UNIVERSIDAD AUTONOMA DE BARCELONA
Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales
Programa de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas

Tesis Doctoral

El proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica

Autor Abraham Cuesta Borges

Director: Dr. Jordi Deulofeu Piquet

Bellaterrra, Junio de 2007

A mi querida familia:
mis queridos B. Mayra y Jordi

AGRADECIMIENTOS

Deseo hacer un reconocimiento a las personas, sin cuyo apoyo no hubiera podido llevar a cabo esta investigación.

En primer lugar al Dr Jordi Deulofeu Piquet, no sólo por aceptar dirigir mis trabajos desde el inicio del doctorado, también por brindarme sus conocimientos y valiosas ideas, por el apoyo permanente y paciencia, y sobre todo por su generosidad y amistad; muchas gracias.

A los estudiantes de la generación que inicia estudios en la Facultad de Economía en agosto de 2006 y que participan en el desarrollo de la innovación educativa, en especial a los estudiantes que trabajaron en mi despacho y me permitieron obtener los datos más relevantes para la investigación.

Al colectivo de profesores del Departamento de Métodos Cuantitativos de la Facultad de Economía, por la paciencia en escuchar y valorar las ideas y propuestas de mejora en la enseñanza.

Muy especial, mi agradecimiento al profesor Marco Antonio Méndez Salazar, quien siempre fue mi más cercano colaborador, por sus atinadas ideas y críticas sobre la investigación y la innovación didáctica que se propone; también por su generosidad en dirigir el desarrollo de la unidad didáctica con el grupo de estudiantes.

A todos los profesores que participan en el Doctorado en Didáctica de la Matemática, por sus valiosos conocimientos.

Es evidente que no puedo olvidar el principal apoyo recibido, el de mi familia. Mi especial agradecimiento por la comprensión, los consejos y ayuda en la redacción final de este trabajo.

INDICE

INTRODUCCIÓN

La presente memoria representa una versión escrita del trabajo de tesis doctoral "*El proceso de aprendizaje de los conceptos* de *función y extremo en estudiantes de economía: análisis de una innovación didáctica"*, que se encuentra inscrito en el Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales de la Universidad Autónoma de Barcelona.

La investigación que se realiza constituye un acercamiento, desde la didáctica de las matemáticas, a la problemática que plantea la línea de investigación: "*Problemas en la comprensión y utilización de la modelación matemática en la economía",* la cual se desarrolla con el concurso del Programa de Mejoramiento del Profesorado (PROMEP) del Gobierno de México. Se genera como un intento, del sustentante, por estudiar los problemas relativos al proceso de enseñanza - aprendizaje de las matemáticas para los estudiantes de la Licenciatura en Economía de la Universidad Veracruzana (UV), México.

En la investigación sería factible examinar muchos aspectos diferentes que están vinculados al proceso de aprendizaje; pero uno de ellos, en especial, tiene que ver con la adquisición de conceptos del análisis que se relacionan de manera directa e influyen en la comprensión de la propia teoría económica. En esta relación, entre la matemática y la ciencia económica, uno de los conceptos más importantes es el de función y extremo de una función; de su comprensión depende que los estudiantes adquieran competencias para plantear y resolver problemas de optimización en economía.

Lograr este propósito exige que la enseñanza del cálculo se conciba como una organización conceptual que integre el aprendizaje de los conceptos de función, sus formas de representación y las características de su comportamiento, incluida la existencia de extremos, en un conjunto de competencias que propicien el desarrollo de capacidades cognitivas del estudiante, que le permita abordar y analizar la teoría económica y, directamente, la realidad socioeconómica.

Desde esta perspectiva, la investigación asume por objetivo general:

"*Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en las condiciones del Sistema Educativo de la Facultad de Economía de la UV, a través de la realización y evaluación de una unidad didáctica que incida en la creación de significados por parte de los estudiantes"*.

Para cumplir con este objetivo, y como parte del proceso de investigación, se diseña, y aplica a un grupo de estudiantes de nuevo ingreso a la Facultad de Economía, la unidad didáctica: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función"*. La finalidad de esta propuesta de organización metodológica, a diferencia de lo que se establece en el marco curricular vigente, consiste en concretar objetivos específicos de enseñanza de estos conceptos, así como en diseñar una secuencia de enseñanza que incida en la creación de significados por parte de los estudiantes. Ello presupone un tipo de enseñanza que estimule el proceso de aprendizaje y que coadyuve, en alguna medida, a modificar las formas de intervención del profesor y de trabajo de los estudiantes.

La investigación toma en consideración las necesidades propias del contexto en que se desarrolla. La Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana se halla inmersa en un proceso de cambio hacia un Modelo Educativo Integral Flexible (MEIF, http://www.uv.mx/ecolar/resultados/meif), con el propósito de transformar la enseñanza tradicional, centrada en el docente, en una entidad activa donde el estudiante debe ser gestor de su propio desarrollo y formación integral: intelectual, humana, social y profesional. En este sentido, la investigación presta especial atención a la experiencia y criterios del colectivo de profesores de matemática de la Facultad de Economía, quienes trabajan en la introducción de una nueva experiencia educativa: "*Introducción a los Métodos Cuantitativos",* cuyo propósito es que el estudiante, antes de comenzar el curso de Cálculo I, adquiera habilidades elementales de cálculo numérico–algebraico, destrezas y aptitudes para la representación gráfica de relaciones cuantitativas, así como capacidad de razonamiento abstracto para el planteamiento y resolución de problemas matemáticos.

Aprovechando las condiciones del contexto en que desarrolla, la investigación tiene la finalidad de contribuir en varios aspectos de la práctica educativa, entre los que destacan: el papel del profesor, la planificación y gestión de los cursos, la metodología de enseñanza y el papel del estudiante como constructor activo de su propio conocimiento. Se orienta dentro del paradigma constructivista; parte de las ideas, las dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función, con el objeto de describir e interpretar el comportamiento durante y después de aplicar la unidad didáctica.

Para cumplir esta tarea se asume un estudio descriptivo de casos, en un ambiente de aprendizaje diferente al sistema de enseñanza tradicional, que es de naturaleza cualitativa y se compone de tres etapas:

Etapa I Diseño del Experimento: Su propósito es diseñar, planificar y secuenciar todas las actividades de la unidad didáctica. En ella se precisan los contenidos y su secuenciación, las tareas de enseñanza y los objetivos de aprendizaje, el material didáctico (guía) de aprendizaje, así como las orientaciones de carácter metodológico y la forma de evaluación.

Etapa II: Aplicación y Experimentación: Parte de la aplicación de la experiencia educativa, para evaluar el proceso de aprendizaje de los de conceptos función y extremo de una función.

Etapa III: Análisis del Proceso de Aprendizaje: Su objetivo consiste en la descripción, interpretación y análisis del aprendizaje, durante y después de aplicar la unidad didáctica. En esta etapa se evalúa, tanto el proceso de aprendizaje como la propia unidad didáctica.

Debe subrayarse que un referente inmediato de la presente investigación lo constituye el estudio diagnóstico "*Dificultades de los Estudiantes de Economía en el Aprendizaje del Concepto de Extremo de una Función"*. Los resultados y conclusiones de este estudio, cuya memoria escrita se halla en Cuesta (2005), sirvieron de base para el diseño y desarrollo de la investigación, por las razones que a continuación se exponen:

El mencionado estudio diagnóstico se centró únicamente en el estudio y análisis del aprendizaje del concepto de extremo de una función. Sus objetivos fueron: (i) estudiar y comprender las dificultades que se ponen de manifiesto previo al estudio del concepto de extremo de una función en la Facultad de Economía, y (ii) analizar las dificultades en la comprensión del concepto de extremo, que se manifiestan en una etapa posterior a su estudio dentro de la Facultad.

Sin embargo los resultados demostraron, entre otros, tres aspectos a tener en cuenta en el diseño y desarrollo de la presente investigación:

1. En primer lugar, se pudo constatar que las dificultades en el aprendizaje del concepto de extremo derivan del conocimiento que se tiene sobre el concepto de función, hasta el punto que la propia definición de función constituye una dificultad en el aprendizaje de extremo.

2. En segundo lugar, se ponen de manifiesto otras dificultades, vinculadas a la comprensión de los conceptos de función y extremo de una función, que muestran que en los niveles de enseñanza previos a la Universidad se ha trabajado poco, o de manera no significativa, con lenguajes de tipo algebraico, gráfico y geométrico.

3. En tercer lugar, se pudo constatar que muchas de las dificultades, para comprender los conceptos de función y extremo de una función, permanecen incluso después que el estudiante cursó y aprobó los contenidos teóricos del curso de Cálculo I en la Facultad de Economía.

El estudio diagnóstico da constancia de la existencia de dificultades en la comprensión de los conceptos de función y extremo de una función, en virtud de que existen elementos del conocimiento previo del estudiante, matemáticos o no, que ciertamente dificultan la comprensión del concepto de función y, como consecuencia de ello, del concepto de extremo de una función.

Otro elemento, no menos importante para la investigación es el referido al nivel de preparación de los estudiantes que ingresan a la Facultad de Economía. El nivel de conocimiento, Cuesta (2005), de muchos estudiantes que inician estudios en esta

Institución, resulta ser insuficiente para acceder a las complejas estructuras y relaciones que exige el estudio de las funciones, sus distintos sistemas de representación, como el lenguaje gráfico o el algebraico, y los numerosos subconceptos asociados, en particular el concepto de extremo de una función.

En estas condiciones difícilmente podríamos indagar respecto a las dificultades específicas de los estudiantes, en el aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función, si no se modifica en alguna medida el escenario de la enseñanza. Ésta es la principal razón de proponer la investigación en las condiciones de un nuevo entorno de aprendizaje.

La investigación en didáctica de las matemáticas ha mostrado que, si bien existen dificultades en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, es posible concebir nuevos ámbitos de enseñanza que estimulen el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En particular, el diseño y aplicación de unidades didácticas constituye un campo fértil, que permite formular y comprobar conjeturas, elaborar estrategias de enseñanza y, como consecuencia, identificar nuevos recursos y métodos de enseñanza.

<u>Estructura de la memoria</u>

La memoria está organizada en cinco capítulos: el problema de investigación, marco teórico, metodología de investigación, análisis de resultados y conclusiones.

El capítulo 1 "Problema de investigación" comienza con algunas ideas respecto a la manera en que se genera y concibe el problema de investigación antes de comenzar los estudios de doctorado; propósito que tiene una primera concreción en el proyecto del estudio diagnóstico de la investigación. Se resumen los aspectos más importantes de este estudio, de cuyos resultados y conclusiones se obtienen las principales ideas que sustentan el planteamiento de nuestro problema de investigación, en especial, las relacionadas con la necesidad de diseñar e implementar una unidad que sirviera de marco de estudio para analizar el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

De este modo, el problema se plantea como sigue: *¿Es posible diseñar e implementar una unidad didáctica, en torno a los conceptos de función y extremo de una función, que estimule el proceso de aprendizaje de los estudiantes? ¿Cuáles son los resultados de su aplicación?*

Este problema se apoya en dos hipótesis del trabajo de investigación; la primera se refiere a la posibilidad de determinar una secuencia de aprendizaje que estimule el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función, incluso en condiciones de un bajo nivel de preparación de los estudiantes. La segunda se refiere a la posibilidad de organizar los contenidos matemáticos desde el concepto de función, las características de su comportamiento y sus formas de representación hasta llegar al concepto de extremo de una función. Finalmente, se desglosa el objetivo general de investigación en objetivos particulares, de innovación y de investigación.

El capítulo 2 "Marco teórico" resume las principales referencias teóricas del trabajo de investigación, comenzando por los diferentes sistemas de representación de los conceptos matemáticos relacionados con el proceso de aprendizaje, en especial, aquellas que hacen referencia a las representaciones internas y externas del conocimiento matemático. Se hace referencia a las principales aportaciones teóricas de la línea de investigación conocida como Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), en especial los trabajos de Tall y Vinner sobre la formación de conceptos, y en particular la distinción entre definición conceptual y esquema conceptual, así como otros constructos teóricos que están vinculados a los procesos cognitivos del aprendizaje.

Se abordan las principales ideas teóricas sobre los obstáculos y dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos y un resumen de los principales hallazgos científicos sobre obstáculos y dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje del concepto de función. El marco teórico finaliza con algunas ideas relacionadas con el diseño y desarrollo de unidades didácticas.

El capítulo 3 "Metodología de investigación" describe los aspectos de carácter metodológico del trabajo de investigación, comenzando por una caracterización del contexto en que esta se desarrolla, incluida la descripción del nivel de conocimiento de los estudiantes que participan en la investigación. Describe, además, cada una de las tareas que se deben realizar en las tres etapas del proceso de investigación.

En este mismo capítulo se detallan todos los elementos relacionados con el diseño de la unidad didáctica, así como los tres documentos resultantes de este diseño: el material didáctico para la clase, el material de trabajo extraclase y el material de orientaciones metodológicas para el profesor. Se explican los instrumentos de recogida de datos que se utilizan en cada una de las etapas y tareas del proceso de investigación.

La metodología incluye también una explicación del proceso seguido para la selección de los estudiantes que participan en la investigación. Se decide seleccionar un grupo de estudio compuesto por 58 estudiantes, quienes deben participar en las clases de la unidad didáctica bajo la dirección del profesor, y una muestra compuesta por seis estudiantes de este propio grupo, quienes deben, además, realizar actividades de conjunto bajo la observación del investigador. Finalmente, este capítulo aborda algunos criterios generales sobre los procesos de recogida y análisis de datos.

En el capítulo 4 "Análisis de datos" mostramos los resultados generados en el proceso de aprendizaje que surge de la aplicación de la unidad didáctica. Para este análisis se toma como punto de partida el conjunto de respuestas de los estudiantes a las preguntas de la prueba final de la unidad, para posteriormente analizar este proceso a través de las respuestas de los estudiantes a distintas tareas incluidas en el material de trabajo extraclase. Finalmente se analizan otros datos, desde la óptica de las observaciones del investigador en clase y desde las apreciaciones personales del profesor que imparte la unidad didáctica.

El capítulo culmina con una evaluación de la propia unidad didáctica, para lo cual se toman en consideración las percepciones del profesor y de los estudiantes sobre su diseño y desarrollo, así como un análisis comparativo de las respuestas de los estudiantes que participan en el desarrollo de la unidad didáctica.

En el capítulo 5 "Conclusiones" se da una interpretación de los resultados obtenidos por la investigación a la luz de los objetivos propuestos y del contexto en que se desarrolla, en correspondencia con el marco de referencia y el enfoque metodológico propuesto.

En base a los resultados obtenidos se concluye respecto a la identificación de dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función. Se aportan ideas concluyentes sobre la unidad didáctica como instrumento de aprendizaje, sobre sus posibles mejoras, tanto de diseño como de aplicación. Finalmente se tratan algunas ideas respecto al problema de investigación y sus implicaciones didácticas para el contexto de estudio, la Facultad de Economía de la UV.

La memoria culmina con el conjunto de todas las referencias bibliográficas utilizadas para el desarrollo de la investigación, seguido de todos los anexos que sirven de ayuda en la comprensión de los datos, las ideas y resultados de este trabajo.

Capitulo 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La investigación en didáctica de las matemáticas que vamos a desarrollar se genera como un intento por estudiar los problemas relativos al proceso de enseñanza - aprendizaje de los estudiantes de la Licenciatura en Economía de la Universidad Veracruzana, México. El problema de investigación toma como punto de referencia, tanto la propia experiencia educativa, en la que se han observado dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos, de manera especial los relativos a funciones y la determinación de los puntos extremos de la función, como el estudio diagnóstico "*Dificultades de los Estudiantes de Economía en el Aprendizaje del Concepto de Extremo de una Función"* (Cuesta 2005).

1.1 La génesis del problema

El problema de investigación surge del interés, tanto personal como del colectivo de profesores del Departamento de Métodos Cuantitativos de la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana, por mejorar la enseñanza y el aprendizaje de los contendidos matemáticos que se imparten a los estudiantes de la Licenciatura en Economía. La insuficiente preparación de los estudiantes en secundaria y bachillerato ha sido considerada siempre como la causa principal de los problemas relativos al aprendizaje; sin embargo, cada día cobra mayor importancia la necesidad de lograr un tipo de enseñanza que tenga presente, ante todo, la construcción activa del conocimiento matemático por parte de los estudiantes, no sólo en la educación preuniversitaria sino también en los estudios universitarios.

El núcleo teórico de la Ciencia Económica se halla en estrecha relación con conceptos, expresiones y modelos matemáticos, que implican la necesidad de una comprensión real y significativa de las matemáticas. Este es, precisamente, el desafío más importante de la enseñanza de las matemáticas, cuyo enfoque formalista actual conduce a que los conocimientos adquiridos en clase, no lleguen a ser de utilidad para los estudiantes. Se observan dos características en el proceso de enseñanza que se desarrolla actualmente en la Universidad Veracruzana: (i) el bajo nivel de comprensión del conocimiento matemático y (ii) el escaso nivel de su aplicación en el ámbito de la actividad profesional del economista.

La enseñanza actual se contrapone con las propias raíces, tanto epistemológicas como psicológicas del conocimiento matemático, que se manifiestan en las necesidades de su aplicación práctica a otras ciencias. El proceso de aprendizaje de la matemática hace posible que podamos dominar sus contenidos sin perder de vista su aplicación, en tanto que "*…. una unión orgánica entre ciencia pura y aplicada y un equilibrio estable entre la generalidad abstracta y la individualidad concreta puede ser bien la tarea universal de la matemática en el futuro inmediato"* (Courant 1971, p 5).

El nexo de la matemática con otros ámbitos del conocimiento científico resulta ser de gran importancia en el estudio y la comprensión de otras ciencias. "*En último término la vitalidad de la matemática se debe al hecho de que, a pesar de su abstracción, sus conceptos y resultados tienen su origen, como veremos, en el mundo real y encuentran muchas y diversas aplicaciones en otras ciencias, en ingeniería, y en todos los aspectos prácticos de la vida diaria; reconocer esto es el requisito previo más importante para entender la matemática"* (Aleksandrov et al 1973, p 20).

Afrontar el desafío impone un cambio profundo en el sistema de enseñanza de los conceptos de la matemática, cuyo proceso de aprendizaje actual se desarrolla principalmente a través de las exposiciones por parte del profesor y la lectura, comprensión e interpretación de la bibliografía por parte del alumno. Un referente importante para este cambio es la estrategia organizacional que impulsa la Universidad Veracruzana, que consiste en la transición de un modelo educativo rígido a un modelo educativo flexible.

El modelo rígido se caracterizó por la integración de grupos de estudiantes, con la misma secuencia de estudios y con un sistema de enseñanza básicamente presencial. El Modelo Educativo Integral Flexible (MEIF) en cambio, se caracteriza porque no existen "*grupos de estudiantes*"; cada estudiante, con la ayuda de su tutor, selecciona las asignaturas en cada semestre y construye un itinerario propio de estudios.

En el marco de esta estrategia, en la Facultad de Economía inicia la línea de investigación: "*Problemas en la comprensión y utilización de la modelación matemática en la economía"* que debe examinar, en primer lugar, los problemas relativos al proceso de enseñanza - aprendizaje de nuestros estudiantes. Conscientes de que esta línea de investigación resulta ser muy genérica y difícil de abordar, en virtud de las disímiles y muy complejas variables que intervienen, decidimos comenzar nuestro estudio por el análisis del proceso de aprendizaje de un concepto concreto, el de extremo de una función, que se imparte en el curso de Cálculo I. Las razones para esta elección son:

- La asignatura de Cálculo I constituye un primer paso, Méndez y Cuesta (2001), en el estudio de la teoría de funciones reales de una variable real, que forma parte del acervo teórico, metodológico e instrumental necesario para expresar y comunicar la teoría económica, conocer de manera científica la realidad socioeconómica, analizarla e investigarla, así como realizar planes, programas y proyectos cuyo objetivo sea dar respuesta a las necesidades sociales.

- El concepto de extremo de una función es medular para el análisis de la realidad económica; su comprensión propicia el desarrollo de habilidades de abstracción, de expresión e interpretación de problemas de la ciencia económica (en especial, los problemas de optimización), cuyos resultados son útiles en el análisis crítico de los postulados de la teoría económica.

- Desde nuestra experiencia docente en la Facultad de Economía, hemos observado dificultades en la comprensión de los conceptos matemáticos, de manera especial los relativos a funciones y determinación de los puntos extremos de una función. Se ponen de manifiesto, incluso, en la relación del concepto de función con otros conceptos de la matemática y de la economía.

