ambas modificaciones de perfil en la eficiencia del sistema. En este análisis, el rebaje en la punta utilizado tiene una magnitud de 0.1 mm y una longitud de 3 mm, el cual se corresponde con el valor máximo de rebaje utilizado en el segundo análisis. Con el objetivo de clarificar los supuestos de rebaje evaluados en el análisis, se muestra la Figura V-61.

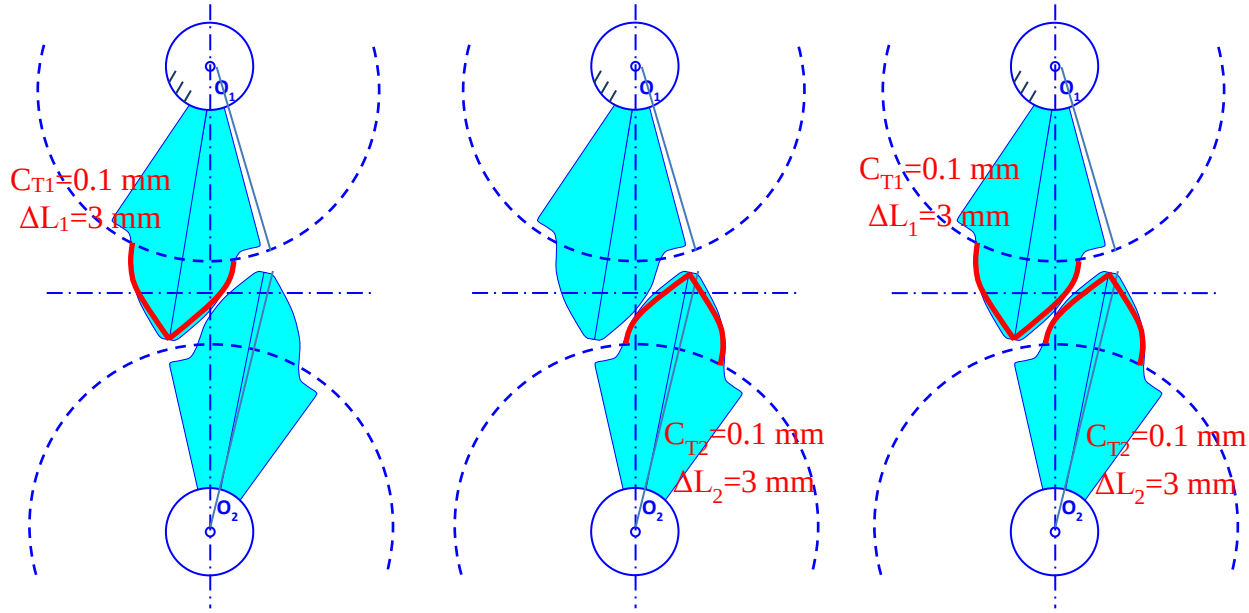


Figura V-61 Esquema de en qué engranajes se introducen los rebajes en los diferentes supuestos.

Además, con el objetivo de identificar el impacto de cada tipología de rebaje en el reparto de carga "Avanzado GEDUC", se muestra en la Figura V-62, a modo de ejemplo, el efecto de los supuestos de rebaje en el reparto de carga, con respecto al caso sin modificaciones.

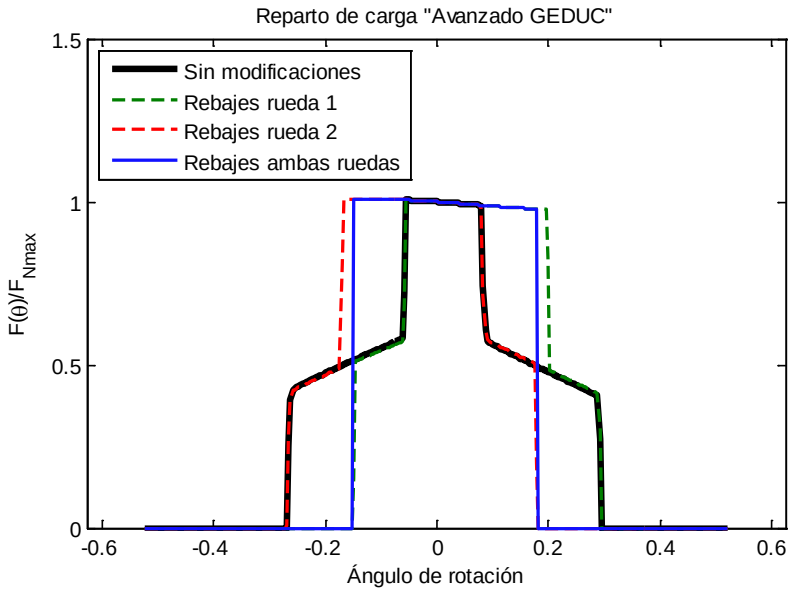
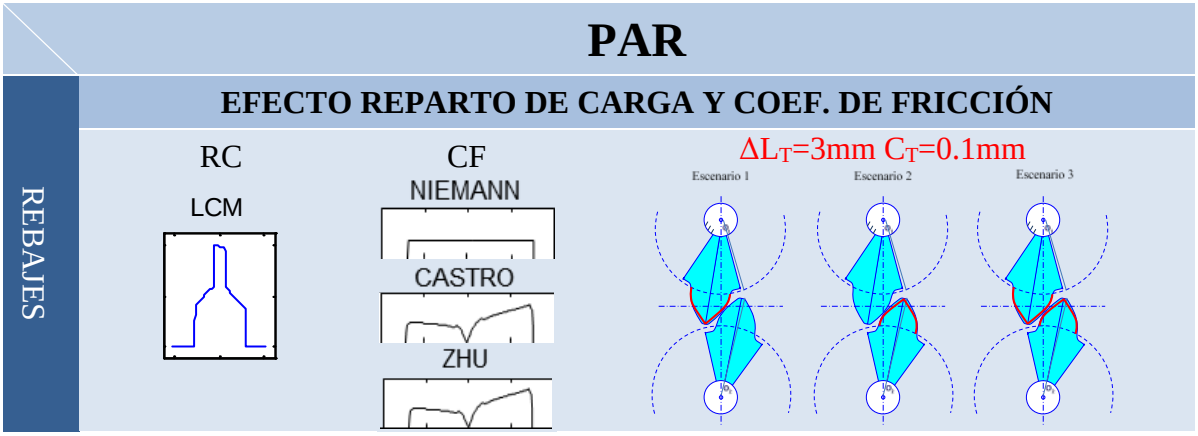


Figura V-62 Reparto de carga cuando se implementan el coeficiente de fricción de Castro sin modificaciones (-) y con rebajes en: piñón (--), rueda conducida (--) y ambos engranajes (-) (Par=19.9 Nm y 3000 rpm).

Con la finalidad de mostrar el planteamiento de este análisis, se presenta la Tabla V-14.

Tabla V-14 Resumen del análisis del par en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos con rebajes.



V.4.1.1. Efecto del reparto de carga y del coeficiente de fricción

Para analizar el efecto del reparto de carga, inicialmente se muestra en la Figura V-3 la eficiencia calculada a través del *procedimiento analítico* y del *propuesto*, cuando se implementa la formulación de coeficiente de rozamiento de Niemann. Para realizar la comparativa entre supuestos de rebajes se van a mostrar los parámetros de interés siguiendo la estructura de la Figura V-61. A la izquierda el supuesto en el que se introducen rebajes en el piñón, en el medio cuando se introducen en la rueda conducida y a la derecha en el caso de que se incluyan rebajes en ambos engranajes.

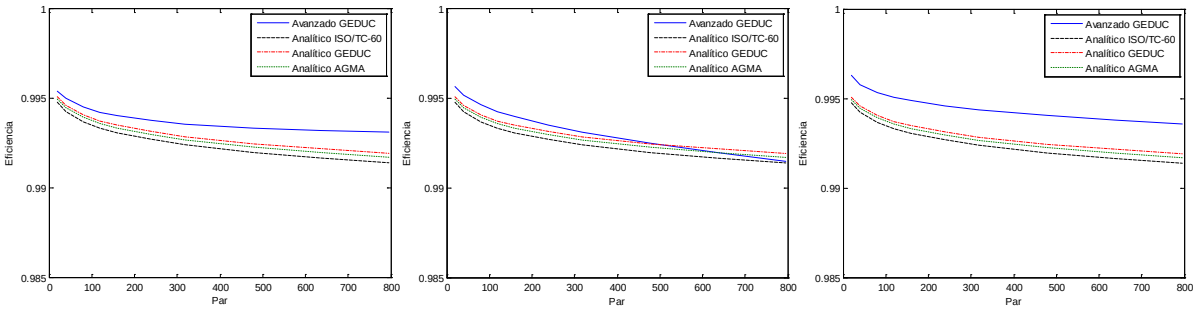


Figura V-63 Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos con rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos.

La tendencia de la eficiencia, calculada a partir de ambos procedimientos, es reducirse con el aumento del par, en los tres supuestos de rebaje. La dispersión entre procedimientos es mayor también con el aumento del par, salvo en el caso en que el rebaje se introduzca en la rueda conducida. Cuando se analiza el *procedimiento analítico*, los valores de eficiencia obtenidos en los tres supuestos son exactamente iguales entre sí y, además, coinciden con la eficiencia calcula para engranajes estándar (en la Figura V-3 de la subsección V.2.1). Se deduce que este procedimiento no tiene en cuenta la presencia de modificaciones de perfil. Por esta razón, una vez analizada la relación de contacto, por simplicidad solo se analizará el *procedimiento avanzado*. Si se evalúa el *procedimiento avanzado*, la eficiencia, cuando se incluyen rebajes en ambas ruedas, es mayor que la relativa a introducirlos en el piñón y, a su vez, mayor que la correspondiente a introducir los rebajes en la rueda conducida. Para explicar el porqué de esta tendencia, se va a presentar la comparativa entre las relaciones de contacto teórica y efectiva (Figura V-64) y los errores de transmisión (Figura V-65).

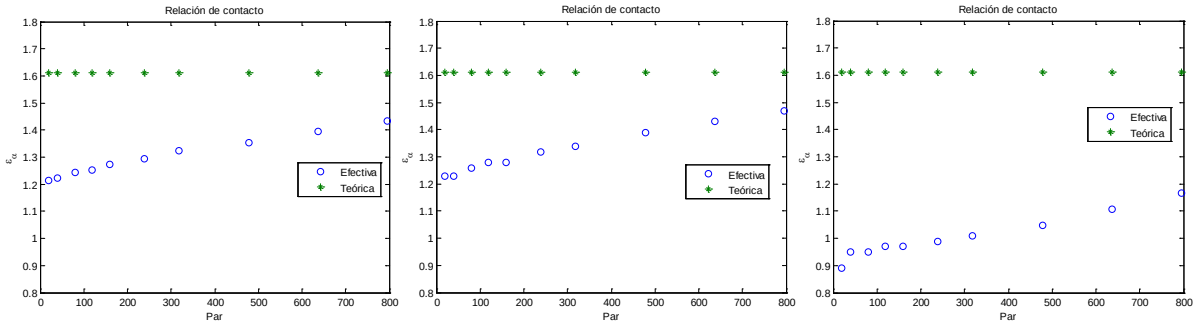


Figura V-64 Relación de contacto teórica y efectiva para diferentes valores de par resistivo: rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos.

En la Figura V-64 se aprecia que la diferencia de la longitud de contacto entre procedimientos es significativa, influyendo directamente en la eficiencia. En todos los niveles de par, con la inclusión del rebaje, la relación de contacto efectiva es menor que la teórica. Esto resulta en que la eficiencia, calculada a través del *procedimiento avanzado*, es mayor que la correspondiente al *analítico*. Además, existe una correlación directa entre eficiencia y relación de contacto efectiva, siendo inversamente proporcionales.

Todo lo relativo a las relaciones de contacto, se ve reflejado en los factores de los que depende la eficiencia y en el error de transmisión (Figura V-65).

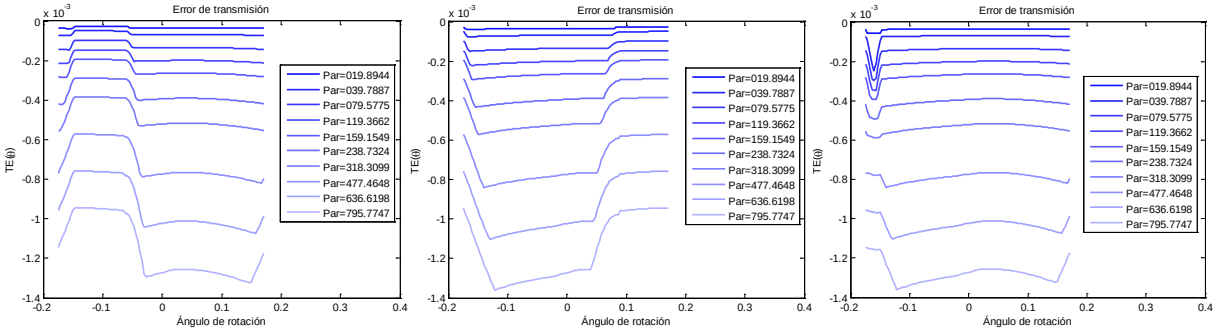


Figura V-65 Error de transmisión para el enfoque propuesto en las condiciones de operación a estudio: rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos.

El objetivo de la Figura V-65 es mostrar la influencia del cambio de la relación de contacto efectiva (variando el par) en el error de transmisión. Como algo notable, en el tercer supuesto de rebaje (rebaje en ambos engranajes), hay un cambio claro en el error de transmisión, cuando la relación de contacto efectiva pasa de ser menor, a mayor que la unidad, por el aumento de par. Esto se traduce en que el par óptimo de funcionamiento de la transmisión es aproximadamente 350 Nm, para el cual la relación de contacto efectiva es la unidad. El modelo aporta valores de eficiencia mayores que el correspondiente a 350 Nm. Desde el punto de vista teórico, esto indica que cuanto menor sea la longitud del contacto, menos pérdidas. Sin embargo, esto no tiene sentido desde el punto de vista dinámico. En niveles de par menores de 350 Nm existe pérdida de contacto e impactos entre dientes, lo cual no es deseado. De lo anterior se concluye que el rebaje que optimiza, tanto la eficiencia como el funcionamiento dinámico de la transmisión, produce que la relación de contacto sea la unidad.

Una vez realizada la correlación entre procedimientos, se llega a la conclusión de que el *procedimiento analítico* no se ve afectado por las modificaciones de perfil. Por esta razón, en este análisis solo analiza el *procedimiento avanzado*.

Se va a evaluar el efecto de los rebajes en el reparto de carga y su impacto en la eficiencia y en el coeficiente de fricción. Además, se va estudiar el efecto de la utilización de una u otra formulación de coeficiente de fricción en el cálculo de la eficiencia. Para ello, primero se muestra la influencia del rebaje en las condiciones de lubricación de la transmisión, a través de la curva de Stribeck (Figura V-66).

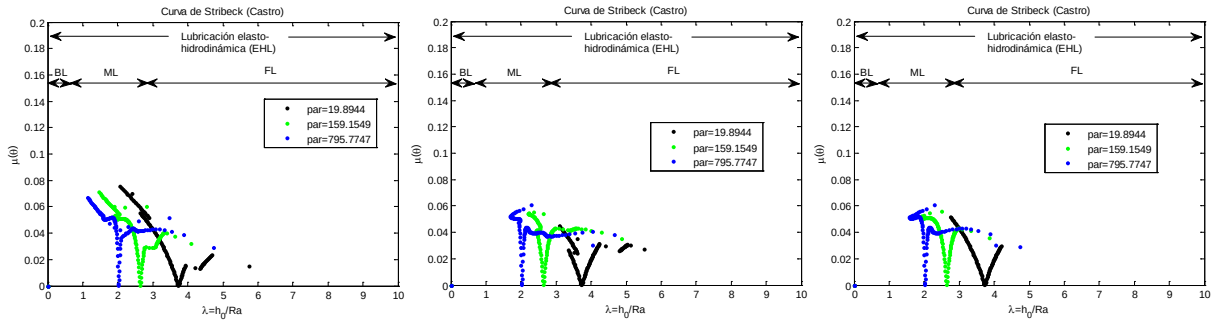


Figura V-66 Curva Stribeck para los valores extremos y medio de par aplicado: rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos.

Se aprecia que, para niveles de par menores a 100 Nm, las condiciones de lubricación son totalmente fluidas, siendo mixtas para niveles mayores de par.

En la Figura V-67 se muestra la eficiencia de la transmisión objeto de estudio, para diferentes niveles de par, y cuando se implementan los tres coeficientes de fricción.

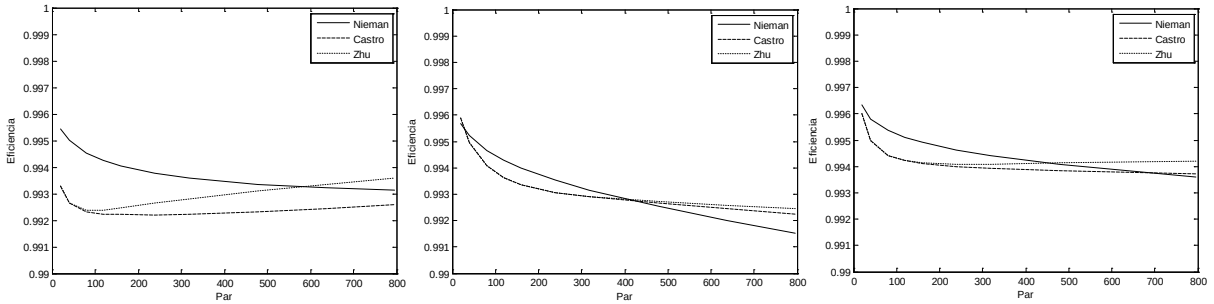


Figura V-67 Eficiencia de la transmisión de engranajes rectos con rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos, para los coeficientes de fricción de Niemann, Castro y Zhu.

Cuando se implementa la formulación de Niemann, la eficiencia se reduce con el aumento del par, en los tres supuestos de rebaje. Esta tendencia no se mantiene al implementar las formulaciones híbridas. En todos los supuestos de rebaje, hay una reducción pronunciada con el aumento de par, entre 0 y 100 Nm, apreciándose un cambio de tendencia a partir de este valor, dependiendo del supuesto de rebaje analizado.

Cuando se introducen los rebajes al piñón, tanto la eficiencia correspondiente a Castro como la de Zhu aumentan con el incremento del par a partir de 100 Nm, siendo mayor la pendiente en el caso de la formulación de Zhu.

En el supuesto de introducir rebajes en la rueda conducida, la eficiencia decrece con el aumento de par para todas las formulaciones de coeficiente de fricción.

Cuando se introducen rebajes en ambos engranajes, a partir de 100 Nm, la eficiencia relativa a Zhu aumenta ligeramente y la de Castro disminuye ligeramente.

Si se compara la eficiencia entre supuestos de rebaje, la eficiencia cuando se introducen rebajes en ambas ruedas es la mayor.

Para evaluar la eficiencia, se presentan los parámetros de los que depende, empezando por el reparto de carga. Por simplicidad solo se muestra el reparto de carga cuando se implementa el coeficiente de rozamiento de Castro.

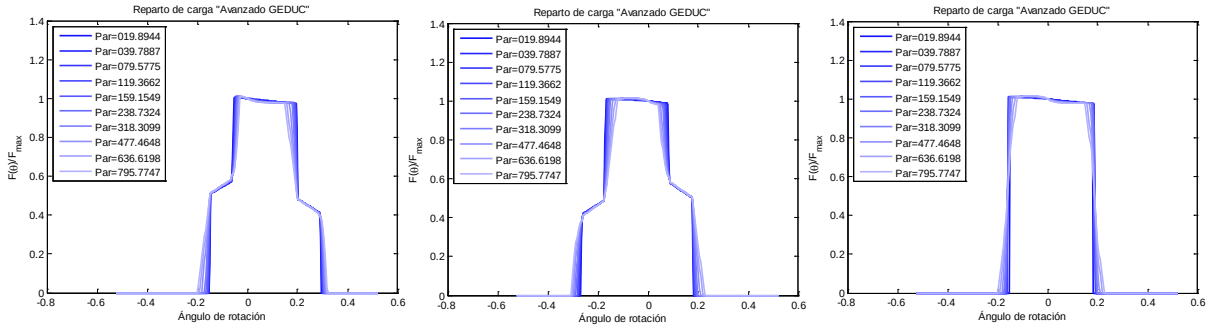


Figura V-68 Reparto de carga cuando se implementan el coeficiente de fricción de Castro *et al.*, con rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos engranajes, en las condiciones de operación objeto de estudio.

En la Figura V-68 se observan los repartos de carga obtenidos para cada supuesto de rebaje. Con la inclusión de rebajes, la relación de contacto es menor que en el supuesto sin rebaje. En consecuencia, la zona de contacto simple (ZCS) es mayor y las zonas de contacto doble (ZCD) son menores.

Cuando el rebaje se introduce en el piñón, el inicio de la PZCD empieza más tarde y la ZCS se alarga después del punto primitivo, reduciéndose así la SZCD. Esto produce que el reparto de carga sea desigual en las zonas de contacto doble, siendo mayor al inicio que al final del

contacto. Este hecho produce que, con el aumento del par, la longitud del contacto aumente más al inicio que al final del contacto.

Con la inclusión de rebajes en la rueda conducida, se observa el efecto contrario. La reducción de la longitud del contacto se produce en la SZCD y el aumento de la ZCS se produce antes del punto primitivo. Esto produce que la PZCD esté menos cargada que la segunda. Por lo tanto, con el aumento del par, la longitud del contacto se alarga más al final del contacto que al principio.

Cuando se incluyen rebajes a ambos engranajes, se superponen los efectos expuestos, traduciéndose en una reducción de la longitud de contacto tanto al inicio como al final del contacto. En algunos niveles de par, no hay zona de contacto doble (relación de contacto menor que la unidad).

Todos estos efectos del reparto de carga tienen una incidencia importante, tanto en el coeficiente de fricción como en las pérdidas, como se muestra en la Figura V-69 y Figura V-70.

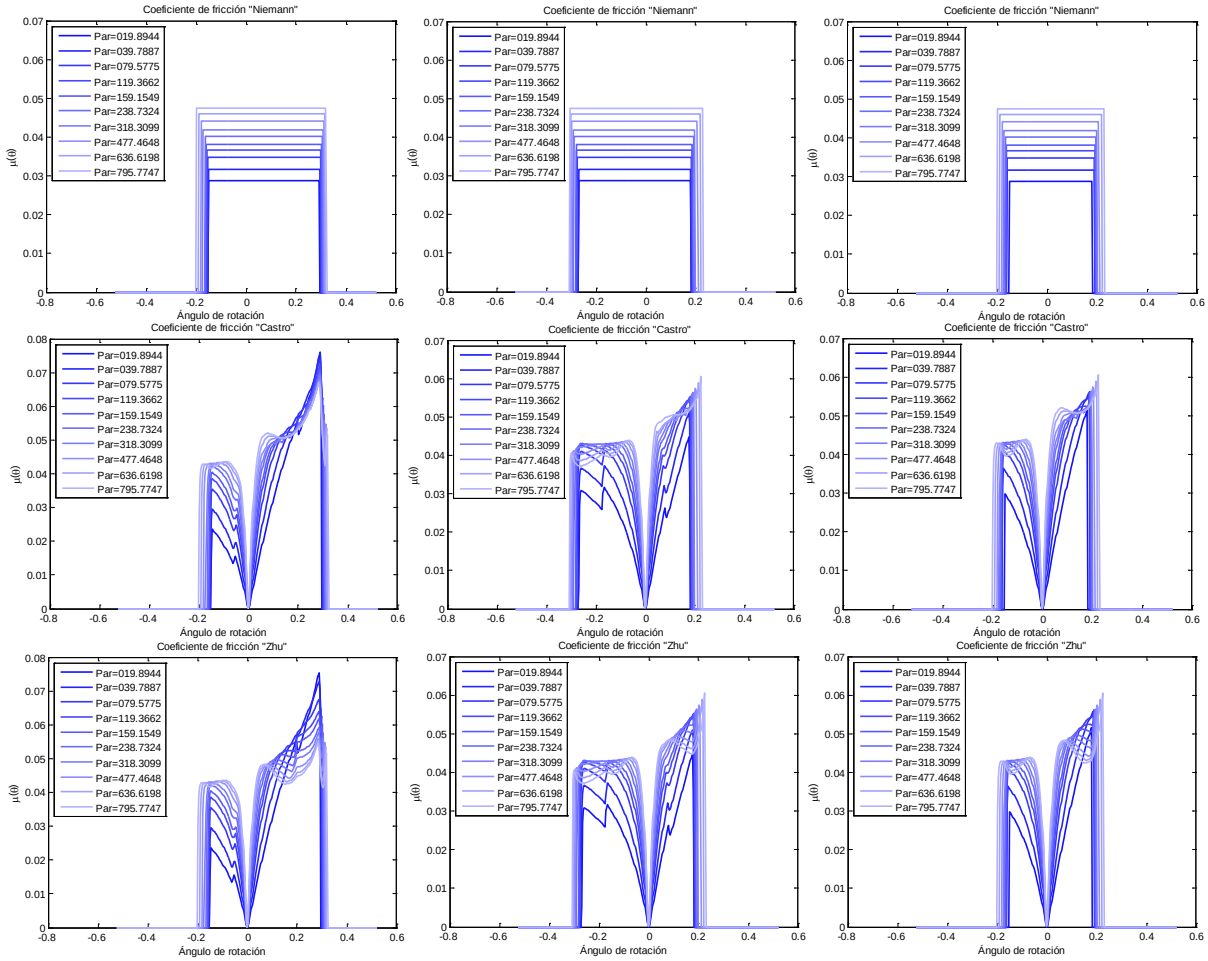


Figura V-69 Coeficientes de fricción con inclusión de rebajes en el piñón, rueda conducida y ambos engranajes, en las condiciones de operación objeto de estudio.

En la Figura V-69 se presentan los coeficientes de fricción (misma formulación por fila) para cada supuesto de rebaje (mismo supuesto de rebaje por columna).

La inclusión del rebaje en el piñón (primera columna) produce una reducción de la longitud de contacto al inicio del contacto. El aumento del par provoca un incremento del valor del coeficiente de fricción en las formulaciones de Niemann y Castro. En la formulación de Zhu,

el coeficiente de fricción aumenta con el par en todas las regiones menos en la SZCD, que se reduce.

Cuando se introduce el rebaje en la rueda conducida (segunda columna), la reducción de la longitud del contacto se produce al final del contacto. La tendencia del valor del coeficiente de fricción, con el aumento del par, es crecer en todas las regiones hasta los 300 Nm. A partir este nivel de par, la magnitud de las formulaciones híbridas en los extremos del contacto decrece.

En el supuesto en el que se introducen rebajes a ambos engranajes (tercera columna), se superponen los efectos expuestos para los dos supuestos de rebajes considerados.

Todos los efectos de los rebajes en el coeficiente de fricción y en el reparto de carga tienen un impacto importante en los factores de pérdidas instantáneas (IPL) (Figura V-70).

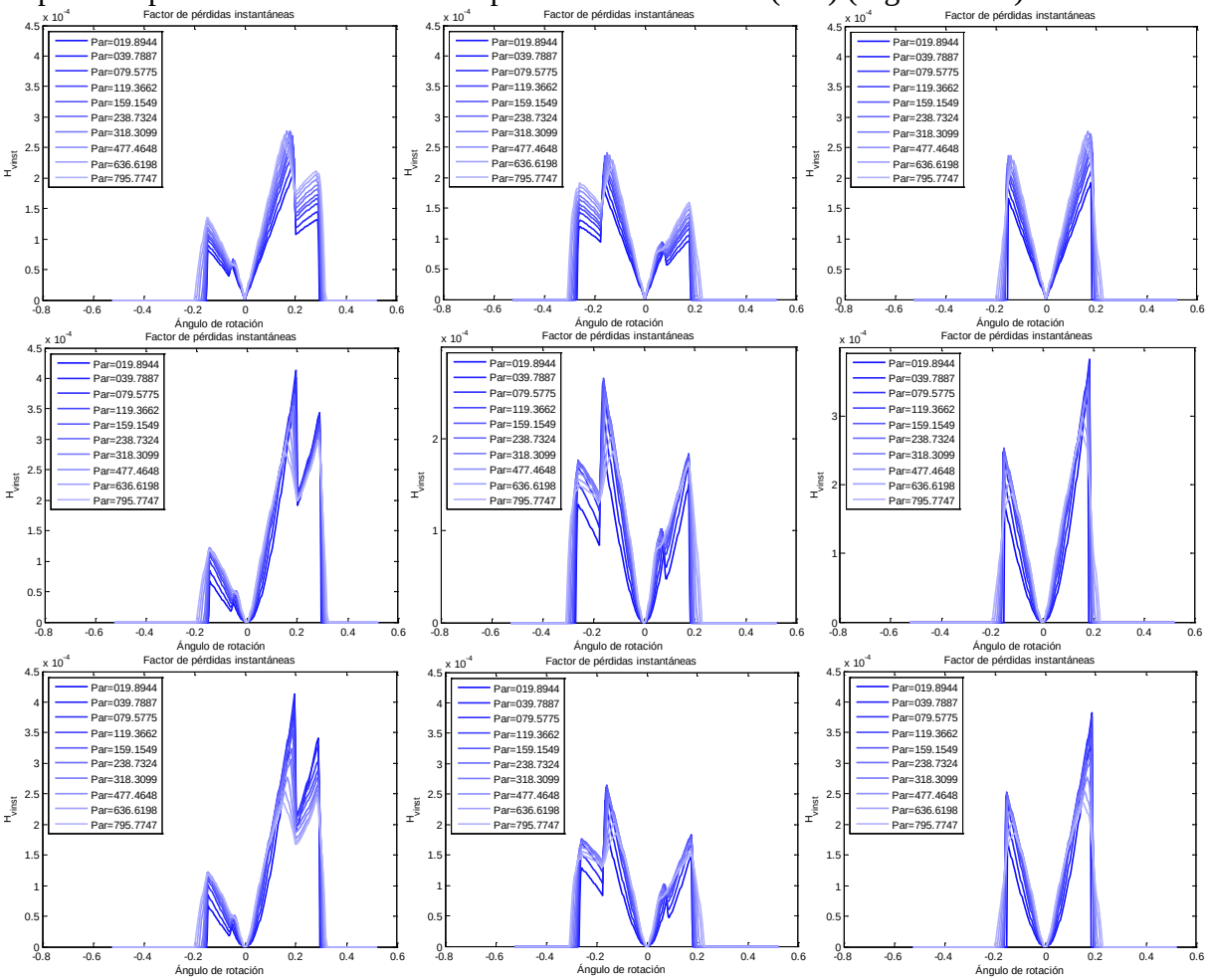


Figura V-70 Factor de pérdidas instantáneas para las tres formulaciones de coeficiente de fricción, con rebajes en a) piñón, b) rueda conducida y c) ambos engranajes, en las condiciones de operación objeto de estudio.

