10. PROCEDIMENTS DE TRANSFORMACIÓ GEOMÈTRICA

DE LA LINEALITAT RECTILÍNIA A LA CURVALITZACIÓ

El marc general

Entrar en el domini de l'estimació mètrica, objectiu d'aquesta recerca, comporta trobar-se davant d'un ampli repertori de procediments, recursos i estratègies; circumstància que si es té en compte que, idènticament, succeeix en l'evolució de la pròpia mesura, pot servir perquè a través de l'aproximació filogènica puguin entendre's les ontogènies personals.

Mesura i matemàtica han evolucionat paral· lelament per tal d'arribar a la seva conceptualització que si bé com diu Bertrand Russell: "*El concepte fonamental de la mesura prové de Pitàgores",* aquest desenvolupament no hagués estat possible sense unes fonamentacions prèvies. La teorització de la mesura ha necessitat d'un llarg camí i, òbviament, entrar en la seva comprensió significa penetrar en la seva evolució històrica. L'anàlisi filogènic no pot deixar de banda que la mesura està, íntimament, lligada amb el número i la geometria i que la progressiva conceptualització de la mesura, s'aconsegueix fruit dels avenços conquerits en conceptes matemàtics que formen part, també, de l'essència mètrica. Entre aquestes concepcions, cal destacar les referides als binomis:

- *Unitat – Quantitat ;*
- *Discret – Continu;*
- *Commensurable – Incommensurable;*
- *Exactitud – Aproximació*,

A més, cal parar esment als processos metodològics i d'anàlisi, entre el qual els mètodes de transformació: *Rectificació, Quadratura i Cubicatge* resulten fonamentals pel domini de la mesura i en especial per l'estimació mètrica. Fruit de la conjunció de les aportacions anteriors, s'aniran obrint nous camps de comprensió del domini conceptual, epistemològic i pràctic de la mesura i, conseqüentment, possibilitaran la progressiva concreció de la teoria matemàtica de la mesura. Avui, la mesura, integra aspectes ben allunyats de les concepcions originàries, si bé aquí, atenen els objectius de la recerca, únicament es farà referència als processos de transformació directa o inversa de la recta (rectificació i curvalització) ja que resulten fonamentals per l'estimació de les corbes.

Rectificació, Quadratura i Cubicatge

La matemàtica com a desenvolupament d'un llenguatge simbòlic d'estructura lògica i d'àmbit universal que pretén donar resposta al món físic a través d'un cos de coneixements relacionats amb el número, l'espai i una estructuració metodològica, ha fet que qualsevol cultura hagi establert els seus codis, per tal d'aconseguir un llenguatge de comunicació "*QRS*"[170] o, el que és el mateix, la capacitació per dominar el món quantitatiu, el de les relacions i de l'espai.

La història de la teoria de la mesura és, en certa forma, la història de la matemàtica, tant a nivell teòric com en el seu aspecte pràctic: "*tot el desenvolupament matemàtic ha tingut les seves arrels psicològiques en necessitats més o menys pràctiques. Però una vegada en marxa, sota la pressió de les aplicacions necessàries, aquest desenvolupament guanya impuls en sí mateix i transcendeix els confins d'una utilitat immediata*"[171].

[170] Bill Barton (1998) - I Congrés d'Etnomatemàtica
[171] Courant i Robbins (1979) (p.3)

La mesura porta implícita una unió intensíssima amb la geometria i aritmètica i també amb d'altres ciències. Nasqué per "*comptar i mesurar":* "*com la majoria d'altres elements fonaments de la ciència, els dos aspectes de la noció de número, el de nombre enter i el de nombre més general que deriva de la mesura d'una magnitud contínua, tenen el seu origen en les preocupacions de naturalesa estrictament utilitària. Aquestes varen existir des dels primers temps de la història, quan les obligacions de la vida en grup i els primers intercanvis comercials varen fer necessari comptar els homes, els animals o els objectes, i comparar entre quantitats de magnitud de la mateixa naturalesa, tal com longituds, superfícies, pesos o temps*."[172]. La cardinalitat d'un conjunt, era necessària per explicitar la quantitat de magnitud o sigui la seva pròpia mesura "*no ha existit mai cap societat sense alguna forma de comptar o de quadrar, és a dir, de fer correspondre una col· lecció d'objectes amb un conjunt de marcadors de fàcil maneig, ja siguin pedres, nusos o inscripcions com talls en fustes o ossos* (Gheverghese, G. 1996).

a).- La matemàtica protohistòrica

L'evolució de la matemàtica si bé ens porta a les cultures pròpiament històriques (Egipte, Babilònia, cultures orientals de Xina i Índia ...) cada vegada més, l'extensió del domini matemàtic que hom devia tenir, fa que s'analitzin contexts socials anteriors i també, les pràctiques de les cultures primitives actuals. Una bona mostra d'aquest inici mètric de les cultures prehistòriques, poden ser les restes dels ossos[173] o tantes d'altres proves i anàlisis que s'efectuen en les construccions megalítiques (Thom, 1967; Waerden,1983) amb l'objectiu de determinar la llei geomètric que estructurava la seva tècnica de construcció[174] , o les unitats de mesura[175] que empraven "*fins i tot en els primers estadis de la persona humana, segurament, es va interessar pel problema a partir del que es va iniciar la geometria analítica: la correlació entre el número amb la magnitud geomètrica"* (Boyer, 1986*).*

No hi ha constàncies sobre la rectificació, si bé Ibáñez Orts[176] cita les descobertes de Mascaró Pasarius fetes l'any 1952 en enterraments prehistòrics menorquins. En un d'ells s'hi troba una representació -esquema adjunt- que sembla significar la rectificació de la circumferència i el valor de π. L'origen és incert tot i que es troba junt a d'altres representacions prehistòriques, ja que també se n'hi troben d'altres, d'èpoques posteriors i

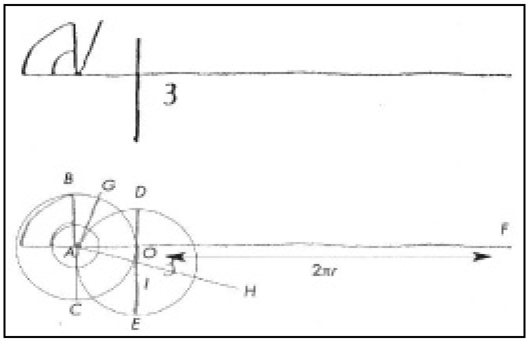
[172] Myx, André (1981): *Metrologie*. Paris. IREM. Université de Paris VII (p.5)

[173] Un dels documents matemàtics més antics que es conserven és un os de llop trobat a Txecoslovàquia. Té uns 30.000 anys i presenta 55 incisions separades de cinc en cinc: 25 per un costat i 30 per l'altre. Un altre, l'*os d'Ishango* catalogat com a neolític (uns 2000 anys), avui al Museu d'Història Natural de Brussel· les, fou trobat en el llac Edward, en una de les fonts del Nil a l'Àfrica Central Equatorial zona frontera entre Uganda i el Zaire; presenta, també, un seguit de marques disposades en tres columnes: la fila "*a"* presenta quatre grups de marques amb 9, 19, 21 i 11 talls; la "b" quatre grups de 19, 17, 13 i 11 senyals, i la fila "c" vuit grups de 7, 5, 5, 10, 8, 4, 6, 3. L'últim parell "c" (6, 3) està més espaiat, més estretament apilonat com succeeix també en els grups (8,4) i (5,5,10) com indicant una diferenciació grupal. També a Swazilandia al sud d'Àfrica, un os de peroné d'un beduí, presenta 29 marques; la seva antiguitat és d'uns 35.000 anys i és la resta més antiga trobada fins ara, de notació numèrica. Si bé s'hi han volgut donar explicacions o hipòtesis astronòmiques, com el del pas del temps o el calendari llunar, és evident que són una demostració de la numerositat d'una cardinalitat d'un o dos fets o bé d'una mesura d'objectes.

[174] Ibáñez Orts, V.(1996) a *"Aproximación a una interpretación geométrica de las taules de Menorca*", analitza les possibilitats de que tinguessin relació amb el número auri o amb el conjunt dels números irracionals dels números enters de 2, 3, 5, 7, 11; amb l'aplicació del triangle pitagòric o l'indi o amb relacions longitudinals (mitjana aritmètica, geomètrica, harmònica). Els càlculs efectuats el porten a la hipòtesi de tres tipologies constructives en base als tres usos de la mitjana i els més evolucionats amb la mitjana harmònica.

[175] S'ha considerat l'existència de la *iarda megalítica* la qual es creu que prové de l'extrem orient.

[176] Ibáñez Orts,V. (2002). *El grabado prehistórico de la cueva de Calafí Vell (Menorca) y la rectificación del círculo*. Suma, n.39. Dibuix superior és el que es troba a la cova; l'inferior és la reconstrucció hipotètica on OF és la longitud de la circumferència de centre A i diàmetre BC.



Esquema 12 ***: Rectificació circumferència (Menorca)***

entre les quals, l'aparició d'estrelles de cinc puntes fa sospitar que són de l'escola pitagòrica, fet que significaria la seva presència, a la illa, durant el s.IV o III a. C.

La filosofia de les cultures primitives, antigues i contemporànies, es fonamenta, bàsicament, en la reflexió sobre la pròpia realitat natural o humana. Es tracta, doncs, d'un enfoc fonamentat en la capacitat de resolució pragmàtica i íntimament lligada a la realitat i a la vida on els geòmetres es dediquen, sobre tot, a proporcionar mitjans de càlcul a agrimensors, arquitectes, i astrònoms mitjançant fórmules que aproximin els valors, el màxim possible a l'exactitud. Rés permet assegurar, donada la poca informació existent, de que l'anàlisi teòric-abstracte, no sigui present, també, en l'enfoc matemàtic-científic com demostra l'existència de decoracions geomètriques en multitud de les seves obres artístiques i que per tant hi haguessin adquisicions fetes per pur plaer estètic o contemplatiu.

b).- La geometria i la rectificació en la matemàtica de les primeres cultures

b.1.- Egipte[177]

La geometria egípcia va tenir el seu origen en la necessitat pràctica del mesuratge[178] i delimitació de terres i els volums dels graners i piràmides, Si tingueren motivacions teòriques, aquestes queden amagades o integrades dins les regles de càlcul. Les solucions al càlcul d'àrees i volums són majoritàriament correctes i el mètode de càlcul es fonamenta com en la geometria oriental, a partir de processos de composició i descomposició. Tres foren les seves grans aportacions al càlcul de mesures, si bé en la tercera no existeix un consens d'acceptació per part de tots els científics:

a) - l'aproximació a l'àrea del cercle,
b) - la deducció de la fórmula del tronc de piràmide
c) - l'àrea d'una superfície semiesfèrica

---

[177] La cultura egípcia, d'orígens africans es remota als 16.000 a.C segons datacions efectuades amb el radiocarboni a restes (llavors, instruments...) trobats a la regió Aswuan, l'Alt Nil, o als antics monuments de Namíbia. Semblaria ser, inicialment, un poble agrícola que va anant colonitzant la vall del Nil en direcció sud. Diodoro (50 a.C.) citat per Davidson (1987), escriu "*els egipcis són colons enviats pels etíops i gran part de les seves costums dels egipcis són etíops, conservant encara els colons les seves antigues maneres*". Serà a partir del 3100 a.C. que Menes funda la dinastia faraònica que durant tres mil anys (32 dinasties) governarà Egipte, i zones (1350 a.C.) de l'actual Israel i Síria. L'estructura agrícola evolucionà a una d'urbana davant la necessitat imperiosa d'agrupar-se per a poder efectuar treballs i obres de control de les inundacions del Nil, drenatge i sistemes de regadius, si bé, a més, aquest ampli imperi, necessità d'una gran organització administrativa pel control dels impostos, distribució dels terrenys, administració de l'exercit, emmagatzamament i repartiment del gra, construccions arquitectòniques .... necessitats que impulsaren el desenvolupament del número i la mesura, recollits, parcialment, avui, en papirus i altres documents.

[178] Herodot. Història. Llibre II, n.109. Citat per Gherverghese *"... aquest rei, segons els sacerdots, va repartir el país entre tots els egipcis, donant a cadascú un lot quadrat igual i atenent-se a aquest repartiment, va establir els seus ingressos imposant a cada un d'ells, el pagament d'un impost anual. En el cas de que el riu s'emportés part de la collita d'algú, aquest podia acudir al rei i li explicava la circumstància; llavors el rei hi enviava inspectors per mesurar la reducció del terreny a fi i efecte de que pagués la part proporcional que li corresponia. Crec que així es va inventar la geometria, que després va passar a Grècia ja que el rellotge de sol, l'gneumon i les dotze parts del dia es va aprendre dels babilònica*".

