

Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals.
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

TESI DOCTORAL

**ESTIMACIÓ
DE MESURES LONGITUDINALS
RECTILÍNIES I CURVILÍNIES.
PROCEDIMENTS,
RECURSOS I ESTRATÈGIES.**

Josep Callís i Franco

Directora de la tesi: Dra. M. Lluïsa Fiol i Mora

2002

Departament de Didàctica de la Matemàtica
i de les Ciències Experimentals.
Universitat Autònoma de Barcelona (UAB)

TESI DOCTORAL

**ESTIMACIÓ
DE MESURES LONGITUDINALS
RECTILÍNIES I CURVILÍNIES.
PROCEDIMENTS,
RECURSOS I ESTRATÈGIES.**

Josep Callís i Franco

Directora de la tesi: Dra. M. Lluïsa Fiol i Mora

2002

DEDICATÒRIA

A tots aquells i aquelles que han fet possible que construís les meves creences i ideals.

Als qui han compartit amb mi, la vida i les il·lusions.

A la Taitxi, esposa i companya, i als nostres fills, Imma, Josep i Mariona. El seu suport ha estat essencial per cercar la veritable mesura de la vida i estimar amb precisió, l'estimació, l'esperança i la justícia.

Als qui lluitaren i confiaren en el meu futur.

Als meus avis i als meus pares Llorenç i Emília que gràcies al seu esforç i sacrifici personal esmerçat en un context social difícil, aconseguiren proporcionar-me una formació que m'ha permès trobar-me a mi mateix i viure la utopia educativa.

Als qui m'han ajudat a "ser" mestre.

A tots aquells i aquelles que al llarg del meu caminar professional he anat trobant pel camí: família, professors, amics, companys, alumnes, ... Tots ells i cadascú des del seu àmbit, m'han ajudat a cercar les meves veritats.

AGRAÏMENTS

És evident que qualsevol treball, per petit i insignificant que sembli, sempre necessita de l'acció i cooperació d'un context i ambient humà que actua com a factor potenciador i motivador. És aquest entorn el qui, en gran mesura el fa possible ja que actua d'impuls i és on hom hi troba la flama i l'energia moral que dóna força per seguir endavant. Una tesi doctoral no s'escapa a aquest fet sociològic de la necessitat de la cooperació i implicació de segones i terceres persones, és aquesta participació col·lectiva qui fa reeixir la tasca de la investigació. Per això, sense l'inestimable ajut i suport que hom rep de grups i de persones concretes, a tall d'amistat o de companyerisme professional, la viabilitat i materialització de la recerca resultaria una tasca molt més feixuga i difícil, sinó impossible, dintre la ja elevada dificultat que de per sí, comporta tota Tesi Doctoral.

Una Tesi és doncs, fruit de l'acció, treball i aportació de moltes persones, entenen que aquesta acció integra aspectes tan diferenciats com són, des de ser un factor clau en la decisió primigènica de tirar-la endavant, com el fet d'ésser el motor recordatori i estimulador de la voluntat i la continuïtat en l'esforç, o de participar en tasques directes com és el de revisar escrits, o bé de col·laborar en la recerca tant a nivell de controls tecnològics com a col·laboradors, o de ser subjecte de les mostres i grups d'anàlisi, o de ser validador i contrastador d'opinions. En aquest marc tan divers i variat de funcions, les derivades dels ajuts i orientacions que comporta la direcció científica i les de tipus de recolzament moral, tenen un pes fonamental i molt important en que la Tesi pugui veure la llum.

En base a aquestes varietats d'implicació diversifico l'agraïment:

1.- En primer lloc, cal destacar de manera prioritària, l'agraïment a la Dra. Maria Lluïa Fiol i Mora que a través de les moltes hores de direcció, diàleg i de contrast d'opinions, ha possibilitat l'elaboració i materialització de la present Tesi. Han estat sessions d'un gran plaer intel·lectual on no sempre la Tesi es trobava en el centre del debat, però sí a través d'ella ha possibilitat entrar en multitud de reflexions científiques i d'apropament humà. Hem compartit ideals i criteris, hem descoberts multitud d'interrogants, però també de camins, i el més important, una relació i debat construït sobre la confiança i la llibertat.

L'enriquiment ha estat realment gratificant i molt ampli. He de dir, en honor a la veritat, que això ha estat possible, gràcies a la gran flexibilitat intel·lectual i actitudinal que sempre ha utilitzat. Flexibilitat, que lligada a la llibertat i confiança posada en mi, ha fet que sempre em sentís còmode i confiat en la línia de recerca empresa. La llibertat ha estat total i tant a nivell d'acció, com d'anàlisi i, això, cal agrair-ho de manera especial. Els seus criteris i concepcions transpiren i estan implícits, tal i com havia de ser, en tota la Tesi fruit de les llargues converses i discussions científiques, mantingudes.

2.- Si bé es certa la gran importància de la direcció de la Tesi, no és menys cert que aquesta, en molts de casos i entre ells el meu, no seria possible sense l'acció i impuls d'unes determinades persones que amb la seva generosa amistat i coneixement de causa, són el fibló que estimula la reacció emocional que dóna força a la pròpia voluntat per assumir el repte inicial. Donar el primer pas per elaborar una Tesi Doctoral necessita, sovint, i més quan ja un ha assumit la professió com a finalitat

prioritària i els anys estan deixant marcada la seva empremta, d'aquell cop de mà i aquella empenta que et llença pendent avall o muntanya amunt, segons vulguem veure-ho. L'estímul clau, el que va actuar de contrapès de la balança i amb el qual em sentia amb obligació foren els consells, ànims i esperança que la Maria Antònia Canals posà en mi. Empenta i confiança que, avui, tinc el goig i satisfacció de poderli agrair i reconèixer, ja que de segur, sense ella, sense la coincidència que porten els camins de la vida que ens varen fer coincidir per treballar pel mateix objectiu de millorar l'educació matemàtica de la gent del nostre país, de segur que avui no presentaria aquesta tesi, ni cap altra. Treballar amb ella, compartir uns ideals i una manera de fer i entendre l'educació i la formació matemàtica ha estat una permanent riquesa professional. Ella ha estat doncs, la clau de volta que aquesta Tesi no sigui un projecte sinó una realitat i que la direccionalitat més important d'ella, estigui dirigida a cercar alternatives pràctiques que serveixin per millorar un aspecte concret de la matemàtica com és la mesura, camp en el que la M. Antònia hi té posat un gran interès.

No puc deixar d'esmentar aquí, al professor argentí, Carlos Mauricio de Luca. Ell fou qui actua de llevat tot desvetllant-me la responsabilitat de seguir endavant a través de les permanents reflexions que des de sempre em posà sobre la taula. Des del primer moment que ens coneguèrem, fruit d'un intercampus que realitza sota la meua tutorització quan finalitzà els seus estudis a Argentina, fins avui, professor de la Universitat Nacional de Jujuy, en totes les nostres trobades personals i epistolars, ha estat i actuat com a factor de permanent "pressió"; pressió lligada als profunds raonaments que sempre ha esgrimit enllaçats amb la responsabilitat moral i solidària. Ell fou qui acabà d'empènyer i obligar a la meua voluntat, en els moments de dubte i desinterès, per finalitzar-la.

3.- És obvi que els grans protagonistes són i han estat totes les persones (alumnes de primària, estudiants de magisteri i maestros populares) que acceptaren participar i col·laborar en les proves. De manera especial cal agrair a les disset que constituïen la mostra selectiva: *Orfília, Medardo, Josep, Pere, Xavier, Vicens, Quim, Glòria, Joan, Anna B.; Mariona, Anna F.; Isidre, Blanca, Sandra P.; Sandra F., Oriol*, i, de manera molt particular a *Mercedes Ventura Blanco*, presidenta del SILEM (Sistema Local de Educación de Meanguera) alhora que de la Comunitat Segundo Montes (El Salvador) de qui sempre vaig tenir el seu suport i recolzament, i a tots i cadascun dels "*maestros i maestras populares*" de la *Segundo Montes*" a qui recordo amb gran estima:

*Orfília Vigil Caballero (Deisy),
José Guillermo Vigil Orellana,
Paula Marisol Ramírez,
Juan de la Cruz Ramos Guevara,
Elena Chicas Vigil,
Carlos Alberto Hernández Carrillo,
Marilú Sánchez Sánchez,
Albertina Jeaneth García Álvarez,
Vilma Edith García Álvarez,
Juan Bautista Chicas Ventura,
Fidelina García Reyes (Doña Fidelina)
Roberto Antonio Claroz Romero,
Carmen Gómez Pérez, (Don Carmen)
Maria Margarita Argueta,
Milagro del Carmen Pereira,
Rosa Angelía Chicas (Doña Rosa)
Maria Margarita Márquez Romero
Josefina Gómez
Guadalupe Gómez*

*Ana Delia Romero,
Esteban Chicas Sánchez (Don Esteban),
Ignacia Martínez,
José Benjamín Márquez Romero,
Nilvia Elisabeth Hernández Martínez (Betty),
Medardo Elías Hernández Iglesias,
Lucila Hernández Romero,
Mercedes Chicas Hernández,
Martha Vigil,
Florentín Pereira Chicas,
Pastora Argueta,
Rolando Antonio Pérez Alfaro,
Eva María Argueta,
Timotea Portillo Márquez
Valerio Gómez Gómez
Mario Ernesto Ramos Guzmán
Maria Juana Chicas Pérez
Isabel Hernández
Celia Hernández Hernández*

La convivència i el treball conjunt que ens uní al llarg de les moltes setmanes que convisquérem durant les tres estades que vaig treballar amb ells, em permeteren participar en l'harmonia de la seva vida i en la lluita per una esperança i la utopia d'un món millor pel que havien lluitat i sofert al llarg dels deu anys de guerra civil. La sang innocent vessada que els afectava a tots, no era motiu suficient per no creure en la força de l'educació com a font de pau i recurs per fer créixer i millorar les seves noves generacions. L'alegria i l'oblit del passat per aconseguir un futur millor, em permeteren entrar en contacte i aprofundir en el meu propi jo. Ells m'ajudaren a transformar la concepció i la visió de la vida, i a relativitzar el valor i importància dels fets i de les coses.

Cal, també, agrair aquí, a les escoles i a tots els mestres i mestresses de les comarques gironines que permeteren que entrés a les seves aules o que no posaren cap impediment per donar-me les seves opinions i reflexions i, con no, a tots els alumnes de primària i de magisteri que participaren en les diferents proves.

4.- La recerca que es presenta no recull el treball de camp realitzat al Perú amb l'objectiu de tenir una experiència de validació de resultats. En aquest treball fou inestimable l'ajut de la professora Karina Beatriz (Universidad Pontificia de Lima) que compartí i treballà, també, els objectius i metodologia de la recerca.

La investigació, especialment durant l'entrevista de casos, necessita de la col·laboració d'una persona que controlés les reaccions i actituds dels entrevistats, calgué preparar la distribució de les formes a estimar, tenir cura de la gravació, fer fotos, recollir la informació de cada sessió. L'ajut, en aquest cas cal agrair-lo a en Josep Callís i Figueres i també a l'Imma, dos dels meus fills els quals també m'ajudaren en alguns dels desplaçaments a El Salvador i també a la Mariona Callís i Figueres per l'ajut en la part de la mecànica de la impressió i les seves opinions sobre la comprensió del text.

5.- El desenvolupament de la tesi passà per alts i baixos, moments de desànim que impulsaven a deixar-ho córrer. En aquells instants, el suport moral del propi entorn familiar, amical o professional, resultà essencial ja que la seva preocupació es transformà en manà que m'obligà a seguir. No puc deixar de fer constar entre aquests, el permanent interès del Dr. Claudi Alsina. La seva fina ironia amanida de profunda serietat i generosa amistat em creaven els remordiments i les inquietuds suficients, com per no deixar la tesi arraconada en algun calaix mentre dedicava el temps en altres tasques, emocionalment o professional, més satisfactòries.

6.- I tot és més fàcil quan l'entorn possibilita i proporciona condicions més adients. Aquí, és lògic, donat que qualsevol elaboració té un besant de sacrifici, la meua família també hi aportà el seu gra de sorra. Sovint, han hagut de patir del meu allament, les meves estades a centre i Llatinoamèrica, passar per vacances aigualides i projectes que han quedat aparcats. Sense el seu suport i la dedicació d'hores extres posades en les tasques diàries per tal que jo podés disposar-ne d'algunes més, són ajuts indirectes, inestimables. A ells, a la Taitxi, Imma, Josep i Mariona, moltes gràcies.

ÍNDEX

• Dedicatòria	5
• Agraïments	6
• Índex	9
• Preàmbul	19

Capítol 1 : Marc Teòric	21
--------------------------------	-----------

0. Estructuració i Enfoc General	21
1. Importància i necessitat de la Mesura.	
<i>Del domini aritmètic a la capacitat mètrica</i>	24
1.1. La mesura en l'essència de la capacitat matemàtica.....	24
1.2. El context internacional	26
1.3. El nostre context curricular	28
1.4. Importància del domini de la mesura.....	30
2. Epistemologia de la mesura.	
<i>De la magnitud a la mesura</i>	31
2.1. Magnitud	
2.1.a. Conceptualització i epistemologia	31
2.1.b. Classificació de la magnitud	32
2.1.b.a. El raonament definitori	32
2.1.b.b. Grau de mesurabilitat	34
2.1.b.c. Tipologia unitària	34
2.1.b.d. Proporcionalitat i relació entre classes	34
2.1.b.e. Estructura matemàtica	36
2.2. Mesura	
2.2.a. Conceptualització i epistemologia	36
2.2.b. La mesura i els factors implícits	37
2.2.b.a. Mesura	38
2.2.b.b. Metrització	39
2.2.b.c. Mesuratge	40
2.3. Unitat	
2.3.a. Conceptualització i epistemologia	41
2.4. Longitud	
2.4.a. Conceptualització i epistemologia	42
3. El domini de la mesura.	
<i>De la mesura sensorial a la mesura estimativa</i>	44
3.1. Direccionalitats de domini i tractament de la mesura	44
3.2. Els nivells de domini de la capacitat de mesuralització	45

4. Adquisició i estructuració de l'aprenentatge.	
<i>Del coneixement raonat a la intuïció estimativa</i>	49
4.1. L'adquisició del coneixement	49
4.2. La intel·ligència com a capacitat	51
4.3. El comportament intel·ligent i les intel·ligències múltiples ..	52
4.4. Un model potencial sobre l'adquisició del coneixement	54
5. L'adquisició de la capacitat estimativa.	
<i>De la percepció a la intuïció</i>	57
5.1. La complexitat de l'aprenentatge de la mesura	57
5.2. Factors endomagnitudinals i exomagnitudinals	57
5.3. La mesura i les estructures anatòmico-fisiològiques	59
5.3.a L'estructura cerebral	59
5.3.b La memòria	60
5.4. Cerebell i mesura	61
5.5. Estructura perceptual i imaginació	62
5.6. Percepció i sensació	64
5.7. Estructura perceptual i estimació de mesures	67
5.7.a. De la percepció a l'acció	67
5.7.b. La interiorització de la intuïció estimativa	67
5.8. La intuïció estimativa creativa: procés d'adquisició i nivells	72
6 Estimació i Educació Matemàtica.	
<i>De l'exactitud a l'estimació</i>	74
6.1 Importància de l'estimació en l'educació matemàtica.....	74
6.1.1 L'estimació com a necessitat	74
6.1.2 L'estimació en els informes i currículums	75
6.1.3 L'estimació en el nostre currículum escolar	75
6.1.4 Validesa i aplicació curricular	76
6.2 Estimació i aproximació: significació conceptual	78
6.3 La capacitació en l'estimació mètrica	81
6.3.1. Disponibilitat de recursos	82
6.3.2. Procediments de comparació	83
6.3.3. Estratègies de mesurament	84
7 L'evolució antropològica de la mesura.	
<i>De la filogènia a l'ontogènia de la mesura</i>	84
7.1 Introducció	84
7.2 Gènesi i evolució de la mesura	84
7.2.1. El sentit de la mesura	84
7.2.2. La mesura i les seves connotacions	84
7.3 Gènesi de la mesura i del pensament lògic	87
7.4 Estadis d'evolució en l'adquisició de la mesura	88
7.4.a La mesura antropomètrica	89
7.4.b La mesura consuetudinària	90
7.4.c La mesura objectal	92
7.5 Naixement i evolució del Sistema Mètric Decimal	94
7.6 Les mesures avui	97
7.7 L'adquisició personal de la mesura	98

8	<i>Gènesi i adquisició de la mesura.</i>	
	<i>De la sensació subjectiva a l'aprehensió intel·lectiva</i>	100
8.1.	Espai i mesura	100
8.2.	L'adquisició de la capacitat mètrica	101
8.2.a.	L'adquisició de la magnitud	101
8.2.b.	L'adquisició de la mesura	103
8.2.c.	L'adquisició de la unitat	105
8.3.	Les estructures lògico-matemàtiques de la mesura.....	105
8.4.	Línies de recerca per aprofundir en la gènesi de la mesura	108
9	<i>Espirals i Sinoidals.</i>	
	<i>De la recta al món curvilini</i>	109
9.1	La dicotomia del món de la recta i el món curvilini	109
9.2.	Corbes espirals i sinoidals	109
9.2.1.	Les corbes com a organització	110
9.2.2.	Les corbes com a estructura de la natura	110
9.3.	L'espiral	113
9.3.1.	L'espiral a la natura	113
9.3.2.	L'espiral i la seva estructura	114
9.4.	Les sinoidals	116
10	<i>Procediments de transformació geomètrica.</i>	
	<i>De la linealitat a la corbalització</i>	117
10.1.	El marc general	117
10.2.	Rectificació, quadratura i cubatge	117
10.2.a.	La matemàtica protohistòrica	118
10.2.b.	La geometria i la rectificació en les primeres cultures	119
10.2.c.	La geometria i la rectificació a la matemàtica grega	125
10.3.	La rectificació i la seva transcendència a l'actualitat	137
10.4.	La rectificació de la circumferència i el càlcul de π	140

• Capítol 2 : Planificació de la recerca	143
---	------------

0.	Planificació de la recerca	143
0.1.	La recerca i els plantejaments de la investigació educativa ..	143
0.2.	Els estadis i evolució del disseny de la recerca	144
1.	Objectius i hipòtesis de recerca	147
1.1.	El camí de la concreció	147
1.1.1.	Delimitadors externs	148
1.1.2.	Els definidors interns	150
1.1.2.a.	Concreció del camp de recerca	150
1.1.2.b.	Concreció d'hipòtesis	151
1.1.2.b.1.	Plantejament d'interrogants	151
1.1.2.b.2.	Plantejament d'hipòtesis	152
2.	Disseny de la recerca	155
2.A.	El mètode	155
2.A.1.	Direccionalitat de la recerca	155
2.A.2.	La formulació del control	156
2.A.3.	Característiques de la metodologia general	156
2.A.3.a.	Tractament i anàlisi resolutori	156
2.A.3.b.	Tipologia d'observació	156
2.B.	La mostra	157
2.B.1.	La mostra pilot o exploratòria	158

2.B.2. La mostra base o experimental	159
2.B.2.1. Característiques generals	159
2.B.2.2. Variables dependents	159
2.B.2.3. Concreció de la mostra bàsica o mostra control	159
2.B.3. concreció de la mostra selectiva	161
2.C. La prova	162
2.C.1. Consideracions generals	162
2.C.2. El test	162
2.C.2.1. Els condicionants i criteris externs del test	163
2.C.2.2. Els condicionants interns o criteris de validació	164
2.C.3. Desenvolupament de la prova	164
2.C.4. Validació del test	165
2.D. Els Tests	167
2.D.1. El test "FIEM"	167
2.D.2. El test "EM"	168
2.E. Anàlisi de dades.....	169
2.E.1. Característiques generals	170
2.E.2. La recollida de dades	171
2.E.3. El tractament de les dades	172

• Capítol 3: Desenvolupament experimental	173
--	------------

1. Desenvolupament experimental	173
1.0. Introducció	173
1.1. Aproximació a les recerques prèvies	174
1.1.1. Interiorització mesures longitud de 6 a 14 anys	174
1.1.2. Concepcions i ensenyament de les mesures	175
1.1.3. Enfoc i tractament de les mesures en països occidentals	177
1.2. Aproximació a la recerca pilot	178
1.2.1. Aspectes generals	178
1.2.2. El test "FIEM"	178
1.2.3. Aproximació a alguns resultats i conclusions	181
1.2.3.a. L'anàlisi quantitativa	181
1.2.3.b. L'anàlisi qualitativa	186

• Capítol 4: La recerca base	193
-------------------------------------	------------

1. Anàlisi quantitativa.....	193
1.0. El marc d'anàlisi.....	193
1.0.1 Els objectius	193
1.0.2 Factors de recerca implícits en la capacitat mètrica	193
1.0.3 Estructuració	195
1.0.3.1 Enfoc i tractament	195
1.0.3.2 Paràmetres estadístics	195
1.0.3.3 Instruments	195
1.0.3.4 L'anàlisi estadístic	195
1.0.3.5 Interpretació i claus identificatives	196
1.0.3.6 Factors distorsionants dels valors estadístics	196
1.1- Estimació de Segments Rectilinis	197
1.1.1. Factors incidents en la capacitat estimativa	197
1.1.1.a. Precisió (Grups: Control, El Salvador, Primària)	197
1.1.1.b. Correcció estimativa (GC; GES, GEP)	198

1.1.1.c. Tipologia estimativa	200	
1.1.1.c.1. Incidència (GC; GES; GEP)	200	
1.1.1.c.2. Rendibilitat (GC; GES; GEP)	201	
1.1.1.d. Consistència estimativa (GC; GES; GEP)	202	
1.1.1.e. Identificació i percepció del metre (GC; GES; GEP)	204	
1.1.1.f. Coherència estimativa	204	
1.1.1.f.1. La igualació (GC; GES; GEP)	204	
1.1.1.f.2. Contrast diferencial (GC; GES; GEP)	205	
1.1.1.f.3. Tipologia estimativa (GC; GES; GEP)	206	
1.1.1.f.4. Rendibilitat estimativa (GC; GES; GEP)	206	
1.1.2. Significativitat de les variables	207	
1.1.2.a. Gènere (GC; GES; GEP)	207	
1.1.2.b. Especialitat (GC)	208	
1.1.2.c. Edat (GC; GES; GEP)	208	
1.1.2.d. Autopercepció de rendiment acadèmic (GC)	209	
1.1.2.e. Ús d'unitats tradicionals o alternatives ((GES; GEP)	209	
1.1.3. Síntesi de conclusions	210	
1.2- Estimació d'Ondulades		213
1.2.1. Factors incidents en la capacitat estimativa	213	
1.2.1.a. Precisió (Grups: Control, Primària)	213	
1.2.1.b. Correcció estimativa (GC; GEP)	213	
1.2.1.c. Tipologia estimativa	216	
1.2.1.c.1. Incidència (GC; GEP)	216	
1.2.1.c.2. Rendibilitat (GC; GEP)	217	
1.2.1.d. Consistència estimativa (GC; GEP)	218	
1.2.1.e. Identificació i percepció del metre (GC; GEP)	219	
1.2.1.f. Coherència estimativa	219	
1.2.1.f.1. La igualació (GC; GEP)	219	
1.2.1.f.2. Contrast diferencial (GC; GEP)	220	
1.2.1.f.3. Tipologia estimativa (GC; GEP)	220	
1.2.1.f.4. Rendibilitat estimativa (GC; GEP)	221	
1.2.2. Significativitat de les variables	222	
1.2.2.a. Gènere (GC; GEP)	222	
1.2.2.b. Especialitat (GC)	222	
1.2.2.c. Edat (GC; GEP)	222	
1.2.2.d. Autopercepció de rendiment acadèmic (GC)	223	
1.2.2.e. Ús d'unitats tradicionals o alternatives (GEP)	223	
1.2.3. Síntesi de conclusions	224	
1.3- Estimació de Circumferències		224
1.3.1. Factors incidents en la capacitat estimativa	224	
1.3.1.a. Precisió (Grups: Control, El Salvador, Primària)	224	
1.3.1.b. Correcció estimativa (GC; GES; GEP)	225	
1.3.1.c. Tipologia estimativa	226	
1.3.1.c.1. Incidència (GC; GES; GEP)	226	
1.3.1.c.2. Rendibilitat (GC; GES; GEP)	227	
1.3.1.d. Consistència estimativa (GC; GES; GEP)	228	
1.3.1.e. Identificació i percepció del metre (GC; GES; GEP)	229	
1.3.1.f. Coherència estimativa	229	
1.3.1.f.1. Exactitud de contrast (GC; GES; GEP)	229	
1.3.1.f.2. Tipologia estimativa (GC; GES; GEP)	230	
1.3.1.f.3. Rendibilitat estimativa (GC; GES; GEP)	230	
1.3.2. Significativitat de les variables	231	
1.3.2.a. Gènere (GC; GES; GEP)	231	

1.3.2.b. Especialitat (GC)	232	
1.3.2.c. Edat (GC; GES; GEP)	232	
1.3.2.d. Autopercepció de rendiment acadèmic (GC)	233	
1.3.2.e. Ús d'unitats tradicionals o alternatives (GES; GEP)	233	
1.3.3. Síntesi de conclusions	234	
1.4- Estimació d' Espirals		236
1.4.1. Factors incidents en la capacitat estimativa	236	
1.4.1.a. Precisió (Grups: Control, El Salvador, Primària)	236	
1.4.1.b. Correcció estimativa (GC; GES; GEP)	237	
1.4.1.c. Tipologia estimativa	239	
1.4.1.c.1. Incidència (GC; GES; GEP)	239	
1.4.1.c.2. Rendibilitat (GC; GES; GEP)	240	
1.4.1.d. Consistència estimativa (GC; GES; GEP)	241	
1.4.1.e. Identificació i percepció del metre (GC; GES; GEP)	241	
1.4.1.f. Coherència estimativa	242	
1.4.1.f.1. Exactitud de contrast (GC; GES; GEP)	243	
1.4.1.f.2. Tipologia estimativa (GC; GES; GEP)	243	
1.4.1.f.3. Rendibilitat estimativa (GC; GES; GEP)	244	
1.4.2. Significativitat de les variables	245	
1.4.2.a. Gènere (GC; GES; GEP)	245	
1.4.2.b. Especialitat (GC)	245	
1.4.2.c. Edat (GC; GES; GEP)	246	
1.4.2.d. Autopercepció de rendiment acadèmic (GC)	247	
1.4.2.e. Ús d'unitats tradicionals o alternatives (GES; GEP)	247	
1.4.3. Síntesi de conclusions	248	
1.5- Estimació Global		250
1.5.A.1. Capacitat estimativa del Grup Control	250	
1.5.A.1.a. Precisió	250	
1.5.A.1.b. Correcció estimativa	252	
1.5.A.1.c. Tipologia estimativa	253	
1.5.A.1.c.1. Incidència	253	
1.5.A.1.c.2. Rendibilitat	253	
1.5.A.1.d. Consistència estimativa	254	
1.5.A.2. Dependències i interrelacions de factors	255	
1.5.B.1. Capacitat estimativa del Grup d' El Salvador	256	
1.5.B.1.a. Precisió	256	
1.5.B.1.b. Correcció estimativa	257	
1.5.B.1.c. Tipologia estimativa	257	
1.5.B.1.c.1. Incidència	257	
1.5.B.1.c.2. Rendibilitat	258	
1.5.B.1.d. Consistència estimativa	258	
1.5.B.2. Dependències i interrelacions de factors	259	
1.5.C.1. Capacitat estimativa del Grup de Primària.....	260	
1.5.C.1.a. Precisió	260	
1.5.C.1.b. Correcció estimativa	261	
1.5.C.1.c. Tipologia estimativa	262	
1.5.C.1.d. Consistència estimativa	262	
1.5.C.2. Dependències i interrelacions de factors	263	
1.5.D. Síntesi de conclusions	265	

1.6. Conclusions Generals: Anàlisi comparatiu		268
1.6.A.1.a. Precisió		
1.6.A.1.b. Correcció estimativa	268	
1.6.A.1.c. Tipologia estimativa	270	
1.6.A.1.c.1. Incidència	272	
1.6.A.1.c.2. Rendibilitat	272	
1.6.A.1.d. Consistència estimativa	273	
1.6.A.1.e. Identificació i percepció del metre	273	
1.6.A.1.f. Coherència estimativa	274	
1.6.a.1.f.1. Igualació de contrast	275	
1.6.A.2. Significativitat de les variables	275	
1.6.B. Conclusions Finals		278
		279
2. Anàlisi Qualitativa		283
2.0. Introducció	283	
2.0.1. Problemàtica general de l'estimació de longituds	283	
2.0.2. Factors que configuren l'acte estimatiu	285	
2.0.3. Els objectius d'anàlisi	286	
2.0.3. Estructuració de la recerca qualitativa	286	
2.1. Estructures estimatives del GC		288
2.1.1. Procediments de mesuratge		
2.1.1.a. L'estructura sistèmica	288	
2.1.1.a.1. El mètode	288	
2.1.1.a.2. Tècnica de mesuratge	288	
2.1.1.b. Significació i aplicació	288	
2.1.2. Recursos de mesura		
2.1.2.a. L'estructura sistèmica	295	
2.1.2.b. Significació i aplicació	296	
2.1.3. Estratègies de mesurament		
2.1.3.a. L'estructura sistèmica	301	
2.1.3.b. Significació i aplicació	304	
2.1.4 Conclusions		309
Estructures estimatives del GES i GEP		311
2.2.0. Introducció	311	
2.2.0.1. Característiques generals del contrast	311	
2.2.0.1.a. Consciència i interiorització estimativa	311	
2.2.0.1.b. Potencial estimatiu	314	
2.2.1. Procediments de mesuratge		
2.2.1.a. L'estructura sistèmica	315	
2.2.1.b. Significació i aplicació	316	
2.2.2. Recursos de mesura		
2.1.2.a. L'estructura sistèmica	319	
2.1.2.b. Significació i aplicació	321	
2.2.3. Estratègies de mesurament		
2.1.3.a. L'estructura sistèmica	321	
2.1.3.b. Significació i aplicació	321	
2.2.4. Conclusions		323

• Capítol 5: La Mostra Selectiva		325
1.	El marc contextual	325
1.1.	Constitució i criteris de selecció	325
1.2.	Control i desenvolupament de l'entrevista	327
1.2.1.	Característiques generals	327
1.2.2.	Posició de l'entrevistador	327
1.2.3.	El control contextual	328
1.2.4.	El control de l'entrevista	329
2.	El perfil mostral i individual	331
2.1.	Domini i capacitat estimativa	331
2.1.1.	Significativitat de la mostra selectiva	331
2.1.2.	Nivell de precisió	331
2.1.3.	Síntesi	334
2.2.	El marc contextual	335
2.2.1.	Reacció comportamental	335
2.2.2.	Seguretat i fiabilitat	337
3.	Procediments d'estimació mètrica	340
3.1.	Estructura i classificació	340
3.2.a.	Mètodes	341
3.2.b.	Tècniques	341
3.2.b.1.	Sobreposició	342
3.2.b.1.a.	Estructura conceptual	342
3.2.b.1.b.	Ús i significativitat	343
3.2.b.1.c.	Tipologies	343
3.2.b.1.d.	La sobreposició en les longituds rectilínies	348
3.2.b.1.e.	La sobreposició en les formes corbes	348
3.2.b.2.	Rectificació	352
3.2.b.2.1.	Característiques generals	352
3.2.b.2.2.	De l'estirament al desplegament	352
3.2.b.2.3.	La rectificació parcial i la indirecta	357
3.2.b.3.	Curvalització i quadratura	358
3.2.b.4.	Algorismització	360
3.2.b.5.	Intuïció estimativa	363
3.2.	Gènesi dels procediments estimatius. <i>De la sobreposició a la intuïció estimativa</i>	368
4.	Recursos d'estimació mètrica	376
4.1.	Característiques generals	376
4.1.1.	L'estructura conceptual	376
4.1.2.	La contextualització global	378
4.2.	Els recursos antropomètrics	379
4.3.	Els recursos objectals	383
4.4.	Els recursos magnitudinals	385
4.5.	Gènesi i evolució dels recursos mètrics. <i>De les unitats antropomètriques a la intuïció estimativa</i>	393
5.	Estratègies d'estimació mètrica	402
5.1.	El marc contextual	402
5.1.1.	L'estructuració conceptual	402

5.1.2. Característiques generals	403
5.2. Anàlisi de tipologies.....	405
5.2.a. Estratègies de visualització	405
5.2.a.1. Automatització identificativa	406
5.2.a.2. Operatives	413
5.2.b. Estratègies de revisualització	413
5.2.b.1. Enactives	
5.3. Gènesi de les estratègies estimatives.	415
<i>De l'ordenació a l'automatització intuïtiva</i>	

• Capítol 6: Aprenentatge de la mesura i l'estimació mètrica	431
0. Introducció	431
1. Síntesi teòrica	432
2. Proposta Didàctica.....	438
2.1.- El context d'aprenentatge	438
2.1.1. El marc general de l'aprenentatge de la mesura	438
2.1.2. Els factors psicopedagògics i d'aprenentatge	439
2.1.3. La intel·ligència i la seva relació amb l'aprenentatge	439
2.1.4. Entorns matemàtics de la mesura	441
2.1.5. Problemàtiques de l'aprenentatge de la mesura	443
2.2. Tractament i aprenentatge de la mesura	449
2.2.1. Atenció als factors implicats	449
2.2.2. Direccionalitat i línia d'aprenentatge	450
2.2.3. Variabilitat dels factors intervinents en el mesurament	451
2.2.4. El marc didàctic de l'aprenentatge de la mesura	453
2.3. L'aprenentatge de la capacitat estimativa	455
2.3.1. Factors definitoris de la capacitat estimativa	455
2.3.2. La millora de la capacitat estimativa	455
2.3.3.a. Direccionalitat didàctica	455
2.3.3.b. Implicacions generals	457
2.3.3. Graduació i seqüenciació adquisitiva	459
2.3.4. La planificació com a integració multifactorial	462
• Nota Final	463
3.- Recerques Obertes	464
• Reflexió final	469
• Bibliografia	471
• Índex d'Esquemes, Gràfics i Taules	497

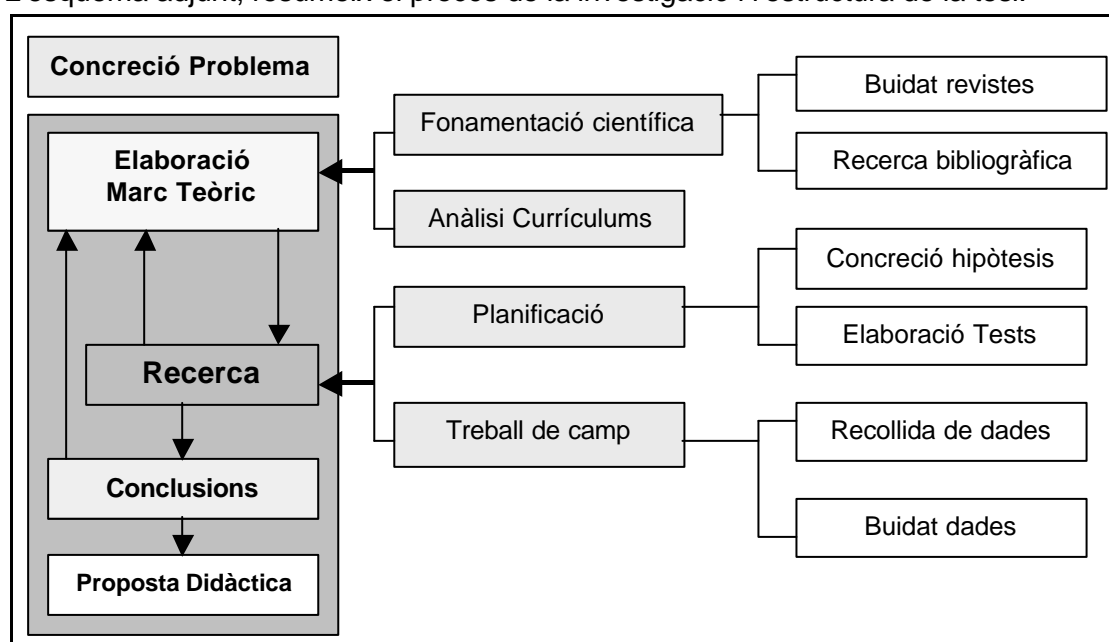
PREÀMBUL

La present Tesi Doctoral, centrada en ***l'estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies***, té com a objectiu el fet d'aportar reflexió teòrica i la seva corresponent proposta didàctica per tal que la seva anàlisi permeti incidir de manera pràctica i significativa, en la millora d'aquesta capacitat cognitiva que resulta imprescindible per fer front a la realitat de la vida i la comprensió de l'entorn, és a dir que serveixi per millorar la capacitat matemàtica de la societat alhora que permeti seguir avançant en aquesta línia d'investigació.