El análisis del proceso de aprendizaje debe proporcionar un acercamiento paulatino al diagnóstico de las dificultades de nuestros estudiantes en la comprensión de la determinación de los extremos de una función. Surge así, en el marco del doctorado en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, un primer interrogante: *¿Cuales son las dificultades de los estudiantes de economía en el aprendizaje del concepto de extremo de una función?*

En Didáctica de las Matemáticas existen muchos antecedentes en el estudio de dificultades en relación con las definiciones formales, como se muestran en los trabajos, entre otros, de Artigue (1995), sobre las principales dificultades y obstáculos que se evidencian en el campo del cálculo, de Leinhardt et al (1990), sobre las intuiciones y errores conceptuales de los estudiantes, y de Guershon y Trgalová (1996), sobre las dificultades en el manejo de conceptos abstractos y la comprensión de los principales conceptos y definiciones.

El interrogante sobre las dificultades en el aprendizaje del concepto de extremo de una función se constituye en un problema inicial de investigación, cuyos objetivos son:

1) Averiguar que conocimientos pueden causar dificultades en el proceso de aprendizaje del concepto de extremo de una función.

2) Realizar un análisis sobre la comprensión del concepto de extremo, así como identificar las dificultades que se manifiestan con posterioridad al primer curso de cálculo.

Se toma como marco de referencia algunas de las principales aportaciones teóricas de la línea de investigación conocida como Pensamiento Matemático Avanzado, en especial las ideas de Tall y Vinner (1981) sobre la formación de conceptos, en particular la distinción entre definición conceptual y esquema conceptual, así como otros constructos teóricos que están vinculados a los procesos cognitivos del aprendizaje.

Todas estas ideas generales empezaron a concretarse en el trabajo de investigación diagnóstica, Cuesta (2005), una síntesis del cual se expone a continuación. Este primer trabajo corresponde a una etapa de introspección a la problemática en el contexto de la Facultad de Economía. Se parte del supuesto que los estudiantes, a partir de sus estudios anteriores y experiencia previa, tienen algunas ideas sobre los conceptos de máximo y mínimo de una función. Por ello el interés está centrado en determinar cuáles son los conocimientos que poseen los estudiantes, cómo se manifiestan, y si constituye una dificultad para comprender el concepto de extremo de una función que se estudia en el curso de Cálculo I de la Facultad de Economía.

1.2 El trabajo de investigación. Una aproximación al problema

El estudio diagnóstico, Cuesta (2005), "*Dificultades de los Estudiantes de Economía en el Aprendizaje del Concepto de Extremo de una Función*" *s*e desarrolló en dos fases de investigación, independientes y complementarias en sus respectivos procesos de: recogida, procesamiento y análisis de datos. Estas fases son:

<u>Fase I: Exploración de la problemática planteada</u>: Es la etapa inicial, en ella el sujeto de investigación es el grupo compuesto por los 59 estudiantes (Grupo 1), que en Febrero del 2004 se inscriben al curso de Calculo I. El propósito es indagar respecto a la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de extremo de una función.

Se parte de la premisa de que los estudiantes, en su formación dentro del curso de Calculo I, no han recibido hasta este momento conocimientos sobre este concepto de una manera explícita. Sin embargo, los estudiantes poseen, de sus estudios de bachillerato, una idea sobre función, así como sobre máximo y mínimo de una función, que proviene del contexto algebraico estudiado en este nivel de enseñanza. Por tanto, esta etapa tuvo como finalidad identificar, a partir de datos cualitativos, los elementos de conocimiento de los que se vale el estudiante que inicia estudios universitarios cuando intenta responder a preguntas relacionadas con la determinación de los puntos extremos (máximo y mínimo) de una función.

Para ello se aplica un instrumento de recogida de datos: una prueba de resolución de problemas (Prueba 1), con ayuda de la cual se estudian las respuestas de los estudiantes a tres problemas que, en relación con el concepto de máximo y mínimo, deberían ser factibles de responder por estudiantes que terminaron estudios de bachillerato.

Los resultados del análisis dan constancia sobre la existencia de dificultades en la comprensión del concepto de extremo de una función, causadas por tres factores: (i) las experiencias previas del estudiante no necesariamente vinculadas con el contexto matemático, (ii) los conocimientos de aritmética, de geometría y de álgebra, y (iii) el conocimiento del propio concepto de función.

Existe, además, una idea intuitiva sobre máximo y mínimo de una función, que relaciona éstos con la idea de altura. En esta fase de investigación se asumió que el concepto de función era *"conocido"* por los estudiantes. Pero resulta que la propia expresión constituye una dificultad en el aprendizaje del concepto de extremo, por varias razones:

- el concepto de dominio de la función causa dificultad en la comprensión de del concepto de función,
- no se comprende la relación, específicamente planteada, entre las variables de una función,
- se asume la propiedad de linealidad o de crecimiento constante en el comportamiento de la función, y
- se pone demasiado énfasis en la expresión algebraica de la función y se olvida su propio significado.

Otra dificultad proviene del contexto algebraico; el estudiante tiende a realizar operaciones innecesarias con las variables de la función (ejemplo: la función cuadrática del tipo $y = ax^2 + b$) para responder una pregunta relacionada con el concepto de función. Esta práctica de concebir la función como una expresión algebraica proviene de la manera en que se estudia el concepto de función en los cursos de secundaria y bachillerato.

Fase II: Análisis de las dificultades en el aprendizaje del concepto de extremo: En esta etapa se trabaja con un grupo compuesto por los 36 estudiantes (Grupo 2), que en septiembre del 2004 se inscriben al curso de Calculo II. Se intenta identificar las dificultades que se manifiestan después del curso de Calculo I, en el que se abordaron los conceptos de función de una variable real y extremo de una función, entre otros. En base a los resultados de la primera fase, se intenta profundizar en las dificultades en el marco de la relación que existe entre el concepto de extremo y el concepto de función, así como otros conceptos asociados, en especial, los conceptos de dominio e imagen, la relación entre las variables de una función y las diferentes formas de representación de una función.

El principal instrumento de recogida de datos es una prueba de resolución de problemas (Prueba 2). Se pretende que el estudiante exponga sus ideas personales sobre el concepto de extremo. Se realiza, además, una entrevista con el objetivo de conocer y profundizar respecto a las argumentaciones de los estudiantes sobre las respuestas en la prueba.

Los resultados del análisis dan constancia de la existencia de dificultades relacionadas con los conceptos de función y extremo de una función. Se pueden resumir como sigue:

- Se asume un modelo lineal en funciones cuadráticas (del tipo $y = ax^2 + b$), o bien que poseen características lineales.
- Se confunde el tipo de relación de dependencia entre las variables de una función.
- Muchos de los argumentos se basan en una interpretación literal (lenguaje icónico), sin comprensión del significado de los conceptos y expresiones.
- Se abordan las representaciones algebraica y gráfica de una función como cosas independientes. El estudiante asume por función sólo la expresión algebraica; la tabla de valores constituye una herramienta para hacer, de la función (la representación algebraica), una gráfica.
- Se asocia el máximo y mínimo con la idea de altura. El estudiante vincula la existencia del máximo de la función con el valor más alto y la del mínimo con el valor más bajo.

En esta fase se realiza una comparación de los resultados obtenidos antes y después del curso de Cálculo I, para conocer como ha evolucionado el conocimiento sobre el concepto de extremo de una función. El estudio de las respuestas, de aquellos estudiantes que participan en ambas fases de la investigación, da constancia que:

1. Persiste una idea de función vinculada a la función lineal y/o a sus características. La idea de "*línea recta*" permanece como imagen primaria sobre el concepto de función, incluso después de que el estudiante cursó y aprobó los contenidos teóricos de Calculo I.

2. Los estudiantes poseen una idea personal sobre el concepto de extremo de una función (máximo y mínimo) muy alejada, en general, de la definición conceptual, que fue objeto de estudio en el curso de Cálculo I. En ocasiones se argumenta con un lenguaje icónico, debido a una interpretación muy apegada a la fotografía literal de la representación gráfica de los conceptos de función y extremo de una función.

Los resultados de la investigación preliminar permiten extraer varias conclusiones sobre las concepciones y nivel de conocimiento de los estudiantes. Éstas son:

A) Existe una imagen conceptual sobre el concepto de extremo de una función, que no varía sustancialmente después que se estudió este concepto en el curso de Cálculo I de la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana. Muchos estudiantes, cuando ingresan a la Facultad de Economía, poseen una imagen conceptual, en términos de Tall y Vinner (1981), que asocia los valores máximo y mínimo de una función con la idea de altura; resulta interesante que esta concepción no varía sustancialmente después de haber estudiando, en el curso de Calculo I, los conceptos de función y extremo de una función.

B) Las dificultades en el aprendizaje del concepto de extremo derivan del conocimiento que se tiene sobre el concepto de función, hasta el punto que la propia definición de función constituye una dificultad en el aprendizaje de extremo. Durante el curso de Calculo I se estudiaron dos maneras de definir una función: como relación entre dos variables y como una correspondencia entre dos conjuntos. Sin embargo, los estudiantes no pueden, como plantea Leinhardt et al (1990), entender una definición a partir de la otra, y como consecuencia no se entiende la idea intuitiva básica de función que expone Kline (1976), es decir que al variar los valores de una variable, varían de acuerdo con aquella los valores de la segunda variable.

C) En las concepciones de los estudiantes sobre función, tal y como lo plantean Guershon y Trgalová (1996), se asocia este concepto con una ecuación algebraica, producto de actividades rutinarias que consisten sólo en determinar valores a partir de procedimientos preestablecidos.

D) Existen otras dificultades que, aunque no han sido objeto directo de la investigación preliminar, merecen ser destacadas y pueden tener su origen en la formación de los estudiantes en los niveles de enseñanza previos a la Universidad Veracruzana. Los hechos observados son:

1) Dificultad para generalizar los resultados de operaciones aritméticas.
2) Dificultad para expresar relaciones, planteadas verbalmente o desde el entorno geométrico, en lenguaje algebraico.
3) La manipulación excesiva sobre la expresión matemática de la función, inducida por una necesidad de realizar operaciones con las variables de la función.

El estudio diagnóstico pone de manifiesto las dificultades vinculadas a la comprensión de los conceptos de función y extremo de una función, y el hecho que en los niveles de enseñanza previos a la Universidad se ha trabajado poco, o de manera no significativa, con lenguajes de tipo algebraico, gráfico y geométrico.

Los resultados y conclusiones de este trabajo constituyen la principal fuente de ideas en el planteamiento de nuestro problema de investigación, que se expone a continuación:

1.3 Planteamiento del problema

La investigación diagnóstica, Cuesta (2005), da constancia sobre un hecho históricamente observado en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Facultad de Economía: el nivel de conocimientos de muchos estudiantes que inician estudios en esta Institución resulta ser insuficiente para acceder a las complejas estructuras y relaciones que exige el estudio de las funciones, sus distintos sistemas de representación, como el lenguaje gráfico o el algebraico, y los numerosos subconceptos asociados, en particular el concepto de extremo de una función, que forman parte del acervo de competencias necesario para abordar, de una manera apropiada, el estudio de la teoría económica y, directamente, de la realidad económica.

Se supone que los estudiantes ingresan a la Facultad de Economía, después de haber culminado sus estudios de secundaria y bachillerato, con el acervo de conocimientos necesario para comprender los conceptos y las herramientas del cálculo de funciones de una variable, para desarrollar habilidades de abstracción, expresión e interpretación que les permitirán representar matemáticamente proposiciones elementales de la ciencia económica.

Sin embargo, los programas de estudios oficiales de la Secretaría de Educación Pública (SEP) (http://www.sep.gob.mx/wb2/sep/sep_514_matematicas) establecen que la enseñanza de las matemáticas, en secundaria y bachillerato, tiene como propósito general el desarrollo de las habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento de los alumnos, quienes deben desarrollar capacidades para:

- Adquirir seguridad y destreza en el empleo de técnicas y procedimientos.
- Reconocer y analizar los distintos aspectos que componen un problema.
- Elaborar conjeturas, comunicarlas y validarlas.
- Comunicar estrategias, procedimientos y resultados de manera clara y concisa.
- Predecir y generalizar resultados.

En la práctica, el nivel de preparación de los estudiantes dista mucho de este propósito educativo; la situación actual del aprendizaje, causada por el insuficiente nivel de conocimiento de los estudiantes, ha sido objeto de análisis por la comunidad académica de la Universidad y en particular de la Facultad de Economía. La propia investigación, Cuesta (2005), da constancia de que muchas de las dificultades del aprendizaje están ocasionadas, precisamente, por interferencias del lenguaje común y el desconocimiento de las reglas elementales del álgebra.

Por otra parte debemos reconocer que, unido al insuficiente nivel de preparación de los estudiantes en secundaria y bachillerato, la enseñanza en la Facultad de Economía ha resultado ser una actividad que se inicia con el estudio de la teoría matemática de funciones y determinación de puntos extremos para culminar con supuestas aplicaciones a problemas rutinarios de la Ciencia Económica. La experiencia práctica del estudiante, cuando estudia Cálculo I, se apoya en ejemplos de los libros de textos o manuales (por ejemplo, Budnick (1990) y Smith y Minton (2000)), lo cual puede implicar que no exista construcción alguna de significados (matemáticos o económicos).

Sin pretender cuestionar la calidad de los sistemas de enseñanza, antes y dentro de la propia Universidad, es conocido que el rendimiento académico se mide mediante un proceso continuo de evaluaciones periódicas, que son dictadas por el profesor y por la propia institución. El sistema educativo actual diseña y ejecuta un conjunto de actividades de enseñanza y aprendizaje que inciden en que el estudiante aprenda "*realizando*" tares específicas y, como consecuencia de ello, las asume como lo más importante.

Una respuesta a esta problemática, dentro del Modelo Educativo Integral Flexible (MEIF), es el diseño del nuevo mapa curricular de los estudiantes de economía; se sugiere que el interés curricular recaiga sobre la formación de los estudiantes, más que en la transmisión de información por parte de los profesores. Una de las asignaturas diseñadas es el curso-taller de Introducción a los Métodos Cuantitativos, que *"constituye un primer paso en el estudio de la teoría de funciones reales de una variable real, misma que forma parte del acervo teórico, metodológico e instrumental necesario para expresar y comunicar teoría económica, conocer científicamente la realidad socioeconómica, analizarla e investigarla, así como realizar planes, programas y proyectos cuyo objetivo sea dar respuesta a las necesidades sociales"* (Méndez et al, p 2).

Sin embargo, y a pesar de las intenciones del MEIF, la situación del aprendizaje continúa siendo una signatura pendiente, compleja y difícil. Las dificultades, Cuesta (2005), permanecen incluso después de que el estudiante cursó y aprobó los contenidos teóricos de Calculo I, durante el cual se estudiaron dos maneras de definir una función: como relación entre dos variables y como una correspondencia entre dos conjuntos.

En las circunstancias actuales vale preguntar: ¿es necesario entonces un cambio en el ejercicio de la docencia?, ¿es posible modificar la manera de gestionar la enseñanza y el aprendizaje aprovechando el conocimiento inicial del estudiante sobre la teoría económica? Es cierto que el aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función genera dificultades de diversa naturaleza, y que algunas de sus causas se hallan incluso fuera del Sistema Educativo Universitario, sin embargo resulta factible situar un nuevo problema de investigación.

Problema de investigación: *¿Es posible diseñar e implementar una unidad didáctica, en torno a los conceptos de función y extremo de una función, que estimule el proceso de aprendizaje de los estudiantes? ¿Cuáles son los resultados de su aplicación?*

Hipótesis de trabajo:

1. En las condiciones actuales del MEIF de la Facultad de Economía, y con el insuficiente nivel de preparación de los estudiantes en secundaria y bachillerato, es posible determinar una secuencia de aprendizaje que estimule el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función.

2. Resulta posible una organización metodológica de los contenidos matemáticos desde el concepto de función, las características de su comportamiento, sus formas de representación hasta llegar al concepto de extremo de una función.

Este problema conlleva no sólo a dar respuestas respecto al diseño, la organización y la evaluación de la unidad, sino además, a varios interrogantes relacionados: ¿Cómo secuenciar los contenidos de enseñanza sobre funciones y extremo?, ¿Cómo organizar y desarrollar el proceso de enseñanza?, ¿Cuál debe ser el papel de profesor y del estudiante?, ¿Cuál debe ser el material didáctico (guía) que facilite el proceso de aprendizaje? Se propone estudiar y analizar el aprendizaje en un nuevo entorno de enseñanza con una reformulación de sus objetivos, de la secuencia de aprendizaje, así como las formas de intervención del profesor y de los estudiantes.

Objetivo General: Analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en las condiciones del sistema educativo de la Facultad de Economía de la UV, a través de la realización y evaluación de una unidad didáctica que incida en la creación de significados por parte de los estudiantes.

Este objetivo se desglosa en dos grupos de objetivos específicos:

De innovación:

1. Diseñar la unidad didáctica sobre los contenidos de: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función*".

2. Aplicar y evaluar la unidad didáctica propuesta.

De investigación:

1. Evaluar el proceso de aprendizaje de los estudiantes con la aplicación de la unidad didáctica propuesta.

2. Evaluar la unidad didáctica diseñada.

3. Analizar las posibles aportaciones de la unidad didáctica al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos del programa de Calculo I.

La investigación toma como punto de partida el diagnóstico de las dificultades de los estudiantes de economía en el aprendizaje del concepto de extremo de una función, Cuesta (2005), para proceder a un trabajo basado en una innovación educativa. Es posible, siguiendo la idea de Leinhardt et al (1990), abordar los conceptos de función y extremo de una función desde las intuiciones del estudiante que estén basadas en su conocimiento sobre situaciones del mundo real; estas intuiciones pueden funcionar con éxito si son razonadas en el entorno gráfico. Asumimos que tal enfoque, de acercamiento al concepto de función, puede ser apropiado para la enseñanza de cálculo a estudiantes de economía.

En el proceso de aprendizaje se puede aprovechar, como vía de aproximación al concepto, el conocimiento que posee el estudiante sobre el hecho económico, así como los postulados propios de economía, cuyo arsenal teórico se apoya en el uso de modelos matemáticos para estudiar, analizar y predecir determinados fenómenos, a partir de los cambios observados en los factores endógenos y exógenos del sistema económico.

La investigación en didáctica de las matemáticas ha mostrado que, si bien existen dificultades en el aprendizaje de los conceptos matemáticos, es posible concebir nuevos ámbitos de enseñanza que estimulen el proceso de aprendizaje de los estudiantes. En particular, el diseño y aplicación de unidades didácticas constituye un campo fértil de investigación, que permite formular y comprobar conjeturas, elaborar estrategias de enseñanza y, como consecuencia, identificar nuevos recursos y métodos de enseñanza.

Es factible y necesaria la investigación para la propia Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana, que vive inmersa en un proceso de cambio hacia un Nuevo Modelo Educativo con el propósito de transformar la enseñanza tradicional, centrada en el docente, en una entidad activa donde el estudiante debe ser gestor de su propio desarrollo y formación integral: intelectual, humana, social y profesional.

Por otra parte, existe conciencia de los problemas de aprendizaje y de la necesidad de un cambio en el Sistema Educativo, de modo que, la investigación puede y debe tomar en consideración la experiencia y opiniones del colectivo de profesores de matemática de la Facultad de Economía. Este colectivo trabaja, actualmente, en la introducción de una nueva experiencia educativa "*Introducción a los Métodos Cuantitativos",* cuyo propósito es que el estudiante, antes de comenzar el curso de Cálculo I, adquiera habilidades elementales de cálculo numérico–algebraico, destrezas y aptitudes para la representación gráfica de relaciones cuantitativas, así como capacidad de razonamiento abstracto para el planteamiento y resolución de problemas matemáticos.

Aprovechando este contexto, la investigación puede contribuir en varios aspectos de la práctica educativa, entre los que destacan: el papel del profesor, la planificación y gestión de los cursos, la metodología de enseñanza y el papel del estudiante como constructor activo de su propio conocimiento.

Capítulo 2

MARCO TEORICO

La presente investigación, en el marco de la línea de investigación Pensamiento Matemático Avanzado (PMA), toma como referencia los trabajos de David Tall y Sholmo Vinner, en particular sus referencias a los términos "esquema conceptal" y "definición conpetual", así como otros constructos teóricos, entre los que desatacan las representaciones internas y externas del concepto matemático. Por ello, en este capítulo se tiene el propósito de sintetizar, de manera general, algunas de las principales aportaciones, tanto teóricas como empíricas, referidas a los obstáculos y dificultades en el aprendizaje del concepto de función.

Es fundamental la idea de asumir que lo interesante de la noción de obstáculo cognitivo es el estudio sobre las dificultades de los estudiantes en el proceso de aprendizaje y, como consecuencia de ello, la posibilidad de determinar estrategias apropiadas para el proceso de enseñanza. Por este motivo el marco teórico de la memoria comienza con los diferentes sistemas de representación del concepto matemático, para posteriormente profundizar respecto a los obstáculos y dificultades en el aprendizaje del concepto de función y culmina con las ideas relativas al diseño y desarrollo de unidades didácticas, como herramientas útiles en el proceso de enseñanza - aprendizaje.

