

## 7. EVOLUCIÓ ANTROPOLÒGICA DE LA MESURA DE LA FILOGÈNIA A L'ONTOGÈNIA DE LA MESURA

### Introducció

L'adquisició de la capacitat de mesurament i del metrisme l'estimatiu, no és quelcom que s'adquireixi espontàniament, ni de cop i volta. Necessita de un procés maduratiu per tal d'integrar les magnituds en la pròpia interioritat personal, però a més, aquesta aprehensió és fruit d'una evolució que està íntimament relacionada amb el desenvolupament de la intel·ligència. Dominar el sistema mètric, estructura artificial allunyada de les relacions directes que té l'ús antropomètric o l'objectal, necessita d'una estadi de pensament lògic-matemàtic més evolucionat.

La gènesi i adquisició de la mesura, tal i com s'anirà posant en evidència al llarg de la recerca, té una gran interconnexió amb l'evolució feta per la humanitat per tal d'adquirir i millorar els seus procediments, recursos i estratègies de mesuratge. Sabedors que l'evolució ontogènica reproduceix, en certa forma, l'evolució filogènica, fa que l'estudi de com la humanitat ha aconseguit arribar al domini actual de la mesura, ajuda a la comprensió de l'evolució personal i dels trets característics de les fases d'aquest domini, alhora que és un recurs fonamental per elaborar una proposta didàctica coherent.

### GÈNESI I EVOLUCIÓ DE LA MESURA

#### 1. El sentit de la mesura

Comptar i mesurar ha estat una activitat imprescindible per l'home des dels seus orígens. El procés de matematització de la mesura ha tingut un llarg camí per arribar a la seva teorització; però igualment llarg, ha estat el procés evolutiu per arribar a conquerir la unificació dels sistemes de mesura i l'evolució dels seus criteris d'adscripció i ús unitari.

És lògic, suposar, que la necessitat d'informar a la societat sobre qualsevol aspecte, però, sobretot, la derivada de la distribució justa i equitativa dels bens i beneficis, o de les càrregues i impostos, o també els contractes de l'intercanvi i bescanvi comercial, foren causes essencials de la necessitat de cercar criteris comparatius. Comparar i comptar permeten analitzar, comprendre i controlar l'entorn d'una manera més profunda i equitativa i serà aquest valor comparatiu, afegit al valor quantitatiu que se li dona qui crearà les bases del sentit i conceptualització de la mesura.

#### 2. La mesura i les seves connotacions

La mesura, per ella mateixa, té una finalitat de tipus semàntic en quant possibilita la precisió i concreció informativa, però altrament, porta implícita de manera intrínseca, altres objectius ben diferents, com pot ser l'equitat entre les relacions humanes. L'anàlisi del que ha representat la mesura al llarg de la història, demostra que aquesta, de manera general, integra tres importants connotacions:

- A. l'ètica-moral de l'*idea de justícia* i el seu contrari d'injustícia i engany
- B. el de *poder i domini polític o social*.
- C. el de *prestigi cultural* i status social

## A. Mesura i Moral

La significació ètica-moral de la mesura està íntimament enllaçada amb connotacions de tipus religiosos. La dicotomia ètico-moral de la justícia contraposada a la injustícia o la d'honradesa en front de l'engany, es troba present en totes les cultures.

Fruit d'aquesta concepció relacionada amb el bé i el mal, es generen moltes llegendes referides a l'origen i creació de la mesura. Segons sigui aquesta creació, es diferencien, per una banda, aquelles que veuen en la mesura un origen del mal social<sup>109</sup> i, en posició antagònica, les que la valoren de forma positiva i consideren que la seva existència resulta beneficiosa<sup>110</sup> per l'home. Aquesta ambivalència entre el bé i el mal fruit de l'aplicació de la mesura, incidirà fortament, també, respecte el seu administrador, estenent-se als éssers demoníacs i a les mateixes divinitats<sup>111</sup>, les quals, en últim terme, són considerades com a justes administradores de la mesura per tal de premiar o castigar la forma amb que hom ha mesurat la seva pròpia vida. La honestat en l'aplicació de la mesura configura una bona part de la concepció sacra de la finalitat de la vida i del comportament, i així, es decreta com a exigència i manament en les filosofies social de totes les cultures<sup>112</sup>. També el cas contrari, la injustícia i la maldat tenen, igualment, connotacions mètriques i així es veu en representacions artístiques<sup>113</sup>, o en multitud de dites i llegendes<sup>114</sup>. La importància i sentit divinitzat de les mesures farà que els patrons unitaris siguin protegits en locals sagrats; a Atenes es guardaven a l'Acropolis amb dedicatòries als deus; a Roma ho eren en el Capitoli i, l'emperador Justinià les va fer portar a Santa Sofia de Constantinopla. Encara avui, la balança, simbologia universal de la justícia representa la mesura de la veritat i del bé.

<sup>109</sup> En aquesta direcció, a *Antiguitats jueves*, 1,2,2 (citada per W. Kula) és manifesta Flavi Josefo que cita a Caïn com a inventor de les mesures considerant-les com a causa de mal: "havent inventat peses i mesures, va transformar aquella innocent i noble naturalitat amb que vivia la gent mentre les desconeixien, en una vida plena d'estafes"

<sup>110</sup> Aquí s'hi poden integrar les creences gregues segons les quals, les mesures foren inventades pel savi Fidó d'Argos; i, també la concepció romana segons la qual el seu origen és diví ja que és la nimfa Vegoia que les dona a l'etrusc Aruns Veltimnus.

<sup>111</sup> Les representacions de les divinitats amb signes i instruments de mesura, apareixen en totes les cultures i així mentre el deu egipci Ammón o l'arcàngel Gabriel es representen amb balances, el rei sumeri de Gudea ho fa amb una regla. També ho és el fet de considerar la creació de Déu com "feta amb mesura, número i pes" (*Llibre de la Sabiduria*, 11,20).

<sup>112</sup> A la Bíblia, en els llibres de l'Antic Testament i també en el Nou, les cites referides a la mesura apareixen, freqüentment, com a font de pecat.

- En els Llibres de Moisès es cita en el Levític, XIX: "No feu injustícia, ni en els judicis, ni en les mesures de longitud, ni en les de pes, ni en les de capacitat. Tingueu balances justes, pesos justos, un "efà" just i un "hin" just"

- En el Deteurinomi, XXV es diu: "No tindràs en la teva bossa una pesa gran i una de petita. No tindràs a la casa dos efàs, un de gran i un de petit. Tindràs peses adients i justes i efàs adients i justos per a que s'allarguin els teus dies sobre la terra que Jhavé, el teu Déu, t'ha donat".

- Salomó en els Proverbis, XVI, diu: "Pes just i balança justa són de Jhavé i obra seva són les peses de la bossa"

- En el Llibre dels Profetes també es presenta, en diferents ocasions, com a potencial causa de pecat.

- En el Nou Testament a Marc, VI, 24 es llegeixen expressions que dona Crist i que pren la mesura com a element de reflexió: "... pareu atenció al que escolteu, amb la mesura amb que mesureu s'us mesurarà i s'us mesurarà" o a Lluc VI, 38: "... doneu i s'us donarà; una mesura bona, assimbollada, plena, curulla, serà escampada en vosaltres. La mesura que als altres aplicàreu, s'emprarà amb vosaltres".

Idèntica concepció és present també en el Corà. En la sura 83, referida als estafadors, diu: "En nom d'Alà misericordiós i compassius. Desgràcia als qui falsegin el pes i la mesura. A aquells que quan mesuren en contra d'un altre omplen la mesura però que quan mesuren per a ells, la minven. És que no pensen que seran ressuscitats d'entre els morts?. En el dia poderé, en el dia en que els homes hauran de respondre davant del senyor del món".

<sup>113</sup> A l'església de Sloponow hi ha una policromia de 1699 on es veu una tavernera que és raptada pel dimoni i una inscripció que diu "per no omplir les copes a ras"

<sup>114</sup> Una d'origen cretenc considera els escarabats piloters com les ànimes dels flequers enganyifadors que estan condemnats a amassar fens eternament.

## B. Mesura i Poder

L'existència d'un sistema de mesures, sempre ha estat un signe de poder i de diferenciació respecte les comunitats de l'entorn. Les societats creaven el seu sistema específic com a forma de mostrar aquesta personalitat; però al mateix temps, imposaven el seu sistema en els territoris que conquerien com a símbol i demostració del seu domini. Aquesta imposició cultural, l'han practicat tant els imperis antics com en les polis gregues, l'imperi romà, el mon feudal o els imperi amerindis, i també, s'imposà durant la colonització occidental del nou mon.

La transcendència i importància de les mesures com a forma de poder és patent, durant l'edat mitjana en la permanent confrontació entre els poders reials i els municipals, senyorials i eclesials. Aquesta situació farà proliferar una gran varietat de sistemes mètrics, encara que, també, en diferents ocasions, existirà l'intent d'e procurar aconseguir les seves unificacions, com el que va intentar Carlemany durant l'Imperi Sacro Romà-Germànic amb la imposició d'un sistema vigesimal.

També ha estat, la causa de lluites per la igualtat i la justícia. L'ús abusiu en l'aplicació d'algunes unitats de mesura, va ser el motor desencadenant de moltes revoltes populars per exigir-ne la justa aplicació i l'existència d'un sol sistema<sup>115</sup>, o a la inversa, com actualment al Regne Unit, on es defensa davant els tribunals, el dret de l'existència del sistema tradicional en front del sistema mètric internacional.

## C. Mesura i domini cultural

La significació del grau cultural o de civilitat ha estat una de les clau de volta del poder i de l'estatus social. Els posseïdors i controladors de les mesures han estat sempre, com el cas dels agrimensors o els arquitectes egipcis, babilònics, xinesos, indis, o de qualsevol cultura, i avui en els economistes, banquers, científics..., un grup o casta privilegiada pel fet de tenir el control del sistema i la societat.

El valor i importància de la mesura, prendrà, a partir de l'Edat Mitjana, un sentit de *pantomètria*<sup>116</sup> que ho inclourà tot, amb l'esclat definitiu durant el Renaixement. És aquest enfoc pantomètric el factor que segons Alfred W. Crosby<sup>117</sup> serà clau pel desenvolupament de la cultura occidental i la causa que farà igualar, i fins i tot superar, el nivell de la cultura àrab. El valor del control de la realitat i entorn, del antropocentrisme i el pantometrisme<sup>118</sup>, seran els paràmetres que definiran el "somni renaixentista"<sup>119</sup> que amarrarà la societat fins als nostres dies.

<sup>115</sup> "Un sol rei, una sola llei, una sola mesura i un sol pes" era el crit que la pagesia francesa entonava i cridava els dies anteriors a la Revolució.

<sup>116</sup> Segons l'*Oxford English Dictionary*, etimològicament deriva de "panto", tot i "metria", mesura. Correspon a una forma de mesura universal i a nivell geomètric diferència: *longimetria*, *planimetria* i *esterometria*.

<sup>117</sup> Crosby, W. Alfred. (1988). *La medida de la realidad. La cuantificación y la sociedad occidental (1200-1600)*. Crítica, Grijalbo/Mondioni. Barcelona.

<sup>118</sup> Klein H.A. i Klein, M.C. (1963): *Graphic Worlds of Peter Bruegel the Elder*. Dover. New York (p. 243-245), exemplifiquen el quadre de *La temprança* (1560) de Pieter Bruegel, el Vell, com a dar exemple de l'enculturalització mètrica de la societat europea del Renaixement. El quadre, apologia a la relació cultura i al domini mètric, té una figura central, la temprança, al voltant de la qual, tot gira en referència a la mesura i a la formació cultural. Apareix l'astrònom calculant distàncies angulars entre la Lluna i les estrelles; un cartògraf calcula distàncies entre punts terrestres; un constructor fa càlculs amb un escaire; es representen els nous estris militars (canons, mosquetons...). Calculadors, mercaders i comptables; músics, pintors, nens aprenent a llegir i escriure, tot envoltats d'instruments de mesures: brúixoles, escaires, compàs, creu de balança, rellotge ... Retrata la realitat i intenta plasmar l'esperit del món nou com a fidel reproducció de la filosofia i el somni cultural que viu la societat renaixentista i el valor que dóna al control mètric.

<sup>119</sup> La importància de la mesura ve determinada per la necessitat de dominar l'entorn que en aquest període s'engrandeix degut a les descobertes. Copèrnic i Mercator, entre d'altres, permeten definir els punts terrestres

Dominar la mesura permet l'entrada al món de la ciència i aquesta tendència es perllongarà als llarg dels segles, i així no és d'estranyar que la catalogació de les cultures indígenes en civilitzades o incivilitzades que farà el món occidental durant la colonització, es faci en base a la possessió o no, d'un sistema de mesures<sup>120</sup>, considerant aquesta existència com una mostra palpable i un signe d'organització social i cultural i on el grau de sistematologia mètrica existent, defineix el grau de ciència. La investigació i descoberta que s'està realitzant en els nostres dies, en les cultures precolombines, a l'Àfrica negra o en les cultures australianes i orientals, sobre l'existència de sistemes matemàtics i especialment de sistemes de mesura, porta a una paulatina recuperació i valoració de les cultures indígenes com a cultures pròpiament científiques.<sup>121</sup>

### 3. La gènesi de la mesura com a desenvolupament del pensament lògic

El domini i aplicació d'un sistema organitzat de mesures és fruit del pensament abstracte i quantitatiu. Arribar a aquest nivell, significa la possessió de la capacitat de poder abstraure dels objectes, una propietat determinada i solament aquesta, amb la capacitat, alhora, de generalitzar aquesta propietat en tots els altres objectes i situacions. També, la sistematització, comporta la capacitat de poder generalitzar el procés de subdivisió i agrupament unitari, en totes les situacions, podent-la aplicar tant en contextos ínfims com en les grans magnituds.

L'evolució en la direcció d'aquest domini quantitatiu abstracte que relaciona l'entorn amb l'home, ha necessitat milers d'anys d'aprenentatge i aquesta transformació, evidentment, ha tingut una doble direccionalitat bijectiva, ja que mentre per un costat era necessari l'avenç per transformar els procediments de mesura, per l'altra, aquestes mateixes transformacions generaven noves transformacions conceptuals, tan individualment com social, que incidien i modificaven tots els àmbits de la vida i de les relacions.

Les relacions home-entorn s'estableixen, inicialment, emmarcades per la immediatesa i de forma sintètica-qualitativa. L'home viu la síntesi de l'objecte<sup>122</sup> com a característica general de les propietats específiques d'aquell objecte i així un arbre, no té res en comú amb un teixit o amb un camí. Aquest estadi porta, lògicament, a que cada context situacional i cada cosa sigui diferent de les altres i tingui el seu procés específic de mesura amb les seves pròpies unitats, fins i tot, diversificant-se les unitats que s'apliquen en un mateix objecte on per exemple, l'amplada, la llargada i l'alçada podria ser

---

i controlar la navegació. L'art es transforma, i la música de polifonia, de l'Ars Antiqua dona pas a l'Ars Nova o "*cançons mesurades amb precisió*"; la pintura s'interessa per la perspectiva i es pinta tenint en compte la geometria; la tecnologia es fa imprescindible i el rellotge que s'inicia amb Richard de Wallingford és el signe clau i emblemàtic del moment i de la transformació cultural.

<sup>120</sup> En el llibre *Premier voyage autour du monde par Magellan 1519-1522* (1964) que cita W. Kula, Antonio Pigafetta, acompanyant de Magallanes en la seva volta al món, es sorprèn davant un poble aborigen d'Amèrica del Sud que utilitza un sistema de mesura. Al respecte comenta amb admiració: "*Aquesta gent viu amb justícia, viu amb pesos i mesures*"

<sup>121</sup> La concepció eurocèntrica sempre havia considerat exclusivament Europa com a centre de cultura, tal i com creu Montaigne (Citat per Kula, W.): "*no fa ni cinquanta anys que no es coneixia (referint-se al Nou Món) l'escriptura, ni la pesa ni la mesura, ni els vestits, ni els cereals, ni els vins*". (Essais, 1950. París).