En la Figura V-70 se muestran los factores IPL para cada coeficiente de fricción (mismo coeficiente de fricción por fila) y para cada supuesto de rebaje (mismo supuesto de rebaje por columna).

La inclusión del rebaje en el piñón produce que la mayoría de las pérdidas se localicen al final del contacto. Respecto del supuesto sin rebaje, se ven incrementadas las pérdidas en la zona de contacto simple (ZCS) considerablemente. Asimismo, el aumento del par provoca un aumento del valor del coeficiente de fricción en las formulaciones de Niemann y Castro. Esto es especialmente importante al final del contacto, donde la velocidad de deslizamiento es

máxima. Lo anterior se traduce en que las pérdidas aumentan con el incremento del par y, en el caso de la formulación de Castro, que se mantengan aproximadamente constantes. Mientras, en la formulación de Zhu, el valor de coeficiente de fricción al final del contacto decrece. Este hecho produce una disminución en las pérdidas con el aumento del par.

Cuando se introduce el rebaje en la rueda conducida, se observa que la reducción de la longitud del contacto se produce al final del contacto, localizándose la mayoría de las pérdidas en la PZCD. El coeficiente de fricción es máximo en la SZCD, por lo que reducir el contacto en esta región provoca que las pérdidas disminuyan considerablemente. Respecto del supuesto sin rebaje, se ven incrementadas las pérdidas en la zona de contacto simple, dado que se extiende el contacto antes del punto primitivo a zonas donde la velocidad de deslizamiento no es despreciable. Además, con el aumento del par, el coeficiente de fricción de las formulaciones híbridas aumenta al inicio del contacto, hasta un cierto valor de par (300 Nm), manteniéndose cuasi constante o reduciéndose a partir de este valor. Esto produce que las pérdidas al inicio del contacto aumenten inicialmente y se mantengan constantes con niveles de par mayores a 300 Nm. A partir de esto, se justifica que la eficiencia decrezca más bruscamente para el supuesto de rebajes en la rueda conducida, que en la correspondiente a los rebajes en el piñón para las formulaciones híbridas.

En el supuesto en el que se introducen rebajes a ambos engranajes, se superponen los efectos expuestos para los dos supuestos de rebajes considerados. Esto se traduce en una reducción de la longitud de contacto tanto al inicio como al final del contacto, por lo que las pérdidas son menores que en los otros dos supuestos de rebajes.

V.4.2. Análisis de los parámetros geométricos: variación de la longitud y magnitud de rebaje

En este análisis evaluará el impacto de los parámetros que definen los rebajes, para cinco condiciones de operación (Tabla V-15), en la eficiencia.

Tabla V-15 Condiciones de operación de la transmisión objeto de estudio.

Condiciones de operación	Potencia (kW)	Par (Nm)	Velocidad (rpm)
OC1	25	159	1500
OC2	25	40	6000
OC3	50	159	3000
OC4	100	637	1500
OC5	100	159	6000

Para analizar el efecto de los rebajes pormenorizadamente, se plantean tres escenarios, dependiendo de dónde se introduzca la modificación de perfil. En el primer escenario se varían los parámetros del rebaje en la punta de los dientes del piñón, en el segundo se introducen los rebajes a la rueda conducida y en el tercer escenario se incluyen los mismos rebajes a los dos engranajes a la vez. Por claridad se presenta, en la Tabla V-16 y la Figura V-71, el resumen de las características de cada escenario.

Tabla V-16 Resumen de la descripción de los escenarios.

Escenario	Rebaje en piñón	Rebaje en rueda conducida
1	Si	No
2	No	Si
3	Si	Si

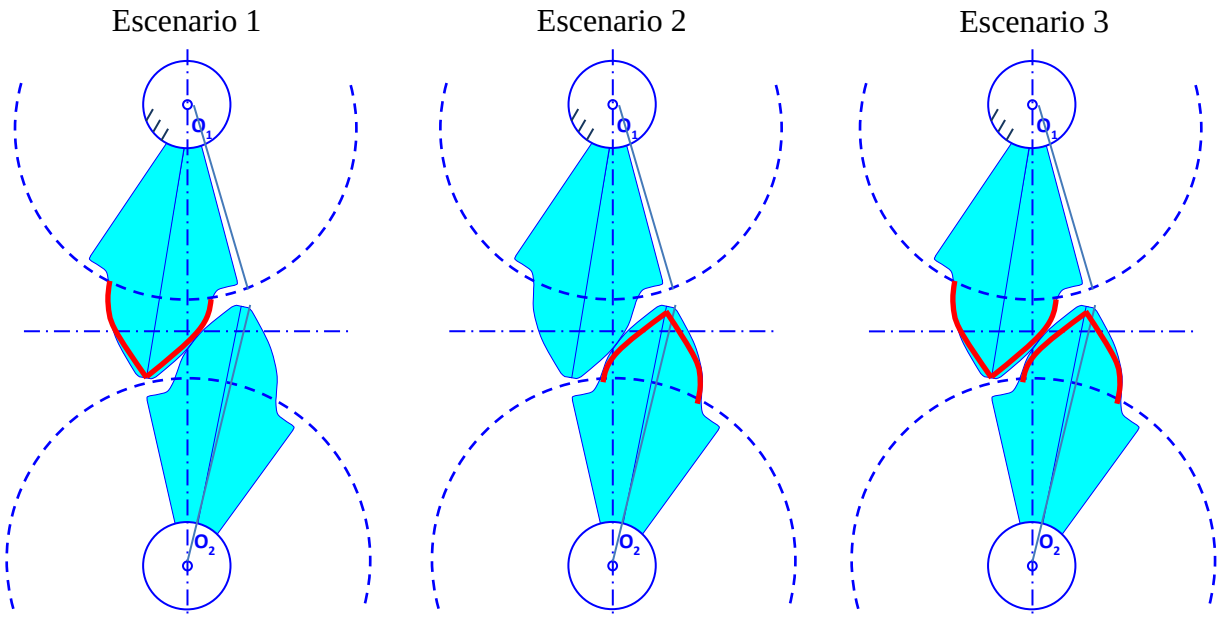
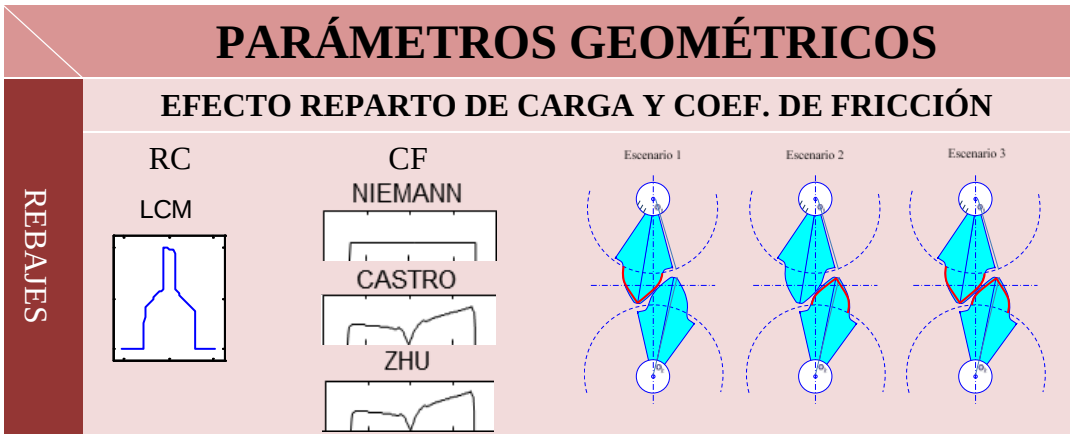


Figura V-71 Esquema de en qué engranajes se introducen los rebajes en los diferentes escenarios.

Se desea evaluar el efecto del reparto de carga y el del coeficiente de fricción, cuando se varían los parámetros de los que depende el rebaje, en la eficiencia. Se justificó, previamente, que el *procedimiento analítico* no tiene en cuenta la inclusión de rebajes en sus formulaciones. Por ello, en este análisis solo se analizará la eficiencia mediante el *procedimiento avanzado*. Partiendo de esta premisa, la única formulación de reparto de carga utilizada es la "Avanzado GEDUC". Se analizará el impacto de los rebajes, cuando se implementan las tres formulaciones de coeficiente de fricción, en el reparto de carga y en la eficiencia del sistema.

En la Tabla V-17 se muestra el resumen del planteamiento de este análisis.

Tabla V-17 Resumen del análisis de los rebajes en la eficiencia en una transmisión por engranajes rectos.



V.4.2.1. Efecto del reparto de carga y el coeficiente de fricción

Se va a analizar la eficiencia para los tres escenarios de rebajes planteados. El objetivo es determinar el impacto que tiene la magnitud y longitud de rebaje en el reparto de carga y así analizar su efecto en la eficiencia. El rango analizado de magnitud de rebaje, C_T, es de 0.01 a 0.1 mm y de longitud de rebaje, L_T, entre 1 y 3 mm. Los valores de eficiencia, y los

parámetros de los que ésta depende, se van a discretizar por magnitud de rebaje y por longitud de rebaje.

Aunque en el análisis se tiene en cuenta todo el rango de valores, en las figuras se incluirán los casos de magnitud de rebaje C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm y L_T =1, 2.2 y 3 mm. Se corresponden a los valores extremos y al valor medio de magnitud y longitud de rebaje analizados. Además, se sigue aplicando la misma leyenda de colores, donde el azul corresponde a OC1, rojo a OC2, verde a OC3, negro a OC4 y morado a OC5.

V.4.2.1.1. Primer escenario: Rebajes en el piñón

En la Figura V-72 se muestra la eficiencia, cuando se varía la longitud de rebaje, para tres casos de magnitud (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm).

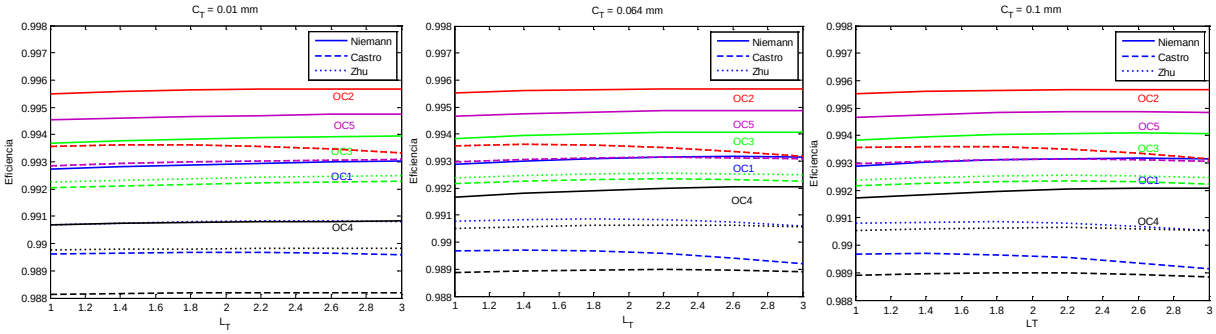


Figura V-72 Valores de eficiencia para diferentes valores de magnitud de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud.

La elección de la formulación de coeficiente de fricción es decisiva en la eficiencia. La eficiencia, calculada utilizando la formulación de Niemann, aumenta con la longitud de rebaje, no siguiendo esta tendencia cuando se implementan las formulaciones híbridas. A partir de una cierta longitud de rebaje, que hace óptima la eficiencia, ésta decrece.

Por otro lado, al comparar entre formulaciones de coeficiente de fricción, la eficiencia en el caso de utilizar la formulación de Niemann es mayor que la relativa a Zhu y, a su vez, que la correspondiente a Castro. Además, existe una gran dispersión entre los valores de Niemann y las formulaciones híbridas. Si el análisis se centra solo en las formulaciones híbridas, esta desviación no es tan pronunciada, salvo en el caso de velocidades bajas (OC1) y niveles de par elevados (OC4).

En la Figura V-73 se muestra la eficiencia cuando se varía la magnitud de rebaje, para tres casos de longitud (L_T =1, 2.2 y 3 mm).

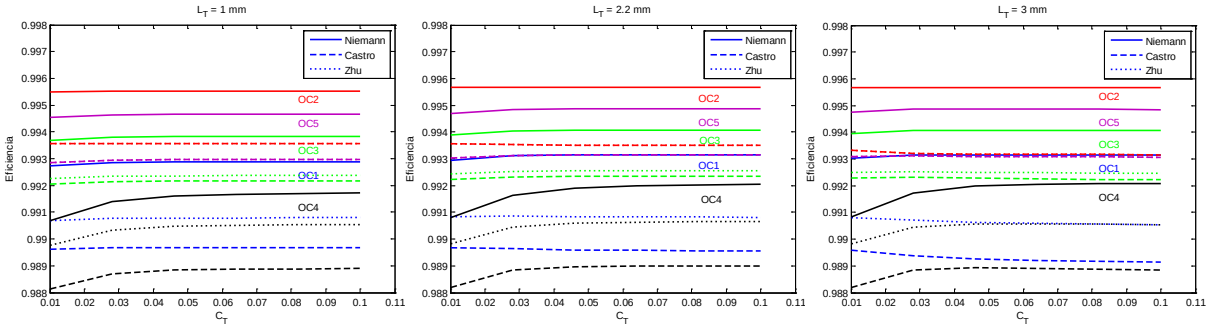


Figura V-73 Valores de eficiencia para diferentes valores de longitud de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud.

En la Figura V-73 se observa que, con el aumento de la magnitud de rebaje, la eficiencia aumenta, cuando se implementan las formulaciones de Niemann y Castro, y es aproximadamente constante en el caso de Zhu. El efecto del par es importante, dado que para el máximo nivel par, la eficiencia aumenta considerablemente de C_T=0.01 mm a C_T=0.028 mm en todas las formulaciones.

Para niveles elevados de par, la magnitud de rebaje es determinante en la eficiencia. Ésta aumenta, especialmente, de valores pequeños de magnitud de rebaje a valores mayores (en el ejemplo el valor límite es 0.03 mm).

Si se compara entre formulaciones de coeficiente de fricción, la eficiencia correspondiente a Niemann es la mayor, seguida por la de Zhu y la de Castro en este orden. Además, existe una gran dispersión entre los valores de Niemann y las formulaciones híbridas.

Una vez mostrada la influencia de los rebajes en la eficiencia, en la Figura V-74 se muestran las relaciones de contacto efectiva y teórica cuando se varía la longitud de rebaje.

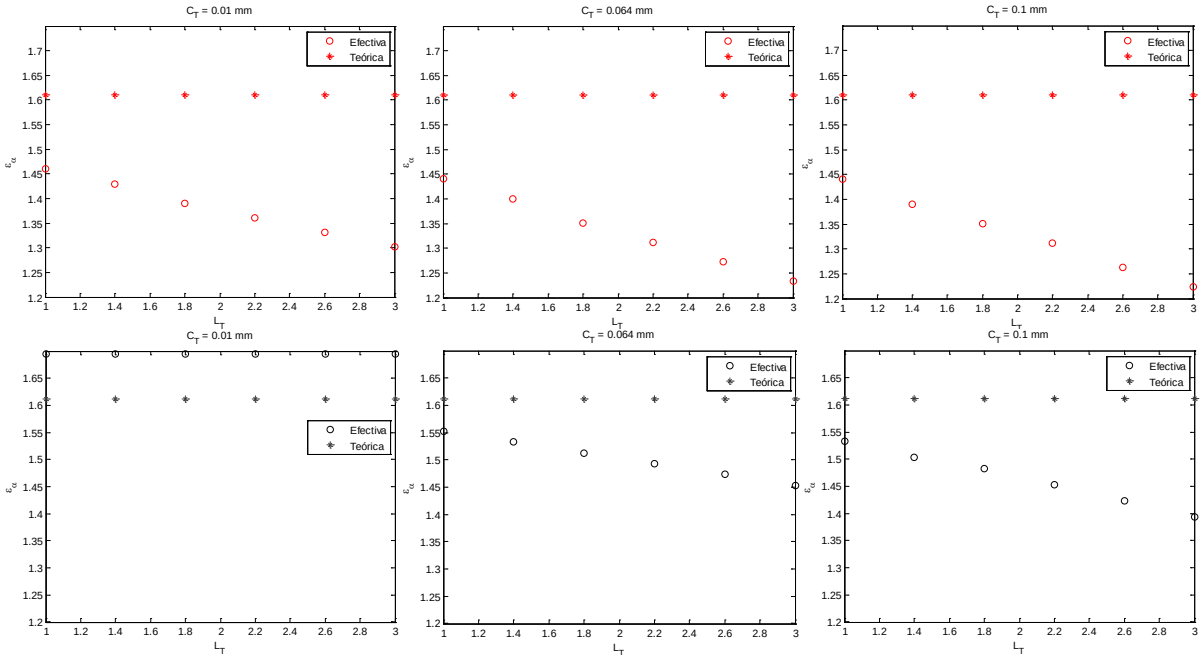


Figura V-74 Relación de contacto para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Para OC2, cuanto mayor es la longitud de rebaje, menor es la relación de contacto efectiva. Este hecho produce un aumento de la eficiencia cuando se implementa el coeficiente de fricción de Niemann. Cuando se implementan los otros dos coeficientes de fricción, no existe una correlación directa entre la relación de contacto efectiva y la eficiencia (Figura V-72). Esto indica que, en la formulación de Niemann, el factor que influye en la eficiencia es el reparto de carga (haciéndola mayor). Sin embargo, en el caso de las formulaciones híbridas, tanto el reparto de carga como el coeficiente de fricción determinan la tendencia de la misma.

A partir de este análisis, se deduce que el efecto del rebaje en el reparto de carga hace que la eficiencia aumente. Sin embargo, el efecto del rebaje en el coeficiente de fricción tiende a reducirla.

Para el mayor nivel de par, cuando la magnitud de rebaje es menor de 0.03 mm, la relación de contacto, con el aumento de la longitud de rebaje, se mantiene constante. Además, la relación

de contacto efectiva es mayor que la teórica. Esta tendencia cambia sustancialmente en el resto de casos de magnitud de rebaje, la cual es similar a la observada en el caso de menor par. Cuanto mayor es la longitud de rebaje, menor es la relación de contacto.

Se concluye, de este análisis, que el efecto del par influye en la relación de contacto y, por ende, es determinante en todos los factores de los que depende la eficiencia.

De manera similar, se muestran en la Figura V-75 las relaciones de contacto efectiva y teórica cuando se varía la magnitud de rebaje.

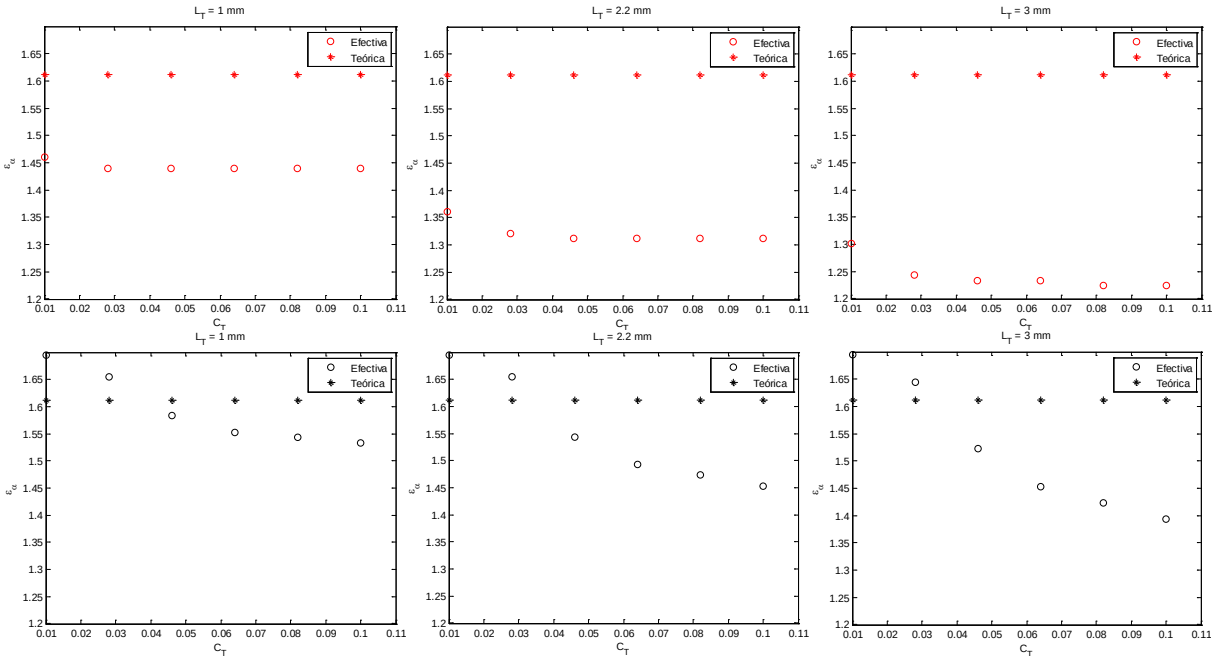


Figura V-75 Relación de contacto para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Para el menor nivel de par resistivo (OC2), la relación de contacto efectiva permanece constante con la variación de la magnitud de rebaje. Además, siempre es menor que la teórica. La dispersión entre ambas relaciones de contacto aumenta con el incremento de la longitud de rebaje.

Para el mayor nivel de par resistivo (OC4), cuanto mayor es la magnitud de rebaje, menor es la relación de contacto efectiva. Para magnitudes del rebaje mayores a 0.03 mm, la relación de contacto efectiva es menor que la teórica.

Se concluye del análisis, que la relación de contacto y la eficiencia, en el caso de la formulación de Niemann, son inversamente proporcionales. Cuando se implementan los otros dos coeficientes de fricción, existen más factores que determinan la tendencia de la eficiencia (coeficiente de fricción).

El siguiente parámetro a analizar es el reparto de carga. Solo se presentan los repartos de carga calculados cuando se implementa el coeficiente de fricción de Niemann. Incluir los repartos de carga cuando se utilizan las formulaciones de Zhu o Castro no aportaría información adicional.

En la Figura V-76 se muestran los repartos de carga cuando se varía la longitud de rebaje.

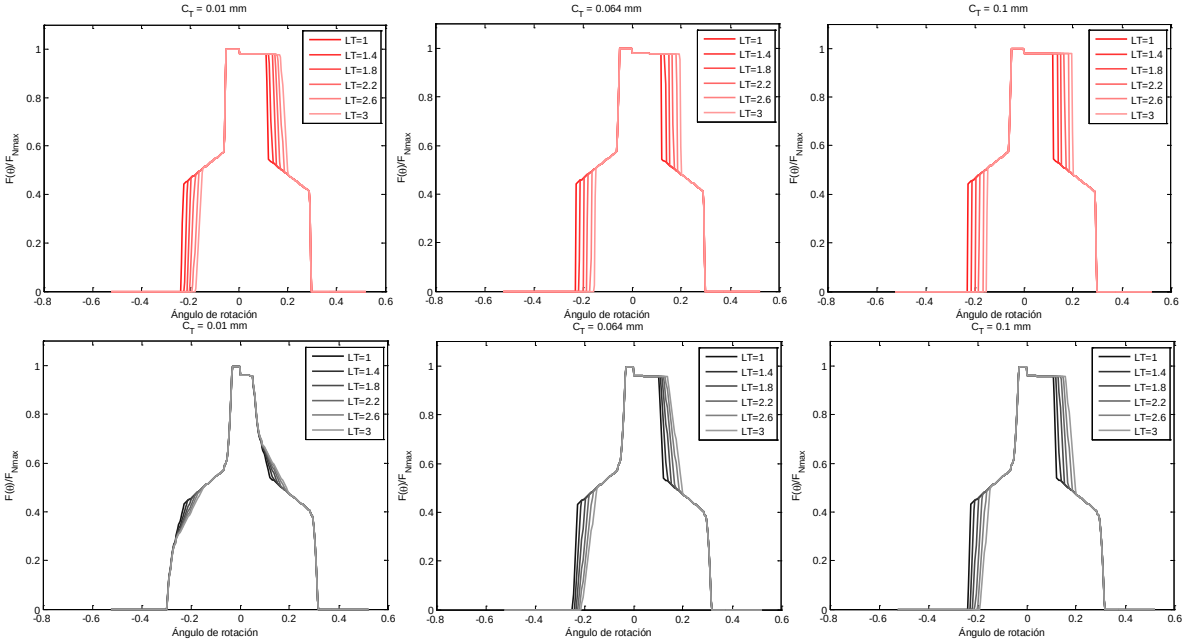


Figura V-76 Reparto de carga (Niemann) para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Cuando se introducen rebajes al piñón, la ZCS aumenta después del punto primitivo, reduciendo la SZCD. Además, el contacto empieza más tarde, por lo que la PZCD también se reduce.

El efecto de la longitud de rebaje es mayor en el caso OC2 que en el de OC4. Se observa el mismo patrón que el descrito para la relación de contacto. Para el menor nivel de par, la longitud de rebaje afecta de igual manera en todos los casos de magnitud de rebaje. Sin embargo, para el mayor nivel de par, esto sucede a partir de una magnitud de rebaje, 0.03 mm. Se concluye que el efecto del par es decisivo.

En la Figura V-77 se muestra el reparto de carga cuando se varía la magnitud de rebaje.

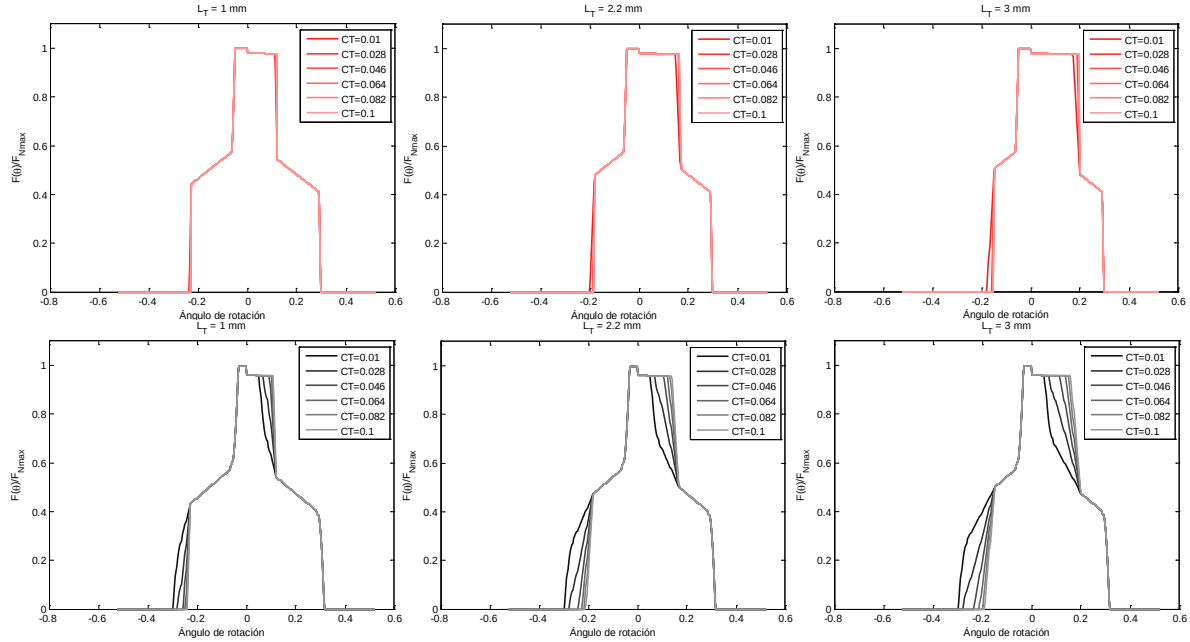


Figura V-77 Reparto de carga (Niemann) para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Las zonas de contacto afectadas son las mismas que en la Figura V-76 (rebajes en el piñón). Al aumentar la longitud de rebaje, también disminuye la relación de contacto. Sin embargo las tendencias observadas en los diferentes niveles de par son distintas.