La seva adquisició genera una potencialitat matemàtica de gran repercussió en el domini de l'espai, de la computació numèrica i de les estructures del pensament lògic i resolutori; creant-se procediments, recursos i estratègies que d'altra manera es mantindran, en la majoria de casos, latents. Deixar d'atendre, doncs, aquesta formació, implica deixar de banda aspectes fonamentals de l'educació matemàtica i la formació integral de la persona.

Considerant aquesta valoració formativa l'enfoc general de la investigació s'ha realitzat partint d'unes problemàtiques detectades i constatades en la realitat educativa les quals han generat les seves respectives hipòtesis. Fruit d'aquest primer nivell de gestació i enfoc, que permet la *precisió i definició del problema*, el procés ha necessitat de l'aprofundiment científic per tal *d'elaborar el marc teòric* corresponent, extret de les aportacions bibliogràfiques i de revistes especialitzades d'àmbits científics diversos i, també, dels dissenys curriculars de diferents països occidentals. La precisió del problema i l'aproximació teòrica possibilita *el disseny, planificació i realització de la recerca*, la qual per un procés bijectiu permanent, incideix contínuament en el marc teòric i en la pròpia reelaboració i disseny de la recerca amb feed-back constant amb el plantejament de les hipòtesis. Serà a partir d'aquesta doble incidència de la recerca i del marc teòric, que s'estructuren les *conclusions* que van sorgint al llarg de la investigació, les quals reincideixen de nou en el marc teòric, conclusions que aboquen finalment a la possibilitat de poder generar una *proposta didàctica* sobre l'aprenentatge de l'estimació mètrica.

L'esquema adjunt, resumeix el procés de la investigació i l'estructura de la tesi.



Esquema 1 : ***Estructuració i desenvolupament de la recerca***

La Tesi integra a més del propi anàlisi temàtic, un bloc d'annexes on es troba la documentació utilitzada:

I.- TESI

En referència a aquest bloc temàtic que constitueix la base documental, presenta la següent distribució i enfoc:

- **Capítol 1: Marc Teòric**
En ell es fa l'aproximació als sabers relacionats amb el tema d'investigació i els paral·lels que hi incideixen.
- **Capítol 2: Planificació de la recerca**
Es justifica i detalla tot el procés de gestació i condicionants a tenir en compte en la realització pràctica de la recerca.
- **Capítol 3: Disseny de la recerca**
Presenta l'evolució de les hipòtesis, les influències i dependències amb les recerques prèvies i la recerca exploratòria, per tal d'arribar a les concrecions hipotètiques pertinents.
- **Capítol 4: La Recerca Base**
Es fa l'estudi comparatiu entre un grup control i mostres experimentals amb l'objectiu de poder detectar els trets més característics i normalitzats, relacionats amb l'estimació mètrica juntament amb les influències que poden tenir determinades variables. L'estudi s'efectua amb un tractament quantitatiu-qualitatiu.
- **Capítol 5: La Mostra Selectiva**
Per tal de poder aprofundir en aspectes no detectats en la mostra base, degut a les impossibilitats metodològiques, s'aplica un estudi de casos per aconseguir profunditzar en aquells aspectes que més interessa i que fan referència a les estructures cognitives que entren en joc.
- **Capítol 6: L'Aprenentatge de la Mesura i l'Estimació Mètrica**
Fruit de les conclusions que s'han generat en els capítols 4 i 5, es fa una síntesi teòrica que permet, posteriorment, elaborar una proposta didàctica per tal de possibilitar un aprenentatge significatiu d'aquesta capacitat estimativa tot potenciant-se el seu desenvolupament i interiorització. Al mateix temps obre pas a noves direccionalitats de recerca fruit de nous interrogants.

II.- Annexes:

Recull el conjunt de material produït per la recerca. Integra des dels protocols lliurats com a tests i el conjunt de taules i anàlisis estadístics elaborats amb els resultats de les diferents proves juntament amb les transcripcions de les entrevistes. Aquest material resta classificat en:

II. a.- Annex 1:

Recull tot l'estudi estadístic corresponent a la recerca efectuada en la Mostra Base (grup control i grups experimentals). Les anàlisis integren tant el bloc de recerca quantitativa, com la qualitativa de dites mostres.

II.b.- Annex 2:

Recull de tota l'anàlisi de la Mostra Selectiva. Integra la transcripció de totes les entrevistes juntament amb l'anàlisi estadístic dels valors quantitius d'aquesta mostra i també tota la seva anàlisi qualitativa.

II.c.- Annex 3:

Recopilació de tots els protocols realitzats en la recerca: proves de la Mostra Pilot o Exploratòria i la Mostra Selectiva, juntament amb les cintes que recullen les entrevistes de la Mostra Selectiva.

CAPÍTOL 1

MARC TEÒRIC ESTRUCTURACIÓ I ENFOC GENERAL

La present recerca “**Estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies. Procediments, recursos i estratègies**” tal i com es desprèn del propi títol, necessita donar resposta a diferents interrogants, com:

- *de quina manera i com es genera aquest domini?*
- *quins factors intervenen en la seva capacitació?*
- *quan i de quina manera es produeix la seva adquisició i millora?*
- *existeixen procediments comuns per a contextos estimatius diferents?*

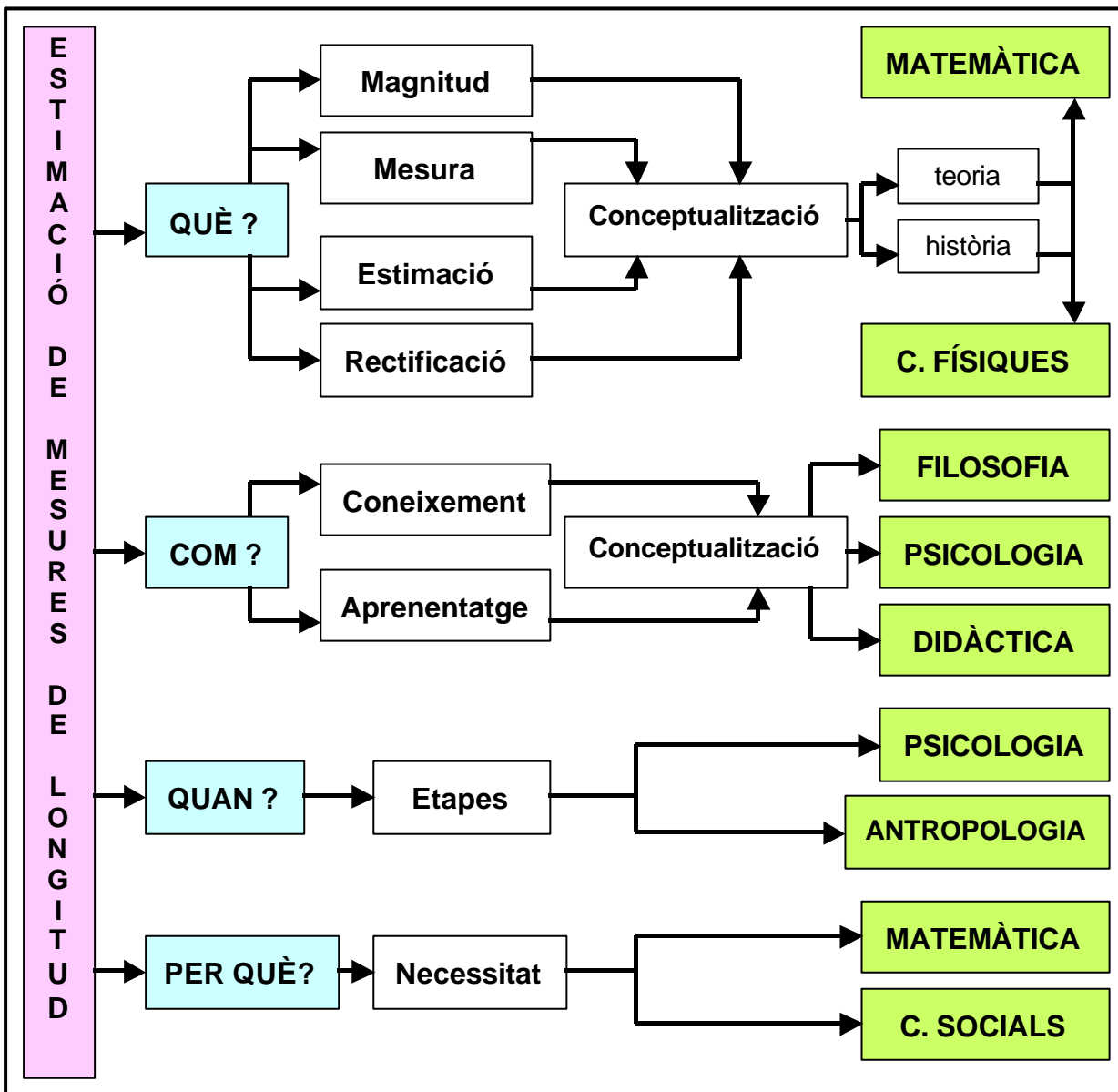
L'aproximació teòrica a cadascun d'aquests interrogants, nascuts dels diversos *què, com, quan i per què* que es poden anar formulant, obliga a entrar en camps científics molt diversos com poden ser la psicologia genètica, les teories cognitives i d'aprenentatge, l'antropologia cultural, la història de la matemàtica, l'epistemologia i la teoria de la mesura. Serà fruit de la seva conjunció global que es podrà aprofundir en el coneixement dels punts nuclears de la recerca tal i com pot constatar-se en l'esquema que s'adjunta on es detalla la interdependència entre àmbits científics i nuclis temàtics que s'analitzen. D'entre els factors més destacables a analitzar, cal ressenyar:

- *el procés d'adquisició del coneixement i de l'aprenentatge,*
- *la epistemologia dels factors implícits (magnitud, mesura, longitud,..)*
- *la gènesi i aprenentatge de la mesura i la seva evolució filogènica*
- *el procés estimatiu*
- *els procediments de transformació geomètrica*

Apropar-nos a l'àmbit matemàtic per tal de veure'n la necessitat i avantatges del domini de la mesura o per entrar en la seva teoria i epistemologia, o per analitzar històricament com ha evolucionat la seva pròpia conceptualització fins arribar a la seva teorització i els trets més essencials que aquest procés ha comportat tant per a la pròpia concepció com per a la matemàtica en general, resulta fonamental; però, tampoc es poden oblidar, les aportacions de les ciències físiques ja que elles possibiliten les concrecions tecnològiques referides a les magnituds.

El domini de la mesura es produeix per l'adquisició d'uns determinats continguts conceptuals i procedimentals i, idènticament, succeeix al referir-nos a les capacitats d'estimació; conseqüentment, cal entrar en les teories cognitives i en les teories de l'aprenentatge, centrant-les prioritàriament en el camp matemàtic, però sense oblidar les importants aportacions que ha fet, també, la filosofia sobre el coneixement. De la mateixa manera, resulta imprescindible, tenir coneixement sobre el procés genètic de la seva adquisició i els factors implícits que hi intervenen per anar interioritzant aquest domini, anàlisi que ens porta a la psicologia genètica. De forma paral·lela, és important, veure la relació existent entre aquesta adquisició i els contextos on s'efectua l'aprenentatge i com hi influeixen les variables específiques de tipus personal o socials, línia que ens fa entrar en contacte amb l'Etnomatemàtica. Per últim, donar resposta al perquè, ens dirigeix als raonaments sobre la seva necessitat, fet que de nou ens retorna a la matemàtica però també a diverses ciències humanes com la sociologia i l'antropologia, sense obviar el vessant tecnològic i econòmic, el món professional o la

política educativa i els dissenys curriculars. I, tampoc podem obviar, les dificultats inherents a la mesura i als processos didàctics, per tal de poder plantejar, a posteriori, una proposta educativa coherent amb la problemàtica que anirem detectant.



Esquema 2 : La recerca i la interrelació dels camps científics integrats

L'aprofundiment de la recerca necessita de l'aproximació epistemològica, però aquesta única visió no permetria donar respostes als interrogants plantejats i als que puguin anar sorgint al llarg de la investigació. Els interrogants i objectius de la recerca, ja que per sí mateixos porten implícits connotacions fisiològiques, cognitives, pedagògiques, històriques i professionals, obliga a tenir-los en compte i a integrar-los en l'enfoc del marc teòric i en cadascun dels diferents apartats que el componen.

Els grans blocs científics que emmarquen i constitueixen la recerca fan subdividir el present capítol en deu subapartats; els quals es fonamenten d'aportacions científiques i línies teòriques diverses i on, en cada cas, es cerca el propi posicionament.

1.- Importància i necessitat de la mesura

Apropa a la justificació i importància del domini i aprenentatge de la mesura. Les recerques del National Council of Teachers of Mathematics, del National Science Board, l'Informe Cockcroft i de l'ICMI en seran la base fonamental.

2.- Epistemologia de la mesura.

Aproximació epistemològica als diferents conceptes implicats en la mesura des d'Heron, passant per N. Campbell, D'Hombres, H. Lebesgue, L. Felix, A. Kolmogorov, B. Ellis, o de la ciència en general amb J. Mosterin, I. Lakatos, K. Wartofsky, etc.

3.- El domini de la mesura.

Analitza els diferents nivells que configuren el seu domini i capacitat amb interdependència amb el domini de l'espai. Les concepcions i aportacions de Piaget, Chamorro, C. Alsina, J.M. Fortuny, entre d'altres, són el marc bàsic.

4.- Adquisició i estructuració de l'aprenentatge.

Tracta de l'adquisició del coneixement i la capacitat en qualsevol àrea del saber, posant especial atenció en l'adquisició dels processos intuïtius i en especial, la intuïció mètrica. La fonamentació està amarada, entre d'altres, de teories d'autors com: Plató, Aristòtil, R. Descartes, E. Kant, J. Piaget, K. Lovel, Z.P. Diennes, J. Brunner, Vigostki, Chomsky, Cassirer, D. Ausubel.

5.- L'adquisició de la capacitat estimativa

Apropa als processos implícits de l'aprenentatge de l'estimació i la seva interrelació amb la intel·ligència, memòria, percepció i neurologia. Seran bàsiques les aportacions de: H. Gardner, Stenberg, E. Resnick; M. Johnson, P. Golman, S. Zeki, Kunnapas, R. Arnheim, P. Rainer; W. Zimmermann; R. Guski, U. Neisser.

6.- Estimació i educació matemàtica

Analitza la importància de l'estimació com a capacitat matemàtica i en especial en el cas de l'estimació mètrica. L. Rico, I. Segovia, B. Reys, formen part de l'aportació essencial.

7.- L'evolució antropològica de la mesura.

S'analitza l'evolució filogènica de la mesura per arribar a la contextualització actual. En el camp de la història de la matemàtica es centrarà especialment en Euclides, R. Corant i H. Robbins, C. Boyer, G. , C. Alsina.

8.- Gènesi i adquisició de la mesura.

Tracta del procés genètic de la seva adquisició i dels factors lògics-matemàtics implícits en el seu domini. Piaget, Lovel, Diennes, C. Chamorro, J. Rogalsky, F. Vecino seran els marcs referencials preferents.

9.- Espirals i sinoidals

Valora la importància de la línia recta i les corbes i la necessitat del seu domini i estudi. Entre les fonamentacions que relacionen forma i natura, destacarem les de P. Stevens, I. Assimov, M. Ghyka.

10.- Procediments transformadors.

Es fa una aproximació històrica al procés de desenvolupament matemàtic de la mesura parant atenció en els processos de rectificació, quadratura, curvilització i cubicatge. Les aportacions d'Euclides, R. Corant i H. Robbins, C. Boyer, G. Gherverghese, J. Pla i Carrera, en resulten essencials.

Les aportacions de H. Freudenthal, Van Hile, E. Castelnuovo, C. Kamii, J. Mason, G. Polya, A. Baroody, A. Orton, G. Mialaret, U. Ambrossio, A. Bishop, G. Brosseau, Y. Chevallard, entre d'altres, resten presents, també, en tot el marc teòric general i en la base de l'enfoc didàctic que sempre hi resta implícit.

1. IMPORTÀNCIA I NECESSITAT DE LA MESURA. DEL DOMINI ARITMÈTIC A LA CAPACITACIÓ MÈTRICA

La mesura en l'essència de la capacitat matemàtica

Tradicionalment, la Matemàtica se l'ha subdividit en Lògica, Càlcul, Mesura i Geometria; aquesta classificació evidencia la importància que sempre s'ha donat al domini de les magnituds, fins al punt d'arribar a tenir significació i entitat pròpia per constituir un camp matemàtic específic. L'interès i necessitat de la mesura és un fet que ve corroborat per l'evolució de la humanitat, on el domini i ús de la mesura ha estat sempre un factor essencial de la filogènia humana i clau de volta dels seus avenços culturals i científics. Fou, aquesta necessitat de dominar les magnituds, una de les causes fonamentals del naixement i aplicació de la Matemàtica.

L'ensenyament-aprenentatge de la mesura que nasqué per controlar i entendre la realitat de l'espai, s'ha reduït, generalment, a aconseguir un domini aritmètic de la transposició d'unes unitats de mesura a unes altres per pura repetició mecànica d'uns algorismes per tal de poder passar valors complexos a incomplexos o a la inversa, i per poder cercar les equivalències unitàries a través d'operacions correctes i exactes. Aquesta concepció és conseqüència, entre d'altres causes, a les normatives i imposicions legals que decretaren els governs dels diferents països quan acceptaren l'ús oficial del sistema mètric decimal ja que, amb l'objectiu de substituir i eliminar els sistemes tradicionals imperants¹, obligaren a les escoles a centrar la seva tasca en capacitar les persones en saber traspasar i calcular les equivalències d'unes unitats a d'altres; objectiu que s'ha mantingut com a prioritari, fins els nostres dies.

La mesura, per contra, no és càlcul sinó acció. La seva essència es situa en la realitat, en el contacte i comparació i en cap cas, l'exactitud n'és el factor definitori. La vivenciació, intuïció i estimació resulten ser els seus factors bàsics d'adquisició per tal, que a partir d'ells es pugui arribar, posteriorment, a l'exactitud. En cap altre camp matemàtic, com en aquest, és fa palesa la necessitat de l'aplicació de recursos i procediments relacionats amb la realitat i l'entorn. Així doncs, educar de forma activa i significativa per tal d'arribar a la interiorització de la mesura, implica fer-ho des de la vivenciació i l'estimació i no en base a la prioritització del càlcul.

La valoració de la importància de la mesura no només té la justificació en l'origen de la matemàtica. Avui, segueix sent l'eina fonamental que possibilita el control i comprensió de l'entorn, però també, l'eina imprescindible per a totes les ciències per tal de poder definir bona part dels paràmetres dels seus camps d'estudi i la base que permet integrar i interrelacionar la comprensió de molts camps matemàtics (aritmètica i càlcul, nombres racionals, proporcionalitat, geometria euclidiana,...) amb els que s'estableix un íntim lligam epistemològic.

És aquesta funció d'eina de comprensió de la realitat, per tant, també d'expressió, juntament amb la seva incidència com a base de la capacitat tecnològica, que la fa imprescindible. La prioritat i necessitat del seu aprenentatge és present tant en les planificacions de política educativa dels dissenys curriculars d'arreu del món, com en els estudis realitzats en diferents països occidentals per tal d'analitzar el grau de capacitat i aprenentatge matemàtic². En tots ells i en tots els nivells concrecionals, ens trobem amb una atenció de la mesura que aconsella un tractament en espiral per tal que s'incideixi en tots els cicles de l'ensenyament obligatori.

¹ Aquesta necessitat de transformació d'equivalències numèriques entre sistemes és el que avui la societat viu amb l'euro, de manera que els valors d'euro tenen sentit com a transformació a pessetes més que pel propi valor en euros.

² Un bon exemple són els Estàndards Curriculars de la NTCM d'Estats Units i l'Informe Cockroft anglès.

Contràriament a aquesta prioritització pragmàtica, l'adquisició i domini per part de l'alumnat no és el que en principi es podria esperar, resultant ser molt deficient o quasi inexistent³; deficiència que genera una gran preocupació en una bona part de professionals i en la mateixa societat.

L'aprenentatge i adquisició de la capacitat de mesura, planteja, doncs, una dicotomia profundament preocupant; per una banda és una necessitat i un recurs imprescindible per moure'ns i comprendre el món, però per l'altra, la constatació de la realitat escolar demostra la poca interiorització d'aquest aprenentatge, el qual sembla ser insuficient per considerar-lo com a aprenentatge significatiu. La contradicció existent entre plantejament curricular i realitat formativa, s'incrementa, a més, degut a la poca atenció que a nivell internacional s'ha dedicat, fins avui, a aquesta línia d'investigació.

Sembla que aquesta manca de rendibilitat aconseguida amb la mesura, palesa l'existència d'una manca de criteris pedagògics-didàctics referits al seu procés educatiu i a les estructures cognitives que la desenvolupen o potencien. Intentar donar resposta a alguns interrogants com, per exemple, *Què hi ha darrera d'aquesta dificultat?* o, *Quines són algunes de les causes d'aquesta incongruència?*, obre immediatament d'altres dubtes que deriven vers camps científics molts diversos, entre els quals, els factors metodològics i conceptuals hi tenen un important pes específic.

Investigar en el camp de la Mesura o de l'Estimació, és entrar en línies de plena actualitat que alhora queden plenament avalades per l'interès de la comunitat científica; de manera que es situa entre la dicotomia delimitada per:

- a) *elevat interès i valoració general pel seu aprenentatge*
- b) *poca incidència en la recerca realitzada*

a.- L'interès per aquest marc de recerca queda, bàsicament, avalat per dos factors claus, ja esmentats i que cal tenir en consideració:

Els dissenys curriculars de tots els països demostren la importància de la mesura fent-la aparèixer de manera cíclica, en tota la formació obligatòria. En cap país, la mesura resta descuidada com a objectiu d'aprenentatge. També en els estudis de prospectiva futura sobre la direccionalitat de la formació matemàtica (ICMI, Cockcroft, National Council of Teachers of Mathematics, National Science Board, ...) es fa patent l'aposta per la capacitació en el domini estimatiu, sigui purament numèric o espacial, quedant clara, per tant, aquesta direcció estimativa en el món magnitudinal.

L'interès de la planificació educativa, s'avalua, també, per la mateixa realitat de la docència, on a l'analitzar les preocupacions del professorat de primària i secundària, respecte l'aprenentatge matemàtic de l'alumnat, el domini de la mesura resulta ser, sempre, una de les problemàtiques més presents i generalitzades.

b.- L'estudi i recerca sobre la mesura i, encara més, sobre l'estimació mètrica, són camps relativament poc analitzats com es constata a través dels estudis que apareixen en les revistes especialitzades⁴ on, la majoria, centra el seu enfoc en propostes curriculars més que no pas en l'aprofundiment teòric del tema. La recerca es situa, conseqüentment, en un àmbit poc treballat i amb un marc teòric poc definit i concretat, situació que no s'adiu amb el grau de preocupació existent pel seu aprenentatge.

³ Callís, J. (1991) - La interiorització de les mesures de longitud i superfície dels 6 als 14 anys. Barcelona. UAB. Document intern.

⁴ Callís, J. (1993) - L'aprenentatge de la mesura en els països occidentals. Barcelona. UAB. Document intern.

El context internacional

Les recerques i marcs teòrics centrats en el camp de l'estimació de la mesura són poc abundants i els existents sobre estimació, es centren, prioritàriament, en l'estimació numèrica del càlcul mental. En contraposició, existeix molta unanimitat en la consideració de la seva importància per a la formació matemàtica i així podem constatar que es recomana la seva formació com a objectiu fonamental de capacitació matemàtica. La base documental que determina bona part de les direccions curriculars actuals es fonamenten molt, en les conclusions sorgides de l'informe Cockcroft i de l'ICME-86, les quals són punt de referència sobre l'aprenentatge matemàtic i, per tant, de la mesura.

- **Informe Cockcroft (1982).** La publicació, al Regne Unit, de l'Informe de la Comissió d'Investigació sobre l'Ensenyament de les Matemàtiques, planteja les necessitats socials i individuals per fer front a la vida professional i quotidiana, alhora que presenta les deficiències detectades a nivell general i que de mantenir-se no permetrien assumir amb èxit les demandes socials del futur. Es destaca la diferència de la matemàtica teòrica que es fa a l'escola i la matemàtica pragmàtica que necessita el món laboral.

L'Informe Cockcroft distingeix tres elements claus en l'ensenyament de la matemàtica: *fets i destreses*, per un costat; *estratègies conceptuals* per l'altre i *estratègies generals i apreciació*, com a tercer bloc. Entre les necessitats més destacables es planteja que tot adult necessita dominar de manera molt clara i efectiva, tot allò relacionat amb el món de les magnituds (pesar, mesurar longituds, superfícies i volums, saber entendre i comprendre taules i gràfics, saber efectuar càlculs a partir de taules i, igualment, tenir capacitat per saber realitzar estimacions i aproximacions encara que el número segueix sent la clau de volta del domini matemàtic: *“tenir el sentit del número que permeti fer estimacions i aproximacions acceptables i que permetin portar a terme càlculs mentals senzills”*.

En referència a la mesura i l'estimació, l'informe explicita:

- *“Encara que l'estimació és important, comptar i mesurar encara ho són més. Gran part de les matemàtiques que es fan servir en el treball hi tenen a veure, d'una o altra manera, amb les mesures; significativament, això, que tot està relacionat directament amb l'ús d'instruments de mesura. Les mesures es concreten de maneres molt diverses, per exemple, en termes de número de partides o quantitat de diners, de longitud, pes o volum, de proporcions, percentatges o raons. S'utilitzen les unitats mètriques, a més de les que són pròpies i específiques d'una determinada professió o indústria”*.
- *“En el terme mesura hi ha dos aspectes diferencials, el primer, tracta de determinar una mesura ja existent, com la longitud, pes o número d'unitats; en l'altre, és necessari crear la mesura que un desitja. En qualsevol cas, cal ser conscient del marge de precisió que necessita la mesura que s'utilitza, sabent elegir, en cada situació, l'instrument de mesura més adequat”*.
- *“Augmentar l'experiència a través de càlculs o mesures, ajuda a un millor desenvolupament de l'estimació i aproximació i a tenir consciència de la raonabilitat del resultat”*.
- *“És possible resumir una gran part de les necessitats en el treball com a “sentit de la mesura”. Això implica molt més que una simple habilitat per calcular, estimar o utilitzar instruments de mesura. Implica un coneixement de la naturalesa i utilitat de la mesura, dels diferents mètodes de mesurament i de les situacions en que cal emprar cadascun d'ells, també, de capacitat per saber interpretar el significat de mesures expressades de maneres diferents”*.

- **COPIRELEM: Commission Permanet des IREM⁵** (1982). La consideració respecte a la formació necessària que s'ha de donar al professorat d'Ensenyament Primari, destaca com a elements prioritaris:
 - *les fases d'iniciació de l'aprenentatge s'ha de dirigir en la necessitat de treballar la magnitud sense recórrer a la seva mesura.*
 - *necessitat de practicar l'estimació i aproximació amb diferents nivells de precisió*
 - *prendre consciència de la raonabilitat i probabilitat dels resultats*
 - *saber fer aproximacions simplificadores per tal de saber determinar l'ordre magnitudinal que cal utilitzar*

- **National Science Board** (EEUU, 1983). Analitza i presenta les necessitats formatives en el camp matemàtic tant per l'educació primària com per la secundària. Respecte a la primera planteja catorze continguts bàsics. L'èmfoc té una forta connotació numèrica: "*cal desenvolupar el sentit numèric, incloent l'ús efectiu i intel·ligent dels números en aplicacions o en altres contextos matemàtics*" i en referència a la mesura planteja dirigir la formació vers :
 - *Potenciar el desenvolupament de destreses d'estimació i aproximació.*
 - *Desenvolupar la comprensió geomètrica intuïtiva i la capacitat per utilitzar les fórmules per mesurar figures bi i tri dimensionals.*

El seu objectiu és el de modificar la tendència educativa imperant per adequar-la a les noves necessitats: "*els resultats del SIMS, que tenen ressò en d'altres informes nacionals és que a l'alumnat no se li ofereix més que una direccionalitat molt bàsica de la matemàtica que inclou, sobre tot, aritmètica i mesura, orientada a fins utilitaris i que, fins i tot, encara que els planificadors del currículum plantegin d'altres enfoc, no sempre es compleixen a l'aula*".

- **NCTM: National Council of Teachers of Mathematics** (Recommendations for School Mathematics of the 1980s). Es remarca la necessitat de treballar sobre deu punts prioritaris per tal de millorar la capacitat matemàtica de la societat.
 - 1.- *Resoldre problemes*
 - 2.- *Aplicar les matemàtiques a les situacions quotidianes*
 - 3.- *Copsar el grau de raonabilitat dels resultats*
 - 4.- *Estimar i aproximar*
 - 5.- *Calcular mitjançant tècniques apropiades*
 - 6.- *Geometria*
 - 7.- *Mesura*
 - 8.- *Llegir, interpretar i construir taules, mapes i gràfics.*
 - 9.- *Emprar les matemàtiques per a saber predir*
 - 10.- *Tenir coneixements generals de computació*

- **ICMI** (1986). La International Comission on Mathematical Instruction reuní l'aportació de vint països per tal de detectar les perspectives que haurien de tenir les matemàtiques pels 90 per tal d'adequar-les a les noves demandes que exigiria la formació del s. XXI. Tot i que a grans trets es detectà que l'estructuració com a ciència i procediment d'ensenyament seria semblant a l'existent en els 80, la valoració que s'efectuà respecte a la importància que hauria de tenir el tractament de diferents camps que la constitueixen, situà la mesura com una de les prioritats formatives essencials juntament amb l'aritmètica (Aritmètica, 92%; Mesura, 91%; Àlgebra, 83%; Estadística 69% i Geometria, 64%). L'anàlisi centrat en la mesura, atenent a quatre continguts cognitius (*càlcul, comprensió, aplicació i anàlisi*), i aplicats sobre quatre objectius procedimentals (*domini d'unitats, capacitat d'estimació, nivell d'aproximació, determinació d'àrees i volums*), sobre els quals se'ls fa una valoració qualitativa que oscil·la de molt important (**M**); important (**I**); i,

⁵ **A.P.M.E.P.** (1982): Grandeur. Mesure. Collection MOTS. (Volum VI). Paris

poc important (**PI**), els resultats, recollits en la taula adjunta, denoten, la importància de la concepció tradicional de la mesura com a domini d'unitats sota l'enfoc calculístic d'àrees i volums, encara que també prenen importància factors, fins llavors tinguts en poca consideració com l'estimació i l'aproximació. També els enfocs de domini mecànic primen sobre els d'aplicació i molt més encara, sobre els creatius i crítics (*anàlisis*).