2.1 Aprendizaje y sistemas de representación de los conceptos matemáticos

El estudio del proceso cognitivo que subyace en el aprendizaje de las matemáticas, el nivel de comprensión, así como los obstáculos, errores y dificultades de los estudiantes, son algunos de los objetivos de la didáctica de las matemáticas. Las investigaciones actuales, que centran su atención en el estudio del proceso cognitivo, ponen especial énfasis en el estudio de las diferentes representaciones, físicas o mentales, que son imprescindibles y dan significado a los conceptos matemáticos estudiados. Se examina la comprensión del concepto, en el sentido de Dreyfus (1991_a), como el resultado de una larga secuencia de aprendizaje durante las cuales ocurren e interactúan una gran cantidad de procesos mentales.

Dichas investigaciones describen la cognición con el propósito de indagar sobre los esquemas mentales de los alumnos o de los profesores. En el proceso de análisis predominan aquellos constructos con los que se intenta establecer una relación, en el proceso de aprendizaje, entre las diferentes representaciones mentales o internas del sujeto y las representaciones externas del conocimiento (notación matemática, símbolos, gráficos, etc).

Para Janvier (1987_a) el aprendizaje consiste en un proceso acumulativo, basado, fundamentalmente, en la capacidad de manejar un conjunto de representaciones enriquecedoras; fundamenta el análisis en la definición de Davis et al (1982): "*La representación puede ser una combinación de algo escrito en papel, de algo existente en forma de objeto físico, y de un arreglo cuidadosamente construido, de una idea en la mente*" (Janvier $1987_{a,}$ p. 68), para denotar que las representaciones deben ser consideradas como una combinación de tres componentes: símbolos escritos, objetos reales e imágenes mentales, y donde los rasgos verbales o de lenguaje son igualmente predominantes debido a que son los nexos entre estos tres componentes. De este modo, el propio proceso de aprendizaje exige, como indica Lesh et al (1987), que el estudiante pueda establecer la relación entre los diferentes sistemas de representación: modelos, diagramas, lenguaje hablado y símbolos escritos, y que por consiguiente posea la habilidad para realizar traducciones de un sistema escrito a otro.

En este sentido Lesh et al (1987) destaca que una forma de determinar las dificultades de aprendizaje, o de crear oportunidades de enseñanza, es que el profesor genere una variedad de cuestiones presentando las ideas en una de las formas de representación y posteriormente interrogue a los estudiantes sobre cómo se pueden ilustrar, describir o representar en otra forma. Tal idea coincide con la manera en que Janvier (1987_b) examina la representación del concepto de función, cuando argumenta sobre dos tipos fundamentales de traducción: (i) la interpretación, que consiste en pasar de la gráfica de una situación a su descripción verbal y (ii) la construcción, que consiste en pasar de la descripción verbal de una situación a la gráfica y/o tabla.

De este modo, Janvier ($1987_{b,}$), la experiencia concreta se puede establecer entre los diferentes modos de representación de una función: descripción verbal, tablas, gráficos y formulas. En sentido general, Goldin y Janvier (1998), el término "*representación*" tiene las siguientes interpretaciones:

- un conjunto de situaciones del entorno físico que puede ser objeto de descripción matemática.
- un sistema lingüístico, mediante el cual se plantea y discute el contenido matemático.
- un constructo matemático formal que puede representar situaciones mediante símbolos cumpliendo ciertos axiomas.

- una configuración cognitiva interna del individuo, referida a la conducta o la introspección y que describe algunos aspectos del pensamiento matemático.

Las representaciones no se pueden examinar de una manera asilada, en tanto que son parte de un sistema estructurado más amplio con significados y convenciones establecidas. Dentro de este sistema, según Goldin (1998), destacan dos tipos de representaciones, a saber:

- las externas: comprenden los diferentes sistemas simbólicos convencionales de la matemática, así como los entornos diseñados para el aprendizaje.
- las internas: comprenden los sistemas mentales de representación y los diferentes significados que se le asignan a la simbolización matemática.

Ambas formas de representación son relevantes, tanto para el proceso de aprendizaje como para el pensamiento en matemáticas. La externa, Dreyfus (1991_b), es simbólica, escrita u oral, y permite establecer comunicación acerca del concepto de una forma más sencilla; la interna es mental y se refiere a los puntos que un individuo toma como referencia para interactuar con el mundo exterior y se construyen sobre la base de las representaciones concretas de un concepto.

En lo concerniente a las representaciones internas del concepto matemático, una mayor precisión se halla precisamente en la línea de investigación del Pensamiento Matemático Avanzado, cuyo objeto de estudio es el aprendizaje de conceptos y temas relacionados con el análisis, a saber: funciones, continuidad, números irracionales, números reales, límites y cálculo diferencial e integral, que son propios del currículo de bachillerato y la universidad. Es precisamente esta línea de investigación, según expone Azcárate (1995), la que está enriqueciendo los modelos que describen los procesos cognitivos, entendidos éstos como: "*los procesos tales como representar, visualizar, generalizar, clasificar, conjeturar, inducir, analizar, sintetizar, abstraer y formalizar*" (Azcárate 1995, p. 54) que interactúan entre si en el acto mismo del aprendizaje.

Un modelo importante dentro de esta línea de investigación es la propuesta de Tall y Vinner (1981), formulada para establecer la relación existente entre el concepto matemático y la representación interna. La propuesta se fundamenta en dos aspectos interconectados del concepto, la definición conceptual y el esquema conceptual. Asumen como "*definición conceptual*" (concept definition) aquella secuencia de palabras que explica el concepto y cuya precisión varía desde las definiciones formales, aceptadas por la comunidad científica, hasta las definiciones personales que se utilizan para construir o reconstruir la definición formal.

Tall y Vinner (1981) introducen el constructo "*esquema conceptual*" (concept image) para explicar algo que es recordado en nuestra memoria, cuando escuchamos o vemos el nombre de un concepto.

> "*es algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto. Puede ser una representación visual del concepto en el caso de que tenga representaciones visuales o una colección de expresiones o experiencias. Las representaciones visuales, las figuras mentales las impresiones y las experiencias asociadas con el nombre del concepto pueden ser traducidas verbalmente. Pero es importante recordar que las expresiones verbales no son la primera cosa evocada en nuestra memoria [.....]. Cuando escuchas la palabra "función", puedes evocar la expresión "$y = f(x)$", puedes visualizar la gráfica de una función, puedes pensar en funciones específicas tales como: $y = x^2$ o $y = sen\ x$, $y = lnx$, etc"* (Tall 1991, p. 68).

Según la idea de Tall y Vinner (1981), en el proceso de estudio de un concepto matemático formalmente definido se ponen de manifiesto procesos mentales de recuerdo y manipulación que pueden afectar su comprensión, en tanto que la imagen evocada puede diferir de la definición conceptual. El esquema conceptual *"describe la estructura cognitiva de una individuo, asociada a un concepto matemático, y se define como el conjunto de todas las imágenes mentales (cualquier clase de representación: forma simbólica, diagrama, gráfica, etc) del estudiante asociadas al concepto con todas las propiedades y procedimientos que le caracterizan"* (Azcárate 1995, p. 55).

Estas imágenes mentales sobre el concepto matemático, así como el proceso de su manipulación, están sustentadas en la experiencia y el aprendizaje previos del estudiante, poseedor de un concepto personal. Pero es de reconocer que la definición conceptual personal puede diferir de la definición conceptual formal aceptada por la comunidad matemática, o bien pudo ser aprendida de una manera memorística, es decir que carece de un aprendizaje significativo. En efecto, para Artique (1990) el concepto matemático se distingue por: (i) la noción matemática tal como se define en el contexto del saber sabio en una época dada, (ii) el conjunto de significados asociados al concepto, (iii) la clase de problemas en cuya solución adquiere su sentido y (iv) los instrumentos específicos del tratamiento del problema.

Las concepciones personales del estudiante no necesariamente tienen que coincidir con la definición del concepto, puesto que en su formación tiene un papel relevante su propia experiencia anterior. En este sentido, Artigue (1990) plantea la existencia de diversos componentes que las caracterizan como entes diferentes de los conceptos matemáticos, y que son: (i) la clase de situaciones-problemas que dan sentido al concepto para el estudiante, (ii) el conjunto de significados que el estudiante es capaz de asociarle, en particular las imágenes mentales y expresiones simbólicas, y (iii) los instrumentos, teoremas, y algoritmos de los que dispone el estudiante para manejar el concepto.

En este ámbito de análisis Sfard (1991) establece una clara distinción entre el concepto (en ocasiones reemplazado por noción), que hace mención a las ideas matemáticas en su forma oficial como constructo teórico dentro del universo formal del conocimiento ideal y la concepción, que constituye el conjunto de representaciones internas que evocan el universo subjetivo del conocimiento. Así mismo, Sfard (1991) profundiza en la existencia de dos tipos de concepciones del conocimiento matemático: las llamadas estructurales, para denotar la noción matemática como un objeto matemático abstracto y las operacionales, que abordan estas propias nociones como procesos, algoritmos y acciones. De este modo, y en el caso particular del concepto que nos ocupa, **"**u*na función puede ser definida no sólo como un conjunto de pares ordenados, sino también como un tipo de proceso computacional …"* (Sfard 1991, p. 4).

La habilidad para ver un concepto como un proceso y como un objeto es indispensable para la comprensión profunda de las matemáticas. Para Dreyfus (1991_b) comprender es una proceso que tiene lugar en la mente del estudiante, quien debe poseer representaciones mentales de los objetos que sean ricas, es decir, que contenga muchos aspectos ligados a ese concepto. Sin embargo, otra es la realidad del aprendizaje en matemáticas; gran parte de la instrucción, Dreyfus (1991_b), desde la escuela elemental hasta los cursos superiores enseña lo que llamamos "*rutinas*", que bien ejecutadas se aceptan como un éxito por parte de los profesores. "*Lo que aprenden la mayoría de los estudiantes en matemáticas es a ejecutar una gran cantidad de procedimientos tipo, basados en formalismos definidos de forma precisa, para obtener respuestas a ejercicios de un tipo claramente delimitado*" (Dreyfus 1991_b, p. 28).

El conocimiento matemático se presenta como un producto final y refinado; como resultado de este tipo de enseñanza, el estudiante asocia el concepto matemático sólo con las situaciones que le son conocidas en el proceso de instrucción; su experiencia personal se basa en lo "*estudiado*" sobre el concepto. En esta situación ocurre que:

1. El estudiante no desarrolla la capacidad de utilizar el concepto estudiado de una manera flexible, no puede asociar éste con situaciones conocidas o problemas que formen parte de sus experiencias personales.

2. Las nuevas ideas y conceptos, que el estudiante intenta aprender, no son satisfactoriamente acomodadas, es decir, surgen aspectos conflictivos entre dos componentes: por una parte las imágenes mentales del estudiante, que también pueden ser del entorno matemático, y por otra parte las nuevas definiciones formales de los conceptos matemáticos, objetos de aprendizaje.

Por todo lo anterior, resulta pertinente exponer algunos de los desarrollos teóricos más relevantes respecto a los obstáculos y dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos.

2.2 Obstáculos y dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos matemáticos

En el estudio de las condiciones que dominan el desarrollo pensamiento científico Bachelard (1948) introduce la noción de obstáculo epistemológico, bajo la consideración de que el problema del conocimiento científico debe ser planteado en términos de obstáculos; en este sentido plantea:

> *"No se trata de considerar los obstáculos externos como la complejidad o la fugacidad de los fenómenos, ni de discriminar la debilidad de los sentidos o del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente donde aparecen por una especie de necesidad funcional los entorpecimientos y las confusiones"* (Bachelard 1948, p. 15).

Este término es analizado posteriormente por Brousseau (1983, 1986) en educación matemática, como una pieza del conocimiento que puede ser satisfactoria en un determinado momento y para ciertos problemas, pero que puede convertirse en inadecuado para el estudiante cuando intenta acceder a otras etapas del aprendizaje. *"El error no es solamente efecto de la ignorancia, de la incertidumbre del azar, que son creídas en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, mas bien son efecto de un conocimiento anterior que tuvo su interés, que fue exitoso, y que ahora se revela como falso o simplemente inadecuado"* (Brousseau 1983, p. 171).

Según Brousseau**,** el objetivo principal de la didáctica es justamente el de estudiar las condiciones que deben rellenar las situaciones o problemas propuestos a los alumnos, para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de sus concepciones anteriores. En este sentido, explicita tres orígenes diferentes de obstáculos: ontogénico, didáctico y epistemológico. El obstáculo epistemológico se refiere, precisamente, a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o a los conocimientos mismos; de lo anterior resulta válido asumir que un conocimiento, ya adquirido por el estudiante en un contexto y circunstancias determinados, puede convertirse posteriormente en un obstáculo cuando éste intenta acceder a nuevos conocimientos.

En opinión de Herscovics (1989), de la misma manera que los obstáculos de origen epistemológico son inherentes al desarrollo de la ciencia, los obstáculos cognitivos se consideran normales e inherentes a las experiencias individuales de aprendizaje, es decir, a la construcción de un nuevo esquema conceptual por parte del estudiante. La palabra "*cognitivo"* la utiliza para distinguirla de "*epistemológico",* término que ha adquirido, históricamente, distintos significados. Con el objeto de precisar el término distingue tres géneros de obstáculos cognitivos: (i) obstáculos de naturaleza epistemológica, (ii) obstáculos asociados con el proceso de acomodación del aprendizaje y (iii) obstáculos inducidos por el proceso de instrucción.

Para Herscovics (1989), en el proceso de acomodación del nuevo conocimiento en la estructura cognitiva del sujeto existen obstáculos que dificultan el cambio significativo hacia la construcción de nuevas estructuras. La adquisición de un nuevo conocimiento es un proceso de constante interacción del sujeto con su entorno, que presupone no sólo la asimilación de lo nuevo en la estructura cognitiva existente, sino además la acomodación de esta propia estructura para la adquisición del nuevo conocimiento.

El término dificultad resulta ser muy utilizado pero ambiguo en la literatura científica. Se puede entender, Real Academia Española (ttp://buscon.rae.es/diccionario/drae.htm), como "*embarazo, inconveniente, oposición o contrariedad que impide conseguir, ejecutar o entender bien algo y pronto*". Para Artigue (1990) las dificultades están relacionadas con las concepciones anteriores del alumno y el planteamiento de una nueva situación (problema) las revela como inadecuadas; en este contexto puede aparecer una nueva concepción como posible solución a estas dificultades, siempre que permita reequilibrar los sistemas de respuestas del alumno.

En el sentido que lo expone Artigue (1990), las dificultades tienen estrecha relación con la propia experiencia personal del estudiante. Artigue (1990, p. 266) cita una serie de obstáculos dados por Glaeser (1981):

- inaptitud para manipular dos cantidades negativas aisladas.
- dificultad para dar sentido a dos cantidades negativas.
- dificultad para unificar la recta numérica, que se manifiesta en la consideración de la recta como una yuxtaposición de dos semirrectas numéricas.
- la ambigüedad de dos ceros (cero como origen y cero absoluto).
- la dificultad para separar el sentido concreto atribuido a un nombre.

Sin embargo, para Tall (1989) los obstáculos se encuentran relacionados con el currículum de enseñanza; distingue esencialmente dos tipos: el vinculado al orden temático, donde el obstáculo es producto de las experiencias previas del estudiante, y el fundado en la reiteración con casos y ejemplos sencillos, que provoca una dificultad en el estudiante cuando intenta comprender casos más complejos. Un ejemplo concreto de obstáculo producido por el orden temático, Tall (1985), es la explicación inicial de la derivada como un proceso de límite, que resulta muchas veces complicado para el estudiante.

Al presentar las ideas en este orden lógico, Tall (1985), el matemático siente que su enfoque es el más intuitivo posible, utilizando el término intuitivo como antítesis de riguroso; interpretación que resulta ser diferente a la del psicólogo, quien utiliza dicho término para describir una respuesta inmediata a una situación. Para los estudiantes, Tall (1985), no resulta intuitivo calcular la pendiente de la tangente mediante un proceso de límite; el estudiante, a diferencia del matemático, no tiene una idea del todo el concepto.

Para Tall (1989) el problema (conflicto) ocurre cuando las nuevas ideas no se acomodan de manera satisfactoria con la estructura cognitiva. En una referencia a Papert (1980), Tall (1991) expone:*"el nuevo conocimiento con frecuencia contradice al viejo, y un aprendizaje efectivo requiere estrategias en acuerdo a tales conflictos. En ocasiones las piezas conflictivas de conocimiento pueden ser reconciliadas, en ocasiones una u otra puede ser abandonada, y en ocasiones ambas se mantienen…."* (Tall 1991, p. 9).

La noción de obstáculo cognitivo resulta fundamental, también, desde las ideas de Cornu (1991) al asumir que lo interesante de la noción de obstáculo cognitivo es el estudio sobre las dificultades de los estudiantes en el proceso de aprendizaje y, como consecuencia de ello, la posibilidad de determinar estrategias apropiadas para el proceso de enseñanza. Con este fin, Cornu (1991) distingue varios géneros de obstáculos: (i) el obstáculo genético - psicológico, que ocurre como resultado del desarrollo personal del estudiante, (ii) el obstáculo didáctico, causado por la naturaleza de la enseñanza y el profesor, y (iii) el obstáculo epistemológico, causado por la naturaleza misma del concepto matemático.

Las ideas expuestas por Hercovics, Artigue, Tall y Cornu, respecto a la definición de obstáculo cognitivo, pueden no resultar del todo coincidentes. Sin embargo, existen elementos comunes que precisan ser destacados:

- el obstáculo ocurre como resultado del proceso de aprendizaje del estudiante.
- el obstáculo es resultado de la no acomodación de las nuevas estructuras del conocimiento con las estructuras ya cimentadas.
- el obstáculo puede ser un proceso transitorio de estados más simples a estados más complejos del conocimiento.

Desde el prisma de la matemática parece adecuado pensar que la existencia de un obstáculo cognitivo está relacionado con la propia definición de los objetos matemáticos, con la forma de su representación y con las ideas previas que posee el estudiante. En cuanto a la definición de obstáculo, Vinner (1991) aporta importantes elementos teóricos en relación con la situación cognitiva cuando afirma que, el esquema conceptual que posee el estudiante puede no estar asociado a la definición conceptual, en especial cuando ésta última es resultado de un aprendizaje memorístico o cuando su representación externa, en el sentido de Dreyfus (1991_b), no codyuva al proceso de aprendizaje. Para Vinner (1991) el esquema conceptual, expuesto en Tall y Vinner (1981), se introduce para describir la parte de la memoria evocada en un contexto dado de aprendizaje, que influye en que la forma verbal no sea lo primero evocado en nuestra mente.

En lo referente a la representación de la definición conceptual, como uno de los aspectos vitales del aprendizaje, Dreyfus (1991_b) hace especial referencia al carácter complementario de la relación existente entre los procesos de abstracción y representación, estableciendo una similitud entre ésta y la relación existente entre las representaciones internas o los esquemas mentales internos mediante los cuales el individuo interactúa con las representaciones externas del conocimiento. En este sentido señala que el proceso de aprendizaje debería consistir en cuatro etapas: (i) usar una representación, (ii) usar varias representaciones en paralelo, (iii) realizar nexos entre estas representaciones, y (iv) integrar las representaciones y flexibilizar los cambios entre ellas. Menciona, como ejemplo, el concepto de función, en cuyo aprendizaje los alumnos se pueden encontrar con varias representaciones (gráficas, expresiones, algebraicas, tablas, diagramas de flechas, etc).

El uso de varias representaciones del conocimiento permite al estudiante realizar una transición, desde la comprensión de un tópico concreto hacia una comprensión más abstracta del concepto. Sin embargo, Dreyfus (1991_b), los estudiantes se limitan muy frecuentemente a trabajar en una única representación, casi siempre la representación algebraica de la función, por el hecho de que a los alumnos se les presenta, en el proceso de enseñanza, el producto final y refinado de la matemática.

En muchas ocasiones la realidad contradice la propia esencia de la enseñanza, tal y como la concibe Azcárate (1997), cuando expone: "*el proceso de enseñanza-aprendizaje consiste, en gran parte, en ir compartiendo entre el profesor y los alumnos, los esquemas conceptuales de las nociones matemáticas objeto de estudio. Por tanto, debemos cuidar los lenguajes verbal, gráfico, simbólico, gestual que contribuyen el desarrollo y enriquecimiento de dichos esquemas*" (Azcárate 1997, p. 29). En este proceso, como señala Tall (1985), si el que aprende puede tener primero una idea de todo el concepto, entonces estaría en mejor posición para organizar sus procesos mentales.

El estudio de Tall (1996) sobre las dificultades asociadas a los conceptos del cálculo, entre los que se encuentran los conceptos de función y extremo de una función, obliga a una profundización en dos aspectos del conocimiento: (i) el referido a los procesos mentales de obtención del conocimiento y (ii) el referido a las diferentes ideas intuitivas que posee un estudiante al comenzar sus estudios de cálculo.