El procediment de la quadratura pot presentar-se de formes molt variades, una d'elles, l'*exhaustió* o la integració d'una superfície dins d'una altre per tal de cercar-ne una que és desconeguda, a través de l'altre que sí és coneguda; és un recurs molt utilitzat en el raonament egipci. A través d'ell, arriben a la deducció de la fórmula del cercle o a les estratègies del seu càlcul com es fa en el problema 50 del papirus d'Ahmes *"un camp circular té 9 khets*[179] *de diàmetre, quina és la seva superfície?"* . La solució que s'aplica consisteix en restar 1/9 del diàmetre, és a dir 1 khet. La resta, conseqüentment, mesura 8 khets. Multiplica 8 per 8, i obté el 64 *setats*[180]. L'àrea del cercle, segons això és equivalent a la d'un quadrat de 8/9 del diàmetre del cercle:

$$A = (d - (d/9))^2 = (8/9\,d)^2$$

La relació existent entre aquest valor del diàmetre i l'àrea del cercle, ens permet conèixer el valor de π[181], el qual resulta ser, aproximadament, de 3,1605:

$$\pi\,.(d/2)^2 = (8/9d)^2 \quad \Rightarrow \quad \pi = 4(8/9)^2 = 3{,}1605$$

La relació 8/9 dels egipcis pot derivar segons Gerdes (1985) d'una aplicació d'un joc tradicional de l'antic Egipte que es jugava en un tauler quadrat de 8 x 8 foradets tots ells iguals i on calia posar-hi objectes (pedretes, llegums...). L'aplicació en altres formes que havien de tenir el mateix nombre de foradets i de la mateixa mesura cadascun d'ells, porta a constatar la igualació existent entre l'àrea del quadrat de 8 de costat i el cercle de diàmetre 9, on en ambdós hi cabien 64 foradets; però, també el papirus d'Ahmes, planteja en el problema 48, -l'únic acompanyat d'esquemes gràfics- un quadrat que a dins hi porta escrit el símbol de 9 i dibuixats quatre triangles isòsceles rectangles, un per vèrtexs, quedant inscrit un octògon. L'àrea dels triangles val 9/2 khets i, evidentment, la de l'octògon és 9^2 – 4(9/2), o sigui 63, valor que s'obté, també, aproximadament, com a equivalència d'un quadrat de 8/9 del costat inicial. El cercle inscrit al quadrat queda molt ajustat perímetralment amb l'octògon de manera que la seva àrea resulta ser, semblant a la de l'octògon. Si els triangles isòsceles es formessin a partir de costats de 3 (1/3 part del costat del quadrat), llavors la seva àrea total equival a 2/9 de la del quadrat (4 triangles corresponen a 2 dels 9 quadrats de 3x3 interns) de manera que l'octògon dibuixat, és el 7/9 del quadrat. El cercle inscrit al quadrat, inscriu l'octògon, per tant la seva àrea ha de ser superior a la del quadrat equivalent als 7/9 del costat del quadrat inicial.

El valor de π és present, també, en les piràmides[182] i el seu ús en molts problemes del papirus d'Ahmes o en el de Moscú, on en el desè, que tracta de l'àrea d'una superfície corba semiesfèrica s'avança en mil cinc-cents anys a Arquímides. No hi ha proves d'interessos palpables per altres processos de rectificació, a part, del càlcul de la circumferència o la relació del valor π, degut, segurament, a que el seu domini permetia més perfecció en camps tan diferenciats com l'astronomia o l'arquitectura. Una demostració del valor 8/9, s'ha volgut veure en les espirals de les seves serps enrotllades en les representacions funeràries; o del l'elaboració del pa del faraó o de la construcció de les estores; igual que en moltes altres cultures. El desenrotllament d'una espiral de diàmetre 9 permetria construir un quadrat de 8 de costat.

[179] 1 *khet = 100 cúbits reials que equivalen aproximadament a uns 50 metres* del nostre sistema.
[180] 1 *setat és igual a 1 khet quadrat.*
[181] El terme *"pi" va ser utilitzat per primera vegada per a indicar la relació entre la circumferència i el seu diàmetre el 1706 per William James i es popularitza a partir de Leonhard Euler al 1748 quan el fa servir en la seva obra Introductio in analysin infinitorum.*
[182] La de Gizeh, per exemple, si es considera la seva alçada (146,6 m) com a radi d'un cercle, el perímetre de la seva base que és un quadrat de 230,4 m (921,6 m) és igual a la circumferència de l'alçada (921,2m)

El cubicatge també està present en la matemàtica egípcia com ho demostra el problema 14 del papirus de Moscú[183]. En ell es planteja el càlcul del volum d'un tronc de piràmide; problema que és qualificat per Bell[184], com "*la major piràmide egípcia*" o la màxima adquisició de la ciència egípcia. El procediment del càlcul egipci es fa de la següent manera:

1.- Es calcula el quadrat de 4 = 16
2.- Calcula el quadrat de 2 = 4
3.- Doble el 4 = 8
4.- Es fa la suma de 16 + 4 + 8 = 28
5.- Es calcula 1/3 de 6 = 2
6.- Es multiplica 28 per 2 (resultat de punt 5) = 56 que és el volum

Conseqüentment equival a: $\mathbf{V = (a^2 + b^2 + a.b) . h/3}$[185]

En aquest cas, el volum del tronc de piràmide es transforma en un prisma quadrangular d'àrea igual a la *mitjana d'Herò* entre les àrees del quadrat de la base inferior (a) i superior (b) del tronc de piràmide i d'alçada (h) amb una tercera part de l'alçada del tronc de la piràmide.

b.2.- Babilònia[186]

La matemàtica babilònica desenvoluparà nivells molt elevats del càlcul, fet que els farà sobresortir com a grans algebristes tot i no tenir estructurada cap teoria algebraica i ser, aquesta, d'enfoc retòric o d'aplicació de lògica de càlculs i serà aquest enfoc calculístic el que incidirà, també, en la geometria on sobresortiran poc, tot i que dominaven les formulacions del càlcul d'àrees de les superfícies planes, i també, especialment en aspectes d'aplicació del càlcul com poden ser les ternes pitagòriques i també en el camp dels triangles semblants, descobertes que prefiguren les recerques gregues, en més de mil anys d'antelació.

Els procediments de rectificació i quadratura, es centren en la circumferència i cercle on l'àrea es calculava per quadratura, fent el triple del quadrat del radi; és a dir, el cercle seria més o menys equivalent a tres dels quatre quadrats que es formen en el quadrat circumscrit al cercle al traçar-hi dos diàmetres perpendiculars; cadascun d'aquests quatre quadrats tindria el radi de costat. No obstant, en una tauleta del període antic s'indica que 3 ha de ser multiplicat per l'invers de $0;57,36_{60)}$ per aconseguir un resultat més precís de l'àrea, o el que és el mateix, que ocupa tres quadrats i un octau del quart, o sigui que $\boldsymbol{\pi}$ equival a 3,125

[183] "*... un tronc de piràmide té 6 cúbits d'alçada vertical per 4 cúbits de costat de la base i 2 cúbits de la base superior. Calcular el volum"*
[184] Gherverghese (p. 130, 131))
[185] Serà el mètode emprat per Heron d'Alexandria (s. I d.C.) on en el Llibre II de la seva Mètrica, planteja el càlcul del volum de cossos geomètrics, seguint la metodologia egípcia.
[186] Els primers documents datats són del 3.500 a.C. Finalitza en el 539 d.C. Fins avui, més de mig milió de tauletes d'argila són la mostra del seu nivell científic; cinc centes tracten aspectes matemàtics i pertanyen, la majoria, al període de l'Antiga Babilònia (primera meitat del segon mil· leni) les altres són del Nou Imperi Babilònic o imperi caldeu (aproximadament del 600 a.C. fins ben entrada l'era seleúcida, 311-64). La transcripció de la seva escriptura cuneïforme, s'aconsegueix a mitjans del s. XIX, però l'anàlisi matemàtic s'efectua a partir de la dècada dels anys 30 del present segle (Otto Neugebauer amb l'obra *Mathematische Keilschrift-Texte* del 1935-37 i Françoise Thureau-Danginç amb *Textes mathématiques Babyloniens,* 1938).

b.3.- La geometria en la matemàtica oriental

Les cultures de l'extrem orient aportaran grans innovacions i perfeccionaments matemàtics com és el cas de la seva gran contribució a l'àlgebra, posteriorment ampliada i perfeccionada pels àrabs, i el domini de les resolucions d'irracionals. Entre aquestes cal destacar la xinesa i la índia[187].

b.3.1.- Xina[188]

La rectificació, quadratura i cubicatge, resulten de gran transcendència en la matemàtica xinesa sent fonamentals pels seus avenços. Se'n destaca el seu gran interès per l'anàlisi de la rectificació de la circumferència o el càlcul de π. En el capítol primer *del Chiu Chang Suan Su*[189], el *Fang* (quadrat) *thien* (terra), ja indica amb el nom, la força de la quadratura com a procediment pel càlcul de les àrees. També aquí, es calcula π a través d'un procés d'exhaustió en el que la circumferència té una relació de 3 del perímetre respecte al diàmetre ***d'un hexàgon*** regular inscrit al diàmetre. Liu Hui, el perfeccionarà al inscriure la circumferència entre un polígon inscrit i un de circumscrit d'*n* costats, de manera

[187] Els orígens de les matemàtiques orientals xineses i índies es remunten als 3000 a.C. Les del vall del Yangtze i l'Huanh-Ho a Xina, i la de l'Indo o civilització d'*Harappa i Mohenjo-Daro*. El seu màxim esplendor correspon al primer mil· leni a.C., apareixent els grans líders religiosos: Confuci, Gautama Buda, Mahavira coincidint amb la caiguda de Babilònia a mans del perses i l'existència de Zoroastre, al mateix temps que l'ampliació de contactes amb la cultura babilònica degut a la invasió de Darío (512 a.C.); o amb la grega per la invasió d'Alexandre el Gran (330).

[188] La numeració a Xina apareix ja en un os d'un oracle pertanyen al període Shang (1500 - 1000 a.C.) . És una notació que utilitza nou símbols i el valor posicional. Després dels babilònic és el sistema posicional més antic ja que és anterior quasi en 1000 anys al sistema indi. Apareix a principis de l'era cristiana, el concepte i operació de números negatius i també l'ús de la regla de tres. El document matemàtic més antic és el llibre *Chou Pei Suan Ching* (*L'aritmètica de l'gneumon i dels camins circulars del cel*) del període dels Estats Lluitadors (700 - 200 a.C.). Es tracta d'un text astronòmic on apareixen demostracions sobre els triangles rectangles i entre elles el teorema de *Kou Ku* (Pitàgores*).* En el període de la dinastia Han (200 a.C - 220 d.C.) es compila i amplia la sapiència anterior.

[189] El *Chiu Chang Suan* Shu (*Nou capítols sobre les Arts Matemàtiques*) és el recull matemàtic més antic i important. Probablement és de la primera centúria de la nostra era. Té un caràcter essencialment algebraic i a nivell de mesura, integra una gran varietat i amplitud de propostes. Consta de nou seccions, cada una d'un tema matemàtic i amb un total de 246 problemes enunciats, resolts i amb la regla per solucionar-ho. Són:

- 1: *Fang thien*[189] (mesura del terreny: *Fang,* significa quadrat *i thien,* terreny) on el quadrat és utilitzat com a unitat de mesura. Planteja el càlcul de figures planes. En els cercles, π apareix amb valor de 3. A més es donen orientacions sobre algoritmes amb racionals semblat als processos que fem servir avui i, mètode de cercar fraccions simplificades per "subtracció repetida".
- 2: *Su mei* (granes i arres). Tracta de proporcionalitat i proporcionalitat
- 3: *Shuai fen.* Distribucions de propietats i diner. Ús de la regle de tres. Apareixen progressions aritmètiques i geomètriques.
- 4: *Shao kuang* (quant d'amplada). Càlcul de la longitud del costat sabent el valor de l'àrea. Apareixen els irracionals i el mètode de càlcul d'arrels quadrades i cúbiques.
- 5: *Shang kung.* És un text de consulta d'enginyeria on es tracta del càlcul de volums a partir del mètode de la complementarietat interna i externa o el que és el mateix la composició i descomposició de parts. Cal destacar el del tetràedre que equival a la meitat del d'una piràmide rectangular o també a un terç del cub; o, el cas de l'encaixament entre tetràedre i piràmide rectangular per donar un prisma triangular recte.
- 6: *Chun shu* (Impostos justs) tracta de la distribució equitativa dels impostos, uns altres sobre el temps de recorreguts i de encontres de dos moviments.
- 7: *Ying buzu* (Molt, però encara no suficient). Distribucions i repartiments.
- 8: *Fang cheng* (Mètode de Taules). Resolució d'equacions de dues o tres incògnites.
- 9: *Kou ku*[189] (triangles rectangles). És l'origen del teorema de Pitàgores. *Kou* és el catet menor; *ku* el catet major *i shian* la hipotenusa

que a major *n*, menor imprecisió. El calcula en un polígon de 96 costats, iterant un procés d'aplicació del teorema del *kou ku,* iniciat en l'hexàgon del qual coneixia el valor del perímetre i anar aplicant un doblatge continuat de costats. El resultat a què arriba és el de 3,1416 per interpolació entre els valors que havia calculat, prèviament, de l'àrea entre dos valors aproximatius, un de màxim i un de mínim.