	Càlcul	Comprensió	Aplicació	Anàlisi
Domini d'unitats de mesura	M	M	M	PI
Capacitat d'Estimació	I	I	I	PI
Nivell d'Aproximació	I	I	I	PI
Determinació àrees, volums..	M	M	I	I

Taula 1 : *Continguts cognitius del tractament tradicional de la mesura*

La valoració global de totes les anàlisis fetes amb l'objectiu de definir les línies d'educació matemàtica per l'última dècada del s. XX per tal de ser l'enfoc de la renovació matemàtica pel s. XXI, posa en evidència la importància en la formació de la mesura i que l'estimació, tant en càlcul com en mesura, apareix com a un factor comú en totes elles i considerada, per tant, com un contingut prioritari per a la capacitat matemàtica de qualsevol persona.

Sovint, la matemàtica en la seva basant de càlcul i de mesura, ha tingut una direccionalitat fonamentada en l'adquisició i domini de procediments de mecàniques algorísmiques sense que això impliqui un domini significatiu: *"a l'emfatitzar excessivament els aspectes mecànics i formals de l'aritmètica, proporcionen una visió deformada de la mateixa i reduïm el treball amb números, al domini d'una col·lecció de rutines amb el que falsegem la vertadera utilitat de l'aprenentatge matemàtic"*⁶. La inclusió i potenciació de l'estimació com a capacitat integrada en el que cal considerar com a domini real de la mesura, pot ajudar a aquest canvi de d'enfoc de l'aprenentatge, tot aportant un gir radical que permeti integrar més la mesura dins una matemàtica més viva i significativa.

El nostre context curricular

El Disseny Curricular de l'Educació Primària no fa cap cita ni referència especial respecte a la importància educativa de la mesura. Cal entendre-la implícita i integrada dins les orientacions generals quan al referir-se a l'objectiu últim indica *"l'adquisició d'aprenentatges matemàtics contribueix al desenvolupament de les capacitats que permeten al nen/a augmentar la comprensió del món que l'envolta i aprendre a desxifrar els codis i missatges que li ofereix el món social i cultural"*. És evident que la comprensió del món, necessita de la mesura i per tant, el domini d'aquesta, és fa imprescindible. Tot i això la funció de l'escola, encara que ha de tenir en compte que *"cal aprofitar els coneixements i l'experiència fora de l'escola o potenciar-ne el contacte conscient..."* s'enfoca, prioritàriament, com a acció complementària de la pròpia formació que hom ja té adquirida o es suposa que ha de tenir integrada. Així doncs, la prioritat formativa s'enfoca sobre aspectes més formals i acadèmics *"finalitats pròpies de l'escola que difícilment es poden cobrir des d'altres àmbits reglats, alternatius o socialment considerats..."*, situació que, lògicament, al seguir reforçant-se l'enfoc acadèmic i aritmètic de la mesura, entra en contradicció amb les línies generals del currículum.

A nivell metodològic, es remarca la necessitat d'un aprenentatge significatiu *"perquè sigui significatiu ha de complir dues condicions. En primer lloc, el contingut ha de ser*

⁶ Segovia, I.; Castro, Encarna; Castro, Enrique; Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Matemàtica: Cultura y Aprendizaje, nº9, (p.10). Madrid.

potencialment significatiu, tant des del punt de vista de la seva estructura interna (punt de vista epistemològic), com des del punt de vista de la seva possible assimilació (segons l'estructura cognoscitiva). En segon lloc, l'alumne/a ha de tenir una actitud favorable, ha d'estar motivat per relacionar el que aprèn amb el que sap." "La significativitat de l'aprenentatge està molt directament vinculada a la seva funcionalitat. Un aprenentatge és funcional en la mesura que l'alumne/a el pugui utilitzar quan una situació li ho exigeix i que pugui relacionar-lo amb un ventall més ampli de noves situacions i de nous aprenentatges". Només una única cita fa referència explícita a la mesura: "no totes les magnituds presenten les mateixes dificultats, així: el pes planteja dificultats segons la relació pes-volum; el temps, en planteja per ser immaterial i la seva percepció molt subjectiva; la capacitat, per la falta de conservació de la quantitat en canviar-ne el contenidor, fins a determinada edat. La longitud és la més comprensible de les magnituds mencionades. Això fa que si bé el procediment de treball ha de ser el mateix i les dificultats numèriques són molt comparables, cada mesura hagi de tenir un tractament adequat a les seves característiques. Cal iniciar, en aquesta etapa, activitats manipulatives, composicions i descomposicions que preparin, de forma experimental, la noció de mesura, de superfície i volum", hi ho fa amb evidents contradiccions.

L'interès per la mesura resta en un enfoc inferior a la necessitat manifestada per part dels estudis internacionals sobre capacitació matemàtica; capacitació que en el nostre currículum i com a capacitats últimes que cal assolir indica: "emprar els conceptes i les relacions matemàtiques elementals i dominar les operacions bàsiques per tal de representar i interpretar l'espai, les situacions i les experiències, mitjançant llenguatge matemàtic"; on, una vegada més, la mesura queda implícita, solament, de manera indirecta com també passa en els objectius generals que en fan referència⁷. Els continguts procedimentals⁸ i conceptuals⁹, seguin aquesta mateixa perspectiva, resulten poc innovadors de manera que, fàcilment, poden ser interpretats com a enfoc bàsicament aritmètics i calculístic per sobre de qualsevol altra direccionalitat. També en els objectius terminals¹⁰ es detecta, de nou, aquesta mateixa tendència. Un 23% d'ells fa referència a la mesura (40% al número, 13% geometria –alguns de mesura corresponen, també a aquest bloc-, 12% estadística i probabilitat; 12 % comuns) i d'entre ells, el 58% tenen connotacions algorísmiques i de mecàniques operatòries (19, 20, 22, 25, 26, 28) davant un 25% referits al domini conceptual de la mesura (18, 23, 24) i un 8,5% al domini tecnològic i a l'estimació.

⁷ 3.- "Utilitzar els llenguatges verbals, visual i simbòlics per descriure, representar i comunicar situacions i experiències reals o simulades, i també per interpretar-les".

5.- "Predir aproximadament el resultat, comprovar l'existència de la diversitat de camins de resolució, saber seleccionar-ne un i valorar el resultat respecte al càlcul, de la resolució de problemes i de la mesura directa".

⁸ 4.- Utilització de llenguatge matemàtic

▪ 4.1: Coneixement i ús de codis i vocabulari matemàtic (xifres, unitats de mesura, signes, etc.)

5.- Utilització de tècniques i instruments

▪ 5.2.- Ús i selecció d'instruments de càlcul, mesura, dibuix i construcció

⁹ 4.- Magnitud-mesura: Longitud, massa, capacitat, superfície, temps, valor, preu i grau de circumferència.

¹⁰ 18: Reconèixer magnituds mesurables i assolir la noció de mesura a través de la comparació de quantitats d'una mateixa magnitud.

19: Seleccionar la unitat més adient per realitzar una determinada mesura i expressar-la utilitzant diferents formes: a) en diverses unitats (complexos i nombres naturals); b) en una sola unitat (fracció o decimal)

20. Valorar els resultats obtinguts per processos de càlcul, mesura, construcció, etc., i contrastar-los amb la situació plantejada.

21. Estimar l'error comès en realitzar la mesura.

22.- Identificar i relacionar les unitats del sistema mètric decimal de longitud, capacitat, massa i superfície.

23. Adonar-se de la conservació de la quantitat de magnitud en variar la configuració.

24.- Comparar i ordenar quantitats diverses d'una mateixa magnitud.

25. Aplicar les equivalències entre les diverses unitats d'una magnitud per expressar una mesura en diverses unitats.

26.- Identificar i relacionar les unitats de temps d'ús habitual.

27.- Usar instruments de mesura adients a cada situació, seleccionant per a cada cas el més precís.

28.- Obtenir figures equivalents, en perímetre o en àrea a figures donades.

29.- Aplicar nocions i mètodes de mesura, de longitud i àrea a la resolució de problemes reals.

Importància del domini de la mesura

L'interès demostrat pels currículums i les orientacions sobre la necessitat de dominar i ampliar el coneixement de la mesura, feta pels diversos grups de recerca que han investigat la capacitat matemàtica de la societat, fonamenten les seves justificacions en base a paràmetres tan diversos com el fet de ser imprescindible per conèixer el propi espai en que hom viu o per ser fonamental pel desenvolupament econòmic.

La mesura porta a la quantificació de les magnituds que ens envolten. La realitat, el nostre entorn, l'espai i les accions i fenòmens que hi tenen lloc, tot és, quantitativament o qualitativa, mesurable. Dominar aquest control, saber-lo interpretar de manera precisa o aproximada, ajuda a saber conèixer i dominar millor l'entorn i la vida. Permet en últim terme, el control, la interpretació i la crítica dels fets i del saber.

Cada dia més, les transformacions socials impliquen la necessitat de comunicació d'aquestes pròpies realitats i, així, dia a dia, sorgeixen noves formes comunicatives per interpretar i definir aquesta realitat canviant que, evidentment, es fa a través de la mesura de les magnituds implicades. L'estadística i les representacions gràfiques, per exemple, són avui, en la nostra societat, formes de mesurar i comunicar, àmpliament esteses. De la mateixa manera que cal el domini de la llengua per tal de poder establir una comunicació amb l'entorn social i que l'analfabetisme incideix en un ~~af~~ament i en una reducció important de les possibilitats personals, també l'*amesuramentisme*, resulta una forma més d'analfabetisme social que redueix les possibilitats de la persona per entendre el seu entorn natural, social i professional. Fomentar el domini de les magnituds és potenciar el desenvolupament personal i la comprensió.

De manera resumida i a grans trets, les característiques més importants que desenvolupa l'aprenentatge de la mesura, són les següents:

1.- Integrar-se com a ciutadà en el context i entorn en que hom viu

El ple domini de la mesura possibilita entendre multitud de situacions i realitats que cal viure cada dia i que d'altre manera en sortiran perjudicades.

2.- Integrar-se a les arrels culturals de la seva pròpia cultura i història.

Cada grup humà és portador d'uns trets que el diferencien de la resta. Els sistemes i unitats de mesura que ha utilitzat per comunicar les seves realitats, formen part i són unes de les arrels històriques que el personalitza i diferencia.

3.- Permet dominar i comprendre multitud de camps matemàtics

- És la base de l'adquisició del número i de la quantitat. La quantificació no és més que una magnitud dels agrupaments.
- Resulta imprescindible pel domini del càlcul, per l'adquisició del concepte dels nombres reals, decimals, tants per cent, proporcionalitat, ...
- És fonamental per tota la geometria euclidiana i bona part de la projectiva.

4.- Capacita en dominis d'estratègies mentals.

La mesura és el camp matemàtic que més pot ajudar a desenvolupar les estratègies d'aproximació, tempteig i estimació.

5.- Potencia la integració en el món de la tecnologia i del treball.

Qualsevol branca laboral necessita imprescindiblement d'una o altre forma de mesura i tots els camps tecnològics en són dependents per seguir evolucionant.

2. EPISTEMOLOGIA DE LA MESURA DE LA MAGNITUD A LA MESURA

Magnitud, Mesura i Unitat són termes integrats en la conceptualització de la mesura i de la qual en resulten ser aspectes essencials, de manera que sense aquesta triple incidència, la mesura no tindria significació.

Magnitud i mesura són termes que si bé col·loquialment són utilitzats com a sinònims de *mesuratge*, en termes d'especialització científica són conceptes diferenciables, però fins i tot dins aquest propi marc científic, també la significació semàntica és diferent si es pren des de la perspectiva metrològica o des de la matemàtica. Tot i aquesta diferenciació existent entre elles, la relació és tan forta que una fagocita a l'altra i així, avui es parla de *la teoria de la mesura* i no de la teoria de la magnitud, terme ja desaparegut de la matemàtica actual. Les magnituds queden sintetitzades, matemàticament per la teoria de la mesura i, en cap cas, integra els fenòmens de mesurament i la seva quantificació, els quals han passat a la física a través de la metrologia. En aquesta dificultat de dialèctica conceptual, la unitat es manté com a element transcendental sense que acusi, tan intensament, les contradiccions epistemològiques que tenen Mesura i Magnitud.

1.- MAGNITUD

1.a.- Conceptualització i epistemologia

La majoria de les definicions "enciclopèdiques"³⁰, recullen una doble accepció semàntica. Per una banda es presenta amb una significació de tipus col·loquial, en la que queda definida com a sinònim de *grandesa* o de *grandària*, i la segona, pren un significat mètric sovint acompanyada amb una aproximació classificatòria.

Des d'una perspectiva metrològica especialitzada, com és la del Centro Español de Metrología, en el seu Recull de Vocabulari Metrològic³¹ (1994), defineix en relació a la magnitud i a la seva significació mètrica, els següents termes:

1.1.- **Magnitud** - *Atribut d'un fenomen, cos o substància que és susceptible de ser diferenciat qualitativament i determinat quantitativament.*

1.2.- **Sistema de magnituds:** *Conjunt de magnituds, en sentit general, entre les que existeixen relacions definides.*

1.3.- **Magnitud bàsica:** *Qualsevol de les magnituds que, en un sistema s'accepta per conveni, com funcionalment independent les unes de les altres.*

1.4.- **Magnitud derivada:** *Magnitud definida en un sistema de magnituds com una funció en les magnituds bàsiques d'aquest sistema.*

³⁰ La Gran Enciclopèdia Catalana (GEC), defineix, respectivament, la mètrica i la matemàtica:

□ "qualsevol propietat dels cossos, capaç d'ésser mesurada: longitud, àrea, volum, velocitat, temperatura, força, resistència elèctrica, etc. Hom classifica les magnituds en escalars i vectorials, segons que llurs valors puguin ésser expressats utilitzant només un nombre o bé utilitzant un vector. Una magnitud és anomenada fonamental quan hom la defineix sense recórrer a altres magnituds, mentre que en el cas contrari és anomenada derivada. Aquestes magnituds derivades poden ésser dimensionals o adimensionals".

□ "Ordre de magnitud (mat). Valor d'un resultat numèric aproximat a una potència de 10".

³¹ Vocabulari Internacional ISO. Aquestes accepcions es fonamenten en les definicions científiques de diferents institucions internacionals (ISO) que tenen cura de la unificació de criteris metrològics.

1.5.- **Dimensió d'una magnitud:** Expressió que representa una magnitud d'un sistema de magnituds com el producte de factors que representen la magnitud bàsica d'aquest sistema (força LMT^2 ; densitat massa i concentració massa ML^{-3}).

1.18.- **Valor d'una magnitud:** Expressió qualitativa d'una magnitud particular generalment en forma d'una unitat de mesura multiplicada per un número.

Si el concepte magnitud s'analitza des de l'àmbit matemàtic³², pot trobar-se:

1.- En Matemàtica clàssica, tot allò que es pot mesurar i expressar per mitjà d'una quantitat: la longitud, el volum, l'amplitud d'un angle, un vector ...

2.- En la matemàtica actual és un conjunt en el que s'ha definit una relació d'igualtat, formant així el conjunt quocient sobre el que hi està definida una operació additiva (semigrup additiu commutatiu amb element neutre) i una relació d'ordre compatible amb l'operació +, és a dir que si a, b, c, d ; són elements qualsevol, del semigrup

$$\begin{array}{l} a R b \\ c R d \end{array} \Rightarrow (a + c) R (b + d)$$

conjunt quocient B / R , és:

$(B / R, +)$ semigrup abelià amb e neutre.

$(B / R, +, \leq)$ Ordre total

$(B / R, +, \leq)$ és una magnitud.

1.b.- Classificació de la magnitud

A part que el significat i sentit del terme magnitud té connotacions diferents segons el nivell semàntic utilitzat, també el seu sentit es veu modificat, a més, per la qualificació de l'adjectiu que se li annexa. Així es parla, entre d'altres, de magnitud absoluta, relativa, orientativa, discreta, contínua, vectorial, lineal i no lineal, extensiva i intensiva, arquimediana o no arquimediana, quantitativa i qualitativa. Aquesta varietat lèxica és una clara evidència de la seva diversitat classificatòria.

La magnitud és una propietat específica d'algun ens o objecte i, evidentment això comporta com a primer pas a tenir en compte, la necessitat d'identificar i aïllar aquesta propietat a través d'un *procés de centració i decantació magnitudinal* respecte les restants propietats que posseeix l'objecte. Cadascuna de les magnituds pot ser classificada, ordenada i quantificada, i, segons l'anàlisi o el criteri que s'utilitzi es podran diferenciar tipologies diverses de magnitud. Entre els criteris més emprats cal destacar:

- a.- el raonament justificatiu que s'utilitza per definir la magnitud
- b.- el grau de mesurabilitat
- c.- la tipologia de la unitat
- d.- la proporcionalitat i relació entre classes de magnitud.
- e.- l'estructura matemàtica implícita

a.- El raonament definitori

Estructurar un camp classificatori fonamentat en la definició de magnitud que s'ha utilitzat des d'una perspectiva històrica, resulta una tasca molt complexa per la gran varietat d'interpretacions; però si ens atensem al seu raonament conceptual, es poden diferenciar clarament dues tipologies amb les seves respectives subdivisions, tot i que

³² Diccionario Básico de Matemáticas (1980) - Mariano Díaz Velázquez. Anaya

en alguns casos, una mateixa definició pot integrar-se, alhora, en els dos apartats pel fet de tenir característiques d'ambdues. Els dos enfoc bàsics són:

a.1).- Concepció operativa. Fonamenten el seu raonament a través de l'operació interna que la genera i es fa de forma descriptiva. Es poden diferenciar els enfoc:

- *multiplicatiu.*
El nucli explicatiu d'aquest pensament fa intervindre el concepte multiplicatiu i el de divisió. Un exemple primerenc representatiu d'aquesta línia conceptual, es el d'Herò d'Alexandria (s.I i II d. C.): "*Magnitud és tot allò que es pot multiplicar i dividir sense límit*"³³. Aquesta concepció fonamentarà tota l'escola escolàstica.
- *additiu.*
La operació que la determina és l'addició i la subtracció. N'és un bon exemple, Euler (1707-1783): "*magnitud és tot allò al que es pot afegir i treure quelcom*"³⁴.
- *additiu-multiplicatiu.*
Integra les dues tendències, és a dir, integra processos additius i multiplicatius. Una mostra pot ser la definició de Pietro Paoli³⁵: "*S'anomena quantitat o magnitud tot allò que és susceptible d'augmentar o de minvar, tot allò de qui es pot senyalitzar o concebre el doble o la meitat, el triple o la tercera part, ...*".

a.2).- Concepció axiomàtica. Cerca la conceptualització a partir de fonamentacions sobre les propietats matemàtiques que s'hi estableixen i per tant ho fa a través de relacions molt més complexes que l'operació. Els inicis d'aquest corrent es poden identificar en Eudoxi d'Knido (408-355 a.J.C.) i en Euclides que estudia la magnitud en el Llibre V dels seus Elements, recollint la teoria d'Eudoxi. Euclides no dona una definició explícita ni de magnitud ni de "magnitud homogènia". La seva, és una definició per postulats que pressuposa les condicions axiomàtiques enunciades en el Llibre I (*additivitat i igualtat*) i del V (*igualació, relació i arquimedisme*). La represa d'aquesta direccionalitat euclidiana es troba plenament estesa en l'escola escolàstica fins arribar als nostres dies. Poden integrar-s'hi definicions com la d'Herman Grasmann (1809-1877): "*Magnitud és cada un dels ens d'una certa categoria, i de qui es pot dir de qualsevol dels dos que són iguals o desiguals*"³⁶, o la d' Otto Stolz (1842-1905) que la fonamenta sobre la relació d'igualtat o de desigualtat i amb l'única operació d'additivitat. L'enfoc axiomàtic és el porta a les formulacions actuals d'estructuració algebraica i a la concreció de la teoria de la mesura.

Una determinada magnitud resulta ser, des de la perspectiva axiomàtica, un conjunt **M** que compleix les relacions d'equivalència dins un conjunt **X** (espai mesurable) a l'establir-li una relació o criteri (\approx "tenir la mateixa magnitud"). **M** és per tant el conjunt quocient d' **X** ($X / \approx = M$), on les classes d'equivalència d'**M** són infinites. Cadascuna de les classes d'equivalència formen la *quantitat de magnitud*, i on cada una, té la propietat d'igualtat (\approx) definida en **X**, i que entre elles podem aplicar-hi relacions d'ordre ($\leq ; \geq$) definida en **M**.

³³ Erone - *La Metrica. Vol IV "Heronis definitionis cum varis collectionibus. Heronis quae feruntur Geometria"*. Citat per S. Maracchia

³⁴ Citat per S. Maracchia (1996) *Storia del concetto di misura*.

³⁵ Paolo, Pietro (1799) - *Elementi di Algebra*. Citat per M. Ferrari (1996) a *La Misura: Rappresentazione semiseria in un prologo e due quadri*.

³⁶ Citat per S. Maracchia. (1996) *Storia del concetto di misura*.

b. Grau de mesurabilitat

Tota magnitud té com a característiques implícites bàsiques, les propietats de tota relació d'equivalència (reflexiva, simètrica i transitiva) de les d'ordenació. Fruit d'això, existeix la possibilitat que les classes d'equivalència formades, puguin ser operades additivament entre elles, o bé, que no puguin fer-ho. Aquesta diferenciació operativa és possible, però, que no totes les magnituds són mesurables sota un mateix sentit axiomàtic. D'aquí en podem diferenciar clarament dos grans grups:

- **mesurables.** Si considerem com a propietats mesurables aquelles que queden modificades additivament a l'efectuar combinacions entre elles.
- **no mesurables.** Aquelles que no canvien al realitzar combinacions entre elles o no ho fan additivament.

En base a això, serien catalogades, conseqüentment com a mesurables magnituds com, per exemple, la longitud, superfície, massa, força, intensitat, preu o quantitat, on la unió de dues o més quantitats de magnitud d'una mateixa propietat, amplien aquesta (dues o més longituds, per exemple, en fan una de superior); però no ho serien la viscositat, la duresa, el pH, temperatura, l'estimació, odi, etc. ja que, per exemple, l'addició de líquids de diferents pH o diferent temperatura o viscositat, etc., no dóna un pH, temperatura, viscositat, etc. equivalent a la seva addició; com tampoc la unió de dos materials de la mateixa duresa, o l'augment d'alegria o odi són increments additius.

Una magnitud mesurable atenent-nos, exclusivament, a la seva additivitat on " M " és una determinada magnitud i " m " la seva mesura queda definida per:

$$\forall A \in \mathcal{M}, \forall B \in \mathcal{M}, \text{ essent } A \cap B = \emptyset \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

c.- Tipologia unitària

Les unitats utilitzades en la mesura tenen característiques diferents segons existeixi la possibilitat d'emprar unitats objectives que permeten fer un procés d'igualació entre la magnitud de l'objecte a mesurar i la quantitat d'unitats a utilitzar, com en la longitud, superfície, lluminositat o temperatura; o que aquestes siguin subjectives (alegria, tristesa, dolor, ...). Es diferencien per tant:

- **Magnitud qualitativa:** quan la unitat aplicada és referencial o comparativa dins la magnitud i pot ésser modificada fruit de cada moment o circumstància. En són exemple, les escales ordinals d'intensitat sísmica, la duresa, ...
- **Magnitud quantitativa:** quan existeix una unitat " u " que sempre té el mateix valor i per tant $\forall r \in R \text{ i } \forall a, u \in M \exists a = r \otimes u$

d.- Proporcionalitat i relació entre classes de magnitud

El criteri classificatori es centra en l'existència d'una unitat de mesura uniforme i en la possibilitat d'aplicació de proporcionalitat entre classes de magnitud, fet que possibilita el pas o conversió d'una escala quantitativa a una altra escala també quantitativa, diferent de la primera però pertanyent a la mateixa magnitud. S'hi poden diferenciar:

- **Xarxes relacionals**

Magnituds que no tenen factors objectius que permetin fer cap tipus de valoració quantitativa, generalitzable. La valoració es fa a través de l'ordenació dels elements com en el cas d'ordenacions genealògiques o bé de forma totalment subjectiva i depenent de cada subjecte que la mesura, com per exemple la felicitat, l'alegria,... La mesura solament és possible expressar-la a través d'estructures classificatòries o de diagrames d'ordenament sense l'existència de cap tipus d'unitat objectiva sinó, únicament, per marges d'opinió qualitativa. En són exemples els *diagrames i xarxes relacionals* (mapes conceptuals, xarxes sistèmiques, arbres genealògics,...).

- **Escales ordinals**

No existeix una unitat permanent i idèntica en tota l'escala i per tant no és possible de transformar els valors d'una escala de graduació a una altra. Són indicadors solament d'una ordenació, però no de la quantificació del valor que té exactament cada mesura. Són aplicables a relacions d'ordre total o parcial. En són bons exemples, les conegudes escala de duresa de Mohs; la de Beaufort d'intensitat dels vents, o la de Richter d'intensitat dels terratrèmols.

Siguin f i h dues funcions que donen valors reals als elements d'un domini "A". Direm que h és una transformació monòtona d' f si per cada dos elements x i z :

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad & f(x) < f(z) \quad \Rightarrow \quad h(x) < h(z) \\ & f(x) = f(z) \quad \Rightarrow \quad h(x) = h(z) \end{aligned}$$

Per tant, si f és un homomorfisme d'un sistema empíric en un sistema numèric i constitueix una escala ordinal, qualsevol transformació monòtona d' f , serà també, un monomorfisme del mateix sistema empíric en el mateix sistema numèric i per tant, serà igualment una escala ordinal. És precisament aquesta imprecisió (la duresa 1 del talc podria assignar-se el valor 0, o el 2, el 100, el 3, el 150, ...) que impedeix l'existència d'una formulació per passar d'una escala ordinal a una altra.

- **Escales proporcionals**

Existeix un valor, de la mateixa magnitud, que actua d'unitat, tot permetent la creació d'escapes proporcionals i l'existència de transposicions entre escales diferenciades que es mesuren amb la mateixa magnitud. La possibilitat de transformació de les escales proporcionals, permet alhora, diferenciar-ne dos tipus:

- **magnituds additives o extensives.** Es passa d'una escala a l'altra, per un índex de proporcionalitat exclusivament multiplicatiu. Sigui f una funció que assigna números reals als elements d' A . Una funció $h: A \rightarrow \mathbb{R}$, és una transformació similar d' f si, i solament si, existeix un número positiu k , que per cada objecte $x \in A$, compleix que $h(x) = k \cdot f(x)$. És a dir, $h(x)$ és sempre el producte d' $f(x)$ per un número positiu fix. Un homomorfisme f d'un sistema empíric en un sistema numèric constitueix una escala proporcional si qualsevol transformació similar d' f , és també un homomorfisme del mateix sistema empíric en el mateix sistema numèric.
- **magnituds intensives.** No manifesten l'additivitat i la seva estructuració configura les escales d'interval. Per poder passar d'una a l'altra, cal multiplicar per un valor i sumar-n'hi un altre (canvi de temperatura Celsius a Fahrenheit)

$$f(x) = r \cdot f(x) + s$$

d.- Estructura matemàtica

Segons l'estructuració matemàtica, i per tant centrat exclusivament en les magnituds quantitatives, aquestes poden diferenciar-se en:

- **Magnitud discreta:** Magnitud quantitativa en la qual no existeixen valors intermitjos entre intervals de mesura, com és el cas dels números enters. És a dir, una magnitud M existeix sempre que

$$\forall a, b \in M \text{ i } \forall n \in \mathbf{N} \text{ que verifica} \\ a = b + b + b + \dots + b \text{ o sigui que } n \otimes b = a$$

- **Magnitud escalar o continua:** La quantitat que es *arquimediana*³⁷ respecte a l'ordenació total. Té, per tant, infinits termes entre dos intervals $[n, n + 1]$; de manera que sempre pot garantir-se la divisió d'una quantitat de magnitud en un nombre de parts iguals.

$$\forall a, b \in M \text{ i } \forall r \in \mathbf{N} \text{ es verifica que } r \otimes b = a$$

o també, que la mesura sempre pot aproximar-se indefinitivament.

- **Magnitud absoluta:** La que el semigrup commutatiu i ordenat que caracteritza i defineix a una magnitud, no té element simètric (per tant no és grup), com per exemple les longituds, superfície, volum, capacitat, ...
- **Magnitud relativa:** Quan posseeix element simètric i per tant en resulta un grup abelià ordenat com per exemple en els vectors.

De les classificacions anteriors es desprèn un clar paral·lelisme amb l'estructuració que es fa sobre les idees i conceptes científics (Stegmüller, 1979; Mosterín, 1987), de manera que aquesta, presenta una clara dependència amb el nivell o estadi magnitudinal de què es tracti. A nivell general, els conceptes científics es plantegen en tres grans grups:

- a) **Classificatoris**, que corresponen a les propietats qualitatives.
- b) **Comparatius**, a propietats topològiques
- c) **Mètrics o magnitudinals**, a propietats quantificables numèricament.
 - c.1.- **escalars:** s'assignen números reals a objectes o successos (massa, temps..)
 - c.2.- **vectorials:** s'assignen vectors a objectes o successos (força, velocitat ..)

2.- MESURA

a.- Conceptualització i epistemologia

La mesura, igual que passa amb la magnitud, té unes connotacions diferencials entre la interpretació col·loquial i la científica, si bé, sovint, la col·loquial porta implícita la metrological i també la matemàtica amb una forta incidència pragmàtica³⁸. En la terminologia mètrica el vocabulari internacional d'ISO, recull:

³⁷ Ordenació arquimediana és aquella que s'estableix en un conjunt quan definim una relació d'ordre total i per a qualsevol parell d'elements d'un conjunt a, b , on $a > 0$ existeix un número k , tal que: $k \cdot a < b$.

³⁸ La Gran Enciclopèdia Catalana, la defineix com: "1. Acció i efecte de mesurar. 2. Apreciació del valor d'una cosa. Proporció. Mitjà proporcionat a un fi. 3. Mat /Fís/Mètrica: Valor numèric d'un mesurament consistent en comparar una magnitud amb una altra de la mateixa espècie elegida com a unitat, amb la finalitat d'establir relacions o la deducció d'unes conclusions"

2.1.- **Mesurament:** Conjunt d'operacions que tenen per finalitat determinar el valor d'una magnitud.

2.2.- **Metrologia.** Ciència de la mesura.

2.3.- **Principi de mesura:** Base científica d'una mesura.

2.4.- **Mètode de mesura:** Successió lògica de les operacions descrites de forma genèrica, utilitzades en l'execució de les mesures.

2.5.- **Procediment de mesura:** Conjunt d'operacions, descrites específicament i utilitzades en l'execució de mesuratsges particulars segons un mètode donat.

2.6.- **Mesurand.** Magnitud particular sotmesa a mesurament.

2.7.- **Magnitud d'influència.** Magnitud que no és el mesurant però que té un efecte sobre el resultat de la mesura.

3.6.- **Exactitud de mesura:** Grau de concordança entre el resultat d'una mesura i el valor vertader del mesurand.

9.- **Incertesa de mesura:** Paràmetre associat al resultat d'un mesuratge que caracteritza la dispersió dels valors que podrien raonadament atribuir-se al mesurant

4.3.- **Transductor de mesura:** Dispositiu que fa correspondre a una magnitud d'entrada una altra de sortida segons una llei determinada.

També en el camp específicament matemàtic³⁹ es troba una doble significació lligada a l'expressió d'una quantitat o dimensió en relació a una unitat prèviament determinada, i per l'altre, a quelcom que serveix per mesurar, fent referència doncs, al valor numèric de la mesura i als instruments de mesuratge.

b.- La Mesura i els seus factors implícits

Podem constatar que a nivell col·loquial i científic, la mesura i el mesuratge han pres una clara significació centrada en l'atribució de valors numèrics a les propietats magnitudinals, per tal de poder-les categoritzar, classificar i representar. "La mesura és una de les nocions que la ciència moderna ha pres del sentit comú"⁴⁰, per tal de ser un "procés per mitjà del qual assignem un número a una propietat física d'algun objecte o conjunt d'objectes amb propòsits de comparació"⁴¹ si bé "la mesura és un objecte epistemològic particularment interessant, des del moment en que es troben i conflueixen en ella, l'element teòric (la matemàtica), l'element empíric (l'observació) i l'element tècnic (l'instrument)"⁴².

En la mesura, integrats i formant part de la seva pròpia epistemologia sovint s'hi diferencien dos conceptes: *mesura* i *metrització* (D'Hombres, Fèlix, Stegmüller, Wartosky, Mosterín). La mesura s'entén com l'acte de donar el valor quantitatiu en el procés de mesuratge i la metrització com la comprensió significativa que té aquest valor mètric. És evident, doncs, que sota aquesta perspectiva conceptual cal diferenciar-hi un procés de *numeralització* en la mesura per tal de poder determinar-ne el valor, i de *comparació i ordenació* en la metrització per tal de poder entendre el significat del valor numèric respecte al propi context i en relació a les altres mesures.