El concepto de función es fundamental en nuestra investigación. Por ello, a continuación abordaremos las diferentes aportaciones de la investigación dentro de la línea del Pensamiento Matemático Avanzado, que están relacionadas precisamente con el proceso de su comprensión.

2.3 La investigación en el aprendizaje del concepto de función

La investigación realizada en el campo del Pensamiento Matemático Avanzado documenta que existe una amplia variedad de obstáculos y dificultades en el aprendizaje de los conceptos asociados con el estudio de funciones, especialmente en la etapa transitoria, desde una etapa inicial de comprensión donde el concepto es concebido de una manera intuitiva o basado en la experiencia, a otra etapa donde el concepto se especifica mediante una definición formal a través de la deducción lógica. El pensamiento y el aprendizaje acerca del concepto de función ha sido uno de los principales focos de atención de las investigaciones didácticas, las cuales dan constancia que, efectivamente, su estudio es complejo. Como señalaron Dreyfus y Eisenberg (1982), en uno de los primeros trabajos sobre el tema, las dificultades en el aprendizaje del concepto de función son causadas por:

- su relación con otros conceptos matemáticos como: dominio, imagen, crecimiento, decrecimiento y extremos; todos ellos necesarios para determinar el concepto de función.
- la relación que posee el concepto de función con otros campos de la matemática, como la geometría y el álgebra.
- la existencia de una amplia gama de lenguajes de representación del concepto de función: descripción verbal, tabla de valores, gráficas, expresiones y diagramas.

En esta dirección Markovits et al (1986) señala la existencia de varios componentes o habilidades, mediante los cuales es posible establecer el nivel de comprensión para: (i) clasificar que relaciones son funciones y cuales no, (ii) identificar la preimagen y la imagen de la función, y la relación entre ellos (iii) transferir de una forma de representación a otra, y (iv) identificar funciones que satisfagan determinadas restricciones. La investigación, Markovits et al (1986), basada en un conjunto de problemas propuestos a estudiantes de 13 y 14 años reporta que:

- tres tipos de funciones causan dificultad a los estudiantes: la constante, la definida por partes y las representadas como un conjunto discreto de puntos.
- existe un descuido a los conceptos de preimagen e imagen de la función, lo que causa confusión en la comprensión de la regla.
- tanto la representación algebraica como la gráfica, de la imagen y la preimagen, son parcialmente comprendidas.
- la ejemplificación de los estudiantes se fundamenta, de manera excesiva, en la propiedad de linealidad.
- existe dificultad para transferir la función entre sus forma gráfica y algebraica.

Como señala Sfard (1991), el concepto de función necesita ser examinado como un proceso y como un objeto, cuyo proceso de aprendizaje posee un doble carácter:

1) Su comprensión está asociada, de manera explícita, a: los subconceptos de dominio o preimagen, recorrido o imagen, la regla que establece el nexo entre las variables y las varias formas de representación: verbal, algebraica, grafica y mediante diagramas.

2) Su comprensión influye no sólo en otras áreas de la matemática superior, sino que resulta relevante en el estudio de otras ciencias.

Sin embargo, una de las dificultades presentes en muchos alumnos, Dreyfus (1990), consiste precisamente en que les resulta problemático pasar de las funciones consideradas como un proceso a las funciones como objeto matemático. En el proceso de enseñanza de un curso típico de matemáticas, Dreyfus (1991 $_a$), el plan de estudios, además de establecer claramente que debe enseñar el instructor, propone un contenido a impartir que es una parte de las matemáticas aceptada y bien conocida por el instructor. Como resultado, los estudiantes en muchas ocasiones carecen de la capacidad que les permita utilizar el conocimiento adquirido para resolver problemas que no sean parecidos, o muy similares, a los resueltos en clase.

Sobre este aspecto, y en relación con el concepto de función en particular, Kline (1976) realizó una exposición detallada y clara cuando analiza la importancia del currículo y compara "*los éxitos*" del movimiento de la matemática moderna con el plan de estudios tradicional en los Estados Unidos. Con respecto a la definición de función plantea: "*La definición tradicional de una función, es la relación entre variables tal que si se le* *asigna un valor a una variable, el valor o los valores de la segunda están determinados…"* (Kline 1976, p 74).

En los textos modernos, Kline (1976), primero se introduce el concepto de par ordenado, y el concepto de función, uniforme o multiforme, es reemplazado por el concepto de relación para explicar, posteriormente, cuales relaciones son y no son funciones. "*La idea intuitiva básica de función – es decir que al variar los valores de una variable x varían también los valores de la segunda variable y – se pierde en la descripción estática de un conjunto ordenado de pares"* (Kline 1976, p 80).

Es precisamente en el ámbito de funciones y gráficas donde Leinhardt et al (1990) analiza, tanto la naturaleza del aprendizaje, en términos de intuiciones y errores conceptuales de los estudiantes, como las posibles aproximaciones a la enseñanza a través de explicaciones y ejemplos. Las intuiciones son: "*características del conocimiento de los estudiantes, que provienen en gran parte de la experiencia de cada día, aunque el estudiante más avanzado puede englobar una mezcla de comprensión de conocimiento diario con conocimiento formal y profundo"* (Leinhardt et al 1990, p. 24).

Para Leinhardt et al (1990) las intuiciones sobre la relación funcional están vinculadas a dos maneras fundamentales de definir la función: como relación entre dos variables y como una correspondencia entre dos conjuntos. Resume, en base a los trabajos de otros autores, que:

- existe, desde edades tempranas del niño, un conocimiento implícito del concepto de función, lo que hace posible que el estudiante pueda resolver problemas que incorporen clases diferentes de dependencias funcionales.
- existe discusión teórica en torno a las dos definiciones y en cuanto a cual se debe introducir en el currículo; éstas son: la referida a un tipo especial de relación o correspondencia entre dos conjuntos, o la basada en una relación entre dos variables numéricas interconectadas. Ambas definiciones representan dos estructuras muy diferentes de pensamiento, sin que se pueda incluso comprender como el entender una de ellas ayude a entender la otra.

Sin embargo, Leinhardt et al (1990), los estudios sobre las intuiciones en funciones y gráficas, dan constancia que:

- una parte muy importante de la instrucción esta dirigida a potenciar en los estudiantes habilidades cuantitativas y abstractas.
- las intuiciones, que están basadas en el conocimiento del estudiante sobre situaciones del mundo real, funcionan con éxito si son razonadas en el entorno gráfico.

- una aproximación más cualitativa, abordar y entender la gráfica como una expresión de dos variables que interactúan y cambian, puede relacionarse y aprovechar el sentido común y las intuiciones de los estudiantes.

En cuanto a los errores conceptuales, Leinhardt et al (1990) los define como: *"características del conocimiento del estudiante sobre un conocimiento matemático que pueden o no ser instruidos. Un error conceptual puede desarrollarse como resultado de generalizar demasiado un concepto, esencialmente correcto, o ser debido a la interferencia del conocimiento diario*" (Leinhardt et al 1990, p. 24).

Los estudios sobre errores conceptuales, Leinhardt et al (1990), dan constancia de que:

- En el marco de la definición moderna, las tareas de clasificación indican que los estudiantes poseen una visión restringida sobre las funciones. Con frecuencia sólo identifican gráficas sencillas como modelos de función y se fracasa al tener que decidir si una gráfica representa o no una función, "*conociendo*" la definición exacta de función.
- Con frecuencia el estudiante necesita que los elementos de los conjuntos estén en correspondencia uno a uno, mientras que se han observado dificultades con las correspondencias muchos a uno. En muchos casos se iguala el concepto de dependencia con el concepto de conexión causal.
- Existe fuerte tendencia hacia la linealidad y/o sus propiedades, en una variedad de situaciones.
- Existen dificultades al intentar construir e interpretar gráficas que representan situaciones concretas. Destacan aquellas en las que el estudiante interpreta la gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación, es decir una representación icónica.
- Cuando la función es definida como una relación entre variables, en ocasiones los estudiantes ven una variable como un objeto único y se distraen en sustituciones de símbolos arbitrarios, olvidando la relación funcional entre las variables.
- Existen dificultades en la traducción de una forma de representación a otra, en especial cuando se trata del paso de una gráfica a una ecuación.

La idea traducción (translation task) surge de los trabajos de Janvier (1978, 1987_a), en cuyo análisis se abordan las diferentes traducciones entre distintos tipos de representación (verbal, tabla, gráfica y expresión algebraica. Para Janvier (1987a) los errores se deben a confusiones (contaminaciones) entre las diferentes representaciones y sitúa como las más significativas: la confusión gráfico-dibujo, la confusión verbal - gráfico y la confusión intervalo-punto.

También Leinhardt et al (1990) señala la necesidad de centrar la atención en las tareas relacionadas con el lenguaje gráfico, sean éstas: de interpretación, donde el alumno obtiene un significado (o información) o de construcción, en la cual debe generar una cosa nueva. Las dificultades en tareas de interpretación y construcción de gráficos tienen incidencia en el proceso de aprendizaje del propio concepto de función, al extremo de que pueden convertirse en un obstáculo para el alumno.

Existen otras investigaciones en las que se constata la existencia de dificultades de los alumnos en las tareas de interpretación y construcción de gráficos. Por ejemplo, Azcárate (1990), en el estudio del proceso de aprendizaje del concepto de derivada en un punto, analiza de manera particular los esquemas conceptuales de los alumnos respecto al concepto de pendiente de una recta. Siguiendo estas ideas, Azcárate (1992) sintetiza los esquemas conceptuales de los alumnos en relación con el concepto de pendiente de una recta, e identifica, en base a las respuestas de los alumnos, tres perfiles en los esquemas conceptuales: (i) el perfil geométrico, que caracteriza a los alumnos, en cuya respuesta se utiliza elementos propios del lenguaje geométrico, tanto analítico como descriptivo, (ii) el perfil operativo, que caracteriza a aquellos alumnos que, ante la demanda de explicar el concepto de pendiente, responden mediante un algoritmo operativo que, o bien sirve para reconocer y/o calcular la pendiente de una recta, o bien describe la función y (iii) el perfil funcional, que caracteriza a los alumnos, cuya definición de pendiente de la recta hace referencia a la correspondencia que existe entre los incrementos de ambas variables.

También Deulofeu (1993) estudia las tareas de interpretación y construcción; analiza las respuestas a situaciones, en las que el alumno tiene que interpretar y construir gráficas cartesianas utilizando el lenguaje gráfico. Deulofeu (1995) analiza algunos aspectos del pensamiento de los estudiantes en relación con las gráficas cartesianas; con el objetivo de determinar el tipo de dependencia que establecen los alumnos y alumnas entre las variables representadas en distintas gráficas, llega a conclusiones sobre las tareas de interpretación y construcción de los estudiantes, donde se da constancia, entre otros aspectos, que:

- existe una tendencia a discretizar una situación, en la que sólo se consideran los puntos relevantes de la gráfica y se restringe la dependencia funcional entre variables a las coordenadas de estos puntos, y
- esta tendencia está condicionada por diversos factores que dependen de: la situación, el contexto, su formulación y la función que relaciona los puntos relevantes.

Otras ideas importantes sobre este aspecto, intuiciones y gráficas, se hallan en la propuesta didáctica de Azcárate y Deulofeu (1990), en la cual se examina el lenguaje gráfico como eje fundamental del currículo, en tanto que su forma intuitiva y visual permite un acercamiento paulatino al concepto de función. Este enfoque, de acercamiento al concepto de función, puede ser válido en el estudio del concepto de función vinculado a la economía, en la que se pretende estudiar, analizar y predecir determinados fenómenos a partir de los cambios observados en los factores endógenos y exógenos del sistema económico.

El concepto de función, como señala Dreyfus (1991_b), es abstracto y necesita en el proceso de su aprendizaje varias representaciones al mismo tiempo. Sin embargo, los estudiantes se limitan, por el conjunto de imágenes mentales que poseen, a trabajar con una única representación. Para Azcárate (1995), además de las imágenes mentales, existe un conjunto de propiedades y procedimientos que forman parte del conocimiento (muchas veces implícito) de ciertas alumnas y alumnos del bachillerato. Algunas de las ideas que poseen muchos estudiantes son:

- una función siempre tiene una expresión algebraica.
- la gráfica de una función siempre pasa por el origen de coordenadas.
- en una función los valores de una variable son siempre números naturales.

En este mismo sentido, Artigue (1995) expone, aunque de manera resumida, las principales dificultades y obstáculos que han evidenciado diferentes investigaciones en el campo del cálculo. Se pueden mencionar tres grandes dificultades:

- las asociadas con los objetos básicos del cálculo: números reales, funciones y las articulaciones de diferentes registros simbólicos,
- las asociadas con la conceptualización de la noción de límite, y
- las asociadas con la ruptura álgebra/calculo.

En el caso particular del concepto de función menciona: "*algunas de las investigaciones muestran la brecha existente entre las definiciones dadas por los estudiantes, de un lado, y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no funciones dadas en registros diferentes, del otro…*" (Artigue 1995, p. 109).

Otros autores constatan que muchas de las dificultades de los estudiantes tienen relación directa con el currículo, en especial con el uso de la definición moderna del concepto de función. Por ejemplo, Tall (1991) menciona las experiencias de Ayers et al (1988) en las que se muestra que, si bien los estudiantes pueden comprender el concepto de función mediante un procedimiento programado en el ordenador, existe un conjunto de obstáculos, en el desarrollo cognitivo, que pueden ser superados mediante el proceso de encapsulación del concepto, como un proceso único con varias formas diferentes de representación. Para Tall (1991) la definición formal de función, construida en términos de subconjunto del producto cartesiano de dos conjuntos A y B, constituye un error didáctico en tanto que contradice la propia experiencia de los estudiantes. Cuando el concepto, Tall (1992), es abordado esencialmente como una fórmula existe la tendencia de asumir como esencial la formula de la función y se abandona la idea de asumir el concepto de función como un proceso.

En este proceso resulta interesante el modelo general de adquisición del concepto que plantea Sfard (1991). Desde la manipulación con objetos concretos, mediante un proceso jerárquico de interiorización, condensación y cosificación, el estudiante puede realizar determinados procesos con objetos matemáticos ya conocidos, y acceder de manera natural a otros conceptos matemáticos. Sin embargo, Sfard (1991), existe la tendencia a imaginar determinados prototipos, por ejemplo la línea recta, cuando se le menciona el concepto de función, es decir que, el estudiante tiende a identificar la noción con una de la formas de representación más cercana a ellos (en el caso de la función: una formula o una gráfica elemental).

Estas ideas coinciden con los hallazgos de Tall (1992_a). En su estudio, sobre las concepciones de alumnos y estudiantes universitarios sobre el concepto de función, llega a la conclusión que unos y otros poseen una colección mental de prototipos sobre el propio concepto de función, los gráficos y las expresiones algebraicas, que afectan el proceso de aprendizaje. Por otra parte Azcárate (1992) señala, en el estudio de los esquemas conceptuales de los alumnos respecto al concepto de pendiente de una recta, que muchos alumnos se caracterizan por asociar a la palabra "*pendiente*" la imagen mental del coeficiente "a" en la fórmula del tipo $y = ax + b$; es decir, poseen un esquema conceptual con una faceta algorítmica que carece de imagen gráfica.

Así mismo, en el estudio de Fabra y Deulofeu (2000), sobre de las respuestas de los alumnos a preguntas relacionadas con situaciones gráficas descontextualizadas, se pone de manifiesto que en las percepciones del alumno predominan determinados prototipos; algunas de las gráficas del alumno se reducen al trazado de rectas o segmentos de recta, parábolas o hipérbolas, que son en esencia gráficos de modelos de funciones conocidas por el alumno.

Sobre el concepto de función, los resultados obtenidos por Ruhana y Bruekheimer (1998) aportan otros elementos a favor de la existencia de dificultades cognitivas en el proceso de su comprensión; los autores dan constancia de que:

- muchos estudiantes no entienden el concepto de la relación entre las variables.

- resulta incomprensible el criterio de uniequivalencia de la función.
- existen dificultades en el reconocimiento de las diversas formas de representación de una función, en especial la representación gráfica.

Algunas investigaciones profundizan sobre la existencia de dificultades para comprender la idea de relación entre las variables de una función. Vall de Pérez y Deulofeu (2000), por ejemplo, realizan una investigación sobre las ideas que poseen los alumnos respecto a la dependencia funcional entre dos variables en situaciones caracterizadas por un contexto geométrico. Los problemas planteados a los estudiantes en esta investigación tienen una misma secuencia, que parte de la situación y su dibujo, pasa por la tabla de valores y su explicación, hasta llegar a la ecuación algebraica y su justificación.

Los resultados, Vall de Pérez y Deulofeu (2000), dan constancia que los alumnos, para construir el concepto de relación de dependencia funcional, necesitan haber asimilado primero los modelos de función más sencillos como: la dependencia lineal y la proporcionalidad inversa. En esta misma dirección Chazan (1993) propone la necesidad de conceptualizar la relación entre las variables con un enfoque donde cualquier ecuación pueda ser obtenida desde funciones en situaciones concretas de modelización.

Otros resultados de interés se hallan en el trabajo de Steinbring (1993), quien plantea un estudio sobre las expresiones fundamentales de una función: dominio, relación entre variables, extremo de la función y su representación gráfica. El autor concluye que: (i) existe un conflicto entre las ideas del estudiante y la estructura de conocimiento fijada por el profesor, (ii) uno de los problemas de comprensión de funciones emerge del contexto de representación (iii) resulta necesario que exista una mayor experiencia con objetos reales por parte del estudiante.

También en el ámbito del cálculo, Villareal (2000) realiza un estudio con el objeto de describir y comprender el proceso de pensamiento de los estudiantes, en tareas relativas a la diferenciación de funciones. La autora muestra la existencia de una situación conflictiva vinculada a la representación de funciones, en particular entre los enfoques algebraicos y gráfico. Con anterioridad Tall (1989) había establecido la existencia de obstáculos cognitivos en cada etapa del conocimiento, con referencia especial a la comprensión del concepto de derivada.

Otras contribuciones sobre aprendizaje de funciones se hallan en el trabajo de Confrey y Smith (1994), en el que se analiza la función exponencial y la tasa de cambio, o en Borba y Confrey (1996), donde se construye un modelo sobre el pensamiento de los estudiantes en la transformación de funciones en sus diferentes formas de representación. En el caso particular de la función lineal, Moschkovich (1999) describe las concepciones de los estudiantes sobre el dominio de la función; en sus conclusiones expone que existen varios usos del concepto de dominio, en dependencia del contexto en que se analiza dicha función. Estos resultados corroboraron el análisis realizado por Breidenbach y Dybinsky (1992), donde se detecta dificultades de los estudiantes que ingresan a la Universidad en relación con la interpretación del concepto de función.

Otras investigaciones reportan sobre la existencia de dificultades en la comprensión del concepto de función que son resultado de la enseñanza. Destacan el trabajo de Fischbein y Baltzan (1999), con énfasis en el concepto de conjunto, y las aportaciones de Lither (2001) en el estudio del razonamiento de los estudiantes cuando trabajan con cuadernos de ejercicios. Las tareas de enseñanza aprendizaje diseñadas como tareas de ejercitación han conducido a errores didácticos y desafortunadamente, Guershon y Trgalová (1996), muchos estudiantes sólo pueden asociar el concepto de función con una ecuación algebraica, producto de actividades rutinarias que consisten exclusivamente en determinar valores a partir de procedimientos preestablecidos.

Los hallazgos de la investigación didáctica, Guershon y Trgalová (1996), se pueden resumir en: (i) dificultades en el manejo de conceptos abstractos, (ii) dificultades en la comprensión de los principales conceptos y definiciones, y (iii) dificultades en la interpretación de resultados previamente calculados. Para estos autores, en las concepciones de los estudiantes sobre función predominan prototipos comunes de función, tales como: "*función es una fórmula*".

Resumiendo lo antes expuesto, la investigación sobre el aprendizaje en línea del Pensamiento Matemático Avanzado enfoca su atención al estudio de las construcciones y los procesos mentales que, sustentados en la experiencia previa, afectan el aprendizaje significativo de nuevos conceptos matemáticos. Estas ideas resultan ser de mucha importancia en el objeto de investigación que nos ocupa: el proceso de enseñanza aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en las condiciones del sistema educativo de la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana.

Los resultados mostrados en la investigación preliminar, Cuesta (2005), sobre el objeto de estudio que nos ocupa, dan constancia sobre la existencia de dificultades en la comprensión del concepto de extremo, provocadas, entre otras causas, por la incomprensión del propio concepto de función. En esta investigación se asumió, como experiencia previa al aprendizaje del concepto de extremo de una función, tanto aquellas experiencias del estudiante que no están vinculadas con las construcciones matemáticas como aquellas experiencias que si se sustentan en los conocimientos matemáticos que adquiere el estudiante en la escuela como institución educativa.