En el menor nivel de par, la variación de la magnitud de rebaje tiene un efecto mínimo en el reparto de carga. Este hecho constata que, para niveles de par reducidos, el efecto de la longitud es decisivo en la forma del reparto de carga, no así la magnitud.

En el mayor nivel de par, el efecto de variar la magnitud de rebaje a partir de 0.03 mm influye ligeramente e incluso es despreciable en el reparto de carga. No siendo así en magnitudes de rebaje menores de 0.03 mm. De lo anterior se deduce que, tanto la magnitud como la longitud, para niveles elevados de par, son decisivos en la forma del reparto de carga.

Una vez analizado el efecto de los rebajes en el reparto de carga, el siguiente parámetro a estudiar es el coeficiente de fricción. En la Figura V-78 se muestra el coeficiente de fricción cuando varía la longitud de rebaje.

Se concluyó en el análisis de la relación de contacto y reparto de carga que, con carácter general, al variar la longitud de rebaje, disminuye el segmento de contacto en la PZCD (segmento de aproximación). Este efecto tiene una influencia importante en las formulaciones de coeficiente de fricción. Sin embargo, para el nivel mayor de par, no se aprecia esta tendencia en magnitudes menores de 0.03 mm. Para magnitudes menores de 0.03 mm, el efecto del par, el cual aumenta la relación de contacto, contrarresta el efecto del rebaje, el cual tiende a disminuir la relación de contacto.

Además, la inclusión de rebajes en el piñón produce un aumento de la ZCS después del punto primitivo. Este efecto tiene un impacto mínimo en las formulaciones híbridas, independientemente del nivel de par aplicado.

En la Figura V-78, se muestra el coeficiente de fricción cuando se varía la magnitud de rebaje.

La tendencia de los coeficientes de fricción es la misma que la observada en el reparto de carga. La variación de la magnitud de rebaje tiene un impacto mínimo en niveles de par reducido. Sin embargo, para el nivel mayor de par, cuando la magnitud de rebaje es menor a 0.03 mm, se reduce el inicio del contacto considerablemente.

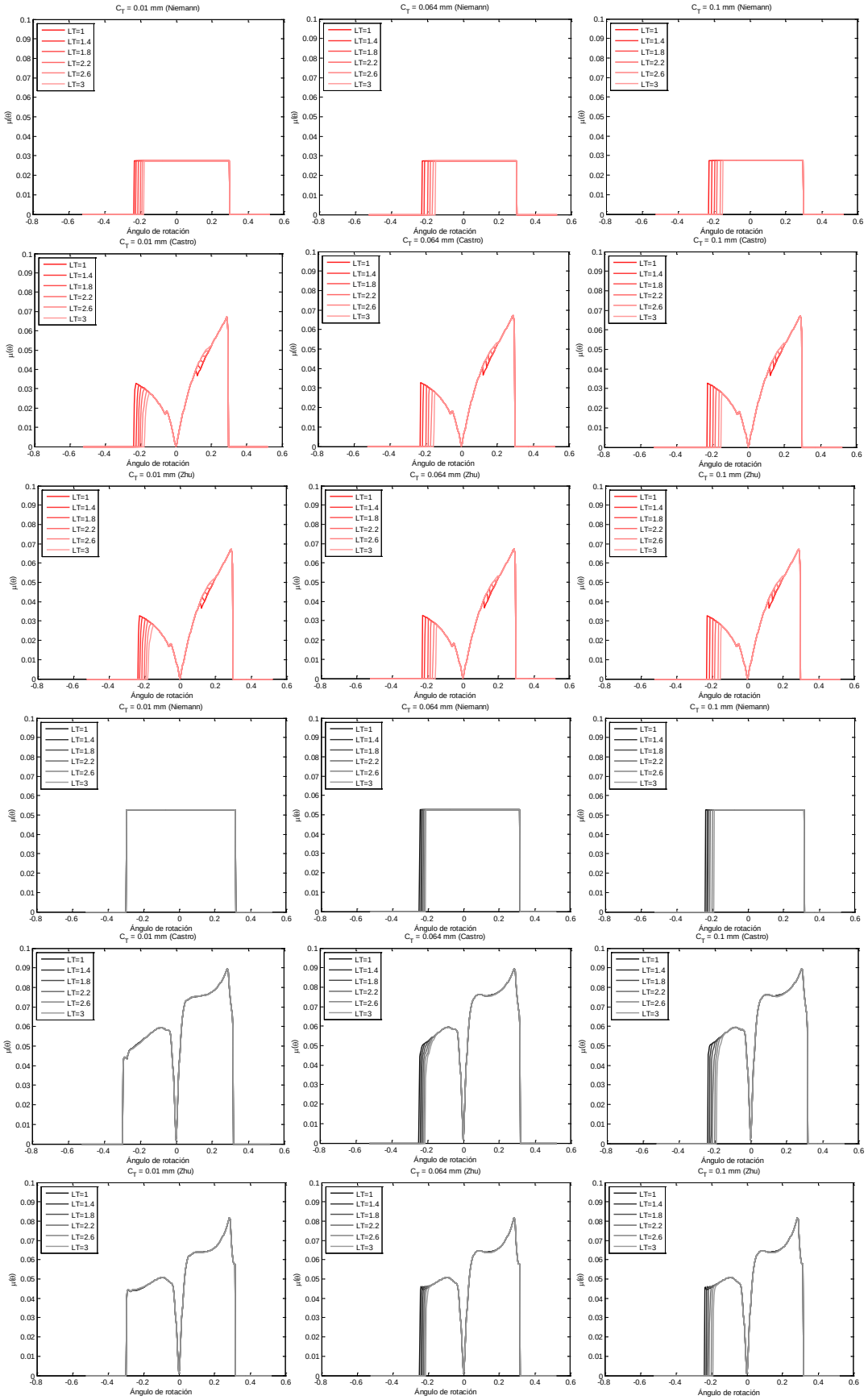


Figura V-78 Coeficientes de fricción para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

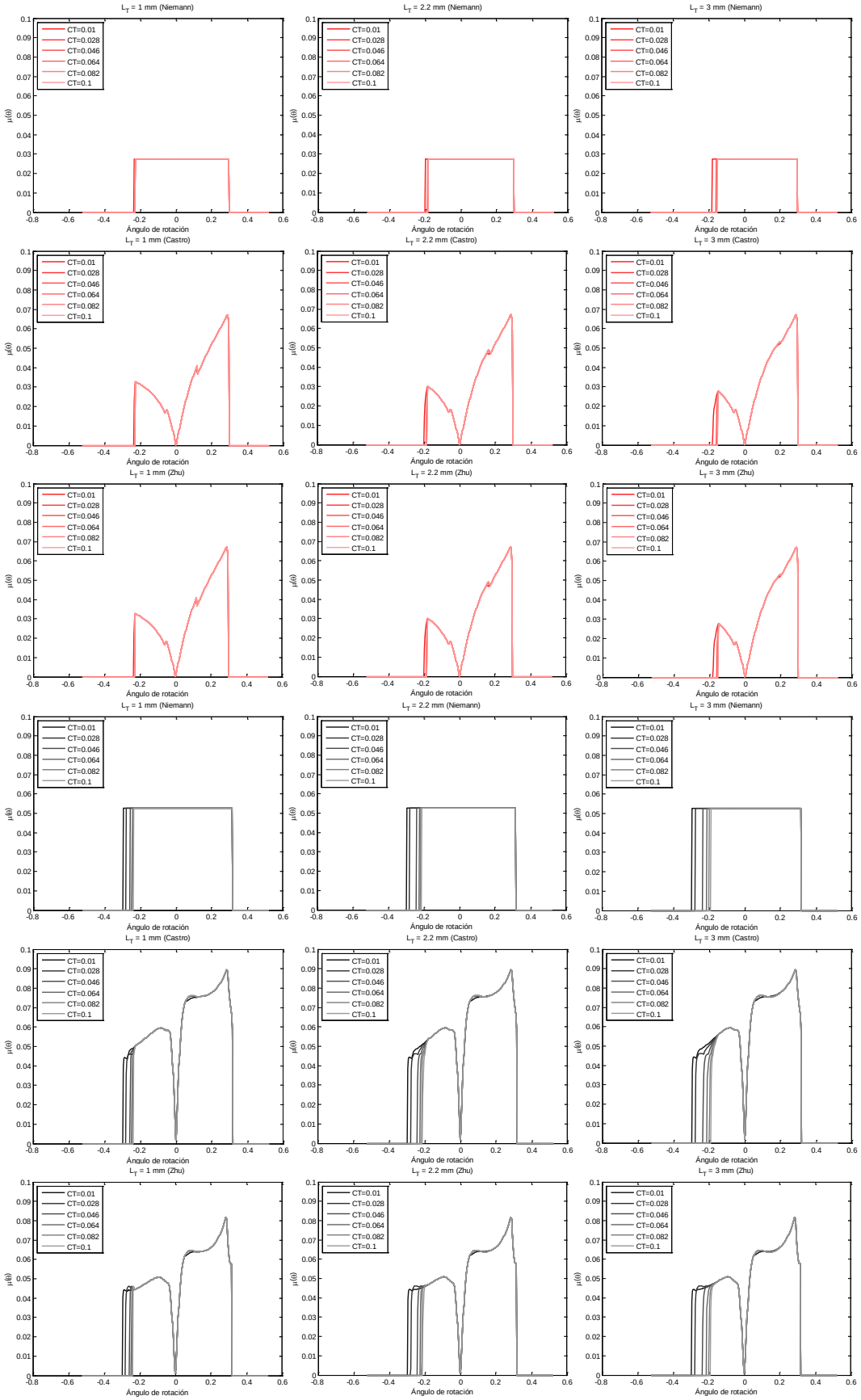


Figura V-79 Coeficiente de fricción para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Todas estas variaciones en el reparto de carga y coeficientes de fricción tienen una influencia directa en el factor de pérdidas instantáneas (IPL). En la Figura V-80 se muestra el factor IPL cuando se modifica la longitud de rebaje.

La inclusión de rebajes en el piñón produce que las pérdidas en la primera zona de contacto doble (PZCD) disminuyan y aumenten en la zona de contacto simple (ZCS).

Para el nivel de menor par, el incremento de las pérdidas en la ZCS, las cuales se producen por el aumento de la longitud de rebaje, es menor, cuando se utiliza la formulación de Niemann, que la reducción de pérdidas en la SZCD. Por esta razón, la eficiencia se incrementa, en el caso de la formulación de Niemann, con el aumento de la longitud de rebaje. Esta tendencia no se cumple cuando se implementan las formulaciones híbridas. Se debe a que el aumento de las pérdidas en la ZCS es mayor que la reducción de las pérdidas en la PZCD.

Para el nivel de mayor par, la longitud de rebaje tiene un efecto relevante sobre las pérdidas a partir de la magnitud de rebaje C_T = 0.03 mm, produciendo que el aumento de pérdidas en la ZCS sea menor que la reducción de pérdidas en la PZCD, independientemente de la formulación de coeficiente de fricción implementada. Por lo que la eficiencia aumenta con el aumento de la longitud de rebaje en todas las formulaciones.

En la Figura V-81 se presenta el factor IPL cuando se varía la magnitud de rebaje.

Para niveles de par reducidos (OC2), la variación de la magnitud de rebaje no tiene efecto en las pérdidas.

Para OC4, las pérdidas son considerablemente mayores para valores de magnitud de rebaje menores a 0.03 mm, que en el caso contrario. A partir de la magnitud de rebaje 0.03 mm, las pérdidas se estabilizan, independientemente del valor de la magnitud de rebaje. Esta tendencia, se observa claramente en la Figura V-73, a través de la eficiencia. La cual aumenta drásticamente en el rango de magnitud especificado (0-0.03 mm) y se mantiene constante a partir de C_T = 0.03 mm.

Se concluye que, en el caso de niveles elevados de par, la magnitud de rebaje es un parámetro crítico, no siendo decisiva para niveles de par reducidos.

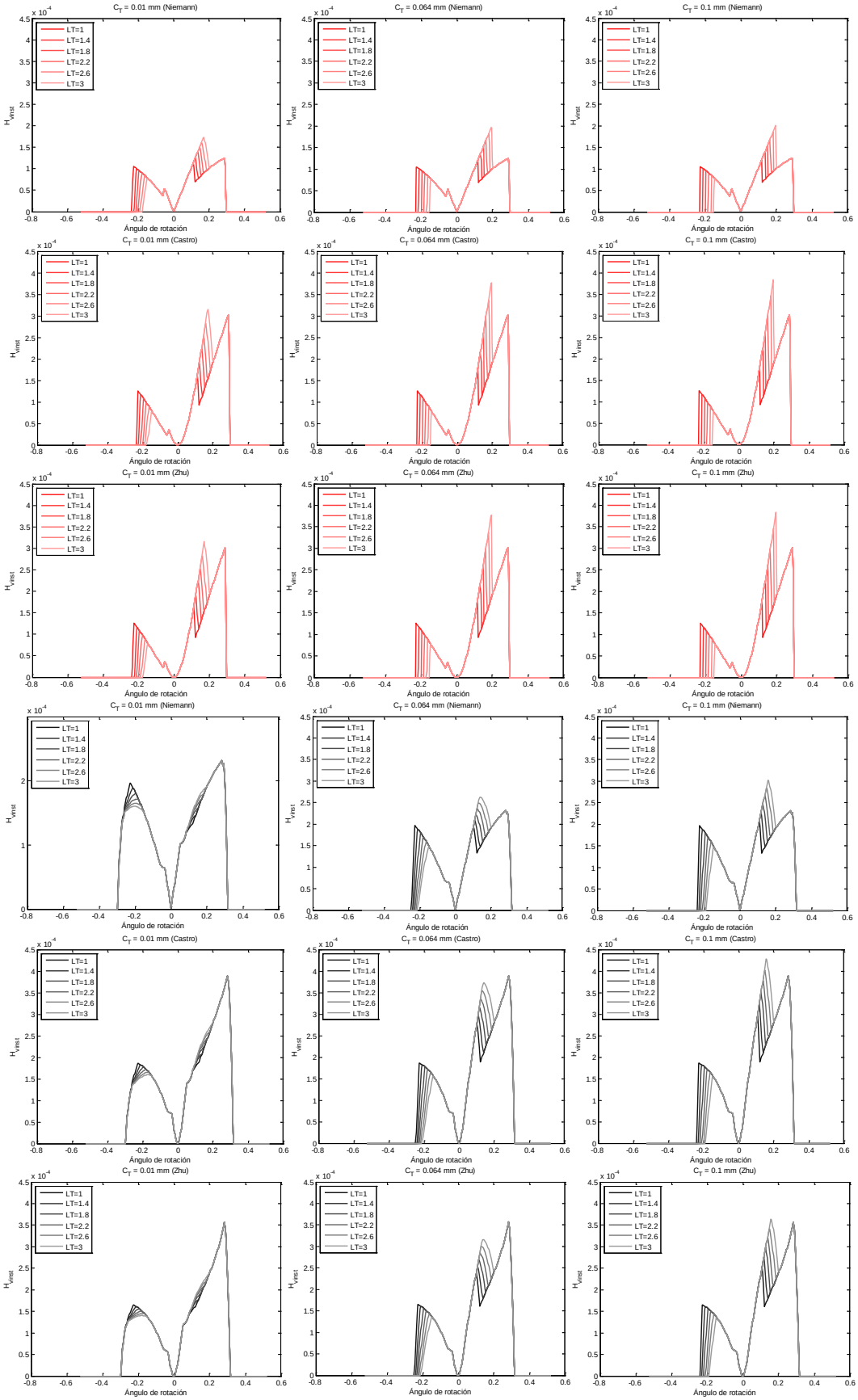


Figura V-80 Factor de pérdidas instantáneas para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

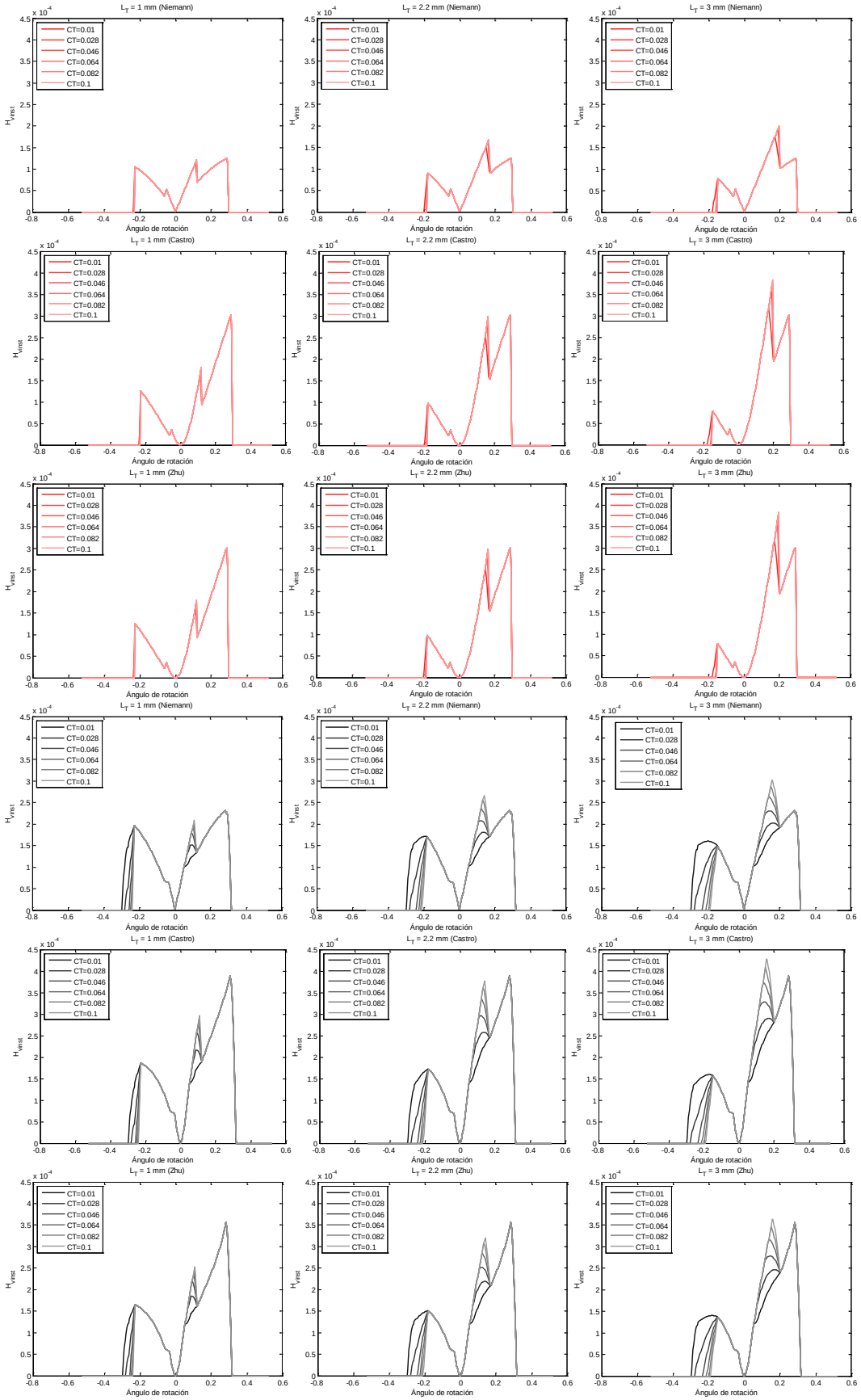


Figura V-81 Factor de pérdidas instantáneas para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

V.4.2.1.2. Segundo escenario: Rebajes en la rueda conducida

En la Figura V-82 se muestra la eficiencia cuando se varía la longitud de rebaje, para tres casos de magnitud (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm).

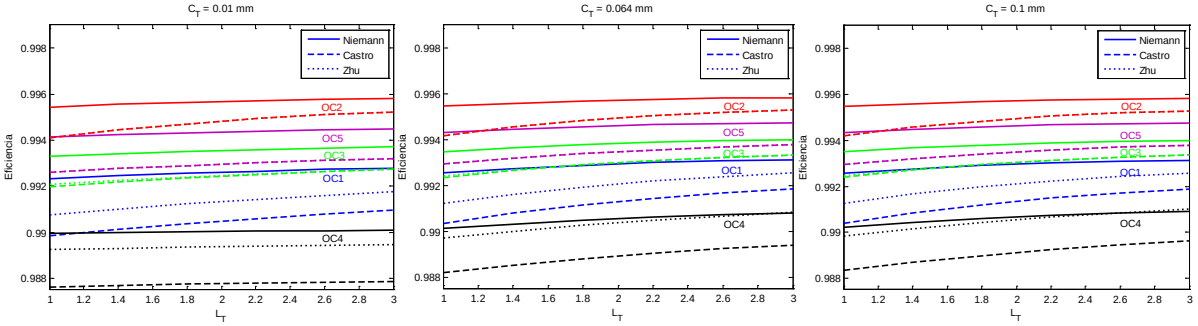


Figura V-82 Valores de eficiencia para diferentes valores de magnitud de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud.

La eficiencia aumenta con el incremento de la longitud de rebaje para las tres formulaciones de coeficiente de fricción. Existe una gran dispersión entre valores de eficiencia para las tres formulaciones de coeficiente de fricción. Comparando entre ellas, la eficiencia, obtenida a partir de la formulación de Niemann, es mayor que la de Zhu y que la de Castro por este orden.

Además, como algo reseñable, existen condiciones de operación en las que las formulaciones híbridas presentan valores iguales de eficiencia (por ejemplo OC2). Se debe a que las condiciones de lubricación son completamente fluidas y las funciones de ponderación no actúan.

En la Figura V-83 se muestra la eficiencia cuando se varía la magnitud de rebaje, para tres casos de longitud (L_T =1, 2.2 y 3 mm).

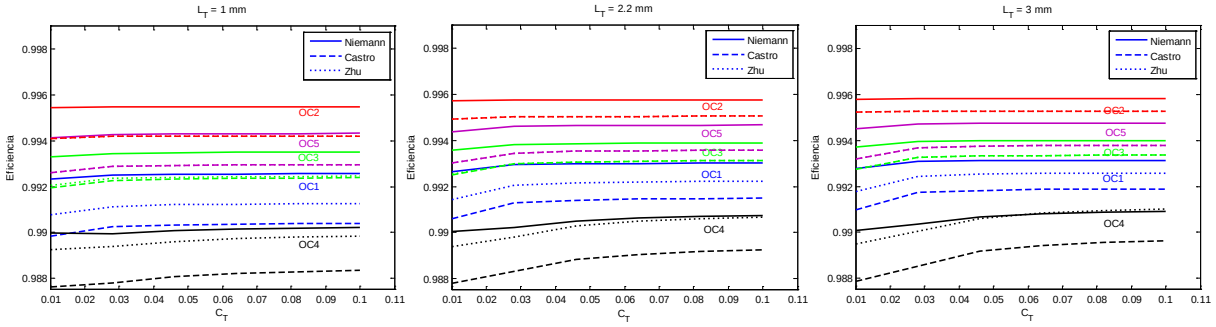


Figura V-83 Valores de eficiencia para diferentes valores de longitud de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud.

La eficiencia aumenta, con el incremento de la magnitud de rebaje, para las tres formulaciones de coeficiente de fricción. Existe una magnitud de rebaje, a partir de la cual, la eficiencia se mantiene aproximadamente constante.

Como algo notable, la eficiencia del caso C_T=0.01 mm a C_T=0.028 mm aumenta de forma considerable, independientemente de las formulaciones implementadas y de las condiciones de operación de la transmisión. Este aumento se acentúa con el incremento del par.

Comparando la eficiencia entre escenarios, la eficiencia, cuando se implementa el coeficiente de fricción de Niemann, es mayor en el supuesto de introducir rebajes en el piñón que al incluirlos en la rueda conducida. Se debe a que el mismo rebaje en el engranaje más pequeño

produce una mayor reducción de la relación de contacto, que en el caso de introducirlo en el de mayores dimensiones. Sin embargo, al introducir una formulación de coeficiente de fricción, a priori, más precisa (formulaciones híbridas), esta tendencia no se cumple. La eficiencia es mayor al introducir el mismo rebaje en la rueda conducida que en el piñón.

Para analizar la tendencia mostrada por la eficiencia en los diferentes regímenes de trabajo y valores de rebaje, será necesario evaluar los parámetros de los que depende. En la Figura V-84 se presentan las relaciones de contacto efectiva y teórica cuando se varía la longitud de rebaje.

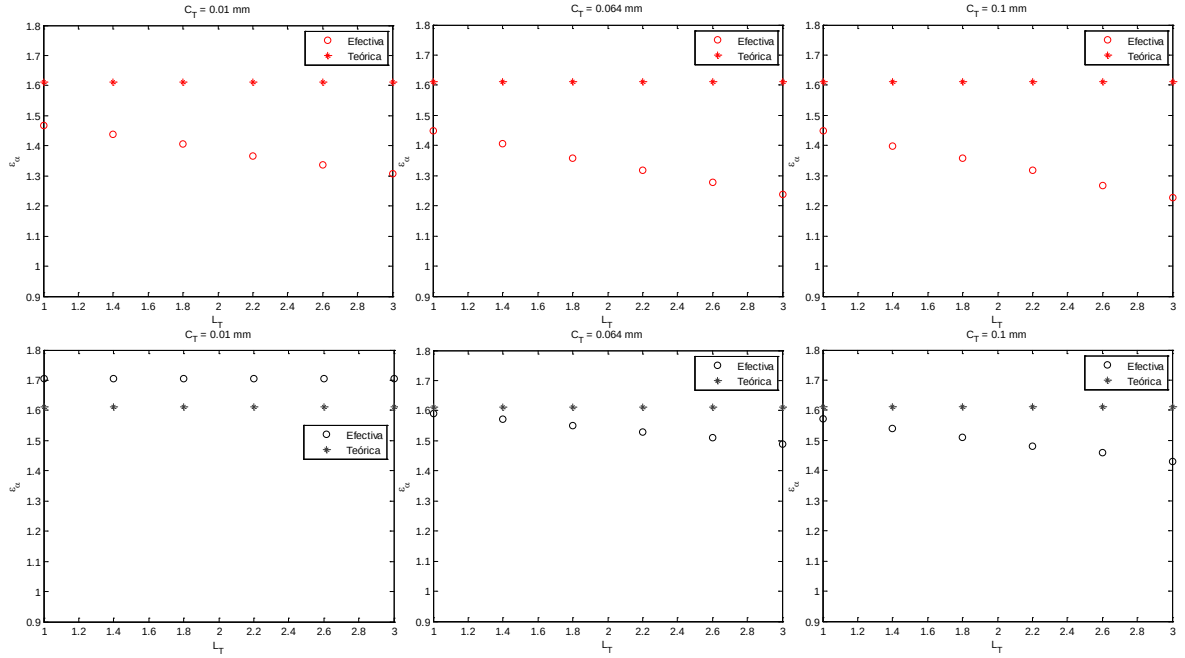


Figura V-84 Relación de contacto para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Para el nivel menor de par, la relación de contacto efectiva disminuye con la longitud de rebaje. Asimismo, la relación de contacto es inversamente proporcional a la eficiencia, independientemente de la formulación de coeficiente de fricción implementado.

Se concluye que el efecto del rebaje en el coeficiente de fricción, en este escenario, reduce el impacto de éste en las pérdidas.

Para el nivel de par mayor, la relación de contacto disminuye con el incremento de la longitud de rebaje a partir de un cierto valor de magnitud de rebaje (C_T = 0.03 mm). Para magnitudes menores de 0.03mm, la relación de contacto efectiva es constante y mayor que la teórica.

En la Figura V-85 se presentan las relaciones de contacto cuando se modifica la magnitud de rebaje.

Para el caso de menor par (OC2), la relación de contacto permanece constante con el aumento de la magnitud de rebaje. Este hecho que se ve reflejado en la eficiencia (Figura V-83), la cual permanece constante para los tres coeficientes de fricción. Se concluye que, para niveles reducidos de par, aumentar la magnitud de rebaje, no produce ningún efecto en la relación de contacto.

Esta tendencia no se cumple para el nivel mayor de par (OC4). Cuanto mayor es la magnitud de rebaje, menor es la relación de contacto.

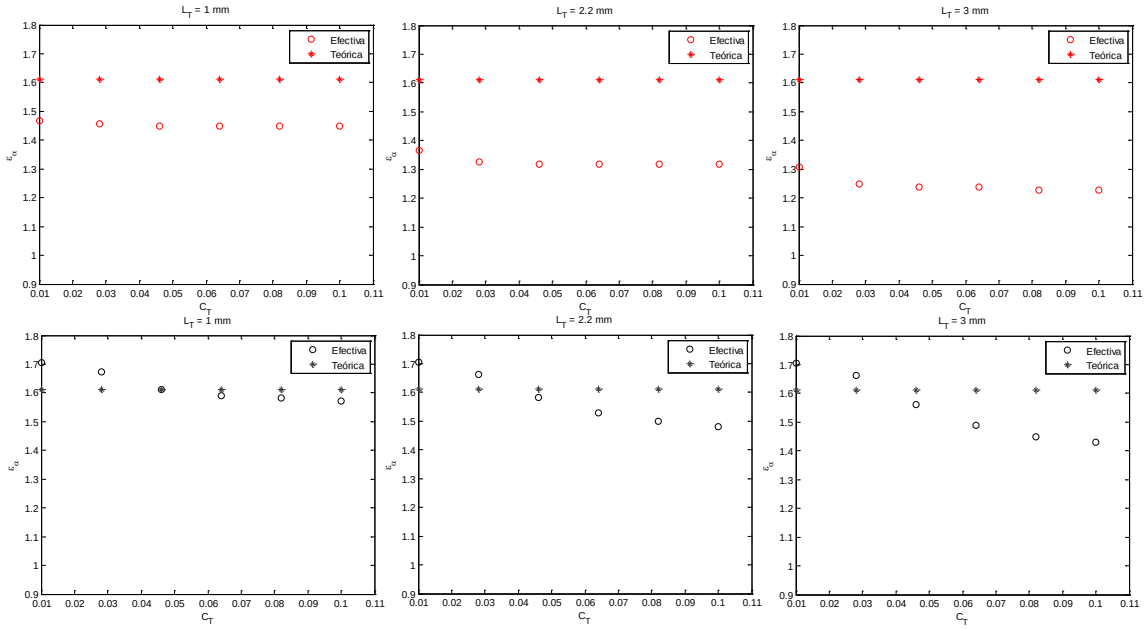


Figura V-85 Relación de contacto para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Una vez analizada la relación de contacto, se estudia su impacto en el reparto de carga. En la Figura V-86 se muestran los repartos de carga cuando se modifica la longitud de rebaje.