En el càlcul de volums, s'utilitza el cubicatge a través de la composició i descomposició. El volum del cub és el referencial pel càlcul d'altres volums com en el cas d'un tetràedre que és 1/3 del cub d'igual base o 1/6 de la piràmide quadrangular d'igual base i d'alçada igual a la generatriu del tetràedre, procediments que ja apareixen en el capítol 5 del Chui Chang Suan Shu.

b.3.2.- Índia[190]

La rectificació es centrà, bàsicament, en el càlcul de la longitud de la circumferència i especialment concretat en la recerca del valor o raó de relació entre dita longitud i el diàmetre. Les anàlisis de $\boldsymbol{\pi}$ efectuades tan durant el període antic com en el període clàssic, tingueren gran transcendència i aconseguiren valors tan precisos com el mateix 3,1416 que avui apliquem.

En el Sulbasutra Baudhayana s'evidencia l'interès per l'aplicació d'escales constructives, necessitat que fa néixer un elevat interès per l'exactitud i per la resolució de multitud de situacions com el cas dels doblatge d'àrees o de volums o, també, de cercar àrees equivalents tenint formes poligonals diferents. Aquest interès per les equivalències superficials i volumètriques, fou un dels motors generadors dels avenços de la matemàtica índia i d'ell sorgeixen els procediments de rectificació, quadratura i cubicatge més interessants, però també, per exemple dels irracionals.

Entre els casos de quadratures més destacables que apareixen en els Sulbasutres, es poden destacar[191]:

- *Construir un quadrat doble d'un altre*: "*la corda que s'estira en el sentit de la diagonal d'un quadrat té una àrea doble de la del quadrat inicial".*

- *Fusió de quadrats per obtenir un nou quadrat equivalent a la suma dels dos primers*. Sobre un costat del quadrat major es situa el costat del menor; serà el catet menor d'un triangle rectangle on el catet major serà el costat enter del quadrat gran; la hipotenusa d'aquest triangle serà el costat del quadrat suma del major i menor.

[190] La matemàtica índia naixerà fruit de dos factors bàsics: l'evolució lingüística o la literatura vèdica i, la implicació o fonamentació religiosa. L'estructuració del sànscrit (2500 a.C.) que en fa Panini (s. IV a.C.) serà per a la matemàtica, l'equivalent de la filosofia a la matemàtica grega; fet prou remarcable en la simbologia numèrica a partir de paraules. Els primers documents matemàtics escrits els trobem en els *Sulbasutres*[190] o "regles de les cordes" (800 a.C fins el 200 d.C.); entre els quals i com a més importants cal destacar els de *Baudhayana* (800, 600 a.C.) i els de *Apastamba* i *Katyayana* (400 a.C.). Són, però, les cultures d'Harappa i Mohenjo-Daro o cultura dels rajols les primeres amb restes indicadores de dominis matemàtics. La matemàtica índia aportà a la cultura matemàtica l'estructuració del seu sistema numèric i l'ús del zero, com a element transcendental, però també fou clau de volta en el camp de l'àlgebra, la trigonometria, els exponencials i els logaritmes, el càlcul astronòmic i el calendari, ... Durant l'època clàssica es desvetllaren profusament tots els camps matemàtics estudiats aconseguint-ne grans avenços que seran assimilats i transmesos posteriorment pels àrabs.

[191] Extret de Gherverghese (1991)

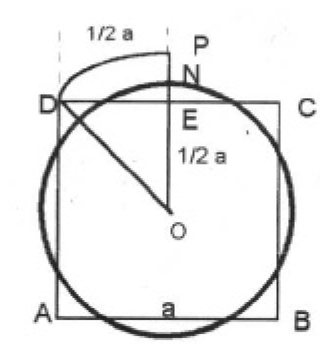
- *Doblatge de l'àrea d'un quadrat.* Com a cas especial del cas anterior aquest problema de doblar l'àrea d'un altar quadrat porta al valor d' √**2** que és el costat del nou quadrat suma dels dos quadrats iguals. En les Sulbasutres d'Apastamba i Katyayana explicitem un procediment d'aproximació fonamentat en: "*Augmentar la mesura en la seva tercera part i aquesta tercera en la seva quarta part menys la trenta-quatre part d'aquesta quarta part*". Si el costat és 1, la diagonal seria:

$$d = 1 + 1/3 + 1/3(1/4) + 1/34\ ((1/3)(1/4)) = 1{,}4142156\ ...$$

- *Quadrar una circumferència* : "*dividir el diàmetre en 15 parts i agafar-ne 13 com a costat del quadrat*" . Si *d*, és el diàmetre i *a* és el costat del quadrat, resulta que:

$$a = 13/15\ d \Rightarrow \pi = 3{,}004$$

- *Quadrar un cercle i arrodonir un quadrat:*



Unir O amb D i traçar una corda des de D que talli a P.
OD = OP
Cercar una tercera part d'EP, punt N i construir la circumferència des d'O que passi per N.

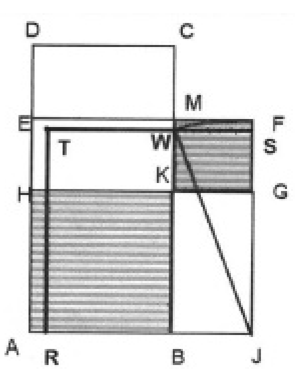
r = ON = OE + EN = OE + 1/3 EP = OE + 1/3 (OP – OE)

sen 45º = OE / OD = OE / OP = 1/ √2
per tant : OP = √2 OE
o sigui r = OE + 1/3 (√2 OE – OE)
i ja que OE = ½a

r = a/2 + (1/2 a (√2 – 1))/3 = **1/6 a (2 + √2)**

Esquema 13 : ***Quadratura del cercle i cercletització del quadrat***

- *Transformació d'un rectangle en un quadrat de la mateixa àrea (Baudhayana)*



El rectangle és ABCD. Es construeix el quadrat ABKH de costat AB del rectangle. Es divideix per la meitat DH i es formen dos rectangles iguals HEMK i DECM.

Construir-ne un d'igual als anteriors (BKGJ) al costat BK del quadrat que seria el DCME transportat. A continuació construir un quadrat MKFG per completar el quadrat AEFJ. Des de J com a centre de circumferència i de radi JF, cercar el punt W.

BW és la longitud del costat del quadrat buscat (JSTR).

Esquema 14 : ***Quadratura del rectangle i rectanglització del quadrat***

c)- La geometria i la rectificació a la matemàtica grega

c.1.- La matemàtica grega i les influències de la matemàtica oriental

La matemàtica grega, profundament depenent amb la filosofia, mostra a través de la frase que presidia el frontó de l'Acadèmia de Plató (427-347 a. C.) a Atenes: "***No entri aquí, ningú que ignori la geometria***"[192] la importància i la més alta consideració[193] de la matemàtica enfocada sota la prioritat geomètrica. La pràctica matemàtica i la teoria platònica s'influeixen mútuament arribant, la primera a ser considerada la clau de volta de la formació de l'esperit i coneixement imprescindible per l'art de governar tal com s'indica en *La República* i en els *Diàlegs de Plató*, però també, per a l'explicació cosmològica del món i la vida. Plató, en el seu *Timeo*, veu en el dodecàedre, seguint la creença pitagòrica, el símbol de la perfecció de l'univers i associa cadascun dels sòlids regulars amb els quatre elements constitutius de la matèria: el tetràedre amb el foc; el cub amb la terra; l'icosàedre amb l'aigua i l'octàedre amb l'aire. La prioritat d'aquest enfoc cultural matemàtic és fruit de la seva interconnexió com a forma de filosofia, i la seva evolució, fou degut, en bona mesura, al contacte amb la matemàtica oriental, principalment egípcia[194] i babilònica[195]. A través d'elles, obtingué millores tècniques ("*triangle egipci*" o "*l'arpedonapti*"...) i de càlcul (tècniques algorísmiques, àrees i volums, racionals, àlgebra, trigonometria, …) però, alhora, va posar els coneixements matemàtics i astronòmics en una profunda transformació, degut al contrast entre les tradicions babilòniques i egípcies, de tipologia algebraica i empírica, amb la grega més antiempírica i geomètrica *"els pensadors grecs s'adonaren compte, de seguida, de les grans dificultats inherents als conceptes de continuïtat, moviment i infinitud així com la problemàtica derivada de mesurar magnituds arbitràries amb unitats prefixades*"[196].

---

[192] Es clausurà el 529 d.C. i molts dels seus matemàtics s'instal· laren a Jund-i-Shapur 'integrada al món àrab

[193] La profunditat significativa del que representa la frase de l'Acadèmia solament era possible a conseqüència d'un llarg procés d'evolució matemàtica iniciat per *l'Escola Jònica* (Thales de Milet (636-546); Anaximandre (610-547); Heràclit (576-480); Anaximene (550-480); Anaxagore (500-428) ...), l'*Escola dels* Eleàtides (Xenophane de Colophon (570-478); Melissos de Samos; Parmènides (544-450), Zénon d'Elea (495-430) ...), però, especialment, per l'*Escola dels Pitagòric* (Pitàgores (585-500); Philolaus de Crotone (470- ?); Empedocles (490-430); Architas de Tarento (428-327); Hippasos de Métaponte (vers 450) ...) i, l'*Escola de Plató* (Plató (428-348); Eudoxe (408-355); Theodor de Cirene (460-369); Théétèto (410-369) ...), sense oblidar l'*Escola dels Sofistes* (Leucippo (s. V. a.J.C.); Demòcrit (460-370); Hipòcrates de Xio (470-400); Hippias d'Elis (450-400); Antiphon (480-411); ...) seguida per l'escola platònica i l'escola alexandrina.

[194] Dominaven una gran varietat de tècniques i procediments de càlcul algorísmic (multiplicacions, divisions, fraccions,...), inicis algebraics de tipus retòric i també geomètriques que permetien calcular àrees (quadrilàters pel producte de les mitjanes dels costats paral· lels; cercle a partir de l'aproximació entre àrea de quadrat circumscrit i l'octògon inscrit en el quadrat) i volums o el valor de "l'*índex d'inclinació d'una piràmide*" a partir d'un concepte equivalent al de cotangent d'un angle. (mans que es separa del pla inclinat respecte a la vertical per una alçada d'un colze = 7 mans… tal i com es constata, bàsicament, en el conjunt dels 112 problemes i les seves solucions, del *papirus Rhind* o *papirus de l'escriba Ahmés* o *Ahmosis* (1650 a. J.C.), i del *papirus de Moscú*. (87 d'Ahmés i 25 de Moscú), o en altres documents com el *papirus de Berlín*, el del *Rotlle de Cuir*, els de *Reisner*, ...

[195] Les tauletes d'argila trobades a Mesopotàmia demostren, 2000 anys abans de J.C, els seus alts nivells en el càlcul de superfícies i volums i en l'aplicació de teoremes. Una bona quantitat d'ells seran formalitzats demostrativament pels matemàtics grecs com, per exemple, el teorema de Pitàgores (*tauleta Plimpton* nº 322 de la Universitat de Colúmbia, del 1800-1650 a.C) que ja el plantegen, indirectament, a través d'un recull de ternes pitagòriques; o en les *tauletes de Susa* (Imperi Antic Babilònic 1900-165 a.C.) on hi ha taules que comparen les àrees de polígons regulars de 3, 5, 6 i 7 costats, respecte a quadrats. Més que els aspectes geomètrics els interessaven les aproximacions numèriques, per ser utilitzades en els mesuratges.

[196] Courant i Robbins (1979) (p.3)

La matemàtica grega treballarà, per una banda, sobre conceptes abstractes per tal d'aconseguir el seu propi coneixement sense un enfoc pragmàtic i utilitari "*...per arribar per pura intel· ligència a penetrar en la naturalesa dels nombres, no per fer-los servir com fan els comerciants .... sinó per a poder aplicar-la a la guerra i per facilitar a l'ànima, el viatge des del món sensible a la veritat i a l'essència*"; "... *si la geometria obliga a contemplar l'essència, ens convé; si únicament és per utilitzar-la, no ens és convenient*"[197] i, per l'altra, sobre la metodologia, amb l'objectiu d'aconseguir aquest coneixement que es fonamenta, com diu Plató, en demostrar, perceptual i visualment, el concepte "*per mostrar, entenc el fet de presentar* el concepte, *a la percepció visual*". El camí a través de mètodes analítics i per deducció o reducció a l'absurd, permet arribar a la contemplació cognitiva de la veritat. La matemàtica evoluciona des de la visibilitat concreta al conceptualisme abstracte fonamentat, però, en la visualització mental que juntament amb la incommensurabilitat (infinitud i continu) porten a la diferenciació entre magnitud, geometria i número.