Algunos de los resultados obtenidos en Cuesta (2005) son coincidentes con las ideas planteadas por Tall (1992_b). Sobre la noción de función existen una gran variedad de ideas, tales como: una correspondencia entre dos variables, regla de correspondencia, formula, ecuación, una gráfica o la expresión del tipo $y = f(x)$; sin embargo, en las respuestas de los estudiantes sólo se asume por función la fórmula, es decir la expresión algebraica.

Las ideas hasta aquí expuestas, además de aportar interesantes elementos de análisis en el estudio de los obstáculos y dificultades en la comprensión de los conceptos de función y extremo de una función, resultan ser adecuadas en el ámbito del objeto de estudio: "e*l proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo en estudiantes de ciencias económicas"*.

Siguiendo este propósito, la presente investigación propone estudiar y analizar el aprendizaje en un nuevo entorno de enseñanza, el cual supone una reformulación de los objetivos, de la secuencia de aprendizaje, así como de las formas de intervención, tanto del profesor como de los estudiantes. Pretende estudiar y analizar cuáles son las representaciones a las que hacen referencia los estudiantes cuando se les pregunta por los conceptos de función y extremo de una función, en especial aquellas que pueden constituir dificultades y obstáculos en el proceso de aprendizaje.

Pero investigar en el marco de una innovación didáctica presupone, ante todo, una planificación de las lecciones y/o actividades de aprendizaje, que integre los conocimientos científicos y didácticos. Dicha planificación, De Pro Bueno (1995), debe especificar la secuencia de los contenidos de enseñanza, los argumentos que se utilizan para justificarla, las actividades específicas que se le platean al alumno y los materiales didácticos correspondientes.

En este sentido, abordaremos primero algunas ideas, teóricas y prácticas, sobre el diseño y desarrollo de unidades didácticas.

2.4 Algunas experiencias educativas con unidades didácticas

Uno de los problemas que hoy concierne a la práctica educativa de la matemática es el interrogante respecto a cuáles han de ser los contenidos de enseñanza, las posibles secuencias para abordar dichos contenidos, así como las vías y modos de hacerlos más atractivos y significativamente comprensibles por los estudiantes. La respuesta, al margen de las propuestas y diseños curriculares establecidos en cada Sistema Educativo, se halla en la eficacia del propio proceso de enseñanza, que en muchos casos depende del tipo de enseñanza que se gestione, sea ésta una enseñanza de carácter transmisivo o una enseñanza centrada en el aprendizaje del alumno.

Como plantea Riviére (1998), el currículo es siempre un producto del momento en que se elabora, de las tendencias de la época en relación con el aprendizaje y la enseñanza, de las condiciones en que se impartirá, de los alumnos a los que va dirigido y, sobre todo, de las demandas sociales sobre lo que han de aprender los estudiantes. El currículo precisa las intenciones y proporciona guías de acción, adecuadas y útiles, para los profesores como responsables directos de su ejecución. En el ámbito de cada sistema educativo, del profesor dependen las secuencias de enseñanza concretas que se realizan, las actividades específicas que se le plantean al alumno, los materiales didácticos que se utilizan y la valoración que sobre la enseñanza y el aprendizaje; en definitiva, la planificación y gestión del proceso.

Una reflexión sobre el papel del profesor se halla, por ejemplo, en el Diseño Curricular Base de Secundaria Obligatoria, en el que se plantea: "*la naturaleza del conocimiento matemático, su carácter contructivo y su vinculación con la capacidad de abstraer relaciones a partir de la propia actividad y de reflexionar sobre ella obliga a tener especialmente en cuenta, en la planificación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, el nivel de competencia cognitiva de los alumnos*". (MEC 1989, p. 481). Sin embargo, De Pro Bueno (1999), la programación de las actividades plasmadas en el currículo se ha convertido en una simple tarea administrativa, cuya paradójica escasa relación con la práctica educativa del aula anula los elementos reflexivos y la toma de decisiones que, sin duda, tienen un gran valor de cara a la enseñanza.

En el caso particular de la noción de función, Ruíz (1993), el modo de explicación sigue la forma en que se presenta en los libros de texto: de la definición y ejemplos propuestos, a la relación con otros objetos matemáticos (dominio, rango, gráfico), y culmina con ejercicios que debe realizar el alumno. La representación de funciones todavía se reduce, Fabra y Deulofeu (2000), al trazado de la gráfica de una función dada su expresión algebraica. "L*a representación se hace siguiendo unos pasos previamente determinados (puntos de corte, determinación de extremos, asíntotas, tendencias, etc), utilizando técnicas relativas al cálculo de límites y derivadas y tratando de algoritmizar el paso del lenguaje algebraico al gráfico*" (Fabra y Deulofeu 2000, p. 208).

De esta forma se manifiesta la enseñanza tradicional, Herbel-Eisenmann et al (2006), usualmente tipificada como una forma de proveer paso a paso demostraciones de cada procedimiento, de ofrecer oportunidades para que los estudiantes practiquen tales procedimientos, los cuales pueden ser corregidos por el profesor cuando sea necesario. En este contexto, además, en muchas ocasiones el profesor analiza la práctica docente de manera insuficiente, debido a la urgencia de resolver lo cotidiano, que conduce a una escasa reflexión sobre el proceso de aprendizaje y no supone un análisis de las posibles mejoras sobre proceso de enseñanza.

En cambio, la enseñanza orientada ha sido definida, Herbel-Eisenmann et al (2006), como un cambio en el papel del profesor, quien facilita y selecciona las tareas, recurre a múltiples representaciones, guía las ideas de los estudiantes, cuestiona los aspectos matemáticos y fomenta la discusión en la clase. Se trata de un planteamiento didáctico de la enseñanza, con nuevas estrategias y situaciones que implican al alumno de manera activa en el proceso de aprendizaje.

En este proceso de cambio, en la enseñaza de la matemática, una forma de actuar es el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. De acuerdo con Sepúlveda y Rajadell (2001) en referencia a Nerbovig (1973), se define la unidad didáctica como: "*una organización de de objetivos, actividades y medios, centrada en un propósito o problema y preparada para su uso en una situación de enseñanza-aprendizaje*" (Sepúlveda y Rajadell 2001, p. 299).

En un significado más amplio una unidad didáctica es, De Pablo y Vélez (1993), un instrumento de trabajo que permite al profesor organizar su práctica educativa para articular unos procesos de enseñanza y aprendizaje de calidad, que sean ajustados al grupo y al alumno. De este modo, la unidad didáctica debe precisar los contenidos, objetivos, las actividades de enseñanza a lo largo de cada ciclo, así como planificar y temporalizar las actividades de aprendizaje y de evaluación.

Es cierto que cada día son menos los educadores que se resisten a concebir el aprendizaje como un proceso de cambio conceptual, cuyo principal protagonista es el propio alumno, en lugar de entenderlo como una simple suma de conocimientos acumulados que son olvidados en un corto plazo de tiempo. También, en el ámbito de la investigación en didáctica de la matemática existen algunos resultados respecto al diseño, desarrollo y aplicación de unidades didácticas como instrumentos útiles en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

A continuación relatamos algunos resultados sobre el diseño y desarrollo de unidades didácticas como instrumentos de aprendizaje.

En Romero (1991) se expone un modelo didáctico para la adquisición del concepto de límite de una función, en un proceso escalonado de adquisición de habilidades específicas con ejercicios que el alumno debe desarrollar y que le permitan, posteriormente, adquirir habilidades más generales. Se propone y desarrolla una investigación de tipo experimental, en la cual un primer grupo se somete al estudio de este concepto con el método explicado en el libro de texto y otro segundo grupo analiza el concepto mediante un método intuitivo, que permite su comprensión a partir de problemas concretos. Se llega a la conclusión de que los estudiantes del segundo grupo obtienen mejores resultados en una prueba de resolución de problemas, realizada al término de la experiencia. Sin embargo, la propuesta, a nuestro entender, es sólo una forma más organizada y atractiva que la que se propone en el currículo y en los libros de texto.

Con mayor profundidad se aborda el diseño de una unidad didáctica en Morente (2000), cuyo punto de partida es el reconocimiento respecto a la complejidad que supone el estudio del concepto de función. Se diseña la unidad didáctica "*Funciones*" con contenidos, tanto de tipo conceptuales como procedimentales que se deben estudiar en tres bloques:

1) Funciones: Características globales.
2) Funciones lineales y afines.
3) Funciones cuadráticas.

La unidad "*Funciones*" resume diversas formas de trabajo (actividades iniciales, explicaciones teóricas, ejemplos y ejercicios de diferentes grados de dificultad). Lo interesante de la propuesta consiste en que, a partir de las dificultades observadas en el desarrollo de la unidad didáctica, se diseña una nueva propuesta de unidad didáctica: "*Funciones II*", que tiene en cuenta los prerrequisitos sobre los conocimientos que son necesarios para su desarrollo y propone un material que incluye otras nuevas actividades a desarrollar por los estudiantes.

Otro diseño interesante para el estudio de las funciones es el que propone Segura (2001) con la utilización del ordenador y la hoja de cálculo como herramienta de trabajo. El uso del ordenador se enmarca en una metodología constructivista de acceso al conocimiento, en la que el alumno construye sus propios conocimientos y significados. La unidad didáctica parte del diseño curricular del sistema de enseñanza correspondiente, tanto a estudiantes de 4^{t0} de ESO como al Bachillerato de Humanidades. Durante el desarrollo de las actividades de la unidad los alumnos transitan por tres fases consecutivas de aprendizaje:

a) Fase Inicial: su finalidad es detectar el conocimiento previo de los alumnos y exponer los objetivos de la unidad didáctica.
b) Fase de Desarrollo: sus actividades se orientan para facilitar al alumno la aproximación y profundidad de los contenidos estudiados en la unidad.
c) Fase de Síntesis: propone cuestiones dentro de las actividades con la ayuda de las cuales el alumno sintetiza lo aprendido, lo incorpora a su acervo de conocimiento y lo utiliza en situaciones más globales.

Otro aspecto interesante del diseño que propone Segura (2001) es la elaboración de un material docente con orientaciones didácticas para la enseñanza y el aprendizaje. Este material parte de tres principios:

1) Las actividades de aprendizaje han de ser variables, pero siempre dentro del mismo núcleo teórico.
2) Se debe prestar especial atención a la representación gráfica de funciones con la ayuda de la hoja de cálculo.
3) El proceso de aprendizaje ha de promover y facilitar que el alumno explique por escrito las soluciones halladas en cada actividad, de modo que le ayuden a estructurar y ordenar su propio pensamiento de una manera lógica.

En otro contexto de estudio, Gómez (1998) toma como objeto de estudio el proceso de modelización matemática. El autor concibe la modelización matemática como una herramienta de enseñanza y aprendizaje en el contexto universitario y presenta propuestas didácticas en el ámbito de estudio del álgebra lineal y las ecuaciones diferenciales. Se parte de la hipótesis sobre la viabilidad de enseñar las matemáticas de una manera diferente a la enseñanza tradicional, donde se priorice la comprensión de los resultados de la matemática. La unidad didáctica tiene por objetivo la construcción de un modelo matemático sencillo, que permita abordar un problema clásico de mecánica técnica. Se proponen dos unidades globales, que son:

1) La unidad de matrices: diseñada para estudiantes de la signatura análisis matemático con actividades y prácticas, que conducen al alumno, de manea intuitiva, desde los conocimientos primarios y simples de secundaria hasta las herramientas del cálculo matricial.

2) El mundo de las ecuaciones diferenciales: que se realiza en un curso de análisis matemático, cuyas actividades tienen como objetivo que el estudiante pueda reconocer una ecuación diferencial partiendo de situaciones extraídas de la realidad, así como que pueda reconocer diversas situaciones técnicas que tengan por denominador común las ecuaciones diferenciales.

En el propio contexto de la universidad se diseña y desarrolla otra unidad didáctica. Es la propuesta de Delgado (1998), desarrollada en el marco de la metodología de la ingeniería didáctica y aplicada al estudio de un fenómeno didáctico. La unidad se concibe como una guía de un conjunto de situaciones didácticas, que se proponen a un grupo de 150 estudiantes con la finalidad de caracterizar, tanto la estructura cognitiva inicialcomo la evolución de los estudiantes durante su desarrollo. En este sentido, toma como estrategia poner a prueba una situación de aula bajo dos hipótesis de trabajo:

(i) ¿es posible controlar, en una situación de aprendizaje, la evolución de la estructura cognitiva del estudiante? y (ii) ¿es posible una secuencia didáctica que tome en cuenta las dificultades conceptuales y los obstáculos cognitivos, que sea eficiente para potenciar la estructura cognitiva del estudiante? Como resultado de los trabajos de experimentación e investigación llega a la conclusión respecto a la posibilidad de establecer situaciones didácticas que permitan controlar la evolución conceptual y establecer una relación eficaz entre aprendizaje y desarrollo cognitivo.

Otra interesante propuesta metodológica se halla en Espinosa y Azcárate (2000), donde se estudia la actuación del profesor en su tarea de organización y conducción del proceso de enseñanza aprendizaje. Se analizan las técnicas didácticas que utiliza el profesor para dirigir y gestionar el proceso de estudio, así como el tipo de reconstrucción que realiza de la organización matemática propuesta por la organización escolar. En el ámbito de la formación inicial de profesores, Bedoya (2002) parte de la necesidad de concretar en la práctica las directrices curriculares y didácticas y propone el curso taller "*Calculadoras gráficas y enseñanza de funciones*" para mejorar el conocimiento didáctico y desarrollar capacidades en el diseño de actividades didácticas.

En estrecho vínculo con el currículo de un sistema educativo concreto, Turégano (1998) propone dos cambios en los contenidos matemáticos que se imparten, el primero relacionado con la reconstrucción del currículo vigente y el segundo con la forma de trasmitir esos contenidos. Propone un modelo teórico para la construcción conceptual de la integral definida, cuya la idea consiste en presentar la integral como una continuación de la idea, ya conocida, de área. La fase experimental se desarrolla con niños de (14-16) años de los tres Institutos de Albacete. En las conclusiones se enfatiza sobre dos aspectos importantes para el aprendizaje: (i) la necesidad de que en la secuenciación de contenidos prime la génesis histórica, más en consonancia con las ideas de los estudiantes y (ii) la priorización de las conexiones entre las diferentes representaciones del concepto, las cuales favorecen el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Hemos mostrado diferentes trabajos de investigación relacionados con el desarrollo de distintas unidades didácticas. Si bien no son coincidentes en muchos de los aspectos de diseño, es cierto que, en buena medida, son propuestas de mejora de la enseñanza respecto a diferentes nociones matemáticas que el propio currículo señala como necesarias en la formación del estudiante.

En el caso particular del objeto que nos ocupa, abordaremos también cuestiones relacionadas con el desarrollo de una unidad didáctica: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función*", cuyos aspectos de diseño se hallan en estrecha relación con el marco metodológico de la investigación.

Las ideas generales de este marco metodológico se exponen en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

METODOLOGÍA DE INVESTIGACION

Este capítulo describe los aspectos metodológicos de la investigación. Se parte de una caracterización del contexto en que se desarrolla: la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana (UV), que incluye una descripción del nivel de conocimientos de los estudiantes sujetos de investigación. Se expone, además, el esquema general de desarrollo de la investigación, así como los principales instrumentos utilizados, entre los que destaca el diseño de una unidad didáctica sobre los conceptos de función y extremo de una función.

3.1 Contexto de la investigación

La parte experimental de la investigación se desarrolla en la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana, con un grupo de estudiantes de la generación que comienza estudios en agosto de 2006. Se ubica temporalmente en el semestre escolar agosto de 2006 - enero de 2007, en el marco de las asignatura "*Introducción a los Métodos Cuantitativos*" de la Licenciatura en Economía.

Esta licenciatura tiene como propósito desarrollar un proceso educativo que tiende a la formación integral del alumno, donde puedan desarrollarse diversas dimensiones del sujeto, buscando fomentarle una formación en lo humano, lo intelectual, lo social y lo profesional, de una manera armónica y equilibrada. A este propósito social se suman cada año un promedio de 110 estudiantes, egresados de diversas instituciones educativas (bachilleratos) de Veracruz. El proceso de admisión a la Universidad Veracruzana se realiza mediante la ejecución de un examen, elaborado y aplicado por el Centro Nacional de Evaluación (CENEVAL) de la Secretaría de Educación Pública (SEP), cuyos resultados, resumidos en el "*Comparativo del Examen Nacional de Ingreso*" (COEXANI - II), caracterizan a cada estudiante mediante un conjunto de calificaciones:

BACH - promedio del bachillerato

GLOBAL - calificación global del examen de ingreso, que se compone de:

RV- razonamiento verbal

RM – razonamiento matemático

MC – mundo contemporáneo

CN – ciencias naturales

CS – ciencias sociales

MAT y MAT2 – dos áreas de matemática

ESP – español

ING – inglés

DER– derecho

En base a los resultados, de todos los estudiantes interesados, se decide aquellos que, según sus preferencias, ingresan a cada una de las licenciaturas de la UV, bajo la premisa social de que pueden ingresar tantos estudiantes como lo permita la oferta de plazas. Como consecuencia de este proceso, la mayoría de los estudiantes inscritos no aprueba el examen del CENEVAL, lo que puede influir notablemente en su rendimiento académico posterior.

No disponemos de los resultados concretos en este examen de la generación que ingresó en agosto de 2006. Sin embargo, podemos mostrar, a modo de ejemplificación, los resultados de la generación que ingresó en el 2005. Estos resultados, ordenados de manera descendente según su calificación global (ver Anexo 1), permiten extraer varias ideas sobre el nivel de conocimiento que poseen los estudiantes al comenzar los estudios de economía, a saber:

1. La calificación global del examen de ingreso (GLOBAL) tiene poca relación con la calificación promedio del bachillerato (BACH); el coeficiente de correlación entre estos conjuntos de datos es apenas de 0.39. Muy pocos estudiantes obtienen en el examen de ingreso una calificación similar o superior al promedio logrado en el bachillerato.
2. Sólo aprueban (mínimo aprobatorio de 60 puntos/100) el examen de ingreso 40 estudiantes de un total de 103, es decir el 38.8% de toda la generación. Existe, además, un bajo nivel de conocimiento en matemáticas; únicamente 30 de los estudiantes (el 29%) aprueban el promedio de las dos calificaciones de matemáticas (MAT y MAT2) del examen de ingreso.

En algunas de estas áreas de conocimiento la calificación promedio (ver Tabla 3.1) es inferior al mínimo aprobatorio (60 puntos/100).

	BACH	GLOBAL	RV	RM	MAT	MAT2
PROMEDIO	81,7	56,5	56,0	60,4	60,6	39,7
MÁXIMO	99,0	89,2	93,8	100,0	100,0	94,7
MÍNIMO	63,0	30,4	18,8	17,6	14,3	10,0

Tabla 3.1 *Resumen de resultados del examen de ingreso en las áreas de: razonamiento verbal, razonamiento matemático y matemática*

Obsérvese que, en razonamiento verbal y matemático, así como en matemáticas los resultados promedios no superan la calificación mínima aprobatoria. En estas condiciones los estudiantes que se inscriben deben afrontar las primeras asignaturas que componen las dos áreas iniciales de la formación profesional del economista.

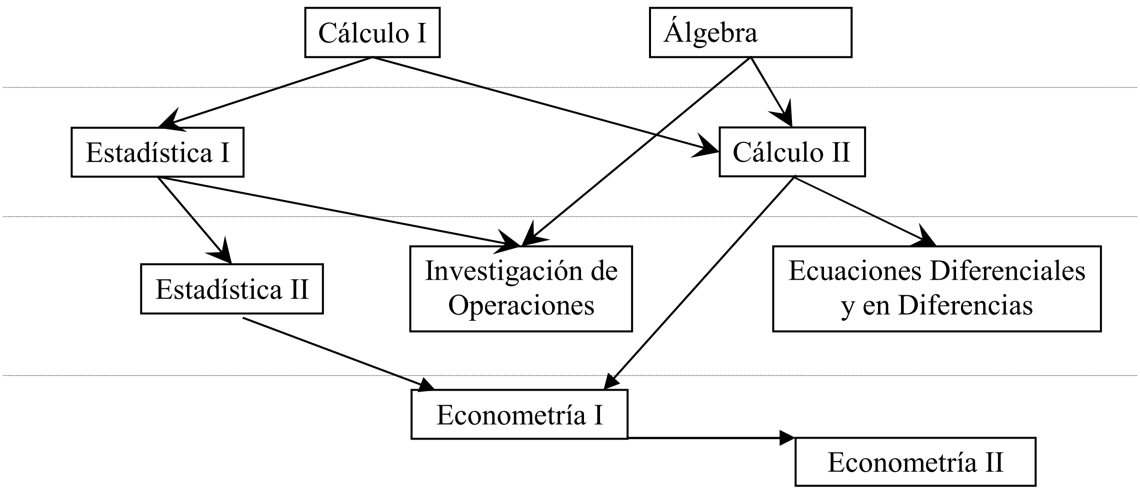
En el Área de Formación Básica General las asignaturas son:

- Habilidades del Pensamiento Crítico y Creativo
- Computación Básica
- Inglés I
- Inglés II
- Lectura y Redacción a través del Análisis del Mundo Contemporáneo

En el Área de Formación Básica de Iniciación a la Disciplina las asignaturas son:

- Introducción a la Teoría Económica
- Epistemología y Metodología de las Ciencias Sociales
- Historia Económica General
- Teoría de las Organizaciones I
- Estado, Política y Sociedad
- Cálculo I
- Derecho Económico
- Álgebra Lineal

Las asignaturas relacionadas con los métodos cuantitativos, de acuerdo con la normatividad del Plan de Estudios, poseen una secuencia de estudio (ver Esquema 3.1).