<sup>122</sup> Seria equiparable amb el nivells de maduració 0 i 1 que els Van Hiele detecten en el procés d'aprenentatge on (0) la capacitat permet veure la globalitat de l'objecte, però no les seves parts constitutives i per tant no es pot efectuar, encara, un procés definitori o en (1) que existint la capacitat de poder detectar les parts d'un element, i conseqüentment sintetitzar-ne les seves especificitats; aquestes no es poden generalitzar respecte a d'altres, per tal de poder estructurar un procés classificatori i comparatiu.

mesurades en unitats diferents segons l'amplitud que tinguessin. Extreure de totes les situacions l'essència de la magnitud comú a totes elles, com per exemple, el concepte de longitud com a camí recorregut, la distància on ha arribat una pedra llançada, la llargada d'una taula, l'alçada d'un arbre, etc., és un procés complex que necessita de capacitats classificatòries ben desenvolupades; les quals, a més, necessiten poder interrelacionar comparativament, aquesta magnitud respecte a una altra longitud unitària per tal de poder quantificar aquesta relació. Molt més difícil resulta encara, la interrelació de magnituds heterogènies, o sigui qualitats diferenciades com la longitud amb la capacitat o el volum, pes, temps,... a través d'un sistema d'equivalències proporcionals.

Malgrat aquestes nombroses dificultats, les necessitats d'organitzar la comunicació i entesa, va obligar a avançar en la direcció d'abstreure l'universalisme de cada magnitud i les interrelacions existents entre elles. L'ús de la unitat, la seva immutabilitat i la seva adequació a la magnitud, serà també un element cabdal d'aquesta conquesta de la mesura que de forma universal, totes les cultures han adquirit per a convertir-se en element de comprensió i llenguatge social.

#### 4. Estadis d'evolució en l'adquisició de la mesura

La medició, com a procés d'abstracció que transforma característiques qualitatives en quantitatives és el resultat de l'evolució del pensament lògic matemàtic de la humanitat.

L'estudi de l'evolució metrològica és, avui, centre d'atenció antropològica i etnològica i els seus orígens cal cercar-los en els estudis efectuats a finals del s.XIX per J.H. Alenxander que va fer una recopilació de les unitats existents en aquell moment en el món, aconseguint catalogar-ne més de 4000; si bé amb anterioritat ja hi havien hagut molts treballs en aquesta direcció<sup>123</sup>. Els estudis, sovint, s'han centrant en variacions d'una d'elles<sup>124</sup>, en alguna tipologia específica o en alguna àrea geogràfica concreta.

A grans trets, totes les recerques demostren d'una o altra forma, l'existència d'un procés que podríem definir com a *fases d'evolució filogènica de la mesura*, fases que es concreten i defineixen, bàsicament, en referència als procediments i tècniques de mesurament emprats "*des d'un punt de vista evolucionista, podem afirmar que el primer període evolutiu de les nocions metrològiques de l'home és l'antropomètric, en el que les unitats bàsiques de les mesures són parts del cos humà. El període següent cerca les seves unitats de mesura en les condicions, objectes i resultats de la tasca humana*"<sup>125</sup>.

Les fases es podem sintetitzar en:

- a) *antropomètrica*
- b) *antropomètrica-relacional o consuetudinàries*
- c) *objectal*
- d) *simbolització sistèmica*

<sup>123</sup> Budé, 1513; Paucton, 1780; François Altés, 1832; Fabri de Peiresc 1888; entre d'altres. Posteriorment s'han anat realitzant molts estudis en aquesta direcció: Prato, 1908; Rutkowski, 1913; Stamm, 1935; Thomson, 1959; Sreniowski; Jerry-Quéroult; Richard, Vilar, 1962; Kula, 1970; Alsina C., 1989, 1996.

<sup>124</sup> Per la lliura s'han trobat més de 391 valors i, 282 per al peu.

<sup>125</sup> Kula W. (p.5)

### a. La mesura antropomètrica

Les comparacions de mesuratge s'establiren, inicialment, a partir del propi cos i així, les unitats antropomètriques seran les primeres que utilitzarà l'home. L'ús de les unitats antropomètriques és present tant en les cultures d'Egipte i Babilònia<sup>126</sup>, com en les orientals, les precolombines o les de qualsevol part del món; i òbviament, estan presents en les arrels matemàtiques gregues i romanes. El seu ús es pot trobar, encara avui, en moltíssimes comunitats d'arreu del món, competint amb el SMD pel domini procedimental mètric, tal i com demostren diversos estudis etnomatemàtics (T. Nunes, D'Ambrossio, B. Barton, P. Gerdes, Sebastiani) tot i ser, fins fa ben poc, la seva base unitària. També es fa present en l'evolució ontogènica de la mesura (Piaget, Lowell) i en les conclusions de la recerca.

Inicialment, el criteri antropològic per establir el marc referencial del valor unitari, es centra en la persona que té l'encarnació del poder diví o polític. Eren les seves mesures personals les que determinaven la mesura de la unitat i al mateix temps, degut a aquest atribut, li corresponia tenir cura i potestat d'establir-ne el control i la vigilància de dites unitats. La determinació de la mesura com a dependent del poder retorna amb gran força durant l'Edat Mitjana, on el peu del governant local, molt sovint, n'és la unitat. Tanmateix, però, la unitat legal es veu obligada a compartir el seu ús amb la mateixa unitat del poble, existint entre ambdues una diferenciació dels seus valor magnitudinal<sup>127</sup>, valors que depenien de cada cultura i que es feia palès en totes les diferents unitats que s'utilitzaven.

Vitrubio<sup>128</sup> prenent l'home com a centre, estableix un sistema de relacions proporcionals d'un complicat sistema antropomètric, en el qual tant pren el cap com a referent "*composà la Naturalesa el cos humà, amb la sort que el seu rostre des de la barbata fins l'extrem superior del front i arrel del cabell és la dècima part de la seva alçada. Un altre és el pam de la mà des del nus del canell fins a l'extrem del dit llarg. Tot el cap des de la barba fins a la part més alta del vèrtex o corona és l'octava part de l'home. El mateix resulta pel darrera, des de la nuca fins la part més alta. De la part superior del pit fins l'arrel del cabell és la sexta part; fins a la corona la quarta. Des de la part baixa de la barba fins la part inferior del nas és un terç de la cara: tot el nas fins l'entrecelles, un altre terç; i un altre des d'aquí fins a l'arrel del cabell i final del front. El peu és la sexta part de l'alçada del cos; el colze la quarta, el pit també la quarta. Tots els membres tenen la seva commensuració proporcionada, seguint-la els pintors i estatuàries antics aconseguiren reconeixement etern*"; com la totalitat del cos, com a generador de figures, simetries i distàncies "*Així mateix el centre natural del cos humà és el llombrígol ja que estirat supinament i obrint braços i cames, si es posa un peu del compàs al llombrígol i es traça un cercle amb l'altre (peu), es passarà pels extrems dels peus i de les mans. El mateix que amb un cercle succeirà amb un quadrat, perquè si es mesura des de les plantes (del peu) a la corona (del crani) i es passa la mesura transversalment als braços estesos, es troba que l'altura resulta ser igual a l'amplada, resultant-ne un quadrat perfecte*"

<sup>126</sup> L'angula babilònica o amplada del dit té tota una estructuració sistèmica d'equivalències unitàries i així 96 angules són 1 danda; 2000 dandes 1 krosa, 4 kroses 1 yojanna,..

<sup>127</sup> A Egipte, les unitats tenien el faraó com a referent i així el colze o cúbit reial era la base unitària del sistema egipci amb interconnexions de proporcionalitat amb d'altres unitats antropomètriques (1 colze reial = 7 mans = 3 pams; 1 pam = 4 dits; 2 colzes = 1 braç; 2 braços = 1 braçada;; 1 pas = 5 peus; 1 peu = 1/6 braçada; 1 khet = 100 cúbits reials; 1 shetat = 1 khet quadrat);. El colze reial coexistirà amb el colze comú, unitat popular, equivalent a 6 mans. El colze reial tindrà usos oficials i arquitectònics, tot caracteritzant-se per la seva gran precisió i exactitud (els costats de la base de la piràmide de Khufu (2630 a.C.) tenen 440 colzes reia. La proporcionalitat entre ells és 1/4000). El colze comú, s'utilitzarà en els àmbits familiars i en la comercialització diària.

<sup>128</sup> *Architectura*, Llibre 3 capítol 1: De la composició i simetria dels Temples.

Els valors antropomètrics són presents, també, com a mesura unitària<sup>129</sup> d'alçada global, i per la distància d'alguna acció humana, com la passa, la braçada, la iarda... Les mesures antropomètriques no solament incideixen en magnituds longitudinals sinó també en les superficials com el *pam quadrat*, *peu quadrat*...

La importància del procés d'evolució unitària ve determinat pel fet que els paràmetres individualitzats i concrets, es transformen en indeterminats i generalitzats i, així, "el" o "la"; o, "el meu", "el teu" (dit, braç, puny, peu, ...) es converteix en "un", o en "una"; sent aquesta transformació del subjectivisme determinatiu personal a l'objectivisme indeterminat i uniforme, el primer pas de l'abstracció de la unitat de mesura.

### **b. La mesura consuetudinària**

Les unitats antropomètriques resultaven còmodes, fàcils de comprendre i sempre es tenien a mà; però, a part, resultaven ineficaces degut a la imprecisió del seu valor unitari degut a la diversitat de valors magnitudinals que tenia una mateixa unitat, ja que aquest, depenia de la "interpretació" que es feia d'elles o per les diferenciacions antropomètriques dels propis usuaris. A més, resultaven insuficients per poder mesurar magnituds més grans que les del mesoespai corporal o excessives pel microespai. Un altre element a tenir en consideració era la dificultat de poder crear, amb elles, estructures sistèmiques de múltiples i submúltiples simples i enters; el pas no tenia per a què contenir un nombre exacte de colzes, o el colze una quantitat exacte de pams, situació que obligava, a cercar equivalències pluriunitàries<sup>130</sup>.

Aquestes problemàtiques es solucionaren, en part, amb l'aplicació d'altres valors antropomètrics com podien ser espais i dominis controlats o efectuats per accions humanes com la llargada de la veu, la llargada d'elements llençats, els espais treballats o l'ús d'objectes d'utilització freqüent com la mesura del gra d'algun cereal. Poc a poc aquestes estratègies abocaren a la creació i ús generalitzat d'*unitats objectals*, independents i diferenciats del cos humà, les quals permetien tenir físicament i en tot moment, una mateixa unitat acordada (*vara*, *canes*, ...) que tindrà com a característica més important, el de la seva inalterabilitat.

La consecució de la inalterabilitat de la unitat, necessitat, però, d'un estadi previ, els de les *mesures consuetudinàries antropomòrfiques*, o unitats que interrelacionen el cos amb una realitat externa a ell però estretament relacionades amb ell, formant part dels hàbits i costums de la vida diària. La relació entre cos i objecte, es construeix fruit de l'acció humana realitzada en un context concret i específic, circumstància que obliga a la seva precisió per tal de detallar la graduació de com s'efectua aquesta interacció. Les condicions de vida o de treball, la necessitat o els estris emprats, s'aniran metritzant poc a poc per tal de poder prendre com a base d'unitat de mesura, l'acció o la temporalització que representa la realització d'aquella tasca "*unitats que seran prou comprensives i eloqüents sempre i quan es compregui el seu sentit social, molt més significatives que les mesures mètriques convencionals que socialment no tenen significació... eren l'expressió de la saviesa de generacions sobre la relació entre l'home i la naturalesa, efectuada a través del treball*"<sup>131</sup>.

<sup>129</sup> La *purusha* índia, aproximadament 2,5 m. equivaldrà a l'alçada d'una persona amb els braços enlairats pel cim del cap; els cànons grecs practiquen la mesura proporcional respecte al cap.

<sup>130</sup> A Etiòpia 1 colze = 2 pams i 2 dits . A Letònia en el s. XVII 16 peus = 7 colzes i mig

<sup>131</sup> Kula, W. (p.45)

El món agrari, el comercial, el productiu o qualsevol altra, utilitzà unitats que solucionessin les seves problemàtiques reals, de manera que tenien relació directa amb la realitat i d'ella havien sorgit. Qualsevol intent d'imposició externa que no s'adeqüi a la realitat, resulta difícil que sigui assumit<sup>132</sup>. Aquesta inadequació és el que succeí amb la imposició del SIM en front de les mesures tradicionals de cada país, obligant a un procés d'adaptació de molts anys, tot i el suport institucional i legal.

Les unitats consuetudinàries solucionaven necessitats concretes del dia a dia, i per això es troben present en totes les cultures, sovint recollides en forma de refranys i frases fetes que actuen de transmissores de l'aprenentatge social. Les unitats es poden classificar segons l'objectiu que pretenen definir, i es poden destacar:

- *determinació de posicions i distàncies*<sup>133</sup>
- *quantitat necessària d'acció o material, per fer alguna acció o activitat*<sup>134</sup>
- *transcendència i importància de l'ús d'un determinat recurs o instrument*<sup>135</sup>

Les mesures indirectes o sigui el mesurament d'una determinada magnitud a partir de magnituds diferents, prenen força en l'àmbit consuetudinari; sent-ne un bon exemple les mesures superficials relacionades amb la temporalitat o en la duració de l'activitat, i també amb la capacitat i la quantitat de producte necessari per omplir-la. Totes elles, són emprades abastament i així la superfície dels camps podia ser mesurada a partir del temps necessari en fer una feina o per la quantitat de llavors necessàries per la seva sembra. En el primer cas seran els *jornals*<sup>136</sup> o dies de treball o; la *vessana*, o terreny llaurat en un dia per una parella de bous,... ; dins la segona tipologia es pot destacar, la *quartera de sembradura* o terreny sembrable amb el gra d'una quartera<sup>137</sup>; o la *fenecada valenciana* o la *fanega castellana* si es fa amb una faneca o fanega de gra, o la *seterée* a França. En ambdós casos, la relació amb la longitud està implícita en les condicions definitòries de la unitat, com en el fet que en la sembradura, cada llançament calia realitzar-lo fent una passa. El temps i la capacitat es converteixen, doncs, en unitats indirectes per a mesurar superfícies i també, idènticament, succeeix amb la temporalitat de la longitud: *l'hora de camí*, ...

<sup>132</sup> N'és un bon exemple, l'intent de Roma, d'imposar a tot el seu imperi, la milla romana, fonamentada en la passa doble, com a unitat de mesura de distàncies. A la Gàl.lia, no aconseguí l'acceptació i ús, degut al fet que allà, era el control temporal qui determinava els desplaçaments i es feia sobre la base del món del cavall i l'ús del carro, i així, la necessitat d'unitats més llargues que la milla, primaren per sobre de la imposició, i la *leguae* (aproximadament equivalent a 4 quilòmetres) compartí l'existència al costat de la *milla*.

<sup>133</sup> Els nòmades del Sàhara, (Citat per W. Kula que l'extreu de Mauny (1961), R. *Tableau géographique de l'Ouest africain au Moyen Age d'après les surces écrites, la tradition et l'archéologie*. Dakar) utilitzen una gran varietat de termes per determinar els punts d'aigua: "a tir de bastó tir d'arc, fins on arriba la veu, la vista, a vista de gropa de camell, el caminar des del matí al capvespre, de primera hora a mig matí, migdia, el camí fet amb càrrega en terreny fàcil o difícil..."