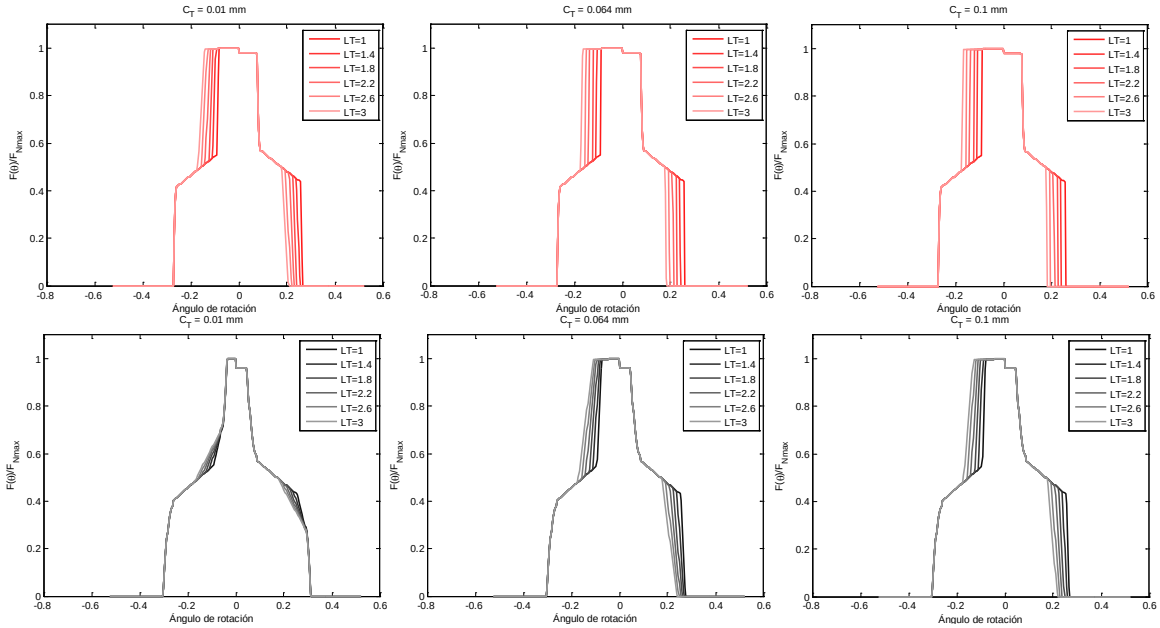


Figura V-86 Reparto de carga para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Introducir rebajes en la rueda conducida produce que la ZCS se alargue antes del punto primitivo y la SZCD se acorte (contacto finaliza antes).

El efecto de aumentar la longitud de rebaje es más importante para niveles de par reducidos que para niveles elevados. La disminución de la relación de contacto efectiva es mayor en el primer caso.

Para el nivel de par mayor, el aumento de la longitud de rebaje produce una disminución la relación de contacto, a partir del valor de magnitud de rebaje 0.03 mm. Para magnitudes menores a 0.03 mm, el rebaje no tiene apenas influencia en el reparto de carga.

En la Figura V-87 se puede apreciar la modificación de los repartos de carga cuando se varía la magnitud de rebaje.

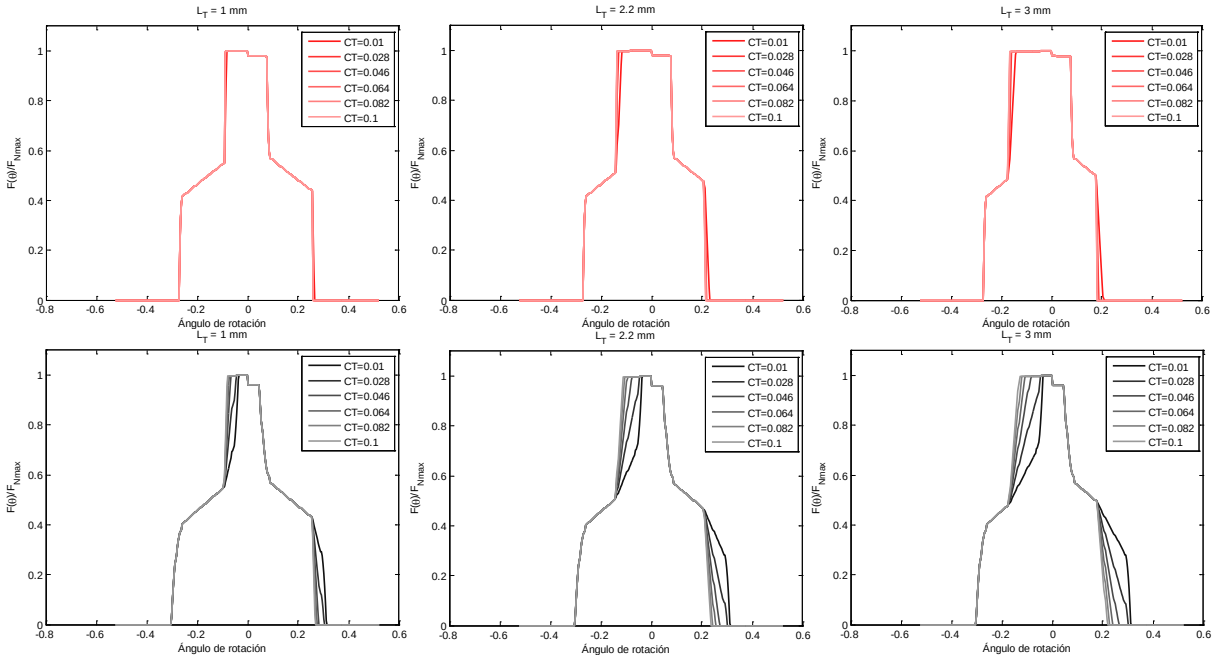


Figura V-87 Reparto de carga para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Para niveles de par reducidos, la magnitud de rebaje no afecta el reparto de carga.

Para niveles mayores de par, el aumento de la magnitud de rebaje provoca una disminución de la relación de contacto. Esto produce un alargamiento de la ZCS y una reducción de la SZCD. Este efecto es importante en el rango de magnitud de rebaje 0-0.03 mm. A partir de este valor, la relación de contacto es aproximadamente constante.

De lo anterior se deduce que tanto la magnitud como la longitud, para niveles elevados de par, son decisivas en la forma del reparto de carga.

Una vez analizado el efecto de los rebajes en el reparto de carga, se estudia su efecto en el coeficiente de fricción en las condiciones de operación 2 y 4. En la Figura V-88, se presenta el coeficiente de fricción cuando se varía la longitud de rebaje.

La inclusión de rebajes en la rueda conducida acorta el segmento de contacto a la derecha (final del contacto). La SZCD coincide con el valor máximo de las formulaciones híbridas. Por lo que reducir esta región a priori va a tener un impacto notable en las pérdidas.

El efecto del par es importante porque este acortamiento del contacto no tiene lugar para magnitudes de rebaje menores de 0.03 mm, en el caso de mayor nivel de par (OC4). Para magnitudes de rebaje menores de 0.03 mm, el aumento de la relación de contacto, el cual se debe al efecto del nivel de par, contrarresta la reducción de la relación de contacto causada por el efecto del rebaje.

En la Figura V-88 se muestra el coeficiente de fricción cuando se modifica la magnitud de rebaje.

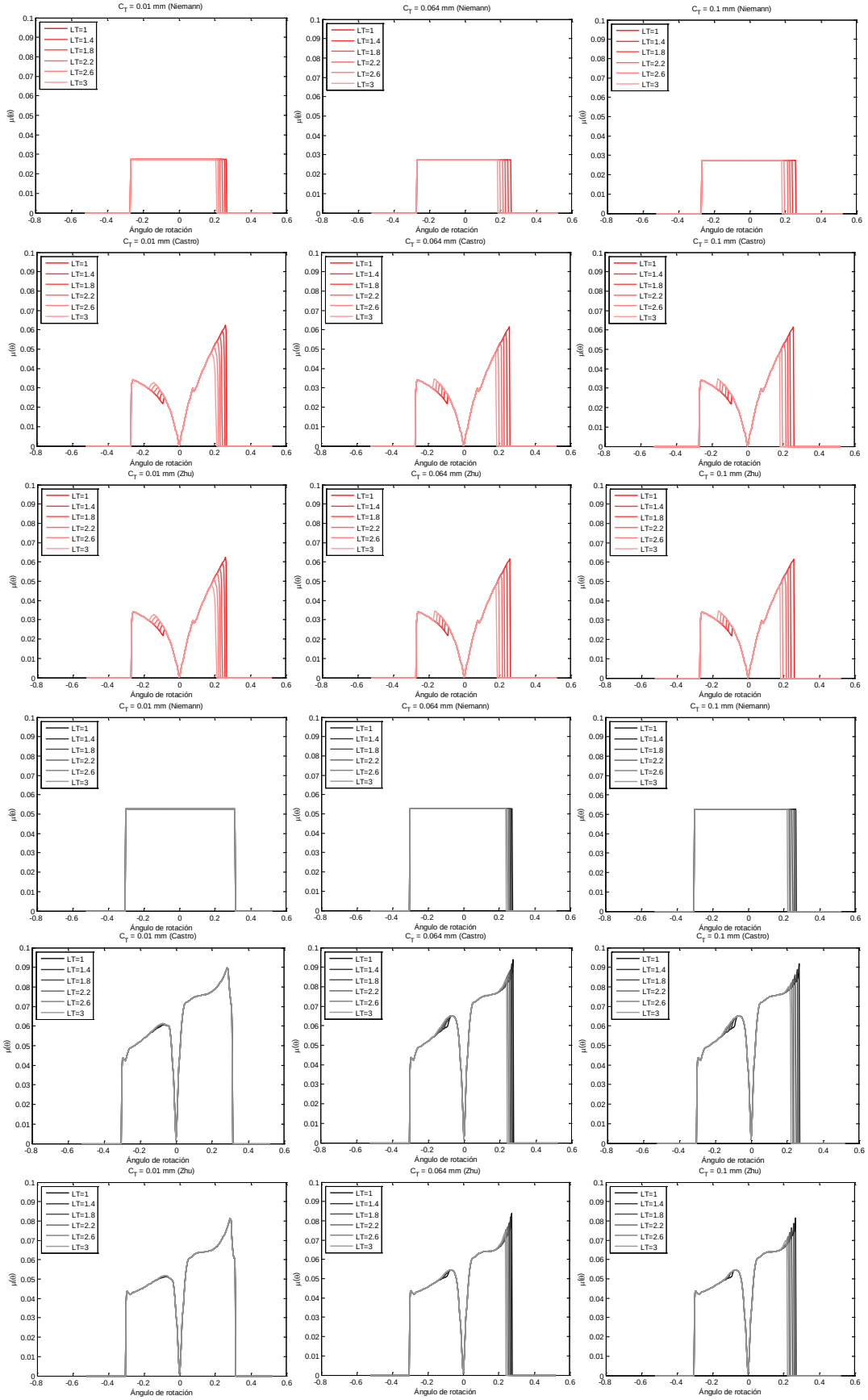


Figura V-88 Coeficiente de fricción para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

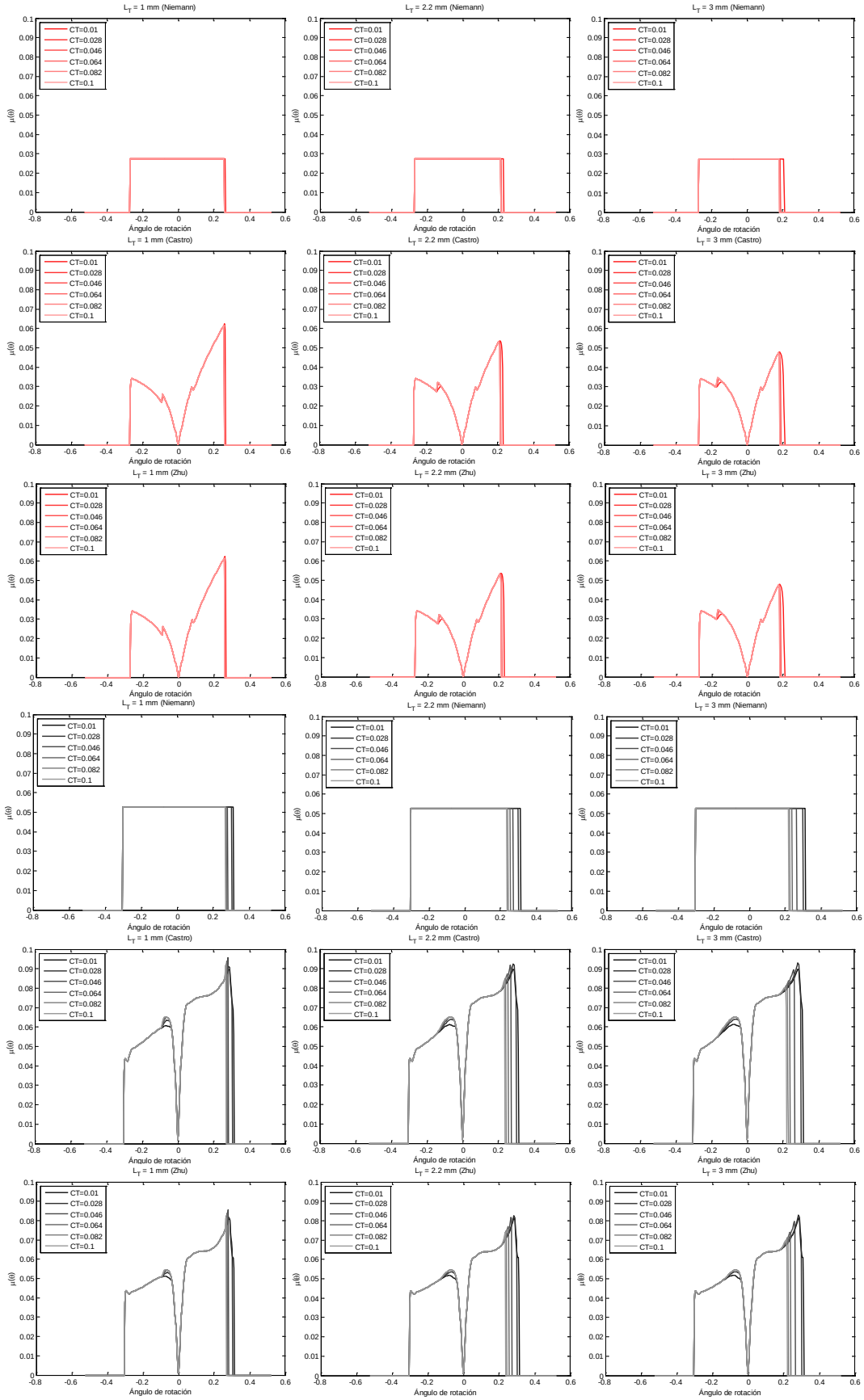


Figura V-89 Coeficiente de fricción para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

El aumento de la magnitud tiene mayor impacto en el caso de mayor par que en el de menor. La reducción del contacto, en la SZCD, afecta de forma notable en las formulaciones híbridas porque son máximas en esta región.

Todas estas variaciones en el reparto de carga y coeficientes de fricción tienen una influencia directa en el factor de pérdidas instantáneas (IPL).

En la Figura V-90 se observa que los rebajes producen una reducción de pérdidas en la SZCD y un aumento en la ZCS.

Independientemente de las formulaciones de coeficiente de fricción implementadas y de las condiciones de operación, el aumento de pérdidas en la ZCS es menor que la reducción de pérdidas en la SZCD. Por esta razón, la eficiencia mejora con el aumento de la longitud de rebaje.

Como hecho reseñable, para el nivel mayor de par, la mejora de eficiencia es mayor en magnitudes de rebaje menores a 0.03 mm, que en el caso contrario. Se debe a que, para magnitudes de rebaje menores de 0.03 mm, el aumento de pérdidas en la ZCS es despreciable con respecto a la reducción de pérdidas en la SZCD.

En la Figura V-91 se observa que, para el nivel menor de par aplicado (OC2), la magnitud de rebaje no produce cambios en las pérdidas.

Para el nivel mayor de par (OC4), existe una dispersión entre factores IPL con la variación de la magnitud de rebaje, especialmente para valores de magnitud menores a 0.03 mm. A partir de esta magnitud, las pérdidas en la SZCD no se reducen, resultando en una estabilización del valor de eficiencia.

Si se comparan los coeficientes de pérdidas de los dos escenarios, cuando se implementa la formulación de Niemann, la inclusión de rebajes en el piñón provoca menos pérdidas que en el segundo escenario. Se concluye que la reducción de la relación de contacto en el primer escenario es mayor que en el segundo.

Sin embargo, cuando se utilizan las formulaciones híbridas, se produce el efecto contrario. Se debe a que las formulaciones híbridas alcanzan su valor máximo en el final del contacto y el rebaje en la rueda conducida reduce la SZCD.

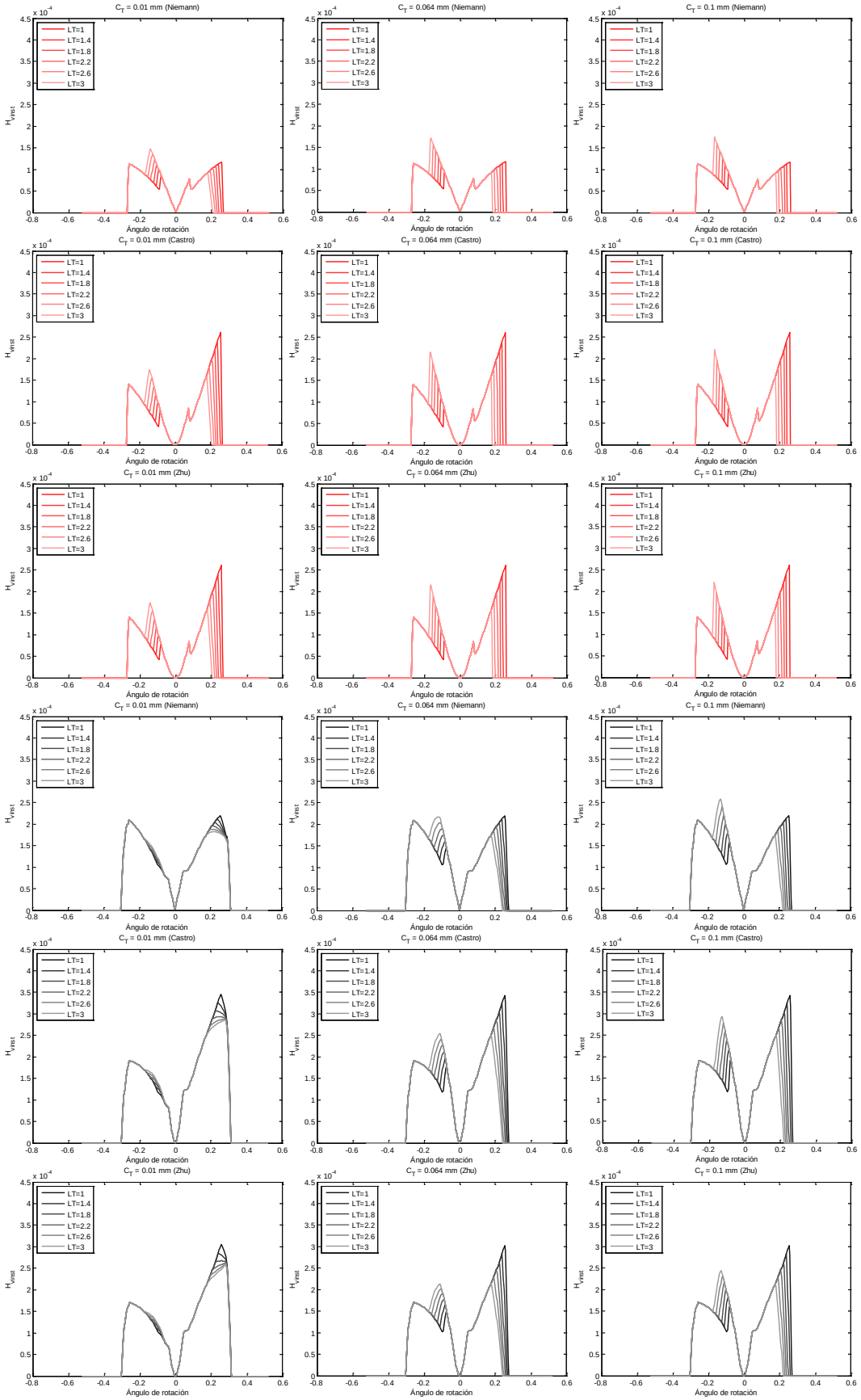


Figura V-90 Factor de pérdidas instantáneas para diferentes valores de magnitud de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

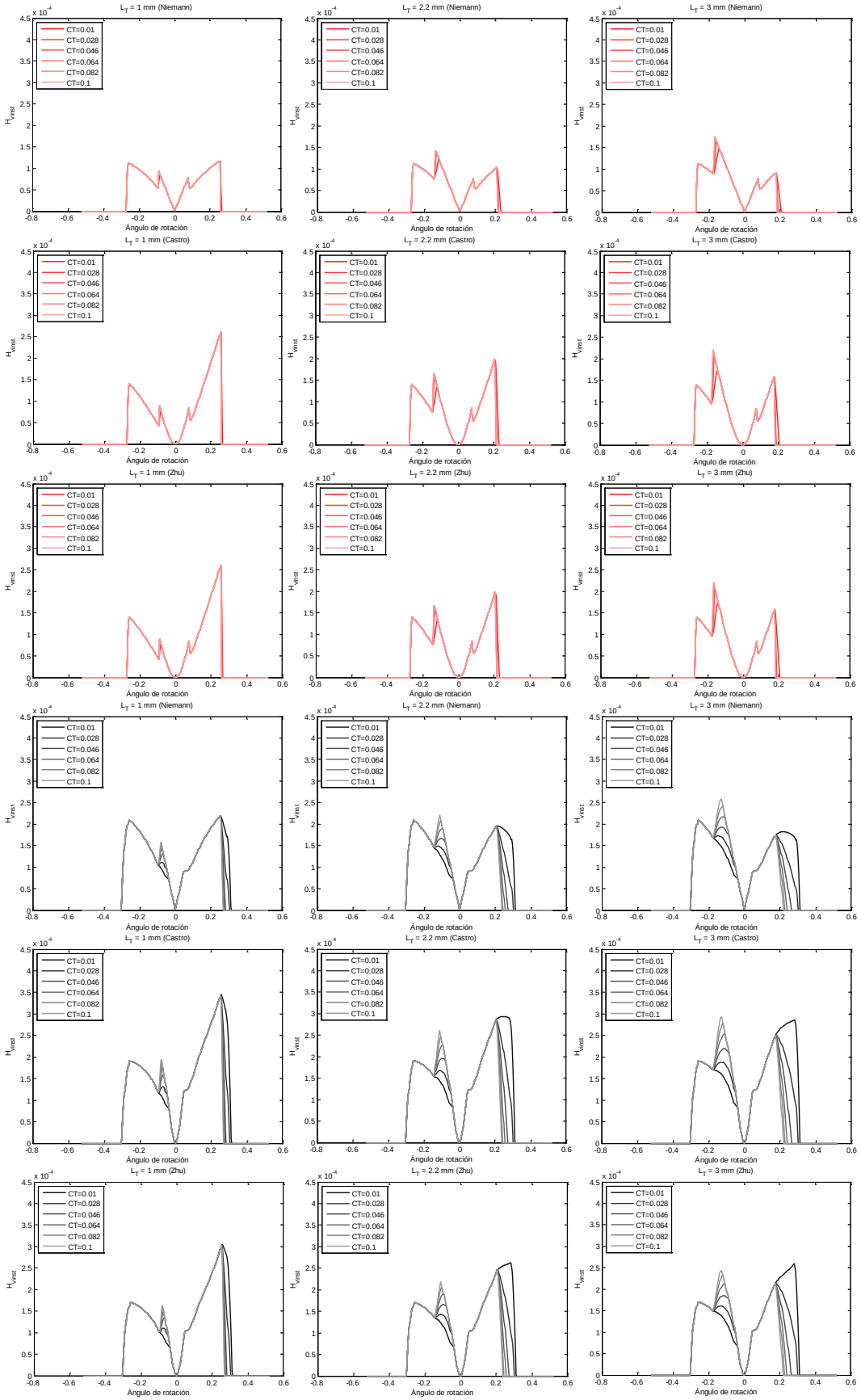


Figura V-91 Factor de pérdidas instantáneas para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

V.4.2.1.3. Tercer escenario: rebajes en ambos engranajes

En la Figura V 98 se muestra la eficiencia cuando se varía la longitud de rebaje, para tres casos de magnitud (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm).

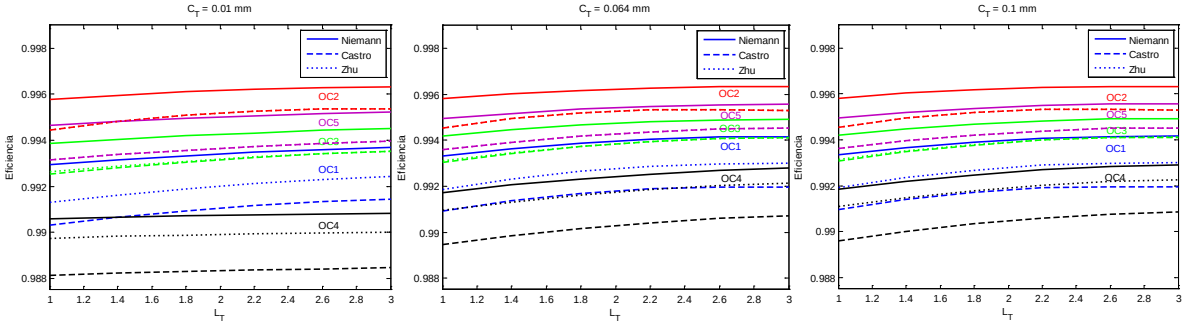


Figura V-92 Valores de eficiencia para diferentes valores de magnitud de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud.

En la Figura V-92 se aprecia que la tendencia de la eficiencia del escenario anterior se sigue manteniendo en éste, aunque con valores mayores de eficiencia para las tres formulaciones. Además, al comparar entre formulaciones de coeficiente de fricción, se sigue cumpliendo que los valores de eficiencia calculados mediante la formulación de Niemann son mayores que los de Zhu y los de Castro por ese orden.

En la Figura V-93 se muestra la eficiencia cuando se varía la magnitud de rebaje, para tres casos de longitud (L_T =1, 2.2 y 3 mm).

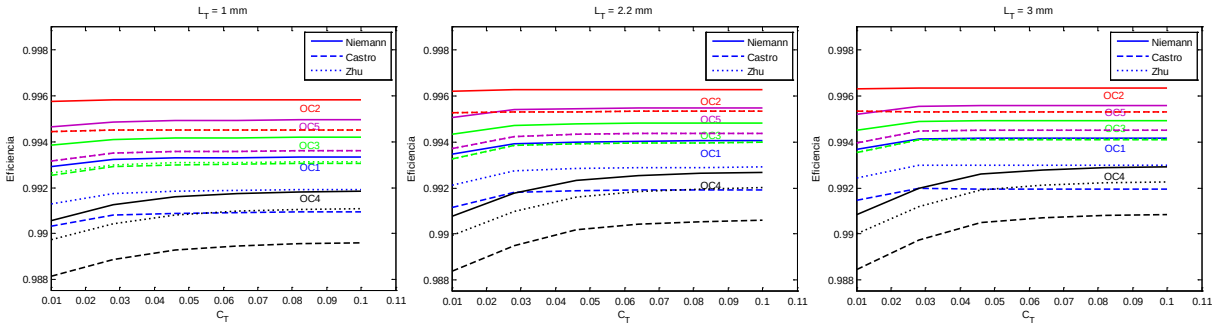


Figura V-93 Valores de eficiencia para diferentes valores de longitud de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud.

Cuando se aumenta la magnitud de rebaje, la eficiencia aumenta en las tres formulaciones de coeficiente de fricción. Existe un cambio considerable en la eficiencia, del caso C_T=0.01 mm a C_T=0.028 mm, independientemente de la formulación de coeficiente de fricción. Este cambio es mayor, cuanto mayor sea el nivel de par aplicado. Se demuestra así que el efecto del par es importante.