La concepció filosòfica-matemàtica, incidí en la transformació conceptual de la mesura i en aspectes definitòries d'ella, com poden ser la concepció d'unitat i la seva relació amb el concepte numèric, les unitats absolutes, les relatives i les derivades; la mesura discreta i la continua; la commensurabibilat i la incommensurabilitat; o els procediments i estratègies específics, com poden ser la rectificació, quadratura, cubicatge, triangulació, cercletització,… Aquesta evolució conceptual que es manifestà fruit de les aportacions de l'escola pitagòrica[198]**,** la platònica[199] i l'alexandrina[200], possibilitaran la diferenciació entre geometria, mesura i número, posant en evidència la servitud del número respecte la geometria. La matemàtica grega, amb això, intentarà que el número tingui valor per a ell mateix i no tan com a representació magnitudinal. L'enfoc geomètric de la matemàtica grega, viurà, no obstant, casos d'allunyament d'aquesta tradició geomètrica degut a influència de la matemàtica hindú i aràbiga, a través, especialment, d'Herò d'Alexandria i Diofant. No hi ha dubte que aquesta contradicció i les problemàtiques que s'anaven generant, estimulà els matemàtics grecs per un procediment d'anàlisi teòric (*apagoché*) que resultà determinant per l'avenç matemàtic, mètode que queda plasmat en els "*Elements*" de Euclides (300 a.J.C.) i que perdurà fins als nostres dies.

---

[197] Plató. *La República*. Llibre VII.

[198] L'escola dels pitagòrics es diferenciava del pensament social, per la seva concepció religiosa. Mentre la religiositat social es fonamenta en un culte naturalista als deus de l'Olimp, aliena a les inclinacions místiques i màgiques; els pitagòrics constitueixen un aparell místic-simbòlic d'influències egipci-babilòniques amb fonamentacions d'orfisme o maniqueisme dual, que diferencia l'element diví de l'humà. Aquest fet porta a un ascetisme i a la necessitat de purificació. El dualisme vital i filosòfic es concreta en deu principis pitagòrics de gran incidència en el fet matemàtic: "*limitat - il· limitat; parell - imparell; un - multiplicitat; dreta - esquerra; mascle - femella; recte - corbat; llum - tenebra; pensament - matèria; be - mal; quadrat – rectangle*" (Adorno, Fransesco (1983). *Storia della filosofia*. Feltrinelli Editore. Milan (p.28)).

[199] La influència de l'escola platònica fou transcendental. D'ella sorgiren innumerables matemàtics de renom universal com Theodor de Cirene; Eudoxe; Thétète, ... o Aristòtil (348-322), deixeble de Plató, que encara que no profunditzarà en la matemàtica sí ho faran deixebles seus com Eudeme de Rodes, Autolicus de Pilane, ... En la base de la filosofia platònica, hi ha la diferenciació entre món sensible, imperfecte i canviant i el món dels models i idees, etern, perfecte i immutable. Solament el món de les idees mereix ser estudiat i això només és possible des de la raó i el raonament deductiu, sent aquest raonament, l'objectiu últim de la matemàtica tal com indica Platò en el llibre VII de La República: "*totes les figures no són més que models o dibuixos que permetran les imatges.... per arribar a veure els elements superiors que només podem percebre pel pensament*". El suport material no és més que un simbolisme operatori per permetre la idea. Les veritats, les hipòtesis, existeixen a priori són eternes, l'objectiu de la matemàtica és, per tant, cercar-les en el propi raonament i són una evidència que no es percep únicament per l'experiència.

[200] Amb Euclides (vers 300 a.J.C.), Arquímides (287-212), Apol· lini de Pèrgam (262-190), Erastósthenes (284-192), Hipparque (190-125) ...

c.2.- Les limitacions[201] de la matemàtica grega

Pla i Carreres considera que l'enfoc de la matemàtica grega es veu immers en un seguit de restriccions que afecten tant a la geometria com a la magnitud i que incideixen, també, tant a nivell conceptual com resolutori. Aquestes dificultats incidiran en la transformació matemàtica posterior al ser una problemàtica que cal donar resposta o solució per seguir endavant. Cadascuna d'aquestes dificultats o limitacions és anomenada amb el nom d'un dels grans matemàtics grecs que aporten la seva teoria en el desenvolupament de la matemàtica clàssica i que constitueixen la base de l'evolució i construcció posterior. Destaca sis grans limitacions: *pitagòrica, platònica*, *aristotèlica*, p*àppica*, *euclidiana* i l'*arquimediana*

a.- *pitagòrica*.

Deriva de la incommensurabilitat dels segments i de la seva incidència metafísica. No es pot garantir que fixada una unitat, tota magnitud serà entera o racional *" per obviar la unitat es poden comparar magnituds entre elles, això sí, dins d'una mateixa espècie, cercant-ne la raó. La limitació pitagòrica no permet assignar un racional a la mesura relativa d'un segment a un altre. Dos segments no són necessàriament una part alíquota de l'altre. Aquest fet obliga a cercar un nou concepte de raó. Aquest concepte, tanmateix, s'esmuny a tot intent d'explicitació metafísica. No és possible donar una caracterització ontològica de la raó existent entre magnituds d'una mateixa espècie que expliqui alhora, la commensurabilitat i la incommensurabilitat. Eudox aconseguirà d'establir una teoria relacional, coneguda com la teoria de la proporció de les magnituds…Evita assignar una característica numèrica a la raó entre dues magnituds. Amb aquesta nova teoria és possible d'establir els teoremes geomètrics, vàlids en el cas commensurable, al cas general*".

b.- platònica.

Tot i existir la incommensurabilitat aritmètica, la construcció geomètrica és possible i per això es fa necessari definir quines són les eines permeses per realitzar aquesta construcció. "*Un problema és resoluble si, fixades les dades inicials -"segments donats en posició"- som capaços de trobar la solució emprant solament les dades inicials i el regle i el compàs (i si cal, el segment unitat). Aquesta limitació exclou del món geomètric qualsevol punt la determinació del qual precisa de corbes diferents del segment rectilini i de la circumferència, com ara les còniques, la cisoide, la concoide, l'espiral d'Arquímides, la quadratriu, etc. A l'hora de generar corbes, no s'admet ni el moviment, ni les marques en el regle*."

c.- aristotèlica.

Exclou la possibilitat d'acceptar, *l'infinit en acte*, però sí accepta *l'infinit en potència* i tant a nivell d'addició com de divisió. *"L'addició s'aplica al discret, i al continu entès com a discret. La divisió només és aplicable al continu. Ambdós conceptes s'entenen com a intuïtius. Qualsevol magnitud és, de fet, continua i , per tant, infinitament divisible, però només està permès, en cada construcció concreta, efectuar un nombre finit de divisions. Una magnitud concreta és, però, addicionable amb sí mateixa o amb d'altres de la mateixa espècie tantes vegades com calgui, però, en cada cas concret, solament, podem fer un nombre finit d'addicions. Aquesta limitació comporta el fet que, a la geometria del regle i el compàs, només és permès un nombre finit d'utilitzacions d'aquest ginys. No hi ha, però, cap limitació en el nombre d'utilitzacions acceptables, sempre que finalment sigui finit. És a dir, tot procés ha de tenir un fi actual*".

[201] Segons Pla i Carreres (1996)

***d.- pàppica**.*

Té connotacions amb la limitació pitagòrica. La geometria grega és tridimensional i així existeixen magnituds uni, bi o tri dimensionals, però no són admeses altres dimensions ni ens que superin a la tercera. "*De fet, només, disposem de segments rectilinis, rectangles i paral· lepípedes entesos, respectivament, com el producte de dos o tres segments rectilinis. Cal observar -és un fet important- que, en la geometria grega, el rectangle limitat per AB i AC (o el paral· lepípede d'arestes, AB, AC, AD) no és mai un objecte numèric. A més, AB x AC, AB X AC x AD són magnituds d'espècies diferents. No poden, en cap cas, ser comparades, afegides, etc.*" Segons això, seria possible multiplicar una dimensió unidimensional per una altra també unidimensional, o una unidimensional per una bidimensional ja que en cap cas, es supera la tridimensionalitat amb la seva suma; però no és possible una bidimensional per una altra, també, bidimensional; o una bi amb una tri, o tri amb tri. La limitació de Pappos determina intensament l'àlgebra de la geometria grega sota la perspectiva del que podria anomenar-se "*homogeneïtat" i "limitació a la tridimensionalitat".*

e.- euclidiana.

Ve determinada pels axiomes i postulats dels Elements. Accepta les limitacions pitagòriques, platòniques i aristotèliques. "*.. una recta està sempre determinada per dos punts que en són els seus extrems. Això no obstant es pot perllongar tant com es vulgui per cada un dels extrems, sempre que el perllongament sigui finit. Però, en cap cas, no és possible acceptar rectes il· limitades o infinites. Això contradiu clarament l'existència en tant que rectes infinites. Euclides, per aquesta raó, en un intent de màxim rigor, dóna la condició de "necessària" i de "suficient". L'infinit apareix, només en la definició de rectes paral· leles*".

f.- arquimediana.

Quan Éudox defineix raó entre dues magnituds com a "*quan hi ha un múltiple d'una d'elles que supera a l'altra*", obre la possibilitat de que dues magnituds puguin tenir raó o puguin no tenir-ne i així la raó esdevindria semblant a la commensurabilitat. Arquímides, però, imposa una limitació en el món de les magnituds quan explicita: “*dues magnituds d'una mateixa espècie, sempre tenen raó, és a dir que sempre existeix un nombre natural n que crea un múltiple d'una d'elles que superarà a l'altra*”. Amb aquesta limitació, s'exclou la possibilitat dels àtoms o dels infinitesimals. S'exclou la possibilitat de magnituds no divisibles i s'introdueix, doncs, la hipòtesi que totes les magnituds són infinitament divisibles.

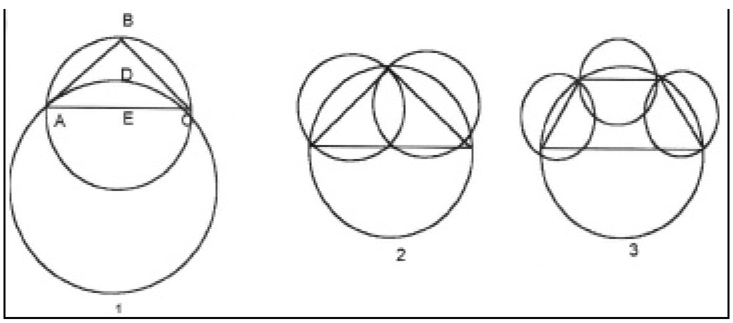
c.3- Exhaustió, quadratura i cercletització

El pensament matemàtic grec, com ja anteriorment ho havien fet els egipcis i babilònics, utilitza recursos i procediments específics de càlcul que permetin determinar la magnitud d'una dimensió determinada a partir del contrast amb d'altres que resultin més fàcils de determinar. L'aplicació d'aquest mètode de càlcul, conegut com a *mètode d'exhaustió*[202], s'aplicà, fonamentalment, en el càlcul de superfícies i la metodologia més emprada fou el desenvolupament de les tècniques de *quadratures*, consistent en igualar o aproximar la superfície d'una determinada figura amb la d'un quadrat, de manera que es tracta d’un procés d'equivalència superficial entre un

[202]Nom donat pel matemàtic flamenc Gregoire Saint Vincent en la seva obra "*Opus geometricarum" (1647).* El mètode de l'exhaustió consisteix en omplir una magnitud (longitud, àrea, volum...) amb unitats de magnituds cada vegada més petites.

quadrat i una altra figura plana. El cas més conegut de quadratura que es convertí en un veritable problema que no es solucionà fins el 1882, fou el de la *quadratura del cercle*[203]. Al seu costat, *la duplicació del cub*[204] i la *trisecció de l'angle,* configuren el que s'anomenà els *"tres problemes clàssics*".

Una derivació de la quadratura del cercle foren els càlculs de la *quadratura de llúnules*[205] que Hipòcrates de Xios va iniciar i que el portà a la demostració[206] de que "*els cercles són entre ells com els quadrats construïts sobre els seus diàmetres*"…"*un semicercle circumscrit a un triangle rectangle isòsceles i sobre la seva hipotenusa (diàmetre), construeix un segment circular semblant als segments circulars determinats pels catets. Donat que els segments són entre ells com els quadrats construïts sobre les seves bases. a partir del teorema de Pitàgores aplicat al triangle rectangle s'obté que la suma dels dos segments circulars menors és igual al segment circular gran. Per tant la diferencia entre el semicercle de diàmetre AC i el segment ADCE és igual al triangle ABC; és a dir, la llúnula ABCD és exactament igual al triangle ABC i ja que el triangle ABC és igual al quadrat construït sobre la meitat AC, s'aconsegueix la quadratura de la llúnula*" (Esquema 1).