<sup>134</sup> A Etiòpia, la mesura de la sal queda concretada per "la quantitat necessària per cuinar una gallina";

<sup>135</sup> En les cultures caçadores és l'ús de l'arc (distància recorreguda per una fletxa) o de la fona, el que determina la unitat de longitud. Aquests unitats desapareixen al desaparèixer la utilització de l'arc. Sentit semblant tenen expressions com "a tir de pedra", "a tret de canó..."

<sup>136</sup> Aquesta mesura es troba per tot Europa i prové de Plini amb el "iuger" (0,25 ha.). A França serà anomenada "arpent" però "journau" a Borgonya i Champanya, tot diferenciant-ne "journaux" si es referia al treball de sembrats; "ouvrés" en les vinyes; i "soitures" en les segues. A Bretanya hi havia el "journal a charru" o de llaurar i de "à foucher" de sembrat o el "à becheur" d'hort o de vinya. A Alemanya era el "morgenland" (0,31 ha.) A Catalunya ja en el s.XII es diferenciava el "journal comú" del "journal de cavadura". A Itàlia era la "giornata"; a Rússia l'"obza" o treball de llaurar amb cavall en un dia. A Croàcia el "ral d'estiu" i el "ral d'hivern".

<sup>137</sup> A Borgonya s'utilitzarà la "bichetée" o superfície sembrada amb un "bichot" de gra; o la *boisselée* si s'emprava un boisseau. A Rússia la "diesiatina" si era feta amb un "chetvier".



La relació consuetudinària entre treball i temps, present ja en el món romà i molt generalitzada durant l'Alta Edat Mitjana, és anterior a les relacions del treball amb la capacitat, com pot ser la sembradura. Més tardana serà, encara, la mesura indirecta de la superfície a través de la fertilitat de la terra; mesura que anava lligada amb la capacitat de subsistència o d'autoconsum i de reproducció o alimentació ramadera, i que permetia, al mateix temps, la possibilitat de comparacions de rendibilitat econòmica entre terrenys. La indeterminació de les mesures indirectes obligava a la seva pròpia precisió, tot diferenciant-les segons la tipologia del treball, o sigui, definir-la segons qui el feia; el tipus de terreny; l'època o estació; la durada o la part del dia en què es feia, etc. Així es pot parlar de jornal de bous o jornal de tallar herba o de cavar, d' hora a peu pla o hora de pujada, d'estiu o de hivern, de matí o tarda ...

La metrologia antropomètrica i la consuetudinària antropomètrica va permetre la comparació de qualsevol magnitud específica de la naturalesa i del medi ambient, amb la cultura i el producte del treball humà.

### c. La mesura objectal

La necessitat de la immutabilitat de les unitats i independents de les limitacions humanes (capacitats, transport, producció, etc.) determinen la creació d'unitats objectals o d'objectes que seran presos i assumits com a unitat<sup>138</sup>. Aquesta adquisició, permetia la reproducció i construcció de les unitats, circumstància que obligava, per tant a l'existència de *patrons de mesura* per ser emprats com a models i testimonis.

La immutabilitat de la mesura es protegeix a través d'un seguit de normes i controls que tenien per objectiu garantir la seguretat i fiabilitat del seu ús equitatiu en qualsevol tracte o intercanvi. Aquestes garanties naixien del fet que tothom les podés tenir a l'abast construint les seves o contrastant les que s'utilitzaven segons el criteri del patró. Els controls bàsics eren:

- *control social*. Les unitats es posaven, generalment, a l'abast públic tot ubicant-les en algun indret prou assenyalat per aconseguir que el patró restés, sempre, en evidència i disponibilitat, alhora que fos difícil de modificar. S'esculprien o es fixaven en parets, muralles, cases de la vila, o en les llotges.
- *supervisió de les autoritats*. A més del control i vigilància per tal que no es modifiquessin, les unitats patrons es solien construir amb materials cars o difícils d'obtenir o amb treballs artístics difícils de reproduir. També, s'afegien penes civils al fet de modificar o enganyar amb elles
- *garantia sagrada o sanció eclesial*. La penalització moral derivada de modificar o enganyar amb les unitats, complementa a la pena civil.

Les unitats objectals són un pas més en l'evolució de l'allunyament progressiu de la unitat respecte al propi cos. L'existència de patrons objectals de mesura no va fer desaparèixer, però, l'ús d'unitats antropològiques o les consuetudinàries.

<sup>138</sup> Eduard II d'Anglaterra, al 1324, estableix la polsada com a unitat en base a igualar-la a la longitud de "tres grans de civada, rodons i secs, posats un darrera l'altre".

#### d. La mesura simbòlica sistèmica

Cada cultura i cada comunitat va anar forjant el seu peculiar i específic sistema de mesures, situació que derivà, també, a la necessitat d'unificar les mesures objectals per poder establir així, un intercanvi comercial més coherent i equitatiu entre distintes comunitats i pobles ja que, per exemple, la relació i equivalències entre procediments de temporalització, de sembradura o de recollida, era inexistent, i tampoc hi havia cap interrelació entre múltiples i submúltiples dels diferents sistemes. Cada unitat magnitudinal solia tenir el seu respectiu sistema de subunitats o patrons i no sempre guardaven entre ells una proporcionalitat fixa, situació que també complicava el domini i ús de la mesura entre comunitats diferenciades. La proporcionalitat dels sistemes de mesura antropomètrics, però especialment els objectals, si bé en molts casos es fonamentaven en la base 10, majoritàriament, però, es feia sobre tot en la 2, la 12 i la 60<sup>139</sup>.

La necessitat social i l'estructura sociopolítica va impulsar la creació d'un patró unitari, obligant al poder polític a intervenir per vetllar per l'ús correcte d'aquests patrons, per l'emissió d'unitats monetàries comunes, per l'establiment dels impostos o per intentar la unificació de les mesures o fins i tot, imposant-ne una de determinada. Durant l'Edat Moderna coexisteixen multitud de sistemes mètrics que es mantindran fins el triomf del Sistema Mètric Decimal (SMD).

És obvi que el procediment d'aplicació de sistemes binaris, duodecimals o sexagesimals es fonamentava en habilitats mnemotècniques d'equivalències, degut a la seva major possibilitat de divisors que en el decimal. Les tècniques i habilitats de composició i descomposició, resultaven efectives i imprescindibles pel seu domini i capacitat d'aplicació, sense necessitat de dominis operatius que sí implica el decimal. Aquest fenomen es constata, d'una manera més o menys general, en les actuals recerques etnomatemàtiques efectuades arreu del món. Paral·lelament a aquestes estratègies mnemotècniques de composició i descomposició, les divisibilitats binàries i els dobles consecutius, constitueixen un procediment universal de mesurament.

Els sistemes locals de mesura són el producte de la barreja de diversos sistemes. En el cas europeu, degut, especialment, a la incidència de la metrologia romana coexistent amb d'altres de diferents orígens. Aquesta barreja dins un mateix sistema, fa que sovint no existeixin relacions proporcionals entre les unitats del propi sistema, de manera que, alguna d'elles tenen primacia per sobre de les altres. Exemple d'aquestes situacions heterosistèmiques es poden trobar en magnituds de transaccions comercials a tot Europa<sup>140</sup> on el sistema duodecimal era la base funcional i d'ús quasi generalitzat, encara que coexistia al costat d'altres sistemes; si bé la dotzena amb els seus múltiples i submúltiples<sup>141</sup> prevalgué fins a l'entrada del SMD i, encara avui, està present en alguns casos concrets com pot ser la venda d'ous

<sup>139</sup> Els sistemes decimals no han estat gaire emprats ni en les cultures primitives antigues, ni tampoc en les cultures aborígens actuals. Els més freqüents són la base 5 o la 20. La poca aplicació decimal tal vegada pot ser degut a la poca divisibilitat que té el 10, respecte a sistemes com el duodecimal, decimosenari, el vigesimal o el. Els dits i els còndils dels dits potencien l'ús, respectivament, del sistema 5, 10 o 20 en el primer cas, i al 12, 14, 30, 60 en el segon. Els segons degut a les seves divisibilitat, permeten tenir molts més valors exactes i lògicament més fàcils de recordar a nivell mnemotècnic.

<sup>140</sup> A la Lliga Hanseàtica, al sistema decimal se li aplicava també el duodecimal i així junt a la *centena normal* existia la *centena grossa* o de 120 (10 dotzenes), i el *miler* de 1200 (100 dotzenes) i el *miler gros* de 2880 (20 grosses).

<sup>141</sup> Mitja dotzena (6), la *dotzena grossa* o la *grossa* (dotzena de dotzena (144)). Al ser multiplicades per 5 entronquen amb el sistema sexagesimal.

que es fa encara amb caps de mitja o d'una dotzena, o també en molts paquets de determinats productes. És evident que resulta més difícil dominar l'estructura de relacions del sistema que no pas la unitat i, d'aquí, que resulta més fàcil, modificar el valor unitari -amb el temps les mesures unitàries es transformen sense perdre vigència el sistema-, que no pas arribar a transformar tota l'estructura relacional.

Els orígens i influències de cadascun dels sistemes cal cercar-lo en les cultures matemàtiques primitives o en aquelles que impulsaren processos d'expansió i colonització. És poden destacar com a influències més importants:

- la numeració i metrologia egípcia, xinesa i àrab en la base *decimal*.
- el romà, en el *duodecimal* i *decimal*
- les influències hindús al *binari*
- les arrels sumèries i babilòniques en el *sexagesimal*

Cada sistema és, en realitat, una barreja de sistemes i influències<sup>142</sup> diverses. La millora d'ús, necessitava del pas del sistema sense proporcionalitat a un sistema proporcional ja que amb això s'agilitzava i millorava el procés d'adquisició d'estratègies i procediments de mesura. La fase final d'aquesta evolució passà per l'estandardització d'un sistema objectal proporcional i uniforme on cada unitat es diferencia de l'anterior i posterior, per un mateix valor proporcional. Quan aquesta proporcionalitat es fa sobre la base 10 es crea el fonament del que serà el SMD.

## 5. Naixement i evolució del Sistema Mètric Decimal

El SMD nasqué fruit d'un important debat que es gestà entre els Enciclopedistes francesos. No fou un plantejament que aparegué de cop i volta, sinó que era la continuïtat d'un procés ja iniciat amb anterioritat i que pretenia aconseguir la unificació<sup>143</sup> de les mesures.

<sup>142</sup> El romà, per exemple, té el pas de 12 peus però aquest, s'agrupa en 1000 per a obtenir la milla tal com explica Vitruvi (Architectura. Llibre 3, Capítol 1): "Prengueren per tant dels membres del cos humà la varietat de mesures, tan necessàries en les obres constructives, com el dit, pam, peu i colze i les distribuïren en número perfecte, que els grecs anomenaven "teleion". Els antics feren del peu el número perfecte, perquè el peu són els dits de la mà, d'aquests nasqué el pam i del pam el peu. Contant, doncs, ambdues mans de deu dits així dividits per la naturalesa, Plató decidí anomenar perfecte a aquest número, per compondre-se d'unitats de coses, que els grecs anomenaven "mòades": les quals si passen a onze o a dotze, les que excedeixen de deu no són número perfecte fins a compondre una altra desena perquè cadascuna d'aquestes unitats és una partícula d'aquest número. Però els matemàtics (romans) foren d'altra opinió i digueren que el sis era el número perfecte perquè aquest es dividia en sis parts adaptades als seus raonaments. Així a l'útil deien "sextans", al dos, "triens", al tres, "semis", al quart "bes", al cinc, "quintarium" i al sis "perfectum". Si es passa de sis i s'afegeix un, l'anomenen "aphecton", al pujar a vuit, que es afegint un terç, se l'anomena "terciarium"; afegida la meitat, fa nou, "sesquialterum"; afegits dos terços es forma el deu, "besalterum"; a l'onze per afegir-li cinc, li diuen "quintarium" i, al dotze, per resultar de dos números simples, "dyplasiona". També varen fer perfecte al número sis per haver observat que el peu de l'home era la sexta part de la seva alçada; i que el colze constava de sis pams, o sigui de 24 dits. Per aquesta raó que el colze contingui sis pams, les ciutats de Grècia, degueren dividir el dracma en el mateix número de parts. Acunyaren per dracmes unes peces de bronze com els nostres "asses" que contenia sis parts iguals anomenades "dòls", i, dividien cada dòl en quatre parts que uns anomenaven "dichalca" i d'altres "trichalca" a semblança dels 24 dits del colze. Però els nostres, prengueren des d'un principi el peu i al denari li donaren el valor de deu asses de metall: per això aquesta moneda conserva fins avui, el nom de "denari"; i a la seva quarta part, composta de dos asses i mig, li digueren "sestercii". Però advertint després que ambdós números de deu i sis eren perfectes, els uniren i formaren el perfectíssim setze. Tot això va néixer del peu, perquè si el colze se li treuen dos pams, queda el peu que es compon de quatre, i, ja que el pam té quatre dits, el peu en tenia setze i altres tants asses de bronze tenia el denari" o en el sistema anglès on el peu té 12 polsades i la polsada en mitja polsada, quart, octau... (sistema binari), però si les polsades fan referència al món tecnològic, llavors es subdivideix de forma decimal (dècimes, centèsimes, ...).

<sup>143</sup> Al 1670, Gabriel Montou (vicari de l'església de Sant Pau de Lió) proposa la introducció d'un sistema decimal basat en l'arc de meridià terrestre corresponent a un arc d'un angle d'un minut. Poc després, Pacard (1672) i Huygens (1673) consideren l'oscil·lació d'un pèndol en un segon com a base fonamental del

El seu naixement i desenvolupament<sup>144</sup> ha representat un llarg camí, igual que ho ha estat el procés de concreció i definició metrològica de les magnituds i mesures, que encara avui, segueix vigent. Com ja es remarcà en la 1<sup>era</sup> Conferència General de Peses i Mesures, tots els acords, anàlisis i valoracions fetes per la Conferència General de Pesos i Mesures (CGPM)<sup>145</sup>; són preses “*amb totes les garanties i precisió que permet la*

---

sistema. Diderot al 1765 a l'*Encyclopédie* indica que Carlemany, Lluís XI, Francesc I, Enric II, Carles IX, Enric III i Lluís XIV ja havien intentat fer una unificació d'unitats de mesura sense haver-ho aconseguit.

<sup>144</sup> La cronologia extractada es resumeix en:

**1790** - M. de Talleyrand suggereix a l'Assemblea Nacional la creació d'un sistema uniforme que fos acceptat per totes les nacions. Aquesta proposta serà assumida en l'ordre del 8 de maig de 1790 i posteriorment confirmada per Lluís XVI el 22 d'agost. Fruit d'aquesta decisió s'intenta implicar a les acadèmies de París i Londres per cercar una solució comuna. La tendència d'unificació es fonamentava en l'oscil·lació d'un pèndol d'un segon a 45° de latitud com a base de la metrització de les magnituds.

**1791**- Un comitè (Borda, Lagrange, Laplace, Monge i Condorcet) presenten els experiments de Lavoisier i Haüy per determinar el pes exacte d'1 decímetre cúbic d'aigua destil·lada en el punt de congelació i pesada en el vuit (el volum era definit en base a la imprecisió donada al metre per 1/40.10<sup>6</sup> part del meridià). El comitè demana amidar amb més precisió el meridià de Dunkerque a Barcelona, per mitjà d'un procés de triangulació i estudis geodèsics.

**1792**.- El 26 de març, l'Assemblea Nacional ordenà l'amidament del meridià. S'encarrega a Méchain i Delambre de portar-ho a terme.

**1793**.- L'1 d'agost es creà per llei, el patró del *metre provisional* per a ser vàlid fins a que sigui definitivament aprovat.

**1795**.- La Convenció Nacional, el 7 d'abril, decideix la nomenclatura. El metal·lúrgic Jeannetti s'encarregà de la construcció de les unitats patró (metre i quilogram) al taller Fortin de París sota la supervisió de Lefèvre-Guinean.