Abans de poder numeralitzar la quantitat de magnitud i poder entendre la significativitat d'aquest valor, és necessari estructurar i organitzar els processos cognitius necessaris per a poder saber quina unitat aplicar, si fer-ho per addicionament progressiu de la unitat

³⁹ Diccionario Básico de Matemáticas (1980) - Mariano Díaz Velázquez. Anaya

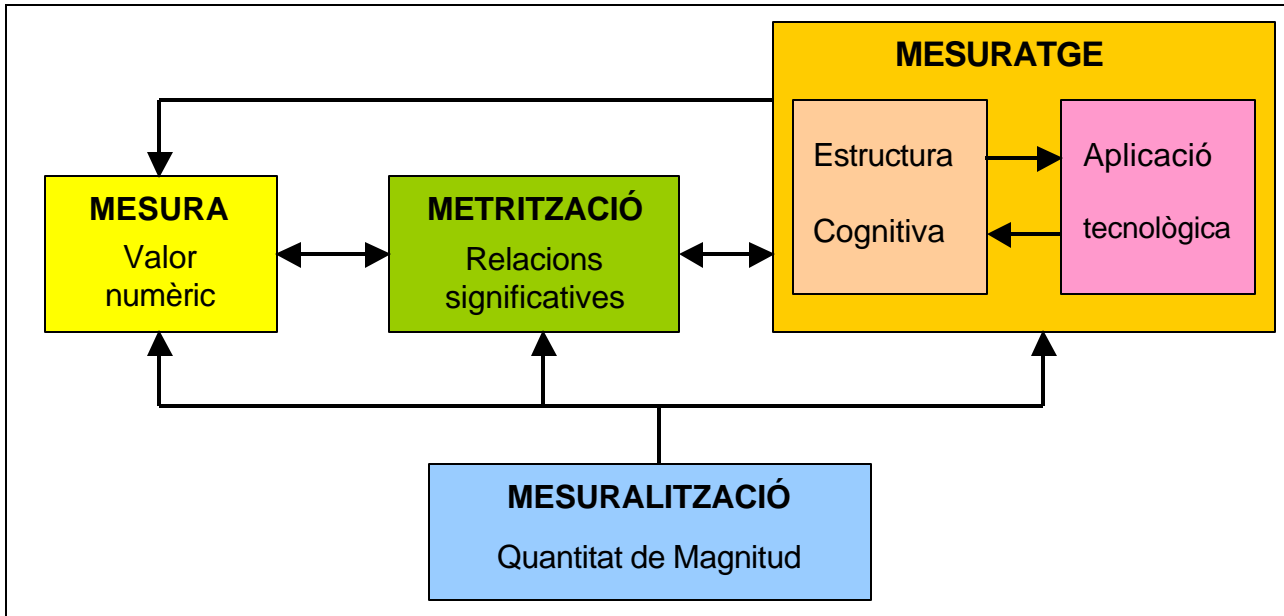
⁴⁰ Campbell, Norman R. (1956) - *Measurement. The World of Mathematics*. New York. Simon & Schuster.

⁴¹ NTCM (1971). *Medida*. Trillas. México (p.23)

⁴² Boyer, A. "De la juste mesure". En *La mesure. Instruments et Philosophie*.

en tot l'objecte o si fer-ho en una part estructural i proporcional de dit objecte i si cal efectuar una comparació directa o indirecta. Tot això, necessita però, posteriorment, de l'acte d'aplicació real del plantejament mental realitzat; acció que podrà efectuar-se amb suport físic instrumental o no i que tant en el primer cas com en el segon, necessitarà d'uns dominis imprescindibles que regulen l'aplicació tecnològica de l'instrument de mesura que s'utilitzi o de les estratègies mentals de l'estimació. És la globalitat de tot aquest conjunt que forma l'acte de *mesuratge*.

D'aquesta manera i tal com es reflecteix en l'esquema adjunt, cal entendre que no són la *mesura* i la *metrització* els únics factors intervinents, sinó que també cal afegir-hi el *mesuratge*, conjunt que globalment definim com a *mesuralització*.



Esquema 3 : Procés de mesuralització

a.- Mesura

Consisteix en donar o assignar un número real al procés de mesuratge, fet que implica la necessitat de poder disposar d'un concepte mètric de manera que la mesura és, conseqüentment, un *homomorfisme* entre el sistema empíric d'una magnitud $\langle L, S, V, \dots \rangle$ i el sistema numèric en els nombres reals; és a dir,

si $f: A \rightarrow R^+ \Rightarrow \forall x, z \in A$

es compleix:

- 1.- si $x L z \Rightarrow f(x) = f(z)$
- 2.- si $x P z \Rightarrow f(x) < f(z)$
- 3.- $f(x A z) \Rightarrow f(x) + f(z)$

Campbell (1921) fonamentant-se en les propietats lògiques que intervenen en el comptatge (transitivitat, addició un a un i equivalència), les extrapola a la mesura, exemplificant-t'ho en la longitud, per aconseguir gràcies a aquestes propietats, de trobar una xifra i únicament una, que representi adequadament cada mesura. Són, per tant, les lleis numèriques, les que permeten i possibiliten la mesura. En realitat les regles conceptuals de la mesura no són més que axiomes euclidians i on la mesurabilitat quedaria definida segons Campbell, per:

1.- Els objectes que respecte a una propietat siguin equivalents a un tercer objecte, són iguals entre ells. Dos trossos iguals a un tercer són iguals entre ells.

$$\forall a, b, c \in M \text{ si } a=c \text{ i } b=c \Rightarrow a=b$$

2.- Per l'addició successiva d'objectes es pot construir una sèrie normal. Combinació d'objectes que posseeixen la propietat (magnitud) fa augmentar la propietat (propietat fonamental de ser número)

$$\forall x, y \in M \Rightarrow \text{existeix un } z=x \otimes y \text{ on } z \in M$$

3.- Iguals, sumats a iguals, produeixen sumes iguals. Segments iguals sumats a segments iguals, produeixen segments iguals

$$\forall \langle a=b \neq c \rangle \in M \Rightarrow a \oplus c = b \oplus c$$

4.- Dues longituds són iguals si posades d'una determinada manera, els extrems d'una queden igualats amb l'extrem de l'altra.

5.- L'addicionalitat; respecte a la longitud, es produeix quan els segments o longituds són posades des de tal manera que l'extrem d'una és inici de l'altra, i entre les dues formen un sol segment. Es pot fer una igualació magnitudinal, afegint altres objectes al primer⁴³.

En referència al nivell de precisió de la mesura, aquesta serà fitada

$$\text{si } a \in M, \quad r \in R^+, \quad m(a) \leq r$$

o sigui, que la mesura d'**a** és menor o igual a un cert nombre real positiu.

b.- Metrització

És la capacitat de donar significació a l'ordre de magnitud que té la mesura. Pel sol fet de precisar el valor de la mesura no significa que existeixi mesurament ni mesuratge, ja que sense la metrització corresponent seria un valor numèric sense sentit i descontextualitzat. Cal entendre què hi ha darrera del valor numèric, és a dir l'estimació real i concreta de la magnitud de l'objecte i la significació d'aquesta mesura en relació amb la magnitud d'altres objectes, comparació que porta a la comprensió del grau de la seva normalitat mètrica i la seva posició ordenativa dins aquell context magnitudinal. Un sistema mètric o una estructuració mètrica, no solament assigna números a les coses, sinó que a més, ofereix informació sobre l'ordenació respecte a la magnitud metritzada i la possibilitat de poder formular les lleis que regeixen el fenomen. "Els conceptes mètrics constitueixen un pont entre el món real i el món ideal de la matemàtica" (Mosterin).

És doncs la metrització la que necessita i es fonamenta en la definició d'un sistema empíric, formulat i fonamentat a partir d'axiomes i hipòtesis que expressin les característiques quantitatives i qualitatives d'aquest sistema empíric i, que permeti l'existència d'un homomorfisme d'aquest sistema amb un sistema numèric, conjunció que permet estructurar la Teoria de la Mesura. Mosterin (1987) determina com a fases de metrització (pag. 28), les següents:

1.- *Definició d'un sistema empíric.*

2.- *Formulació d'axiomes o hipòtesis que expressin característiques qualitatives d'aquest sistema empíric.*

⁴³ L'axioma 5 de Campbell, en realitat és una repetició de la propietat expressada en l'axioma 2, si bé en el segon incideix, a més en el fet del valor unitari. El que els fa diferenciar, bàsicament és l'enfoc definitori, en el cinquè de tipus procedimental i el segon més axiomàtic.

3.- Prova d'un teorema de representació que afirma l'existència d'un homomorfisme d'aquest sistema empíric en un cert sistema numèric.

4.- Prova d'un fenomen d'unicitat que indica fins a quin punt l'homomorfisme és unívoc, és a dir, quines són les transformacions permissibles de l'homomorfisme donat, que també constitueixen homomorfismes del mateix sistema empíric en el mateix sistema numèric.

A nivell pràctic, la metrització es centra, bàsicament, més que en l'exactitud i precisió, en l'admissió de processos d'enquadrament de mesures o sigui, en la necessitat del domini d'interval·s aproximatiu·s i en les magnituds derivades, mitjançant una definició en funció de la relació existent entre les magnituds intervinents (densitat o quantitat de massa per unitat de volum, acceleració, renda per càpita, etc.).

c.- Mesuratge

És l'aplicació tecnològica i procedimental que té per objectiu l'obtenció de la mesura, o sigui, és el conjunt d'operacions físiques o mentals que cal realitzar, amb o sense instruments, amb la finalitat de determinar la mesura d'un objecte. El conjunt de coneixements implicats són competències específiques dels *saber fer* o *sabers pragmàtics* dels camps d'aplicació pràctica i dels *sabers savis* a nivell experimental i científic, que pretenen el domini de la magnitud tot cercant la perfecció i millora tecnològica amb l'objectiu d'aconseguir graus de precisió cada vegada més exactes. Els dominis necessaris, en aquest àmbit, són diferents, fins i tot, segons la magnitud de què es tracti, ja que no és igual treballar amb la longitud que amb la massa, la superfície, el volum o el temps o d'altres magnituds. Idènticament, també es modifica segons el tipus d'instrument que s'utilitza, ja que no és el mateix, emprar un metre de sastressa que una cinta mètrica plegable o que un metre de fuster o una regla, o fer-ho amb aparells científics (tocòmetres, longitudímetres que funcionen per emissió-recepció de radiacions d'ones de raig làsers, inversors, etc.). De la mateixa manera, també és diferent segons si s'utilitzen aparells o no s'utilitzen, ja que per exemple l'estimació, necessita d'uns processos diferenciats als de la comparació directa o indirecta fets amb unitats materials. També els estudis etnomatemàtics (D'Ambrossio, Sebastiani, Acioly, Oliveras, Callís,...) demostren que la diferenciació en el domini i ús de procediments de mesurament és present degut a variables contextu·ls de tipus ètnic, de responsabilitat social o de pràctica professional. Cada context determina l'aprehensió i ús de diferents processos de metrització i, per tant, d'estructures estimatives també diferencials.

En termes generals es pot dir que la *mesuralització*, integra i necessita pel seu desenvolupament, de capacitacions lligades a l'aplicació de processos matemàtics, físics i tecnològics. Correspon al camp matemàtic, la determinació de l'axiomàtica implícita i les seves propietats, mentre que els mètodes i instruments per determinar el valor quantificat amb la major precisió possible, correspon a la física i a la tecnologia.

Igual al que succeeix entre número, xifra i la seva íntima relació amb el comptatge, però que no es necessita d'ell per poder intuir el sentit valoratiu (major, menor o igual) d'una quantitat, passa, també, amb la mesura ja que els processos de contrast entre grups, o de comparació per aparellaments (igualació un a un), permeten donar referències comparatives i ordenatives dels valors mètrics. La *mesuralització* resta doncs, íntimament lligada al valor numèric, però, en cap cas significa que sigui una relació imprescindible ja que pot haver-hi metrització sense mesura quantitativa.

3.- UNITAT

Conceptualització i epistemologia

La significació col·loquial⁴⁴ és molt coincident amb l'existent en la semàntica científica⁴⁵; diferenciant-se en ambdues, el significat numèric com a valor de l'u, del d'unitat mètrica.

En el vocabulari mètric, els termes que es troben relacionats amb unitat són:

6.1.- **Patró:** *Mesura materialitzada, instrument de mesura, material de referència o sistema de mesura destinat a definir, realitzar, conservar o reproduir una unitat o una o varis valors d'una magnitud per a que serveixin de referència.*

1.7.- **Unitat de mesura:** *Magnitud particular, definida i adaptada per conveni, amb la que es comparen altres magnituds de la mateixa naturalesa per a expressar-les quantitativament amb respecte a aquesta magnitud. Nota: 1. Les unitats de mesura tenen assignats per conveni els seus nombres i els seus símbols. 2.- Les unitats de les magnituds que tenen la mateixa dimensió poden tenir el mateix nom i el mateix símbol, fins i tot si aquestes magnituds no són de la mateixa naturalesa.*

1.10.- **Unitat (de mesura) (derivada) coherent:** *Unitat de mesura derivada que pot expressar-se com un producte de potències de les unitats bàsiques amb un factor de proporcionalitat igual a 1. Nota: La coherència pot establir-se, solament, respecte a les unitats bàsiques d'un sistema determinat. Una unitat pot ésser coherent en un sistema i no ser-ho en un altre.*

1.13.- **Unitat bàsica:** *Unitat de mesura d'una magnitud bàsica en un sistema de magnituds donades. Nota: En tot sistema d'unitats coherents, hi ha una sola unitat bàsica per a cada magnitud bàsica.*

1.14.- **Unitat derivada:** *Unitat de mesura d'una magnitud derivada en un sistema de magnituds donades.*

1.15.- **Unitats (de mesura) fora del sistema:** *Unitat de mesura que no pertany a un sistema d'unitats donat (el dia, l'hora, el minut, són unitats de temps, o l'electrovolt la unitat d'energia, fora del sistema SI).*

Mesurar una magnitud és comparar en base a una unitat i indicar el nombre de vegades en que aquesta unitat li és assignada. Si m és la mesura d' a presa en unitats u , llavors:

$$\forall a, u \in M \quad \text{si} \quad m_u(a) = r \quad \Rightarrow \quad a = r \otimes u$$

L'existència de la unitat, pressuposa necessàriament el valor del 0 i l'adopció d'una escala mètrica en base al valor unitari, l'elecció d'un objecte físic, la unitat patró, com a model que és la unitat material d'aplicabilitat. Aquesta unitat és un interval dins de la magnitud i així doncs la mesura r representa el nombre d'intervals que inclou la magnitud d' a .

⁴⁴ En la GEC s'indica: 1. Qualitat d'allò que és u . - 2. Que constitueix un tot no divisible en parts (contraposat a multiplicitat). - 3. Mètrica. Valor d'una magnitud que hom pren com a terme de comparació per a mesurar les magnituds de la mateixa natura o espècie. Per a materialitzar una unitat, hom construeix un patró, consistent en un estri, aparell, etc., que fixa o determina amb l'exactitud suficient, el valor de la unitat."

Cadascun dels elements constitutius dels múltiples. El nombre enter més petit (u , 1).

Unitat absoluta: unitat presa com a patró.

Unitats fonamentals: unitats patró en un sistema determinat (GGS; Tècnic; MKS; MKSA; ...).

⁴⁵ En el Diccionario Básico de Matemáticas es diu: 1. Un solo elemento. - 2. Cantidad que se toma como medida o término de comparación para los demás de su especie. Toda unidad ha de cumplir las propiedades de: a) ser manejable b) aceptada por todos los países c) de valor invariable d) tener múltiplos y submúltiplos.

L'adquisició de la unitat té a veure, també, amb la concepció del número i des d'una perspectiva històrica, sembla que la primera definició de número, és la que s'atribueix a Thales que el considera integrat per un sistema d'unió d'unitats (*monàdons*) seguint l'idea egípcia la qual és continuada en la filosofia pitagòrica. Pitàgores, determina la unitat com a "*multitud u*" (*pléthps hén*), enfoc aparentment contradictori però fonamental per a la integració de l'ú en el número (Heath, 1921). Plató i d'altres pitagòrics l'admeten com a "*quantitat limitant*" (*perainousa posótes*) o com a terme entre el número i les seves parts, és a dir el que separa múltiples de submúltiples. Aristòtel, a més, l'entén com quelcom que a més d'ésser número és l'inici de tot número. També Euclides segueix la mateixa línia conceptual i així la unitat la defineix com allò en virtut de la qual cada una de les coses que existeixen se'n diu "*u*", el número és la *multiplicitat feta d'unitats*.

La unitat i l'u, tenen també, a nivell filosòfic, una doble conceptualització contradictòria. D'una banda pot ésser entesa, com succeeix en la filosofia clàssica, en l'escolàstica o en el panteisme, com a ens sagrat. L'unitat és símbol del principi de totes les coses, del creador i de la divinitat. La realitat és concebuda com a unitat radical, fent-se present tant en sentit de la *physis* dels presocràtics com en l'*eínai o esse* de la filosofia posterior en la que tot existeix en virtut de les proporcionalitats i relacions numèriques. Aquesta concepció queda ben clarificada en la frase de Galileo Galilei: "*Déu creà l'univers en llenguatge matemàtic*". En el pol oposat, l'u no és entès com idea de grandesa, sinó de simplicitat i de reducció negativa, ja que el valor i grandiositat està en la complexitat o en la multiplicitat, l'harmonia és la totalitat i no la unitat: "*la unitat no suprimeix la multiplicitat*" (Freud). La consecució de l'harmonia entre l'u i el tot, ha estat, per a la Humanitat, una problemàtica transcendental i, evidentment també, a nivell personal, a la que li configura i determina una especial manera d'entendre l'entorn i la vida.

La incidència a nivell personal d'aquestes concepcions, tindrà una important repercussió didàctica en l'aprenentatge de la mesura, però també en el domini i comprensió de la proporcionalitat i en els números racionals, com ho constata (Fiol, 1983) al analitzar amb nens d'edat escolar, la possibilitat de la divisibilitat de l'u o de la unitat i en l'observació de les problemàtiques a nivell de contrast o de canvi d'unitats (Fiol 1992),

4.- LONGITUD

Conceptualització i epistemologia

L'anàlisi terminològic denota, en tots els seus àmbits d'ús, una forta connotació de la significació científica, de manera que ja en l'enfoc enciclopèdic es troben, bàsicament, accepcions de terminologia i lèxic de la física (òptica, dinàmica, etc.), de la física atòmica o de l'astronomia, geologia o cartografia. La conceptualització vulgar del terme, com a sinònim de "*llargària*" és la que més la interrelaciona amb la matemàtica⁴⁶.

La longitud, s'entén per tant com l'espai que separa o que hi ha entre dos punts. Aquesta significació porta a diferenciar dos conceptes diferents segons si aquests punts formen part de l'espai ple o buit, entenent com a espai ple quan els dos punts formen part d'un mateix continu o del mateix cos o objecte, i espai buit quan són dos elements

⁴⁶ Diccionario Básico de Matemáticas (1980) - Mariano Díaz Velázquez. Anaya: 1.- *Amplitud de las cosas*. 2.- *Magnitud que expresa cada una de las dimensiones de los cuerpos*".

diferenciats situant en un mateix pla sense pertànyer a l'espai d'un mateix cos o objecte. Aleshores es parla de dos aspectes ben diferenciats:

- . *dimensió*: longitud entre punts d'espai ple.
- . *distància*: longitud entre dos punts situant en un espai buit.

Així, per exemple, cal parlar de les dimensions d'un objecte i de la distància entre ciutats. Les longituds dimensionals, atenent a les tres direccions de l'espai que té l'objecte o cos sobre el que s'ubica la magnitud, reben els noms específics de llargada, amplada i alçada.

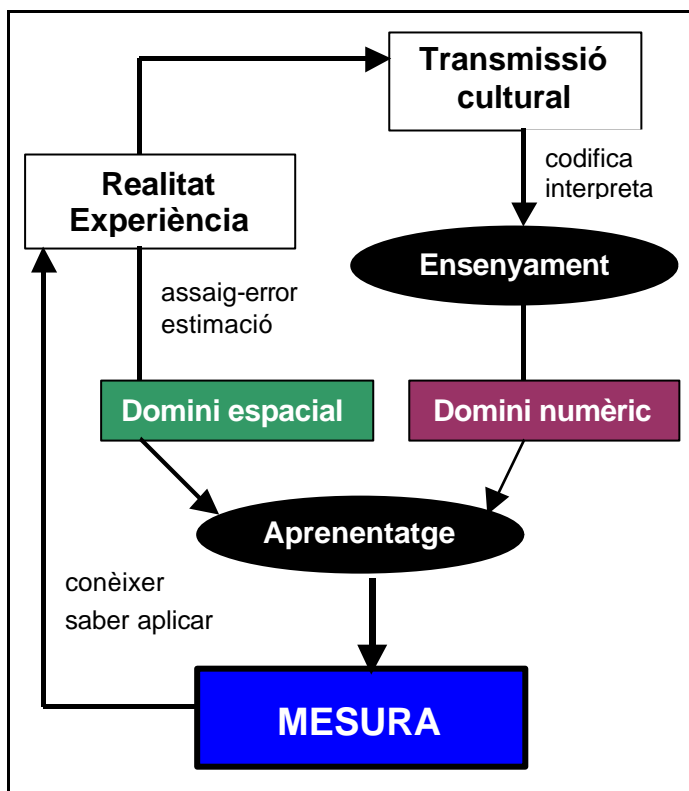
Com a accions específiques relacionades amb la recerca, interessa destacar la referida a la longitud rectilínia i curvilínia:

- a).- *Longitud d'un segment*: distància entre els seus extrems o entre dos punts.
- b).- *Longitud d'una corba*. Des de la geometria diferencial i segons la *teoria de corbes*, cal diferenciar els conceptes bàsics implícits en el pla i en l'espai. En el primer s'hi concreta la longitud, la tangent i la curvatura i en el segon, cal afegir-hi a més, el pla oscil·lador i la torsió. El concepte de longitud correspon al "*límit de la longitud de poligonals inscrites dins la corba amb la condició que els seus vèrtexs s'aproximin cada vegada més els uns als altres sobre la mateixa corba*"⁴⁷.

⁴⁷ A.D. Alexandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev i altres (1985) (p. 83)

3. EL DOMINI DE LA MESURA DE LA MESURA SENSORIAL A LA MESURA ESTIMATIVA

Dues direccionalitats de domini i tractament de la mesura



La mesura -com qualsevol altre aprenentatge- no pot considerar-se adquirida simplement per la capacitat, manifestada externament, de la reproducció mecànica d'uns procediments i, especialment entre aquests, pel domini numèric i algorísmic⁴⁸ que s'aconsegueixi d'ella. No podem suposar que existeix aquest domini si no serveix per interpretar la realitat i no permet retornar a ella amb capacitat de saber resoldre situacions problemàtiques.

L'aprenentatge i interiorització de la mesura té el doble vessant del domini pràctic (geomètric, espacial) i el del domini numèric. Tothom des de petit, té contacte i experiència amb la realitat ja que aviat s'enfronta amb les magnituds que l'entorn posseeix. Les experiències

Esquema 4 : Nivells de domini de la mesura

amb els objectes i l'entorn, porten a través d'accions d'assaig i error, a l'adquisició d'una consciència d'estimació i aproximació totalment imprescindible pel domini profund d'una magnitud⁴⁹. La seva aprehensió possibilita poder dominar els objectes, accions i fins i tot, determinar els límits de la pròpia existència individual.

El procés educatiu escolar considera, encara que no s'expliciti, que el domini pràctic ja es posseeix o que cal tenir-lo assolit degut a que la vida ja proporciona el contacte amb la realitat de la mesura. En conseqüència, la seva acció, fonamentada en concepcions socio-culturals es centra en la capacitació pel domini de la simbolització numèrica, transformant-se la mesura, en mesura aritmètica i exacta. L'aspecte més fonamental de la mesura: la integració amb la realitat i, conseqüentment, el fet de partir i retornar a ella, queda, lamentablement, molt oblidat i desatès.

Si la mesura ha de servir per conèixer i entendre l'entorn i els fenòmens que en ell hi tenen lloc, no poden deixar-se oblidades en el procés d'aprenentatge, cap de les dues direccionalitats d'aquest domini. L'ensenyament no pot centrar-se únicament en una d'elles exclusivament, ni tampoc fer un tractament diferenciat i paral·lel de cadascuna, sinó que la mesura s'adquireix fruit d'un únic procés que les integri coordinadament.

⁴⁸ Chamorro, M.C. (1995)- Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza Primaria – UNO. 3 (31-53). Barcelona.

⁴⁹ Piaget, J. (1973)

Els nivells de domini de la capacitat de mesuralització

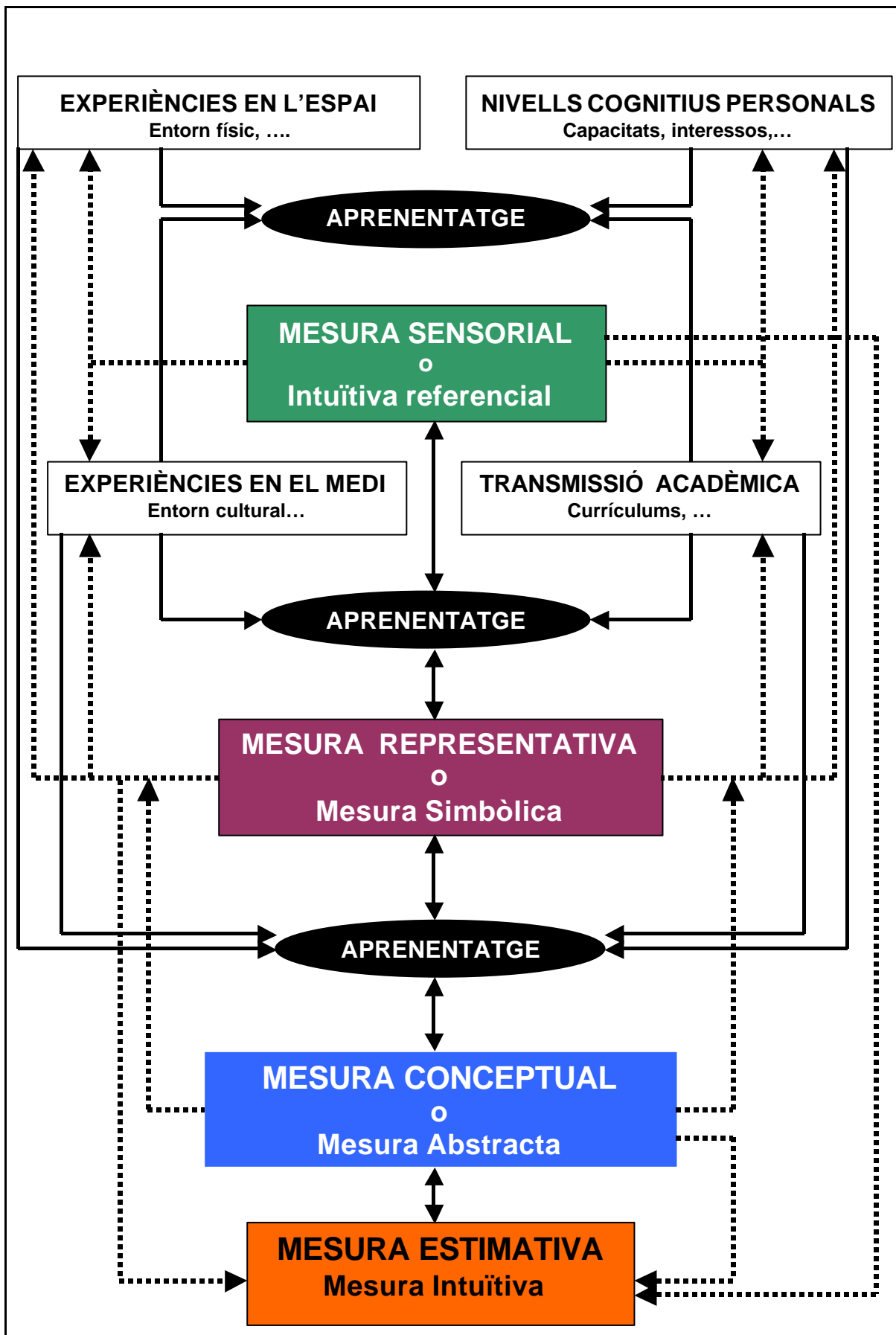
La capacitat mètrica si bé necessita de l'enfoc aritmètic i geomètric, ambdues tenen, alhora, una clara diferenciació segons el grau de domini que hom aconsegueix fruit de l'experiència, la formació acadèmica o de les dues en conjunt. Evidentment no és el mateix ni té el mateix sentit, el domini que presenta un professional que aplica correctament els aparells de mesura que necessita utilitzar per tal de realitzar correctament la tasca que té encomanada, que el d'aquell que amb una sola ullada determina la mesura aproximada de la magnitud amb la que s'enfronta, com també es diferent, la capacitat que hom té per poder calcular de forma algorísmica l'àrea o el volum d'una forma poligonal o la d'un cos geomètric o la potència d'un motor, a la d'aquell que dissenya un fotòmetre o que sap interrelacionar la llargada aconseguida per un raig de líquid al sortir per una obertura del recipient amb el seu pes específic.

L'adquisició i aprenentatge de la mesura, fins i tot dins el propi estadi mètric, és una conceptualització multifactorial donat que la mesura, en sí mateixa, té connotacions molt diferents segons es tracti de mesura estimativa o de l'aplicació pragmàtica i tècnica de mesuratge o de dominis quantitius d'equivalències mètriques o de generalització de dominis conceptuals. Les variacions d'aquest domini, representen estadis diferencials de la capacitat de mesuralització que pot tenir una persona; nivells de domini que es resumeix en l'esquema que s'adjunta, fonamentat en aportació de Fortuny, Burgués i Alsina (1987) sobre l'espai, i on s'hi poden diferenciar:

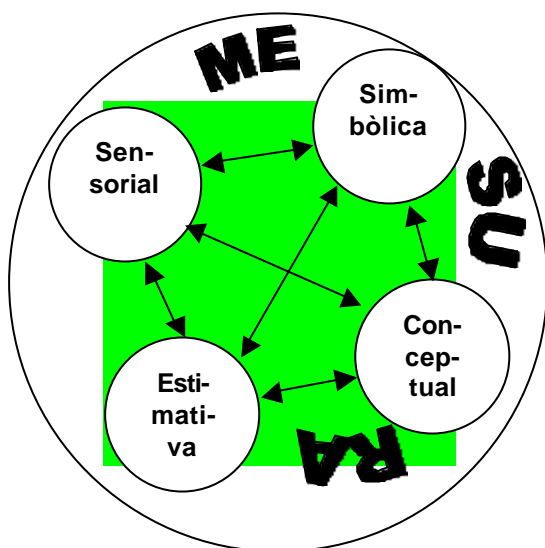
- a. **Mesura sensoriomotriu o intuïtiva referencial**
- b. **Mesura representativa o simbòlica**
- c. **Mesura conceptual o abstracta**
- d. **Mesura intuïtiva**

Els nivells diferenciats de capacitat que es manifesten, tenen causalitats diverses, fet que a nivell didàctic cal tenir sempre present. Per un costat, la mesura sensorial serà tant més rica i profunda quan més implicat estigui el subjecte amb el seu entorn, de manera que el context, com veurem en la recerca, determina molt fortament els procediments, recursos i estratègies que es posen en joc. Un ambient ric resulta estimulante per l'aprenentatge, i és lògic entendre que en situacions on la persona es veu estimulada per les necessitats del seu entorn, l'adquisició resulta més interioritzada i variada, si són variats i complexos els reptes en que es troba. De fet, però, no únicament és l'entorn l'únic factor desencadenant de les possibilitats mètriques ja que, a més, cal tenir en consideració les seves capacitats perceptuals i cognitives juntament amb les de tipus emocional (motivació, interès,...). Seran les sociològiques i d'enculturalització (educació, normes tecnològiques,..) les que determinaran els nivells i riquesa de la mesura simbòlica. L'alumnat amb una determinada dotació de mesura sensorial podrà accedir a nivells més o menys profunds de la mesura simbòlica segons les possibilitats que li ofereixi el plantejament curricular. Fruit de la confluència de la sensorial i la representativa o simbòlica es podrà entrar en nivells de mesura conceptual o abstracte que possibilitin resoldre situacions mètriques novadores alhora que interrelacionar diferents sistemes magnitudinals. Cas a part, és la mesura intuïtiva que capacita per fer front a l'estimació mètrica, ja que es crea, necessàriament, amb la integració de tots els nivells. La possessió d'un determinat nivell de domini o capacitat de mesura no significa una igualtat dins de cada estadi ja que en cadascun d'ells es poden diferenciar capacitacions ben contrastables. Els estadis d'evolució de la mesura tenen una íntima relació amb el procés d'adquisició de l'*espai euclidià i mètric* però no, amb els estadis previs de l'*espai topològic* i l'*espai projectiu*⁵⁰. Cal remarcar que la ubicació en un determinat estadi no és tant com a fase d'evolució genètica sinó més aviat per evolució madurativa, per tant, la possessió no és a conseqüència ni fruit de l'edat del subjecte.