També planteja la quadratura en altres casos de llúnules, com per exemple, a partir de trapezis isòsceles o en la construcció de semicercles sobre els costats dels triangles o trapezis " (Esquema 2) *Si construï m tres semicercles sobre la hipotenusa i els catets d'un triangle rectangle isòsceles, la suma de les llúnules que es formen sobre els catets és igual al triangle....* (Esquema 3) *Si es construeix sobre el diàmetre d'un semicercle com a base, un trapezi isòsceles amb els altres tres costats iguals i si es construeix sobre aquests tres costats tres semicercles, llavors el trapezi és igual a la suma de quatre figures curvilínies: les tres llúnules iguals i un semicercle sobre un dels tres costats iguals del trapezi*". Aquestes descobertes portaren a creure que si era possible quadrar les llúnules, també es podria quadrar el semicercle i, lògicament, el cercle.

Els procediments d'exhaustió són recollits per Euclides en els llibres V, X i XII i, també, Arquímides en els seu *Mètode*[207] exposa el seu procediment per calcular les quadratures. Idènticament, i també de forma semblant, es fa el càlcul de volums per cubicatge, intentant cercar el valor equivalent del volum d'un cos sòlid respecte a un hexàedre, a un prisma rectangular o a un cilindre[208].

[203] El problema consistia en el plantejament de si era possible o no, construir amb regla i compàs, un quadrat que la seva àrea fos exactament la mateixa de la d'un determinat cercle. Considerant que això significa un quadrat de costat igual al producte del seu radi pel valor de l'arrel quadrada de pi (valor no construïble), era conseqüentment, irresoluble el problema. Fou estudiat en primer lloc, segons diu Plutarc, per Anaxàgores.

[204] També s'anomena *problema de Delos:* donada l'aresta d'un cub, construir amb l'ús de regla i compàs, un cub de volum doble. Segons la llegenda els oracles de Delos havien demanat per evitar la plaga que assotava Atenes, que calia fer un nou altar que tingués el doble de volum que el dedicat a Apol.lo.

[205] Figura plana limitada per dos arcs de circumferència de radis diferents.

[206] Boyer (p.99)

[207] Carta adreçada a Erastòstenes, bibliotecari d'Alexandria.

[208] Segons Arquímides en la carta adreçada a Erastòstenes, indica que fou Demòcrit d'Abderas el primer que va calcular el volum d'una piràmide i d'un con.

La base filosòfica-matemàtica sobre la que es fonamenten aquests procediments de càlcul es troba en la concepció atomista de la matèria, segons la qual les magnituds estan compostes d'àtoms i els àtoms no són pas de la mateixa espècie que la magnitud de la qual en són els àtoms. Les tècniques de quadratura que aplica Arquímides es fonamenten en les d'Euclides, però perfeccionant-ne la tècnica tot i que el procés d'exhaustió n'és la base del raonament La quadratura i el cubicatge, s'expansiona i deixa pas, a cercar l'equivalència respecte a d'altres formes i figures matemàticament dominades, i així, a *"De la quadratura de la paràbola" d'*Arquímides, és el triangle la base de relació comparativa: "*tot segment parabòlic equival a quatre vegades la tercera part del triangle d'igual base i alçada que el segment* "; relació que s'estableix entre la superfície de la paràbola i la del triangle canònic inscrit. A "*Sobre l'esfera i el cilindre"*[209]*;* i a *"Sobre conoides i esferoides"*[210]*,* el procediment aplicat és la cercletització o transformació d'equivalència amb el cercle. El procediment de transformació equisuperficial s'aplicà per intentar relacionar la mesura de determinades àrees respecte la de figures planes conegudes i dominades com són els rectangles, triangles.... o el cercle; d'aquí que anomenarem *rectanglerització, triangulació, cercletització* a aquests procediments de transformació.

Arquímides qualifica els processos de quadratura ("*De la quadratura de la paràbola*") de *recursos mecànics,* diferenciant-los dels geomètrics[211] i considerant-los, per tant, com estructures de coneixement, diferents als purament demostratius o lògics. Els procediments d'exhaustió efectuats per composició-descomposició i a través d'enfocs de rectificació, quadratura o cubicatge són el mètode d'anàlisi que aplica de manera més generalitzada i als que considera com la base imprescindible de la reflexió matemàtica i el camí del futur desenvolupament[212].

---

209 *"Arquímides a Dositeo: Salut!. En d'altres ocasions t'he enviat, amb les seves demostracions, els teoremes que he descobert mitjançant la reflexió i, entre aquests, el següent:*

- *Tot segment comprés entre una recta i una paràbola és igual a quatre terços d'un triangle de la mateixa base i alçada que el segment.*

Ara he aconseguit provar alguns teoremes que no s'havien demostrat abans, entre ells destaquen:

- *L'àrea d'una esfera és quatre vegades la del seu cercle màxim.*
- *L'àrea d'un segment esfèric equival a la d'un cercle de radi igual a la recta traçada des del vèrtex del segment a la circumferència del cercle base del segment.*
- *Un cilindre de base igual al cercle màxim d'una esfera i altura el seu diàmetre és el triple de la meitat de l'esfera.*

Encara que aquestes propietats són inherents a les figures que acabo de referir-me, no havien estat conegudes per qui ens han precedit en l'estudi de la Geometria i serà fàcil comprendre la veritat dels meus teoremes a qui llegeixi atentament les demostracions que en faig. El mateix succeí amb els que Eudoxi va considerar en els sòlids i que han estat admesos, com els de que:

- *Una piràmide és el terç d'un prisma de la mateixa base i alçada.*
- *Un con és el terç d'un cilindre de la mateixa base i alçada.*

Aquestes propietats estaven, naturalment adscrites a les figures abans d'Eudoxi, però no havien estat descobertes per cap geòmetra".

210 En la preposició 6, respecte l'àrea de l'el· lipse, diu: "*les àrees de les el· lipses són entre sí com les dels rectangles construïts sobre els seus eixos"* o sigui, segons Boyer (1968- p.176) *"això és el mateix que dir que l'àrea de l'el· lipse* $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ *és* πab*, o que l'àrea d'una el· lipse és igual a l'àrea d'un cercle que el seu radi sigui la mitjana geomètrica dels dos semieixos de l'el· lipse"* . De la mateixa manera, utilitza un procés de triangulació del cercle, arribant a la igualació de que la seva àrea és igual a la d'un triangle de base igual a la circumferència i d'alçada el radi.

211 Els recursos o procediments de resolució geomètrica, s'entenen aquells que són factibles d'aconseguir-se exclusivament amb l'ús o ajuda de la regla i el compàs.

212 González-Vaqué (1977) - *Arquímides:* Mètode. Fou retrobat per Heiberg l'any 1906 en un palimpsep del segle X a Istambul; es va conservar gràcies a que en el s. XII els seus 185 fulls foren utilitzats per uns monjos per escriure-hi una col· lecció de textos litúrgics i de pregàries.

També la descomposició progressiva és utilitzada per Arquímides en una seriació continuada d'àrees: A, A/4, A/16, ... en el segment de paràbola, fet que comporta la resolució d'una sèrie infinita d'àrees parcials, que per exhaustió porta als 4/3 d'A, enunciats en el seu teorema. Aquest enfoc d'anàlisi de sèries constituents, portarà més endavant (Newton, Cauchy, Riemann...) al concepte d'*integral*.

Aquesta direcció d'Arquímides d'admetre altres recursos a més dels geomètrics per a resolució de situacions matemàtiques, entre elles de quadratura, té antecedents previs com són la resolució d'Hippies d'Ellis a la trisecció d'un angle que a més de resoldre el problema, aporta, la corba anomenada *trisectiu o quadratiu d'Hippies*[213], segons sembla, la primera línia corba diferent a la circumferència i la recta, la qual por ser emprada per quadrar el cercle[214].

"... si s'inscriu un cilindre en un prisma recte que té com a base un paral· lelogram -un quadrat- de manera que tingui les bases situades en els dos paral· lelograms i els costats en els altres plans del prisma, i si fas un pla que passi pel centre de la base del cilindre i per un dels costats del quadrat que es troba en la cara oposada, el pla tallarà del cilindre un segment limitat per dos plans i per la superfície del cilindre, sent un dels plans el que hem dibuixat i l'altre el que es troba a la base del cilindre, i sent la superfície cilíndrica la que està compresa per aquest dos plans; el segment del cilindre que hem tallat és la sisena part del prisma tot sencer. ... si dins un cub hi inscrivim un cilindre que té les bases situades en dos paral· lelograms oposats i la superfície tangent als quatre plans restants, i en el mateix cub s'hi inscriu un altre cilindre amb les dues bases en uns altres dos paral· lelograms i la superfície tangent als quatre plans restants, la figura compresa per les dues superfícies cilíndriques i inserida en ambdues és igual a dos terços del cub sencer. S'esdevé que aquests teoremes difereixen d'altres descoberts amb anterioritat. En aquells comparàvem els volums de les figures dels conoides i dels esferoides i els seus segments, amb els volums dels cons i cilindres, sense que cap d'elles resultés ser igual a una figura sòlida limitada per plans; mentre que cada una d'aquestes figures compreses entre dos plans i superfícies cilíndriques resulta igual a una figura sòlida limitada per plans. Doncs bé, havent formulat les demostracions d'aquest teoremes en aquest llibre, te les envio. Coneixent, com et deia, el teu zel i el teu domini excel· lent en filosofia i també que saps apreciar, quan s'esdevé l'ocasió, la investigació de les qüestions matemàtiques, m'ha semblat oportú confiar-te per escrit, i explicar en aquest mateix llibre, les característiques pròpies d'un mètode amb el qual et serà possible d'abordar la investigació de certes qüestions matemàtiques per mitjà de la mecànica. Quelcom que, n'estic ben convençut, no és pas menys útil per tal d'aconseguir les demostracions d'aquests mateixos teoremes. Perquè alguns dels primers que se'm van acudir per la mecànica, van rebre després demostració per mitjà de la geometria, atès que la investigació per aquest mètode queda lluny d'una demostració. És més fàcil construir la demostració després d'haver adquirit amb aquest mètode un cert coneixement dels problemes, que no pas buscar-la sense tenir-ne cap mena de coneixement… Per això, fins i tot en el cas dels teoremes referents al con i a la piràmide, la demostració dels quals trobà Èudox, a saber: que el con és la tercera part del cilindre i la piràmide la tercera part del prisma amb la mateixa base i alçada, cal atribuir bona part del mèrit a Demòcrit, que fou el primer que els va enunciar sense demostració. També, en el meu cas, s'esdevé que el descobriment dels teoremes que ara et dono a conèixer ha tingut lloc d'una manera semblant a com la tingué en els precedents. I he volgut publicar el mètode un cop perfilat per tal que ningú no es pensi que, quan em referia a ell, parlava per parlar. I alhora perquè estic fermament convençut que pot resultar una contribució no gens menyspreable en la investigació matemàtica. Així doncs, m'atreveixo a suposar que alguns dels meus contemporanis o successors trobaran, usant el mètode que exposo aquí, d'altres teoremes que a mi encara no se m'han acudit. Així doncs, exposo en primer lloc el resultat que també va ser el primer que se'm va manifestar per via mecànica; és a dir, que "tot segment d'una secció d'un con rectangle és quatre vegades terços del triangle que té la mateixa base i alçada" ... Al final del llibre formulo les demostracions geomètriques dels teoremes els enunciats dels quals t'he enviat amb anterioritat".

[213] S'origina a partir de la combinació d'un moviment de translació i alhora, de gir. Translació d'un costat d'un quadrat i gir d'un costat. Les interseccions que es van produint entre ambdues línies genera els punts que conformen la trisectiu.

[214] No existeixen proves de que Hippies en tingués coneixement d'aquesta possibilitat, però sí serà utilitzada, per aquesta demostració, per part de Dinostrato, deixeble d'Eudoxo. També en aquesta mateixa direcció, Menecmo, el seu germà, al descobrir l'el· lipse, la paràbola i la hipèrbola, demostrarà la duplicació del cub seguint la direcció oberta per Hipòcrates de Xios respecte a que seria possible aconseguir-ho sempre i quan es podés utilitzar corbes que tinguessin la propietat de la proporció contínua.

Una variant del procediment de quadratura en el pla o de cubicatge en l'espai és, respectivament, la *cercletització* o igualació respecte a un cercle i l'*esferalització* o procediment d'exhaustió a partir de l'esfera. Arquímides utilitza el procés d'igualació al cercle o a l'esfera per a calcular o demostrar diferents casos del món pla o volumètric i és aquest procediment, el que el porta a la descoberta que més valorarà i que segons ell no coneixien els geòmetres anteriors, que la raó dels volums entre el cilindre i l'esfera és la mateixa raó de les seves àrees, és a dir la de tres a dos[215]. També el procés de *cercletització* l'aplica en el cas de l'àrea de l'esfera i constata que "*l'àrea de l'esfera és igual a quatre vegades l'àrea del seu cercle màxim*"; o que "*la superfície d'un segment esfèric qualsevol és igual a un cercle que té de radi el segment traçat des del vèrtex del segment esfèric a un punt qualsevol de la circumferència base de dit* segment", o sigui que l'àrea del segment esfèric no depèn de la distància al centre de l'esfera, sinó que depèn de l'alçada o gruix del segment.