**1799**.- El sistema decimal va ser acceptat.

El patrons són dipositats a l'Institut Nacional des Sciences et des Arts. El desembre s'anul·len el metre provisional i el quilo provisional. El decret és signat per Bonaparte, Siéyes i Ducos.

**1837**.- El 4 de juliol el rei Lluís Felip, el declara l'únic legal a França a partir de l'1 de gener de 1840.

**1869**.- Napoleó III, crea l'1 de setembre la Commission Internationale du Mètre. La primera reunió planificada per l'1 d'agost de 1870, s'hagué de posposar a causa de la guerra; reunió que va tenir lloc el 24 de setembre de 1872..

**1875** - El Bureau (BIPM) va ésser creat per la Convenció del metre i signat a París el 20 de maig per disset estats (Rússia, Alemanya, Austro-Hungria, Bèlgica, Brasil, Argentina, Dinamarca, Espanya, Estats Units, França, Itàlia, Perú, Suècia, Noruega, Suïssa, Turquia i Venèçola). La integració no implicava l'acceptació del sistema mètric. Es determina al metre com la deumilionèssima part del meridià terrestre.

**1889**.- 14 països europeus, a la Conferència General de París, donen validesa als patrons i el vist i plau a 26 patrons del metre i a 28 del quilo, que seran dipositats al Pavillon Breteuil (28 de setembre).

<sup>145</sup> . **1889 (1<sup>era</sup> Conferència General de Peses i Mesures)**

- Determinació metrològica del metre i del quilo i del seu respectiu patró.- que els prototips internacionals i nacionals del m. i el kg. estiguin construïts de platí aleatjat amb iridi (10%) aproximadament al 0,0001.
- que la longitud del m. i la massa del Kg. internacionals siguin idèntics als patrons dipositats a França.
- que les equacions dels metres nacionals respecte al MI estiguin compreses entre el límit de 0,001 mil·límetres i que aquestes equacions es fonamentin sobre una escala termomètrica d'hidrogen, que sempre pugui reproduir-se a causa de la permanència de l'estat d'aquest cos, posant-lo en condicions idèntiques.
- **1901 (III CGPM):** Es determina metrològicament el litre i el seu patró.
- **1927 (VI):** Definició metrològica del metre en base al patró d'iridi dipositat en el "Bureau Internacional de Peses i Mesures", declarat prototip del metre per la ICGPM. i estant dita regla, sotmesa a la pressió atmosfèrica normal i suportada per dos rodets de, al menys, un centímetre de diàmetre, situats simètricament en un mateix pla horitzontal i a una distància de 571 mil·límetres l'un de l'altre"
- **1948 (IX):** Creació del S.I. (Sistema Internacional de Mesures)
  - Resolució 6, encarrega al Comitè Internacional de P. i M. (CIPM) de:
  - estudiar i establir la reglamentació completa de les unitats de mesura.
  - obrir una enquesta oficial sobre l'opinió dels medis científics, tècnics i pedagògics de tots els països

*ciència actual*" de manera que els acords i definicions resten sempre pendents de nous replantejaments i definicions. Un bon exemple d'aquest permanent procés de redefinició, en són les diferents definicions que s'ha pres del metre i en el que en la fase del càlcul de la longitud del meridià de Greenwich, Catalunya<sup>146</sup> hi tingué una importància cabdal per estar dins el marc geogràfic del meridià terrestre que calia calcular.

- 
- emetre recomanacions respecte l'establiment d'un sistema pràctic d'unitats de mesura, susceptibles de ser adaptades per tots els països signataris de la convenció del metre.
  - Resolució 7 el determinar el principi general dels símbols i noms de les unitats.
  - **1954 (X) i 1971 (XIV)**
    - En la Resolució 6 de la X i en la Resolució 3 de la XIV; s'adopten set magnituds bàsiques com a unitats d'aquest "*sistema pràctic d'unitats*": longitud, metre; massa, quilogram; temps, segon; intensitat corrent elèctrica, amper; temperatura termodinàmica, kelvin; quantitat de substància, mol i intensitat lumínica, candela. Aquestes unitats es diferencien de les derivades, les quals es diferencien entre:
      - a) derivades d'unitats bàsiques (superfície, volum, velocitat, acceleració, densitat, camp magnètic; concentració; radioactivitat; volum màsic; lluminància, ...). La unitat d'aquestes magnituds utilitza les mateixes unitats bàsiques ( $m^2$ ,  $m^3$ , m/seg, ...)
      - b) amb nom propi:
        - específiques: potència, treball, força, pressió, energia, ..
        - suplementàries (angle pla, radià (rad); angle sòlid; estereoradià (sr: *angle sòlid que tenint el seu vèrtex en el centre d'una esfera, delimita sobre la superfície esfèrica corresponent, un àrea igual a la d'un quadrat que té de costat el radi de l'esfera* – Recomanacions ISO, Resolució 31, 1<sup>a</sup> part, 2<sup>a</sup> edició, desembre 1965)
  - **1960 (XI)**
    - La Resolució 6 substitueix la definició del metre del 1889 determinada posteriorment en el 1927 sobre la base de la longitud del metre patró de plati-iridi. La nova definició metrològica es concreta en: "*Metre és la longitud igual a 165076373 de la longitud d'ona en el buit de la radiació corresponent a la transició entre els nivells  $2p_{10}$  i  $5d_5$  de l'àtom de criptó 86*".
    - En la Resolució 12 s'adopta el nom de "*S*" (Sistema Internacional d'Unitats) i les regles pels prefixes. Conforme al paràgraf 1 de la Resolució 7 (octubre 1960) el CIPM recomana que la radiació del criptó 86, adoptada com a patró fonamental de longitud, sigui realitzada per mitjà d'una làmpada de descàrrega amb càtode calent, contenint el criptó 86 amb una puresa no inferior al 99 % de quantitat suficient per assegurar la presència de criptó sòlid a la temperatura de 64°K. aquesta làmpada portarà un capil·lar que tingui les característiques següents: diàmetre interior de 2 a 4 mm, espessor de les parets 1 mm aproximadament. S'estima que la longitud d'ona de la radiació emesa per la columna positiva és igual, amb aproximació d'una cent milionèsima ( $10^{-8}$ ) a la longitud d'ona corresponent a la transició entre els nivells no pertorbats, quan se satisfan les condicions següents:
      - 1.- El capil·lar s'observarà per l'extrem de manera que els raig lluminós utilitzat circuli de càtode a ànode
      - 2.- La part inferior de la làmpada, inclòs el capil·lar, es submergit en un bany refrigerat mantingut a la temperatura del punt triple del nitrogen, amb aproximació d'1 grau.
      - 3.- La densitat de corrent en el capil·lar serà de 0,3 0,1 ampers per  $cm^2$ .
 (ACIPM, 28, 1960, p.71; M.XI CGPM 1960 p.85)
- L'utilitatge necessari compren: les fonts estabilitzades de corrent per a l'alimentació elèctrica de la làmpada, un espai estanc, un termòmetre utilitzable en les proximitats dels 63°K, una bomba de buit, un mono cromatitzador (per aïllar la radiació) o filtres interferencials especials.
- La longitud d'ona de la radiació patró que pot reproduir-se amb una aproximació de  $10^{-8}$  segons les especificacions anteriors, podria ser aproximadament  $10^{-9}$  a costa d'especificacions més rigoroses. Altres ordenacions del criptó 86 i varies radiacions del mercuri 198 i del camí 114 es recomanen com a patrons secundaris (A.; CIPM 31, 1963; Recomanacions 1, p. 26 i M.; XII CGPM 1964, p. 18).
- La longitud d'ona d'aquestes radiacions varia amb la pressió, la temperatura i la composició de l'aire en el que es propaguen. És doncs necessari en general, mesurar "in situ" l'índex de refracció de l'aire.
- Per a mesurar patrons a parts o a ras s'utilitzen aquestes radiacions en un comparador interferencial, instrument complex que compren una part mecànica, una part òptica interferencial i una part termomètrica.
- <sup>146</sup> Moreu-Rey, E. *El naixement del metre*. Fruit de la decisió del 26 de març de 1792 de mesurar l'arc de meridià de Dunkerque a Barcelona; Delambre s'encarrega d'amidar de Dunkerque a Rodez i Méchain de Rodez a Barcelona. Les triangulacions es feren per tot Catalunya i la distància entre els punts s'amidava a través de càlculs trigonomètrics.. Els punts claus foren: Perpinyà, Puig de l'Estela, Puig Sacalm, Rocacorba,

El camí d'expansió per a l'acceptació i introducció del SMD com a mesura legal entre els països, ha anat seguint un procés de taca d'oli i íntimament lligada a les necessitat d'intercanvis comercials i a les expansions colonials. És obvia l'expansió primerenca per Europa degut a la expansió i imposició per part de l'Imperi napoleònic a tots els països conquerits i, fruit de les polítiques colonials posteriors d'aquests països, la seva expansió s'estendrà ràpidament en els territoris d'influència d'Espanya, Portugal, França, Itàlia ... Així, ben aviat els trobem aprovats en els països de centre i llatinoamèrica, nord-africans i d'altres del sud-est asiàtic. Les colònies del Regne Unit entraran més tard en aquest procés, degut a la pervivència dins la Gran Bretanya, de les seves mesures tradicionals.

Si bé l'acceptació o aprovació oficial pot ser més o menys primerenca<sup>147</sup>, el determini oficial no és sinònim d'acceptació i aplicabilitat, ja que darrera aquestes acceptacions naixerà un llarg període d'adaptació i d'estira i arronsa legal que en moltes ocasions portarà a continues supressions i impositcions de la normativa mètrica o de l'acceptació de les mesures tradicionals, fins i tot en alguns casos causa de revoltes populars davant aquest intent d'imposició i on, encara avui, al Regne Unit, davant l'existència d'ambdues sistematitzacions, existeix la demanda judicial (març 2002) per tal de poder garantir el dret de l'ús de mesures que la legalitat, ara, prohibeix i en penalitza l'ús.

Derivades d'aquestes normatives s'anirà legislant en cada estat per tal de reduir el nombre de mesures tradicionals, per transformar-les en equivalències mètriques tot creant taules de conversió i imposant processos d'aprenentatge del SMD a les escoles.

## 6. Les mesures avui

Tot i estar normativitzat l'ús del SMD i que tot el funcionament oficialitzat es fa seguir les seves pautes, que l'aprenentatge escolar s'estructura a partir d'ell i que la vida quotidiana es mou dins els seus paràmetres, la realitat presenta, sovint, mesuraments realitzats amb unitats antropomètriques, consuetudinàries i objectals que trenquen l'aparent normalització. Aquesta pervivència, des d'una perspectiva evolucionista, de processos metrològics ja superats, posa en evidència la gran dificultat de la supressió o substitució de les formes de mesura no simbòlica per les oficials. En moltes ocasions, la força de la tradició, però en la majoria, degut a que la mesura oficialitzada resulta menys comprensiva que l'expressada a través d'altres unitats, aquestes, es mantenen presents. Aquest fet, que el constatarem, clarament, al llarg de la recerca, demostra que tota evolució no és un camí lineal sinó que s'efectua amb retorns enrera, i que el procés, és en realitat, un conjunt d'evolucions paral·leles, de manera que en un mateix moment, poden estar presents i conviure, diferents estadis evolutius de la mesura.

---

campanar d'Olot, campanar de la catedral de Girona, Matagalls, Montserrat i castell de Montjuïc. Col·laboraren amb Mèchain: Tranchot, compte de Lacy, Josep Chaix (de Xàtiva), Bueno, Álvarez i González Planes i els catalans, Fra Agustí Canelles, Francesc Salvà i Campillo, Antoni Martí i Franqués. L'amidament finalitzà el 1973 i s'intentà perllongar pel País Valencià on Mèchain va morir a causa de la pesta groga (1804, Castelló de la Plana).

<sup>147</sup> Com a exemple de l'acceptació legal que no sempre significà la fi de les mesures pròpies de cada país, i seguint l'ordre cronològic de l'aprovació, es recull una mostra representativa d'aquesta: Bèlgica (1816); Luxemburg (1816); França (1840); Itàlia (1845); Xile (1848); Espanya (1849); Cuba (1849); Grècia (1849); Puerto Rico (1849); Portugal (1852); Colòmbia (1853); Panamà (1853); Equador (1856); Veneçuela (1857); Uruguai (1862); Sèrvia (1963); Argentina (1863); Perú (1863); Estats Units (1866); Santo Domingo (1867); Alemanya (1868); Bolívia (1870); Àustria (1871); Txecoslovàquia (1871); Canadà (1871) Egipte (1873); Hongria (1874); Suïssa (1875); Mònaco (1876); Noruega (1879); Suècia (1879); Romania (1883); Finlàndia (1886); Turquia (1886); Bulgària (1888); Tailàndia (1889); Japó (1891); Tunísia (1895); Congo (1910); Dinamarca (1910); Xina (1914); Rússia (1918); Polònia (1919); Iugoslàvia (1919); Letònia (1920); Lituània (1920); Japó (1921); Mèxic (1928); Índia (1960); Gran Bretanya (1969).

Les unitats objectals i les consuetudinàries tenen, actualment, més aplicació que les antropomètriques, les quals, majoritàriament, es centren en l'ús del pam. Sovint, el seu ús, s'utilitza com a frase feta per indicar una mesura aproximativa “*està a tres passes...*”. Les mesures antropomètriques fonamentades en el pam, tenen encara, una relativa utilització, en alguna ocasió, en paraments de llar i llenceria (llits de vuit pams, dos pams de vetes... ) i en el món de l'esport, com en el cas de la natació amb la “*braçada*”, les “*passes*” en la normativa del bàsquet i handbol o el “*passos*” per determinar els punts de llançament o la posició de barreres (futbol, handbol, hoquei..). En el món en què vivim els avenços tecnològics, han convertit el temps en una magnitud substitutòria de la longitud i així, la distància de la posició de les coses, és el temps per anar d'un a l'altre punt. Les ciutats no estan a quilòmetres l'una de l'altra, sinó a hores per arribar-hi. Aquest metrisme és el que té, també, qualsevol distància en l'excursionisme o en el món rural, on és solen definir temporalment a qüestions longitudinals. També, a nivell urbà, les distàncies longitudinals queden transformades, si bé aquí, a més de l'ús d'unitat temporal, freqüentment són utilitzades, encara més, les objectals i el “*xamfrà*” es converteix en la unitat de distància, i les altures es valoren per “*pisos*”.

En el món de l'esport, les mesures objectals afloren per tal de poder entendre molt més o poder visualitzar millor, la realitat que s'expressa. Quan, per posar algun exemple, hom sent que en una carrera de ciclisme el segon ha entrat situant-se a una roda, o que el cavall guanyador ha entrat a un cap del segon, la visualització de les imatges permet veure molt més aquesta realitat de l'arribada que no pas indicar que va guanyar per vuitanta centímetres. De la mateixa manera, es demana un got o dos d'aigua, un plat o una cullerada de menjar i no pas valors donats en centímetres cúbics de beguda o en grams d'aliment. Aquestes tipologies de mesura són exemples del que és el més usual en el món de la gastronomia i la cuina, on les unitats objectals però també les consuetudinàries (*polos de sal; brot de...*) tenen, encara, un pes transcendental.

En el món comercial, els productes discrets, especialment ous, fruites o peix, es solen comprar per valors numèrics: mitja dotzena, una dotzena...i no per quantitat de massa.

## 7. L'adquisició personal de la mesura

De la mateixa manera que la humanitat ha tingut un procés d'evolució permanent i constant per tal de millorar l'eficàcia i la comprensió universal de la mesura, l'evolució personal segueix, tal i com es constatarà al llarg de la recerca, un procés idèntic d'evolució, de manera que podem confirmar que l'evolució de l'aprenentatge ontogènic reproduïx l'adquisició filogènica.