⁵⁰ Piaget, J. – Génesis del espacio en el niño



Esquema 5 : Nivells de domini de la mesura



Esquema 6 : La mesura com a integració

El domini de la mesura no es produeix per una estructuració nuclear i concèntrica sinó amb un enfoc disjunt però acumulatiu, de manera que els diferents estadis poden coexistir independentment, tot i que mútuament s'influeixen. La construcció de la capacitat de mesura és fruit d'un procés cognitiu d'interaccions diverses.

Aquestes interaccions multifactorials que s'estableixen entre entorn, capacitats personals i transmissions culturals generen diferents àmbits d'aprenentatge, els quals van construint els diferents nivells o tipologies de domini de la mesura tal i com es detalla en els esquemes referits als nivells de domini de la

mesura i al de la mesura com a integració. Els diferents nivells i les característiques essencials que els caracteritzen es concreten en:

a. Mesura sensorial o intuïtiva referencial

El seu marc d'actuació és la capacitat pràctica d'aplicar la mesura, tant a nivell de tècnica de mesuratge com de capacitat d'intuïció referencial de mesures amb objectes i situacions.

Des del naixement, les estructures sensorio-perceptives possibiliten la capacitat de detectar la posició dels objectes. Aquest aprenentatge que comença sent purament per assaig i error, arriba a interioritzar-se de manera que, intuïtivament, aprenem a dominar les distàncies i així podem saber si passarem o no per una obertura, on ens hem de situar i en quin moment mobilitzar braços i mans per tal de poder escopsar una pilota que se'ns ha llençat, graduar la força i posicionar el braç quan llencem un objecte per tal que arribi a un determinat lloc, fer el salt adient per tal d'anar a caure just sobre les pedres que permeten el pas per anar d'un costat a l'altre d'un riu, exemples, tots ells, que són una petita mostra de la seva incidència en multitud de situacions i fets de la vida diària.

La interiorització d'aquest control inconscient, que detallarem amb més detall al tractar de l'adquisició del coneixement i l'aprenentatge, no és gens fàcil però és la base per enfrontar-nos a la realitat. De la mateixa manera que estructuram les habilitats per dominar el nostre espai, també s'incideix de la mateixa manera per tal de poder numeralitzar o intuir el valor de les magnituds.

Les primeres mesures sensorials fan referència a la capacitat d'ordenació que pot realitzar l'infant i el pas següent al procés de metrització en el que la mesura necessita de la interrelació comparativa directa amb la unitat sigui aquesta, física o mental.

b. Mesura representativa o simbòlica

En aquest estadi la mesura no necessita de l'acció de comparació unitària sinó que es realitza a través de representacions i l'ús de símbols i fórmules matemàtiques tot permetent la interacció quantitativa d'equivalències mètriques i enfocs quantitius algorísmics.

c. Mesura conceptual o abstracta

Possibilita la capacitat de raonar i relacionar les propietats mètriques i geomètriques, permetent a través de raonament inductius, deductius o per formulació conceptual predir resultats i cercar estratègies resolutòries sense l'acció del mesurament directe. També a partir de relacions entre seqüències preposicionals o entre sistemes deductius, es poden arribar a deduir propietats o formular hipòtesis i teoremes.

d. Mesura estimativa o intuïtiva global permet efectuar mesuraments de forma automatitzada i inconscient, sense l'acció comparativa directa ni de càlculs algorísmics.

Tenir domini de la mesura significa la possessió integral d'aquestes diferents tipologies de mesura i quan més interioritzades i interconnexionades estiguin, més intensa és la capacitat que es posseeix, ja que en cas contrari el domini és únicament parcial i sectorial. Cada persona, fruit de les seves circumstàncies personals, pot haver integrat una tipologia determinada de mesura que li permet solucionar les problemàtiques que la seva vivència li proporciona o li exigeix. El fet de tenir, per exemple, una bona capacitat d'estimació intuïtiva global no significa que, realment, posseeixi un domini integral de la capacitat mètrica, ja que pot ser que no tingui dominis de mesura conceptual o abstracte que li permeten enfrontar-se a situacions no habituals i per tant, aplicar de manera significativa els aprenentatges adquirits; o, potser, no tingui assolit el domini de nivells de mesura simbòlica que li permeten enfrontar-se a la determinació de mesures representatives o a transformacions i equivalències unitàries; el domini, en aquest cas seria incomplet, parcial i unidireccional.

Sovint podem trobar persones i professionals amb un elevat domini de la mesura sensoriomotriu o intuïtiva referencial però que no poden solucionar situacions diferents a nivell general, o a la inversa persones amb dominis algorísmics amb insuficient domini per solucionar situacions sensoriomotrius o estimatives. En la mostra selectiva trobarem casos ben explícits d'aquests comportaments.

L'adquisició de la mesura, significa el potenciament del pas d'un nivell a l'altre i, el seu aprenentatge ha de contemplar aquesta evolució de manera que les propostes didàctiques han de possibilitar-ne els diferents intercanvis i interconnexions per evitar-ne dominis unidireccionals i parcials. Cadascun d'aquests nivells de mesura resulta fruit de processos d'aprenentatges diferencials i necessitats d'un tractament específic. El treball i la interacció en cada àmbit és el que permet que la persona vagi adquirint les diferents capacitats implícites de la mesura.

L'escola ha tingut com a enfoc generalitzat la creació d'una mesura simbòlica deixant oblidada la de tipus sensoriomotriu, la conceptual i la intuïtiva, esperant que fos la vida i la realitat qui aportés aquesta formació. És obvi que cal un canvi profund d'enfoc i tractament de la mesura on la formació acadèmica no es centri en exclusivitat en cap d'elles sinó en l'aprenentatge integral de la mesura.

4. ADQUISICIÓ I ESTRUCTURACIÓ DE L'APRENTATGE DEL CONEIXEMENT RAONAT A LA INTUICIÓ ESTIMATIVA

L'adquisició del coneixement

La interiorització de la capacitat estimativa, com qualsevol contingut cognitiu, necessita d'un aprenentatge fonamentat en l'aprehensió d'uns determinats coneixements, procediments, recursos i estratègies a través dels quals i fruit de la seva conjunció, s'aconsegueix la capacitat específica que possibilita la seva posterior aplicabilitat. És evident que en tota recerca didàctica, la naturalesa del coneixement i el procés com aquest s'adquireix, resulten ser factors transcendents a l'hora de plantejar propostes metodològiques que permetin millorar-ne la seva adquisició, però també, per a poder entendre l'estructura epistemològica implícita en la pròpia recerca. Sota aquesta perspectiva d'íntima connexió, incidirem en el marc filosòfic i psicològic per tal d'apropar-nos a la comprensió del procés d'aprenentatge general i de la mesura en particular. De la mateixa manera que les concepcions aristotèliques o atomístiques permeten estructurar les bases filosòfiques sobre les que es pot construir el marc teòric del procés gestaltic; o l'apriorisme kantian⁵¹ la gènesi del constructivisme, o el cartesianisme⁵² els processos metodològics, és obvi que darrera de qualsevol plantejament i enfoc didàctic, existirà, una direccionalitat referencial sobre el què és i com s'aprèn aquell contingut en el que la recerca hi centra l'atenció.

⁵¹ El coneixement per Kant és fruit de la *intuïció* o representació individual i la *construcció* o la producció de la representació "...el coneixement filosòfic és el coneixement racional a partir de conceptes; el matemàtic, a partir de la construcció de conceptes. Construir un concepte significa representar a priori la seva intuïció corresponent. Així construïm un triangle representant l'objecte corresponent a aquest concepte, bé a partir de la intuïció pura, mitjançant la imaginació, o amb la intuïció empírica, sobre el paper, però en ambdós casos a priori ...". Les lleis de la natura són *sintètiques a priori*, per tant, tenen validesa universal ja que representen l'estructura de tota experiència i, així, aplicant, únicament, conceptes a perceptes, es pot adquirir l'experiència, on el món perceptual és pensat d'acord amb els esquemes, categories i principis del nostre enteniment.

Kant no considera la percepció i el pensament com estadis o nivells d'un mateix coneixement. No creu, com consideraven Descartes o Leibnitz, que la percepció sigui un pensament inacabat o confús ni que el pensament sigui la clarificació de la percepció. El coneixement, construcció de judicis i proposicions fets a partir del llenguatge i que articula el pensament com a marc conceptual simbòlic i perfectament modificable, depèn de diferents factors o formes *a priori* de la nostra sensibilitat o de l'estructura innata del nostre sistema neurosensorial, i aquest, incideix tant en la nostra percepció com en el món perceptual, experimental i vivencial. En base a això, defineix tres estadis en l'organització i construcció cognitiva de les impressions:

- a.- **construcció de les percepcions:** les sensacions són organitzades mitjançant les formes pures de la sensibilitat (espai, temps) i es creen les percepcions.
- b.- **construcció de judicis:** les percepcions són integrades a través dels conceptes purs del coneixement (categories) i permeten la configuració de judicis i proposicions empíriques.
- c.- **construcció de coneixements:** les proposicions empíriques s'organitzen a través de les estructures i principis organitzatius de la raó, en teories més àmplies i complexes.

⁵² Descartes en el seu *Discurs del Mètode* (1637) diu que el seu mètode pretèn "...dirigir la raó de forma adequada en la recerca de la veritat en les ciències. Els principis bàsics d'aquest raonament els redueix a quatre:

- **Principi de l'evidència.** No acceptar mai res com a vertader, sense saber del cert que ho és, cal conseqüentment evitar la precipitació i l'adhesió no raonada. Els judicis han de ser estructurats de tal manera que en resulti evident i clara la seva veritat sense que puguin aparèixer cap dubte que l'enteli.
- **Principi d'anàlisi** Cal dividir i subdividir, estructurar tot judici en tantes parts constituents com sigui possible i que sigui necessari.
- **Principi de síntesi.** L'estructuració de les idees i pensaments cal fer-la amb una ordenació lògica que parteixi dels conceptes més simples i a partir d'ells construir els més complexes. L'ascensió del coneixement suposa una graduació seqüencial de manera que existeix un ordre fins i tot en aquells que per naturalesa, no procedeixen d'uns altres.
- **Principi de l'enumeració completa.** Avaluar i recapitular el procés, de manera que es pugui estar segur de no haver deixat cap revisió incompleta, evitant així l'omissió de res que fos transcendental.

L'acte de coneixement i l'aprenentatge és producte de la integració del món concret aportat per processos d'aprehensió individual i la seva posterior adaptació i estructuració a la pròpia vivència. És, un continu adquirir per reconstruir, o dit d'altra manera, l'alternança, segons Piaget, de processos d'*assimilació* i d'*acomodació*. Cercar una resposta sobre la naturalesa i els processos de formació i organització de la ment humana porta, tal com quedà palès en la Trobada de Royaumont (1975), a direccions més o menys antagòniques, tot i que cada dia és més evident que l'estructuració real de la ment, s'efectua més, com a aportació conjunta que no pas com exclusivitat d'un sol factor. Els grans marcs teòrics de l'adquisició del coneixement es poden agrupar, bàsicament, en:

- **Empiristes:** el coneixement és producte de la vida en un determinat medi; una sèrie de missatges de "criança" transmesos per d'altres individus i pel medi cultural el qual que es grava en una "*tabula rasa*".
- **Nativistes:** el coneixement és fonamentalment innat; forma part del dret de naixement de l'individu i és una manifestació d'idees implícites que existeixen en el regne de la "naturalesa"⁵³. Forma part d'un procés natural altament especialitzat fruit d'un procés programat de "regles internes" i sotmès a un desenvolupament "orgànic" determinat pel seu "*cronograma genètic*" igual com succeeix amb qualsevol aparell anatòmic.
- **Genetistes:** el coneixement s'elabora a partir de la interacció entre certes formes de processament de què disposa el nen petit i les característiques reals dels objectes físics i els aconteixements. Per l'escola piagetiana, és un procés actiu que es va construint per "interaccionisme" o sigui per una permanent adaptació als canvis evolutius, els quals es manifesten a través d'estadis o nivells de capacitació.
- **Antropologistes.** Tots els membres de l'espècie humana són posseïdors de les mateixes estructures mentals independentment de races, cultures o èpoques⁵⁴. El coneixement està carregat de sentit, sentiment, afectivitat i de connotacions diverses. El conjunt d'aquestes influències socioculturals és qui crea les unitats estructurals bàsiques de tot contingut cognitiu, el qual s'organitza jeràrquicament sota lleis generals. La ment, només es comprèn si s'analitza sota aquest prisma multifactorial.

Existeix, però, l'acceptació implícita que a més dels factors específics de la pròpia direccionalitat teòrica, també d'altres factors interns hi incideixen, de manera que en l'organització de la ment hi ha dependències amb el propi ser i la pròpia interioritat, fet que apropa a direccions psicoanalítiques i biològiques; encara que és la formació de models lògics de pensament, el que, en definitiva, és la base conceptual de cada teoria. La ment, la seva naturalesa i el procés de la seva estructuració, resten implicats íntimament amb l'aprenentatge, d'aquí que l'empirisme, nativisme, genetisme i antropologisme es barregen amb el psicoanàlisi, racionalisme i amb multitud de marcs científics tan diversos com poden ser les teories de l'aprenentatge, les del pensament artificial i cibernètic o amb la neurobiologia i la matemàtica. Aquesta visió constructivista, fonamentada en la de la integració i complexitat multifactorial⁵⁵, configura una de les visions cognitives, actualment més acceptada.

⁵³ Chomsky, "nativista" igual que Kant, considera que les categories de comprensió pura, a l'ésser humà li són donades com a dret de naixement. És un procés innat i una capacitat intrínseca.

⁵⁴ Levi-Straus n'és un significatiu representat. Es fonamenta en l'estructuralisme lingüístic de Roman Jakobson de l'escola de Praga, segons el qual sota totes les llengües tenen elements estructurals comuns i l'adquisició de significat es produeix a partir de la relació mútua i contrastable (entre paraules, amb l'entorn objectal, ...).

⁵⁵ Erns Cassirer (*La filosofia de las formas simbòlicas; An Easy on Man, 1944*) es fonamenta a partir de la filosofia kantiana, però, alhora, creu que la construcció racional es produeix com a fruit de la integració

La intel·ligència com a capacitat

Sovint el rendiment de l'aprenentatge, sigui escolar o no, s'atribueix a la intel·ligència, la qual és entesa des d'una perspectiva psicomètrica i que per tant porta a la creença de l'existència de diferents nivells de la seva capacitat o graus de coeficients intel·lectuals manifestats a través dels resultats dels tests d'intel·ligència i que porta a creure, també, en una relació directament proporcional entre intel·ligència i aprenentatge. Generalment, la intel·ligència és entesa com una "dotació", és a dir un pòsit que es posseeix o no i amb una evolució del seu creixement més o menys lineal.

Aquesta concepció de la intel·ligència, porta implícites, entre d'altres, les següents connotacions:

- 1.- *capacitat innata*. La persona neix amb unes determinades característiques i dotacions genètiques i entre elles, la intel·ligència.
- 2.- *capacitat global i unitària*. La intel·ligència és una i única, Són les seves disponibilitat específiques, les que condicionen les possibilitats d'aprenentatge.
- 3.- *capacitat estàtica i immutable*. El coeficient intel·lectual que hom posseeix no es modifica, ni pot ser modificat per aprenentatge.
- 4.- *capacitat pura, independent i no interrelacional*. La intel·ligència existeix per ella mateixa i les seves dependències i interconnexions amb altres facultats humanes o amb estats anímics o incidències del context, són relatives.

Els càlculs psicomètrics de coeficients intel·lectuals (CI) recollits en un valor global, no deixen veure la complexitat de les valoracions que realment l'integren (raonament lògic: classificació, ordenació, igualació, seriació, memòria, atenció, domini de vocabulari, fluïdesa verbal, domini numèric, raonament matemàtic, orientació espacial, ...) fet que va desfigurant la multiplicitat factorial que intervé en la seva mesura tot potenciant-ne la visió unilateral. El sentit i significació del coeficient intel·lectual ha anat degenerant, passant de ser un instrument purament indicador, a ser considerat, l'essència mateixa de la capacitat intel·lectual, de manera que tenir un CI alt és sinònim de tenir intel·ligència i tenir intel·ligència és tenir un CI alt.

La realitat demostra, però, que no sempre és correcta aquesta interpretació i així hi ha persones que tenen una gran capacitat en determinades àrees de coneixement i poc en d'altres, o bé persones que amb un coeficient intel·lectual inferior a d'altres, resolen molt millor, determinades situacions problemàtiques o bé es desenvolupen de manera molt

conjunta amb d'altres formes de pensament no racional o de formes de pensar degudes a les particularitats individuals o socials, fet que l'apropa al psicoanàlisi i a l'antropologisme de Levi-Straus i especialment del domini del món i activitats simbòliques com el domini de la llengua, de manera que la construcció de la realitat es fonamenta en la disponibilitat d'una varietat de concepcions mentals i formes simbòliques. El mite, la imaginació i altres formes interpretatives, tenen que ser tractades sota el mateix prisma i interès que la matemàtica o la ciència. Sosté que la realitat "es creada" per les formes simbòliques que hom posseeix i on el llenguatge, constitueix, però no reflexa la realitat. En contraposició a Home o a Locke, planteja que la percepció i el significat no estan determinats causalment pels objectes del món exterior, ni deriven d'ells sinó que els significats sorgeixen de l'interior i són dipositats en el flux d'objectes i experiències. És una representació molt més complexa i relativista davant l'espai, el temps, la quantitat, ja que aquests depenen dels nivells de simbolització. Els símbols no són estris o mecanismes, són el funcionament del pensament. No es pot concebre l'activitat de simbolització com quelcom diferenciat de la imaginació i la creativitat, es viu en un univers simbòlic: "*ens hem envoltat fins a tal punt en formes lingüístiques, imatges artístiques i símbols místics o prerrogatives religioses que no pot veure ni conèixer res si no és mitjantçant aquest instrument artificial*. Vivim en mig d'emocions imaginàries, d'esperances i pors, il·lusions i decepcions, fantasies i somnis" (An Essay Man. Pag.25). La ment, a través dels símbols, recrea a través d'un feed-back permanent, el món físic a partir de la interpretació de les pròpies imatges simbòliques.

més efectiva en la vida. La visió d'una intel·ligència única i global, i la significació del CI, ha anat perdent incidència degut a noves recerques nascudes a conseqüència de la crítica efectuada sobre els tests psicomètrics per ser aquests, l'element representatiu de la síntesi conceptual que diagnostica sobre la intel·ligència. Com a punts claus del canvi conceptual sobre la intel·ligència, cal destacar:

- Una valoració dels rendiments, extrets de l'èxit o fracàs obtingut en unes proves personals, no és suficient per a deduir-ne la naturalesa de la intel·ligència.
- Resulta poc fiable, creure que capacitats molt diferents, puguin integrar-se conjuntament, per tal de donar un únic valor –factor “g”- que permeti sintetitzar la capacitat global de la intel·ligència. Només seria vàlid si es demostrés l'existència de correlació significativa entre tots els diversos factors integrats en el test.
- Els test solament mesuren una petita part de les habilitats i capacitats intel·lectuals que l'home utilitza. Els factors que es tenen en compte no tenen res a veure amb el “*comportament intel·ligent*” que s'aplica per viure la vida, els quals no s'atenen ni se'ls para atenció.
- Les proves són segregacionistes i parcials, ja que, bàsicament, estan formulades i estructurades sota la perspectiva d'anàlisi d'habilitats lògic-matemàtiques i molt associades al desenvolupament del pensament científic tot sobrevalorant els continguts acadèmics.

La direccionalitat de la *intel·ligència factorial*, caracteritzat per un model d'*estructuració jeràrquica de la intel·ligència*⁵⁶ que l'entén com a un procés integrat d'intel·ligències parcials i independents entre elles (verbal, numèrica, espacial, ...) fou la resposta i la concepció que anà substituint a la intel·ligència global, si bé també, com ella, en les seves essències existien connotacions nativistes, unidireccionals i independents.

El comportament intel·ligent i les intel·ligències múltiples

Noves recerques de la psicologia cognitiva efectuades a partir de la concepció factorial (Sternberg, Gardner), porten a la comprensió d'una nova visió que concep la intel·ligència com a “*intel·ligència complexa i dinàmica*”, la qual es manifesta a través del que Sternberg denomina “*comportament intel·ligent*”⁵⁷ i H. Gardner “*intel·ligències múltiples*”⁵⁸.

Considerant la pluralitat de les capacitats humanes, es creu que la competència intel·lectual és fruit, més, d'aquest conjunt d'habilitats i capacitats, en les quals cada una hi té una importància capdal que no pas d'una única facultat. Cada una d'aquestes habilitats mentals constitueix una “*intel·ligència*” diferenciada, entesa com a “*potencial biopsicològic que possibilita processar la informació que es pot activar en un determinat marc cultural per tal de resoldre un determinat problema o crear productes que tenen valor per una cultura específica*” (Gardner, 2001). Es detallen vuit intel·ligències diferents: “*cinètica-corporal*”, “*espacial*”, “*interpersonal*”, “*intrapersonal*”, “*lingüística*”, “*lògic-matemàtica*”, “*musical*” i “*naturalista*”.

⁵⁶ Carroll, J. B. (1993). *Human cognitive abilities*. Londres: Cambridge University Press.

⁵⁷ R. J. Sternberg (1985) - *Más allá del CI. “teoría triárquica de la intel·ligència*”.

⁵⁸ Gardner, H. (1983). *Frames of mind. The theory of multiple intelligences*. Nueva York. Basic Books.

Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples. La teoría en la práctica*. Barcelona: Paidós.

Gardner, H. (2001). *La inteligencia reformulada. Las inteligencias múltiples en el siglo XXI*. Barcelona: Paidós.

Les característiques generals que defineixen la capacitat intel·lectual des de la perspectiva multifactorial, són:

- És una capacitat que es troba en constant i permanent procés de formació.
- A més de les dependències genètiques, està totalment imbricada amb el context sociocultural. La "*intel·ligència rellevant*" dona resposta i solució en un determinant context, la qual, pot ser improcedent en d'altres situacions.
- La intel·ligència global està implicada en multitud de connexions i components diversos, que actuen, cadascun, com a unitats de processament de la informació; és a dir, la intel·ligència es veu potenciada o no, en cadascun dels passos que hi ha entre la recepció de la informació i la emissió de la resposta. La disponibilitat d'informació prèvia, la captació i interpretació, la planificació i execució, són estructures que incideixen en el resultat de tota acció i per tant formen part, també, del que podríem anomenar, la "*intel·ligència integral*".
- Les diferents intel·ligències són independents entre elles de manera que una mateixa persona pot presentar una gran varietat de rendiments intel·lectuals segons les seves especificitats d'intel·ligència múltiple; tenint doncs, un perfil únic i específic que li permeten a través de les múltiples combinacions que es poden fer amb elles, triomfar en determinades activitats i menys en d'altres.
- Té una clara dependència amb els estats emocionals (*intel·ligència emocional*) i amb els sentiments que es generen amb la seva acció i resultats (*intel·ligència exitosa*).
- El nivell de rendibilitat i eficàcia de tot coneixement està en íntima relació amb el grau d'experiència personal. Els contextos són més o menys estimulants del desenvolupament intel·lectual segons el grau de necessitat que aquests generin a la persona.

Aquesta visió, emfatitza el fet que la intel·ligència i les habilitats intel·lectuals són una estructura dinàmica i lògicament, per tant, de la possibilitat que l'aprenentatge pot modificar la intel·ligència, o sigui, que la relació intel·ligència-aprenentatge és bidireccional i no unidireccional com es fonamentava en les suposicions i teories globals i factorials.

Sternberg, analitzant la *intel·ligència exitosa*,⁵⁹ detecta que és la que l'home utilitza quan s'enfronta amb objectius importants i la que manifesten les persones que han triomfat. Hi diferencia tres característiques, independents entre elles, que cataloga com a tres tipologies d'intel·ligència:

- *pragmàtica* o capacitat de traslladar a la realitat les idees preconcebudes i de solucionar problemàtiques de la vida real.
- *analítica* o capacitat d'analitzar i avaluar la informació amb l'objectiu de poder prendre resolucions i decisions.
- *creativa* o capacitat de poder dissenyar noves propostes i resolucions.

Noves recerques en el camp de la intel·ligència, obren noves direccions que fins ara no s'havien considerat, com pot ser el fet d'estendre-la a àmbits extrapersonals⁶⁰.

⁵⁹ Sternberg, R. J. (1997). *Inteligencia exitosa*. Barcelona: Paidós.

⁶⁰ Hutchins, E. (1995). *Cognition in the wild*. Cambridge, MA: MIT Press.

Resnick, L. B. y Collins, A. (1996). *Cognición y aprendizaje*. Anuario de Psicología, 69, 189-197.

El propi context on s'efectua l'aprenentatge determina especificitats sobre el coneixement que s'adquirirà, de manera que la intel·ligència s'estructura i mediatitza fruit del propi entorn degut a l'estructura social de l'aprenentatge, als recursos que s'hi apliquen i a la posició personal en el moment d'assumir la responsabilitat de l'aprenentatge. La intel·ligència, sota aquesta òptica, deixa de ser una capacitació d'adquisició exclusivament individual de manera que les característiques externes la determinen com a *mediatitzada, situada i compartida*.

- *Mediatitzada*. El pensament resta mediatitzat per les possibilitats que aporten les eines i instruments tècnics que hom utilitza i amb els que es treballa. Avui, parlar del “*pensament zapping*” dels nens, és ja una manera d'acceptar com la influència d'una tecnologia modifica la forma de pensar o de raonar. Els hàbits de passar d'un lloc a l'altre, sense continuïtat, estan potenciant una estructura de raonament i d'anàlisi superficial dels fets tot dificultant-se els hàbits d'aprofundiment, concentració i constància davant qualsevol situació. Les tecnologies TIC, també per la seva banda, estan configuren una manera diferent d'estructurar l'organització del pensament, ajudant, per les necessitats de la seva estructuració funcional, a millorar l'estructuració de processos lògics classificatoris, d'organització i jerarquització, o també, transformant les estratègies dels dominis de les mecàniques algorísmiques i ortogràfiques. Però no únicament les eines físiques tenen incidència en la construcció de la capacitat intel·lectual, sinó que també, els dominis dels llenguatges simbòlics (lingüístics, matemàtics, socio-culturals) són imprescindibles per a poder generar processos constructius de pensament ja que són la base sobre els quals es construeix qualsevol forma de coneixement i sobre els que s'estructuren la majoria de tests predictius.
- *Situada*. Qualsevol acció intel·ligent pretén donar resposta i solucionar un problema en un context específic que cal comprendre i entendre. Les accions intel·ligents tenen, lògicament, objectius específics que poden canviar segons les situacions, de manera que no són exclusivament dependents de l'ambient sinó també del medi social i grupal on s'efectua. Sovint un escolar, resol les coses amb base a les imposicions i criteris de l'aula. Expressions com “*és que el profe ho vol així*”, són prou eloqüents i significatives respecte a la necessitat de l'adaptació contextual, tot demostrant “acció intel·ligent”.
- *Compartida*. Les interconnexions socials, obliguen a les persones a situar-se en el grup tot acceptant i assumint les normes i rols implícits a la seva posició. Aquests rols es van adquirint, al llarg de la vida, imposats per multitud de condicionants (gènere, classe social, feina, responsabilitat social, posició familiar, etc); tot actuant, alhora, de filtres selectius. La funció individual sempre és compartida i en dependència amb el grup, i l'aprenentatge adquirit, ve determinat per la funció que a la persona li correspon assumir dins aquest grup.

Un model potencial sobre l'adquisició del coneixement

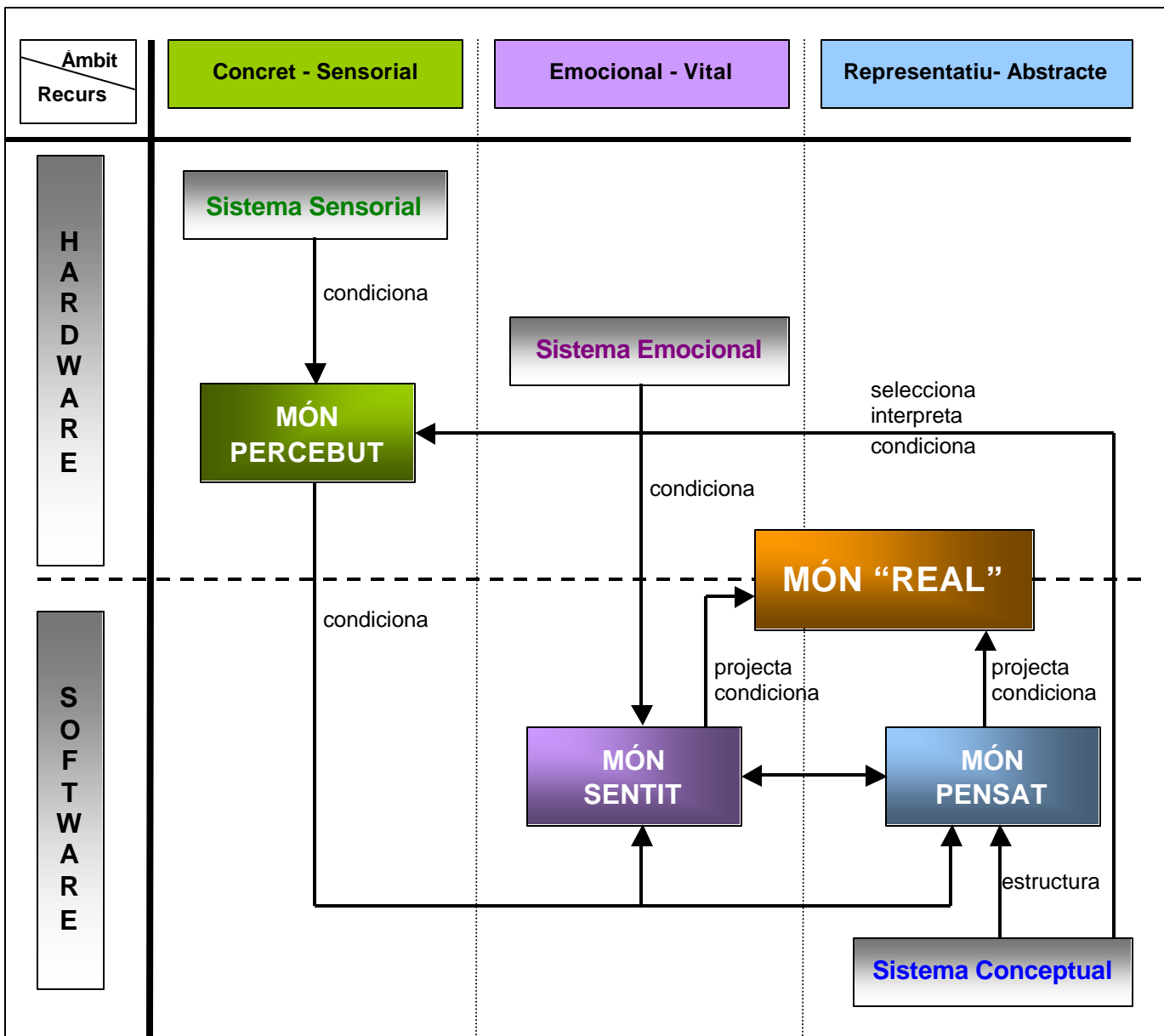
En base a les diferents línies teòriques centrades en el coneixement o en la intel·ligència, considerant que la majoria aporten importants elements de reflexió, podem arribar a entendre el procés cognitiu com format per un *feed-back* continu i permanent, entre el món perceptual, el món emocional o vital i el món conceptual, els quals configuren els àmbits o estadis on s'efectua l'aprenentatge. L'adquisició del coneixement, necessita de

Salomon, G. (Ed.). (1993). *Distributed cognition*. Nueva York: Cambridge University Press.

la possessió de recursos i estructures cognitives que actuen de base constructiva i potenciadora del coneixement com poden ser les imatges i representacions mentals on actuar i a partir d'elles estructurar els judicis i premisses lògiques del coneixement a través dels codis simbòlics del llenguatge.

L'aprenentatge podríem representar-lo, com fem en l'esquema adjunt, com a fruit de la confluència de dos paràmetres bidimensionals:

1. *l'estadi o àmbit on es produeix l'acte cognitiu i la transformació informativa: el nivell concret o sensorial, l'emocional o vital i, i el representatiu o mental..*
2. *l'estructura o recurs implicats i utilitzats en l'adquisició: la hardwàrica o dotació estructural implícita i la softwàrica o dotació elaborada i construïda.*



Esquema 7 : Coneixement i estadis d'adquisició

És evident que les representacions mentals es generen i s'estructuren, a conseqüència de les percepcions, les quals són fruit de les informacions del sistema sensorial. Avui, el sistema sensorial ha ampliat, a àmbits extrapersonals, les seves facultats innates a conseqüència dels avenços tecnològics que permeten copsar nivells sensorials que d'altra manera no detectaríem (per exemple, les ondes infraroges, ultravioletes, electromagnètiques, raig X, ultrasons, galàxies, o les estructures microscòpiques i atòmiques, entre d'altres), resultant, però, encara insuficients per poder copsar i detectar tota la informació sensorial existent en l'univers.

La informació rebuda o captada a través de les impressions sensorials creen el **Món Sensorial**, que és un món de realitats no subjectives ni d'invenció; és tridimensional i euclidià, però, un món de realitats parcials.