La rectificació, en contraposició a la quadratura, cubicatge, cercletització, triangulació.. és un procediment poc utilitzat i que apareix relacionat, sempre, amb el càlcul de la circumferència a partir del seu diàmetre o el que és el mateix, la recerca del valor de $\boldsymbol{\pi}$. Aquest, per un procés d'aproximació continuada, porta a la constatació de la circumferència inclou entre 3 i 4 vegades el diàmetre, més exactament entre 3,10 i 3,20, amb més precisió entre 3,14 i 3,15, ... Segons això, el valor de $\boldsymbol{\pi}$ resulta ser no racional, si bé tampoc és arrel quadrada d'altres enters. El nombre $\boldsymbol{\pi}$ o el "*segment* $\boldsymbol{\pi}$ " és real i no racional, però de naturalesa diferent a $\sqrt{\mathbf{2}}$ o al problema de la diagonal del quadrat, o a la diagonal del pentàgon, o a l'aresta del cub.

La resolució de rectificacions, quadratures i cubicatges són, sovint, plantejaments d'anàlisi bàsicament teòric i que no tenen poc a veure amb intents de resolucions empíriques de problemàtiques reals com havien estat les matemàtiques pre-gregues

c.4.- La formalització de la mesura

c.4.1.- Els Elements d'Euclides[216]

L'avenç matemàtic de les cultures antigues, la prehel· lènica i bona part de la clàssica grega, porta a dominar, cada vegada més, nous camps i conceptes, però la seva formalització i teorització no queda recollida com a conjunt de saber fins a Euclides, Això, no obstant, no vol dir que no hi haguessin intents anteriors sinó que aquest, és el que ha perviscut; encara que els *Diàlegs de Plató* podrien ser considerats com a un antecessor d'aquest intent de formalització. Tanmateix doncs, pot considerar-se que la teoria formal de la mesura s'inicia amb els *Elements d'Euclides*[217].

[215] Aquesta descoberta el portarà, segons Ciceró, a fer gravar en la làpida de la seva tomba, una representació d'una esfera inscrita en un cilindre circular recte d'alçada igual al diàmetre de l'esfera; grafisme que vol servir de simbolisme a la seva descoberta.

[216] El manuscrit trobat, més antic, data del s. X i va ésser descobert per F. Peyrard, durant l'ocupació napoleònica d'Itàlia; concretament fou descobert entre manuscrits diversos dipositats al Vaticà. Si bé sembla ser que amb anterioritat no es transcriviren íntegrament els Elements, si existeixen fragments dels s. III i IV que validen el descobert per Peypard. També Boeci n'incorpora alguns en la seva enciclopèdia i més tard Gerard de Crémone (1114-1187) i Campanus (1214-1254) en fan la traducció llatina complerta. També la cultura àrab, a través dels califes Al-Ma'-mun i Al-Mansor en el s. IX impulsen la traducció com les fetes per Abü Uthman i més tard les de Al-Asar Nasir-Eddin At Tusi (1201-1274).

[217] Es tractava d'un llibre de text de la universitat d'Alexandria i no és el compendi de tota la geometria, sinó que sembla ser un text introductori de la matemàtica elemental que inclou la teoria del nombres, la geometria sintètica referida a punts, rectes, pla, cercles i esferes i a l'àlgebra geomètrica.

L'aportació d'Euclides es recull en la recopilació dels 13 llibres que constitueixen els Elements. Els sis primers tracten de geometria plana elemental, els tres següents sobre teoria dels nombres, el desè sobre incommensurabilitat i els tres últims, principalment de geometria de sòlids. En ells es demostren 465 preposicions geomètriques i on de forma sistematitzada apareixen estructurats els postulats fonamentals de la teoria matemàtica i, per tant, també, la de la mesura[218]. Les definicions, axiomes i teories[219] que s'hi troben són descobertes i consecucions d'altres matemàtics, especialment d'Eudoxe i de Théétèto, o bé la concreció definitiva de demostracions que els seus predecessors havien vagament iniciat. Les possibilitats i enfocs matemàtics dels seus axiomes i teoremes estan imbuï ts, per tant, de les limitacions pitagòriques, platònica, aristotèliques, pàppica i arquimediana que amara tota la matemàtica grega, igual que succeeix amb les *Còniques* d'Apol· loni o en els treballs d'Arquímides i altres matemàtics.

En el conjunt de l'obra es detecta l'intent i esforç de diferenciar allò aritmètic del que és geomètric, deixant de banda la logística i 'estudi de les còniques i de les corbes planes superiors, ja que formaven part d'una matemàtica més elevada. Així per exemple, en el Llibre VI separa les proporcionalitats entre longituds rectilínies i semblances de figures, de la dels números enters (VII); en el Llibre V les planteja des d'un enfoc general intentant, a partir del raonament conceptual, transcendir del món visual a l'abstracció, al mateix temps que intenta captar el fons de la geometria i els seus objectius fonamentals, eliminat tot allò que n'és superflu i accessori.

La geometria euclidiana, com la geometria grega, s'estructura en base a l'existència de models i de vivències físiques o de generalització d'aquestes vivències. És una geometria que pensa i sistematitza els models físics més o menys idealitzats o regularitzats, però, també a nivell metodològic i de raonament[220] : "*Euclides introdueix els objectes geomètrics, és a dir els objectes dels que tracta o ha de tractar la geometria. Aquests objectes posseeixen, si pretenem que es comportin com a objectes geomètrics, certes característiques i propietats essencials, irrenunciables, que hem d'acceptar sense cap mena de dubte. Les propietats restants que satisfan els objectes geomètrics es dedueixen de la seva naturalesa geomètrica; és a dir, a partir del fet de ser objectes geomètrics podem establir mitjançant raonaments lògics sobre ells i de les seves propietats essencials. Aquest esquema -definicions, axiomes i teoremes- és l'esquema dels Elements d'Euclides ...*" (Pla, J. 1984)" .

---

[218]Matemàtica i magnituds eren per Euclides i contemporanis, quasi sinònims, com explicita Jean D'Hombres (1978) a *Nombre, mesure et continu. Epistemologie et historie,* en el seu capítol dedicat a la matemàtica grega.

[219]Diferencia entre axioma i postulat. Els primers són nocions o veritats comuns a totes les ciències i han de ser convincents per ells mateixos; els segons són menys evidents i no pressuposen l'acceptació immediata i es refereixen a una matèria determinada i concreta.

[220] Euclides procedeix, generalment, de la mateixa manera:

- *formulació del teorema* en general (*prótasis*)
- *exemplificació (ékthesis):* s'indica una figura o cas particular que es dibuixa al costat per comprendre el que diu el teorema.
- *constatació* del teorema de l'èkthesis.
- elaboració de *construccions auxiliars* (*kataskeué*).
- *demostració i validació* del teorema (*apódeixis*) en l'ékthesis fent ús dels axiomes, teoremes prèviament demostrats i de les propietats de la figura i de les construccions auxiliars.
- *formulació general del teorema.*

La influència de tot el corpus euclidià impregnà tota la matemàtica grega i tota la matemàtica posterior fins els nostres dies[221] però especialment, fins el s. XVII.

L'enfoc teòric de la mesura es troba, fonamentalment, en el Llibre V [222] on, sembla ser, que pretén fonamentar la comparació, la mesura de magnituds que intuï tivament es podien definir de contínues, sense referir-se a la semblança, ni a la continuï tat, ni a la irracionalitat numèrica; i, en els llibres X i XII s'hi situen aspectes de càlculs de superfície i volums. La conceptualització i definicions derivades són eminentment matemàtiques i presentades sota un prisma axiomàtic, estructurat en base a un profund pensament i discurs lògic. Cal destacar que ja en el primer llibre apareixen axiomes que porten implícita la teorització de la mesura, tal com:

1* .- *Dues coses iguals a una tercera són iguals entre elles.*
2* *.- Si a coses iguals afegim una mateixa cosa, el resultat és el mateix.*
3* *.- Si a coses iguals els hi traiem una mateixa magnitud, el que reste és el mateix*.
4*.*- Si a coses desiguals se'ls suma un mateix valor, el resultat manté la diferència.*
5* *.- El tot és major que les parts.*
6* *.- El doble, de valors iguals són iguals*
7* *.- La meitat de valors iguals són iguals.*
8*.- *Coses que coincideixen són iguals*[223]

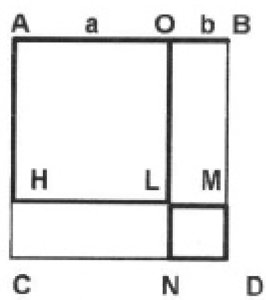
El mètode d'exhaustió d'Eudoxi, seguit per Euclides permet que "*tots els polígons regulars omplen el cercle que els circumscriu* (preposició 2, Llibre XII)"; *i així* "*si s'inscriu un quadrat a un cercle la seva àrea és més gran que la meitat del cercle; si sobre el quadrat es construeix un octògon regular, l'àrea afegida és més gran que la meitat de l'àrea del cercle no cobert per el quadrat; si es repeteix aquesta operació, s'arriba a aconseguir un polígon regular que la seva àrea difereix, per defecte, de la del cercle tan poc com vulguem*"[224].

Tot aquest enfoc porta en latència l'idea de "*límit*" i de que els polígons tendeixen al cercle. Euclides en el Llibre *XII* aplica l'exhaustió al llarg de les seves 18 preposicions sobre el mesurament de figures geomètriques, però també ho fa en el cas del volum dels cossos geomètrics. En la superfície, a partir de proporcionalitat aplicada a un procés de quadratura de cercles o d'equivalència entre àrees de cercles i quadrats, arriba a la consideració de que l'àrea dels cercles estan entre ells, amb una proporcionalitat, o amb la mateixa relació que l'existent entre els quadrats construï ts sobre els seus diàmetres. En el cas dels cossos geomètrics, sobretot en el Llibre XIII[225] que tracta, de manera exclusiva, de les propietats dels sòlids platònics, el procés demostratiu es fonamenta en inscriure cada sòlid dins una esfera tot intentant cercar la raó entre l'aresta i el diàmetre de l'esfera (preposicions 13 a 17). En el cas del tetràedre és **2/3** ; per l'octàedre **1/2** ; per l'hexàedre o cub **1/3** ; per l'icosàedre **(5-5/10)**, i (**5 –1)/ 2 -3)** pel dodecàedre.

[221] Una mostra palpable d'aquesta importància pot ser la concepció de Kant sobre el valor i significació de la matemàtica euclidiana "*Déu fa geometria d'acord amb els Elements d'Euclides*" o "*la geometria euclídea és inherent a la naturalesa del món físic*".
[222]Segons la major part d'estudiosos, deguts a Eudoxe d'Cnido (408-355?).
[223] Aquesta vuitena té una clara referència al que posteriorment s'ha anomenat "*postulat de De Zolt*" considerant l'equivalència des d'una perspectiva d'equicomponibilitat d'una figura, o que no és possible de recompondre les parts, per obtenir el polígon inicial, si dividim un polígon en parts i en traiem, tan sols una.
[224]Citat per Pla i Carreras
[225] S'atribueix a Teeteto

Els processos de quadriculació que aplica Euclides, fonamentats en Hipòcrates de Xios, es troben ja en els llibres III i IV[226] que tracten de la geometria del cercle. En la preposició III. 37, per exemple, explicita "*si des d'un punt exterior a una circumferència es traça una tangent i una secant, llavors el quadrat construït sobre la tangent és igual al rectangle contingut per la secant complerta i el seu segment exterior al cercle*".

Els processos de quadratura de les preposicions del Llibre II porten a l'àlgebra geomètrica, generadora, posteriorment, de l'àlgebra simbòlica i les preposicions 12 i 13 a l'esbós que anuncia la trigonometria i les preposicions que efectuen processos d'igualacions respecte quadrats i rectangles, porten a la creació d'esquemes geomètrics, o polígons còncaus que configuren la relació àuria i serveixen per crear l'*espiral àuria* (proposició 11 i també a VI.30). Una mostra d'aquests procediments d'igualació per quadratura en són per exemple[227] la preposició 4 *"si una línia recta es talla d'una forma arbitrària, llavors el quadrat construït sobre el total és igual als quadrats sobre els dos segments i dues vegades el rectangle contingut entre ambdós segments*".



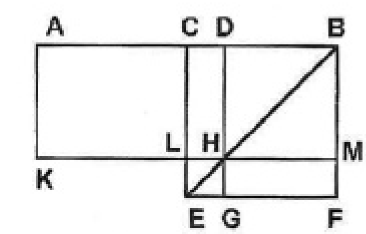
Donada la recta B si es talla pel punt O, de manera que **OA = a** i, **OB = b**, el quadrat sobre ABCD (a+b) integra el quadrat **OAHL = a^2** i el **LMND = b^2** a més dels rectangles **OBLM = a.b** i **l'HLCN = a.b**

Per tant,

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Esquema 16 : ***Preposició 4: Quadratura longituds de segments (Quadrat d'un binomi)***

o la 5 *"si tallem una línia recta en segments iguals i desiguals, llavors el rectangle contingut pels segments diferents del total, junt amb el quadrat construït sobre la línia recta entre els punts de tall és igual al quadrat sobre la meitat*"



Si AC = CB = a i CD = b, llavors (a+b) = AD i (a-b) = DB. Conseqüentment, (a+b).(a-b) = àrea del rectangle ADHK.