Aquesta constatació ha de servir per entendre que l'adequació de l'enginyeria didàctica en l'aprenentatge de la mesura, ha de tenir present aquest procés natural d'adquisició amb l'objectiu que la interiorització s'efectuï amb garantia d'èxit i que el nivell d'adquisició estigui adequat al nivell d'evolució de la persona. Una fase cognitiva sensorio-perceptual, no pot intentar l'adquisició d'una mesura simbòlica, i en el moment que s'està desenvolupant el pensament lògic-matemàtic creant les estructures classificatòries, no pot deixar-se de banda de treballar el procés classificatori de propietats magnitudinals, és a dir, cal que l'evolució personal a nivell maduratiu i cognitiu, estigui en concordança amb el seu estadi corresponent de l'evolució de la mesura.

La persona del món occidental, educada i instruïda sota els paràmetres i normatives del SMD, enfoca el món de la mesura a partir d'aquest sistema, no obstant i tal com es constatarà en la recerca, quan es troba en un context on no es té suficient domini i interiorització del sistema mètric que li permet afrontar amb seguretat el problema que es presenta, llavors, aflora i es posa en evidència una regressió vers d'altres procediments, recursos i estratègies diferents als pròpiament derivats del SMD. Sovint aquesta recerca de solucions porta a l'aplicació de procediments que formen part d'estadis de mesura antropomètrica o objectal, tot i que en el procés formatiu acadèmic no s'hagués potenciat ni treballat.

Aquestes situacions plantegen la regressió, no com a retorn, ja que en la majoria de casos, com hem indicat, no s'havia partit d'ells per fer la construcció de la mesura sinó que és, realment, un reinici del procés d'adquisició. Semblaria ser que al situar-se en una posició de manca de domini, el subconscient cultural de la persona la reubica en els estadis de gènesi primerenca per tal de poder construir amb més facilitat, el propi autoaprenentatge. Aquest fet demostra que el procés evolutiu personal és una progressió escalar no lineal, amb avançaments i retrocessos, i en la que poden coexistir diversos estadis de domini, podent-se situar en segons quines circumstàncies en un determinat graó i en d'altres, en uns altres; procés ja detectat, també, en l'evolució social.

L'adquisició, fruit de les capacitats personals, però, també de la necessitat de resoldre situacions problemàtiques del propi entorn, determina que aquestes, com també veurem, impulsin l'adquisició d'uns determinats procediments, recursos i estratègies per sobre d'uns altres, els quals seran potenciat en uns altres contextos. Generar per tant un marc estimulant, variat i impulsor de situacions motivacionals problemàtiques és la base més important que la enginyeria didàctica ha de procurar crear per tal d'aconseguir potenciar l'adquisició de la capacitat estimativa de la mesura.



## 8. GÈNESI I ADQUISICIÓ DE LA MESURA DE LA SENSACIÓ SUBJECTIVA A L'APREHENSÍO INTEL·LECTIVA

### 1. Espai i mesura

Des d'una perspectiva epistemològica, l'ontogènesi de la mesura presenta diferents direccionalitats segons on es posa l'atenció dels factors causals de la seva adquisició i aprenentatge. Destaquen, tal i com ja hem indicat amb anterioritat, les tendències:

- *Nativistes*: l'evolució és producte individual i fruit de l'herència genètica.
- *Empiristes*: l'evolució és una maduració deguda a la connexió amb l'experiència.
- *Constructivistes*: L'adquisició es una permanent construcció que realitza el propi individu. Els aspectes nativistes i empiristes són factors que interactuen conjuntament de manera que potencien una permanent transformació que evoluciona a través d'estadis maduratus.

La reflexió sobre la gènesi de la mesura, com la de qualsevol capacitat humana, ha de tenir en compte la conjunció de multitud de factors derivats de totes i cadascuna de les diferents teories, si bé les genètiques són les que més aportació han fet en aquesta direcció i a les que cal parar una especial atenció tot fent referència obligada a les aportacions constructivistes psicogenètiques de Piaget, segons les quals, l'adquisició de la mesura resta íntimament relacionada amb el desenvolupament de la intel·ligència i l'adquisició de l'espai.

Donat que la mesura forma part del domini i control euclidià de l'espai és obvi que el seu domini passa per l'evolució de l'espai<sup>148</sup>, de l'adquisició del número<sup>149</sup> i de les estructures lògiques<sup>150</sup>. Piaget diferencia, en l'adquisició de la intel·ligència i també, de l'espai, quatre grans etapes que de manera resumida es poden concretar en:

- **espai sensorio-motriu**. La visió de l'espai és egocèntrica i tot resta sotmès a les percepcions sensorials. El nen viu tants espais com camps sensorials aplica, creant una visió heterogènia del mateix i amb una estructuració feta per juxtaposició.
- **espai preoperacional**. Compren dels 2 als 7 anys aproximadament. El raonament no es realitza sobre un sistema de transformacions i raonaments sinó sobre fets i situacions actants. L'espai és intuïtiu, amb imatges mentals estàtiques i lligades a les accions viscudes o experimentades. Si bé poden coordinar-se entre elles amb possibilitats de transformacions senzilles, no existeix la reversibilitat ni s'arriba a la configuració unitària. La representació espacial és topològica (dintre - fora; obert - tancat); no es comprèn la perspectiva, les formes euclidianes es capten al voltant dels 4-5 anys i la conservació de la magnitud es veu fortament afectada per la percepció.
- **operacions i espai concret**. Es desenvolupa entre els 7-8 anys i els 11-12. Les representacions operatòries són el fonament. Primer es fa present l'espai topològic, més endavant (9-10 anys) apareix la comprensió i relació de propietats projectives i euclidianes i més tard pot assolir-se la mesura.

<sup>148</sup> Piaget, J. (1977): *La représentation de l'espace chez l'enfant*. PUF. París

Piaget, J. (1971): *La epistemologia del espacio*. El Ateneo. Buenos Aires.

Piaget, J. (1973): *La géométrie spontanée de l'enfant*. PUF. París

<sup>149</sup> Piaget, J.; Szeminska, A. (1967): *Génesis del número en el niño*. Guadalupe. Buenos Aires

<sup>150</sup> Piaget, J.; Inhelder, B. (1967): *Génesis de las estructuras lógicas elementales*. Guadalupe. Buenos Aires

Apareix la reversibilitat de pensament sobre l'acció amb materials concrets alhora que va deslliurant-se del domini de la percepció encara que amb gran dependència de l'acció material o representada.

- **operacions formals i espai abstracte.** Es formalitza la representació mental i s'estructuren les capacitats de deducció i inducció. S'aconsegueix el domini de les relacions projectives i mètriques a nivell operatiu, les quals li permeten coordinar diferents perspectives magnitudinals d'un objecte. Compren l'espai únic i general tot possibilitant-li una millor estructuració d'aquest.

L'evolució i construcció de l'espai i de la mesura, es fa paral·lelament a la del número amb la diferència de que mentre aquest últim s'efectua fruit de l'acció sobre objectes discretitzables, l'esquema espacial es construeix per l'acció sobre les propietats topològiques i contínues dels objectes de l'entorn. Canals, M.A.<sup>151</sup> remarca tres direccions fonamentals en aquesta adquisició:

- *Les relacions de posició, que per als infants es concreten en la posició de les persones i coses respecte d'ells mateixos, i de les unes respecte de les altres.*
- *Les formes dels objectes, dels camins i espais limitats i de tot allò que poden veure i imaginar.*
- *Els canvis de posició i de forma, observables a partir de les ombres, dels miralls i sobretot dels moviments.*

## 2.- L'adquisició de la capacitat mètrica

El domini de la capacitat de mesura necessita de l'adquisició de l'espai i del número, però per ella mateixa, a més, té, també la seva pròpia evolució genètica que passa per l'adquisició de tres factors que conjuntament configuren el domini de la mesura:

- *adquisició de la magnitud*
- *adquisició de la mesura*
- *adquisició de la unitat*

### a. L'adquisició de la magnitud

Qualsevol metrització sobre una determinada magnitud, necessita del reconeixement i identificació d'aquesta magnitud diferenciant-la de les altres. És obvi que aquest procés és doncs, previ a qualsevol acte relacionat amb la mesura; però no únicament és aquest l'únic factor relacionat amb la magnitud, sinó que aquesta ha d'assumir, com en el cas del número, la seva conservació per tal de que cap propietat perceptual desfiguri l'essència de la pròpia magnitud. Només, a posteriori, serà possible passar a un procés d'ordenació i per tant a l'acte de mesurament.

Són aquests estadis anteriorment indicats, que evolucionen en íntima relació amb l'adquisició de les estructures lògiques del pensament, les que determinen la progressió que ha de permetre la interiorització de la magnitud:

- *Identificació i discriminació magnitudinal.* Cal saber diferenciar cada propietat com quelcom diferent de les altres.
- *Conservació de la magnitud.* Per més que es modifiquin les aparences perceptuals, la magnitud que s'avalua no resta modificada.
- *Ordenació de magnitud.* Capacita per saber organitzar un seguit d'objectes en base a una determinada magnitud.

<sup>151</sup> Canals, M.A. (2000): *Viure les matemàtiques de 3 a 6 anys*. Rosa Sensat. Barcelona

- *Relació magnitud número.* S'assigna un valor numèric a una magnitud en referència a un procés comparatiu respecte a una determinada quantitat de magnitud (unitat).

Cada magnitud té un procés específic d'adquisició i ja que la recerca es centra en la longitud, ara en fem esment.

### ❖ L'adquisició de la magnitud longitudinal

La longitud, entesa com l'espai comprés entre dos punts porta a diferenciar, tal i com s'ha indicat amb anterioritat, els conceptes de *dimensió* i *distància*, segons si aquests punts formen part d'espai ple o buit.

La possibilitat de poder recolzar o no, la comparació física sobre l'espai objectal, produeix diferents nivells de dificultat. Tal com es veurà en la recerca, l'estimació incrementa aquesta dificultat, quedant afectada pel gruix, posició i forma dels objectes. És evident que la diferència existent entre dimensió i distància, genera processos, també, diferenciats en la seva adquisició i per tant, té molta incidència en el domini del marc euclidià bi o tridimensional, on s'accentua aquesta dificultat al intentar mesurar la representació de plans o cossos gestats mentalment a partir de distàncies.

L'adquisició de la distància necessita de l'adquisició, prèvia, de la recta com a concepte i representació, les quals, segons Piaget, s'aconsegueixen al voltant dels 7 anys. En la conservació de la longitud, Piaget constata el domini previ de la dimensionalitat abans que la de la distància, de manera que per exemple, primer s'adquireix la igualació entre un llistó i aquest mateix llistó que s'ha trencat en trossos, que no pas el valor d'una distància en la que entre els dos punts s'hi ha posat elements intermedis. La síntesi del domini de la mesura de longitud es situa, per tant, tal com indiquen Piaget i Freudenthal, en la capacitat d'integrar el control de la distància i la dimensió.

La visió fenomenològica<sup>152</sup> de Freudenthal amplia la concepció genètica piagetiana tot remarcant la incidència de la interrelació social, tal com destaca Vigotsky i tal com senyala Bruner, la construcció del coneixement com a fruit de l'enactivisme, factor generador de la integració simbòlica i posterior abstracció. De la seva aportació cal destacar:

- *l'adquisició de la longitud va íntimament lligada amb el llenguatge*
- *les comprensió de la longitud es mou entre un binomi antagònic constituït per la rigidesa i la flexibilitat.*

Existeix una íntima correlació entre la capacitat de domini de la mesura i la capacitat de comprensió i expressió dels seus termes específics i definitoris. En la fase premètrica, les primeres valoracions mètriques són, precisament, les adjectivacions qualitatives sovint graduades adverbialment. La capacitat de distingir les propietats implícites en els termes, sovint adquirides com a contrast, (gran - petit; gruixut - prim; lluny - a prop, etc.) són anteriors al propi domini lingüístic, però una insuficient adquisició lingüística, genera impossibilitat d'adquisició de la mesura.

La mesura necessita d'un procés d'*invariança* i *rigidesa* fonamentada en la seva *inextensibilitat* segons la qual, aquesta no es modifica en certs moviments i transformacions com són les translacions i simetries, flexions, rectificacions, quadratures, particions, ... ; però, per l'altra banda es mou en la *variabilitat* com és el fet de que la perspectiva modifica les mesures de l'objecte, no obstant,

<sup>152</sup> Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Reidel Publishinh Company. Dordrecht.

interiorment se sap la seva mesura, de manera que la percepció queda sotmesa al coneixement. Per més que ens allunyem d'un objecte o que ens hi anem apropant, la mesura de l'objecte no es modifica, però cal la *flexibilitat* per adaptar la modificació perceptual. Aquesta adquisició, forma part, també, dels elements que configuren la conservació de la mesura i s'adquireix fruit de l'aportació de l'experiència enactiva. L'adquisició, necessita d'un tractament fenomenològic que tingui en compte, per tant, la invariança en les relacions de congruència, flexió i transformacions de partició-recomposició.

Chamorro i Belmonte, seguint Piaget, recullen els següents errors conceptuals, com a més característics de la manca de conservació, al tenir que fer una comparació mètrica entre longituds:

- Es valora com a més gran aquell que té un extrem que sobresurt respecte a l'altre. Per la nostra part hem constatat que generalment és sol fer amb el que sobresurt per la dreta de la persona que el mira.
- La longitud de les corbes va relacionada amb la quantitat de voltes.
- Entre línies de diferent forma, on hi ha corbes i una part que és un segment rectilini, però amb igualtat d'amplitud entre extrems, es veu més gran aquella que presenta el segment rectilini més gran.
- La quantitat de parts o de segments de la figura fa modificar directament la longitud.

A més, tal i com es veurà en la recerca, caldria afegirhi, també :

- la verticalitat prima a la horitzontalitat.
- la divisió en parts, incrementa la longitud.
- l'increment d'amplada redueix la llargada.

Sovint, aquests errors a més de ser producte de manca de conservació de la magnitud tenen la dificultat afegida de ser il·lusions visuals, fet que incrementa la dificultat de superar aquestes preconcepcions. Estimar longituds comporta doncs, enfrontar-se permanentment amb aquestes dificultats perceptuals, que com veurem, d'una o altra manera, es faran presents al llarg de la recerca.

La conservació en el mesurament directe o físic, s'aconsegueix més fàcilment, però tot i estar assolida, no significa que s'apliqui en un context de comparació mental on cal actuar sobre les imatges i representacions, situació que per la dificultat intrínseca, fa que es retorni a estadis ja superats en la comparació física, tot apareixent, de nou, les dificultats abans esmentades.

## **b. L'adquisició de la mesura**

Seguint Piaget, en l'adquisició de la mesura s'hi diferencien tres etapes:

### **b.1.- Estadi de comparació perceptual**

En aquesta fase la mesura és purament subjectiva. L'infant no utilitza cap tipus d'unitat ni realitza cap acció de comparació. El seu estat anímic i emocional tenen una gran influència ja que determinen la interpretació perceptual, o sigui que, per exemple, en un context que hi ha elements d'igual longitud però de diferents colors, aquesta pot ser valorada i ordenada segon el color. Aquest estadi està íntimament relacionant amb l'adquisició de la conservació magnitudinal. S'hi poden diferenciar:

- b.1.1.- *comparació perceptual sincrètica*. En aquest moment es té en compte, exclusivament, la globalitat, de manera que si es demana que construeixi un alineament o una torre igual a una altra, però en les que ambdues estiguin

situades sobre superfícies o taules de diferent alçada, llavors la torre que es construeix, solament té en compte l'alçada superior prescindint de la l'alçada de la torre en sí. El transport comparatiu és purament visual.

b.1.2.- *comparació perceptual analítica*. No utilitza únicament el transport visual sinó també el manual i corporal, tot aplicant referències respecte a ell mateix.