Esquema 3.1 *Seriación de las Experiencias Educativas de Métodos Cuantitativos.*

Dicha secuencia presupone la necesidad de aprobar Cálculo I y Álgebra Lineal para tener derecho a cursar otras asignaturas. En el caso particular de la asignatura Cálculo I, el aprendizaje de los estudiantes, Cuesta (2005), resulta ser un proceso difícil y complejo, provocado, entre otras causas, por la insuficiente preparación en otros niveles de enseñanza.

El nivel de conocimientos, de los estudiantes que inician estudios de economía, resulta ser insuficiente para acceder a las complejas estructuras y relaciones que exige el estudio de las funciones, sus distintos sistemas de representación como el lenguaje gráfico o el algebraico, y los numerosos subconceptos asociados, en particular el concepto de extremo. Por esta razón, y como parte de la estrategia de la Facultad de Economía, se diseña y aprueba una nueva asignatura: *Introducción a los Métodos Cuantitativos*, cuyo objetivo (ver contenidos en Anexo 2) es proporcionar, a los estudiantes de nuevo ingreso, la opción de consolidar o, en algunos casos, adquirir habilidades elementales de cálculo numérico–algebraico, destrezas y aptitudes para la representación gráfica de relaciones cuantitativas, así como capacidad de razonamiento abstracto para el planteamiento y resolución de problemas matemáticos. Es una asignatura optativa, cuyo proceso de enseñanza se desarrolla, fundamentalmente, a través de la corresponsabilidad maestro–alumno.

Es precisamente en este contexto y bajo estas condiciones donde se realiza la investigación, con el propósito de contribuir a varios aspectos de la práctica educativa, entre los que destacan: la planificación y gestión de los cursos, la metodología de enseñanza, el papel del profesor y el papel del estudiante, como constructor activo de su propio conocimiento. La investigación toma en consideración la experiencia y opiniones del colectivo de profesores de matemática de la Facultad de Economía y se orienta dentro del paradigma constructivista. Parte de las ideas, las dificultades y errores de los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función, con el objeto de describir e interpretar el comportamiento durante y después de aplicar un nuevo entorno de enseñanza, la unidad didáctica: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función*", que son contenidos teóricos del programa de estudios de Calculo I (ver contenidos en Anexo 3), pero no están organizados en una misma unidad didáctica.

A partir de la aplicación de la unidad didáctica, la investigación es descriptiva y de carácter cualitativo. Su metodología es interpretativa, orientada a identificar los significados y dificultades de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. No obstante, se utiliza para algunos constructos la cuantificación y la medida, como forma de establecer relaciones entre ellos. Es una investigación básica, según la clasificación que realiza de Del Rincón et al (1992), orientada a la búsqueda de nuevos conocimientos sobre el fenómeno de estudio y utiliza una vía de análisis inductivo en el contexto de un estudio de campo.

Este estudio se realiza en las clases impartidas a un grupo de estudiantes, quienes deciden cursar la asignatura "*Introducción a los Métodos Cuantitativos"*. En este curso, y por decisión del colectivo de profesores del Departamento de Matemáticas, se introduce la unidad didáctica: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función"* como primer tema de estudio, con el propósito de estudiar las ideas de los estudiantes en un dominio concreto: *los conceptos de función y extremo de una función*, que se pone de manifiesto en el contexto de: *la clase de matemáticas*.

La unidad didáctica es, tanto una organización metodológica de los contenidos matemáticos: desde el concepto de función, las características de su comportamiento, sus formas de representación hasta llegar al concepto de extremo como el principal instrumento del esquema de investigación que a continuación se expone.

3.2 Esquema general de desarrollo de la investigación

De acuerdo con los objetivos de la investigación, para poder estudiar los procesos que tienen lugar en el aula y a partir de ella, así como los esquemas de actuación de los estudiantes, se planifica un escenario de investigación en tres etapas:

Etapa I: Diseño del Experimento. En esta etapa se diseñan todos elementos de la unidad didáctica, es decir:

- Los objetivos del proceso de enseñanza aprendizaje,
- Los contenidos y su secuenciación,
- Las actividades y tareas de aprendizaje, y
- Las orientaciones de carácter metodológico para el profesor.

Las tareas concretas son:

I a) <u>Elaboración del material didáctico para la clase:</u> Este material es la guía de trabajo del estudiante; en él se precisan los objetivos de enseñanza aprendizaje, las actividades y tareas objeto de estudio, así como la secuencia de este proceso.

I b) <u>Elaboración del material de trabajo extraclase:</u> Este documento contiene un conjunto de tareas (problemas) de trabajo extraclase, que se deben responder de manera individual o en grupos de estudiantes, según lo oriente el profesor.

I c) <u>Elaboración de las orientaciones metodológicas para el desarrollo de la unidad:</u> Se hallan en un documento que contiene un conjunto de orientaciones de carácter metodológico, que puede servir de ayuda al profesor durante el desarrollo de la unidad.

Etapa II: Aplicación y Experimentación. Constituye la parte fundamental de la investigación. Se observa el proceso de aprendizaje de los estudiantes en:

1. Las sesiones (clases) de un grupo de estudiantes, que en lo sucesivo denominaremos “*grupo de estudio*”, bajo la dirección del profesor, y en las que el investigador participa como observador con el objetivo de obtener datos sobre el proceso de aprendizaje.

2. Las sesiones de un subgrupo de estudiantes, que en lo sucesivo denominaremos “*muestra”*, donde se deben analizar las respuestas a las tareas orientadas por el profesor en las sesiones del grupo. Éste es un ambiente de trabajo idóneo para exponer, analizar y debatir, tanto las ideas como las dificultades surgidas en el aprendizaje. La misión del investigador es orientar el trabajo de los estudiantes que componen la muestra y obtener datos para la investigación.

Las tareas a realizar son:

II a) <u>Selección del Grupo de Estudio</u>

Se debe seleccionar, del conjunto de estudiantes de nuevo ingreso, a un grupo para cursar la asignatura *“Introducción a los Métodos Cuantitativos”.* El proceso de selección se realiza mediante la ejecución y análisis de una evaluación diagnóstica, la cual se propone a todos los estudiantes de la generación que comienza estudios de economía en agosto de 2006.

II b) <u>Inicio de la unidad didáctica</u>

El propósito de la primera sesión de trabajo con el grupo de estudio consiste en exponer la idea general y los objetivos de la unidad didáctica. Se pretende además, motivar un ambiente de trabajo cooperativo entre todos los participantes. En esta primera sesión se aplica el primer instrumento de recogida de datos de la investigación: la *Prueba Inicial* de la unidad (se muestra en el Anexo 4), con la cual, a diferencia de la evaluación diagnóstica, se pretende obtener información, tanto para la investigación como para el proceso de enseñanza de los contenidos implicados en la unidad didáctica.

II c) <u>Selección de una muestra de estudiantes</u>

Consiste en seleccionar la muestra de estudiantes que deberá participar en 10 sesiones de trabajo con el investigador, en horario diferente al de las clases del grupo de estudio.

II d) <u>Desarrollo de la unidad didáctica</u>

Es el conjunto de todas las actividades de aprendizaje, que realiza el grupo bajo la orientación del profesor. Este proceso se desarrolla, tanto en sesiones de clases como de manera individual en horario diferente al de las clases.

II e) Desarrollo de las sesiones de trabajo de los estudiantes de la muestra

Consiste en el trabajo colectivo de la muestra, para analizar las respuestas individuales a los problemas del trabajo extraclase. El propósito del investigador es motivar y facilitar el intercambio de ideas entre los estudiantes, así como obtener datos sobre la forma en que los estudiantes llegan (individual y colectivamente) a la solución de los problemas planteados.

Etapa III: Análisis del Proceso de Aprendizaje. Tiene por objeto la descripción, interpretación y análisis del aprendizaje, durante y después de aplicar la unidad didáctica. Evaluar, tanto el proceso de aprendizaje como la unidad didáctica tiene por objetivos:

1. Conocer que significados confieren los estudiantes a los conceptos función y extremo de una función.
2. Identificar las dificultades y errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, con la aplicación de la unidad didáctica.
3. Evaluar la propia unidad didáctica y su desarrollo como instrumento de aprendizaje.

Las tareas a desarrollar son:

III a) Organización y procesamiento de datos de la prueba final de la unidad didáctica.

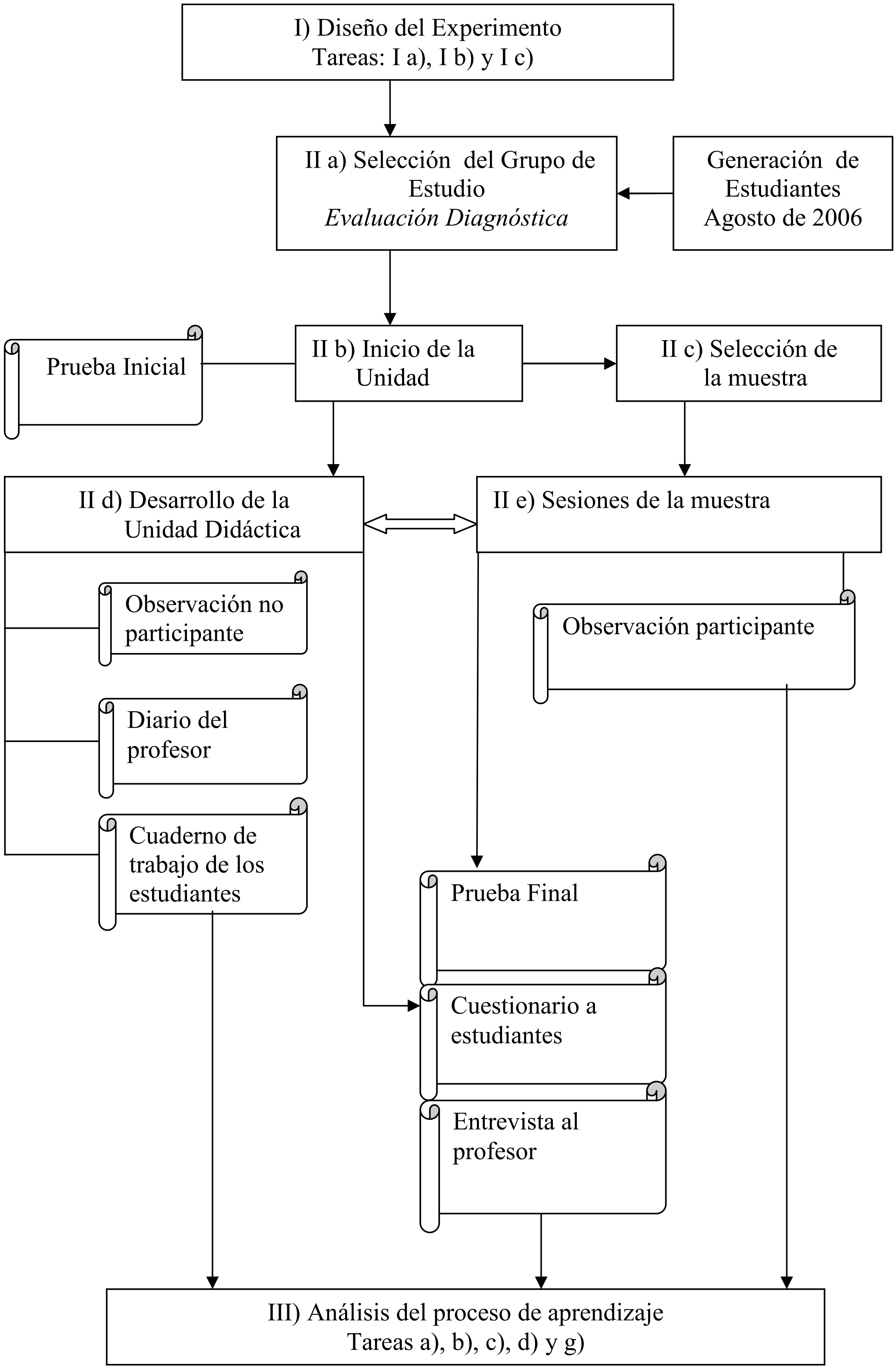
III b) Análisis de significados y dificultades del grupo de estudio en la prueba final.

III c) Análisis de significados y dificultades de la muestra en la prueba final.

III d) Localización de dificultades en el proceso de aprendizaje de la unidad didáctica.

III e) Evaluación de la unidad didáctica.

El proceso de investigación, sus etapas y tareas se pueden sintetizar en una secuencia de trabajo de investigación (ver Esquema 3.2), cuyos instrumentos de recogida de datos se exponen en el apartado 3.4



Esquema 3.2 *Esquema general del proceso de investigación.*

3.3 Diseño y elaboración de la unidad didáctica

Para el diseño de la unidad didáctica se toma como punto de partida el diagnóstico realizado, Cuesta (2005), sobre las dificultades de los estudiantes de Economía de la UV en el aprendizaje del concepto de extremo de una función. En éste se pone de manifiesto que las dificultades en la comprensión del concepto de extremo derivan, en muchas ocasiones, del conocimiento que se tiene sobre el concepto de función, hasta el punto que la propia definición de función constituye una dificultad en el aprendizaje de extremo. Cuando los estudiantes se enfrentan a la representación gráfica de la función explican la existencia de sus puntos extremos a partir de una interpretación literal de la gráfica, producido por la incomprensión del comportamiento de la variable dependiente.

Por otra parte, y no menos importante para el diseño de la unidad, es el consenso sobre las dificultades propias del sistema de enseñanza actual. El proceso de enseñanza-aprendizaje, desarrollado a través de las exposiciones del profesor y centrado en propiciar el dominio de destrezas, constituye un ejercicio poco provechoso y muy incompleto para el estudiante. En el caso particular del concepto de función, la reiteración de tareas con algunas aplicaciones en teoría económica tiene como único resultado que los estudiantes asocien la función con una ecuación algebraica, que se utiliza sólo para determinar valores a partir de procedimientos preestablecidos.

Un tercer elemento es precisamente el nuevo modelo (MEIF) que se implementa en el ejercicio de la docencia de la Facultad de Economía, el cual supone, ante todo, un cambio en la manera de gestionar la enseñanza y el aprendizaje, aprovechando el conocimiento inicial del estudiante, así como la utilización de modelos matemáticos para expresar las relaciones que se establecen en el sistema económico. Bajo esta premisa, la unidad didáctica se puede constituir en una organización metodológica de los contenidos matemáticos, desde la interpretación de gráficas, la idea intuitiva de los fenómenos de cambio, el concepto de función y sus formas de representación, hasta llegar al concepto de extremo de una función.

Unido a lo antes expuesto, para el diseño de la unidad didáctica se toman en consideración otros elementos importantes de información. A continuación se detalla el aporte de cada una de ellos:

1) El plan de estudios de la Facultad de Economía.

La propuesta, en el proceso de enseñanza- aprendizaje, de una nueva asignatura: *"Introducción a los Métodos Cuantitativos"* (ver Anexo 2) es un intento por desarrollar, entre otras, destrezas en la representación gráfica de relaciones cuantitativas, que son analizadas posteriormente, y con mayor profundidad, en los contenidos teóricos del programa de estudios de Calculo I (ver Anexo 3). En este contexto se puede insertar la unidad como instrumento de aprendizaje que estimule este proceso y permita su posterior análisis.

2) Las consideraciones de otros profesores de la Facultad de Economía.

En opinión de algunos profesores es necesario un cambio en la forma de abordar y gestionar los contenidos teóricos de función y extremo de una función. En respuesta a cuestionario abierto, algunos profesores de Cálculo y Economía proponen algunos elementos de conocimiento que, en tanto son importantes para las asignaturas que imparten, se deben tener presente en el diseño de la unidad didáctica. Las ideas propuestas por cuatro profesores (ver Anexos 5.1, 5.2, 5.3 y 5.4) se pueden resumir como sigue:

- Analizar e interpretar la gráfica como la representación geométrica de la función.
- Profundizar en la interpretación de gráficas de líneas (continuas o discontinuas).
- Estudiar el concepto de función a partir de la relación de dependencia entre variables.
- Profundizar en la relación funcional entre variables, así como en la justificación de sus denominaciones: independiente y dependiente.
- Analizar y proponer ejemplos de funciones con un carácter informal, que permita indicar que una variable depende de otra, o más variables.
- Abordar la idea intuitiva de puntos extremos de una función, tal y como se exponen en las teorías del productor y del consumidor, preferentemente sin utilizar herramientas de cálculo diferencial.

3) Las aportaciones teóricas de algunas fuentes bibliográficas, entre las que destacan: Azcárate y Deulofeu (1990), Janvier (1987_a) y Sell Centre for Mathematical Education (1990).

En estas obras se abordan ideas muy importantes sobre funciones y gráficas, especialmente en el trabajo de Azcárate y Deulofeu (1990) donde se examina el lenguaje gráfico como eje fundamental del currículo; se propone una forma intuitiva y visual que permite un acercamiento paulatino al concepto de función. Partimos de la consideración de que este enfoque puede se ser válido en el estudio de funciones en Ciencia Económica.

En base a lo antes expuesto se diseñan todos los elementos (Etapa I) de la unidad didáctica, cuya versión final fue analizada, en mayo de 2006, por el colectivo de profesores del Departamento de Métodos Cuantitativos de la Facultad de Economía. A continuación se exponen su idea y contenido.

La unidad didáctica: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función*" es un conjunto de actividades de enseñanza-aprendizaje, contenidas en tres secuencias de aprendizaje:

SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*

SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*

SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

Los contenidos a estudiar, de cada secuencia, se sintetizan en dos documentos de trabajo para el estudiante y un documento de carácter metodológico para el profesor. Éstos son:

1. <u>El material de clase</u>: Este documento (ver Anexo 6) inicia con una breve introducción, donde se le expone al estudiante los objetivos de aprendizaje; resume todas las actividades a desarrollar en clase, ya sea de manera individual o en grupos de estudiantes. Las actividades de aprendizaje están diseñadas para que el estudiante se familiarice primero con las ideas intuitivas que le permitan, posteriormente, elaborar los aspectos conceptuales que se estudian en la unidad.

2. <u>El material de trabajo extraclase</u>: En este documento (ver Anexo 7) se hallan todas las tareas (problemas) que deben realizar los estudiantes, de manera individual y en horario diferente al de las clases.

3. <u>El material de orientaciones metodológicas</u>: Este documento de trabajo para el profesor (ver Anexo 8) es una propuesta o conjunto de recomendaciones en referencia a la forma de abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos implicados en la unidad didáctica. Posee una breve introducción a la unidad didáctica, en la que se precisan los objetivos de enseñanza.

La unidad es concebida para que el profesor desarrolle la actividad de guiar el aprendizaje, así como de crear las condiciones propicias para que los estudiantes desarrollen un aprendizaje reflexivo y creativo.

<u>Objetivos de enseñanza:</u> Se pretende que los estudiantes:

- Se familiaricen con el conocimiento que nos aportan las gráficas, así como con el significado que poseen en cada situación estudiada.
- Comprendan, a partir del análisis de ejemplos concretos de fenómenos de cambio, las ideas de variable y de dependencia funcional entre variables.

- Puedan reconocer, en cada situación estudiada, la variable independiente y la variable dependiente, así como las unidades que puede asumir cada variable.
- Logren familiaridad con un conocimiento intuitivo y global del concepto de función, a partir de los diferentes lenguajes en los que se puede representar este concepto: verbal, numérico (tablas), gráfico y algebraico.
- Se familiaricen con la idea intuitiva de puntos extremos de una función.

La aplicación de la unidad didáctica a un grupo de estudiantes es el soporte de un estudio de campo, para el que se diseñan instrumentos específicos de recogida de datos. A continuación se exponen y explican los principales instrumentos de recogida de los datos, necesarios para el análisis, tanto del proceso de aprendizaje como de la unidad didáctica.