Ja que CDHL = HMFG, resulta que ADHK = CBML + MHGF, mancant, per tant, el quadrat LHEG = b^2 per tal de ser igual al quadrat BCEF = a^2.

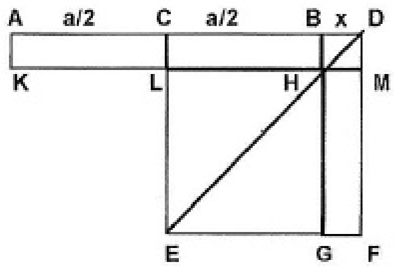
D'aquí:

$$a^2 = b^2 + (a+b).(a-b)$$

Esquema 17 : ***Preposició 5. Quadratura longitud de segments: Suma per diferència d'un binomi***

o la 6 que en realitat és una variació del 4: "*si es tallen en dues parts iguals una línia recta i se li afegeix una altra recta, llavors el rectangle contingut pel total amb la línia recta afegida i amb el quadrat construït sobre la meitat, és igual al quadrat construït sobre la línia recta formada per la meitat i la línia recta afegida*"

[226] Sembla ser que fonamentats en Hipòcrates de Xios.
[227] Citats per Boyer que els extreu de Heath, T.L. (1956). *The thirteen Books of Euclid's Elements*.



Considerant **a =AB** , **x = BD =AK** i b= a/2 + x
el rectangle **ADMK = (a+x).x** El quadrat CDFE, (costat = 1/2 AB + x) és igual al rectangle BCLH i el quadrat BDHM, més el rectangle HMFG igual a BCLH, per tant a ACLK , o sigui que entre els dos són el rectangle ABHK, més el quadrat LHGE que és el quadrat construït sobre a/2.

Per tant si: a/2 + x = b

$$\mathbf{b^2 = ax + x^2 + (a/2)^2}$$

Esquema 18 : ***Proposició 6. Quadratura de segments.***

Els diagrames que empra Euclides seran peça clau pel desenvolupament de l'àlgebra grega, ja que s'utilitzaran moltíssim per part dels algebristes grecs per fer les seves demostracions. La quadratura resulta ser per la deducció euclidiana un procediment d'extraordinari poder en la resolució geomètrica-aritmètica-algebraica, ús no tan ampli en el cas del procediments de cubicatge o d'esfericitat i molt menys en la rectificació.

c.4.2.- El retorn a la praxis

La visió geomètrica de la matemàtica grega i l'enfoc d'anàlisi deductiu teòric amb què s'estructura, té en determinats moments i a través d'alguns matemàtics com Herò d'Alexandria (s.I d.C.) o amb Diofant (s.III d.C.), un retorn a les arrels pragmàtiques tot centrant la seva concepció matemàtica en el valor del número o de la mesura.

Diofant amb la seva *Aritmètica*[228] presenta el seu recull matemàtic[229] que tindrà una gran incidència en l'evolució conceptual de la mesura, degut a l'admissió dels números negatius per part dels algebristes del renaixement italià i per tant, l'obertura a les magnituds relatives i intensives que poden ser positives i negatives.

Herò d'Alexandria[230] (s.I, d.C.) recull, en la seva obra "*Mètrica*", l'herència "*calculant i mesurant*" de la matemàtica utilitària babilònica i egípcia; aportació que si bé incideix

[228] Té uns cent trenta problemes numèrics que plantegen situacions algebraiques de primer, segon, tercer i fins i tot quart grau; però al no disposar de mètode algebraic es treballa amb recursos d'ingeni amb números naturals i racionals positius. A la introducció –senyala que es composa de 13 llibres, encara només se'n coneixen sis- remarca les característiques del número i les seves funcionalitats algorísmiques: "*Ja que sé, honorable Dionís que vols aprendre a resoldre problemes numèrics, he emprés la tasca d'exposar la naturalesa i el poder dels números.... saps que els números són un conjunt d'unitats que s'estenen fins a l'infinit. Entre ells hi ha els quadrats, que s'obtenen multiplicant un número per ell mateix, els cubs.... els biquadrats... És ben sabut que la combinació de molts problemes aritmètics resulta de la suma, la diferència, el producte i el quocient d'aquests números i de les relacions que tenen amb les seves pròpies arrels, les quals se resolen segons les indicacions que et daré...*". També determina explícitament les regles de càlcul i el valors dels signes o la transposició de termes "*el producte de lo mancat per lo mancat és positiu; el de lo mancat per lo positiu és mancat... Si en un problema en resulten expressions idèntiques, però no equivalents, cal restar a un i altre costat les semblances de les semblances fins a aconseguir una sola expressió; i si es presenten expressions negatives a un i altre costat, afegir fins aconseguir que siguin positives en un i altre cantó i llavors restar les semblances de les semblances fins a obtenir una sola expressió a un i altre costat..".*

[229] La seva influència posterior va ser quasi nul· la fins a la recuperació de l'obra i el seu mètode, per part dels àrabs en el s.IX evolucionant cap a l'àlgebra (*Hisab al-jabr W'al-muqalabah "Càlcul per restauració i reducció"* d'Abuabdala Mohammad ibn Musa al-Khuwarizmi (ca.825)) on es presenten les dues principals operacions per resoldre equacions: *"restauració*" o pas de termes negatius d'un membre de l'equació a l'altre i *"reducció*" o fusió de termes semblants en un únic terme.

[230] És el seu mètode per calcular l'àrea d'un triangle a partir dels costats i el valor del semiperímetre (s), o fórmula d'Heron, el que més ha transcendit fins avui: ***A = ‘ (s. (s-a). (s-b).(s-c)***

en tota la matemàtica, ho fa de manera especial en el camp de la mesura. De la mateixa manera que en el camp numèric s'havia diferenciat aritmètica i *logística* o domini de les tècniques de computació; en el camp geomètric passà el mateix i així la geometria s'anà diferenciant entre l'estudi racional i la pràctica tecnològica o *geodèsia* que seria la direccionalitat de la matemàtica pragmàtica.

A la *Mètrica*, Herò, inclou molt poques demostracions i, bàsicament, planteja exemples numèrics de mesura de longituds, àrees i volums, si bé presentant diferents maneres per calcular-les. Amplia la proposta no només al món de la regularitat sinó també en casos no regulars. Per l'avenç de la concepció de la mesura cal destacar l'aportació del què representà el *principi de la mínima distància,* principi derivat d'Aristòtil i segons el qual la naturalesa respon sempre de la forma més simple i econòmica. Això ho aplica en la igualació entre l'angle de reflexió i el d'incidència en el llibre *Catóptrica* o estudi de la reflexió*.* Herò en els seus resultats no diferencia entre resultats exactes i resultats aproximats. La seva influència en la matemàtica de Roma, serà molt important i en ell, es fonamentarà, prioritàriament, el procés d'agrimensionament de l'imperi romà[231] projectat per Juli César i realitzat per Cèsar August; incidència que es perllongarà fins el Renaixement.

Herò, és el primer que intenta explicitar el concepte de mesura i del seu aprenentatge, així escriu[232]: "*Intentarem començar amb la mesura de les figures planes entenent per aquestes totes les superfícies còncaves i convexes, perquè tota superfície necessita solament de dues dimensions. Quan aquesta superfície limita amb altre superfície de costat recte i aixecada en angle recte i així tancar* l'espai. *S'anomena cub al quadrat quan una superfície quadrada que te per costat la longitud del cub; de la mateixa manera s'anomena peu al quadrat quan una superfície quadrada que la longitud del costat és d'un peu. .... S'ha d'indicar per tota mesura peu, cub o el seu fraccionament, farem servir la indicació numèrica, la unitat, perquè aquest -el valor numèric- l'apliquem a qualsevol unitat de mesura*".

La rectificació i la seva transcendència a l'actualitat

" *La "quadratura del cercle" havia desafiat els matemàtics grecs. Un altre aspecte d'aquest problema, tal vegada no tan ben conegut però d'igual importància és la "rectificació del cercle". Consisteix en la determinació de la longitud de la circumferència d'un cercle en funció de la longitud del radi. Malgrat que mai varen vèncer al cercle, domaren, parcialment, a la paràbola. Aconseguiren amb mètodes profundament formosos, la quadratura de la paràbola però no varen poder rectificar-la".*[233]

Deixant de banda els processos de quadratures i cubicatges, que seran el processos resolutoris bàsics fins al XVII, el seu interès no decau com n'és un bon exemple el fet de que Torricelli en la seva obra *Sobre la quadratura de la paràbola,* planteja vint-i-una solucions diferents a partir d'indivisibles i pel mètode d'exhaustió. El pas a la consecució dels límits estava plantejat i iniciat*.*

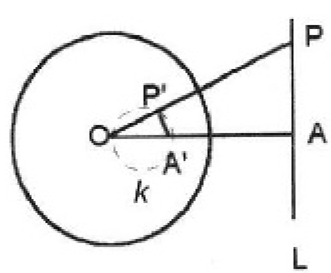
En referència a la rectificació cal considerar que la introducció de noves corbes des de Descartes i bàsicament a partir de la introducció del seu axioma "*dues o més rectes o corbes, poden moure's una sobre l'altra, determinant per mitjà de les seves interseccions altres noves corbes*" procediment ja utilitzat amb anterioritat, per exemple, pels geòmetres grecs

[231] Loria, G. (1914): *La scienze esatte nell'antica Grecia*. Hoepli. Milano. Citat per S. Maracchia.
[232] Erone - *La Metrica*. Vol IV (p.74). Citat per S. Maracchia. Extret de Heiberg, J.L; Teubener, L.(1912) *Heronis Alexandrini, Opera quae supersunt omnia.*
[233] Kasner E. i Newman, J. (1972) (p.261)

o per Galileo, el porta a la classificació d'aquestes en *geomètriques i mecàniques*, o en termes més actualitzats, en *algebraiques i transcendents ,* situació que porta a un desvetllament d'anàlisi pels processos de rectificació.

Descartes, seguint a Aristòtil i Averroes considera que cap corba algebraica pot ésser rectificada d'una forma totalment exacta *"La geometria no hauria d'incloure línies* (es a dir corbes) *que són com cordes, en el sentit de que són a vegades rectes i a vegades corbes, ja que les raons entre línies rectes i corbes no són conegudes i crec que no poden arribar a ser descobertes per la ment humana, i per tant, cap conclusió que es fonamenti en aquests raonaments pot arribar a ser acceptada com a rigorosa i exacta*"[234]. No obstant, fruit de la discussió plantejada a conseqüència de la caiguda d'un cos a la Terra en rotació, va portar Descartes a la descoberta, l'any 1638, de l'*espiral equiangular o logarítmica* que de no haver mantingut el seu posicionament de no rectificació de les corbes mecàniques, hagués avançat a la rectificació que l'any 1645 va efectuar Torricelli o Roberval. Boyer, al respecte diu: *"Torricelli va demostrar utilitzant els mètodes infinitesimals que havia après d'Arquímides, Galileo, i Cavallieri, que la longitud total de l'espiral logarítmica des de = 0 en darrera segons s'enrotlla asintòticament en torn al pol O, és exactament igual a la longitud de la tangent polar PT corresponent al punt P per al que = 0*". Roberval i Torricelli, demostraren independentment que la longitud de la primera volta de l'espiral r = a és igual a la longitud de la paràbola $x^2 = 2\,ay$ des d' x = 0 a x = 2πa. Fermat va introduir espirals d'ordre superior r^n = a i va comparar els arcs d'aquestes corbes amb les de les seves paràboles d'ordre superior $x^{n-1} = 2ay$.

Aquest processos són en realitat fenòmens de transformacions geomètriques, enteses com a : "*transformació o representació del pla en sí mateix que assigna a cada punt P del pla un altre punt P', anomenat imatge de P en la transformació; el punt P s'anomena antecedent de P'* "[235] Són exemples de transformació, les simetries, les translacions, els girs i rotacions i els *moviments rígids*[236] del pla. Una tipologia especial de transformacions són les *inversions respecte a la circumferència o reflexions circulars*[237] de les quals l'aprotitament dels moviments de trasmisió de les rodes o de les bieles de qualsevol motor en són un exemple pragmàtic. A grans trets, la fonamentació matemàtica de la inversió es concreta en:



Sigui C una circumferència. O és el centre d'inversió i r el radi.
Es defineix el punt P' de la recta OP com a imatge de P quan es compleix que: **OP . OP' = r²**
Els punts P i P' són els punts inversos respecte a C. Per tant, si P és l'invers de P'; P' és l'invers de P.
En una inversió s'intercanvia la relació interior-exterior i així
Si **OP r** ⇒ **OP' r** i a la inversa.
Per tant, si P s'aproxima a O, P' s'allunya cada vegada més; conseqüentment O correspon al punt infinit de la inversió. Cada punt del pla té una imatge i solament una.
Si **OP' . OP = OA' . OA = r²** ⇒ **OA' / OP' = OP / OA**.
Els únics punts que es mantenen fixos en la inversió són els de C.