Si se compara la eficiencia, obtenida a partir de las tres formulaciones de coeficiente de fricción, la de Niemann es mayor que la de Zhu y, a su vez, mayor que la de Castro, por ese orden.

Por otra parte, si se compara con los otros dos escenarios, la eficiencia es mayor en todos los casos. Se concluye que introducir rebajes en ambos engranajes es más beneficioso, desde el punto de vista de la eficiencia, que incluirlos en uno de ellos.

En la Figura V-94, se muestran las relaciones de contacto efectiva y teórica cuando se modifica la longitud de rebaje.

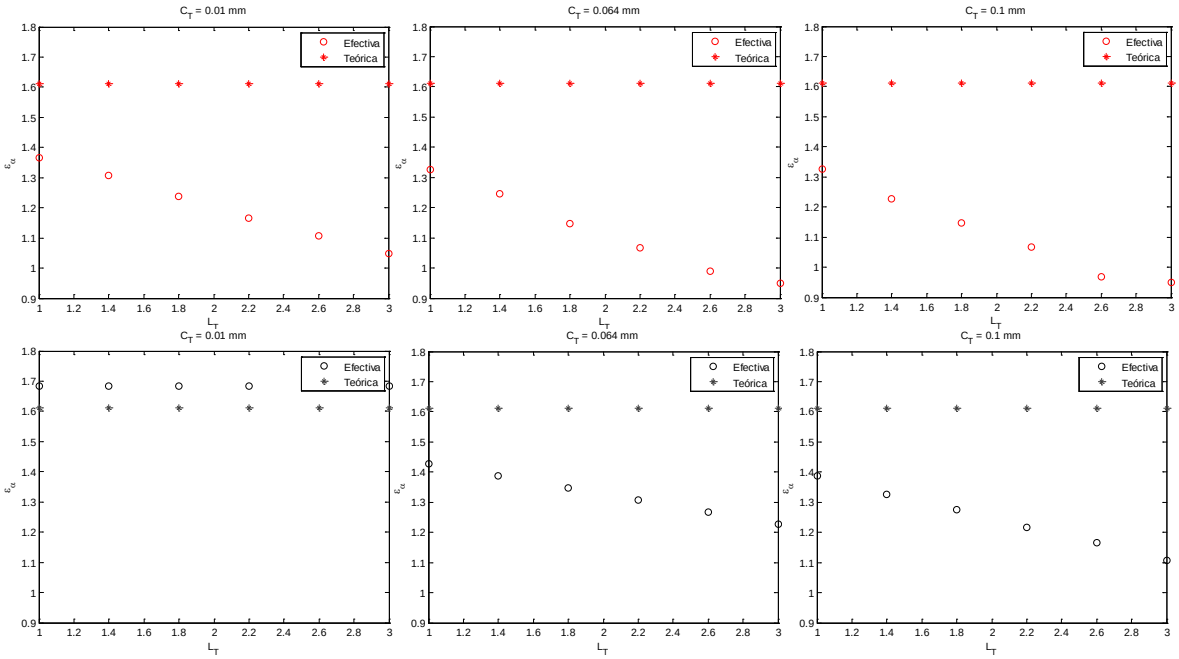


Figura V-94 Relación de contacto para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Para el nivel menor de par, la relación de contacto disminuye con el aumento de la longitud de rebaje. Como algo notable, existen casos en los que la relación de contacto es menor que la unidad. Si se compara con los dos escenarios anteriores, la relación de contacto es mayor cuando se introducen rebajes en ambas ruedas.

Para el nivel mayor de par (OC4), cuando la magnitud de rebaje es mayor que 0.03 mm, la relación de contacto disminuye con el aumento de la longitud de rebaje. Sin embargo, es constante para magnitudes de rebaje menores de este valor de magnitud (C_T = 0.03 mm).

En la Figura V-95 se muestran las relaciones de contacto cuando varía la magnitud de rebaje.

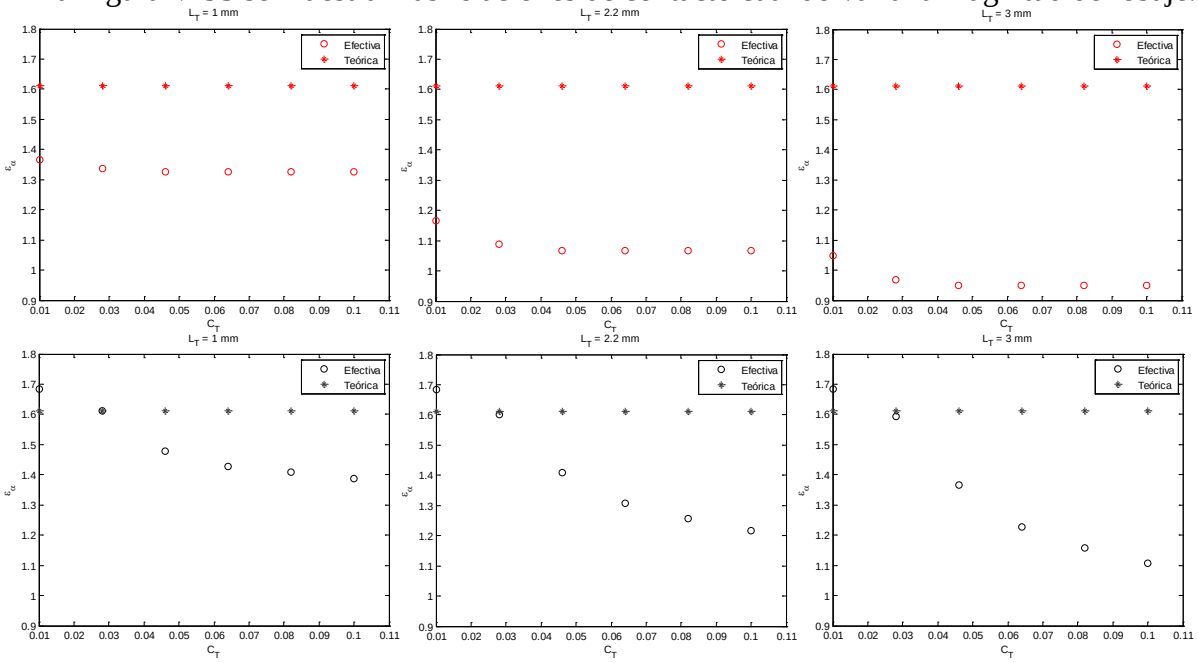


Figura V-95 Relación de contacto para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Para el nivel menor de par, la relación de contacto se mantiene constante con el aumento de la magnitud de rebaje. Sin embargo, para el nivel mayor de par, disminuye. Además, cuanto mayor es la longitud de rebaje, mayor es la dispersión entre las dos relaciones de contacto.

Todos los efectos comentados por los rebajes en la relación de contacto se ven reflejados en el reparto de carga. En la Figura V-96, se muestran los repartos de carga cuando se modifica la longitud de rebaje.

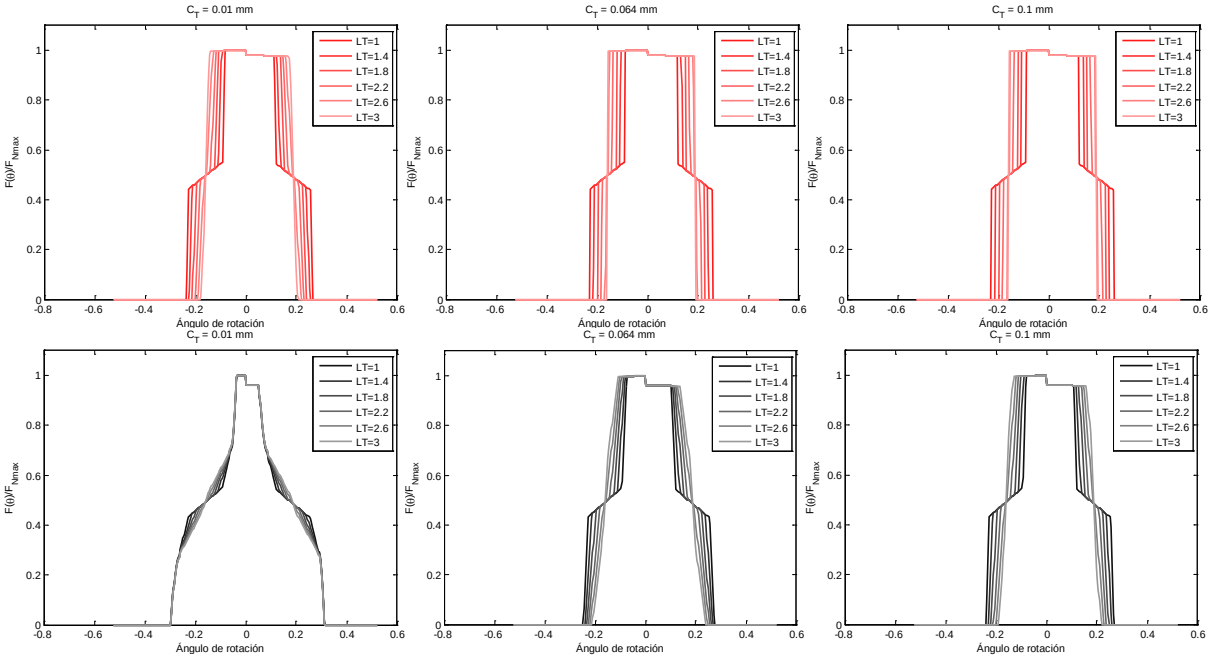


Figura V-96 Reparto de carga para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Si se comparan los repartos de carga de este escenario con los de los dos anteriores, la ZCS se alarga en ambas direcciones del punto primitivo y las de contacto doble se acortan (ambas). En los otros dos escenarios solo se reducía una de las zonas de contacto doble y se alargaba la ZCS en una dirección (solo una rueda tenía rebaje).

En el caso de menor par, con el aumento de la longitud de rebaje, el reparto de carga pasa de tener dos zonas de contacto doble bien diferenciadas a solo zona de contacto simple ($\varepsilon_\alpha = 1$). Este hecho es beneficioso desde el punto de vista de la eficiencia, dado que el contacto es más corto.

Para el nivel mayor de par, para magnitudes de rebaje menores a 0.03 mm, la longitud de rebaje apenas tiene influencia. A partir de este valor de magnitud, la tendencia es la misma que la observada en el caso de menor par.

Esto implica que con niveles elevados de par hay una magnitud de rebaje mínima, para la cual la longitud de rebaje tiene el efecto deseado en la eficiencia.

En la Figura V-97 se muestran los repartos de carga cuando se varía la magnitud de rebaje.

Para el nivel menor de par, la magnitud de rebaje no tiene influencia en el reparto de carga. La longitud de rebaje es el parámetro que tiene influencia sobre el reparto de carga para niveles de par reducidos.

Esta tendencia no se cumple para niveles elevados de par, donde tanto la longitud como la magnitud de rebaje son decisivas en el reparto de carga. Se observa, que una magnitud de

rebaje pequeña, resulta en un reparto de carga con una zona de contacto doble pronunciada y por tanto en mayores pérdidas. Se puede concluir que, para niveles elevados de par, los dos parámetros del rebaje son importantes. Existe una magnitud de rebaje crítica, a partir de la cual, aumentar su valor no tiene una gran influencia en el reparto de carga. En esta transmisión, este valor de magnitud es 0.03 mm.

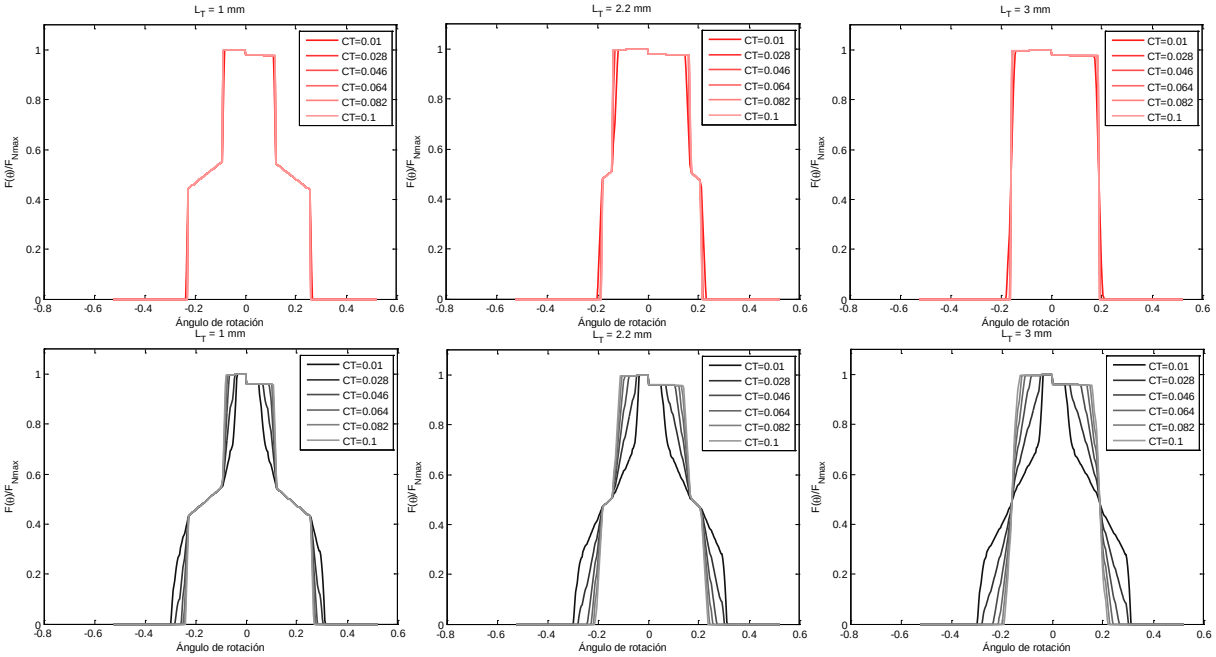


Figura V-97 Reparto de carga para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Una vez analizado el efecto de los rebajes en el reparto de carga, se estudia el coeficiente de fricción. En la Figura V-98 se muestran los coeficientes de fricción cuando se varía la longitud de rebaje.

Al variar la longitud de rebaje, disminuye la relación de contacto, reduciéndose el segmento de contacto tanto al inicio como al final del mismo. Como los valores máximos de los coeficientes de fricción híbridas se localizan en los extremos del contacto, la introducción de rebajes en ambas ruedas va a tener un impacto importante en las pérdidas.

En la Figura V-99 se muestran los coeficientes de fricción cuando se modifica la magnitud de rebaje.

Para niveles de par reducidos, el efecto de variar la magnitud de rebaje en el coeficiente de fricción es despreciable. Sin embargo, para niveles elevados de par (OC4), al variar la magnitud de rebaje, disminuye la relación de contacto, hasta un valor de magnitud crítica (C_T = 0.03 mm). A partir de este valor, aumentar más la magnitud influye ligeramente e incluso es despreciable.

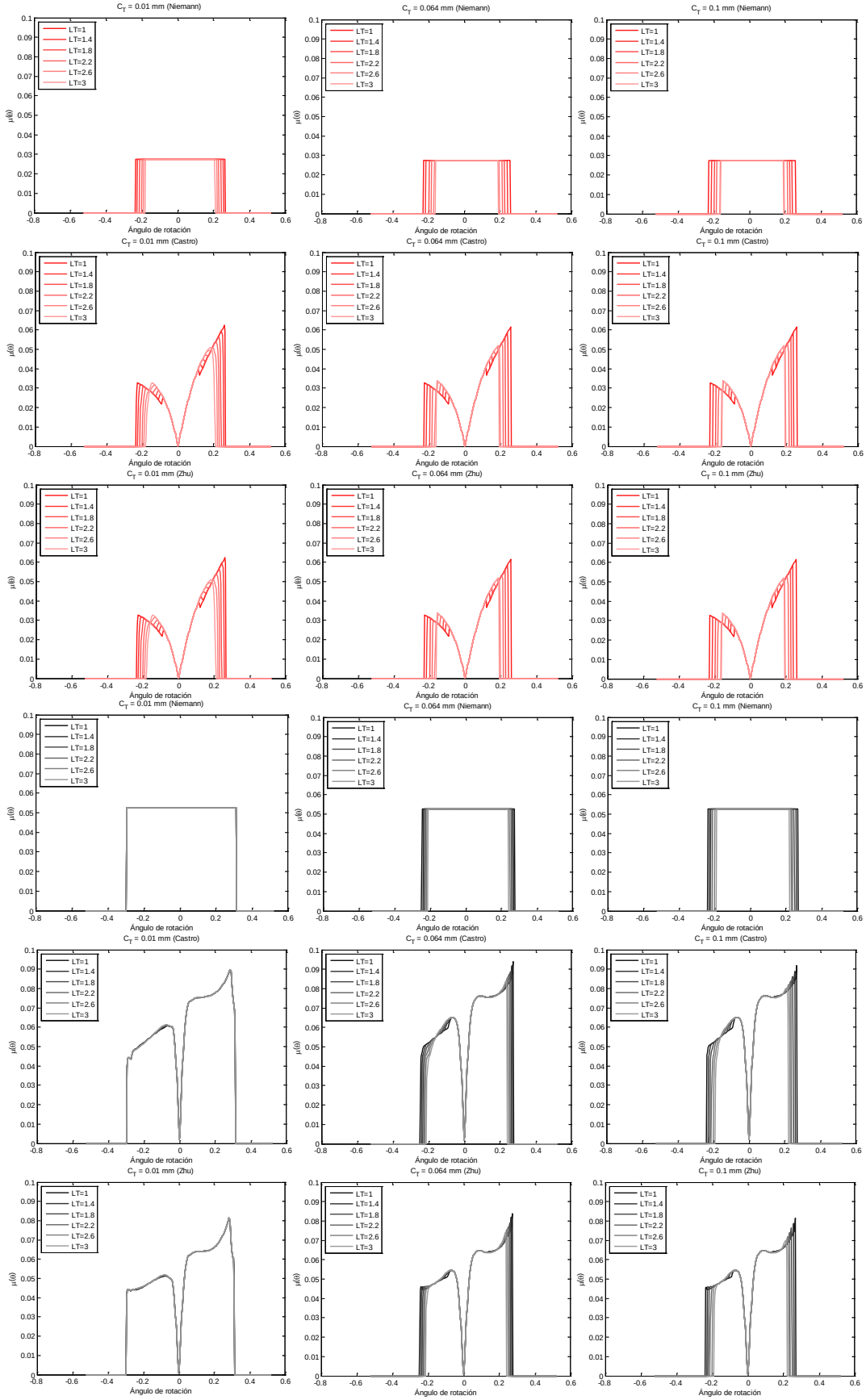


Figura V-98 Coeficiente de fricción para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

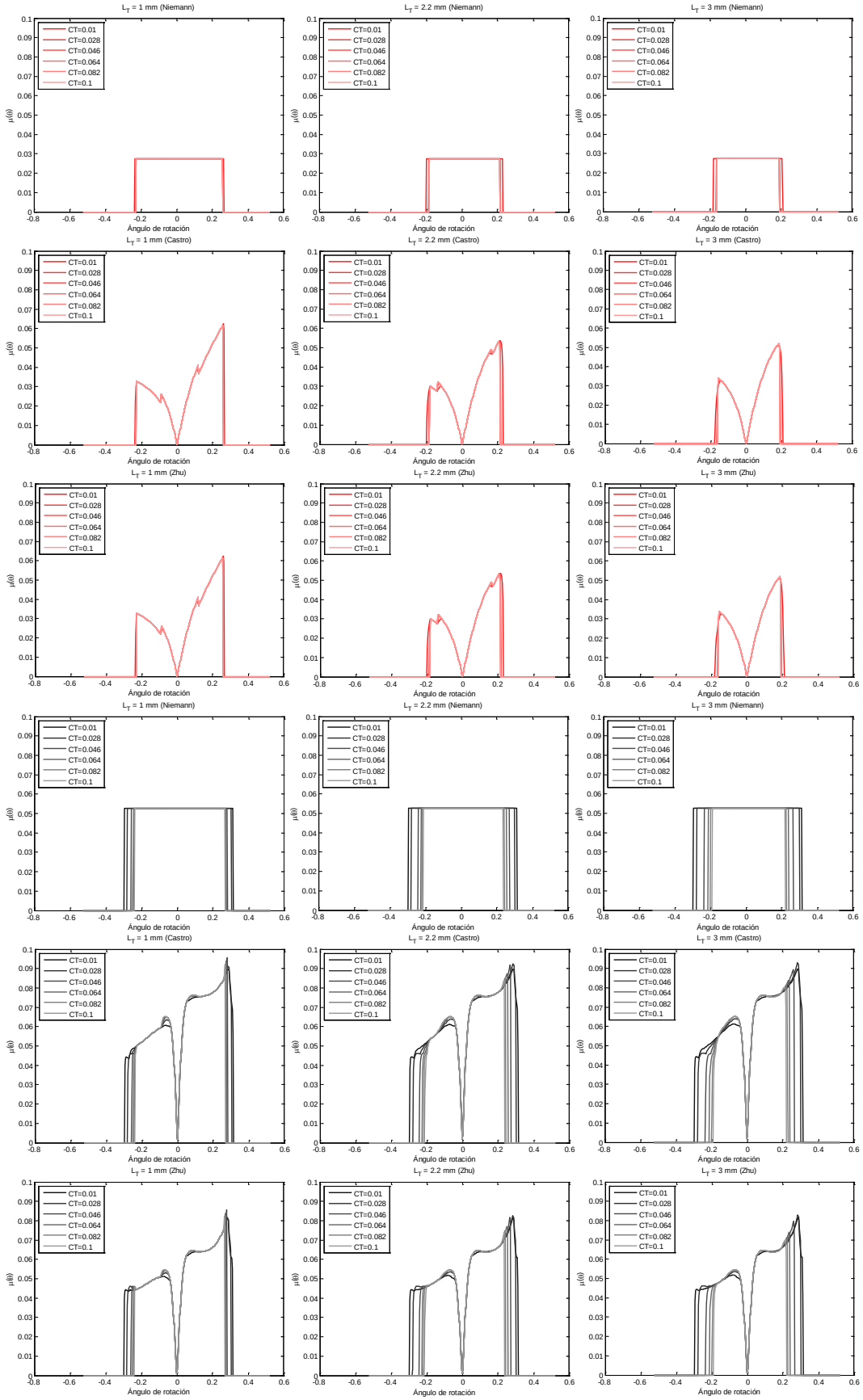


Figura V-99 Coeficiente de fricción para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Todos los cambios en el reparto de carga y coeficientes de fricción tienen una influencia directa en el factor de pérdidas instantáneas (IPL), el cual varía en forma y magnitud.

En la Figura V-100 se muestran los factores IPL cuando se varía la longitud de rebaje.

En este supuesto de rebajes, las pérdidas decrecen en las dos regiones de contacto doble (Figura V-100). Asimismo, aumentan las pérdidas en la ZCS en ambas direcciones (antes y después del punto primitivo).

Para niveles de par reducidos, las pérdidas que se generan en la ZCS son menores que las que se reducen en las zonas de contacto doble, resultando en la mejora de la eficiencia.

Para niveles de par elevados, se observa la misma tendencia cuando la magnitud de rebaje es mayor a 0.03 mm (magnitud de rebaje crítica). Para valores menores a la magnitud de rebaje crítica, la mejora de eficiencia es mucho más abrupta. Se debe a que existe una reducción clara de pérdidas en las zonas de contacto doble, mientras no hay un aumento significativo en la ZCS (se aprecia en el caso C_T = 0.01 mm).

En la Figura V-101 se muestran los factores IPL cuando se modifica la magnitud de rebaje.

Para niveles de par reducidos, la variación de la magnitud de rebaje tiene un impacto despreciable en las pérdidas del sistema.

No sigue la misma tendencia el caso de mayor nivel de par (OC4). Al aumentar la magnitud de rebaje, las pérdidas producidas en las zonas de contacto doble decrecen, asimismo las pérdidas en la ZCS aumentan.

Si se comparan las pérdidas con las de los otros dos escenarios, las pérdidas producidas en el primer y segundo escenario son siempre mayores que las correspondientes al último. Como se expone a lo largo del análisis, la principal razón para que esto suceda es la reducción de la relación de contacto. Se debe a la reducción de las regiones donde el coeficiente de fricción se hace máximo y a que la influencia de la velocidad de deslizamiento es menor, por estar más cerca del punto primitivo.

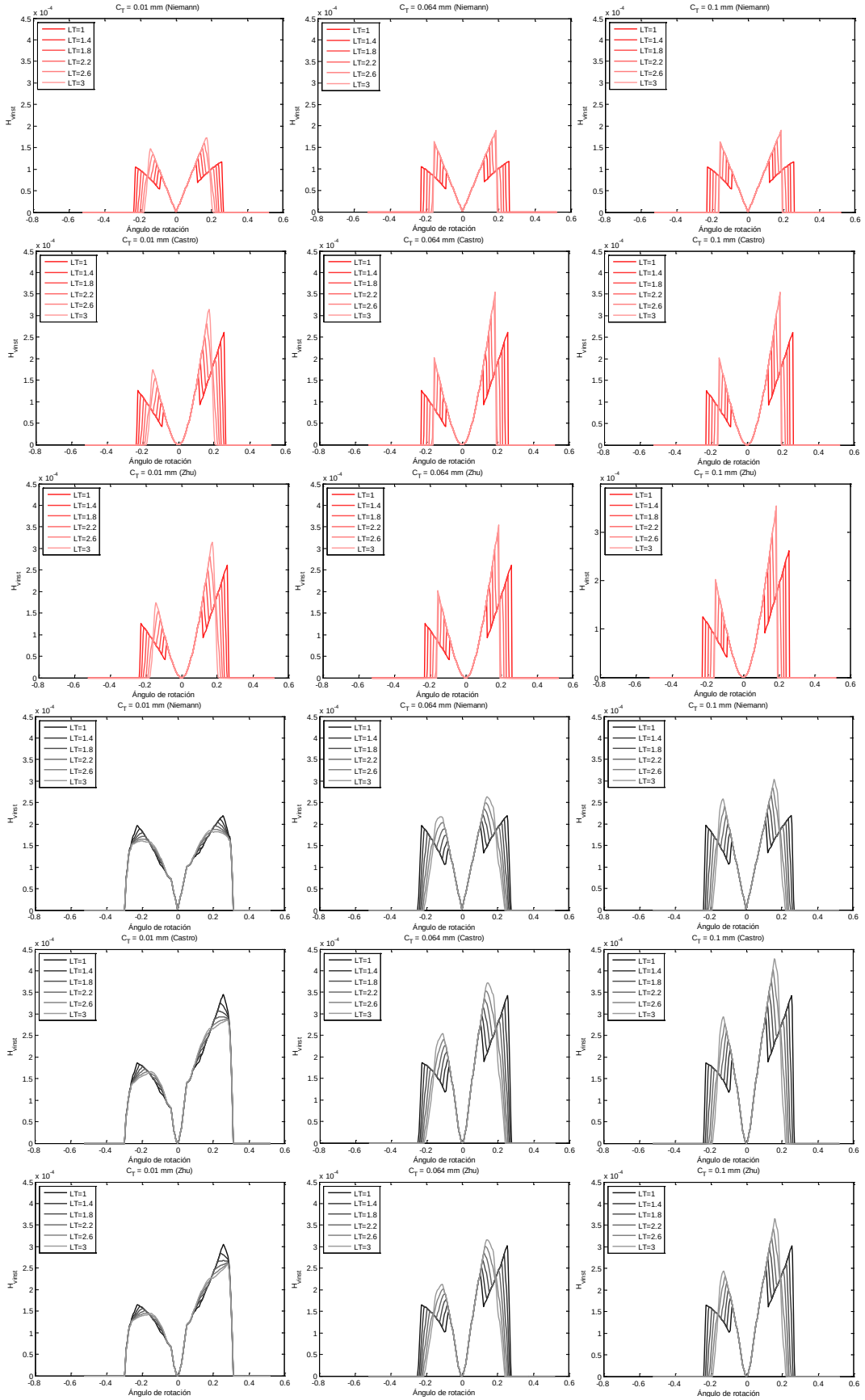


Figura V-100 Factor de pérdidas instantáneas para diferentes magnitudes de rebaje (C_T =0.01, 0.064 y 0.1 mm), variando la longitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

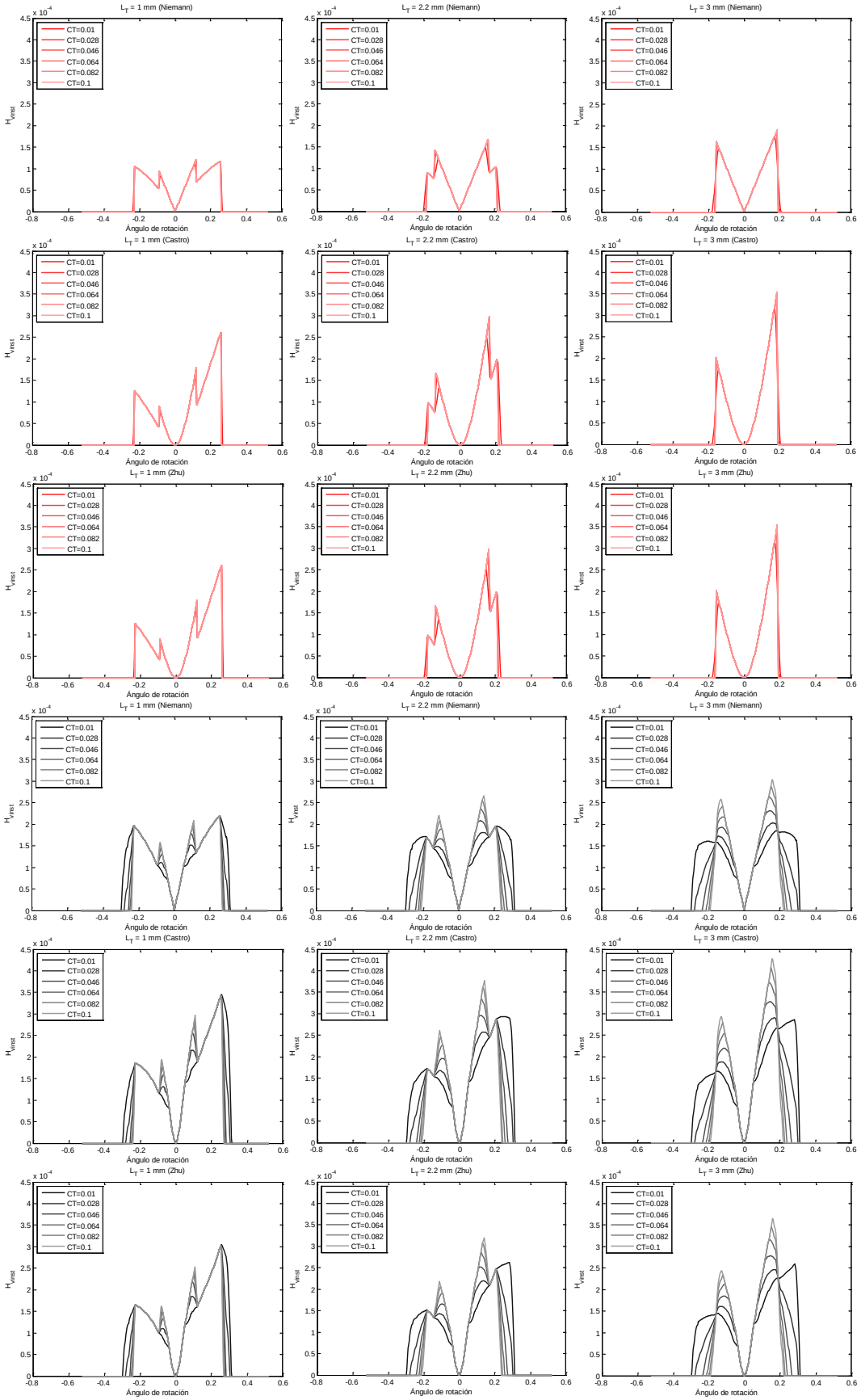


Figura V-101 Factor de pérdidas instantáneas para diferentes longitudes de rebaje (L_T =1, 2.2 y 3 mm), variando la magnitud. En rojo OC2 (40 Nm y 6000 rpm) y en negro OC4 (637 Nm y 1500 rpm).