3.4 Diseño de instrumentos de recogida de datos

De acuerdo con el proceso general de desarrollo de la investigación (resumido en el esquema 3.2), se decide adoptar una estrategia de recogida de datos, sobre el proceso de aprendizaje, enfocada a cuatro entornos diferentes:

1. En el inicio de la unidad didáctica.
2. Durante el desarrollo de la unidad didáctica con el grupo de estudio.
3. En las sesiones de trabajo del investigador con la muestra de estudiantes.
4. En la fase conclusiva de la unidad didáctica.

I) Instrumento aplicado en el inicio de la unidad

<u>Prueba inicial</u>

Constituye el primer instrumento de recogida de datos de la investigación (ver Anexo 4) y se aplica en la primera sesión de la unidad didáctica. La prueba contiene un conjunto de situaciones (problemas), que tiene relación con la interpretación de gráficas, así como con los conceptos de función y extremo de una función. Su propósito es conocer, por una parte, el nivel de conocimientos del grupo sobre los conceptos que serán objeto de estudio en la unidad y, por otra parte, conocer la forma de abordar y/o de llegar a la solución de los problemas planteados.

II) Instrumentos aplicados en el desarrollo de la unidad

Observación no participante

Como técnica de investigación, este tipo de observación permite contemplar, de manera sistemática y detenidamente, como se desarrolla la vida social sin manipularla ni modificarla, (Ruiz e Ispizúa (1989), cit por Del Rincón et al (1992)), tal como discurre por si misma. Según la metodología, propuesta por Anguera (1988), ésta se debe realizar mediante un registro sistemático y específico de la conducta generada de manera espontánea en un contexto determinado. Para nuestra investigación en particular, el hecho de observar las actuaciones de los estudiantes es, en esencia, un intento de registrar la conducta espontánea en el ambiente natural en el que se desarrollan las clases de la unidad didáctica.

De acuerdo a la distinción que realiza Goetz (1988) podemos considerar, en nuestro caso, un nivel mínimo de interacción del investigador con los estudiantes. De igual forma, y siguiendo la clasificación de Mc Kernan (2001), es una observación no-participante: el investigador no se compromete con los roles y el trabajo del grupo, se mantiene apartado y alejado de la acción y de las conductas de los miembros del grupo. Su registro se realiza mediante notas de campo escritas.

Objetivos de la observación: Esta observación pretende registrar:

1) Los elementos en el trabajo de los estudiantes que se identifiquen con los significados y/o dificultades en el proceso de aprendizaje.
2) Los procedimientos y habilidades que se utilizan en la explicación y la argumentación.

Se desea observar el discurso de los estudiantes cuando establecen comunicación en el proceso de aprendizaje, es decir, cuando el estudiante interviene en alguna de las acciones siguientes:

- responde a una pregunta objeto de análisis,
- explica y/o argumenta sus ideas personales durante la clase, o
- pregunta y/o solicita la colaboración, del profesor o de sus compañeros, para esclarecer cualquier duda o solucionar una dificultad.

De acuerdo a la clasificación que realiza Del Rincón et al (1992), proponemos una observación directa para registrar las conductas manifiestas, que sean directamente percibidas en la clase. Su estrategia es inductiva, en tanto que asume lo que es observado en la clase y se apoya en los datos recolectados por el investigador.

Diario de clases del profesor

El diario es una forma de describir lo que sucede realmente, desde el punto de vista de la persona que lo escribe. Como herramienta general de la investigación educativa, el diario se puede emplear para fomentar la descripción, la interpretación, la reflexión y la evaluación, tanto por parte del profesor como por parte del alumno. *"Es un documento personal, una técnica narrativa, y registro de acontecimientos, pensamientos y sentimientos que tienen importancia para el autor"* (Mc Kernan 2001, p. 105).

Se propone que el profesor realice un diario a partir de su apreciación personal de lo ocurrido en las clases, con datos sobre el avance y la regresión de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje. Se propone utilizar el diario como una herramienta de evaluación del profesor respecto a las tareas, su ejecución y desarrollo, así como al nivel de aprendizaje de los estudiantes durante el desarrollo de la unidad. Es de carácter personal y ámbito de competencia del profesor, no obstante se proponen algunas recomendaciones sobre su realización:

- Realizar registros regularmente, a ser posible en cada sesión de la unidad.
- Registrar hechos, acompañados de relatos interpretativos cuando sea posible.

Cuaderno de trabajo del estudiante

Entendemos por cuaderno de campo, en esta investigación, la libreta que el estudiante utiliza para dar respuesta a los problemas planteados en el trabajo extraclase. Por su naturaleza el cuaderno de campo es un documento personal, que es definido como: *"cualquier tipo de registro escrito no motivado por el investigador, que posee un valor afectivo y/o simbólico para el sujeto estudiado"* (Del Rincón et al 1992, p 343).

En el cuaderno de trabajo, a diferencia de la libreta tradicional, el estudiante debe escribir las respuestas a los problemas de tareas, que deben ser entregadas al profesor. Se solicita a los estudiantes que realicen anotaciones y/o comentarios escritos respecto a dichos problemas; dichas anotaciones pueden ser: grado de dificultad observable, nivel de comprensión y dificultades observadas.

El interés por estudiar y analizar el cuaderno de trabajo del estudiante consiste en obtener evidencia detallada del discurso escrito de los estudiantes, así como de sus experiencias personales con las tareas de la unidad didáctica. El estudio del cuaderno de trabajo debe aportar elementos sobre el proceso de aprendizaje, así como sobre el nivel de comprensión de los conceptos estudiados y, por otra parte, constituye un medio para conocer las percepciones de los estudiantes sobre el proceso de enseñanza.

III) Instrumento aplicado en las sesiones de la muestra

Observación participante

El objetivo de la observación es realizar un estudio de casos, entendido como una descripción interpretativa de las actuaciones de un subgrupo de estudiantes cuando intercambian ideas y analizan la manera de abordar los problemas propuestos. El estudio de casos es una forma de describir lo que ocurre cuando los estudiantes estudian o dan respuesta a los problemas emanados de la clase, es decir, una descripción de los significados y dificultades en el proceso de aprendizaje.

En este tipo de observación, como aconseja Mc Kernan (2001), el investigador debe tomar parte de la vida del grupo e interactuar con ellos. En nuestro caso, el investigador debe contemplar la actividad, escuchar y tomar partido como catalizador del intercambio de ideas entre los estudiantes. Esta observación del trabajo cooperativo de los estudiantes de la muestra posee las siguientes peculiaridades:

- Se realiza en el despacho del investigador y en completa privacidad.
- Se utiliza una combinación de estrategias: la observación directa, las entrevistas informales, la recogida de documentos escritos por los estudiantes, así como el contacto previo e intercambio de ideas del investigador con cada estudiante en particular.
- Se estudia situaciones de casos concretos, tanto de la interacción de los estudiantes de la muestra, como de cada uno de sus miembros en particular.

La fuente principal de registro de datos es la grabación en cintas de audio, complementada con notas de campo del investigador y notas escritas de los propios estudiantes.

IV) Instrumentos aplicados en la fase conclusiva de la unidad didáctica

Prueba Final

Esta prueba se aplica al final de la unidad didáctica; permite obtener datos sobre nivel de conocimiento de los estudiantes respecto a los conceptos estudiados Se trata de una prueba compuesta por siete preguntas (ver Anexo 9), de cuyas respuestas se puede conocer, tanto los significados que el estudiante confiere a los conceptos de función y extremos de una función como las dificultades vinculadas a tareas de construcción y/o interpretación del concepto de función.

Cuestionario a lo estudiantes

Esta resumido en un conjunto de preguntas (ver Anexo 10) que se propone a los estudiantes con el objetivo de para conocer la percepción que se tiene sobre la unidad didáctica, así como las dificultades, problemas y errores del proceso de enseñanza aprendizaje. Los datos permitirán evaluar tanto la unidad didáctica, como su aplicación.

Entrevista al profesor

Es un conjunto de preguntas, de carácter no estructurado, con el objeto de conocer la percepción del profesor, sobre los aciertos y desaciertos de la unidad didáctica. Tiene el propósito de profundizar en las argumentaciones del profesor sobre los problemas y dificultades específicas observadas en el aprendizaje de los conceptos estudiados en la unidad didáctica.

El conjunto de instrumentos para la obtención de datos se aplica en el estudio de campo. Con esta finalidad se decide seleccionar un grupo de estudio, que debe participar en todas las clases de la unidad didáctica y una muestra de estudiantes de dicho grupo, que debe participar en las sesiones de trabajo con el investigador. A continuación se expone el proceso de selección, tanto del grupo como de la muestra de estudiantes.

3.5 El proceso de selección del grupo de estudio y la muestra

Como parte de la estrategia de la Facultad por elevar el rendimiento académico, se realiza, cada año, una evaluación diagnóstica (examen), de carácter optativo y que tiene por objeto conocer y caracterizar el nivel de conocimiento matemático de los estudiantes de nuevo ingreso. La evaluación contiene un conjunto de preguntas que abarca diferentes entornos del conocimiento matemático: aritmético, algebraico, teoría de conjuntos, entre otros.

Se conoce que dichos entornos fueron objeto de aprendizaje en los niveles de enseñanza precedentes a la Universidad, razón por la cual debemos suponer que el nivel de conocimiento en estos dominios puede afectar, de manera positiva o negativa, la comprensión de los conceptos de función y extremo de una función.

De toda la generación (110 estudiantes) que inició estudios en agosto de 2006 participaron en la evaluación un total de 71 estudiantes (65%), a quienes se le solicitó responder un total de 25 preguntas (ver Anexo 11), agrupadas en cinco áreas de interés: aritmética (6 preguntas), álgebra (6 preguntas), teoría de conjuntos (4 peguntas), desigualdades e intervalos en el recta real (4 preguntas), y el plano cartesiano y trazado de gráficas (5 preguntas). De este modo, la puntuación máxima de la evaluación diagnóstica (25 puntos) se obtiene por la suma de los aciertos de cada una de las áreas evaluadas.

Los resultados, ordenados de manera descendente (ver Anexo 12), sitúan el nivel de conocimiento de los estudiantes evaluados .Si asumimos por calificación aprobatoria 60 puntos/100, resulta que 46 de los 71 estudiantes, el 64%, no logran aprobar la evaluación diagnóstica. Los resultados de conocimiento por áreas (ver Tabla 3.2) muestran que los mayores problemas para responder se hallan en tres entornos de aprendizaje: aritmética, teoría de conjuntos y desigualdades e intervalos en la recta real. Muchos estudiantes no logran responder, en estas áreas, a más de dos preguntas de la evaluación.

	ARITMETICA	ALGEBRA	CONJUNTOS	DESIGUALDADES	GRÁFICOS
NÚMERO DE ACIERTOS					
6	2	13	-	-	-
5	10	15	-	-	7
4	16	14	3	2	13
3	18	13	11	11	28
2	17	12	16	13	10
1	7	4	22	25	8
0	1	0	19	20	5
TOTAL	71	71	71	71	71

Tabla 3.2 *Resumen de aciertos por área de conocimiento en la evaluación diagnóstica.*

A partir de estos resultados, para la selección del grupo de estudio que debe participar en la asignatura *"Introducción a los Métodos Cuantitativos"* y en la unidad didáctica, se consideran tres criterios:

1. La necesidad, a petición de las autoridades de la Facultad de Economía, de preparar en esta asignatura a los estudiantes que obtuvieron menos de 16 aciertos en la evaluación diagnóstica
2. La disposición de los estudiantes propuestos a inscribirse en esta asignatura.
3. La intención de otros estudiantes por inscribirse.

De este modo, el grupo de estudio queda constituido por un total de 58 estudiantes, quienes, según los resultados de la evaluación diagnóstica, poseen un nivel bajo de conocimiento que puede afectar, en alguna medida, al proceso de aprendizaje de los contenidos de la unidad didáctica. Su estructura por sexo (ver Tabla 3.3) es:

Estudiantes del grupo	Cantidad	Porcentaje
Mujeres	30	52 %
Hombres	28	48%
Total	58	100%

Tabla 3.3 *Estructura por sexo del grupo seleccionado*

La tarea de seleccionar la muestra se realiza en la primera sesión de la unidad didáctica con el grupo seleccionado. En ésta sesión inicial se exponen los objetivos de la investigación, así como de la necesidad seleccionar un reducido grupo de estudiantes para realizar actividades de aprendizaje bajo la orientación y asesoría del investigador. El profesor solicita la disposición de los estudiantes, quienes, de ser seleccionados, deben realizar y analizar las tareas en horario diferente al de las clases. De este modo, el proceso de selección de la muestra se basa en dos aspectos:

- La disposición de los estudiantes por pertenecer a la muestra.
- Que la muestra contenga estudiantes de ambos sexos.

La muestra queda constituida por 6 estudiantes, éstos son: Antonio, Esteban, Madomna, María, Patricia y Sergio.

A continuación exponemos la manera en que se ejecutan los procesos de recogida y análisis de datos de la investigación.

3.6 Los procesos de recogida y análisis de datos

La recogida de los datos para la investigación es un proceso continuo que comienza con el inicio de la unidad didáctica, continúa durante el desarrollo de las sesiones de trabajo del grupo y la muestra, y culmina con la tarea de obtener datos finales sobre el aprendizaje de los estudiantes, así como de la valoración del grupo respecto a la unidad didáctica. Este proceso se planifica y ejecuta en cuatro períodos diferentes: (i) en el inicio de la unidad didáctica, (ii) durante las clases de la unidad que realiza el grupo con el profesor, (iii) en las sesiones de la muestra de estudiantes con el investigador, y (iv) al culminar la unidad didáctica. A continuación de detalla cada uno de ellos:

<u>En el inicio de la unidad:</u> En su introducción se explican los objetivos e importancia de la unidad como instrumento de aprendizaje dentro del curso. Después de entregados a

cada estudiante los documentos: material de clase y material de trabajo extractase, se aplica el primer instrumento de recogida datos: la prueba inicial, para la que se destinan dos horas de trabajo individual de los estudiantes.

En las clases de la unidad: La unidad didáctica se desarrolla en el período comprendido entre el 30 de agosto y el 6 de octubre de 2006. Cabe mencionar que las tres secuencias de la unidad didáctica y sus respectivas actividades de aprendizaje se planifican (ver Tabla 3.4) en el inicio de la asignatura "*Introducción a los Métodos Cuantitativos*" y en correspondencia con el esquema general de desarrollo de la investigación.

Clases	**Contenidos analizados en clases**	**Tareas solicitadas por el profesor**
SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*		
No 1: 2 horas	Actividades 1 y 2	Problemas 1.1 y 1.2
No 2: 2 horas	Actividades 3 y 4	Problemas 1.3, 1.4
No 3: 2 horas	Actividades 5 y 6	Problemas 1.5 y 1.6
SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*		
No 4: 2 horas	Actividades 8 y 9	Problemas 2.1 y 2.2
No 5: 2 horas	Actividades 10 y 11	Problemas 2.3 y 2.4
No 6: 2 horas	Actividades 12 y 13	Problemas 2.5 y 2.6
SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*		
No 7: 2 horas	Lectura de notas introductorias El concepto de función	Problemas 3.1 y 3.2
No 8: 2 horas	Comportamiento de la Función: Crecimiento y Decrecimiento Actividades 16 y 17	Problemas 3.3, y 3.4
No 9: 2 horas	La idea de Puntos Extremos Actividad 18	Problemas 3.5 y 3.6

Tabla 3.4 *Secuencia de contenidos de la unidad didáctica*

De este modo, la secuencia de actividades propuesta hizo posible la aplicación de tres instrumentos de recogida de datos:

1. La observación no participante realizada por el investigador.
2. El diario de clases realizado por el profesor.
3. Cuaderno de trabajo del estudiante.

En las sesiones de la muestra: Las respuestas a las tareas solicitadas por el profesor son analizadas en sesiones de trabajo (ver Tabla 3.5) de los miembros de la muestra. Los estudiantes de la muestra se enfrentan a un trabajo cooperativo de discusión e intercambio de ideas, donde se analizan, tanto las respuestas individuales como la manera de abordar los problemas propuestos por el profesor.

Cada sesión de trabajo es grabada en audio, y la información es complementada con el registro sistemático de las respuestas individuales de los estudiantes. La observación participante, y como consecuencia el estudio de casos, se realiza durante todo el ciclo en que se desarrolla la unidad didáctica. El propósito es obtener evidencia sobre los significados y dificultades de los estudiantes, que se manifiestan en las respuestas a los problemas de tareas.

Sesiones de trabajo	Respuestas analizadas
No1	Prueba inicial
No 2	Problemas 1.1 y 1.2
No 3	Problemas 1.3 y 1.4
No 4	Problemas 1.5 y 1.6
No 5	Problemas 2.1 y 2.2
No 6	Problemas 2.3 y 2.4
No 7	Problemas 2.5 y 2.6
No 8	Problemas 3.1 y 3.2
No 9	Problemas 3.3 y 3.4
No 10	Problemas 3.5 y 3.6

Tabla 3.5 *Sesiones de trabajo de la muestra*

Al culminar la unidad didáctica: Es la fase final del proceso de recogida de datos, en ella se aplican tres instrumentos:

1. La prueba final de la unidad: Se realiza una semana posterior al término de la unidad didáctica.
2. El cuestionario a los estudiantes: Se propone a los estudiantes en fecha posterior a la aplicación de la prueba final.
3. La entrevista al profesor: Se realiza después de culminado el curso *"Introducción a los Métodos Cuantitativos"*.

El proceso de análisis de datos se realiza en orden inverso al proceso de recogida de datos. Comienza por el estudio y análisis de las respuestas de los estudiantes en la prueba final, en el que diferenciamos dos sujetos: el grupo de estudio y la muestra, y dos objetos de análisis: los significados sobre los conceptos de función y extremo de una función, y las dificultades vinculadas a tareas de construcción y/o interpretación del concepto de función. Los hallazgos detectados en las respuestas de la prueba constituyen la base para la búsqueda de otras dificultades en el proceso de aprendizaje.

De este modo, en el desarrollo de la unidad se analizan otras dificultades, que se ponen de manifiesto, tanto en el trabajo individual (trabajo extraclase) como en el desarrollo de las clases del grupo de estudio. Se divide aquí el análisis en dos objetos de estudio: las respuestas a algunos de los problemas más significativos del material de trabajo extraclase y las observaciones realizadas por el investigador en las clases, complementadas con las notas escritas en el diario del profesor. El análisis culmina con una evaluación de la unidad como instrumento de enseñanza, en base a los datos de tres fuentes: las pruebas inicial y final, el cuestionario aplicado a los estudiantes y la entrevista al profesor.

En el siguiente capítulo se detallan todos los aspectos relativos al análisis de datos, tanto del proceso de aprendizaje como de la unidad didáctica, diseñada y desarrollada con el grupo de estudio.

Capítulo 4

ANÁLISIS DE DATOS

El análisis tiene por objetivo evaluar el aprendizaje que surge de la aplicación de la unidad didáctica; se pretende conocer el significado que confieren los estudiantes a los conceptos función y extremo de una función, así como las dificultades de su aprendizaje. Existe el propósito, además, de evaluar el instrumento de aprendizaje (la unidad didáctica), así como sus posibles aportaciones al proceso de enseñanza.

En correspondencia con la metodología propuesta, de la investigación didáctica emana un proceso continuo de recogida de datos, cuyas fuentes son:

1. Prueba inicial antes de comenzar la unidad didáctica.
2. Observación no participante, del investigador, en las clases.
3. Diario del profesor.
4. Cuaderno de trabajo individual de los estudiantes.
5. Observación participante, del investigador, con la muestra de estudiantes.
6. Prueba final al culminar la unidad didáctica.
7. Cuestionario aplicado a los estudiantes.
8. Entrevista al profesor.

La prueba final constituye la fuente más importante de información y es el inicio del proceso de análisis, por varias razones:

1. Es resultado del trabajo individual de los estudiantes en una situación controlada por el profesor.
2. Sus preguntas resumen los principales aspectos de conocimiento que fueron abordados en la unidad didáctica.
3. Los significados y dificultades observados en las respuestas a la prueba son resultado de las experiencias anteriores del estudiante, incluido la propia unidad didáctica como experiencia inmediata de aprendizaje.

Por otra parte, la prueba final es aceptada por el Departamento de Métodos Cuantitativos de la Facultad como examen parcial (evaluación) de los estudiantes inscritos al curso: *"Introducción a los Métodos Cuantitativos*". Por tal motivo le llamaremos *"prueba*" y *"examen*", según el contexto de referencia (investigación y asignatura respectivamente).

El conjunto de los 54 estudiantes, que participa en la prueba final se divide, para efectos del análisis, en dos subconjuntos: (i) la muestra, compuesta por los seis estudiantes que fueron sujetos de la observación participante del investigador, y (ii) el que denominaremos *grupo*, compuesto por los restantes 48 estudiantes. A continuación se exponen las tareas vinculadas al proceso de organización y procesamiento de los datos de la prueba final.