Si prenem en consideració un enfoc cognitiu de tipus computacional i del processament de la informació (Katona, 1940, Greeno, 1978; Resnick, 1991), es necessita d'unes estructures d'hardware que possibilitin la captació i posta en marxa del sistema cognitiu i unes altres més programàtiques per tal de poder elaborar la informació i obtenir el producte final. El sistema sensorial forma part d'aquest hardware necessari pel coneixement, i així, a nivell cognitiu succeirà idènticament igual que el que passa amb el hardware computacional on segons les seves característiques tècniques es poden posar en marxa uns determinats programes o no, i la rendibilitat que s'obtingui dependrà de les característiques que el hardware posseeixi. El Món Sensorial adquirit és, doncs, un món condicionat i determinat per les possibilitats del **Sistema Sensorial**.

Paral·lelament, el hardware del **Sistema Emocional** capacita per a captar i donar sentit i valor, de manera que fa viure i integrar l'experiència sensorial dins el marc dels sentiments, factors que configuren una altra esfera de coneixement i intel·ligència, el **Món "Sentit"**.

El software cognitiu quedaria representat pel **Sistema Conceptual**, que a través de les estructures lògiques del pensament i de la capacitat intel·lectual, a l'entrar en interrelació amb el Món Perceptual, crea els judicis o raonaments científics d'aquest coneixement, permetent ampliar a través de la formulació d'hipòtesis, a la generalització i universalització del coneixement, fins i tot, podent arribar a àmbits no sensorials i on el llenguatge, sense cap mena de dubte, és l'element clau d'aquesta estructuració simbòlica. Serà a partir d'aquest contrast i confluència que es crea el **Món Pensat** o **Món Conceptual**, el qual projectarà la seva concepció en forma de coneixement sobre el propi Món Sensorial, podent-lo arribar a modificar i distorsionar de manera que el "saber" transforma l'observació perceptual (per exemple, el fet de saber que una cadira té les potes iguals o que els costats d'un rectangle els té iguals dos a dos, ... fa que al mirar una cadira o una paret, seguim "veient" les potes o els costats iguals tot i que la perspectiva ens modifica les mesures).

La conjunció d'aquestes interrelacions, en el seu conjunt, originarà el **Món "Real"** que serà personal i real, dintre les limitacions subjectives imposades per les especificitats del sistema sensorial, conceptual i emocional, de manera que aquest món real serà diferent si es modifiquen o fossin uns altres aquests components *"la millora científica consisteix sovint, no en l'augment de les veritats sinó en el canvi de sistema conceptual utilitzat, en la seva aplicació o extensió o la substitució d'un per l'altre.... el món no està estructurat d'una forma unívoca, som nosaltres qui l'estructurem al projectar sobre ell els nostres conceptes...."* (Mosterin, J. 1987).

5. L'ADQUISICIÓ DE LA CAPACITAT ESTIMATIVA DE LA PERCEPCIÓ A LA INTUICIÓ

5.1. La complexitat de l'aprenentatge de la mesura

La dificultat manifestada, de manera bastant generalitzada, pel professorat tant de primària com de secundària, respecte l'aprenentatge de la mesura assimilat per l'alumnat, és una preocupació centrada en una diversitat de continguts conceptuals i procedimentals que es poden resumir, bàsicament, en els següents:

- saber diferenciar i reconèixer les unitats dels seus múltiples i submúltiples.
- dominar els processos algorísmics de traspàs d'una unitat a una altra.
- capacitat de saber emprar, adequadament, els estris tecnològics de mesura.
- ús correcte de les unitats i procediments de mesura, adequant-los a cada context.
- capacitat estimativa davant la realitat;

Cadascun d'aquests continguts necessita d'estructures cognitives molt diferents per a la seva aprehensió intel·lectual, les quals poden anar des de domini de mecàniques algorísmiques, a la possessió de capacitats intuïtives inconscients o de dominis tecnològics. Aquest fet, posa en evidència que l'aprenentatge de la mesura no és fruit d'un únic factor sinó que és per una acció d'integració multifactorial.

5.2. Factors endomagnitudinals i exomagnitudinals

Mesurar pot concretar-se com la transformació quantitativa de la valoració comparativa efectuada entre una realitat magnitudinal respecte a una altra que s'assumeix com a magnitud objectiva i unitària. Aquest procés que d'entrada sembla simple, inclou una gran varietat de factors incidents: en algunes ocasions, dependents de les capacitats específiques de l'alumnat, com poden ser les derivades de la maduració de les estructures lògiques del pensament que possibiliten o no, la capacitat d'identificació i discriminació, o les de relació i ordenació; però també, en d'altres ocasions, la dificultat de l'aprenentatge pot ser conseqüència de l'existència de dissonàncies en la capacitat perceptual o en la dificultat d'interiorització de les representacions mentals; o bé, degudes a deficiències de processament del raonament matemàtic o, simplement, fruit de l'estat maduratiu d'adquisició de la mesura i, en moltes, degut al procés d'aprenentatge aplicat fruit d'una determinada concepció educativa del professorat. Entre d'altres i com a més importants, es poden destacar:

- *els umbrals de sensibilitat d'un determinat òrgan sensorial ja que capaciten i són necessaris per a la discriminació de la magnitud a mesurar.*
- *els vincles i interconnexions de la funcionalitat fisiològica cerebral i de les connexions nervioses, imprescindibles pel reconeixement de l'estímul i per l'acció.*
- *la maduresa perceptiva que possibilita que a més de la captació sensorial es produeixi la seva identificació i posterior aprehensió cognitiva.*

- *les estructures lògico-matemàtiques que doten dels processos d'identificació, ordenament, equiparació i equivalència de la magnitud respecte a unitats homomagnitudinals i heteromagnitudinals.*
- *la potencialitat i necessitat d'aprenentatge que genera l'entorn mediambiental i educatiu.*
- *les normes i imposicions dels hàbits antropològics creats per la filogènia cultural.*
- *les necessitats i imposicions tecnològiques d'aplicació dels aparells de mesura.*
- *les dificultats inherents derivades de la pròpia magnitud.*

Dominar la mesura resulta ser, òbviament, un procés molt complex que integra fenòmens *exomagnitudinals* o exteriors a la pròpia magnitud i mesura, juntament amb d'altres *endomagnitudinals* o específics de cada magnitud o de cada mesuralització.

A) Factors exomagnitudinals.

En aquest bloc, cal diferenciar, segons l'origen de la seva incidència:

- *intrapersonals*: són d'origen psico-orgànic i deriven d'estructures constitutives i organitzatives del propi individu. Alhora es diferencien en :
 - *biològiques* o dependents de l'organització anatòmico-fisiològica de l'aparell sensorial i de l'estructura neurològica.
 - *psíquiques*, com és el procés perceptual, l'evolució cognitiva o el procés maduratiu d'adquisició de la mesura.
- *exopersonals*: les degudes a les influències educatives. Troben el seu fonament més important, en causes i motivacions antropològiques socio-culturals.

B) Factors endomagnitudinals.

L'origen de la seva influència ve determinat per la pròpia magnitud i pot ser degut a la seva pròpia epistemologia, a la terminologia lèxico-semàntica que s'utilitza o als factors tecnològics que incideixen en la seva aplicació.

En aquest capítol que tracta del procés de creació i estructuració de la intuïció estimativa, solament tractarem dels factors exomagnitudinals intrapersonals. L'adquisició d'*estratègies productives* i de "*pensament productiu*" (Wertheimer, 1959) de tipus estimatiu, com és el cas de l'estimació de la longitud dels objectes del test de la recerca, suposa la necessitat de saber aplicar i dominar estructures cognitives diverses, les quals depenen, també, de molts factors neurofisiològics i psíquics. Els factors incidents de tipus exomagnitudinals exopersonals i els endomagnitudinals es tractaran, bàsicament com a causes d'obstacles epistemològics i se'n farà esment al parlar de la didàctica de la mesura.

5.3 La mesura i les estructures anatòmico-fisiològiques

a. L'estructura cerebral

L'estimació de la mesura necessita, en el cas de la longitud, passar d'un àmbit espacial on té existència i es materialitza, a una representació abstracta creada sobre la base d'unes imatges visuals i unes representacions mentals. Mesurar és una complexa activitat mental que d'entrada té una forta incidència neurològica, especialment, des del camp de la visió.

En les últimes dècades els estudis de la neurologia, la biologia molecular i la psicologia cognitiva han vingut apropant els seus camps d'estudi, tot aportant a que marcs i escenaris com l'estudi de la percepció, el llenguatge, la memòria, la consciència i l'aprenentatge, entrin en enfoc on la recerca del substrat biològic i els mecanismes neuronals a nivell cel·lular o fins i tot molecular de les funcions mentals que els generen, es converteixen en pont i objectiu d'estudi comú, per intentar cercar respostes sobre la fonamentació de l'aprenentatge i la seva interiorització.

L'interrogant de com es produeix l'acte de mesurament en el cervell i on radica bàsicament aquesta facultat, significa la necessitat d'entrar en el camp d'estudi de l'estructura cerebral. Les diverses recerques efectuades sobre el cervell i en concret sobre els seus dos lòbuls⁶¹, demostra que cada un d'ells té una funcionalitat característica i especialitzada, alhora que en cadascun, existeixen, al mateix temps, diferents zones amb funcions, també, diversificades (còrtex visual, hipocamp, etc.). De gran transcendència han estat les recerques que intenten constatar quina meitat cerebral té el rol dominant; demostrant-se, en tots els casos, que l'hemisferi esquerre s'estimula especialment pels estímuls lingüístics mentre que l'hemisferi dret ho fa més pels no lingüístics i, sobre tot, per funcions geomètriques, espacials o per la música; alhora que en situacions de somni.

Seguin Mark Johnson⁶² i des d'una perspectiva genèrica, les funcionalitats dels hemisferis cerebrals, es poden resumir en:

- *Dextrehemisferi*. És l'hemisferi intuïtiu, artístic, el de la consciència oriental contemplativa. En ell es manifesta dominància en la percepció espacial, la orientació i la manipulació d'imatges, resultant bàsic per a les discriminacions sensorials.
- *Levohemisferi*. És l'hemisferi lògic, analític i de la racionalitat occidental. Sembla tenir dominància en el maneig del llenguatge, especialment en els sons consonàntics i en les regles gramaticals. És fonamental per a l'organització i la classificació.

Sobre la base d'aquest binomi, la dominància personal d'un dels lòbuls, determina una especial predisposició i facultats o habilitats d'aprenentatge, vers unes determinades àrees del saber per sobre d'ures altres. Aquesta realitat, justifica, a Howard Gardner, el poder parlar de la intel·ligència humana com a *intel·ligència múltiple*, de manera que el cervell o parts d'ell, intervenen en cadascuna de les diferents tipologies d'intel·ligència, estructurant-se així, la seva complexa multicapacitat.

⁶¹ Aquestes investigacions s'han efectuat a partir de tècniques d'estudi específiques com les anàlisis de casos d'apoplexies (danys i lesions cerebrals), o per les repercussions conductals post-operatòries després d'extirpacions o seccionaments de zones cerebrals; o bé a partir d'estudis indirectes com les audicions dicòtiques o l'observació del moviment inconscient de l'ull a la dreta o esquerra segons l'estímul; o per l'ús de recursos tecnològics com l'electrografia, la taquiscòpia o seguiment del procés de l'impuls anatòmic visual, la tomografia que mesura la variació de flux sanguini regional al fer determinades accions; entre d'altres.

⁶² Mark Johnson (1991). *El cuerpo y la mente*.

De la mateixa manera que hi ha relació directa entre predisposició i funcions de la dominància cerebral, existeix una relació inversa sobre les funcions del lòbul no dominant, i així, de tots són coneguts els casos de persones amb grans habilitats manuals, artístiques, d'orientació espacial, o bé lingüística o artística, mentre que alhora, presenten serioses dificultats davant situacions de raonament abstracte o de pensament lògic, i a la inversa. Les funcions dels lòbuls cerebrals⁶³ no queden, però, delimitades i definides, de manera tan simple i estricta, ja que a part d'aquesta ubicació més o menys precisa de les funcions ja esmentades respecte a un determinat lòbul, existeixen molts camps d'aprenentatge que queden indeterminats en quant a la seva localització cerebral i això es constata tant en el cas de funcions molt específiques com pot ser el domini dels sons vocàlics o la significació de les paraules, com en d'altres funcions més genèriques com poden ser les aptituds musicals, numèriques, pictòriques o d'altres funcions cognitives. Menys clar, encara, resulta ser l'intent de poder determinar els locus d'ubicació de funcions com la lògica, la intuïció, la consciència o el raonament.

Contràriament a l'existència de *zones funcionals* específiques, es constata, també, que existeixen altres funcions on la complementarietat o la necessitat de complementarietat dels lòbuls cerebrals, resulta imprescindible per el domini i desenvolupament de certs aprenentatges com succeeix amb el dibuix, on sembla ser que l'hemisferi dret aporta la informació global i del contorn i l'hemisferi esquerra, els detalls i elements interns.

b. La memòria

El procés d'aprenentatge necessita, a més de la percepció, d'altres factors que incideixen en la seva aprehensió, donat que a la percepció li cal un marc referencial que són les informacions construïdes amb anterioritat i així la memòria o capacitat de disposar i recuperar aquestes informacions prèvies, resulta imprescindible.

Les informacions elaborades pel cervell visual han de poder integrar-se en la funció de la memòria per tal de poder ser utilitzades en d'altres processos d'aprenentatge. L'extracció d'informació de la memòria és el que pot anomenar-se "*memòria funcional*"⁶⁴ que complementa a la "*memòria associativa*" que és la que reté la informació a llarg termini, permetent-ne la seva rememoració i utilització amb la finalitat d'incidir en el comportament immediat⁶⁵, sent fonamental per l'adquisició del llenguatge i el raonament.

Atenent a la integració i relació existent entre memòria i aprenentatge, Neal J. Cohen diferencia segons el grau de consciència de la memòria, dos tipus d'aprenentatge:

- a).- *declaratiu o explícits*, els que necessiten del registre conscient de la memòria.
- b).- *no declaratiu o implícits*, quan es fan sense registres conscients.

⁶³ Persones amb lesions en aquesta zona tenen limitació en l'ús del coneixement sense que això signifiqui que no conservin una gran quantitat d'informació acumulada ni que no tinguin valors alts en coeficient intel·lectual.

⁶⁴ Patricia S. Goldman-Rakic (1993) - *La memòria funcional y la mente*. A "Mente y Cerebro". Libros de Investigación y Ciencia. Ed. Prensa Científica S.A. - Barcelona

⁶⁵ Les experiències efectuades en el camp de la neurologia, demostren que les operacions de la memòria funcional s'ubiquen en la regió dels lòbuls prefrontals del còrtex cerebral i les de l'associativa en la regió de hipocamp com explica Goldman-Rakic: "... el paper principal de l'hipocamp és el de consolidar noves associacions, mentre que el còrtex prefrontal s'ocupa d'extreure del emmagatzemant a llarg termini, situat en altres parts del cervell, els productes d'aquest aprenentatge associatiu (fets, normes) que calgui utilitzar en la tasca immediata". Persones amb lesions en el còrtex prefrontal tenen limitació en l'ús del coneixement, sense que això signifiqui que no conservin una gran quantitat d'informació acumulada ni que no tinguin valors alts de coeficient intel·lectual.

Kandel i Hawkins (1993) al definir les característiques d'aquest dos tipus d'aprenentatge, destaquen la dificultat existent per aconseguir les interioritzacions o habilitats inconscients i intuïtives, aspecte a tenir en compte considerant que són la base de l'estimació:

“l'aprenentatge explícit és ràpid i pot aconseguirse després d'un primer contacte. Generalment implica l'associació simultània i permet emmagatzemar informació sobre un succés que es dona en el temps i en un lloc determinat, d'aquí que proporcioni una sensació de familiaritat amb successos previs. Per contra l'aprenentatge implícit, és lent, acumula habilitat a partir de repetició de proves. Sol necessitar l'associació d'estímul seqüencials i emmagatzema informació respecte a les relacions predictives entre successos. L'aprenentatge implícit es manifesta principalment per la millora en el desenvolupament de certes tasques, sense que el subjecte sigui capaç de descriure amb exactitud què és el que ha après, tot posant en joc, sistemes mnemotècnics que no incideixen en els continguts del coneixement general de l'individu”⁶⁶.

Qualsevol activitat vital com pot ser anar en bicicleta o l'acte d'amidament, comporta una gran complexitat en les operacions mentals intervinents, ja que cal la consciència temporal i espacial del propi moment i context, alhora que la recuperació instantània de les informacions emmagatzemades de manera explícita i que formen part del propi bagatge de coneixements i experiències, però, alhora, de recuperacions inconscients que aporten la informació per posar en joc les habilitats necessàries. L'amidament estimatiu, comporta, en conseqüència, un procés més difícil al ser, fonamentalment, un aprenentatge de fons implícit o no declaratiu. L'alteració dels lòbuls temporals del cervell, que són els centres de memòria, afecten profundament a qualsevol tipus d'aprenentatge i en especial els explícits.

Aprenentatge i memòria constitueixen la base del progrés humà tan individual com social, de manera que l'aprenentatge individual transcendeix al propi individu per ser generador de la cultura social que arriba a formar part de multitud d'aprenentatges implícits.

5.4. Cervell i mesura

Resulta prou conegut que, entre diferents persones, hi ha molta diversitat de capacitat de domini de la mesura, però al mateix temps, algunes d'elles, presenten un alt domini en certs aspectes de la mesura i grans dificultats en d'altres. No és estrany, trobar persones que dominen les transformacions i equivalències mètriques però no la capacitat d'efectuar estimacions o el saber utilitzar correctament els instruments de mesura, o a la inversa. Aquesta situació és molt menys palpable dintre un mateix bloc matemàtic (numèric, geomètric, algebraic, ...) degut a que el seu domini és molt més global, encara que sí pot haver-hi diferència de domini entre ells, podent coexistir una bona capacitat d'abstracció numèrica al costat d'una orientació espacial deficient, deguda, en bona part, per la dominància i capacitat dels lòbuls cerebrals.

També la mesura, que té un vessant de contingut espacial i una altra de tipus numèric, no s'escapa de les dominàncies dels hemisferis cerebrals. Aquesta doble funció, significa que necessita de la integració dels dos hemisferis, fet que pot comportar per un costat l'existència de dificultats d'aprehensió segons la dominància hemisfèrica, però per l'altra, possibilita que tothom pugui tenir algun tipus de domini de la mesura. Podria ser, tot i que no està analitzat de manera específica, que la seva adquisició funciona com en el cas del dibuix o sigui que necessita d'aquests dos blocs o funcions de complementaritat i no d'una prioritat de dominància d'hemisferi. La mesura i concretament les longituds uni, bi o tri dimensionals, queden immerses, d'una banda, en el món espacial, funció bàsicament controlada per l'hemisferi dret i per l'altra costat, necessita de processos de raonament

⁶⁶ Pag. 56

simbòlic i abstracte que dirigeix l'hemisferi esquerre. A tot això, cal afegir-hi, a més, les necessitats de les estructures lògiques de comparació, ordenació i igualació que formen part de la seva base conceptual i que no tenen un marc concret d'ubicació cerebral sinó que necessiten d'un cert nivell de globalitat.

La complexitat de la mesura, sorgeix, entre d'altres causes i ja des d'un inici, de la pròpia complexitat de les connexions nervioses que cal establir entre el dextro i el levohemisferi i amb la globalitat del funcionament cerebral. Potser és aquesta necessitat, imprescindible, de la intervenció dels dos hemisferis al mateix temps que de la globalitat cerebral, una de les causes de les moltes dificultats que es manifesten en el seu aprenentatge; ja que això comporta un seguit d'adequacions molt superior a d'altres processos d'aprenentatge que només necessiten, bàsicament, de l'aportació de la dominància d'un dels dos hemisferis. Considerant que en totes les persones, generalment, un dels hemisferis prima sobre l'altra, no és estrany doncs, que d'una o altra manera, tothom es veurà afectat per aquesta doble incidència hemisfèrica i de la reorganització informativa que cal efectuar davant la mesura i que manifesti més capacitat en una direcció que en una altra.

5.5. Estructura perceptual i imaginació

Moltes de les justificacions donades per alguns dels subjectes de la investigació, posen en evidència la necessitat de la possessió d'imatges i representacions mentals per tal de poder solucionar el repte estimatiu que se'ls planteja en la recerca. Aquestes representacions solen anar amarrades de sentiment i emoció. En són un exemple:

- ❑ *“No puc pas estirar-les perquè sembla que s'escapen i no em caben... (a la ment)”*
- ❑ *“Aquesta m'ha resultat molt més difícil perquè al ser tan prima semblava que no hi podia repenjar la mà per mesurar-la a pams”.*

La visió exclusiva de l'objecte no resulta suficient per dominar l'estimació, cal recórrer a la memòria per aportar els recursos prèviament interioritzats plens d'experiència, interessos, motivacions i sentiments. Objectivisme i subjectivisme configuren un tot on es barregen les imatges perceptives, les representacions mentals i els raonaments producte de contrastos i comparacions amb experiències prèvies: *“L'objectivisme relaciona la ment, el llenguatge i el món físic. Suposa una realitat fixa, determinada i independent de la ment amb símbols arbitraris que aconseguen significació a l'organitzar directament aquesta realitat objectiva. El raonament és una manipulació d'aquests símbols regit per lleis que quan funcionen perfectament, permeten accedir al coneixement objectiu. Diferencia el costat cognitiu, conceptual, formal o racional del corporal, perceptiu, material i emocional. Segons això, tot significat, connexió lògica, conceptualització o raonament s'alinea amb la dimensió mental o racional, i, al contrari, la percepció, la imaginació i l'emoció, amb la dimensió corporal. Aquest enfoc ha portat a la devaluació de la imaginació dins les teories del significat i de la racionalitat; factor degut especialment a les influències cartesianes i kantianes en que es fonamenta, en bona mesura, la teoria del coneixement” (Jonhson, M., 1991).*

És obvi que l'aprenentatge nascut de la percepció es construirà gràcies a l'aportació d'una innombrable quantitat d'elements objectius, però, també al mateix temps quedaran delimitats i influïts per factors subjectius diversos que incideixen en aquesta aprehensió, resultant inviable la puresa d'una concepció objectivista de la captació perceptual o de l'aprenentatge en general. Aquesta incidència de la subjectivitat perceptual determina unes característiques que Neisser (1976) resum en:

- 1.- Les relacions entre magnituds físiques i psicològiques, no són proporcionals (doblar una magnitud física no significa la duplicació de la psíquica: doblar la intensitat sonora crea malestar o satisfacció, però doblar aquest só no vol dir doblar la sensació creada).

2.- L'engany dels sentits o paradoxes, es produeix en aquelles situacions que les condicions proporcionen informació contradictòria, i en aquests casos l'engany s'efectua de forma directament proporcional o sigui a més mesura, més engany i a menys, menys. És, per exemple, el cas de l'engany de la verticalitat enfront de l'horitzontalitat. "L'engany de la verticalitat és una prova de la incorrecció mètrica, però al mateix temps, ho és d'una incorrecció funcional de la percepció visual" (p.23).

3.- Existeix una clara diferenciació individual davant un mateix context perceptual degut a les capacitats perceptives personals: capacitat o nivell crític d'estimulació, motivació, sentiment que genera o l'experiència amb l'estímul.

Davant un determinat estímul el cervell ha d'extreure'n les característiques específiques i invariants d'entre la multitud d'informacions que li arriben tot "interpretant-les", activament, a partir de les funcions de la memòria, constituint aquest procés, una part molt important i transcendental de la percepció. En el cas de la mesura longitudinal, evidentment, les representacions i imatges visuals, tàctils i cinestèsiques en seran el fonament imprescindible. Un dels grans reptes de la psicologia cognitiva consisteix en intentar cercar alguna resposta sobre com ho fa el cervell per a integrar la informació i com la recupera. Centrar aquesta problemàtica en l'adquisició de les mesures longitudinals significa posar el món de la percepció visual com a punt prioritari d'anàlisi per ser el receptor sensorial d'entrada i posteriorment serà la seva interpretació perceptual pertinent l'element imprescindible del reconeixement estimatiu; de manera que l'estructura perceptual i la perfecció o capacitat d'aquesta, resulta ser un factor cabdal per a la precisió del domini estimatiu de les mesures.

El cervell no és un pur reproductor o analista de les imatges, sinó que construeix permanentment el món visual i així, per exemple, la imatge d'un objecte que canvia de posició i es modifica amb la distància, el cervell aconsegueix, tanmateix, establir les seves mesures i proporcions reals⁶⁷. De manera idèntica, tots som conscients que les "il·lusions òptiques" veuen quelcom que en la realitat no és exactament tal com "es veu", o sigui que existeix una "visió interior" que és molt més que el que l'ull veu. La mesura necessita del domini de l'espai i aquest mateix domini necessita de la imatge visual creada en la ment.

Com i de quina manera es crea la imatge visual és un dels interrogants més importants que investiguen les neurociències⁶⁸. Intentar donar-hi resposta porta, inevitablement, a l'estudi cerebral des d'una perspectiva anatòmica i fisiològica⁶⁹. La comprensió o consciència visual resta en la base profunda de l'aprenentatge, de manera que el cervell

⁶⁷ Freudenthal. (1983). Actes III Jaem. Zaragoza

⁶⁸ Michel Imbert (1988). *Las neurociencias cognitivas*. RCIS.

⁶⁹ De manera resumida en el que fa referència al cas de la visió, s'ha constatat que el cervell disposa d'una estructura la "V1" anomenada "còrtex visual primari" o segons Henschen "retina cortical", localitzada a la part posterior d'ambdós lòbuls, connectat cadascun amb la retina de l'ull oposat tot passant prèviament per el nucli lateral genicular (Estructura subcortical que consta de sis capes o estrats cel·lulars. Les quatre superiors o parvocelulars, són neurones de cos cel·lular petit que capten el color, mentre que les dues inferiors són de cèl·lules grans o magnocèl·lules i són les receptores de la llum). Fleshing (finals s.XIX) demostrà que la regió V1, està ja madura en el naixement, mentre que les regions corticals que l'envolten continuen evolucionant com si la seva maduració depengués de l'experiència. Es creia que V1 era el punt de captació i ingrès de la radiació visual i les zones del seu voltant eren receptacles de funcions "psíquiques" superiors relacionades amb la visió (cogitationzentren). Zeki i col·laboradors demostraren, més endavant, el fet de l'especialització funcional del còrtex visual o que la forma, el color, el moviment i altres atributs del món visible són processats per separat en zones específiques. Al mateix temps constataren que les connexions nervioses eren reafers o de reentrada o sigui que permeten un flux bidireccional d'informació entre àrees diferents de manera que la integració no es fa de cop i volta o en una única fase o per l'amalgama de les diferents àrees visuals sinó que la percepció i la comprensió del món visual han de donar-se paral·lelament a la informació sensorial com demostren els casos de "visió cega" que tot i "veure" no identifiquen (La lesió de V1 genera incapacitat absoluta de visió, però una lesió d'una àrea d'especialització fa inaccessible o incompreensible el món visual).

funciona sobre la informació rebuda a través dels seus òrgans sensorials i com diu Semir Zeki (1992), el *"món que veiem és invenció del cervell visual"*. El món que coneixem, podem dir doncs, que és fruit de la "creació" elaborada per la ment. Fruit d'aquest procés d'integració de les imatges i, conseqüentment, de les representacions mentals elaborades per la percepció, dependrà en bona part, la capacitat de copsar l'entorn i de saber interpretar correctament les magnituds implicades.

La "comprensió" suposa el fet de l'acció del raonament preposicional de tipus deductiu, però també, de l'aportació d'estructures imaginatives complexes que constitueixen la nostra *xarxa de significats*, els quals són preconcebuts i projectats metafòricament. Mark Johnson diferencia com a estructures imaginatives, els *esquemes d'imatges* i les *projeccions metafòriques*; estructures empíriques del significat, però limitades pel funcionament i experiència corporal. Els esquemes de les imatges, segon ell, són de naturalesa no proposicional i de caràcter figuratiu en tant que estructures de la imaginació corporeitzada. La projecció metàfora és concebuda com a estructura penetrant i indispensable de la comprensió humana, mitjançant la qual projectem patrons d'experiència, amb el propòsit d'estructurar i organitzar la comprensió abstracta. Aquesta capacitat de generar i actuar amb els esquemes d'imatges i les projeccions metafòriques, és el que constitueix el poder i la capacitat de la imaginació i base de la intuïció, formes cognitives d'alt poder significatiu i resolutori.

5.6. Percepció i Sensació

Un element previ a tenir en compte per entendre part de la dificultat que crea la percepció en l'aprenentatge de la mesura és intentar veure de quina manera intervé en el processament de la informació magnitudinal. Generalment, i ja des de la ciència clàssica, s'ha diferenciat sensació de percepció⁷⁰, situant la primera en un estadi més fisiològic producte dels sentits i com un estadi previ de la percepció, mentre que la percepció era considerada com a activitat cerebral i cognitiva. Rainer Gusk⁷¹ diu al respecte: *"les sensacions eren considerades com a simples experiències internes, provocades per simples estímuls; mentre que les percepcions s'entien més com a experiències "complexes" provocades per estímuls "complexes" i generalment de molta importància. Associada a aquesta concepció era el fet de creure que les sensacions anaven unides estretament als receptors sensibles mentre que les percepcions estaven influïdes per activitats cerebrals més elevades"*.

Actualment es parla poc de sensació ja que els enfocaments teòrics que prioritzen la sensació si bé resulten adequats en els processos explicatius dels arcs reflexes del món inconscient, no permeten donar resposta adequada al comportament de cap organisme respecte al seu entorn mediambiental i, especialment, al món conscient⁷²: *"tots els processos psíquics*

⁷⁰ Aristòtil en el llibre *Sobre l'ànima* diferencia els cinc sentits però alhora defensa el fet de l'existència d'un ens o sentit comú "*sensus comunis*" que unifica i integra les diferents recepcions sensorials tot integrant-les en un estadi superior, en una estructura d'unitat sensorial que proporciona informacions generals que no són específiques d'un determinat sentit: moviment, repòs, número, forma, mesura i totalitat. Sherrington (1996) comparant el funcionament del sistema nerviós amb el d'una central telefònica, classifica els sentits en base a que s'orienta per la posició i la direcció que prenen els elements sensibles del cos quan aquest actua. Diferència: "*interoceptors*" (transmeten les sensacions orgàniques); "*propioceptors*" (informen sobre posició d'articulacions, tensió muscular, postura cos, moviment lineal i de rotació del cos) i els "*exteroceptors*" (proporcionen informació de l'entorn); dividint aquests en: "*contactoceptors*" (sentits del tacte, gust, pressió, contacte, temperatura i dolor) i, "*distancioceptors*" (vista, oïda, olfacte). Dins aquesta concepció la relació de ls òrgans sensorials amb el món motor es fa via sinapsis on poden combinar-se influències excitadores o bé inhibidores capaces de produir el moviment a partir d'un reflex fix i rígid.

⁷¹ Rainer Gusk (1992). *La percepció. Diseño psicológico de la información humana* (p.8)

⁷² Segons James Gibson és un intercanvi específic entre l'organisme que percep i les seves possibilitats d'actuació d'un costat i el significat ecològicament definit de l'objecte de la percepció, de l'altre. Són "*acomodacions*" entre circumstàncies ambientals i l'organisme.

tenen una base fisiològica material però no són suficients aquests processos fisiològics per explicar per ells sols la percepció. Cal tenir en compte altres determinants psicològics com són, per exemple, els de "significat", "sentit", "hipòtesi", "forma" "affordance" i "esquema" per citar-ne, solament, alguns dels més importants". (Guski, R. p.63).

El percebre és, doncs, un procés actiu en el que a més dels receptors sensorials participen d'altres elements estructurals com són, per una banda, el propi moviment i per l'altra, la intencionalitat o finalitat i l'interès o motivació juntament amb factors emocionals, històrics, socials, lingüístics a través d'interaccions mútues i complexes o sigui tal com senyala Mark Jonhson⁷³, el cos estructura i intervé en la ment definint-ne l'estadi compresiu i la creació dels nivells d'imaginació: *"La imaginació i la comprensió, sorgeixen de l'experiència corpòria. L'experiència i el significat humà depenen fins a cert punt del cos, ja que el contacte s'efectua amb el món espacio-temporal que ens envolta".*

Donat que l'experiència es produeix en un entorn específic i que aquesta captació crea una reacció sobre la qual pot existir plena consciència, la percepció com a tal, és fruit d'aquest entorn, d'una situació causal que origina un determinat obrar però que alhora integra el propi coneixement: *"no es poden ja separar els processos de visió i de comprensió, ni tampoc hi ha lloc per a separar de la consciència, l'adquisició de coneixement visual"*⁷⁴

La visió creadora de les imatges visuals pot resultar "enganyada" degut a les relacions de l'objecte respecte al seu fons de manera que cap objecte es percep com a únic i aïllat. Veure quelcom significa assignar-li un lloc dins una totalitat⁷⁵, una ubicació en l'espai, una magnitud en la mesura de la seva grandària, de la lluminositat o de "distància". Aquestes interdependències poden venir afectades i influenciades per les motivacions i els interessos personals⁷⁶, causes, entre d'altres, de la creació de les "il·lusions sensorials", les quals afecten, consegüentment, la percepció que hom té de l'objecte. La visió creadora que s'ha generat de l'objecte, afecta, òbviament, la captació de les seves magnituds i, evidentment, la percepció estimativa de les seves mesures. Tots, en alguna o altra ocasió, hem experimentat fenòmens diversos relacionats amb aquestes il·lusions perceptives i tant en el cas del moviment o en l'apreciació de longituds com a nivell d'estimacions superficials i volumètriques: el moviment, per exemple, es capta en relació a un entorn i si l'entorn i objecte es mouen a la mateixa velocitat, el moviment passa inadvertit; si ho fan en direccions contràries s'intueix més ràpid; si és una velocitat constant, sembla més ràpid en els extrems de l'entorn; el moviment d'un entorn major indueix el moviment aparent del menor; quan es posen dues línies rectes d'igual longitud, una amb punta de fletxa cap a fora i l'altra cap a dintre, la primera sembla més llarga (*il·lusió de Müller-Lyer*); o si dues línies iguals es troben entre dues rectes convergents la que està més a prop del vèrtex d'unió de les convergents també es veu superior (*il·lusió de Ponzo*); la grandària dels objectes o cercles es veuen modificats pel color del fons; les il·lusions verticals⁷⁷ que augmenten la mesura respecte a la mateixa mesura posada en horitzontal; o la lunar que veu més gran la Lluna quant surt o en el seu ocàs que no quan està en la seva verticalitat. Existeixen, doncs, moltes situacions on la il·lusió visual modifica la interpretació del fenomen o la valoració magnitudinal d'aquest.