Capítulo VI

APORTACIONES Y CONCLUSIONES

VI.1. Aportaciones

En esta memoria de Tesis se han presentado y analizado los fenómenos disipativos existentes en el contacto entre engranajes, así como las formulaciones para modelizar su comportamiento en distintas condiciones de operación. En este contexto, se ha prestado especial atención a los modelos para la estimación de los esfuerzos en el contacto entre engranajes, teniendo en cuenta el efecto que el nivel de par transmitido tiene sobre la eficiencia del sistema. Estas mejoras se han incorporado al modelo dinámico de engranajes de partida (GEDUC) desarrollado en la Universidad de Cantabria.

Para el cálculo de la eficiencia, un aspecto sobre el que se ha hecho especial hincapié ha sido el de la fricción por deslizamiento, por ser el fenómeno disipativo más influyente en las condiciones de operación a estudiar, desarrollándose, para este caso, un procedimiento de cálculo, basado en la utilización de modelos avanzados de reparto de carga y de coeficiente de fricción. Este procedimiento se ha comparado con otro que utiliza formulaciones analíticas, obteniendo resultados similares. Además, se ha propuesto una mejora a este último, mediante la introducción de un modelo de reparto de carga que varía en las zonas de contacto doble.

De acuerdo con los objetivos inicialmente planteados, a continuación se presentan las principales aportaciones de este trabajo:

1. Se ha caracterizado el comportamiento de la transmisión, ejemplo, mediante análisis cuasi-estáticos, tanto en condiciones estándar de tallado de perfil, como cuando se incorporan correcciones y modificaciones en el perfil del diente. Asimismo, se han analizado sus consecuencias en la eficiencia del sistema.
2. Para el cálculo de la eficiencia se ha propuesto una metodología que tiene en cuenta todos los fenómenos disipativos presentes en el contacto. Además, se ha particularizado para el caso de la fricción por deslizamiento.

3. Se ha comparado el *procedimiento avanzado* para el cálculo de la eficiencia, teniendo sólo en cuenta la fricción por deslizamiento, con otro basado en formulaciones analíticas de reparto de carga y coeficiente de fricción. Este "*procedimiento analítico*" se ha mejorado a partir de la implementación de un modelo alternativo de reparto de carga.

4. A partir de la comparativa anterior, se han mostrado las ventajas de utilizar un procedimiento, basado en formulaciones avanzadas de reparto de carga y coeficientes de fricción, respecto a otro que utiliza formulaciones analíticas, en concreto, cuando se utilizan diferentes niveles de par, correcciones y modificaciones de perfil.

5. Se ha mejorado la formulación del contacto al incluir el efecto del lubricante en el coeficiente de fricción. Se han utilizado formulaciones que tienen en cuenta el régimen y las condiciones de lubricación.

6. A partir del análisis de las pérdidas de fricción por rodadura y por deslizamiento en régimen hidrodinámico, se han propuesto dos formulaciones analíticas para el cálculo de los esfuerzos debidos a estos fenómenos. Aunque ambas son válidas desde el punto de visto conceptual, necesitan verificación.

VI.2. Conclusiones

El desarrollo del modelo de contacto y su aplicación en un caso particular ha proporcionado una serie de conclusiones, tanto a escala general como específica, y que se detallan a continuación.

VI.2.1. Generales

1. Se han presentado los resultados de eficiencia calculados a partir del *procedimiento avanzado*, alcanzándose una buena correlación con los obtenidos mediante otro procedimiento, basado en el uso de formulaciones analíticas de reparto de carga y coeficiente de fricción. Particularmente, se obtienen resultados muy similares en transmisiones estándar y en transmisiones con correcciones de perfil, sin embargo, no ocurre lo mismo en transmisiones con rebajes en la punta del diente.

2. Para aplicaciones que necesiten un cálculo aproximado de la eficiencia, el valor aportado a partir del procedimiento basado en formulaciones analíticas es válido. Sin embargo, para aplicaciones que necesiten cálculos más precisos, se deberá optar por el cálculo basado en formulaciones avanzadas de reparto de carga y coeficiente de fricción.

3. La introducción de rebajes y correcciones de perfil varía considerablemente la eficiencia global del sistema. Esto es debido, principalmente, a los cambios que experimentan la rigidez del contacto y la relación de contacto entre engranajes.

4. La mejora presentada, en el procedimiento basado en formulaciones analíticas, mediante la consideración de modelos de reparto de carga más cercanos al real ("Analítico GEDUC" y "Analítico AGMA"), da lugar a que los valores de eficiencia sean mayores que los correspondientes al caso de reparto de carga uniforme (denominado "Analítico ISO/TC-60"). Esto se debe a que los repartos de carga "Analítico GEDUC" y "Analítico AGMA" toman valores, al inicio y final del contacto, menores que los correspondientes al reparto de carga "Analítico ISO/TC-60".

VI.2.2. Engranajes estándar

1. El par aplicado a la transmisión es determinante en el valor final de la eficiencia, que es menor cuanto mayor es el nivel de par. Esto se debe a dos razones principalmente: i) aumento de la zona de contacto; y ii) aumento del valor medio de coeficiente de fricción.

2. Para niveles de par menores a 300 Nm, el *procedimiento avanzado* proporciona valores mayores de eficiencia, cuando se implementa la formulación de coeficiente de fricción constante (Niemann), que el *procedimiento analítico*, produciéndose un cambio de tendencia a partir de este valor de par. La mayoría de las pérdidas ocurren en los extremos del contacto, donde la velocidad de deslizamiento es máxima y el contacto es doble. De aquí que para valores de par menores a 300 Nm, el reparto de carga ISO/TC-60 produzca mayores pérdidas en los extremos que el correspondiente al modelo propuesto. El cambio de tendencia a partir de 300 Nm se debe a que el modelo GEDUC tiene en cuenta la deformación producida en los dientes adyacentes, aumentando así la relación de contacto efectiva con el aumento de par.

3. Los resultados de eficiencia incorporando las formulaciones híbridas, denominadas de *Castro* y *Zhu* por las funciones de ponderación que utilizan, son muy similares a los obtenidos con el coeficiente de fricción constante de Niemann. Las principales diferencias entre ambas formulaciones se localizan, tanto en el punto primitivo, como en el inicio y fin del contacto, donde las formulaciones híbridas dan un valor de coeficiente de fricción nulo, en el punto primitivo, y máximo, el cual es superior al de Niemann, en el inicio y fin del contacto. La diferencia en el inicio y fin del contacto es determinante en la eficiencia, dado que estas regiones coinciden con la velocidad máxima de deslizamiento. Esto provoca mayores pérdidas, en esta zona, mediante las formulaciones híbridas que las correspondientes a Niemann. Además, la comparación entre formulaciones híbridas muestra que la función de ponderación de Castro es más restrictiva que la de Zhu, proporcionando valores de fricción mayores para el mismo régimen de lubricación.

VI.2.3. Engranajes con correcciones de tallado

1. Las correcciones de perfil, dependiendo de su implementación, pueden provocar varios cambios: i) variación en la forma del reparto de carga, cargándose más la primera zona de contacto doble que la segunda; ii) puede modificarse la localización del contacto; y iii) puede verse modificada la longitud del segmento de contacto.

2. Dependiendo de las condiciones de operación y del coeficiente de fricción existe un factor de corrección que hace que la eficiencia sea óptima. A partir de este valor de corrección, las pérdidas debidas al contacto simple se incrementan, dado que el segmento de contacto se desplaza, y, por tanto, la eficiencia decrece drásticamente.

3. Para el caso con correcciones elevadas (x_1>0.4), el *procedimiento avanzado*, cuando se implementa la formulación de Niemann, da valores menores de eficiencia que el *procedimiento analítico*.

4. De forma general, cuando se implementan los dos tipos de coeficientes de fricción en el *procedimiento avanzado*, se obtienen conclusiones parecidas a las del caso sin corrección, pero se acentúan los efectos (debido a la corrección). La eficiencia correspondiente a la formulación de Castro proporciona los valores menores, seguida por la de Zhu, siendo la de Niemann la que proporciona mayor valor. La principal razón es que el valor del coeficiente de rozamiento de Castro es mayor en los extremos del contacto que los de las otras dos formulaciones.

VI.2.4. Engranajes con rebajes en la punta del diente

1. Dependiendo de las condiciones de operación y del coeficiente de fricción, existe un valor de rebaje que hace que la eficiencia sea óptima, el cual se corresponde con un valor unitario de relación de contacto. Para relaciones de contacto menores (rebajes mayores que el óptimo), el modelo proporciona valores teóricos de eficiencia que carecen de validez desde el punto de vista del diseño dinámico. Lógicamente, éstos son mayores que el correspondiente al óptimo, pero se desechan porque no interesa que haya pérdida de contacto entre dientes en funcionamiento. Consecuentemente, el rebaje óptimo de eficiencia coincide con el rebaje óptimo desde el punto de vista dinámico.

2. Cuando se aumenta la longitud y la magnitud del rebaje, la eficiencia aumenta. Para niveles de par menores a 100 Nm, la longitud es el parámetro determinante en la eficiencia. Mientras que para niveles de par mayores a 100 Nm, ambos parámetros son determinantes, existiendo una magnitud del rebaje mínima a partir de la cual la longitud empieza a tener importancia. En el caso de la transmisión estudiada, la magnitud mínima es de 0.03 mm.

3. La formulación del coeficiente de fricción es determinante en el valor de la eficiencia, obteniéndose tendencias distintas con la formulación de coeficiente constante (Niemann) que con las formulaciones híbridas:

- Cuando el coeficiente de fricción es constante, el parámetro que determina el valor de eficiencia es el reparto de carga. En este caso, considerar el rebaje en el piñón (rueda de menor tamaño) mejora más la eficiencia que en el caso de incluirlo en la rueda conducida, porque reduce más la relación de contacto. Además, la eficiencia es mayor cuando se introducen rebajes en ambas ruedas a la vez, que cuando se introduce el mismo rebaje en solo una de las ruedas. Esto se debe a que la relación de contacto obtenida es menor cuando se introduce el rebaje en ambas ruedas.
- En el caso de las formulaciones híbridas se superpone el efecto del reparto de carga al del coeficiente de fricción, obteniéndose que la eficiencia sigue la tendencia contraria a la descrita en el caso de Niemann. La eficiencia de la transmisión es mayor cuando se introducen rebajes en la rueda conducida que en el piñón. Esto se debe a que el valor en las formulaciones híbridas del coeficiente de fricción es máximo al final del contacto. Como consecuencia de la inclusión de rebajes en la rueda conducida, disminuye el contacto al final, por lo que se reducen más las pérdidas que en el caso de incluirlos en el piñón, que da lugar a una reducción del contacto al inicio.

VI.3. Líneas de trabajo futuro

Dentro de esta línea de investigación, esta es la tercera Tesis Doctoral desarrollada en el Grupo de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Cantabria. En este marco y como continuación del trabajo realizado, quedan abiertas diversas líneas de desarrollo futuro como:

- Validación experimental

  Aunque los resultados obtenidos han sido contrastados con valores experimentales y modelos descritos en la literatura científica, es preciso validar la información mediante la comparación con resultados en banco de ensayos.

- Desarrollo y análisis de todos los fenómenos disipativos en la eficiencia

  En este trabajo se han recopilado los fenómenos disipativos presentes en el contacto, pero ha sido inviable su implementación debido a la acotación temporal, planteándose, como trabajo futuro, el análisis de la eficiencia de cada uno ellos.

- Incluir el efecto de las variaciones de temperatura y presión

  En este trabajo se ha evaluado el comportamiento de los fluidos cuando varían su temperatura y presión, así como la recopilación de modelos para simular este comportamiento (fluidos Newtonianos y no Newtonianos). Como trabajo futuro se plantea la inclusión de los modelos de estos fluidos junto con la ecuación de la energía. El objetivo, en este caso, es plantear el balance energético en el contacto y así poder analizar cómo la variación de temperatura afecta a las propiedades del lubricante y a los fenómenos disipativos.

- Estudio dinámico de los esfuerzos derivados del contacto

  El alcance de este estudio se centra en el cálculo y análisis de la eficiencia cuando se tienen en cuenta los diferentes fenómenos disipativos. Pero estos esfuerzos no solo producen pérdidas energéticas, sino que a partir de su implementación se puede simular de forma más precisa el comportamiento vibratorio de este tipo de sistemas mecánicos. A tal fin, el análisis dinámico de todos los esfuerzos contemplados en este trabajo se plantea como una línea de trabajo futuro.

- Análisis de transmisiones en 3D

  Las herramientas desarrolladas en el presente trabajo se han centrado exclusivamente en los engranajes cilíndricos exteriores de dientes rectos en 2D. La extrapolación de este modelo de 2D a otro más complejo en 3D, a partir de la superposición de n modelos como el presentado en esta memoria de Tesis, es factible aunque no trivial. Con esto se podrán modelizar entre otros, engranajes helicoidales e hipoidales, los cuales están presentes en una amplia mayoría de cajas de cambios y transmisiones en vehículos y otras aplicaciones.

- Análisis del traqueteo en transmisiones sometidas a bajas cargas

  Las condiciones de operación analizadas en este trabajo de Tesis han sido bajo cargas elevadas. Sin embargo, también se ha previsto la inclusión de modelos matemáticos que simulen el comportamiento en otras condiciones, como es el caso en el que la transmisión esté sometida a baja carga. Esto es justificable porque en las cajas de cambios, además de la pareja de engranajes activa, es decir, la que está transmitiendo la carga del eje de entrada al de salida, existen una serie de parejas de dientes que están en contacto entre sí, aunque no transmiten carga (inactivas). Estas últimas generan problemas como el traqueteo (*rattle*), derivados del contacto en flanco y contraflanco de los dientes. Estos problemas son molestos desde el punto de vista del confort de los usuarios (ruido) y nocivos para los elementos solidarios a los ejes por las vibraciones que se generan y se les transmiten. De lo anterior se deduce el interés de modelizar y simular transmisiones en estas condiciones.

- Análisis de transmisiones multi-etapa. Cajas de cambios

  Se ha analizado una transmisión simple formada por dos engranajes. Sin embargo, el potencial del modelo GEDUC y los diferentes regímenes de lubricación analizados, son las herramientas base para la implementación de un modelo dinámico de caja de cambios real.

Chapter VI

CONTRIBUTIONS AND CONCLUSIONS

VI.1. Contributions

In this work, the dissipative phenomena involved in the contact between gears and the formulations to simulate their behaviour in different operating conditions, were analysed. In this context, special attention was given to models which estimate contact efforts between gears, taking into account the effect of the torque level on the system efficiency. These improvements were incorporated into the starting model of gear transmissions (GEDUC) developed in the University of Cantabria.

In order to calculate the efficiency, an aspect that was given special emphasis is the sliding friction, since it is the most influential dissipative phenomenon in the studied operating conditions. Developing, for this case, a calculation procedure based on the use of advanced models of load sharing and friction coefficient. This procedure was compared to another which implements analytical formulations, obtaining similar results. Furthermore, an improvement to the latter procedure was proposed by including a load sharing model, which varies in double-contact regions.

The main contributions of this work are presented:

1. The behaviour of the example transmission was characterized by quasi-static analysis, both in standard profile conditions and when profile shifting and modifications were incorporated to the tooth profile. Their impact on system efficiency was also assessed.
2. To calculate efficiency, a methodology, which takes into account all dissipative phenomena in the contact conjunction, was proposed. In addition, this procedure was particularized for the case of sliding friction.
3. The *advanced procedure* for calculating efficiency was compared, taking into account only the sliding friction, with another based on analytical formulations of load sharing and coefficient of friction. This "*analytical procedure*" was improved by the implementation of an alternative load sharing model.

4. From the commented comparison, the advantages of using a procedure, based on advanced formulations of load sharing and friction coefficient, with respect to another using analytical formulations were presented, specifically, when different torque levels, shift factors and profile modifications were used.
5. The formulation of the contact behaviour was improved by including the effect of lubricant on the friction coefficient. Specifically, using formulations which consider the regime and conditions of lubrication.
6. From the analysis of the rolling and sliding friction losses in hydrodynamic regime, two analytical formulations, for calculating the forces due to these phenomena, were proposed. Although both are conceptually valid, they need verification.

VI.2. Conclusions

The development of the contact model, and its application in a particular case, provided a number of conclusions, both on a general and specific scale, which are detailed below.

VI.2.1. General conclusions

1. The efficiency results, calculated by the *advanced procedure*, were presented, achieving a good correlation with those obtained by another method, based on the use of analytical formulations of load sharing and coefficient of friction. Particularly, similar results were obtained in standard and shifting profile transmissions, nevertheless, there were a distortion among results in the case of transmissions with tip relief in their profile.
2. For applications which require a rough estimation of efficiency, the procedure based on analytical formulations provides valid values. Nonetheless, for applications requiring more accurate calculations, you must opt for a procedure based on advanced formulations of load sharing and friction coefficient.
3. The consideration of tip relief and profile shifting varies considerably the overall system efficiency. This is, mainly, due to the changes in both, the contact stiffness and contact ratio.
4. The commented improvement, included in the *analytical procedure*, considers load sharing models closer to the actual real load ("Analytical GEDUC" and "Analytical AGMA") and provides greater efficiency values than the corresponding to the case of uniform load sharing (called "Analytical ISO/TC-60"). This happens because the load sharing distributions "Analytical GEDUC" and "Analytical AGMA" take lower values, at the beginning and end of the contact, than the corresponding to load sharing "Analytical ISO/TC-60".

VI.2.2. Standard gears

1. The torque applied to the transmission is crucial in the final efficiency value, which is lower with the increment of torque level. This occurs for two reasons: i) increase of the contact area; and ii) increment of the friction coefficient average value.
2. For torque levels lower than 300 Nm, the *advanced procedure*, when constant friction coefficient (Niemann) is implemented, provides higher efficiency than the *analytical procedure*, occurring a trend change from this torque value on. Most of the power losses are located at the end of the contact, where the sliding velocity is maximum. Hence, for torques lower than 300 Nm, load sharing “Analytical ISO/TC-60” results in higher losses at the contact end than the model proposed. The turnaround from 300 Nm is because the

model GEDUC takes into account the deformation produced in the adjacent teeth, thus the effective contact ratio increases with the increment of torque.

3. Efficiency results incorporating hybrid formulations, called *Castro* and *Zhu* because of the weighting functions used, are very similar to those obtained with the Niemann's constant friction coefficient. The main differences between the two formulations are located, both in the pitch point and at the beginning and end of contact, where the hybrid formulations give a null value of friction coefficient, in the pitch point, and a maximum, which is higher than Niemann's value, at the beginning and end of the contact. The difference at the beginning and end of the contact is crucial in efficiency, since these regions coincide with the maximum sliding velocity. This causes higher power losses, in this area, using hybrid formulations than implementing Niemann's. In addition, the comparison between hybrid formulations shows that Castro's weighting function is more restrictive than Zhu's, providing greater friction values in the same lubrication regime.

VI.2.3. Shifted gears

1. Shifting profile, depending on its implementation, can cause several changes: i) variation in the load sharing form, loading more the first double-contact region than the second; ii) change of the contact location; and iii) modification of the contact segment length.
2. Depending on the operating conditions and the friction coefficient, there is a shift factor which makes the efficiency optimal. From this shift factor on, the power losses in the single-contact region increases, since the contact segment is displaced and, therefore, the efficiency decreases drastically.
3. For the case with high shift factors (x_1>0.4), the *advanced procedure*, when the formulation of Niemann is implemented, provides lower values of efficiency than the *analytical procedure*.
4. Generally, when the two types of friction coefficients are implemented in the *advanced procedure*, similar conclusions are obtained to the case without shifting (standard gears), but the effects are accentuated (due to shifting). The efficiency corresponding to Castro's formulation is the lower, next are the Zhu's values, being Niemann's which provides the greater value. The main reason is that Castro's coefficient of friction is greater at the contact end than the other two formulations.

VI.2.4. Gears with tip relief

1. Depending on the operating conditions and the friction coefficient, there is a tip relief value that makes optimal the efficiency, which corresponds to a unit value of the contact ratio. For contact ratios lower than the unity (reached with tip reliefs greater than the optimal), the model provides theoretical efficiency values which are not valid from the dynamic design point of view. These efficiency values are logically higher than the one corresponding to the optimum, but they are discarded since lost tooth contact in operation is avoided. Consequently, the optimum tip relief of efficiency coincides with the optimum tip relief of the dynamic point of view.
2. When the length and magnitude of the tip relief are increased, efficiency increases. For torque levels lower than 100 Nm, the length is the parameter which determines the efficiency. Whilst for levels of torque higher than 100 Nm, both parameters are critical, existing a minimum magnitude of the tip relief from which the length starts to be important. For the studied transmission, this minimum magnitude is 0.03 mm.

3. The formulation of the friction coefficient is decisive in the value of efficiency, yielding to different trends with the constant friction coefficient (Niemann) and with the hybrid formulations:

- When the friction coefficient is constant, the parameter which determines the efficiency value is the load sharing. In this case, including the tip relief in the pinion (smaller wheel) improves more the efficiency than introducing it in the driven wheel, because the contact ratio is reduced more. Furthermore, the efficiency is greater when the tip reliefs are placed in both wheels, simultaneously, than when the tip relief is included in one of them. This is because the contact ratio, obtained when the tip relief is introduced on both wheels, is lower.
- In the case of hybrid formulations, the effect of the load sharing is superposed to the friction coefficient one, obtaining that efficiency follows the opposite trend to that described in the case of Niemann. The transmission efficiency is greater when the tip relief is introduced in the driven wheel than in the pinion. This occurs because, in the hybrid formulations, friction coefficient is maximum at the end of the contact. As a result of the tip relief inclusion in the driven wheel, a reduction of the length of the contact is produced at the end and, as a consequence, power losses are reduced more than in the case of inclusion in the pinion, which provokes a reduction of the length of the contact at the beginning.

VI.3. Future work

Within this research line, this is the third doctoral thesis developed in the Mechanical Engineering Group at the University of Cantabria. In this framework and as a continuation of work done, several future lines of development are open:

- Experimental validation

  Although the results were verified with experimental records and models described in the scientific literature, results must be validated by those obtained with a specific test bench developed for this purpose.
- Implementation and development of the dissipative phenomena in the efficiency

  In this work, dissipative effects, which occurs in the contact between teeth, were compiled, but its implementation was unfeasible due to the time limitation, proposing, as future work, the analysis of each of them on the efficiency.
- Implement the effect of the temperature and pressure in the fluid.

  The behaviour of fluids, when its temperature and pressure vary, as well as, the collection of models to simulate this behaviour (Newtonian and non-Newtonian fluids) were evaluated in this study. As future work, it is planned to include formulations of the fluid behaviour and the energy equation in the starting model. The aim is to consider the energy balance in the contact and, thus, analyse how the temperature variation affects the properties of the lubricant and dissipative phenomena.
- Dynamic analysis of the contact forces in the conjunction

  The scope of this study focused on the calculation and analysis of efficiency, taking into account the different dissipative phenomena. These efforts do not only produce energy losses but changes in the dynamic behaviour. To this end, the dynamic analysis of all the efforts, referred in this work, is presented as a future line of work.

- 3D transmissions

  The tools developed in this work were focused, exclusively, on spur gears in 2D. Extrapolation of this 2D model to a more complex 3D model, superposing *n* models as the one presented in this wok, is feasible but not trivial. With this 3D model, other kinds of transmission can be modelled, such as helical and hypoid gears, which are present in the vast majority of vehicles gearboxes, transmissions and other applications.

- Rattle assessment in transmissions under low loads

  The assessed operating conditions, in this work, were under high loads. However, it is also planned to include mathematical models simulating the behaviour under other conditions, low loads. This is justified because gearboxes, besides the couple of active gears, ie, the one which is transmitting the load from the input to the output shaft, a number of teeth pairs are in contact, although they do not transmit load (inactive). The latter generates problems such as rattle, which results from the contact in the teeth flank and counter-flank. These problems are troublesome, from the point of view of passenger comfort (noise), and harmful, especially for the elements which support and are in contact with the shafts due to the generated and transmitted vibrations. From the above, there is a great interest to model and simulate the transmissions under these conditions.

- Multi-stage transmissions assessment. Gearboxes

  It was analysed a simple transmission formed by two gears. However, the potential of the model and the different regimes GEDUC lubrication evaluated, are the basic tools for implementing a dynamic model of an actual gearbox.

Referencias bibliográficas

[Ajmi, 2005] M. Ajmi, P. Velex, "A model for simulating the quasi-static and dynamic behaviour of solid wide-faced spur and helical gears", *Mechanism and Machine Theory*, 30(2), pp. 173-190, (2005).

[Akin, 1975] L. S. Akin *et ál.*, "Theory for the effect of windage on the lubricant flow in the tooth spaces of spur gears" *ASME J. Eng. Ind.*, 97, pp. 1266-1273, (1975).

[Almqvist, 2008] T. Almqvist, R. Larsson, "Thermal transient rough EHL line contact simulations by aid of computational fluid dynamics", *Tribology International*, 41, pp. 683–693, (2008).

[Al-Shibl, 2007] K. Al-Shibl *et ál.*, "Modelling gear windage power loss from an enclosed spur gears", *Proc. Inst. Mech. Eng., Part A*, 221(3), pp. 331-341, (2007).

[Amabili, 1997] M. Amabili, A. Rivola, "Dynamic analysis of spur gear pairs: steady-state response and stability of the SDOF model with time-varying meshing damping", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 11(3), pp. 375-390, (1997).

[Ambarisha, 2007] V. K. Ambarisha, R. G. Parker, "Nonlinear dynamics of planetary gears using analytical and finite element models", *Journal of Sound an Vibration*, 302(3), pp. 577-595, (2007).

[Anderson, 1980a] N.E. Anderson, S.H. Loewenthal, "Spur-gear-system efficiency at part and full load" *NASA TECHNICAL PAPER*-1622, (1980).

[Anderson, 1980b] N.E. Anderson, S.H. Loewenthal, "Comparison of spur gear efficiency prediction methods", DTIC Document, (1980).

[Anderson, 1980c] N.E. Anderson, S.H. Loewenthal, "Effect of geometry and operating conditions on spur dear system" *NASA TECHNICAL REPORT*-80-C-2, (1980).

[Anderson, 1983] N. E. Anderson, S. H. Loewenthal, "Comparison of Spur Gear Efficiency Prediction Methods," *Report No. NASA-CP-2210*, (1983).

[Andersson, 2003] A. Andersson, L. Vedmar, "A dynamic model to determine vibrations in involute helical gears", *Journal of Sound and Vibration*, 260(2), pp. 195-212, (2003).

[Anuradha, 2012] P. Anuradha P. Kumar, "Effect of lubricant selection on EHL performance of involute spur gears", *Tribology International*, 50, pp. 82–90, (2012).