**b.2.- Estadi de comparació objectal.**

S'aplica ja la comparació entre objectes a partir del contrast comparatiu directe. També poden utilitzar-se objectes com a elements unitaris si bé sense atendre a la transitivitat. Es poden distingir-hi:

b.2.1.- *contrast directe*. Els objectes a mesurar necessiten posar-se en contacte directe entre ells. Si es demana quin de dos objectes és més gran, necessita posar l'un al costat de l'altre.

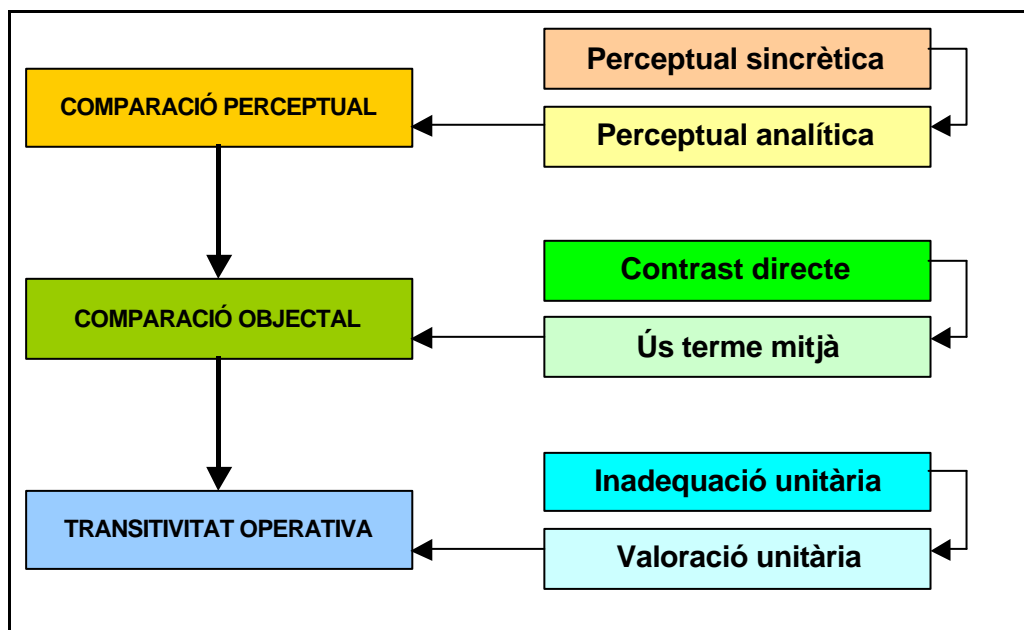
b.2.2.- *ús de terme mitjà*. Hi ha capacitat d'emprar un objecte diferent als propis objectes a mesurar. S'utilitzen unitats objectals que permeten que ja no sigui necessari el contrast comparatiu directe entre els objectes a mesurar. En aquest moment, pot utilitzar parts del cos com a unitats o bé elements diversos. És el primer pas important en l'adquisició de la unitat. Generalment el procés antropomètric anirà sent substituït per un d'objectal cap al final d'aquesta fase.

**b.3.- Estadi de la transitivitat operativa**

L'aplicació del terme mitjà juntament amb la transitivitat ve afegida al domini de la conservació de la magnitud i per tant amb la capacitat de la partició unitària. Aquests factors són els condicionants imprescindibles per tal de poder considerar el domini de la capacitat de mesura i l'adquisició del concepte d'unitat. També en aquest cas, es poden diferenciar:

b.3.1.- *inadequació unitària*. En aquest moment, no sempre s'escull la unitat adequada per tal de poder efectuar el mesuratge. Sovint es prenen unitats o termes mitjos excessivament grans.

b.3.2.- *valoració unitària*. L'experiència anterior porta a la selecció d'unitats més reduïdes tot lligant la precisió amb la unitat. En aquest moment aplica diferents unitats alhora, per tal de millorar la precisió.



Esquema 9 : Estadis d'adquisició de la mesura segons Piaget

### c.- L'adquisició de la unitat

La interiorització del concepte d'unitat i la capacitat d'ús de la unitat com a element de comparació objectiva pot considerar-se que s'aconsegueix en la tercera fase de l'adquisició de la mesura, no obstant, també aquesta, segons Chamorro i Belmonte (1991) passa, atenent al procés general de l'evolució madurativa de la mesura, per la seva pròpia gènesi, la qual es concreta en:

#### c.1.- *Etapa d'absència unitària*

És totalment present en l'estadi perceptual on la impressió subjectivista és la determinant de la valoració mètrica, però també, en l'estadi de contrast directe, ja que sovint, encara que posi en contacte comparatiu un parell d'objectes i es graduïn quantitativament, no s'utilitza un d'ells com a element comparatiu sinó que s'apliquen estratègies comparatives diverses. Un procés comparatiu correcte, d'entrada, no és indicatiu d'adquisició de la mesura o de la unitat, ja que en determinats casos, si a posteriori es modifiquen els condicionants perceptuals dels objectes, llavors es modifica la mesura; clara mostra de la manca de domini de la conservació i per tant, també de la concepció unitària.

#### c.2.- *Unitat dependent*

Els recursos unitaris són variats i canvien segons les situacions i contextos. Bàsicament s'utilitzen unitats antropomètriques de parts corporals o bé unitats objectals o sigui objectes coneguts. L'evolució del seu ús passa per:

- *Unitat funcional*<sup>153</sup>. La unitat està en dependència amb l'objecte a mesurar. Sovint les unitats guarden relacions amb les formes o funcions de l'objecte a mesurar. Recorreguts amb passes, capacitats amb gots, mesures a l'escola amb estris escolars, ...
- *Unitat situacional*. La unitat s'adequa al nivell magnitudinal de l'objecte; si és gran la unitat també ho és i si és petit, la unitat s'empeteix.
- *Unitat figural*. La unitat perd la seva relació amb l'objecte. S'amplia la varietat del sistema unitari i així, un mateix objecte pot ser mesurat amb diferents unitats.

#### c.3.- *Unitat independent i sistèmica*

La unitat resta lliure de qualsevol connotació derivada de l'objecte. S'objectivitza i universalitza, resultant vàlida per a qualsevol context. En aquest moment es pot considerar que la persona té capacitat per adquirir el domini de la mesura. El procés de perfeccionament posterior serà fruit de les possibilitats d'acció i de pràctica i manipulació directa.

### 3.- Les estructures lògico-matemàtiques de la mesura

L'adquisició de la magnitud defineix a grans trets, els passos de la gènesi mètrica de manera que aquest domini que evoluciona des de la *identificació i discriminació magnitudinal*, la *conservació de la magnitud*, l'*ordenació de magnituds* i la *numeralització mètrica*, té, en conjunt una evolució global que es pot resumir des de la nostra perspectiva, a través de dos grans estadis:

- **Fase premètrica**
- **Fase mètrica**

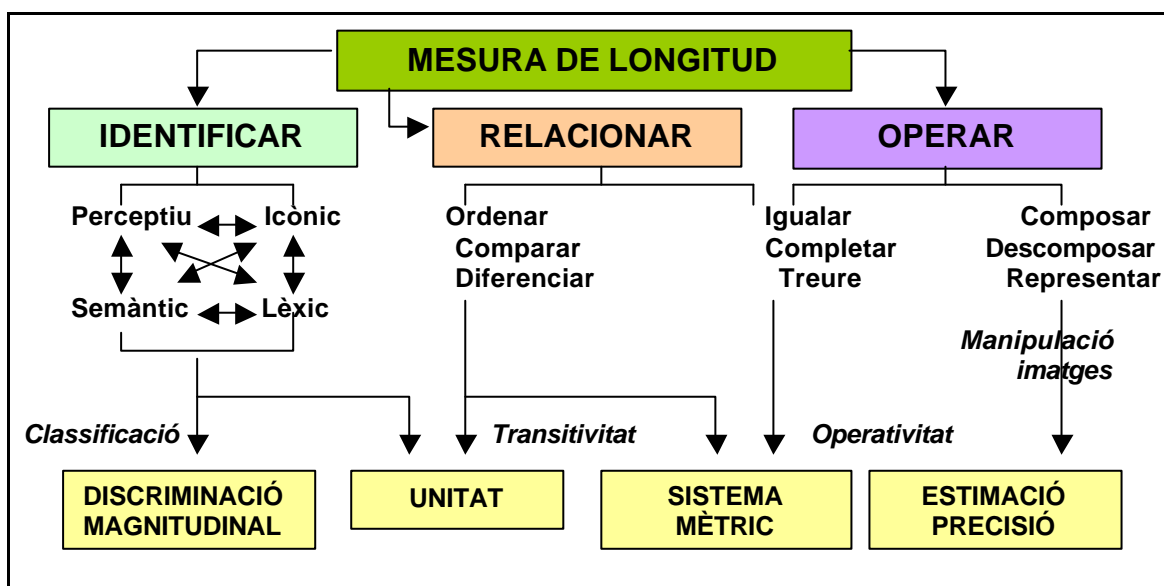
<sup>153</sup> Chamorro i Belmonte a aquest tipus d'unitat l'anomenen objectal, terme equívoc ja que en tots els casos les unitats són objectes o bé recursos antropomètrics i conseqüentment, no són objectals. El terme objectal l'utilitzem com a referència classificatòria de la tipologia d'unitats segons el recurs unitari utilitzat.

Derivat doncs, dels estadis evolutius de la magnitud, mesura i unitat, podem deduir i constatar que la capacitat pel mesuratge necessita, d'un seguit d'adquisicions prèvies de pensament lògic. Són, aquestes adquisicions lògiques, les que permeten anar superant les diferents fases de la gènesi mètrica; resultant ser, aquestes adquisicions, la base imprescindible de consolidació dels aprenentatges i els determinants de la capacitat personal de mesurament. La capacitat de mesuralització s'aconsegueix fruit d'adquisicions parcials que es manifesten com l'adquisició de:

- *identificació i reconeixement de la magnitud;*
- *identificació i reconeixement d'unitats;*
- *selecció de la unitat més adequada;*
- *control i aplicació tecnològica del mesuratge;*
- *operativitat i quantificació*

La seva adquisició és el producte de mútues interconnexions fet que possibilita l'adquisició dels diferents factors integrats en la capacitat mètrica com són la *capacitat de discriminació magnitudinal*, la *integració de la unitat*, l'*adquisició del sistema magnitudinal* i la *capacitat de precisió i estimació*. A grans trets, i tenint en compte les estructures de pensament lògic matemàtic que hi intervenen darrera de cadascuna de les anteriors capacitats, aquestes fases es poden concretar segons la funció lògica preponderant que hi actua o es necessita, en tres nivells de maduració de la mesura

- **Identificació - reconeixement**
- **Relació - ordenació - comparació**
- **Operació - composició - descomposició**



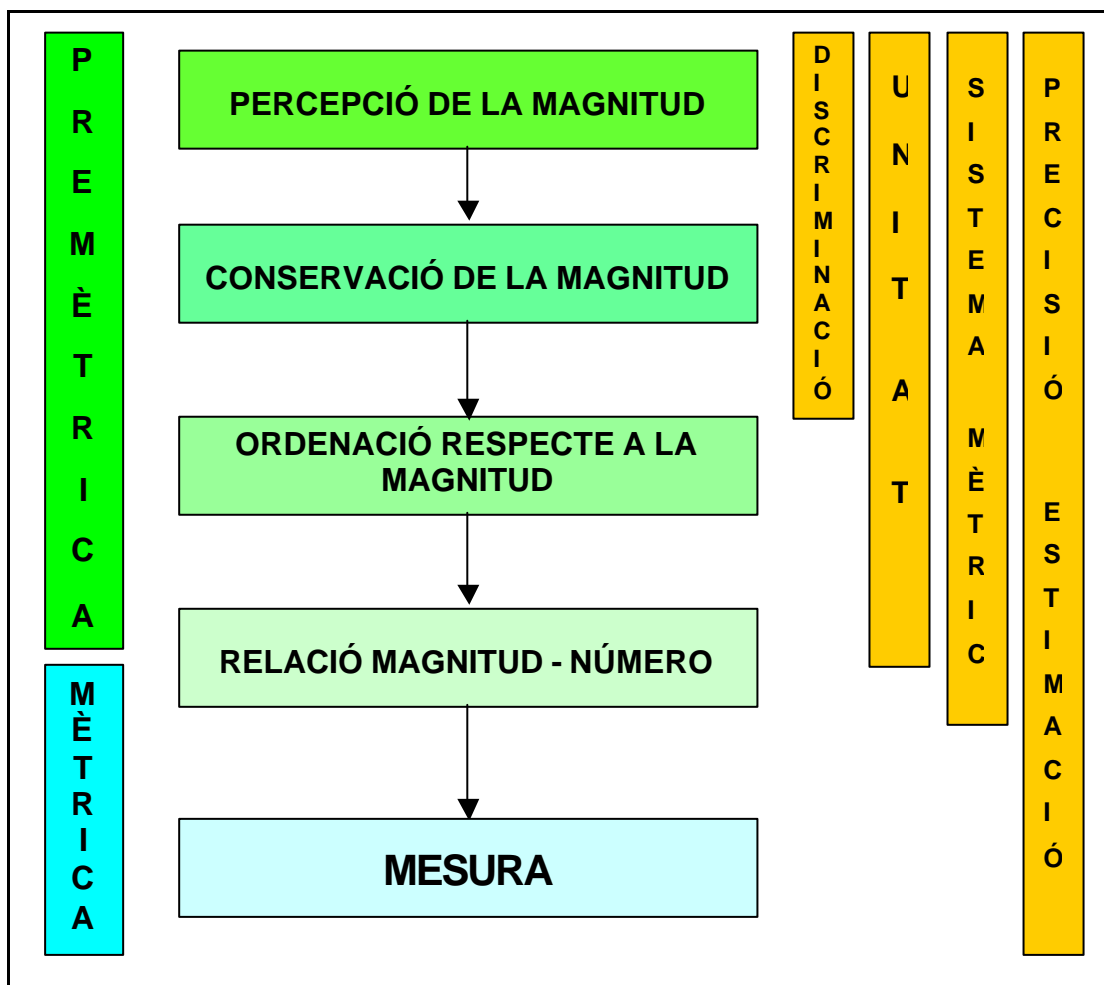
Esquema 10 : Estructures lògiques i adquisició de la mesura

Cadascuna de les estructures lògiques porta a l'adquisició d'alguns dels factors constituents de la mesura i la seva adquisició està, doncs, íntimament connexionada i amb clara dependència amb l'evolució del procés de maduració global de la intel·ligència i del pensament lògic, juntament amb la gènesi de l'espai i de la mesura, tal com es constata en les múltiples experiències de l'escola piagetiana i en l'evolució, que hem detectant en aquesta recerca, la qual passa d'uns estadis perceptuals premètrics fins als pròpiament mètrics o d'interiorització formal.

L'acció dels estadis sensoriomotrius potencien, a través de processos d'observació perceptual i de l'adquisició del llenguatge, la integració de la capacitat d'identificació i reconeixement, una de les capacitats bàsiques del pensament lògic-matemàtic, el qual genera l'adquisició de l'estructura classificatòria, imprescindible per l'evolució del

raonament matemàtic. Aquesta integració perceptual i lingüística està íntimament relacionada amb l'adquisició de la conservació de la mesura, adquisició que es va adquirint progressivament com a conseqüència de la capacitat de saber identificar la magnitud com a propietat intrínseca i no extrínseca de la matèria, de manera que cap modificació de tipus perceptual afecta l'essència magnitudinal. La maduració de la conservació possibilita la capacitat lògica de l'ordenació de les magnituds, identificades i classificades com a pertanyent a un mateix conjunt o classe és a dir a l'adquisició de la discriminació magnitudinal i unitària. L'ordenació en les fases premètriques s'adequa a conceptes comparatius de "ser més, ser igual, o ser menys que". Tot i que aquesta ordenació escalar és ja de per sí, una primera forma de mesurament, no pot considerar-se, encara, com a adquisició de la capacitat mètrica.