⁷³ Mark Jonhson (1991). *El cuerpo y la mente*

⁷⁴ Semir Zeki (1992) (p.35)

⁷⁵ Aquest fenomen és un dels elements clau de la teoria gestàltica de la percepció (Wertheimer, Köhler) que considera que la informació creada forma un tot unitari entre objecte-fons, o sigui que l'objecte és fruit del fons, alhora un altre element clau de la teoria és el de la interacció dels elements per crear una estructura globalitzadora i significativa pel receptor.

⁷⁶ Arnheim, Rudolf (1987). *Arte y percepción visual. Psicología de la visión creadora*. EUDEBA. Buenos Aires.

⁷⁷ Künnapas, T.M. 1957. *The Vertical-Horiztional illusion and the visual field*. Journal of Experimental Psychology. (53, 405-407).

En el cas de la "il·lusió vertical", estudiada fa més de cent cinquanta anys, Guski resumeix les interpretacions d'aquest fet, a través de l'evolució de les seves concepcions teòriques⁷⁸ "l'explicació primerament donada, es fonamentava en el fet de l'asimetria del globus ocular; després es va parlar de "valors espacials" de la retina, segons la qual, les distàncies entre punts situats en el camp visual superior se'ls donava un allunyament espacial superior que a les mateixes distàncies en el camp visual inferior; posteriorment, Kunapas (1957) desenvolupà una teoria de la delimitació del camp visual, segons la qual els objectes o línies en sentit vertical sempre es comparen inconscientment amb la delimitació superior, imprecisa però sempre present, del nostre camp visual... En el marc de la investigació de la "percepció ecològica"⁷⁹ caldria suposar que aquest fenomen està relacionat amb l'espai d'actuació que, igual que l'espai visual, té forma el·líptica: els objectes estesos horitzontalment són assequibles i manipulables amb més facilitat que els objectes de la mateixa mesura de direcció vertical".

Per Mark Jonhson, és fruit d'un esquema creat a partir d'imatges on el cos intervé fonamentalment en aquesta interpretació; és un patró dinàmic de les nostres interaccions perceptives i els nostres programes de motricitat que donen coherència i estructura a la nostra experiència. Arnheim ho interpreta amb el que ell anomena com a "estructures induïdes" o forces internes generades entre els objectes i les parts d'un tot, de manera que produeixen un fenomen de tensió entre els elements presents, creant en la persona un judici visual no intel·lectiu, fruit del camp de forces creades per la constel·lació d'estímuls que cerquen un estat d'equilibri; la configuració visual resultant és, per tant, fruit d'un procés totalment dinàmic i globalitzant i no d'un coneixement adquirit prèviament.

L'esquema de "verticalitat" podria dir-se que neix de les experiències i tensions creades pel binomi dalt-baix tot seleccionant-ne, la ment, les estructures que en resulten significatives per a les necessitats vitals-corporals⁸⁰ i creant-se a partir d'aquí, l'estructura abstracta d'aquestes experiències, imatges i percepcions.

L'espai funcional d'actuació de la psicologia ecològica determina la diferenciació perceptual entre individus, existint una dependència de la percepció amb les circumstàncies biològiques, emocionals i socials⁸¹. Posteriorment des de la psicologia social (Tajfel & Wilkes⁸²; Holzkamp & Perliwitz⁸³, entre d'altres) s'ha vingut ratificant la incidència dels factors psíquics en la modelació perceptual de manera que el resultat de la percepció o judici de les persones depèn en gran mesura de factors de situacions i de memòria del propi perceptor⁸⁴.

⁷⁸ Rainer Guski (1992). *La percepció. Diseño psicológico de la información humana* (p.143)

⁷⁹ Els plantejaments ecològics de la percepció (James Gibson), es fonamentem en la teoria gestàltica d'integració de formes, i en base a fonamentacions psicofísiques derivades de l'evolució filogènica dels sentits. El fet de la marxa i la posició erecta, obliga al control postural del terra fent necessari aquest marc referencial i d'aquí que en el camp visual, més de la meitat d'ell s'omple del terra, convertint-se aquest terra, en "l'escala proporcional" de la visió i la referència magnitudinal; d'aquí que les coses planes i l'extensió horitzontal es reconeixen de manera diferent a la verticalitat o inclinades. La constància és superior en contextos inclinats cap avall i menor amb els que pugem.

⁸⁰ Chapanis & Mankin (1967). *The vertical-horizontal illusion in a visually-rich environment*. Perception and Psychophysics. 2, 249-255) constaten que la il·lusió vertical és superior en les dones que en els homes i posteriorment sembla que la interpretació d'aquest fenomen apunta a la diferenciació d'alçada entre ambdós gèneres que ocasiona espais d'actuació diferencials, adquirint aquesta il·lusió un sentit funcional.

⁸¹ Bruner & Goodman (1947). *Value and need as organizing factors in perception*. Journal of abnormal and social psychology. 42,n 33-44) constaten que els factors afectius o culturals feien modificar els judicis respecte als aspectes perceptius dels objectes, al fer valorar la dimensió de monedes reals i cercles neutres de cartó de les mateixes mesures, a persones d'estrats socials diferents.

⁸² Tajfel, H.; Wilkes, A.L. 1963. *Classification and quantitative judgement*. British Journal of Psychology. (54, 101-104)

⁸³ Holzkamp, K.; Perliwitz, E. 1966. *Absolute oder relative "Größenakzentuierung"*. Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie (13, 390-405)

⁸⁴ Warr, P.B.; Knappere, C. 1968. *The perception of people and events*. Wiley & Sons. London.

5.7.- Estructuració perceptual i l'estimació de mesures

a. De la percepció a l'acció

Els estudis que analitzen la relació entre percepció i acció són bastant abundants, especialment, els centrats en la incidència del camp visual. Considerant la importància que té la visió per l'estimació longitudinal, són, aquests, els que ens resulten més interessants i en els que centrarem l'atenció.

Els resultats d'experimentacions diverses en les que calia determinar la posició d'objectes tot limitant, prèviament, el camp visual dels subjectes experimentals a conseqüència d'ulleres que reduïen el camp de visió, especialment en la zona *foveal*, o que modificaven l'eix de visió, arriben a la conclusió que la coordinació de l'ull amb la mà es veu afectada per dos processos de control integrats:

- un, controla la direcció de la mà respecte de l'eix visual i utilitza la informació de la perifèria del camp visual. La seva funció és la de controlar i orientar el moviment de manera que podem entendre que hi ha implícit un complex metrisme situacional.
- l'altre, controla la posició exacta i precisa de la mà i dels dits. Utilitza prioritàriament la informació de l'àrea foveal en la que s'integren els dits i l'entorn.

El conjunt coordinat de les dues accions genera, el que podríem anomenar, la "*informació perceptual*", informació que cal entendre-la no solament com a "saber" sobre un mateix o sobre l'entorn, sinó també com a estats energètics i d'equilibri, com pot ser el fet de saber la posició exacte dels membres del cos i on els tenim, sense necessitat de veure'ls, o en les capacitats d'accions i moviments realitzades de manera inconscient. El domini i precisió que cal, per aconseguir qualsevol reconeixement o per poder adquirir la intuïció suficient que permeti realitzar determinades accions i moviments, necessita d'un aprenentatge molt complex en el que intervindran factors perceptuals molt diversos. En el cas, per exemple, d'abocar una determinada quantitat de llet en un cassó per tal d'escalfar-ne un determinat número de gots, i que al abocar la llet en els gots s'omplen, exactament, els que es volia omplir, no s'ha après a partir d'avaluar l'àrea del recipient i calcular quina ha d'ésser l'alçada del líquid per a tenir el volum determinat que es necessita; en realitat són d'altres processos interns els que intervenen, creant-se una intuïció estimativa de tipus mètric.

La informació perceptual es genera i fonamenta en el contrast de "*situacions de canvi*" o sigui, es construeix a partir de la comparació que s'estableix respecte a d'altres situacions prèvies ja viscudes. Segons això, és aquest procés comparatiu el factor causal que permetria crear, el que anomenarem, "*intuïció mètrica cognitiva*" o capacitat de valorar inconscientment una situació respecte a d'altres d'anteriors, detectant-ne les similituds i les diferències, i en definitiva el grau i nivells de reconeixement. Aquest contrast és l'estructura fonamental de la comprensió perceptual, de manera que situacions invariants o constants, no potencien el desenvolupament de la percepció (*Ilei ecològica de l'estalvi energètic*).

b. La interiorització de la intuïció estimativa

La percepció de la mesura de longitud, especialment en el que fa referència a les valoracions estimatives, dependrà de com des de la memòria, els coneixements adquirits estiguin lligats a fets o situacions i també de com s'estructuri la relació emocional que l'objecte o el context pugui crear.

Tota acció derivada d'una determinada percepció genera, paral·lelament, una simultaneïtat i continuïtat de moviments molt complexos, els quals són efectuats de forma quasi inconscient. Però sabent-ne, sempre, la mesura o quantitat d'acció necessària a desenvolupar. Aquest fenomen el trobem en qualsevol situació per intrascendent que ens sembli, i l'apliquem des del fet d'abocar una determinada quantitat de llet per escalfar per tal de beure'n, més o menys, un got; com en el simple acte de caminar, córrer, saltar, pujar una escala; o en el moment de repartir el menjar als comensals de manera que tothom tingui la part corresponent, o en l'obertura d'una porta, Al repartir el menjar, per exemple, mentre una mà amb el culleró pren el menjar de la cassola, agafant-ne una quantitat determinada per tal que tothom en tingui i tingui el suficient, l'altra mà reparteix el plat ple; o, en l'acte d'obrir la porta d'un armari tot evitant-ne la topada amb el nostre cos mentre al mateix temps l'altra mà, cerca ja l'atuell que necessitem; o al posar aigua en un got mentre graduem la capacitat que necessitem a través del control de la intensitat del cabdal de sortida del líquid i també al mateix temps, amb l'altra mà, estem controlant la posició espacial correcta del got per mantenir-lo en la posició adequada, i tot això, sota un control temporal per tancar just a temps per evitar que el líquid sobreixi del got. Espai, temps, capacitat, amplitud,... es veuen interrelacionats en cada una de les accions habituals que fem al llarg del dia i el nostre cos, posseeix un control intern que permet el domini magnitudinal que requereix cada context.

Les interioritzacions i controls magnitudinals que hom posseeix i que es manifesten en l'acció, no són fruit d'una reflexió deductiva que es fa en cada cas sinó que són quasi instintius i sense control conscient; per exemple en el moment de cercar l'atuell que millor ens servirà per posar una determinada quantitat de líquid implica tenir una idea del volum que es necessita i què hi pot caber. És evident que es necessita una experiència amb atuels i líquids per aconseguir saber "veure" la magnitud de l'objecte; la percepció del volum de líquid, no es fa o s'ha après fruit de càlculs algorísmics d'àrees i volums, són d'altres processos els que intervenen i on la percepció hi juga un paper fonamental.

Podem deduir, de tot això, que en el rerefons del camp visual, existeix d'alguna manera, el que podríem anomenar, "**l'escala mètrica subjectiva**" de la percepció de la mesura i de la distància dels objectes. Aquesta dotació, es una informació perceptual que es construeix progressivament com a conseqüència dels contrastos situacionals, però, aquesta dotació no explica ni permet entendre el procés de com s'estructura, perceptualment, la capacitat estimativa de la longitud.

Aquest domini i capacitat interna és, en definitiva, una capacitat magnitudinal estimativa i per intentar cercar alguna explicació respecte a com s'adquireix o bé com s'efectua, s'han analitzat multitud d'accions humanes com pot ser el fet de pujar una escala⁸⁵; la reacció davant el perill de topades o d'ensopegar amb objectes propers⁸⁶; saber recollir la caiguda d'una pilota llançada; saber controlar l'obertura que hom ha de donar a la porta perquè hi pugui passar⁸⁷; o del control longitudinal de les passes al córrer en terrenys irregulars i ple d'obstacles⁸⁸. Les valoracions objectives d'aquests fenòmens s'efectuen a partir del càlcul d'índexs que quantifiquen la relació de les variables intervinents, anomenats per Gibson com a valors "*pi*". Els índexs *pi*, intenten integrar la relació entorn-organisme, o el fenomen

⁸⁵ Warren, W. (1984): *Perceiving affordances: visual guidance of stair climbing*. Journal of Experimental Psychology: Human perception and performance (10, 683-703).

⁸⁶ Schiff, W. (1965): *Perception of impending collision. A study of visually directed avoidant behavior*. Psychological Monographs (79, nº604).

⁸⁷ Warren, W.H.; Wang, S. (1987): *Visual guidance of walking through apertures: body-scaled information for affordances*. Journal of Experimental Psychology: Human perception and performance (13, 371-383).

⁸⁸ Warren, W.H.; Young, D.S.; Lee, D.N. (1986): *Visual control of step length during running over irregular terrain*. Journal of Experimental Psychology: Human perception and performance (12, 259-266).

que s'estudia amb el factor o característica humana que determina, de manera prioritària, la magnitud de l'acció efectuades (per exemple l'alçada dels escalons amb la longitud de les cames; l'amplada de la porta amb la de les espatlles; ...).

Explicacions que intenten donar resposta a com s'estructura l'acció davant la informació perceptual rebuda, ens possibilitaran apropar-nos al com s'adquireix la capacitat estimativa. Entre les interpretacions d'aquesta adquisició, per a la seva transcendència i amb molts punts de contacte o similitud entre elles, cal destacar les aportacions de la direccionalitat de la *percepció ecològica*⁸⁹ i la de *l'elaboració informativa* o de *l'smart mechanisme*⁹⁰ juntament amb la dels *cicles de la percepció* que intenta conjuminar aspectes de les altres dues.

a.- psicologia ecològica

La comprensió de la capacitat estimativa, en la psicologia ecològica, neix de la seva concepció sobre el coneixement de les "*possibilitats d'actuació*" que es porten a terme en les accions inconscients que fem davant qualsevol activitat diària. Tota acció o activitat per més simple que aparentment sembli, necessita d'algun tipus de control; el qual, en el fons, no és res més que una determinada forma d'estimació i així, molt sovint, es necessita d'aquest control estimatiu de les distàncies.

L'aprehensió d' aquest dominis innats són fruit d'unes *affordances* o acomodacions perceptuals, les quals, poc a poc van quedant integrades i implícites en el propi estímul tal com succeeix en les respostes conductals que s'aconsegueixen en els experiments conductistes. És doncs, a través de l'experiència i l'assaig-error, que la persona va creant la seva estructura perceptiva, la qual no és, únicament, la imatge visual sinó que porta integrada multitud d'elements significatius com pot ser, aquesta capacitat estimativa magnitudinal tal com es desprèn del que diu Jonhson: "*La manipulació resulta fonamental per a l'organització del coneixement i així el moviment corporal i les interaccions perceptives creen "esquemes d'imatges" o "patrons perceptius" perquè funcionen bàsicament com a estructures abstractes d'imatges, les quals són gestàltiques de manera que les parts s'estructuren entre elles reorganitzant-se en un tot i l'experiència manifesta un ordre discernible; de manera que en moltes ocasions significats abstractes i processos deductius no són més que esquemes derivats de la pròpia experiència corporal*".

L'affordança perceptual creada d'un objecte o d'una situació, serà la que possibilitarà la capacitat, més o menys precisa, del control i domini estimatiu tal com indica Rainer Rusky "*no es pot aprendre d'una manera segura, a valorar exactament en centímetres l'alçada dels escalons, les superfícies d'un seient o de les cases, l'amplada de les portes o dels escriptoris o dels cotxes. Però sí que podem aprendre a veure les nostres possibilitats d'actuació davant d'aquests fets. Això s'inicia en les fases primerenques de la infància a partir de l'exploració i manipulació i probablement no acaba mai més: aprenem la connexió entre les estructures visibles de les superfícies corporals, per una banda i les propietats no visibles d'aquests cossos (per exemple la seva capacitat de rodament, la seva visibilitat i la possibilitat de poder-los aconseguir) mitjançant la manipulació i el tempteig. Quan es constata que determinades estructures visibles en diferents cossos ofereixen, sempre, les mateixes possibilitats de manipulació, es pot ja, generalitzar i descobrir una forma superior d'invariança (p.118)"*

⁸⁹ Es fonamenta en la concepció de l'existència d'estructures neurals que descomponen els estímuls i símbols en components (features) així com en altres que els tornen a recomposar i d'altres, que depenen del tipus de percepció, determinen decisions sobre el tipus d'informació.

⁹⁰ Nom pres del món tecnològic. El planímetre polar n'és un bon exemple ja que permet a partir de resseguir la línia del contorn traslladar aquesta informació a un vectorial de manera que la seva longitud (aplicant una funció de cosinus) correspon a la integral de la superfície; càlcul que es fa sense conèixer els seus valors mètrics.

El fenomen de la *invariança perceptual*, un dels punts claus de l'enfoc ecològic, determina la possibilitat que certes propietats perceptibles es mantenen constants tot i que s'hi manifestin transformacions, com succeeix en el cas de la il·luminació diferencial d'un full però sempre es veu el paper com a blanc (tan si es a la llum d'una espelma com a ple dia); això mateix es manifesta en el fenomen de la constància magnitudinal, és a dir la persistència immutable de la mesura percebuda d'un objecte a diferents distàncies (es determina, per exemple l'alçada d'un objecte allunyat). No es té en compte l'allunyament relatiu sinó que és present ja en la mateixa organització òptica, que s'estructura en base al gradient referencial del terra que constitueix la norma de valoració de la magnitud dels objectes; aquest gradient és una adquisició o estructura ja permanent de la ment que actua a manera d'escala magnitudinal comparativa i que no es veu afectada per la reproducció de la retina de manera que aquesta acomodació o affordança resulta ser percebuda i continguda en la mateixa estimulació visual i sent captada per sistemes específics de percepció. D'una manera semblant Jonhson interpreta la creació d'aquestes affordances com a fruit de fenòmens d'equilibri de forces. Tot desequilibri necessita una resposta adaptativa per retornar a l'equilibri, encara que no com a purs reflexes condicionats: *“els nostres cossos estan influenciats per forces “externes” i “internes” com la gravetat, la llum, el calor, el vent, els processos corporals i la intrusió d'altres objectes físics. Aquestes interaccions constitueixen els nostres primers encontres amb forces, que posen de manifest relacions recurrents i modèliques entre nosaltres mateixos i el nostre entorn. Aquests models es desenvolupen com a estructures de significat a través de les quals el nostre món comença a mostrar certa mesura de coherència, regularitat e intel·ligibilitat... (p.64). Aprenem a ser responsables de la resposta i aquesta deixa de ser una acció reflexa. Aprenem a actuar a la llum de la nostra concepció d'una situació, no solament mitjançant reaccions automàtiques(p.67)”*.

La capacitat intuïtiva, per Mark Jonhson, s'estructura a través dels esquemes d'imatges i de les projeccions metafòriques les quals actuen com a significats no preposicionals aconseguits per l'experiència corpòria. La sensació d'estar dret i equilibrat, per exemple, és una consciència no proposicional per molt que involucri estructures proposicionals al intentar transmetre aquesta realitat: *“el contingut preposicional solament és possible en virtut d'una complexa xarxa d'estructures esquemàtiques no proposicionals que sorgeixen de la nostra experiència corpòria de manera que l'estructura deductiva de la nostra raó abstracta és un elevat refinament de les catalogacions de la nostra experiència corporal, refinament que ignora bona part del què succeeix en el nostre raonament..”*

James Gibson⁹¹, creu que la percepció té un funcionament semblant al de la radio. La sintonia del receptor permet la *“ressonància”* amb una determinada freqüència de l'emissor seleccionant una freqüència d'entre les moltes ondes electromagnètiques presents; al final, solament es necessita l'estímul o la informació sensorial, per saber, conèixer o precedir el resultat sense necessitat de fer prediccions deductives. La sintonia, aplicada a l'aprenentatge humà, correspon a les informacions innates de la dotació personal i d'altres que cal aconseguir, i la ressonància seria l'aprenentatge obtingut per assaig i error, per tal d'aconseguir un acoblament estable entre informació sensorial i resultat d'actuació. La selecció de l'estímul correspon al que s'anomena *“atenció selectiva”* (Allport, 1980, Neumann 1985) que no és més que un control sobre la *percepció dirigida* o la selecció d'una determinada opció perquè aporta informació més significativa i necessària des del punt de vista biològic o motivacional. Aquesta adequació, és la base del procés perceptual que permet *“orientar-se en el món i així poder sobreviure (p.64)”*, però que també possibilita, per altra banda, el desenvolupament funcional de processos superiors com, per exemple, del pensament.

⁹¹ Gibson, J.J. (1966): *The senses considered as perceptual systems*. Houghton Mifflin Company. Boston.

b.- smart mechanism

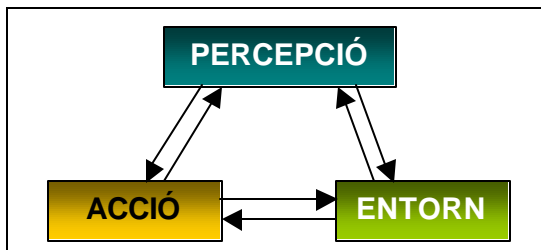
Sverker Runeson (1977), a través de la seva teoria de l'"*smart mechanism*"⁹², model pres del món del càlcul tècnic creu que es possible per medis indirectes i a partir de dades proporcionades per d'altres percepcions que no corresponen a la percepció bàsica d'aquell fenomen o als components fonamentals de la percepció, aconseguir la informació que es necessita i estructurar l'aprehensió cerebral d'ordre superior que l'organitza. Considera que el sistema visual disposa d'*smart mechanisms* diversos que configuren *affordances* que són les que permeten valorar o estimar la pròpia acció o magnituds complexes com poden ser les superfícies irregulars o les velocitats de mòbils, entre d'altres.

c.- cycle de percepció

En una posició que intenta conjuminar ambdues tendències, considerant que la creació no és un procés fix sinó que permanentment es va readaptant i reestructurant, Neisser⁹³ a través del seu model del *cicle de percepció*, concep la percepció d'una forma semblant a l'enfoc ecològic, però no com a simple recollida informativa sinó com a procés de reelaboració de les informacions i com un procés interactiu entre la recollida de dades i conceptes, mediatitzades i imbuïdes per l'expectativa personal. Aquesta expectativa es va modificant a través d'un cicle continu i de feed-back; així a partir d'esquemes anticipadors que tenen cura de la recollida de dades de l'objecte es produeix un canvi d'expectativa per passar a noves recollides informatives més objectives o sigui que resulta ser una activitat cognitiva-constructiva.

L'adquisició d'aquesta capacitat d'estimació innata, es producte de l'experiència "habitual" i és, en definitiva, a través de la integració constructiva personal amb l'objectiu de cercar solucions a "necessitats", la que ens porta a través de lleis ecològiques d'estalvi energètic, a la creació d'esquemes perceptius: ".. són les estructures variades i possibles que la nostra experiència ha d'encaixar a fi de ser coherent i comprensible (Jonhson, p.85) .. organització unificada i recurrent de coneixements i valors conceptuals i proposicions que compartim respecte de situacions i aconteixements típics (Jonhson, p.74)", o d'estructures perceptives plenes d'*affordances* que porten implícit el domini de les estimacions magnitudinals dels objectes i accions quotidianes o d'ús freqüent del nostre l'entorn.

Percepció, entorn i obrar, configuren una triada interdependent entre ells de manera que cadascun necessita dels altres per a la seva existència, sent totalment imprescindibles per l'adquisició de qualsevol coneixement. La interdependència que es genera entre ells és plenament bijectiva de manera que mútuament s'influeixen i així la percepció que capta la realitat sensorial de l'entorn es veu modificada per aquest fet que fa que aquest entorn



Esquema 8 : *Percepció, acció i realitat*

sigui captat, posteriorment, de manera diferent i idènticament succeeix amb la relació entre percepció i acció o entre acció i entorn. Obvi és, per tant, que l'aprehensió i interiorització de la mesura necessita de l'evolució perceptual que es va configurant fruit de la interrelació que es produeix fruit de l'acció aplicada en contextos i entorns específics.

⁹² Sverker Runeson. (1977): *On the possibility of "smart perceptual mechanisms*.

⁹³ Ulric Neisser (1981): *Procesos cognitivos y realidad*. Marova. Madrid

6.3 La intuïció estimativa crea tiva: procés d'adquisició i nivells.

L'adquisició de l'aprenentatge de la mesura té importants connotacions, com hem indicat, amb l'evolució neurològica dels hemisferis cerebrals i respecte a l'estimació amb la integració d' "smart mechanism" que possibilitin la construcció d'hàbits de respostes cognitives a estímuls perceptuals. Aquest procés que interrelaciona el món cognitiu amb el perceptual és el que configura la base de la intuïció; facultat " *misteriosa que tots tenim però que resulta difícil de captar i encara més d'explicar* (Fiol, M.L., 2002 p.28)". També en el mateix sentit es refereix a ella, Charon, J.E (1968) o Zeki, S. (1993). Intuïció i imaginació queden íntimament interrelacionades i sovint enteses com a la mateixa capacitat.

La seva validesa com a facultat cognitiva ha tingut al llarg de la història, els seus detractors i defensors. Els uns l'han considerat com a procediment acientífic i no precís ni exacte; d'altres, la situen com a element transcendental per l'acció creadora sigui artística o científica de manera que forma part de l'essència del propi pensament. Sovint la intuïció s'aparella i relaciona amb el coneixement intuïtiu, entenent aquest com a forma de coneixement sensorial perceptiu sense entrar en les seves connotacions de domini abstracte que també pot arribar a posseir. La intuïció, per tant, forma part de la forma de conèixer i relacionar aquest coneixement amb les respostes que donem a l'entorn o a la nostra pròpia interioritat. Percepció i intuïció resten íntimament entrelaçades i influenciant-se mútuament.

La importància de la intuïció pèl coneixement queda prou palesa a través de diversos anàlisis realitzades sobre les potencialitats cognitives dels matemàtics, entre elles les de Davis i Hearth (1988) destaquen els camps no verbals, espacials i holístics del pensament com factors essencials del que fan i com treballen realment, encara que no es destaquí al explicar la seva tasca. Així doncs, és evident que el desenvolupament matemàtic va més enllà del pur raonament lògicdeductiu i és aquí on la intuïció pren sentit per tal d'arribar a la capacitat matemàtica, camp totalment descuidat en la formació i aprenentatge, degut al poc coneixement que es té d'ella i de com enfocar-ne el seu aprenentatge i millora.

Fiol (2002) seguint Fischbeib (1987, p.3) distingeix diferents nivells o significacions de la intuïció:

- a. *Com a font i origen del coneixement vertader o aparentment vertader. És el sentit amb que l'utilitzen tant Descartes com Spinoza.*
- b. *Com a mètode. És quelcom com un mètode mental que ens permet captar l'essència d'un fenomen. En aquesta direcció l'utilitza Bergson.*
- c. *Com a forma de coneixement. Aprehensió realitzades directament sense necessitar cap tipus de comentari, explicació o justificació explícita. En aquest sentit l'utilitza Piaget encara que en fa una diferenciació entre elles considerant-les amb particularitats per a cadascuna: espacials, temporals, empíriques, operacionals, etc.*
- d. *Com a facultat cognitiva. A través de la qual es capten els coneixements directament. Kant pren aquest enfoc tot diferenciant-ne les intel·lectuals que permeten els coneixements de manera immediata i les sensibles relacionades amb el coneixement sensorial.*

El conjunt d'aquestes diferents interpretacions porta a entendre la intuïció com un procediment o estil cognitiu que possibilita el coneixement immediat sense l'aplicació de procediments racionals conscients.

Tal i com veurem al llarg de la recerca, l'adquisició de la intuïció es produeix a conseqüència de la necessitat de donar solució a situacions problemàtiques, les quals van cercant per assaig i error la resposta adequada; adquisició, però, que necessita d'una

pràctica més o menys constant i permanent. La intuïció, semblaria ser que funciona a partir d'estructures perceptuals que són "identificades" comparativament respecte a d'altres estructures de representacions mentals integrades com a *smarts mechanism*. És obvi doncs, que no existirà possibilitat de crearse o madurar la intuïció (Charon, J.; 1968) sense aquest desenvolupament perceptual i contacte amb la realitat.

La capacitat de la intuïció, aplicable tant a l'estimació mètrica com a d'altres camps de coneixement, pot tenir diferents gradients d'eficàcia i aplicació, tal com veurem en la recerca. De manera simplista podríem arribar a diferenciar:

- **Intuïció perceptual** : forma d'estimació que funciona a posteriori de rebre uns determinats estímuls perceptuals, els quals actuen com a arcs reflexes cognitius. Estar dotat de la capacitat de poder valorar la mesura d'un objecte, o la posició que aquest prendrà degut a uns determinats moviments, o el resultat d'una operació, són clars exemples d'aquesta tipologia estimativa.
- **Intuïció relacional** : capacitat de poder aplicar estratègies estimatives en contextos inicialment no dominats. Aquesta capacitat s'adquireix fruit de posseir diferents capacitats estimatives aplicables a contextos diferenciats i relacionar-ne els seus trets específics cercant característiques comunes alhora que amb els continguts conceptuals específics d'aquell camp de coneixement. En aquesta direcció es situaria aquella intuïció que en el cas de l'estimació mètrica de superfícies, sap integrar la pròpia percepció sensorial amb la capacitat algorísmica deguda al domini de la formulació o bé que integra capacitats de manipulació de les imatges o les representacions mentals; en seria un bon exemple la capacitat de poder rectificar una corba al mateix temps que de curvalitzar una recta.
- **Intuïció associativa** : la capacitat relacional s'aplica no únicament entre el món de la pròpia intuïció i manipulació de representacions sinó que també interacciona amb d'altres continguts cognitius i emocionals. Aquesta intuïció, seria el que podria anomenar-se també, **intuïció creativa** ja que és la que possibilita l'acte creatiu. En aquest estadi, les connexions neurològiques de l'hemisferi dret amb l'esquerra, el sistema límbic i el cerebel i bulb raquidi, tenen la màxima incidència. En aquesta integració el pensament intuïtiu, no lineal, subjectiu, sintètic de l'hemisferi dret, s'associa amb el pensament lògic lineal, crític, analític i racional de l'hemisferi esquerra juntament amb el món emocional, imaginatiu del sistema límbic i l'instintiu del bulb; d'aquesta interdependència sorgeix, sembla ser, la capacitat creativa.

Plantejar-se l'adquisició i desenvolupament de la capacitat mètrica, significa que cal parar atenció en els processos que han de permetre crear o fer evolucionar la capacitat estimativa, la qual depèn de l'evolució de la intuïció mètrica pertinent, intuïció que és part integrant de la capacitat matemàtica global i a la que cal resituar dins la valoració que li correspon i atendre al seu desvetllament i aprenentatge.

6. ESTIMACIÓ I EDUCACIÓ MATEMÀTICA. DE L'EXACTITUD A L'ESTIMACIÓ

1.- Importància de l'estimació en l'educació i en la capacitació mètrica

- **L'estimació com a necessitat**

Els continguts formatius considerats objectius fonamentals en un determinat context espacial-temporal, poden resultar inadequats o insuficients en un altre, i d'altres objectius no tinguts en compte, poden, en la nova situació, resultar imprescindibles per poder integrar-se a la vida amb plenitud. Com a mostra d'aquesta necessitat de canvi, puc recordar a nivell personal, quan de petit em feien anar a comprar tot recomanant-me que havia de vigilar tant la compra com el canvi. Mentre em pesaven l'encàrrec (dues unces, mitja lliura, ..) en la balança de creu, podia controlar-ne l'horitzontalitat i si s'havia posat les peses correctes; alhora que també podia repassar les operacions del càlcul de l'import. Tenir un bon domini de la mecànica operatòria i del procés físic de mesuratge, resultava beneficiós ja que eren procediments adequats per resoldre situacions de vida. Les balances de creu evolucionaren per unes de plat únic i posteriorment amb calculadora integrada; en aquestes situacions ja no es podia controlar la comparació de masses però sí el què indicava el fiell o agulla marcadora i, el control del càlcul dels imports només en les primeres; l'únic control possible era vigilar que la balança marqués la massa demanada i si es premien les tecles que calia prémer. Amb la paulatina supressió de les vendes a doll on tot estava ja mesurat i amb el preu marcat, desapareix la balança i ja només restava com a possibilitat de control, el fet d'observar si anotaven bé l'import de cada producte. Avui, amb els lectors de codis i el tiquet de compra ja hem perdut el control de qualsevol mesurament i càlcul mecànic. Aquesta evolució, sintèticament exemplificada, posa en evidència la pèrdua de la necessitat de la comparació mètrica i del domini de la mecànica operatòria, fet que es repeteix de manera similar en multitud de situacions de la vida quotidiana, afectant, també, a d'altres magnituds (temps, capacitat,...). Els procediments i estratègies que havien estat vàlids, ara no serveixen.