Esquema 19 : *Reflexió circular o inversió respecte la circumferència*

---

[234] Citat per Boyer (p.432)
[235] Courant i Robbins (p.153**)**
[236] Moviments compostos de rotacions i translacions
[237] Representen amb una certa aproximació, la relació entre l'objecte i la imatge en una reflexió sobre un mirall circular.

La inversió transforma rectes i circumferències en circumferències i rectes, permeten que:

a).- Una recta que passa per O es transforma en una recta que passa per O.
b).- Una recta que no passa per O es transforma en una circumferència que passa per O
c).- Una circumferència que passa per O es transforma en una recta que no passa per O
d).- Una circumferència que no passa per O es transforma en una circumferència que no passa per O.

En el primer cas, la proposició és òbvia ja que tot punt té un altre punt com a imatge i per tant la recta es transforma en ella mateixa. En els supòsits *b i c,* l'explicació queda palesa en la gràfica anterior i són aquests casos els que interessen, especialment, en la present recerca.

Tots aquests processos d'inversió han interessat per aconseguir-ne la seva representació i per tant les possibilitats de la seva construcció han estat un objectiu matemàtic al llarg del temps. Les tècniques d'aquest procés constructiu han variat i quan les construccions geomètriques evolucionaren obrint pas a les mecàniques, portaren una important obertura i ampliació en la direccionalitat i interès per a la rectificació degut a la gran implementació de corbes que aquest procediment va generar.

Les corbes mecàniques varen ampliar les figures construïbles ja iniciades en la matemàtica geomètrica grega, especialment en el cas de les *cicloides*[238], les quals utilitzà Ptolomeu (200 a.C.) per descriure el moviment dels planetes. Variacions d'elles seran les *hipocicloides i les epicicloides*[239]. D'altres corbes interessants a tenir en compte, a part de les còniques (el· lipse, hipèrbola, paràbola) "*projeccions d'una circumferència sobre un pla",* ja metritzades des d'Apoloni, o les quadràtiques, seran les formades per les *simetries reiteratives* planes o les circulars.

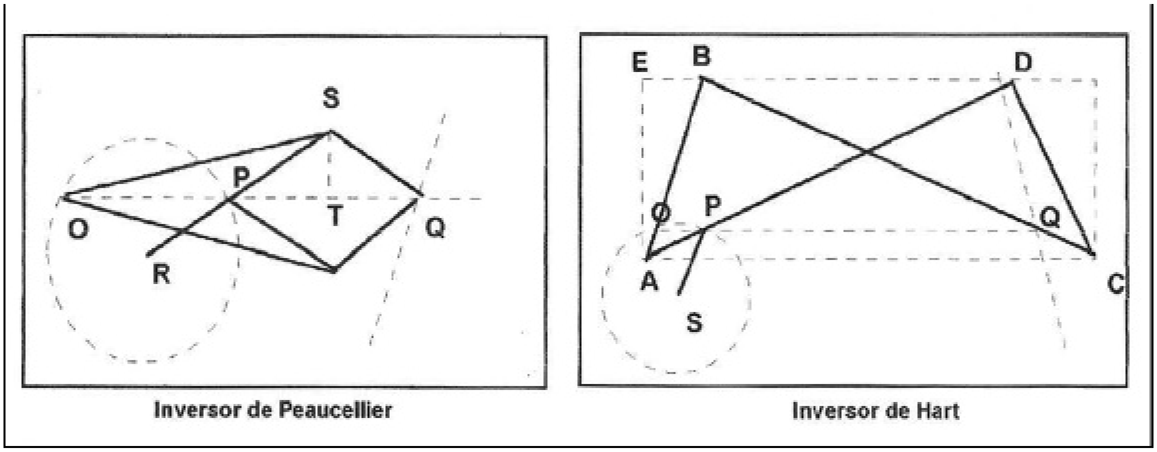
No hi ha dubte que l'estudi dels recorreguts i les distàncies ha estat un element important vers l'interès de les rectificacions o les interrelacions entre les corbes i el segment rectilini o com transformar moviments giratoris en rectilinis o a la inversa. Aquesta direccionalitat d'interrelació de moviments, ha generat la construcció d'estris mecànics simples o *connexions*, que permeten representar les corbes a través d'un conjunt de llistons units per articulacions mòbils de manera que el sistema té la possibilitat de que algun dels seus punts pot descriure la corba en qüestió; el cas més senzill seria el compàs.

Les connexions són la base de construcció de màquines que fonamenten la seva acció en el *principi de la inversió* amb l'objectiu d'aconseguir que articulacions mòbils generin una transformació de moviment. N'és un bon exemple les connexions que utilitzaven els grecs per a la duplicació del cub o per a les còniques; o, molt més recents, l'aplicació del "*paral· lelogram* de Wat*"* a la seva màquina de vapor que permet resoldre la unió del pistó de la màquina amb un punt d'un volant de manera que la rotació fes moure el pistó en línia recta, connexió perfeccionada per Peaucellier (1864); o, l'inversor de Hart. Totes elles tenen per objectiu la transformació de la rotació en moviment rectilini.

---

[238]Sèrie d'arcs que ses recolzen sobre una recta. La formació és el recorregut que faria un punt de la circumferència al desplaçar-se sobre el pla

[239]Cicloides formats al recórrer una circumferència dins o fora d'una altra circumferència.



Esquema 20 : ***Inversors de Peaucellier i d' Hart***

El concepte de quadratura també, actualment té una significació espacial lligada a la superfície esfèrica degut a l'estereorradià: "*angle sòlid que, tenint el seu vèrtex en el centre d'una esfera, delimita sobre la superfície esfèrica corresponent un àrea igual a la d'un quadrat que té com a costat el radi de l'esfera*"[240].

La rectificació de la circumferència i el càlcul de π

L'interès del valor π fou únicament grec, sinó que com s'ha exposat també ho fou pels egipcis i babilònics i, igualment per les cultures índies i xineses sinó que es mantingué al llarg dels segles. Una breu història d'aquesta recerca es pot resumir en la taula següent on es recullen alguns dels càlculs més transcendentals:

Data	Document i /o Matemàtic	País	Procediment	Valor aprox.
1650 a.C.	Papir d'Ahmés	Egipte	Igualació entre un cercle de 9 unitats i un quadrat de 8	3,16
1600 a.C.	Tauleta de Susa	Babilònia	Igualació entre el perímetre d'un hexàgon regular i un cercle	3, 7, 303,125
500 a.C.	Salbasutras Baudhayana	Índia	Igualació entre quadrat i cercle. costat q.= d (1-28/(8x29) - 1/(6x8x29) + 1/(6x8x28x8))	3,09
250 a.C.	Arquímides	Grècia	Perímetres de polígons inscrits i circumscrits de 12, 24, 48 i 96 costats . 223/71 < π < 22/7	3,14
500	Aryabhata	Índia	Càlcul del perímetre d'un polígon de 384 costats.	3,1416
150 a.C.	Usmavati	Índia	Inscrivint a un cercle un hexàgon, després un dodecàgon i aplicant el teorema de Pitàgores, el valor obtingut és arrel de 10	3,16

[240] Recomanacions ISO, Resolució 31, 1part, 2ª edició, desembre 1965.

150 d.C.	Ptolomeo	Grècia	Valor de la corda de 1/20 o costat del polígon de 720 costats en una circumferència de 60 unitats de radi. 6.(0, 31'25") = 377/120	3,1416
260 d.C.	Liu Hui	Xina	Aplicació successiva del teorema de Pitàgores en polígons de 6,12, 24... 96 costats.	314.1024 < Àrea < 314,27043,14
480	Tsu Chung Chih	Xina	Semblant a Liu. Arriba fins al polígon de 24.576 costats.	3,1415926 < π < 3,1415927
1.400	Madhava	Índia	Desenvolupament de sèrie infinita	3.14159265359
1.429	Al-Kashi	Pèrsia	Polígon de $3x2^{28}$	3.141592653597932
1.579	François Viète	França	Polígon de 393216 costats	3,14159654
1616-1703	John Wallis	Anglaterra	Límit de successió de productes pi/2=2/1.2/3.4/3.4/5.6/5.6/7...	2n/2n-1. 2n/2n+1
S.XVII	Leibnitz	Alemanya	Límit de successió de sumes	pi/4= 1-1/3+1/5-1/7+ 1/11+ 1/13-1-1/15+ ..
S.XVIII	Euler	Suïssa	Límit successió de sumes parcials	Pi/4=1-1/3+1/5-1/7+... $(-1)^n$ 1/2n+1
S.XVIII	Buffon	França	Probabilitat (problema agulla)	2/pi
1.901	Lazzerini	Itàlia	Probabilitat (Idem anterior)	3.1415929

Taula 2 : Càlculs del valor de p

El valor de π, no únicament ha estat calculat com a relació de la circumferència amb el seu diàmetre, sinó que a més té la significació de límit dins una sèrie infinita i com a relacions amb altres camps matemàtics com pot ser el de valors de probabilitat[241].

La història d'aquesta recerca pot diferenciar-se, a nivell de procediment matemàtic emprat, en dues direccionalitats:

a.- *mètode d'exhaustió o d'interpolació* a través del qual i per processos iteratius d'aproximació es va cercant l'aproximació del perímetre d'un polígon regular a la circumferència. Aquesta direccionalitat es fa tant des de la perspectiva dels inscrits (egipcis, babilònics, Umasvati, Tsu Chung, Aryabhata, Al-Kashi, Viète,...), com circumscrits o els dos al mateix temps (Arquímides). La seva fonamentació és geomètrica-empírica.

[241]August de Morgan *a Budget of Paradoxes* -citat per Kasner (p.73)- involucra pi en la fórmula de càlcul de la probabilitat de sobrevivència de les persones al termini d'un temps determinat.

b.- *mètode analític* a partir d'un procés de seriació infinita convergent (Madhava, Wallis, Euler, Buffon, Lazzerini...) que porta als càlculs de límits. En aquesta direcció l'intent de cercar cada vegada més precisió ha derivat a aconseguir sèries convergents més ràpides i a portat a resultats com els de l'alemany Ludolf van Ceulen al 1596 que aproxima a 35 decimals[242] en front dels 10 de Viète, o Machin (1680-1752) ho fa amb 50 i Abraham Sharp al 1699 amb 71; Dase al 1824 n'aconsegueix 200; Ritcher al 1854 fins a 500 i al 1873, l'anglès Shanks en determina 707. Avui les noves tecnologies permeten aproximacions de milers de decimals.

Respecte a l'interès per $\boldsymbol{\pi}$, Kasner i Newman (p. 73) manifesten: "*Hi ha dues raons per justificar-ho. Primera: els matemàtics tenien l'esperança de que, estudiant sèries infinites, podrien trobar alguna resposta sobre la seva naturalesa transcendent. Segona: el fet de que* $\boldsymbol{\pi}$ *, una raó purament geomètrica podia obtenir-se de tantes relacions aritmètiques -de sèries infinites amb poca o cap relació aparent amb la geometria- era una indeterminada font d'admiració i estímul a l'activitat matemàtica".*

La quadratura del cercle i el valor $\boldsymbol{\pi}$ han estat doncs, íntimament interrelacionats i així la solució a la quadratura implica la construcció d'un quadrat de longitud □$\boldsymbol{\pi}$. Aquest segment solament és construï ble si, i solament si $\boldsymbol{\pi}$, és construï ble. La base d'aquesta demostració es fonamenta com senyala Courant i Robbins (1979, p.152) en: "... *donada la caracterització dels nombres construïbles, es pot demostrar la impossibilitat de quadrar el cercle provant que* ***p*** *no pot estar contingut en cap cos* F_k *que pugui deduir-se del cos racional* F_O *mitjançant successives adjuncions d'arrels quadrades. Donat que tots els elements d'aquest cos són nombres algebraics, és a dir, números que satisfan equacions algebraiques de coeficient enter, solament cal provar que* ***p*** *és algebraic, és a dir, que és transcendent*"; demostració efectuada per F. Lindemann (1882) seguint la tècnica creada per Charles Hermite (1822-1905) per demostrar la transcendència d' "***e***", prova la transcendència irracionalitat de $\boldsymbol{\pi}$**,** o sigui, que no pot ser l'arrel d'una equació algebraica de coeficients enters. No és expressable mitjançant operacions racionals i per extracció d'arrels quadrades, i donat que únicament a través d'aquestes operacions es pot aconseguir la construcció geomètrica amb regla i compàs, resulta, per tant, la impossibilitat de la quadratura del cercle.

[242] El valor de pi és conegut a Alemanya com a número ludolfià en el seu honor. Valor que es va escriure com a epitafi per expressa voluntat seva.