Les relacions ordenatives evolucionen a través de procediments comparatius aplicats respecte a una determinada quantitat de magnitud, representada per un objecte unitari. En aquest moment és quan s'aconsegueix el domini unitari i numeralitzar l'ordenació, produint-se l'evolució de la mesura premètrica a la mètrica, maduració que comporta l'adquisició del concepte d'unitat com a criteri comparatiu. L'estadi previ a aquesta adquisició, relaciona magnitud i número des de perspectives subjectives de tal manera que com hem constatat, la impressió de gran o petit que ocasiona la magnitud, fa indicar valors numèrics segons aquesta mateixa consideració de gran o petit que té el subjecte respecte als números. A partir d'aquí, i fruit de la progressiva adquisició dels processos d'igualació, complementarietat, composició i descomposició, s'evoluciona a nivells operatius mètrics i posteriorment cap als algorísmics i intuïtius.



Esquema 11 : Gènesi de la mesura



#### 4. Línies de recerca per aprofundir en la gènesi de la mesura

La recerca sobre l'adquisició i interiorització de la mesura, des del punt de vista genètic ha estat sempre en el centre de la investigació psicomatemàtica. Cercar el moment de l'adquisició de la seva conceptualització o de la de la unitat i la validesa o no de la teoria ha estat un objectiu prioritari (Piaget, Inhelder, Szeminska, 1960) constaten la conservació i la transitivitat de la longitud tant si s'utilitzen unitats del SMD com diferents i tant si la mesura és té un nombre d'unitats enteres com si és amb subunitats

L'adquisició de la longitud és analitzat, entre d'altres, per Boulton-Lewis (1987, 1994); Halford (1988, 1992, 1993), Case (1985, 1992) que investiguen les bases del desenvolupament cognitiu i les edats aproximades d'adquisició. La seva direccionalitat neopiagetiana i les conclusions que es generen en totes elles les fan complementàries sense diferenciar-se massa de l'estructura definida per Piaget, i constituint part essencial de les reflexions teòriques d'aquest camp. Tant Halford com Case diferencien quatre nivells de domini alhora que en determinen una aproximació cronològica per a cadascuna. Halford la classifica segon el procediment que s'empra:

- *independència dels elements*. Cada objecte és una estructura. Es desenvolupa durant el primer any
- *relacional biunívoca*. Es poden relacionar dos objectes per tal de diferenciar-ne les seves mesures. Es troba a partir dels 2 anys
- *aplicació de sistema*. Es poden relacionar tres elements amb aplicació de la transitivitat. Apareix aproximadament pels 5 anys
- *sistema múltiple*. No importa el nombre d'elements, per transitivitat es pot aplicar a tots ells una mateixa mesura unitària. A partir dels 11 anys.

Case també atén l'estructura procedimental però alhora la interrelaciona més amb el domini numèric. Diferència: estadi *sensoriomotor*, estadi *interrelacional* fins els 3 anys i mig a 5; estadi *dimensional* on diferencia el domini *unidimensional* (5-7 anys) del *bidimensional* (7-9); i estadi *vectorial*.

La conceptualització de la mesura lligada a l'adquisició del número és un dels altres camps de recerca permanent Bailey (1974); Mpiangu i Gentile (1976), Bradbard (1978), com també ho són les de la relació de les incidències externes o de les tipologies unitàries emprades. Resnick (1987), diferencia el grau de domini fruit del context evidenciant clares diferències entre la capacitat aplicada a nivell escolar o la de la realitat externa no acadèmica. D'entre les recerques que cerquen l'anàlisi de les estratègies aplicades poden destacar-se les de Copeland (1979), Hiebert (1981, 1984), Miller (1984, 1989); Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist i Reys (1981), Shaw i Puckett (1989), en elles es pretén detectar les estratègies aplicades, les problemàtiques que se'n deriven i la seva eficàcia. La majoria, relacionades, però, amb la conservació i enfatitzant la importància de la comprensió de la conceptualització de la mesura i la capacitat de precisió relacionada amb l'ús de mesures oficials i l'ús de la regla. La dificultat, errors i domini de la tècnica de mesura a partir de la regla és tractada per Hiebert (1984); Kouba i altres (1988); May (1990), Pettio (1990), Brousseau, N. (1990); Nunes, Light i Mason (1993); Chamorro (1995a); i en l'ús d'unitats objectals Haylock i Cockburn (1989); Kastner (1989); Clement i altres (1997) a partir del Logo; o l'aplicació adequada de les unitats segon l'objecte a mesurar Boulton-Lewis (1987); Hope (1989); Shaw i Puckett (1989).

La majoria de recerques conclouen amb la síntesi de la complexitat de la interiorització de la mesura tot remarquant la necessitat del domini previ del número, de les unitats i de les tècniques d'aplicació. Les aportacions que es van fent dia a dia, permeten aproximar-se, cada vegada més, a la comprensió de la gènesi de la mesura si bé en el cas de l'anàlisi de la longitud curvilínia té poca recerca acumulada i resta poc aprofundida.

## 9. ESPIRALS I SINOIDALS

### DE LA RECTA AL MÓN CURVILINI

#### La dicotomia del món de la recta i el món curvilini

El nostre espai tridimensional integrat en un univers no lineal, té en el micro i mesoespai humà, la materialització de la linealitat rectilínia, ja que la recta és inexistent en la realitat de l'univers, considerant que les línies sobre la superfície terrestre mai poden ser realment rectes.

La importància de la rectibilitat com a centre dels enfoc geomètrics és producte de la matemàtica euclidiana qui, en el seu procés d'abstracció i generalització, ens desvetllà la seva valoració, convertint-se la línia recta i el pla rectilini, en pilars fonamental dels postulats euclidians i en el model de perfecció geomètrica. L'estudi de figures i cossos, ha tingut en les formes limitades per línies o cares rectilínies, el centre de la seva atenció, quedant desateses totes les formes corbes a excepció de la circumferència que considerada com a corba perfecte, sí ha merescut una atenció especial. Aquest fet, ha generat un món humà creat, bàsicament, a partir de la recta i de l'angle recte, de manera que la vida, es mou prioritàriament i amb plena dependència de la recta, les superfícies poligonals i els cossos rectilinis. Des del simple desplaçament que interpretem com a vectors rectilinis, fins als objectes més corrents: llibres, taules, portes, llits, parets, llapis, quadres, mobles, escales, habitatges, etc., tot té el món recte com a element constituent. Vivim en el món recte més que en el món de la corba, tot i la gran presència d'ella: rodes, volants, plats, utensilis i atuells de cuina, pots, gots, ampolles, llaunes, tubs, interruptors i comandaments d'aparells, discs, rellotges, cavallets i atraccions firals, fruites, llegums, verdures,... Tots els elements curvilinis es defineixen habitualment, a través de paràmetres diferents a la pròpia corba, com pot ser, en uns casos a través de les dimensions rectilínies del seu diàmetre (atuells de cuina, rodes,...), en d'altres, a partir de la seva capacitat (gots, ampolles, llaunes...), i en d'altres, per la funció (plat de sopa, postres, copa d'aigua, de vi, ...), però en cap cas, s'utilitzen definidors de curvilineïtat ja que aquests metrisme no existeix en el nostre llenguatge i en la nostra vida quotidiana.

L'educació formal, els currículums escolars, degut a aquesta influència social centren el seu treball seguint l'enfoc euclidià i obliden, totalment, el treball amb corbes i el domini del món de la corba. Aquesta desatenció social i educativa, comporta que la majoria de persones es trobin davant una situació desconeguda al tenir que enfrontar-se amb qualsevol repte originat per la corba.

#### CORBES, ESPIRALS I SINOIDAL

El món curvilini, a part de trobar-lo en la quotidianeïtat diària és present, també, de forma molt generalitzada, en totes les seves manifestacions de la natura. Des de l'estructuració i moviments de l'univers, o en els moviments de l'aigua o d'un rèptil, fins a la disposició de les fulles, rames o pètals del món vegetal, passant pels fenòmens atmosfèrics, el procés de creixement, les formes cel·lular i moleculars... tot es situa en el món de les corbes. L'explosió de les formes de la realitat, pertanyen més al món curvilini que al rectilini. Aquesta dicotomia entre el món cultural rectilini i el món natural curvilini, demostra i posa en evidència, un important vuit formatiu que cal esmenar per tal de poder entendre i comprendre més el nostre propi entorn i la realitat de la natura.

## Les corbes com a organització

Cada espai n-dimensional està sotmès a unes rígides i específiques lleis d'aquest espai concret i la naturalesa, com a element pertanyent a l'espai tridimensional, resta sotmesa a les lleis de la tridimensionalitat, per tant les coses prenen les formes i s'estructuren en base a aquestes imposicions de la naturalesa de l'espai i no per caprici. Així per exemple, al variar la pressió de la perifèria respecte al centre, els processos d'expansió modifiquen els seus ritmes i els plans afectats van creant superfícies còncaves o convexes; si el centre i l'entorn creixen a la mateixa velocitat, el material s'expansiona en un pla i si el centre ho fa més ràpid que l'entorn o a la inversa, llavors apareixen estructures còncaves o de "*sella de muntar*"<sup>154</sup>. Idènticament a les forces de creixement, el nombre d'unitats constituents<sup>155</sup> determina, també, la forma dels elements i, d'igual manera la direcció i posició del creixement dependrà d'aquests ritmes<sup>156</sup> ja que les direccions de les superfícies de creixement deixen de ser planes.

La linealitat i les curvatures de la naturalesa no són més que l'efecte d'aquestes imposicions de ritmes de creixement existents en l'espai de manera que si les velocitats de creixement o dilatació de les dues superfícies són iguals, es manifesta linealitat i si al contrari hi ha diferenciació, el corbament apareix i el creixement més lent es manifesta cap a l'interior i el més ràpid cap a l'exterior<sup>157</sup>. La diferència energètica entre punts, origina curvatures superficials i aquestes modificacions es manifesten i les podem apreciar dins l'espai tridimensional. La diferència de ritme de creixement en el camp bidimensional, origina canvis i curvatures tridimensionals i si aquesta s'aplica a nivell tridimensional, la modificació origina modificacions i curvatures en l'espai tetradimensional, fet que escapa a les nostres capacitats i límits de percepció.

## Les corbes com a estructura de la Natura

Matemàticament, i segons el que s'ha indicat anteriorment, la curvatura en l'espai tridimensional de l'Univers tindrà, per Einstein, una curvatura deguda a la incidència de l'espai-temps de quatre dimensions, idèntica a la curvatura d'una esfera; d'altres teories consideren que la curvatura de l'Univers té una forma semblant a la de cadira de muntar com es demostra en multituds d'estructures de la naturalesa. Espai i natura resten indissolublement units i, conseqüentment, a la natura el món de les corbes apareix com a estructura matemàtica en molts dels seus elements materials o en els fenòmens que en ella hi tenen lloc. Des de la clova d'una tortuga, al moviment d'una serp, a l'estructura d'una galàxia o el remolí de l'aigua al ser sumida per un desguàs, les bombolles, les turbulències atmosfèriques, ... arreu, trobem les formes corbes.

<sup>154</sup>Al treballar amb ceràmica si la força és idèntica entre centre i perifèria, aquesta s'estén uniformement en les direccions del pla, si al contrari si la força és superior en el centre, va enfonsant-se pel centre prenent forma còncava o d'atuell; quan la sobrepressió és superior en l'entorn, l'expansió d'aquesta zona supera la central i fa agafant forma de sella de muntar.

<sup>155</sup>En el cas de triangles equilàters, per exemple, la unió de sis sobre un punt central, crea una estructura plana hexagonal, si son cinc origina la forma d'una tenda de campanya o de d'atuell còncau i si són set de cadira de muntar.

<sup>156</sup>En la cornamenta animal si en la seva base la part davantera o anterior creix més que la posterior, la banya es corba cap endarrera; si és la part interna la que creix més ràpid que l'externa, llavors la curvatura es fa cap enfora. La seva combinació produeix una curvatura helicoidal o d'espiral com en el cas, per exemple, de la cabra salvatge.

<sup>157</sup>La manifestació d'aquest fenomen s'observa arreu: procés d'assecatge de fulles i flors, trencament i abombament del decapatge de pintures, esquerdat de materials, formació dels òrgans i parts en el procés de gestació embrionari.

L'estructuració de la Naturalesa funciona, sovint, sotmesa a la llei de l'estalvi energètic i per tant a partir de processos d'optimització fet que porta a que en un món tan ampli i variat, solament apareixen un reduït nombre de formes i disposicions:

- "els seus límits provenen de que l'espai prohibeix molt i permet molt poc. Si es necessita un flux directe a o des d'un punt central, ha d'aportar el model d'explosió, i, si ha de realitzar una trajectòria al mateix temps curta i directa, ha d'estructurar-se en la ramificació; així, si necessita un sistema econòmic i estalviador, ha d'emprar les unions triples. La Naturalesa no pot construir el que vol i de la manera que desitgi, sinó que ha d'emprar models hexagonals, és a dir vèrtexs de tercer ordre a fi d'estalviar material i combinar altres mòduls amb aquests hexagonals per tancar l'espai. La Natura no pot fabricar un floc de neu d'estructura pentagonal ni un cristall regular icosaèdric, ni tampoc unir una esquerdada nova amb una de vella en un angle diferent de 90°. De forma semblant, ha d'augmentar la superfície d'un organisme gran si aquest ha de funcionar com un de petit. El creixement d'una part incideix en el creixement de la totalitat. Les regles són rigoroses, però dintre d'elles hi ha varietat, i, aquestes regles, en definitiva, ensenyen per mitjà de les variacions a representar una connexió entre les diferents parts que siguin estèticament agradables, mostrant-nos una constància de propòsits que proporciona un model etern per a totes les creacions sortides de la mà i de la ment de l'home"<sup>158</sup>.

Darrera de les formes i estructuració, el disseny que s'organitza la Natura

- "té preferència "per les formes espirals, les serpentejant i sinuoses, les ramificacions i les unions de 120°. Els pentàgons constitueixen la major part de les flors, però no es troben en els cristalls; els hexàgons predominen a la majoria dels dissenys repetitius bidimensionals però mai formen part per sí mateixos d'estructures espacials tridimensionals. En la vessant contrària, l'espiral és el màxim de la versatilitat i intervé tant en la replicació del virus com en l'ordenació de la matèria que forma les galàxies"<sup>159</sup>.

Les estructures bàsiques de la forma i el creixement, a la Natura, es redueixen segons Peter S. Stevens, en tres "dissenyos estructurals bàsics": l'espiral, el radial o explosiu i el ramificat; si bé el primer presenta una variació que és el sinodal.

Els tres dissenys estructurals configuren el món rectilini i curvilini de la matèria. Una estructuració en espiral, comparada amb una de radial o explosiva, permet reduir des del centre, la distància de comunicació d'aquest punt amb tots els altres que estiguin al seu entorn degut, per exemple, a un procés de creixement progressiu; però, alhora la distància mitja d'aquests punts respecte al centre es superior que en el cas de la radial; de manera que mentre la longitud total és superior té, per l'altra banda, l'avantatge d'una distància molt menor respecte a les parts i per tant la connexió és més directa i ràpida. En l'extrem de la distància d'un punt respecte a tots els altres, els casos límits es situen en l'estructura espiral i en la d'explosió, trobant-se en contextos intermedis les sinusoïdals i les ramificades; aconseguint-se en les disposicions de *ramificacions espiralitzades*, el màxim mínim, (angles de 120). Les disposicions estructurals de la matèria tenen com a objectiu fonamental el permetre i possibilitar les intercomunicacions entre els seus punts materials per tal d'aconseguir donar solució a la uniformitat de disposició, ocupació mínima d'espai, aconseguint la màxima longitud total i la distància mínima entre l'accés directe de l'exterior al centre i a la inversa.