[Al-shyyab, 2005a] A. Al-shyyab, A. Kahraman, "Non-linear dynamic analysis of multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: sub-harmonic motions", *Journal of Sound and Vibration*, 279, pp. 417-451, (2005).

[Al-shyyab, 2005b] A. Al-shyyab, A. Kahraman, "Non-linear dynamic analysis of multi-mesh gear train using multi-term harmonic balance method: period-one motions", *Journal of Sound and Vibration*, 284, pp. 151-172, (2005).

[Archard, 1961] J. F. Archard, M. T. Kirk, "Lubrication at point contacts", *Proc. R. Sot. London, Ser. A*, 261 (1961) 532-550.

[Archard, 1965] J. F. Archard, E. W. Cowking, "Elastohydrodynamic lubrication at point contacts". *Proc. Inst. Mech. Engrs*, 180(Part 3B), pp. 47–56, (1965).

[Argyris, 2002] J. Argyris, A. Fuentes, F. L. Litvin, "Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 (11-12), pp. 1057-1095, (2002).

[Ariura, 1973] Y. Ariura *et ál.*,"The Lubricant Churning Loss in Spur Gear Systems", *Bull. JSME*, 16, pp. 881–890, (1973).

[Baglioni, 2012] S. Baglioni *et ál* "Influence of the addendum modification on spur gear efficiency", *Mechanism and Machine Theory*, 49:216-33, (2012).

[Barbieri, 2012] M. Barbieri *et ál.*, "Corrigendum to: Optimum profile modifications of spur gears by means of genetic algorithms", *Journal of Sound and Vibration*, 331, pp. 4825–4829, (2012).

[Bair, 1979] S. Bair, W. O. Winer, "A rheological model for EHL contacts based on primary laboratory data", *Trans. ASME, J. Lubr. Technol.*, 101, pp. 258-265, (1979).

[Bair, 2007] S. Bair, "High pressure rheology for quantitative elastohydrodynamics", *Elsevier*, Amsterdam, 240, (2007).

[Bartz, 1972] W. J. Bartz, "Some investigations of the application of EHD theory to practical gear lubrication", *The Institution of Mechanical Engineers, Elastohydrodynamic Lubrication 1972 Symposium*, pp. 37-39, (1972).

[Bartz, 1991] W. J. Bartz, "Friction - an all-purpose measure? [Reibung - Mass aller Dinge?]", T*ribologie & schmierungstechnik*, 38(4), pp. 192-201, (1991).

[Barus, 1983] C. Barus, "Isothermals, isopiestics and isometrics relative to viscosity". *Am. J. Sci.*, 45, pp. 87–96, (1893).

[Behesti, 2013] A. Behesti, M. M. Khonsari, "An engineering approach for the prediction of wear in mixed lubricated contacts", *Wear*, 308, 121–131, (2013).

[Benedict, 1961] G. H. Benedict, B. W. Kelley, "Instantaneous Coefficients of Gear Tooth Friction", *ASLE Trans.*, 4(1), pp. 59-70, (1961)

[Blankenship, 1995a] G. W. Blankenship, R. Singh, "A new gear mesh interface dynamic model to predict multi-dimensional force coupling and excitation", *Mechanism and Machine Theory*, 30(1), pp. 43-57, (1995).

[Blankenship, 1995b] G. W. Blankenship, R. Singh, "Dynamic force transmissibility in helical gear pairs", *Mechanism and Machine Theory*, 30(3), pp. 323-339, (1995).

[Bobach, 2011] L. Bobach *et ál.*, "Thermal elastohydrodynamic simulation of involute spur gears incorporating mixed friction", *Tribology International*, 48, pp. 191–206, (2012).

[Bodas, 2003] A. Bodas, A. Kharaman, "Influence of carrier and gear manufacturing errors on the static load sharing behaviour of planetary gear sets", *Japan Society of Mechanical Engineers (JSME) International Journal*, 47(3), pp. 908-915, (2003).

[Boness, 1989] R. J. Boness, "Churning losses of discs and gears running partially submerged in oil", 216(5), pp. 355-365, (1989).

[Bonori, 2006] G. Bonori, G. Scagliarini, M. Barbieri, F. Pellicano, "Vibration of gears: a global optimization approach", *International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA2006)*, pp. 3577-3592, Leuven, Belgium (2006).

[Bourdon, 1997] A. Bourdon, "Modelisation dynamique globale des boites de vitesses automobile", *These Doctorale, Institut National des Sciences Appliques de Lyon (INSA Lyon)*, (1997).

[Brancati, 2005] R. Brancati, E. Rocca, R. Russo, "A gear rattle model accounting for oil squeeze between the meshing gear teeth", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 219(9) pp. 1075-1083, (2005).

[Brancati, 2007] R. Brancati, E. Rocca, R. Russo, "An analysis of the automotive driveline dynamic behaviour focusing on the influence of the oil squeeze effect on the idle rattle phenomenon", *Journal of Sound and Vibration*, 303 pp. 858-872, (2007).

[Brandao, 2012] J. A. Brandao *et ál.*, "Comparative overview of five gear oils in mixed and boundary film lubrication", *Tribology International*, 47, pp. 50–61, (2012).

[Brändlein, 1998] J. Brändlein *et ál.*, "Die Wälzlagerpraxis, Handbuch für die Berechnung und Gestaltung von Lagerungen", *Vereinigte Fachverlage*, Germany, (1998).

[Brauer, 2002] J. Brauer, "Analytical geometry of straight conical involute gears", *Mechanism and Machine Theory*, 37(1), pp. 127-141, (2002).

[Brauer, 2003] J. Brauer, S. Anderson, "Simulation of wear in gears with flank interference: a mixed FE and analytical approach", *Wear*, 254(11), pp. 1216-1232, (2003).

[Brauer, 2004] J. Brauer, "A general finite element model of involute gears", *Finite Elements in Analysis and Design*, 40(5), pp. 431-457, (2004).

[Brauer, 2005] J. Brauer, "Transmission error in anti-backlash conical involute gear transmissions: a global-local FE approach", *Finite Elements in Analysis and Design*, 41(5), pp. 431-457, (2005).

[Buckingham, 1949] E. Buckingham, "Analytical Mechanics of gears", *McGrawHill*, (1949).

[Buckingham, 1963] E. Buckingham, "Efficiencies of gears. Analytical Mechanics of gears", *Dover publications*, Inc. pp.395-425, (1963).

[Cai, 1994] Y. Cai, T. Hayashi, "The linear approximated equation of vibration of a pair of spur gears (Theory and experiments)", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Mechanical Design*, 116, pp. 558-564, (1994).

[Cai, 1995] Y. Cai, "Simulation on the rotational vibration of helical gears in consideration of the tooth separation phenomenon (A new stiffness function of helical involute tooth pair)", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Mechanical Design*, 177, pp. 460-469, (1995).

[Castle, 1972] P. Castle, D. Dowson, "A theoretical analysis of the starved elastohydrodynamic lubrication problem for cylinders in line contact", *Proc. of Elastohydrodynamic Lubrication 1972 Symp., Inst. Mech. Eng., London*, pp. 131-137, (1972).

[Castro, 2007] J. Castro, J. Seabra, "Coefficient of friction in mixed film lubrication: gears versus twin-discs", *Proc. IMechE, PartJ: J. Engineering Tribology*, pp. 399-411, (2007).

[Changenet, 2002] C. Changenet, M. Pasquier, "Power Losses and Heat Exchange in Reduction Gears: Numerical and Experimental Results", *VDI Berichte* NR.1665, pp. 603-613, (2002).

[Changenet, 2006] C. Changenet *et ál.*, "Power Loss Predictions in Geared Transmissions Using Thermal Networks-Applications to a Six-Speed Manual Gearbox", *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 128(3), pp. 618-625, (2006).

[Changenet, 2007] C. Changenet, P. Velex, "A model for the prediction of churning losses in geared transmissions – preliminary results", *ASME J. Mech. Des.*, (2007).

[Changenet, 2008] C. Changenet, P. Velex, "Housing Influence on Churning Losses in Geared Transmissions", *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 130(6), pp. 128-133, (2008).

[Changenet, 2011] C. Changenet *et ál.* "A note on flow regimes and churning loss modelling", *J Mech Des*, 133(12), (2011).

[Chen, 2013] Z. Chen, Y. Shao, "Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack", *Mechanism and Machine Theory*, 62, pp. 63–74, (2013).

[Cheng, 2003] Y. Cheng, T. C. Lim, "Dynamics of hypoid gear transmission with nonlinear time-varying mesh characteristics", *Journal of Mechanical Design* , 125, pp. 373-382 (2003).

[Cheli, 2006] F. Cheli, E. Pennestri, *Cinematica e Dinamica dei sistemi multibody*, Volume 1, Casa Editrice Ambrosiana, ISBN 88-408-1345-4, (2006).

[Chittenden, 1985] R.J. Chittenden, *et ál.*, "A theoretical analysis of the isothermal elastohydrodynamic lubrication of concentrated contacts, Part I", *Proc. R. Sot. London, Ser. A*, 397, pp. 245-269, (1985).

[Chiu, 1975] Y.P. Chiu, "Approximate calculation of power loss in involute gears", *ASME Paper* No. 75-PTG-2, (1975).

[Chung, 2007] M.Y. Chung, D. Shaw, "Parametric study of dynamics of worm and worm-gear set under suddenly applied rotating angle", *Journal of Sound and Vibration*, 304(1-2), pp. 246-262, (2007).

[Crook, 1963] A. W. Crook, "The Lubrication of Rollers. IV. Measurements of Friction and Effective Viscosity". *Philos. Trans. R. Soc. London*, Ser. A., 1056(255), pp..281-312, (1963).

[Currie, 1993] I. G. Curri, "fundamentals mechanics of fluids". *New York Basel, Marcel Dekker, Inc., McGraw-Hill*, Second edition, (1993).

[Dawson, 1984] P. H. Dawson, "Windage loss in larger high.speed gears", *Proc. Inst. Mech. Eng., Part A: Power and Process Engineering*, 198(1), pp. 51-59, (1984).

[Dawson, 1988] P. H. Dawson, "An experimental investigation of geometric and oil flow effects on gear windage and meshing losses", *GEC Review*, 4(3), pp. 164-167, (1988).

[De la Cruz, 2011] M. De la Cruz, "The influence of transient thermo-elastohydrodynamic automotive transmission rattle", *Ph.D. Thesis*, Loughborough University, (2011).

[De la Cruz, 2012] M. De la Cruz *et ál.*, "Transient mixed thermo-elastohydrodynamic lubrication in multi-speed transmissions", *Tribology International*, 49, pp. 17–29, (2012).

[Diab, 2004] Y. Diab *et ál.*, "Windage losses in high speed gears", *Journal of mechanical design*, (2004).

[Diab, 2006] Diab, Y., Ville, F., and Velex, P., 2006, "Prediction of Power Losses Due to Tooth Friction in Gears," *Tribology Transactions*, 49(2), pp. 260–270.

[Dietl, 2000] P. Dietl, J. Wensing, G. D. van Nijen, "Rolling bearing damping for dynamic analysis of multi-body systems – experimental and theoretical results", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part K: Journal of Multi-body Dynamics*, 214, pp. 33-43, (2000).

[Di Puccio, 2005] F. Di Puccio, M. Gabiccini, M. Guiggiani, "Alternative formulation of the theory of gearing", *Mechanism and Machine Theory*, 40, pp. 613-637, (2005).

[Di Puccio, 2006] F. Di Puccio, M. Gabiccini, M. Guiggiani, "Generation and curvature analysis of conjugate surfaces via a new approach", *Mechanism and Machine Theory*, 41, pp. 382-404, (2006).

[Doleschel, 2002] A. Doleschel, "Method to Determine the Frictional Behaviour of Gear Lubricants using a FZG Gear Test Rig", *FVA Information Sheet No. 345*, (2002).

[Doleschel, 2003] A. Doleschel, "Wirkungsgradberechnung von Zahnradgetrieben in Abhängigkeit" *vom Schmierstoff. Diss.* TU München, (2003).

[Dowson, 1959] D. Dowson, G. R. Higginson, "A numerical solution to the elastohydrodynamic problem", *J. Mech. Engng., Sci.*, 1(1) pp. 6-15, (1959).

[Dowson, 1961] D. Dowson, G. R. Higginson, "New Roller-Bearing Lubrication Formula. Engineering" *London*, 192(4972), pp. 158-159, (1961).

[Dowson, 1968] D. Dowson, "Elastohydrodynamics", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, I82, pp. 151-167, (1968).

[Dowson, 1990] D. Dowson, J. Q. Yao, "A full solution to the problem of film thickness prediction in natural synovial joints", *Proc. 16th Leeds-Lyon Symp. on Tribology. Mechanics of Coatings, Tribology Series 17. Elsevier*, Amsterdam, pp. 91-102, (1990).

[Dowson, 1995] D. Dowson, "Elastohydrodynamic and micro-elastohydrodynamic lubrication", *Wear*, 190, pp. 15-28, (1995).

[Drozdow, 1967] Y. N. Drozdov, Y. A. Gavrikov, "Friction and Scoring Under The Conditions of Simultaneous Rolling and Sliding of Bodies", *Wear*, pp. 291-302, (1967).

[Dubowsky, 1971] S. Dubowsky, F. Freudenstein, "Dynamic analysis of mechanical systems with clearances, Part 1: formulation of dynamic model". *J. Eng. Indus., Ser. B*, 93(1), pp. 305–309, (1971).

[Dubowsky, 1977] S. Dubowsky, T. N. Gardner, "Design and analysis of multilink flexible mechanism with multiple clearance connections", *Journal of Engineering for Industry*, 99, pp. 88–96, (1977).

[Dyson, 1972] J.C. Bell, A. Dyson, "Mixed friction in an elastohydrodynamic system", The Institution of Mechanical Engineers, Elastohydrodynamic Lubrication 1972 Symposium, pp. 68-76, (1972).

[Ebrahimi, 2006] S. Ebrahimi, P. Eberhard, "Rigid-elastic modelling of meshing gear wheels in multibody systems", *Multibody System Dynamics*, 16, pp. 55-71, (2006).

[El-Saeidy, 1991] F. M. A. El-Saeidy, "Effect of backlash on vibration spectrum in spur gearboxes incorporating sleeve bearings", *Proceedings of ASME 1991 DE-Vol 35, Rotating Machinery and Vehicle Dynamics* (1991).

[Eritenel, 2005] T. Eritenel, R.G. Parker, "A static and dynamic model for three-dimensional, multi-mesh gear systems", *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference - DETC2005*, 5, pp. 945-956, (2005).

[Eritenel, 2012] T. Eritenel, R.G. Parker, "An investigation of tooth mesh nonlinearity and partial contact loss in gear pairs using a lumped-parameter model", *Mechanism and Machine Theory*, 56, pp. 28–51, (2012).

[ESDU, 1978] ESDU-78035 Tribology Series. "Contact phenomena I: stresses, deflections and contact dimensions for normally- loaded unlubricated elastic components", *Engineering Sciences Data Unit, London, UK*, (1978).

[Euro 6, 2008] Official Journal of the European Communities. "Commission regulation (EC) Nº692/2008 of 18 July 2008 implementing and amending regulation (EC) Nº715/2007 of the European Parliament and of the council on type-approval of motor vehicles with respect to emissions from light passenger and commercial vehicles (euro 5 and euro 6) and on access to vehicle repair and maintenance information (1)", (2008).

[Evans, 1984] C. R. Evans, K. L. Johnson, "The rheological properties of elastohydrodynamic lubricants", *Proc. Inst. Mech. Eng.*, 200, pp. 303-312, (1984).

[Faggioni, 2011] M. Faggioni *et ál.*, " Dynamic optimization of spur gears", *Mechanism and Machine Theory*, 46, pp. 544–557, (2011).

[Farrall, 2005] M. Farrall *et ál.*, "Computational Investigation of the airflow through a shrouded bevel gear" *Proceedings of ASME turbo Expo 2005, Reno-Tahoe,* Paper No. GT2005-68879.

[Feng, 2011] Z. Feng *et ál.*, "Enhanced friction model for high-speed right-angle gear dynamics", *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(11), pp. 2741-2753, (2011).

[Fernandes, 2015a] C. M. Fernandes *et ál.*, "Gearbox power loss. Part i: losses in rolling bearings", *Tribol. Int.*, 88, pp. 298–308, (2015).

[Fernandes, 2015b] C. M. Fernandes *et ál.*, "Gearbox power loss. Part ii: friction losses in gears", *Tribol. Int.*, 88, pp. 309–316, (2015).

[Fernández, 2010] A. Fernández del Rincón, "Modelo avanzado para el estudio del comportamiento vibratorio de sistemas de transmisión mediante engranajes", *PhD Thesis*, Universidad de Cantabria, (2010).

[Fernández, 2012] A. Fernández *et ál.*, "Effect of cracks and pitting defects on gear meshing", *Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science*, 226(11), 2805–2815, (2012).

[Fernández, 2013a] A. Fernández *et ál.*, "Gear transmission dynamic: Effects of tooth profile deviations and support flexibility", *Applied Acoustics*, (2013).

[Fernández, 2013b] A. Fernández *et ál.*, "A model for the study of meshing stiffness in spur gear transmissions", *Mechanism and Machine Theory*, 61, pp. 30-58, (2013).

[Flores, 2004] J. P. Flores Fernandes, "Dynamic analysis of mechanical systems with imperfect kinematic joints", *PhD Thesis Universidade do Minho*, (2004).

[Flores, 2011] P. Flores *et ál.*, "A comparative study on continuous contact force models for constrained multibody systems", *in: J.C. Samin, P. Fisette (Eds.), Proceedings of the Multibody Dynamics 2011, ECCOMAS Thematic Conference*, Brussels, Belgium, (2011).

[Ghosh, 2015] S. S. Ghosh, G. Chakraborty, "On rolling resistance in gear transmission", *Journal of Mechanical Design*, In press, (2015).

[Gill-Jeong, 2009] C. Gill-Jeong, "Analysis of nonlinear behaviour of gear pairs considering hydrodynamic lubrication and sliding friction" *Journal of Mechanical Science and Technology*, 23, pp. 2125-2137, (2009).

[Gohar, 2008] R. Gohar, H. Rahnejat, "Fundamentals of tribology", *Imperial College Press, London*, 2008.

[Goksen, 1978] P. G. Goksem, R. A. Hargreaves, "The Effect of Viscous Shear Heating on Both Film Thickness and Rolling Traction in an EHL Line Contact," *Journal of Lubrication Technology*, 100, pp 346-352, (1978).

[Goldsmith, 1960] W. Goldsmith, "Impact, the Theory and Physical Behaviour of Colliding Solids", *Edward Arnold Ltd.*, 1960.

[Gonthier, 2004] Y. Gonthier *et ál.*, "A regularized contact model with asymmetric damping and dwell-time dependent friction", *Multibody System Dynamics*, 11, pp. 209–233, (2004).

[Greenwood, 1966] J. A. Greenwood, J. B. P. Williamson, "Contact of nominally flat surfaces" *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 295, pp. 300-319, (1966).

[Greenwood, 1970] J. A. Greenwood, J. Tripp, "The contact of two nominally flat rough surfaces" *Proc. IMechE*, 185, pp. 625-633, (1970-71).

[Greenwood, 1988] J. A. Greenwood, "Film thicknesses in circular elastohydrodynamic contacts", *Proc. IMechE, Part J: J. Engineering Tribology*, 202(C1), pp. 11–17, (1988).

[Grubin, 1949] A. N. Grubin, I. E. Vinogradova, "Central Scientific Research Insfitute for Technology and Mechanical Engineering", *Book No. 30*, Moscow, (1949).

[Guess, 2010] T. M. Guess et ál., "A subject specific multibody model of the knee with menisci", *Medical Engineering & Physics*, 32 pp. 505–515, (2010).

[Guilbault, 2012] R. Guilbault *et ál.* "Nonlinear damping calculation in cylindrical gear dynamic modelling", *Journal of Sound and Vibration*, 331, pp. 2110–2128, (2012).

[Gümbel, 1916] L. Gümbel "Über geschmiertearbeitsräder", *Zeitschrift für dasgesamte Turbinenwesen*, 24, pp. 245–8, (1916).

[Gunda, 2003] R. Gunda, R. Singh, "Dynamic analysis of sliding friction in a gear pair", *Proceedings of ASME 2003, Design Engineering Technical Conferences DETC*, (2003).

[Habchi, 2012] W. Habchi, J. Issa, "Fast and reduced full-system finite element solution of elastohydrodynamic lubrication problems: Line contacts", *Advances in Engineering Software*, 56, pp. 51–62, (2013).

[Hamrock, 1975] B.J. Hamrock, D. Dowson,"Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: I – Theoretical formulation" *NASA TECHNICAL NOTE*-8049, (1975).

[Hamrock, 1976a] B.J. Hamrock, D. Dowson,"Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: II – Ellipticity parameter results" *NASA TECHNICAL NOTE*-8166, (1976).

[Hamrock, 1976b] B.J. Hamrock, D. Dowson,"Isothermal elastohydrodynamic lubrication of point contacts: IV – Starvation results" *NASA TECHNICAL NOTE*-8318, (1976).

[Hamrock, 1977a] B.J. Hamrock, D. Dowson,"Elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts for materials of low elastic modulus: I – Fully flooded conjunction" *NASA TECHNICAL NOTE*-8528, (1977).

[Hamrock, 1977b] B.J. Hamrock, D. Dowson," Elastohydrodynamic lubrication of elliptical contacts for materials of low elastic modulus: III – Fully flooded results" *NASA TECHNICAL NOTE*-8317, (1977).

[Hamrock, 1991] B.J.Hamrock, "Fundamentals of Fluid Film Lubrication", *NASA Reference Publication*, 1255, (1991).

[Hartinger, 2008] M. Hartinger, "CFD Modeling of a Thermal and Shear-Thinning Elastohydrodynamic Line Contact", Journal of Tribology, Transactions of the ASME, 130(041503), pp. 1-16, (2008).

[He, 2007a] S. He *et ál.*, "Effect of sliding friction on the dynamics of spur gear pair with realistic time-varying stiffness", *Journal of Sound and Vibration*, 301, pp. 927-949, (2007).

[He, 2007b] S. He, R. Singh, "Dynamic interactions between sliding friction and tip relief in spur gears", *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences IDETC*, (2007).

[He, 2007c] S. He *et ál.*, "Inclusion of sliding friction in contact dynamics model for helical gears", *Journal of Mechanical Design*, 129, pp. 48-57, (2007).

[He, 2008] S. He, "Effect of sliding friction on spur and helical gear dynamics and vibro-acoustics", *PhD. Thesis, The Ohio State University, (2008).*

[Herbert, 1977] R. G. Herbert, D. C. McWhannell, "Shape and frequency composition of pulses from an impact pair", *Journal of Engineering for Industry*, 99, pp. 513–518, (1977).

[Hertz, 1881] H. Hertz, "Über die Berührung fester elastischer Körper", *Journal reine und angewandte Mathematik*, 92, pp. 156–171, (1881).

[Hochmann, 2000] D. Hochmann, D. R. Houser, "Friction forces as a dynamic excitation source in involute spur and helical gearing", *Proceedings of ASME 2000 International Design Engineering Technical Conferences, Power and Transmission Gearing IDETC/PTG* (2000).

[Höhn, 2010] B. Höhn, "Improvements on noise reduction and efficiency of gears", *Meccanica*; 45(3):425-37, (2010).

[Hooke, 1988] C. J. Hooke, "Minimum film thickness in lubricated point contacts operating in the elastic piezoviscous regime". *Proc. IMechE, Part J: J. Engineering Tribology*, 202(C2), pp. 73–84, 1988.

[Houpert, 1985] L. Houpert, "New Results of Traction Force Calculation in Elastohydrodynamic Contacts", *ASME JOURNAL OF TRIBOLOGY*, 107, pp. 241-248, (1985).

[Houpert, 1986] L. Houpert, B. J. Hamrock, "Fast approach for calculating filmthickness and pressures in elastohydrodynamically lubricated contacts at high loads", *Trans. ASME, J. TriboL*, 107, pp. 128-131, (1986).

[Howard, 2001] I. Howard, S. Jia, J. Wang, "The dynamic modelling of a spur gear in mesh including friction and a crack", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(5), pp. 831-853, (2001).

[Hughes, 1999] W. F. Hughes, J. A. Brighton, "Shaum's outline of theory and problems of fluid dynamics" *New-York, Thir Edition*, pp. 103-118, (1999),

[Huang, 2010] K. J. Huang, W. S. Hsin, "Approaches to parametric element constructions and dynamic analyses of spur/helical gears including modifications and undercutting", *Finite Elements in Analysis and Design*, 46, pp. 1106–1113, (2010).

[Hunt, 1975] K.H. Hunt, F.R.E. Crossley, "Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact", *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASMA*, (1975)

[Iida, 1985] H. Iida, A. Tamura, Y. Yamada, "Vibrational characteristics of friction between gear teeth", *Bulletin of JSME* 28(241), pp. 1512-1519, (1985).

[Iglesias, 2013] M. Iglesias Santamaría, "Modelo para el estudio del comportamiento vibratorio de transmisiones planetarias", *PhD Thesis*, Universidad de Cantabria, (2013).

[Imrek, 2008] H. Imrek, A. Unuvar, "Investigation of influence of load and velocity on scoring of addendum modified gear tooth profiles", Mechanism and Machine Theory, 44, pp. 938–948, (2009).

[ISO6336, 1996] ISO-6336, "Calculation of load capacity of spur and helical gears, parts 1–6". *International Organization for Standardization*, (1996).

[Jalali, 1998] D. Jalali-Vahid, H. Rahnejat, R. Gohar, Z. M. Jin, "Comparison between experiments and numerical solutions for isothermal elastohydrodynamic point contacts", *J. Phys. D: Applied Physics*, 31, pp. 2725-2732, (1998).

[Jamali, 2015] H. U. Jamali *et ál.*, "The transient effects of profile modification on elastohydrodynamic oil films in helical gears", *Tribology Transactions*, (2015).

[Jia, 2006] S. Jia, I. Howard, "Comparison of localised spalling and crack damage from dynamic modelling of spur gear vibrations", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(2), pp. 332-349, (2006).

[Johnson, 1970] K. L. Johnson, "Regimes of elastohydrodynamic lubrication", *J. Mech. Eng. Sci.*, 12(1), pp. 9-16, (1970).

[Johnson, 1977] K. L. Johnson, J. L. Tevaarwerk, "Shear behaviour of elastohydrodynamic oil films", *Proc. R. Sot. London. Ser. A*, 356 215-236, (1977).

[Johnson, 1985] K. L. Johnson, *Contact mechanics*, Cambridge University Press, ISBN:0-521-34796-3, (1985).

[Kahraman, 1991a] A. Kahraman, R. Singh, "Non-Linear dynamics of a geared rotor-bearing system with multiple clearances", *Journal of Sound and Vibration*, 144(3), pp. 469-506 (1991).

[Kahraman, 1991b] A. Kahraman, R. Singh, "Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance nonlinearities in a geared system", *Journal of Sound and Vibration*, 146(1), pp. 135-156 (1991).

[Kahraman, 1992a] A. Kahraman, "Dynamic analysis of a multi-mesh helical gear train", *International Power Transmission and Gearing Conference*, DE-Vol. 43(1), pp. 365-373 (1992).

[Kahraman, 1993] A. Kahraman, "Effect of axial vibrations on the dynamics of a helical gear pair", *Journal of Vibration and Acoustics*, 115(1), pp. 33-39, (1993).

[Kahraman, 2007] A. Kahraman *et ál.*, "A Dynamic Model of a Spur Gear Pair with Friction", *12th IFToMM World Congress*, Besançon, France, (2007).

[Kasuba, 1981] R. Kasuba, J. W. Evans, "An extended model for determining dynamic loads in spur gearing", *Journal of Mechanical Design*, 103(2), pp. 398-409, (1981).

[Khulief, 1987] Y. A. Khulief, A. A. Shabana, "A Continuous Force Model for the Impact Analysis of Flexible Multibody Systems," *Mech. Mach. Theory*, 22(3) pp. 213-224, (1987).

[Kogut, 2003] L. Kogut, I. Etsion, "A finite element based elastic-plastic model for the contact of rough surfaces", *Tribol.T.* 46, pp. 383–390, (2003).

[Koster, 1974] M. P. Koster, *Vibrations of Cam Mechanism*, McMillan Press, London UK, (1974).

[Krupka, 2010] I. Krupka *et ál.*, "The effect of load (pressure) for quantitative EHL film thickness", *Tribology Letters*, 37, pp. 613–22, (2010).

[Kuang, 1989] J. H. Kuang, Y. T. Yang, "A reconsideration of the geometry factor for the standard and profile shifted teeth", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Transaction of the ASME*, 111, pp 402-413 (1989).

[Kuang, 1992] J. H. Kuang, Y. T. Yang, "An estimate of mesh stiffness and load sharing ratio of a spur gear pair", *International Power Transmission and Gearing Conference*, DE-Vol.43-1, (1992).

[Kuang, 2001] J. H. Kuang, A. D. Lin, "The effect of tooth wear on the vibration spectrum of a spur gear pair", *Journal of Vibration and Acoustics*, 123, pp. 311-317, (2001).

[Kubur, 2004] M. Kubur, A. Kahraman, D. M. Zini, K. Kienzle, "Dynamic analysis of a multi-shaft helical gear transmission by finite elements: model and experiment", *Journal of Vibration and Acoustics*, 126 pp. 398-406, (2004).