En aquests moments necessitem estar dotat de capacitats diferents, més poderoses que l'exactitud del comptatge o de la comparació mètrica directa per tal de poder predir intuïtivament i amb antelació a la màquina, quin deu ser l'import aproximat de la compra. Calen estratègies i capacitats d'estimació que possibilitin valorar les diferents situacions.

L'estimació és una capacitat que apliquem constantment i la trobem present des del moment que calculem l'hora que hem de sortir de casa per tal d'arribar a temps al treball o a qualsevol lloc i, per tant, el temps que tenim per fer d'altres accions; fins a la quantitat de patates, arròs o pastes que hem de posar a la cassola per tal que hi hagi suficient menjar per a totes les persones que estaran a taula, o bé la quantitat de sal o d'espècies per a que el menjar no quedi salat o fort; cal estimar la distància amb el cotxe del davant segons la velocitat en que hom circula, per evitar una col·lisió; saber valorar l'hora aproximada d'arribada segons el trànsit; intuir el que representa en euros un determinat valor en pessetes o a la inversa; saber valorar quantes persones estan reunides i adonar-se de resultats i imports incorrectes segons la quantitat o capacitat del producte, són només algunes de les moltes estimacions amb que ens enfrontem cada dia.

L'estimació és una tècnica d'anàlisi present tant en les ciències quantitatives com en les qualitatives. Entre les primeres, en el món natural i antropològic, s'utilitza per exemple, en

les prediccions meteorològiques; en les datacions de radioactivitat o de carboni catorze; en les prospectives de mercat i en les estimacions tributàries entre d'altres. També a nivell qualitatiu s'aplica quan es fa un obsequi esperant que agradi, quan un metge diagnostica una malaltia fruit d'unes determinades simptomatologies, etc.

L'estimació és una capacitat que permet treballar amb números i metrismes aplicats a situacions reals per tal de poder valorar de manera ràpida aquell context tot garantint el control de la validesa del resultat. El món quantificable ha estat sempre un objectiu matemàtic i en ell, multitud de camps d'estudi com poden ser l'estadística i la probabilitat són formes específiques d'estimació, però també, el món qualitatiu es va convertint en quantificable i estimatiu a conseqüència del treball de la matemàtica i la lògica borrosa que pretén a través d'uns determinats indicadors, poder estimar la previsió dels resultats.

Sovint, l'estimació en l'àmbit educatiu generalment es centra i es prioritza com a exclusivament numèrica i, també, com a sinònim de matemàtica mental: *‘La matemàtica mental –terme que integra el càlcul mental juntament amb l'estimació del càlcul i el treball oral que es fa a l'aula amb les mateixes- és una habilitat socialment útil... (Castro, C.; 2002)’* oblidant-se d'aspectes estimatius tan important com els mètrics i espacials i no tenint en compte que en el marc de la matemàtica mental hi intervenen molts d'altres factors com poden ser, entre ells, les imatges, visualitzacions, representacions i la intuïció; elements inseparables de l'estimació.

- **L'estimació en les propostes prospectives i en els currículums**

Els estudis sobre la capacitat matemàtica i l'adequació al context, indiquen que l'estimació és una estratègia resolutòria imprescindible per tal d'integrar-se a la vida diària però en especial per resoldre satisfactòriament el món professional. Tal i com ja s'ha indicat en l'apartat de la importància de l'aprenentatge i domini de la mesura, les referències fetes respecte a l'estimació són presents en tots els estudis referenciats (Cockroft, COPIRELEM; National Science Board; NCTM, ICMI).

Cal destacar les aportacions de la NCTM com a pioneres en entendre la importància de la estimació. Des de 1935 ja s'havia defensat la necessitat de potenciar l'ensenyament del càlcul mental com a estratègia per conèixer amb profunditat el nombre, tot remarcant la insuficiència del simple domini aritmètic fruit de mecàniques algorísmiques escrites. Aquesta direccionalitat serà centre de les seves recerques durant molts anys a través dels seus *Yearbooks*, prenent especial força en la dècada dels 70 i aflorant en els 80 amb les seves *Recommendations for School Mathematics of the 1980s*, en el que entre els deu punts que remarca com a prioritaris per millorar la capacitat matemàtica de la societat, en senyala dos que fan referència a l'estimació i l'aproximació (el 4: estimar i aproximar; i el 9: emprar les matemàtiques per a saber predir). A *Estimation and Mental Computation* (1986) es recullen, de nou, les seves propostes i orientacions referides a l'estimació.

En tots els estudis, es posa més èmfasi, en la importància d'adquirir aptituds que capacitin per l'apreciació de solucions aproximades per tal de poder comprendre i donar resposta a la immensa quantitat d'informació que arriba a la persona, que no pas en l'adquisició de rigor matemàtic o en l'exactitud dels resultats. La flexibilitat tant de raonament com de resolució i l'acceptació de la variabilitat de solucions, per tant de la creativitat personal, són alguns dels factors implícits i derivats de l'estimació. La inclusió de l'estimació i aproximació en totes les orientacions publicades sobre com millorar la capacitat matemàtica de les persones i societats, fa que aquestes s'integrin com a capacitats constitutives del que és el domini real de la matemàtica i de la capacitat de mesura. Fruit d'aquesta direccionalitat imperant, en quasi tots els currículums occidentals es va integrar la capacitat estimativa com a objectiu terminal.

- **L'estimació en el nostre currículum escolar**

Tal i com es desprèn dels estudis i recerques efectuades a nivell internacional, l'interès i preocupació per la capacitat estimativa es posa de manifest, bàsicament, durant la dècada dels 80. Evidentment, doncs, que a l'Estat Espanyol, tal i com justifiquen Rico i altres (1989) ni en les "Nuevas Orientaciones" del 1971, ni tampoc en los "Programas Renovados" de 1981, apareixen referències a l'estimació, i conseqüentment, no hi ha cap tipus d'incidència en els llibres de text escolars i no serà fins l' "Anteproyecto para la Reforma de la Segunda Etapa de EGB" quan apareixin, en dos dels objectius terminals⁹⁴, els primers objectius educatius referits a l'estimació i l'aproximació.

L'actual currículum per l'Educació Primària proposa ja aquesta formació però la seva presència resulta, encara, poc reforçada i definida. En les justificacions prèvies sobre la necessitat de l'estimació en la formació matemàtica, en cap cas s'explicita, solament es pot entendre implícita quan s'indica que l'aprenentatge matemàtic *"contribueix al desenvolupament de les capacitats que permeten a l'alumnat augmentar la comprensió del món que l'envolta i aprendre a desxifrar els codis i missatges que li ofereix l'entorn social i cultural"*.

Les referències que hi apareixen es troben en:

- ◆ **els objectius generals.** En el primer d'ells es pot entendre que hi està implícit d indicar que la matemàtica ha de ser *"eina útil per comprendre el món que l'envolta i per actuar sobre el seu entorn immediat"*. És, en el quart, *"usar habitualment el càlcul mental o mitjans tècnics selectivament, amb preferència sobre el càlcul escrit"*, i en el cinquè, *"predir aproximadament el resultat, comprovar l'existència de la diversitat de camins de resolució, saber seleccionar-ne un i valorar el resultat respecte del càlcul, de la resolució de problemes i de la mesura directa"*, on de fet apareix la necessitat concreta de formació de la capacitat estimativa si bé prioritzant-ne l'enfoc aritmètic de manera que només en el cinquè hi ha una lleugera referència a l'estimació mètrica.
- ◆ **els continguts procedimentals.** En el en tercer bloc (*anàlisi, estimació i tempteig*) del seu primer nivell de concreció, ho destaca de manera explícita. En el punt 3.1 es detalla: *"predicció de resultats usant tots els mecanismes i punts de referència, a partir d'una situació i condicions determinades que relacionen unes dades"*. En el segon nivell de concreció, no apareix cap referència relacionada amb el desenvolupament de l'estimació si bé com a contingut en situa un, el 34 (**Estimacions de mesures de longitud, superfície i temps**). Cal destacar que en els continguts geomètrics no apareix cap tipus de proposta sobre l'estimació i en el bloc d'estadística i probabilitat, només una (68: *estimació de la probabilitat d'un resultat en un experiment*)
- ◆ **els objectius terminals.** És on es se'n concreten més, apareixent en quatre dels 53 objectius:
 - Objectiu 3: *Efectuar les operacions d'addició, subtracció, multiplicació i divisió: mentalment, amb nombres naturals de forma exacta i aproximada. Per escrit, amb nombres naturals menors de 4 xifres. Amb calculadora.*
 - Objectiu 13: **Estimar una quantitat** a partir de l'observació i de la reordenació dels elements.

⁹⁴ Objectiu 12: *Realitzar estimacions aproximades de mesura en situacions reals amb un marge d'error acceptable.*

Objectiu 29: *Realitzar operacions mentals exactes i aproximades per tal de desenvolupar l'agilitat del càlcul necessari per les relacions de la vida real.*

- Objectiu 14: *Utilitzar les relacions conegudes entre nombres per **predir aproximadament** els resultats d'operacions aritmètiques, comprovar si el resultat predit és la solució de l'operació i modificar, si cal, la predicció feta a partir de l'error observat.*
- Objectiu 21: **Estimar l'error** comès en realitzar una mesura.
- ◆ **els objectius referencials.** En els procediments, fets, conceptes i sistemes conceptuals, del bloc de Magnituds i Mesures, d'entre els deu que s'hi citen, només el sisè té referències estimatives: **"Mesurar a cop d'ull i amb instruments, triant el patró més adient, i expressar la mesura utilitzant fraccions senzilles o decimals fins a les dècimes"**.
- ◆ **les orientacions didàctiques.** Presenten en referència a l'aprenentatge numèric: **"La pràctica dels algorismes perd importància, però en prenen la comprensió de l'operació, el càlcul mental, l'ús de la calculadora... ..És convenient, davant de qualsevol situació matemàtica que es proposi, que es demani sempre una estimació del resultat. Fer aquest exercici, fomenta el pensament intuïtiu, remarca la diferència entre resultat exacte i resultat aproximat i acostuma els alumnes a mantenir un control i una actitud crítica durant tot el procés de resolució, i especialment davant del resultat"**; i respecte a la mesura diu: **"Les magnituds contínues (temps, longitud, capacitat, etc.) requereixen unitats adequades. Abans d'usar la unitat legal, cal: a) fer comparacions directes; b) fer estimacions; c) usar unitats naturals, repetides; d) fer el pas a la unitat convencional. Una vegada admesa la unitat legal, el treball es desenvolupa tenint en compte els diferents aspectes: a) adonar-se de la imprecisió de la mesura; b) treballar el sentit de l'aproximació h) descompondre, operar, etc."**

De tot això pot deduir-se que l'interès i atenció pel desvetllament de les capacitats estimatives són presents i valorades positivament, no obstant, la prioritat vers l'estimació aritmètica queda palesa com ho demostra el fet que dels quatre objectius terminals que en fan referència, tres es centren en el món numèric i un al de mesura o que mentre en les orientacions, al parlar del bloc numèric es fan referències justificatives de la seva importància i orientacions d'acció, en la mesura resta explícit de forma molt més genèrica. És evident també la manca de conceptualització, significativitat i possibilitats de la capacitat estimativa quan aquesta no té referències a nivell geomètric i molt poques en d'altres camps matemàtics.

• Validesa i aplicació curricular

Els estudis de Johnson⁹⁵, Reys⁹⁶, Edwards⁹⁷, Carlow⁹⁸, Hope⁹⁹, Trafton¹⁰⁰ centrats en l'ús i importància de l'estimació en la formació matemàtica als Estats Units, demostren la poca incidència que l'estimació té en els currículum, alhora que evidencien, també, un mal plantejament didàctic; conclusions que es poden fer extensibles a la nostra pròpia realitat (Segovia, Segovia i Rico, Gómez, B 1999). Un altre aspecte que es després de totes les recerques és que el tractament de l'estimació sol estar plantejat amb una òptica superficial d'aplicació d'activitats dirigides i fetes de forma més o menys mecànica, sense estar integrades a la realitat i sense connexions amb d'altres apartats de formació matemàtica.

⁹⁵ Johnson, D. (1979). *Teaching Estimation and Reasonableness Results*. *Aritmetics Teacher*. Septiembre (V.27)

⁹⁶ Reys, B. (1984). *Mental Computation and Estimation: Past, Present and Future*. *The Elementary School Journal*. (V. 5)

⁹⁷ Edwards, A. (1984). *Computational Estimation for Numeracy*. *Educational Studies in Mathematics* (V.15)

⁹⁸ Carlow, C. (1986). *Critical Balances and Payoffs of an Estimation Program*. En H.L. Schoen & M.Y. Zweng (eds.) *Estimation and mental computation*. Reston, VA. NCTM

⁹⁹ Hope, F. (1986). *Mental Calculation: Anachronism of Basic Skill*. En H.L. Schoen & M.Y. Zweng (eds.) *Estimation and mental computation*. Reston, VA. NCTM

¹⁰⁰ Trafton, P. (1986). *Teaching Computational Estimation: Establishing and Estimation Mid Set*. A: H.L. Schoen & M.Y. Zweng (eds.) *Estimation and mental computation*. Reston, VA. NCTM

Les valoracions extremes, demostren una contradicció entre les necessitats formatives i el disseny educatiu, o entre el *saber empíric* i el *saber ensenyat*, contradicció que crea un *saber après* que no permet afrontar les demandes reals (Brousseau, 1983; Vergnaud, 1990). El perquè d'aquesta disfuncionalitat són molt diverses i, en bona part, estan íntimament lligades a unes concepcions de filosofia educativa i d'epistemologia matemàtica, encorades en enfoc fonamentats en processos de repetició mecànica d'algorismes, exercici sobre paper, valor de l'exactitud i penalització de l'error. Carlow¹⁰¹, Segovia (1986, 1995), Segovia, Castro, E., Castro En. i Rico (1986), Segovia i Rico (1986), Castro, C. (2002) valorant la realitat escolar, senyalen les avantatges per a la inclusió de l'estimació en el currículum de formació matemàtica que podríem resumir en:

- 1.- Les aplicacions de les propietats dels sistemes numèric són molt rígids i formals, mentre que les experiències d'estimació, al contrari, són simples i directes
- 2.- L'estudi tradicional de la mesura utilitzant materials concrets, porta a que cada concepte apareix després dels processos de comptar i mesurar; en canvi, si prèviament s'introdueix l'estimació, el concepte és anterior i els processos de comptar i mesurar serveixen, llavors, com a procediment de validació dels resultats.
- 3.- Les activitats d'arrodoniment fetes ocasionalment i a través de rutines, no aporta l'adquisició del sentit de número ni tampoc prepara per comprendre l'estructura que permet entendre fets matemàtics i les seves relacions. Aquest aprofundiment solament és possible a partir d'un enfoc permanent i habitual.

La inclusió de l'estimació en els currículums podem entendre que té, segon això, una doble direccionalitat d'objectius prioritaris, ja que, per un costat l'acció permet adquirir un perfeccionament funcional i de dotació de capacitats personals, però per l'altre, aquesta adquisició possibilita la transformació conceptual tant de l'alumnat com de l'educador.

1. Capacitació personal

- Aportar la capacitació necessària per entendre i actuar en l'entorn
- Millorar les dotacions personals per una formació integral
 - Perfeccionar el raonament
 - Generar estratègies mentals
 - Perfeccionar les capacitats d'observació i representació
 - Millorar les capacitats crítiques

2. Transformació metacognitiva

- Canvis conceptuals i metodològics sobre educació
- Canvis conceptuals i metodològics sobre la matemàtica

2.- Estimació i Aproximació: significació conceptual

Estimar i aproximar són accions íntimament interrelacionades però diferents una de l'altra, encara que, ambdues, són utilitzades, indistintament, tant en l'àmbit col·loquial com en el mètric o el matemàtic. En tot acte estimatiu intervenen, a més de la valoració quantitativa, els recursos, procediments i estratègies que hom aplica per aconseguir fitar el valor. L'aproximació forma part de l'estimació i el seu objectiu és el de determinar el valor numèric i grau d'aproximació a l'exactitud. L'estimació integra a més la significativitat d'aquest valor i l'aplicabilitat, és a dir, es pot tenir capacitat per fer un bon càlcul aproximat i fer mala estimació. Aproximació i càlcul aproximatius són, doncs, els dos factors que configuren el besant algorísmic de l'estimació.

¹⁰¹ Carlow (1986). Idem

a.- Estimació:

Semànticament, els seus significats són molt diversos i poden tenir des d'un sentit de progressió i importància de fets (*La seva millora acadèmica ha estat molt estimable*), o bé de connotacions morals (*l'honradesa és una virtut molt estimable*); als pròpiament mètrics (*més o menys estimo que aquest objecte deu (fer, pesar, tenir, ...)*).

Els significats recollits en la majoria de diccionaris són molt idèntics entre ells i centrats, bàsicament, en aspectes de judicació i valoració¹⁰². També des de la perspectiva matemàtica i coincidint amb el sentit col·loquial, la significació prioritària és la de judicació mètrica i numèrica, com es desprèn, per exemple, de les definicions de Rico, L. i altres (1989) "*Judici de valor del resultat d'una operació numèrica o de la mesura d'una quantitat en funció de circumstàncies individuals del que la fa*"¹⁰³

La valoració i judici de valor són doncs els significats més importants de l'estimació. La judicació i consideració que comporta tota estimació, pot efectuar-se sobre multitud de situacions i fets de vida; en alguns casos seran sobre aspectes materials i incidirà en determinació de magnituds quantitatives; en d'altres, la valoració afectarà magnituds no mesurables com poden ésser criteris, judicis de valor, moralitat o sentiments. L'estimació, evidentment, segons l'àmbit incident, podrà ser classificada en *qualitativa* i *quantitativa*, sent la quantitativa matemàtica sobre la que ens interessa centrar-hi l'atenció.

L'estimació matemàtica per a ser considerada com a tal, ha de reunir unes determinades condicions que són les que defineixen la seva essència epistemològica. Rico (1989) seguin Reys, en senyala sis¹⁰⁴ si bé queden molt concretades en l'estimació numèrica. Per la nostra part amb la inclusió de l'estimació mètrica ampliem aquest anàlisi i en remarquem i diferenciem deu:

- *Habilitat mental.* L'estimació és una capacitat que utilitza procediments i estratègies exclusivament mentals. Tota l'acció es fa sense l'aplicació física de cap comparació directa ni per mecàniques algorísmiques sobre paper.
- *Individual.* L'acció estimativa s'efectua a nivell personal.
- *Representativa.* Tota estimació necessita imprescindiblement de l'aportació d'imatges i representacions mentals, per tant, d'experiència i referències d'aquell context estimatiu.
- *Adquirida.* La capacitat estimativa no es posseeix d'entrada sinó que aquesta s'adquireix a posteriori de la possessió i interiorització de certes capacitats prèvies.
- *Evolutiva.* El domini de l'estimació es produeix a través d'un procés maduratiu, canviant i educable.

¹⁰² Com a prova d'aquesta concepció, reproduïm les del Diccionari DEC i les de la Real Academia Española: Estimar:(EC): 1.*Determinar el valor o el preu d'alguna cosa.* 2.-*Judicar, reputar, considerar.*

Estimatiu-va: 1.-*Que conté l'estimació d'alguna cosa. Un càlcul estimatiu.* 2.- *Que serveix per estimar*
Facultat estimativa: *Facultat de judicar el valor de les coses*

(RAE): *Apreciar, poner precio, evaluar las cosas. Juzgar, crear. Hacer aprecio y estimación de una cosa.*

Estimación: *Aprecio y valor que se da y en que se tasa y considera una cosa.*

¹⁰³ Segovia, I.; Castro, E.; Castro Enc.; Rico, L. (1989). *Estimación en Cálculo y Medida.* Madrid. Síntesis

¹⁰⁴ a.- *consisteix en valorar una quantitat o el resultat d'una operació*

b.- *el subjecte que fa l'estimació té alguna informació, referència o experiència sobre la situació.*

c.- *es realitza, generalment, de manera mental*

d.- *es fa amb rapidesa i fent servir quantitats el més senzilles possibles.*

e.- *el valor assignat no té que ser exacte però sí adequat per a poder prendre decisions*

f.- *el valor assignat admet diferents aproximacions depenen de qui realitzi la valoració*

- *Específica*. Els procediments, recursos i estratègies que es necessiten i es posen en joc són diferents dels aplicats en contextos no estimatius, alhora que són diferenciats, també, en cada context matemàtic.
- *Aproximativa*. Les valoracions estimatives no pretenen l'exactitud de la resposta sinó l'aproximació; conseqüentment té múltiples respostes vàlides.
- *Rendible*. La valoració realitzada s'ha d'efectuar amb rapidesa i amb una clara reducció temporal respecte a d'altres procediments.
- *Numèrica*. Tota estimació tracta de valorar matemàticament una determinada situació problemàtica, donant-ne el seu resultat numèric, sigui operatiu o mètric.
- *Significativa*. La valoració realitzada ha de permetre prendre decisions.

Dins el camp del coneixement, l'estimació és un procediment cognitiu més i com a tal, es veu immers en els processos d'adquisició que estructuraven el coneixement, de manera que si per a qualsevol aprenentatge resulta fonamental el fet de poder tenir representacions mentals, en l'estimació, aquesta necessitat es fa imprescindible, especialment per l'estimació mètrica. És un procediment recursiu biunívoc on l'habilitat que hom pugui tenir adquirida permet la qualitat valorativa de l'estimació, però també la perfecció d'aquesta estimació, millora l'habilitat i els recursos que es puguin tenir interioritzats.

b.- Aproximació:

Les significacions col·loquials¹⁰⁵ i matemàtiques resulten ser molt idèntiques i relacionades amb el grau de precisió o d'apropament a l'exactitud tal i com es desprèn de les accepcions recollides en els diccionaris generals¹⁰⁶ o en els matemàtics¹⁰⁷.

L'aproximació la utilitzem constantment en la vida diària ja que sovint no és necessari precisar la mesura exacta sinó que el que cal és donar, únicament, referències temporals, posicionals, econòmiques o mètriques per comprendre el context. Segons el referent que s'utilitzi poden diferenciar-se l'aproximació de l'enquadrament:

- *aproximació*: el valor es dona en referència a un valor central considerat com a mesura exacta. Expressions significatives són: "*mesura, té, al voltant de...*"
- *enquadrament*: el valor es dona entre un parell de valors que determinen l'espai on es pot ubicar la mesura vàlida. Correspon a expressions: "*està o mesura entre..i ..*"

L'aproximació aporta, amb relació amb les expressions numèriques complexes, major claredat i raonabilitat dels resultats i l'estimació aporta, de manera eficaç, la judicació

¹⁰⁵ El diccionari GEC recull: 1.- Acció d'aproximar o d'aproximar-se. 2.- Avaluació, apreciació, etc., que s'acosta a la correcta. Quantitat, qualitat, etc., que s'acosta a una quantitat, a una qualitat, etc., donada. I el de la Real Acadèmia Española: Aproximació és l'acció i efecte d'aproximar o aproximar-se.

¹⁰⁶ G.E.C: (Mat.) Ordre de grandària de les desviacions que els valors mesurats o calculats d'una magnitud en un sistema presenten respecte el valor teòric que compliria amb exactitud la llei matemàtica que determina aquest sistema

¹⁰⁷ - Diccionario Básico de Matemáticas: Cálcul de valors que s'apropen en més o en menys al valor exacte. Resultat de les mesures amb nombres irracionals i racionals en els que la seva expressió decimal té infinites xifres decimals. Aquests valors aproximats substitueixen en la pràctica als valors exactes que en moltes ocasions, resulta impossible d'aconseguir com a conseqüència de la imperfecció dels aparells de mesura. Quan el valor calculat és menor que el vertader és aproximació per defecte. Quan el valor calculat és més gran que el vertader l'aproximació és per excés)

- Bouvier: Aproximació és l'acció de substituir un ens matemàtic-número, element d'un espai mètric... -per un altre suficientment pròxim; al segon se'l denomina aproximació al primer".
- Petita Enciclopèdia Matemàtica: Tot número real pot aproximar-se amb l'exactitud que es vulgui mitjançant números racionals. Això és el que es fa amb la mesura: a la pràctica s'interromp després d'un determinat número de xifres decimals.

sobre el sentit dels valors relacionant-t'ho amb la vida real. Així doncs, estimació i aproximació són elements que es complementen i on cadascú té les seves pròpies especificitats tant a nivell de recursos, procediments i estratègies.

c.- Error:

L'error és conseqüència del grau d'aproximació, sent, doncs, la diferència o desviació que presenta un valor aproximat, de manera que no té connotacions estimatives. La mesura, per tant, és sempre, per més grau de precisió amb què s'expressi, un valor aproximat.

L'error d'una aproximació té una significació diferent segons la mesura real de la magnitud que s'estima, de manera que no és igual un error de 10 cm efectuat a l'estimar la longitud d'un llibre que d'un cotxe o un tren. S'anomena *error absolut* (e_a) el valor de l'error comès i *error relatiu* (e_r) l'error corresponent a cada unitat. Si "e" és l'estimació donada a una mesura "m", llavors:

$$e_a = m - e \quad \text{i} \quad e_r = e_a / m$$

L'error de l'aproximació pot ser degut a causes molt diverses i pot aparèixer com efecte exclusiu d'una determinada tipologia o com a resultat de la confluència de més d'un d'ells. En l'estimació mètrica es poden fer presents els mateixos errors que apareixen en l'estimació de càlcul, però a més, d'altres que són específics de la pròpia mesura. Entre els més importants, cal destacar:

- *Errors operatius*: són els produïts a conseqüència d'equivocacions i errors operatius.
- *Errors de calculatge*: és el que es produeix degut als propis procediments estimatius numèrics utilitzats: arrodoniment, truncatge, composició, descomposició ...
- *Error avaluatiu*: derivat d'un mal metrisme unitari, error que s'anirà aplicant i repetint sobre tota la magnitud a mesurar.
- *Errors conceptuals*: preconcepcions errònies que fan avaluar la magnitud de manera equivocada (per exemple, considerar que la circumferència és pi vegades el radi al quadrat).

Els valors estimats, respecte al valor exacte poden ser fets per defecte o per excés i d'aquí que la tendència de l'aproximació es classifiqui en: *aproximació per defecte* i *aproximació per excés* i, conseqüentment, hi haurà l'error per defecte i error per excés.

LA CAPACITACIÓ EN L'ESTIMACIÓ MÈTRICA

L'estimació de mesures resta molt menys analitzada que la de càlcul i el relatiu coneixement que es té de l'estimació mètrica, neix del que es coneix de l'estimació i aproximació numèrica. Rico (1989) considera que, en part, és degut al fet que l'estimació mètrica és més subjectiva que la de càlcul, ja que d'entrada, la unitat que cal emprar és ja, ella mateixa, una estimació, fet que no succeeix en l'estimació numèrica, on els valors operatius i operacions tenen uns procediments i regles molt precises amb l'objectiu de transformar la situació inicial en d'altres que resultin, operativament, més simples; procediments que seguin R.E. Reys, Bestgen, Rybolt i Watt (1982) queden reduïts a:

- *Reformulacions* (p.187) o procés de canviar les dades numèriques sense modificar l'estructura del problema. (ús de primers dígit, truncaments, arrodoniments, substitucions).

- *Translacions* (p.188) o traducció que canvia l'estructura matemàtica del problema (canvi d'orde operatiu, transformació d'operacions per d'altres d'equivalents).
- *Compensacions* (p.189) o processos de *retroacció* o d'ajustaments fets per compensar les variacions degudes a les reformulacions o a la translació.

En la mesura necessita d'una estructuració molt més complexa tal i com veurem al llarg del desenvolupament de la recerca i on es fan necessaris uns dominis i unes habilitats que es concreten en tres grans blocs que seran la base d'anàlisi de tota la investigació qualitativa:

- 1.- Disponibilitat de recursos
- 2.- Procediments de comparació
- 3.- Estratègies de mesurament

1.- Disponibilitat de recursos

Com a habilitats prèvies que potencien les possibilitats estimatives, cal destacar:

- ***Domini i interiorització de les unitats de mesura.***

Resulta imprescindible per a una bona estimació la possessió interioritzada d'unitats, les quals cal que estiguin plenament integrades amb el propi context de vida o amb el propi cos.. *"interiorització" referències perceptives que té cada subjecte respecte de les unitats de mesura.... Direm que una unitat està interioritzada quan un nen és capaç de reconèixer-la, construir-la o determinar dimensions i distàncies que la seva longitud sigui aproximadament la de cadascuna d'aquestes unitats"*¹⁰⁸.

La referència antropomètrica i objectal, de parts del cos, accions, objectes i situacions que generin la concepció del valor unitari són fonamentals per adquirir aquesta interiorització, no obstant, una formació estimativa global ha de procurar que s'interioritzin el màxim nombre d'unitats possibles si bé amb algunes prioritats. Podríem destacar entre d'altres:

- longitud (metre, decímetre, centímetre, mil·límetre);
- massa (quilo, mig quilo, quart de quilo);
- capacitat (litre, mig litre, 250 cm³, 10 cm³);
- amplituds (90°, 45°; 180°; 360°, 270°; 30°);
- àrea (1 m², 1 cm², 100 cm², 10 m²);
- volum (1 dm³, 1 m³, 1 cm³)

- ***Interiorització de referents o d'unitats objectals i antropomètriques.***

És el domini del control mètric d'objectes quotidians i de parts del nostre cos. Resulta un bon recurs conèixer, per exemple, la capacitat d'un got, una cullera de sopa, de postre, la longitud d'un mosaic, l'alçada d'una porta, la longitud perimetral de la roda d'un cotxe o d'una bicicleta, l'alçada d'un habitatge o d'un graó d'escala, l'amplitud del dit, mà, peu, pas, ... No només el domini de referents mètrics ajuda a l'estimació, també els indirectes, com pot ser el coneixement de contextos generadores d'il·lusions òptiques, possibilita més la precisió estimativa.

- ***Domini de tècniques indirectes.***

Domini d'algorismes que possibiliten el càlcul (fórmules, teoremes, ...)

¹⁰⁸ Rico, L. i altres (1989) (pp. 153)

2.- Procediments de comparació

Els procediments de comparació corresponen al que anomenarem (p.286) com a *procediment actuant* o com s'efectua física o mentalment, l'acte estimatiu. Darrera qualsevol mesura existeix sempre l'acte comparatiu entre magnitud i unitat, la qual, en la mesura longitudinal, pot fer-se a partir de dos procediments bàsics:

a) *Sobreposició.*

La mesura s'obté per aplicació de la unitat sobre l'objecte a mesurar. El procediment comparatiu de sobreposició genera estratègies diferents, segons:

- existeix una relativa igualtat magnitudinal entre unitat i magnitud de l'objecte
- l'objecte té una mesura més o menys múltiple de la unitat
- la unitat és múltiple de l'objecte.

b) *Descomposició-recomposició.*

En determinats contextos on la sobreposició total resulta difícil d'aplicar, la magnitud de l'objecte es pot descomposar en part o unitats internes. S'hi poden diferenciar:

- la unitat és menor que la magnitud a mesurar
 - l'objecte es pot subdividir en unitats internes igualades (ho veurem en les circumferències i espirals)
 - parts diferenciades entre elles (casos d'espirals i ondulades)
- l'objecte és menor que la unitat
 - es cerquen relacions proporcionals entre ambdós

En tots els processos de descomposició, sempre hi ha una activitat prèvia i una de posterior a la comparació, descomposant-se inicialment i recomposant-se al final per tal de cercar la valoració global. En l'estimació de les longituds curvilínies, prendrà molta importància el procés de descomposició i no únicament entesa com descomposició unitària sinó com a transformació de la representació mental. En aquest cas, els procediments de rectificació o de transformació de corba a recta i els de quadratura o transformació de superfícies corbes a superfícies quadrades, apareixen com a procediments actuant molt utilitzats i per tant essencials per l'adquisició de la capacitat estimativa en el món de la corba.

3.- Estratègies de mesurament

En aquest apartat s'integra el que anomenem (p.286) *procediment representatiu o relacional*, el qual fa referència a l'estructura cognitiva lògico-matemàtica que s'utilitza a nivell mental per tal d'aconseguir la valoració mètrica de l'estimació. A grans trets es poden diferenciar l'aplicació de les estructures següents:

- *lògiques* a través de relacions d'ordenació i d'igualació
- *matemàtiques* amb l'ús d'estratègies operatives fonamentades en l'estructura additiva o en la multiplicativa segons les possibilitats de *complementarietat* que es produeix en la relació entre magnitud i unitat; o la de *composició-descomposició* de la magnitud o la unitat, segons l'existència d'unitats internes.
- *algorísmiques* degudes a dominis conceptuais.

A part, apareixen, com veurem durant la recerca, situacions on l'estratègia que s'utilitza, no és matemàtica sinó que es fa a través de *revisualitzacions* icòniques o d'imatges, i en d'altres, per la representació de posicions corporals o la relació amb l'ús d'objectes; situacions que actuen de constatació contrastable per poder fer la metrització adient.