Si l'estructura radial o explosiva, es fa més complexa i es genera com a estructura radial composta, llavors s'optimitzen els seus objectius i igualment succeeix a partir de

<sup>158</sup> Stevens P.S. (1986). *Patrones y pautas en la naturaleza*. (pag. 281-282)

<sup>159</sup> Steven, P.S. (Idem). (pag. 2)

processos de ramificació, on encara s'aconsegueix més, reduir les distàncies mitjanes. Així doncs, les espirals i les explosions, representen situacions extremes. L'espiral és un bon recurs per itineraris<sup>160</sup> o situacions que cal cercar recorregut global mínim, però això no és viable en grans estructures vives ja que han de transportar els nutrients a tota la perifèria, necessitant-se, per tant, tenir una connexió més ràpida; fet que l'estructura radial aconseguiria amb la màxima rapidesa però amb una despesa de trajecte enorme. En posició intermitja entre l'estructura radial i l'espiral, es situen els paràmetres resultants de la ramificada. Disseny radial, ramificats i en espiral constituïran les estructures que apareixen a la natura.

Les formes i estructures són les que són, per motius de necessitat i de supervivència i, sempre són fruit d'un seguit de condicionants que en determinen aquella especificitat. Segons Stevens, les explicacions a aquests fenòmens segueixen tres direccionalitats o teories:

- *Fonamentació mecànica.* L'origen formatiu és conseqüència de l'acció dinàmica derivada de causes físiques com poden ser les produïdes degut a la força centrífuga i els fregaments que ocasionen diferenciacions de velocitats i per tant modificacions energètiques entre punts o superfícies<sup>161</sup>.
- *Fonamentació ecològica.* Segons aquesta, l'origen cal cercar-lo en el fet de que la Natura cerca sempre l'estalvi energètic intentant trobar la despesa uniforme<sup>162</sup> i optimitzada.
- *Fonamentació ecostàtica.* L'origen és degut a fenòmens d'aleatorietat i probabilitat que són potenciats o no a través de la selecció natural.

En realitat, semblaria ser doncs, que la resposta a les exigències imposades per la Natura en el procés generador de les corbes, ve determinat més per una confluència multifactorial com poden ser les interaccions de lleis mecàniques, la tendència a l'estalvi energètic o el que és el mateix a la consecució d'un estat de mínima energia; a les lleis de l'atzar i la probabilitat de que una determinada configuració es produeixi i, per últim l'evolució selectiva que beneficia a una determinada estructura, que no pas per una acció unicausal.

---

<sup>160</sup> Resulten fonamentals com a concepció arquitectònica i així Frank Lloyd Wright en el seu museu circular Salomon R. Guggenheim de Nueva York, o Le Corbusier al Museu de l'Expansió II· limitada en forma de quadrat, apliquen aquesta concepció

<sup>161</sup> L'aigua en contacte amb la riba frena la seva velocitat fet que l'obligarà a moure's transversalment vers la riba còncava on s'enfonsa tot seguint i segueix la paret per tornar a pujar a la superfície tot seguint un camí de turbulència; aquesta permanent acció erosiona la riba i va creixent la curvatura la qual però, "sempre pren una forma que no són arcs circulars, parabòlics o sinoidal sinó que són de tipus el·líptic ja que aquesta corba representa la curvatura més suau i alhora perquè comporta la menor variació possible en la direcció de la seva curvatura" Stevens. Idem. (p.68)

<sup>162</sup> Segons això en els cursos alts l'energia es després i consumeix en l'erosió i en remolins i ràpids; en els cursos baixos, semblaria que la despesa de l'erosió en meandres serveixi per equipar aquesta uniformitat o necessitat d'igualació de despesa energètica.

## L'ESPIRAL

Stevens (1986) descriu l'esprial com una forma "*bellament uniforme que es corba sobre ella mateixa amb perfecta regularitat. Pot ocupar tot l'espai bidimensional disponible i és capaç d'experimentar una expansió infinita al mateix temps que és bastant curta, tot i que en referència a la seva connexió amb el centre resulta en extrem indirecte*"<sup>163</sup>.

### L'esprial a la natura

Les espirals són formes i estructures totalment integrades i presents de forma molt abundant en el nostre entorn més immediat. Són la base que configura i defineix tot el món de les turbulències, fenomen físic-matemàtic caracteritzat perquè totes les partícules situades en el seu interior descriuen una trajectòria erràtica i ondulant, però, on, alhora, el flux presenta remolins.

Un remolí en esprial es produirà quan un corrent es veu sotmès a una reducció de la seva energia en la superfície que la limita degut a una fricció lateral, conseqüentment, el flux perd velocitat i es fragmenta en parts que giren sobre elles mateixes i molt sovint a contracorrent i en nombre parell de vòrtexs especulars o enantiomorfs. En el límit mateix de la superfície, el flux té velocitat nul·la i a mesura que augmenta la distància de la superfície limitant, la velocitat augmenta i és aquesta diferència de velocitat entre els punts del flux que la fa girar sobre ella mateixa, podent arribar a que el propi centre, degut a la seva alta velocitat, generi una força centrífuga tan alta que les partícules ja no s'hi poden concentrar sent llençades cap a l'exterior, de manera que en el pla de rotació, el material desplaçat del centre es disposa en llargs braços espirals. All mateix temps, però, i perpendicularment al seu pla de rotació, la matèria es mou encara vers l'interior i va col·lapsant-se paral·lelament, fenomen que produeix que el propi sistema vagi aplanant-se fins a convertir-se en una forma discoidal com poden ser les galàxies.

L'estudi de les turbulències està en els seus inicis de manera que són estudiades com a successos estocàstics. L'anàlisi probabilístic de les turbulències, iniciat per Kolmogorov demostra l'existència d'una jerarquia de remolins i aporta aspectes interessants del seu funcionament, com el fet de que en un remolí de característiques mitjanes, *la distància que es desplaça, abans de generar nous remolins més petits que generalment es mouen en direcció contrària, és igual, aproximadament, al seu diàmetre*; fenomen que s'anirà reproduint fins a la seva desaparició tot transformant la seva energia cinètica en energia calorífica. Una altra aportació important del seu coneixement és el fet de que *la velocitat és proporcional a l'arrel cúbica de la seva mesura* o sigui que una velocitat doble entre dos remolins, significa que entre ambdós hi ha una diferència de mesures de vuit vegades més gran l'un que l'altre, i que si la diferència de velocitat és de deu, el contrast de les seves dimensions és de mil. La dinàmica física d'una turbulència depèn, a més, de factors derivats del propi element on es produeix la turbulència, com pot ser la seva densitat i viscositat; però també de les característiques del causant, com pot ser la mesura de l'impediment. Aquest conjunt de factors, determinen les característiques de la forma que prendrà i això és recollit en el *número de Reynolds*<sup>164</sup>, valor segons el qual pot deduir-se que turbulències d'igual valor numèric presenten formes i característiques semblants.

<sup>163</sup> Pag. 48

<sup>164</sup> Tota turbulència és directament proporcional a la seva velocitat, a la mesura de l'obstacle i a la densitat del flux i inversament proporcional a la seva viscositat.

Les espirals són presents, a més dels casos de turbulències en estructures tan diverses com les formes d'éssers vius, en fenòmens fisiològics i en estructures moleculars profundes. En trobem en l'ADN, en els processos de digestió, en el món animal i vegetal: en els rissos dels cabells i dels pèls, en les cornamentes de remugadors, ungles de felins i aus, ullals d'elefant, dents de castor, en cloves de moluscs, o de la primitiva cargola de mar *Dictyodora*, o en la disposició i posicions de la trompa d'elefants, espiritrompa d'insectes, serps, braç de sèpia, cues de mones i camaleó o en la trajectòria del vol d'una mosca... També en el món vegetal la seva presència està molt generalitzada com són els casos de la disposició de les flors de les inflorescències, en el cargolament de fulles abans del seu desplegament com en les falgueres o en els circells, en les fitotàxies<sup>165</sup>, en la posició de les llavors en el fruit, en la posició de rames en la tija, en l'ordenació de fulles en la tija de les plantes, etc., i també, en estructures i disposicions del món inorgànic: galàxies, forats negres, tifons, turbulències, els remolins en els corrents d'aigua, els moviments de la matèria en ebullició o en la sortida de desguassos, l'aigua llençada per un esparsor giratori, en els ciclons i tornats, i en multitud de manifestacions tecnològiques i artístiques que l'home ha elaborat, com poden ser les seccions tallades en les rodes de pedra de moldre gra,... Aquest conjunt tan divers i ampli posa en evidència, que l'espiral es fa present arreu i que és una forma essencial en el procés de la vida.

### L'espiral i la seva estructura

Es tracta d'una corba que comença en un origen i a partir d'ell va minvant progressivament la seva curvatura.

Els seus elements definidors són l'origen o "*pol*", punt on neix una línia recta o "*vector radi*" que té en aquest pol un extrem des d'on gira al voltant d'aquest punt, i el punt generatriu (*P*) que es va movent al llarg del vector radi i és qui descriu l'espiral i ho fa en condicions determinades de velocitat.

L'espiral és per tant, la trajectòria resultant de la combinació d'un desplaçament, combinat amb un gir. Des d'una perspectiva dinàmica del moviment, es fruit d'un vector que es mou sobre ell mateix respecte a un punt central d'origen, tot relacionant la velocitat amb que farà l'espai de l'arc i el valor de l'angle central.

En base a aquesta gènesi, poden presentar-se, dues clares tipologies generadores segons s'atengui a:

- Uniformitat de la velocitat de desplaçament.
- Angle central igual i sector recorregut diferent. Es té en compte que la constant sigui, per a un mateix temps, l'angle a recórrer, és a dir que es modifica l'espai recorregut a cada temps.

<sup>165</sup> Els creixements de fitotàxies helicoidals s'expressen per una fracció on el numerador indica el nombre d'espirals complertes al voltant de la tija i el denominador el nombre d'elements (fulles, espines, branques, ...) que es troben en el recorregut. Així 2/5 significa dues voltes i 5 elements. El denominador resulta ser sempre un nombre de la sèrie de Fibonacci. Aquests creixements helicoidals quan són disposicions en estructures pluriespirals (gira-sol, pinyes, margarides, ...), llavors el numerador indica les d'una direcció de gir i el denominador la direcció contrària; en aquest cas, també els valors coincideixen sempre en parella de valors successius de Fibonacci: al gira-sol és freqüent 55/89 o 89/144.

En base a aquestes combinacions, destaquem com a espirals més freqüents i normalitzades a la natura l'espiral d'Arquímides i la logarítmica i en elles ens centrarem ja que d'altres<sup>166</sup> com l'espiral hiperbòlica, la de Galileo i la d'Euler, Cornú o clotoide<sup>167</sup> són formacions d'abstracció matemàtica i lligades més a trajectòries i desplaçaments que no a disposicions de la matèria.

#### a).- Espiral d'Arquímides o constant

És l'espiral que es forma quan la velocitat angular és uniforme. Arquímides (287, 212 a.C.) fou el primer en estudiar-la i a través d'ella el problema de la trisecció d'un angle. En aquesta espiral les distàncies entre els punts situats sobre un mateix diàmetre, creixen en proporció aritmètica. Equival al "*cilindre enrotllat*".

#### b).- Espiral logarítmica, equiangular, geomètrica o de Descartes

El terme logarítmica és deguda a Jean Bernoulli; el d'equiangular a Roger Cotes; geomètrica per P. Nicolàs i, de Descartes per haver estat ell el primer que la va estudiar i descriure-la (1638) en les cartes a Mersenne. Es caracteritza perquè les distàncies entre punts de la corba situats sobre un mateix diàmetre tenen una relació de progressió geomètrica. El desplaçament es fa sobre angles iguals recorreguts amb el mateix temps, per tant hi ha modificació uniforme de la velocitat o de l'espai recorregut en cada unitat de temps. L'increment de velocitat no és uniforme sinó que va augmentant proporcionalment a la distància del pol. Pot considerar-se com a "*con enrotllat*".

Aquestes espirals simples poden, alhora adquirir noves disposicions més complexes si al mateix temps de complir els paràmetres definitoris anteriorment especificats s'afegeix un desplaçament en el propi centre el qual pot desplaçar-se linealment o bé seguint una altra curvatura, o bé, si ho fa amb un moviment de velocitat uniforme o bé accelerada. La generació i creació d'espirals es pot efectuar, per tant, de diferents maneres i una de les més simples consisteix en enrotllar un fil sobre un eix i posteriorment anar-lo desenrotllant tenint en compte els condicionants anteriorment definits o sigui, mantenint sempre una mateixa velocitat de gir o de desenrotllament o bé que a cada unitat de temps s'hagi recorregut una mateixa obertura d'angle central. Les representacions o dibuixos que apareixen en el desert d'Atacama al Perú, on hi ha dibuixades espirals es creu possible que fossin fetes a partir d'aquest procediment del desenrotllament de velocitat de gir uniforme.

<sup>166</sup> Espiral hiperbòlica: Es tracta d'una corba simètrica i inversa a l'espiral d'Arquímides. Fou mencionada per primer cop per Varignon l'any 1704 i per Jean Bernouilli al 1710.

Espirals de Galileo: Existeixen moltes variacions o casos particulars d'aquesta espiral. Fou Pierre Fermat el que a l'any 1636 trobà aquesta espiral tot estudiant un problema de recorregut d'un mòbil que es desplaçava a l'interior de la Terra tot tenint en compte la llei de Galileo amb acceleració constant.

Espirals de Cornú, d'Euler o clotoide: Apareix citada per Euler per primera vegada l'any 1774, d'aquí que també se l'anomeni espiral d'Euler.

<sup>167</sup> La seva particularitat més interessant té a veure amb el seu radi de curvatura:  $r = a^2/s$  ( $a$  constant;  $s$ , longitud de l'arc) : "*El radi de curvatura oscil·la, del que es pot deduir d'aquesta expressió, entre 0 (en els punts assintòtics  $M_1$  i  $M_2$ ) i  $\infty$  (en l'origen), passant amb continuïtat per tots els valors intermitjos. Aquest fet unit a les seves qualitats estètiques, fa que sigui elegida com a corba de l'acord i per tant molt utilitzada, més que la lemniscata, en la construcció de carreteres per part dels organismes competents (Norma 3.1 - I. C. del MOP) ja que pot enllaçar trams rectes entre ells, rectes amb corbats, o corbats entre ells*".



## LES SINOIDALS

La formació de corbes és un procés derivat del contrast diferencial que pugui existir entre les pressions energètiques que incideixen sobre la superfície; si la diferenciació és constant entre les dues zones, la curvatura es va replegant sobre ella mateixa podent-se produir estructures espiraloides, però, si al contrari la diferenciació es produeix de manera alternant i periòdica entre les zones implicades, llavors la curvatura pren forma sinodal. Si la diferenciació no és periòdica sinó aleatòria, la curvatura gira i es recargola sobre ella mateixa per ocupar l'espai que l'envolta igual que fan les estructures espirals. Mostra d'aquestes disposicions en són clars exemples les estructures dels pòlips, corals, cervells, camps magnètics i elèctrics, i cursos de rius fins i tot en zones planes<sup>168</sup>...

---

<sup>168</sup> Luna B. Leopold, hidròleg, en estudis efectuats sobre els cursos dels rius, arribà a la conclusió a través de multitud d'estudis estadístics que la longitud recta d'un curs d'aigua, mai supera en deu vegades la seva amplada, sent alhora el radi de curvatura igual a dos o tres vegades dita amplada i la longitud d'ona o la distància compresa entre punts anàlegs en corbes semblants era de set a deu vegades l'amplada del riu. Segons això tots els rius descriuen cursos relativament semblants.