[Kumar, 2009] P. Kumar, M. M. Khonsari "On the role of lubricant rheology and Piezo-viscous properties in line and point contact EHL. *Tribology International*,42, pp. 1522–30, (2009).

[Kuria, 2011] J. Kuria, J. Kihiu, "Prediction of Overall Efficiency in Multistage Gear Trains", *International journal of aerospace and mechanical engineering*, 5(3), pp. 171-177, (2011)

[Kushwaha, 2004] M. Kushwaha, H. Rahnejat, "Transient concentrated finite line toller-to-race contact under combined entraining, tilting and squeeze film motions" *Inst. Physics, J. Physics D: Applied Physics*, 37, pp. 2018-2034, (2004).

[Lankarani, 1990] H. M. Lankarani, P. E. Nikravesh, "A Contact Force Model With Hysteresis Damping for Impact Analysis of Multibody Systems", *Journal of Mechanical Design, Transaction of the ASME*, 112, pp. 369-376 (1990).

[Lauster, 1983] E. Lauster, M. Boos, "Zum Wärmehaushalt mechanischer Schaltgetriebe für Nutzfahrzeuge", *VDI-Berlin*, (1983).

[Leprince, 2011] G. Leprince *et ál.*, "Influence of Aerated Lubricants on Gear Churning Losses–An Engineering Model", *Tribology Transactions*, 54, pp. 929-938, (2011).

[Li, 2007] S. Li, "Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gear with machining errors, assembly errors and tooth modifications", *Mechanism and Machine Theory*, 42(1), pp. 88-114, (2007).

[Li, 2010] S. Li, A. Kahraman, "Prediction of Spur Gear Mechanical Power Losses Using a Transient Elastohydrodynamic Lubrication Model", *Tribology Transactions*, 53, pp. 554-563, (2010).

[Li, 2013] S. Li, A. Kahraman, "A tribo-dynamic model of a spur gear pair", *Journal of Sound and Vibrations*, 332, pp. 4963–78, (2013).

[Li, 2015] S. Li, A. Kahraman, "A thermal tribo-dynamic mechanical power loss model for spur gear Pairs", *Tribology International*, 88, pp. 170–178, (2015).

[Lin, 1988a] H.-H. Lin, *et ál.*, "Profile modification to minimize spur gear dynamic loading" *NASA TECHNICAL MEMORANDUM 89901*, (1988).

[Lin, 1988b] H.-H. Lin, R. L. Huston, J. J. Coy, "On dynamic loads in parallel shaft transmissions: Part I", *NASA Technical Report, Document ID: 19880003415; Report Number: NASA TM- 100181*, (1988).

[Lin, 1989] H.-H. Lin, *et ál.*, "Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications" *NASA TECHNICAL REPORT 88-C-003, TECHNICAL MEMORANDUM 101444*, (1989).

[Lin, 1990] H.-H. Lin, *et ál.*, "Influence of linear profile modification and loading conditions on the dynamic tooth load and stress of high contact ratio gears" *NASA TECHNICAL REPORT 90-C-004, TECHNICAL MEMORANDUM 103136*, (1989).

[Lin, 2002] J. Lin, R. G. Parker, "Mesh stiffness variation instabilities in two-stage gear systems", *Journal of Vibration and Acoustics*, 124, pp. 68-76, (2002).

[Lin, 2007] T. Lin, H. Ou, R. Li, "A finite element method for 3D static and dynamic contact/impact analysis of gear drives", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196, pp. 1716-1728, (2007).

[Litvin, 1960] F. L. Litvin, *Theory of Gearing*, Nauka, Moscow, (en ruso) (1960).

[Litvin, 1987] F. L. Litvin, Tsung, W. J., Coy, J. J., Handschuh, R. F., Tsay, C. B. P., "New generation methods for spur, helical and spiral-bevel gears", *NASA TECHNICAL REPORT (Glenn Research Center), Document ID: 19870066146*, (1987)

[Litvin, 1994] F. L. Litvin, *Gear geometry and applied theory*, Prentice Hall, Inc. Englewood cliffs, New Jersey, ISBN 978-0132110952 (1994).

[Litvin, 1995] F. L. Litvin, "Applied Theory of Gearing: State of the art", *Special 50th anniversary design issue, Transactions of the ASME*, 117, pp. 128-134, (1995).

[Litvin, 2002] F. L. Litvin, A. Fuentes, C. Zanzi, M. Pontiggia, R. F. Handschuh, "Face-Gear drive with spur involute pinion: geometry, generation by a worm, stress analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(25-26), pp. 2785-2813, (2002).

[Litvin, 2003] F. L. Litvin, A. Fuentes, I. Gonzalez-Pérez, L. Carvenali, K. Kawasaki, R. F. Handschuh, "Modified involute helical gears: computerized design, simulation of meshing and stress analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(33-34), pp. 3619-3655, (2003).

[Litvin, 2004] F. L. Litvin, A. Fuentes, *Gear Geometry and Applied Theory*, Second edition, Cambridge University Press, ISBN 0-521-81517-7, United Kingdon (2004).

[Litvin, 2006] F. L. Litvin, I. Gonzalez-Pérez, K. Yukishima, A. Fuentes, K. Hayasaka, "Design, simulation of meshing, and contact stresses for an improved worm gear drive", *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 42(8), pp. 940-959, (2007).

[Liu, 2009] Q. Liu *et ál.*, "Friction in highly loaded mixed lubricated point contacts", *Tribology Transactions*, 360-369, (2009).

[Lubrecht, 1987] A. A. Lubrecht, "The numerical solution of the elastohydrodynamically lubricated line and point contact problem, using multigrid techniques", *Ph.D. Thesis*, University of Twente, Enschede, (1987).

[Lundvall, 2004] O. Lundvall, N. Strömberg, A. Klarbring, "A flexible multi-body approach for frictional contact in spur gears", *Journal of Sound and Vibration*, 278(3,6), pp. 479-499, (2004).

[Machado, 2012] M. Machado *et ál.*, "Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory", *Mechanism and Machine Theory*, 53, pp. 99–121, (2012).

[MacLennan, 2002] L. D. MacLennan, "An analytical method to determine the influence of shape deviation on load distribution and mesh stiffness for spur gears", *Proceedings of IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 216, pp. 1005-1016, (2002).

[Magalhaes, 2012] L. Magalhaes *et ál.*, "Comparison of tooth profiles and oil formulation focusing lower power losses", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, 226, pp. 529-540, (2012).

[Manoylov, 2013] A.V. Manoylov *et ál.*, "Dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces", *Tribology International*, 65, pp. 248-258, 2013.

[Marchesse, 2011] Y. Marchesse *et ál.* "Investigation on CFD simulation for predicting windage power losses in spur gears", *ASME J Mech Des*, 133, (2011).

[Marchesse, 2012] Y. Marchesse *et ál.* "Numerical Investigations of Volumetric Flow Rate Expelled by Spur Gears for the Modeling of Windage Power Losses", *STLE 2012 Annual Meeting & Exhibition St. Louis*, Missouri, USA, (2012).

[Marhefka, 1999] D.W. Marhefka, D.E. Orin, "A compliant contact model with nonlinear damping for simulation of robotic systems", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part A: Systems and Humans*, 29, pp. 566–572, (1999).

[Marques, 2013] P. M. T. Marques *et ál.*, "Efficiency of a gearbox lubricated with windturbine gear oils", *Tribology International*, 71, pp. 7–16, (2014).

[Marques, 2015] P. M. T. Marques *et ál.*, "Power loss and load distribution models including frictional effects for spur and helical gears", *FVA Mechanism and Machine Theory*, 96, pp.1-25, (2015).

[Martin, 1916] H.M. Martin, "Lubrication of gear teeth", *Eng. London*, 102(199), (1916).

[Martins, 2006] R. Martins *et ál.*, "Friction coefficient in FZG gears lubricated with industrial gear oils: Biodegradable ester vs. mineral oil", *Tribology International*, 39, pp. 512–521, (2006).

[Maurer, 1994] J. Maurer, "Ventilationsverluste", *FVA Forschungsvorhaben*, Abschlussbericht, (1994).

[Mauz, 1987] W. Mauz, "Hydraulische Verluste von Stirnradgetrieben bei umfangsgeschwindigkeiten bis 60m/s", Dissertation Uni Stuttgart, (1987).

[Merrit, 1972] H. E. Merrit, "Efficiency an testing gear engineering", *John Wiley & Sons, Inc.*, pp. 345-357, (1972).

[Michaelis, 2011] K. Michaelis *et ál*, "Influence factors on gearbox power loss", *Ind Lubr Tribol.*, 63(1):46-55 (2011).

[Mihailidis, 2013] A. Mihailidis *et ál.*, "Non-Newtonian Starved Thermal-Elastohydrodynamic Lubrication of Finite Line Contacts", *Tribology Transactions*, 56, pp. 88-100, (2013).

[Misharin, 1958] Y. A. Misharin, "Influence of The Friction Condition on The Magnitude of The Friction Coefficient in The Case of Rollers with Sliding", *Proc. Int. Conf. On Gearing, Inst. Mech. Eng., London*, pp. 159-164, (1958).

[Moes, 2000] H. Moes, "Lubrication and beyond". *Lecture Notes Code 115531, Twente University Press, Enschede*, The Netherlands, 366, (2000).

[Niemann, 1983] G. Niemann, H . Winter, "Maschinenelemente", *Springer, Berlin, Heidelberg, New York*, 2nd Edition, (1983).

[O'Donoghue, 1966] J. P. O'Donoghue, A. Cameron, "Friction and Temperature in Rolling Sliding Contacts", *ASLE Transactions*, 9, pp. 186-194, (1966).

[Ohlendorf, 1958] H. Ohlendorf, "Verlustleistung und Erwärmung von Stirnrädern", *Dissertation TU München*, (1958).

[Özgüven, 1988a] H. N. Özgüven, D. R. Houser, "Mathematical models used in gear dynamics: A review", *Journal of Sound and Vibration*, 121(3), pp. 383-411, (1988).

[Özgüven, 1988b] H. N. Özgüven, D. R. Houser, "Dynamic analysis of high speed gears by using loaded static transmission error", *Journal of Sound and Vibration*, 125(1), pp. 71-83, (1988).

[OCED, 1969] OCED, "Glossary of terms and definitions in the field of friction", *Wear and Lubrication*, 52–3, (1969).

[Padmanabhan, 1995] C. Padmanabhan, R. C. Barlow, T. E. Rook, R. Singh, "Computational issues associated with gear rattle analysis", *Journal of Mechanical Design*, 117, pp. 185-191, (1995).

[Pallas, 2013] S. Pallas *et ál.*, "Application and validation of a simplified numerical approach for the estimation of windage power losses in spur gears", Computers & Fluids, 84, pp. 39-45, (2013),

[Pan, 1989] B.J. Pan, K. Hamax, "Simple fi)rmuhzs fi)r perforrmance parameters u~d in elastohydrodinamically lubricated line contacts". Trans. ASME. J. TrihoL 3, pp. 246-251, (1981).

[Papetti, 2011] S. Papetti *et ál.*, "Numerical methods for a nonlinear impact model: a comparative study with closed-form corrections", *IEEE Transactions on Audio, Speech, and Language*, 19, pp. 2146–2158, (2011).

[Parker, 2000a] R.G. Parker, S. M. Vijayakar, T. Imajo, "Non-linear dynamic response of a spur gear pair: modelling and experimental comparisons", *Journal of Sound and Vibration*, 237(3), pp. 435-455, (2000).

[Parker, 2000b] R.G. Parker, V. A. Sandeep, M. Vijayakar, "Dynamic response of a planetary gear system using a finite element/contact mechanics model", *Journal of Mechanical Design*, 122(3), pp. 304-310, (2000).

[Peeters, 2006] J. Peeters, "Simulation of dynamic drive train loads in a wind turbine", *PhD. Thesis, Katholieke Universiteit Leuven*, (2006).

[Perret-Liaudet, 1996] J. Perret-Liaudet, "An original method for computing the response of a parametrically excited forced system", *Journal of Sound and Vibration*, 196(2), pp. 165-177, (1996).

[Petry-Johnson, 2007] T. T. Petry-Johnson *et ál.* "Experimental investigation of spur gear efficiency" *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference IDETC/CIE*, Las Vegas, Nevada, USA, (2007).

[Petry-Johnson, 2008] T. T. Petry-Johnson et ál. "An experimental investigation of spur gear efficinecy" *Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME*, 130(062601), pp. 1-10, (2007).

[Pimsarn, 2002] M. Pimsarn, K. Kazerounian, "Efficient evaluation of spur gear tooth mesh load using pseudo-interference stiffness estimation method", *Mechanism and Machine Theory*, 37, pp. 769-786, (2002).

[Pimsarn, 2003] M. Pimsarm, K. Kazerounian, "Pseudo-interference stiffness estimation, a highly efficient numerical method for force evaluation in contact problems", *Engineering with Computers*, 19, pp. 85-91, (2003).

[Pimsarn, 2005a] M. Pimsarn, "Tooth profile modifications for optimum dynamic load in spur gears based on pseudo-interference stiffness estimation method", *PhD. Thesis, University of Connecticut*, (2005).

[Pimsarn, 2005b] M. Pimsarn, K. Kazerounian, "Tooth profile modifications for optimum dynamic load in spur gears based on pseudo-interference stiffness estimation method", *Proceedings of ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE,* (2005).

[Pleguezuelos, 2007] M. Pleguezuelos, J. I. Pedrero, "Modelo de cálculo del rendimiento en transmisiones por engranajes rectos", *8º Congreso iberoamericano de ingeniería mecánica*, Perú, 2007.

[Pleguezuelos, 2011] M. Pleguezuelos *et ál.*, "Analytical expression of the efficiency of involute spur gears", *13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, México, (2011).

[Rahnejat, 1984] H. Rahnejat, "The influence of vibration on the oil film of elastohydrodynamic contacts", *Ph.D. Thesis, Imperial College of Science, Medicine and Technology, London*, (1984).

[Rahnejat, 1985] H. Rahnejat, R. Gohar, "The vibrations of radial ball bearings", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 199 (3), pp. 181-193, (1985).

[Rapley, 2005] S. Rapley *et ál.*, "Modelling of gear windage power loss", *Gears, technical awareness seminar*, Manchester, (2005).

[Rapley, 2007] S. Rapley *et ál.*, "The application of CFD to model windage power loss from a spiral bevel gear", *Proceedings of CF2007, ASME turbo expo 2007: Power for land, sea and air*, Montreal, Canda, Paper No. GT2007-27879, (2007).

[Rebbechi, 1996] B. Rebbechi *et ál.*, "Measurement of Gear Tooth Dynamic Friction", *DTIC Document, Technical memorandum*, (1996).

[Reuleaux, 1886] Reuleaux, F., "Friction in Tooth Gearing", *Transactions of the ASME, Vol. VIII*, pp. 45-85, (1886).

[Reynolds, 1886] O. Reynolds, "On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil", *Philos. Trans. R. Sot. London*, 277, pp. 157-234, (1886).

[Rigaud, 2003] E. Rigaud, J. Perret-Liaudet, "Experiments and numerical results on non-linear vibrations of an impacting Hertzian contact. Part 1: harmonic excitation", *Journal of Sound and Vibration*, 265, pp. 289–307, (2003).

[Rocca, 2011] E. Rocca, R. Russo, " Theoretical and experimental investigation into the influence of the periodic backlash fluctuations on the gear rattle", *Journal of Sound and Vibration* , 330, pp. 4738–4752, (2011).

[Roelands, 1966] C. J. A. Roelands, "Correlation Aspects of Viscosity -Temperature - Pressure Relationship of Lubricating Oils," *PhD thesis*, Delft University of Technology, The Netherlands, (1966).

[Rogers, 1977] R. J. Rogers, G. C. Andrews, "Dynamic simulation of planar mechanical systems with lubricated bearing clearances using vector-network methods", *Journal of Engineering for Industry*, 99, pp. 131–137, (1977).

[Sabot, 1998] J. Sabot *et ál.*, "Non-linear vibrations of a sphere–plane contact excited by a normal load", *Journal of Sound and Vibration* , 214(2), pp. 359-375, (1998).

[Sainsot, 2004] P. Sainsot, P. Velex, O. Duverger, "Contribution of gear body deflections – A new bidimensional analytical formula", *Journal of Mechanical Design*, 126(4), pp. 748-752, (2004).

[Sánchez, 2012] M. B. Sánchez *et ál.* "Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears", *Meccanica*, (2012).

[Sánchez, 2013] M. B. Sánchez, "Modelo de cálculo resistente de engranajes cilíndricos de alto grado de recubrimiento", *Ph.D. Thesis*, Unniversidad Pontificia de Comillas ICAI, Madrid, (2013).

[Sasaki, 1962] T. Sasaki *et ál.*, "Fluid lubrication theory of roller bearings", *Trans. ASME, J. Basic Engineering*, (1962).

[Schlegel, 2009] C. Schlegel *et ál.*, "Detailed Loss modelling of Vehicle Gearboxes", *7th Modelica conference*, Como, Italy, (2009).

[Schipper, 1955] D. J. Schipper, "Transitions in the lubrication of concentrated contacts", *PhD Thesis*, (1955).

[Seol, 1996] I. H. Seol, F. L. Litvin, "Computerized design, generation and simulation of meshing and contact of worm-gear drives with improved geometry", *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138(1-4), pp. 73-103, (1996).

[Seetharaman, 2009a] S. Seetharaman, A. Kahraman, "Oil Churning Power Losses of a Gear Pair—Model Formulation", *Journal of Tribology*, 131(2), 022201, (2009).

[Seetharaman, 2009b] S. Seetharaman *et ál.*, "Oil Churning Power Losses of a Gear Pair—Experiments and Model Validation," *Journal of Tribology*, 131(2), 022202, (2009).

[Seetharaman, 2009c] S. Seetharaman, "An investigation of load-independent power losses of gear systems", *Ph.D. Thesis*, (2009).

[Sheveleva, 2007] G. I. Sheveleva, A. E. Volkov, V. I. Medvedev, "Algorithms for analysis of meshing and contact of spiral bevel gears", *Mechanism and Machine Theory*, 42(2), pp. 198-215, (2007).

[Shipley, 1958] E. E. Shipley, "How to Predict Efficiency of Gear Trains", *D. W. Product Eng.*,31(29), pp. 44-45, (1958).

[Shipley, 1962] E. E. Shipley, "Loaded gears in action. Gear Handbook", *D. W. Dudley ed., McGraw Hill Book Co., Inc.*, pp. 14-1 to 14-60, (1962).

[Sirichai, 1999] S. Sirichai, "Torsional properties of spur gears in mesh using nonlinear finite element analysis", *PhD. Thesis, Curtin University of Technology*, (1999).

[Teodorescu, 2003] M. Teodorescu *et ál.*, "Simplified elasto-hydrodynamic friction model of the cam-tappet contact", *SAE International*, 2003-01-0985, (2003).

[Teodorescu, 2006] M. Teodorescu *et ál.*, "Jounce and impact in cam-tappet conjunction induced by the elastodynamics of valve train system", *Meccanica*, 41, pp. 157-171, (2006).

[Terekhov 1975] A. Terekhov, "Hydraulic losses in gearboxes with oil immersion", *Vestnik Mashinostroeniya*, (1975).

[Theodossiades, 2000] S. Theodossiades, S. Natsiavas, "Non-linear dynamics of gear-pair systems with periodic stiffness and backlash", *Journal of Sound and Vibration*, 229(2), pp. 278-310, (2000).

[Theodossiades, 2001a] S. Theodossiades, S. Natsiavas, "On geared rotordynamic systems with oil journal bearings", *Journal of Sound and Vibration*, 243(4), pp. 721-745, (2001).

[Theodossiades, 2001b] S. Theodossiades, S. Natsiavas, "Periodic and chaotic dynamics of motor-driven gear-pair systems with backlash", *Chaos, Solitons and Fractals*, 12, pp. 2427-2440, (2001).

[Theodossiades, 2007] S. Theodossiades, O. Tangasawi, H. Rahnejat, "Gear teeth impacts in hydrodynamic conjunctions promoting idle gear rattle", *Journal of Sound and Vibration*, *303*, pp. 632-658, (2007).

[Timoshenko, 1951] S. P. Timoshenko. J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", *New York, McGraw Hill*, (1951).

[Towsend, 1979] D. P. Townsend *et ál.*, "Evaluation of hig-contact-ratio spur gears with profile modification" *NASA TECHNICAL PAPER*-1458, (1979).

[Towsend, 1992] D. P. Townsend, "Gear Handbook, The Design, Manufacture and Application of Gears" *McGraww-Hill, New York*, (1992).

[Umezawa, 1984] K. Umezawa, T. Sato, J. Ishikawa, "Simulation on rotational vibration of spur gears", *Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers*, 27(223), pp. 102-109, (1984).

[Umezawa, 1986a] K. Umezawa, T. Suzuki, T. Sato, "Vibration of Power Transmission helical gears (Aproximate equation of tooth stiffness)", *Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers*, 29(251), pp. 1605-1611, (1986).

[Umezawa, 1986b] K. Umezawa, T. Ajima, H. Houjoh, "Vibration of three axes gear system", *Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers*, 29(249), pp. 950-957, (1986).

[Vaishya, 2000] M. Vaishya, D. R. Houser, "Modeling and analysis of sliding friction in gear dynamics", *Proceedings of ASME 2000 Design Engineering Technical Conferences DETC*, (2000).

[Vaishya, 2001a] M. Vaishya, R. Singh, "Analysis of periodically varying gear mesh systems with Coulomb friction using Floquet theory", *Journal of Sound and Vibration*, 243(3), pp. 525-545, (2001).

[Vaishya, 2001b] M. Vaishya, R. Singh, "Sliding friction induced non-linearity and parametric effects in gear dynamics", *Journal of Sound and Vibration*, 248(4), pp. 671-694, (2001).

[Vaishya, 2003] M. Vaishya, R. Singh, "Strategies for modeling friction in gear dynamics", *Journal of Mechanical Design*, 125, pp. 383-393, (2003).

[Vedmar, 1981] L. Vedmar, "On the design of external involute helical gears", *Transactions of machine elements division*, Lund Technical University, (1981).

[Vedmar, 1998] L. Vedmar, B. Henriksson, "A general approach for determining dynamic forces in spur gears", *Journal of Mechanical Design*, 120 pp. 593-598, (1998).

[Vedmar, 2003] L. Vedmar, A. Andersson, "A method to determine dynamic loads on spur gear teeth and on bearings", *Journal of Sound and Vibration*, 267(5), pp. 1065-1084, (2003).

[Velex, 1996] P. Velex, M. Maatar, "A mathematical model for analyzing the influence of shape deviations and mounting errors on gear dynamic behaviour", *Journal of Sound and Vibration*, 191(5), pp. 629-660, (1996).

[Velex, 1997] P. Velex, M. Maatar, J.-P. Raclot, "Some numerical methods for the simulation of geared transmission dynamic behaviour formulation and assessment", *Journal of Mechanical Design*, 119, pp. 292-298, (1997).

[Velex, 2000] P. Velex, V. Cahouet, "Experimental and numerical investigations on the influence of tooth friction in spur and helical gear dynamics", *Journal of Mechanical Design*, 122, pp. 515-522, (2000).

[Velex, 2002] P. Velex, P. Sainsot, "An analytical study of tooth friction excitations in errorless spur and helical gears", *Mechanism and Machine Theory*, 37(7), pp. 641-658, (2002).

[Velex, 2009] P. Velex, F. Ville, "An analytical approach to tooth friction losses in spur and helical gears – Influence of profile modifications", *Journal of Mechanical Design*, 131, (2009).

[Venner, 1990] C. H. Venner, A. A. Lubrecht, "Amplitude reduction of non-isotropic harmonic patterns in circular EHL contacts, under pure rolling", *Lubrication at the Frontier, Elsevier Science B.V.*, pp. 151-162, (1999).

[Venner, 1991] C. H. Venner, "Multilevel solution of the EHL line and point contact problems". *Ph.D. Dissertation*, Twente University, Netherlands, 318, (1991).

[Venner, 1992] C. H. Venner, W. E. ten Napel, "Multilevel solution of the elastohydrodynamically lubricated circular contact problem, Part 1: theory and numerical algorithm", *Wear*, 152, pp. 351-367, (1992).

[Viadero, 2013] Viadero, F. *et ál.:* "Non-Stationary Dynamic Analysis of a Wind Turbine Power Drivetrain: Offshore Considerations", *Applied Acoustics*, 2013.

[Vijayaraghavan, 1989] D. Vijayaraghavan, T. G. Keith, "Development and evaluation of a cavitation algorithm" *Trib. Trans.* 32-2, pp. 225-233, (1989).

[Vijayakar, 1988] S. Vijayakar, H. R. Busby, D. R. Houser, "Linearization of multibody frictional contact problems", *Computers and Structures*, 29(4), pp. 569-576, (1988).

[Vijayakar, 1991] S. Vijayakar, "A combined surface integral and finite element solution for a three-dimensional contact problem", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 31, pp. 525-545, (1991).

[Votsios, 2003] V. Votsios, "Contact mechanics and impact dynamics of non-conforming elastic and visco-elastic semi-infinite or thin bonded layered solids", *Ph.D. Thesis*, Loughborough University, (2003).

[Wang, 2003a] J. Wang, "Numerical and experimental analysis of spur gears in mesh", *Ph. D. Thesis, Curtain University of Technology*, (2003).

[Wang, 2003b] J. Wang, R. Li, X. Peng, "Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems", *Applied Mechanics Reviews*, 56(3), pp. 309-329, (2003).

[Wang, 2006] Y. Wang, "Optimized tooth profile based on identified gear dynamic model", *Mechanism and Machine Theory*, 42, pp. 1058–1068, (2007).

[Weber, 1949] Weber, C.: "The Deformation of Loaded Gears and the Effect on Their Load Carrying Capacity", *Sponsored Research (Germany), British Department of Scientific and Industrial Research*, Report No. 3 (1949).

[Weber, 1953] C. Weber, K.. Banaschek, "Formanderung und Profilriicknahme bei gerad- und schragverzahnten Radern", *Schriftenreihe Antriebstechnik, Friedr. Vieweg & Sohn*, Braunschweig, 11, (1953).

[Wiegert, 2013] B. Wiegert, "An analytical expression of the normal force of hydrodynamic line contacts under transient conditions", *Tribology International*, 61, pp. 32–39, (2013).

[Wimmer, 2004] A. Wimmer, "Verlustoptimierte Verzahnung, FVA Forschungsvorhaben" 372(731), Abschlussbericht, (2004).

[Wink, 2005] C. H. Wink, A. L. Serpa, "Investigation of tooth contact deviations from the plane of action and their effects on gear transmission error", *Proceedings of IMechE Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 219, pp. 501-509, (2005).

[Wink, 2007] C. H. Wink, A. L. Serpa, "Performance assessment of solution methods for load distribution problem of gear teeth", *Mechanism and Machine Theory*, 43(1), pp. 80-94, (2007).

[Wojnarowski, 2003] J. Wojnarowski, V. Onishchenko, "Tooth wear effects on spur gear dynamics", *Mechanism and Machine Theory*, 38(2), pp. 161-178, (2003).

[Wolveridge, 1972] P. E. Wolveridge, J. F. Archard, "Temperature distributions in elastohydrodynamic films; a new analytic solution", *The Institution of Mechanical Engineers, Elastohydrodynamic Lubrication 1972 Symposium*, pp. 48-54, (1972).

[Wu, 1991] S. Wu, H. S. Cheng, "A Friction Model of Partial-EHL Contacts and its Application to Power Loss in Spur Gears", *Tribology Transactions*, 34(3), pp. 398-407, (1991).

[Xu, 2005] H. Xu, "Development of a generalized mechanical efficiency prediction methodology for gear pairs", *Ph.D Thesis, The Ohio State University*, (2005).

[Yang, 1985] D. C. H. Yang, Z. S. Sun, "A rotary model for spur gear dynamics", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in design*, 107, pp. 529-535, (1985).

[Yang, 1987] D. C. H. Yang, J. Y. Lin, "Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics", *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in design*, 109, pp. 189-196, (1987).

[Yang, 1992] P. Yang, S. Wen, "The Behavior of Non-Newtonian Thermal EHL Film in Line Contacts at Dynamic Loads", *Journal of Tribology, Transactions of the ASME*, 11, pp. 81-85, (1992).

[Yuksel, 2004] C. Yuksel, A. Kahraman, "Dynamic tooth loads of planetary gear sets having tooth profile wear", *Mechanism and Machine Theory*, 39, pp. 695-715, (2004).

[Zhang, 2007] J. Zhang, Z. Fang, X. Cao, X. Deng, "The modified pitch cone design of the hypoid gear: Manufacture, stress analysis and experimental test", *Mechanism and Machine Theory*, 42 (2), pp. 147-158, (2007).

[Zhu, 2001] D. Zhu, Y. Hu, "A computer program package for the prediction of EHL and mixed lubrication characteristics, friction, subsurface stresses and flash temperatures based on measured 3-D surface roughness", *STLE Tribol.Trans*, pp.383-309, (2001).

[Zhu, 2012] C. Zhu *et ál.*, "A thermal finite line contact EHL model of a helical gear pair", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*, pp. 227-299, (2013).

[Ziegler, 2006] P. Ziegler, P. Eberhard, B. Schweizer, "Simulation of impacts in geartrains using different approaches", *Archive of Applied Mechanics*, 76(9-10), pp. 537-548, (2006).