4.1 Organización y procesamiento de datos de la prueba final

El procesamiento de datos comienza con las respuestas que tienen relación directa con el enunciado de estos conceptos (función y extremo), para posteriormente clasificar las respuestas vinculadas a tareas de interpretación y/o construcción del concepto de función. El objetivo es clasificar, en diferentes categorías, tanto los significados de función y extremo de una función, como las dificultades que se ponen de manifiesto en tareas de construcción y/o interpretación del concepto de función.

Así, y con independencia del proceso de evaluación realizado por el profesor, todas las respuestas del grupo son depositadas en una matriz de datos, donde cada columna representa una respuesta específica a la prueba y cada fila a un estudiante. En el caso de la muestra, las respuestas son fotocopiadas en escáner y se realiza, además, una entrevista grabada en audio con el objetivo de conocer, en opinión de los estudiantes de la muestra, las dificultades y los argumentos utilizados para responder a cada pregunta de la prueba. De este modo, las siguientes categorías de respuestas hacen referencia directa a las respuestas del grupo en la prueba final.

4.1.1 Categorización de respuestas sobre el concepto de función

El conocimiento sobre el concepto de función se manifiesta en tres momentos diferentes: en respuesta a la pregunta 1 *¿Qué es función?*, en respuesta a la pregunta 2: *Plantea dos ejemplos de funciones* y en respuesta a la pregunta 3: *¿Representa la figura la gráfica de alguna función numérica de una variable?*

Pregunta 1: "*¿Qué es una función*? *Explica con tus palabras"*. Las respuestas (ver Anexo 13) se clasifican como sigue:

Regla: el estudiante reconoce la dependencia de una variable con respecto a la otra y explica, de manera parcial o total, la regla de la función. Ejemplo: *"función es aquella que tiene dos variables, independiente y dependiente, y al valor del dominio le corresponde uno del contradominio"*. En ocasiones se explica la regla inversa: se asume que, a cada valor de la variable dependiente le corresponde uno y solo un valor de la variable independiente. Ejemplo: *"es cuando una variable dependiente depende de otra independiente y a cada valor de la dependiente le corresponde uno de la independiente"*.

Dependencia entre variables: únicamente se hace mención, parcial o total, a la relación de dependencia de una variable con respecto a la otra. Ejemplo: *"función es aquella que tiene dos variables, una dependiente y otra independiente, una depende de la otra"*.

Relación entre valores: no se hace mención a las variables, tan solo a una relación entre valores o datos; en ocasiones se menciona un tipo de dependencia. Ejemplos: *"es una relación entre un valor y otro"* o *"cuando tenemos dos datos que tienen relación, uno independiente y otro dependiente"*.

Expresión matemática: se expone que una función es una ecuación o representación algebraica, que sirve para determinar o expresar algo; en ocasiones se reconoce la existencia de variables. Ejemplo: *"representación algebraica que muestra referencia de una cosa X con otra cosa Y"* o *"ecuación que existen cuando hay variable dependiente y otra independiente"*.

Otras: el estudiante expresa algo que no se puede clasificar en ninguna de las anteriores, y cuyo significado está muy alejado de aquellas. Ejemplo: *"es una interrelación entre un conjunto ordenado de individuos de la población*".

Pregunta 2: "*Plantea dos ejemplos de funciones. Señala en cada ejemplo la variable independiente y la variable dependiente*". Las respuestas (ver Anexo 14) se pueden clasificar como sigue:

Ejemplos de la unidad: se hace mención, parcial o total, a ejemplos que fueron tratados en clases de la unidad, con un reconocimiento de las variables involucradas. Ejemplo: *"los catetos de una triángulo y su área"*.

Ejemplos Nuevos: se propone y explica un ejemplo de función que no fue objeto de estudio en la unidad, es decir, un ejemplo de función diferente a los expuestos en clases. Ejemplo: *"el pago a un trabajador depende de la cantidad de horas trabajadas"*.

Pregunta 3: "*¿Representa la figura 1 la gráfica de alguna función numérica de una variable?"*. Las respuestas (ver Anexo 15) se clasifican como sigue:

Uso de la regla: en la respuesta se toma en consideración, en ocasiones de manera imprecisa, la regla de la función. Ejemplo: *"no es una función porque a cada valor de uno de los ejes le tocan dos valores"*. En algunos casos se considera la regla de manera incorrecta: se acepta que es función, cuando en realidad no es una función, haciendo uso de la regla. Ejemplo: "*si es función, hubo un ciclo ya que cada valor de x le toca uno de y"*.

Referencia a ejemplos conocidos: la respuesta se basa en recuerdos de ejemplos y/o explicaciones de clase, no relacionados con la regla de función. Ejemplos: *"no es función, no marca un inicio y un fin, no se sabe que representa"* o *"no sabría si lo es, en clase manejamos varias pero nunca este tipo de gráfica"*.

4.1.2 Categorización de respuestas sobre el concepto de extremo de una función

Pregunta 4: "*¿Qué entiendes por máximo relativo y por mínimo relativo de una función? Explica con tus palabras"***.** Las respuestas (ver Anexo 16) se clasifican como sigue:

Cambio de comportamiento: se explica el máximo (mínimo), a partir de la idea de que la función cambia su comportamiento, de un crecimiento (decrecimiento) a un decrecimiento (crecimiento). Ejemplo: *"máximo es cuando la función crece y después decrece".*

Valor en una localidad: se explica la existencia del máximo (mínimo) como un punto de la grafica, tal que los valores a su izquierda y derecha son menores (mayores). Ejemplo: *"mínimo es dentro de una intervalo el menor, y debe contar con valores mayores antes y después*".

Valor más alto: se entiende el máximo (mínimo) como el valor más alto (bajo) en la gráfica. Ejemplo: *"máximo, se puede observar en una grafica más fácilmente que es más alto que los demás".*

Aumento o disminución: se explica el máximo (mínimo), únicamente como el aumento (disminución) de los valores de la gráfica. Ejemplo: "*máximo es el mayor aumento que se puede mostrar en una gráfica"* o *"mínimo es cuando todos los valores decrecen en una gráfica".*

Pregunta 5: "*Traza la gráfica de una función que pase por los puntos A y B y tenga por lo menos un máximo relativo y un mínimo relativo. Señala cada uno de ellos"*. Las respuestas (ver Anexo 17) se clasifican como sigue:

Valores locales: el estudiante traza la grafica, que pasa por los puntos A y B, y señala los puntos extremos locales, máximos y mínimos.

Valores absolutos: el estudiante traza la grafica, que pasa por los puntos A y B, y señala los valores máximo y mínimo absolutos.

Línea recta: el estudiante traza una línea o segmento de recta, entre los puntos A y B, y señala el punto A como el máximo y el B como el mínimo.

No identifica: el estudiante, habiendo trazado o no la grafica que pasa por los puntos A y B, no puede señalar los valores extremos locales.

4.1.3 Categorización de respuestas sobre la representación gráfica de función a partir de una descripción verbal

Pregunta No 6 a) ***"****Dibuja la gráfica de Cambio de la velocidad con respecto al tiempo"* Las representaciones gráficas (ver Anexo 18) se pueden clasificar como sigue:

Cambio de velocidad: en este caso, comprendida la situación real, se grafica el comportamiento de la variable dependiente (velocidad) en el eje vertical y la variable independiente (tiempo) en el eje horizontal (aunque se puedan cometer errores).

Entorno físico: el estudiante expresa el cambio de la variable dependiente (velocidad) como un dibujo de la situación física (la montaña).

4.1.4 Categorización de respuestas sobre la dependencia de variables en contexto

Pregunta No 6 b) "*¿La velocidad es una función que depende del tiempo? Explica*". Las respuestas (ver Anexo 19) se clasifican como sigue:

Dependencia: se reconoce que la variable dependiente (velocidad) está en función de la variable independiente (tiempo). Ejemplo: *"si, el tiempo es la variable independiente y la velocidad es la variable dependiente, V = d/t."*

Dependencia inversa: se entiende que el tiempo es dependiente de la velocidad, es decir, una relación inversa de dependencia. Ejemplos: *"entre mayor velocidad menor tiempo*" o "*no, el tiempo es el que depende de la velocidad"*.

No se reconoce la dependencia: el estudiante, a partir del problema y de su propia representación gráfica, no reconoce que la velocidad depende del tiempo transcurrido. Ejemplos: *"no, se puede obtener cualquier velocidad sin importar el tiempo"* o "*la velocidad no depende del tiempo, depende de las condiciones del terreno*".

4.1.5 Categorización de respuestas sobre el comportamiento de la función

Pregunta No 6 c) "*¿Puedes decir algo sobre crecimiento y/o decrecimiento en esta situación?"*. Las respuestas (ver Anexo 20) se clasifican como sigue:

En función de la variable independiente: se reconoce que los cambios en el comportamiento de la velocidad (crecimiento y decrecimiento) están en función del tiempo; ésta crece en un intervalo de tiempo y decrece en otro.

En función de las condiciones físicas del terreno: se reconoce que los cambios en el comportamiento de la velocidad (crecimiento y decrecimiento) están en función del terreno, es decir, se entiende que la velocidad crece cuando la persona baja la montaña y decrece cuando la sube.

4.1.6 Categorización de respuestas sobre las construcciones (tabla y grafica) de una función, a partir de un entorno geométrico.

Preguntas No 7 a, b) *"Realiza una tabla de valores con los valores de un lado y los valores del área que se obtengan, ¿Cómo se puede representar esta relación mediante una gráfica?"*. Las representaciones (ver Anexo 21) se clasifican como sigue:

Se pueden representar: se puede, a partir de la comprensión del entorno geométrico, representar la función en las formas solicitadas: tabla y gráfica.

No se puede representar: no se comprenden las condiciones planteadas en el problema y, como consecuencia de ello, no se puede representar la función, como tabla y grafica.

Pregunta No 7 c) *"¿És ésta relación una función?, ¿Cuáles son las variables?".* Las respuestas (ver Anexo 22) se clasifican como sigue:

Se reconoce la función: se entiende que la relación es una función, donde la variable independiente es la longitud del lado y la variable dependiente es el área obtenida

No responde: no se da respuesta a esta pregunta

4.1.7 Categorización de respuestas sobre la construcción algebraica de una función

Pregunta No 7 d) "*Escribe una ecuación que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente".* Las respuestas (ver Anexo 22) se clasifican como sigue:

Se realiza traducción: se puede realizar la traducción, desde las formas de representación (tabla y gráfica), a la expresión algebraica.

No se realiza traducción: no puede, de la tabla y la gráfica, realizar la traducción a la expresión algebraica.

No se comprende: no se plantea la tabla y la gráfica y, como consecuencia, no se puede construir la expresión algebraica.

4.2 El proceso de análisis

El análisis comienza por estudiar y valorar los significados y dificultades en el contexto de la prueba final de la unidad didáctica, en la que diferenciamos los dos sujetos de investigación: el grupo y la muestra. Los resultados de este análisis tendrán consecuencia directa en la búsqueda y análisis de otros indicios sobre la existencia de dificultades durante el proceso de aprendizaje previo a la prueba, es decir, en el desarrollo de la unidad didáctica.

Debemos suponer que las dificultades en el proceso de aprendizaje de los contendidos explicados en clases tengan una implicación directa en los resultados obtenidos en la prueba final. Analizar las dificultades en el desarrollo de la unidad didáctica implica que tomemos en consideración otras fuentes de datos, entre las que destacan: el cuaderno de trabajo individual de los estudiantes, el diario del profesor y las observaciones realizadas, por el investigador, al grupo y a la muestra de estudiantes. Así, el proceso de análisis se sintetiza (ver Esquema 4.1) en cuatro fases consecutivas:

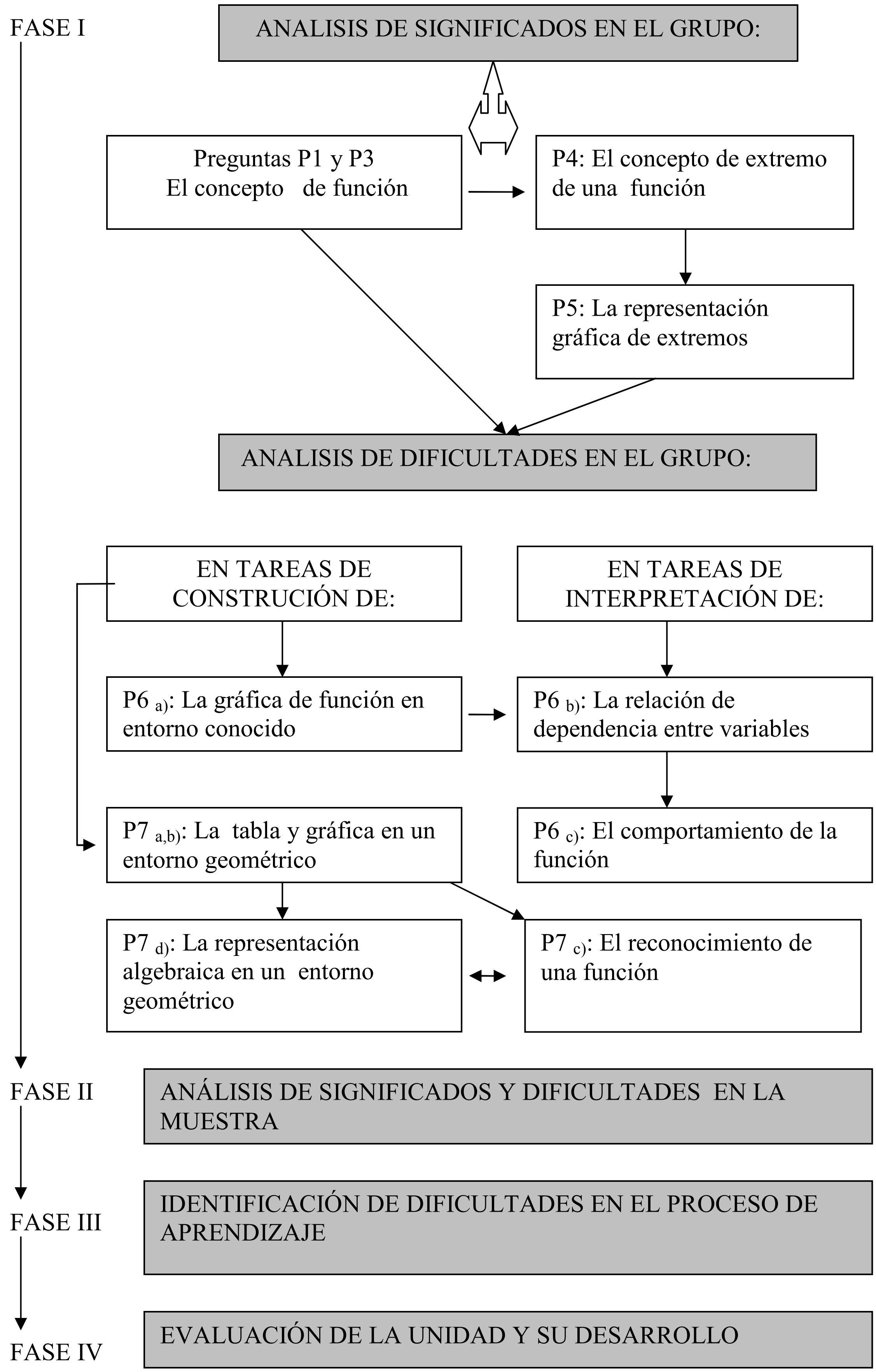
Fase I: Analizar los significados y dificultades del grupo en la prueba final, desde el concepto de función hacia el concepto de extremo.

Fase II: Profundizar en los significados y las dificultades de los estudiantes de la muestra en la prueba final.

Fase III: Localizar dificultades en el proceso de aprendizaje de la unidad didáctica, durante el estudio de las tres secuencias de aprendizaje.

Fase IV: Evaluar la unidad didáctica y su desarrollo.

Bajo este esquema, el proceso de análisis implica un estudio de las respuestas a preguntas, tanto de la prueba final como a los problemas y actividades de aprendizaje de la unidad didáctica. A continuación se detalla el análisis de los datos en cada una de las fases de este proceso.



Esquema 4.1: *El proceso de análisis de datos*

4.3 Fase I: Análisis de significados y dificultades en el grupo

La prueba final de la unidad es respondida por un total de 54 estudiantes, que representa el 93% del grupo que participa en las actividades de la unidad didáctica. En esta fase se excluyen a los estudiantes de la muestra y sólo se toman en consideración las respuestas, los significados y dificultades de 48 estudiantes.

4.3.1 Significados sobre el concepto de función

El significado que poseen los estudiantes sobre el concepto de función se manifiesta, inicialmente, en las respuestas (ver Anexo 13) a la primera pregunta: "*¿Qué es función?"*. El 54% de los estudiantes enuncian el concepto (ver Tabla 4.1), con el reconocimiento de una relación de *dependencia entre variables*. Aunque, tan sólo el 20% complementa la relación de *dependencia entre variables,* con la existencia de una *regla* que asocia a cada valor de una de estas variables uno y sólo un solo valor de la otra.

CATEGORIA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Regla	7	0,15
Regla inversa	3	0,06
Dependencia entre variables	16	0,33
Relación entre valores	9	0,19
Expresión matemática	9	0,19
Otra	4	0,08
Total	48	1,00

Tabla 4.1 *Significados sobre el concepto de función*

Otros significados, muy distanciados de la idea de función, son la explicación del concepto como una *expresión matemática* que sirve para resolver un problema o expresar "*cosas*", o la idea aún más utilitaria de concebir la función por la existencia de una *relación entre valores*.

A esto se añade que, el hecho de que los ejemplos de funciones mencionados en respuesta (ver Anexo 14) a la pregunta 2; sólo el 13% de los casos (ver Tabla 4.2) son *ejemplos nuevos,* que no fueron objeto de estudio en la unidad didáctica.

CATEGORIA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Ejemplos nuevos	7	0.15
Ejemplos de la unidad	41	0.85
Total	48	1

Tabla 4.2. *Ejemplos de funciones*

Plantear *ejemplos de la unidad* no debería preocupar, si no fuese por el hecho de que son respuestas surgidas de recuerdos inmediatos, que provienen de lo "*enseñado*" en clases. Este tipo de recuerdos, que provienen del proceso de enseñanza, emergen de nuevo en las respuestas a la pregunta 3 de la prueba (ver Anexo 15). Se sintetizan (ver Tabla 4.3) a continuación:

CATEGORIA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Uso de la regla	7	0.15
Uso incorrecto de la regla	5	0.10
Uso de la regla inversa	2	0.04
Referencia a ejemplos conocidos	34	0.71
Total	48	1

Tabla 4.3 *Significados en el reconocimiento del concepto de función*

Obsérvese que, el 70 % del grupo, para decidir si se está en presencia de una función recurre a una comparación mental de la figura con *referencia a ejemplos conocidos.* En respuestas del tipo: *"no es función, una función al representarla debe ser una parábola, ésta no tiene ningún origen"* se olvida, tanto la relación de dependencia entre variables como la regla que gobierna esta relación. Únicamente 14 estudiantes hacen uso de la *regla* para decidir si la figura es una función; aunque cinco de ellos la utilizan de manera incorrecta al aceptar que es función, y oros dos argumentan que la figura no representa una función bajo la explicación de la*regla inversa.*

En adicción a lo anterior, se pone de manifiesto la diferencia cognitiva entre el enunciado del concepto y su aplicación. De los 7 estudiantes que utilizan la categoría de *regla* en su definición de función, sólo tres utilizan este conocimiento para decidir, de manera correcta, que la figura no representa una función.

4.3.2 Significados sobre el concepto de extremo de una función

El significado sobre el concepto de extremo deviene de la pregunta 4: "*¿Qué entiendes por máximo relativo y por mínimo relativo de una función?"* Las respuestas de los estudiantes (ver Anexo 16) se sintetizan en la Tabla 4.4.

CATEGORIA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Cambio de Comportamiento	9	0.19
Valor en una Localidad	21	0.40
Valor más Alto	12	0.25
Aumento o Disminución	3	0.06
No responde	3	0.06
Total	48	1

Tabla 4.4 *Significados sobre el concepto de extremo de una función*

De manera general, en el 62 % de los casos, la idea de punto extremo se asocia a uno los dos significados siguientes:

1. Se vincula la idea de punto extremo con la manifestación de un *cambio de comportamiento* en la función; el máximo como un punto que delimita un crecimiento y un posterior decrecimiento. Ejemplo: *"… a su izquierda crece y a su derecha decrece"*. Una idea similar ocurre en la explicación del mínimo.
2. Se vincula el punto extremo con la idea de que es el valor mas alto (bajo) en cierta *localidad de valores*. Ejemplo: *"el mínimo es el punto local mas bajo, por izquierda y derecha son máximos al punto"*.

Ambos tipos de explicaciones, son coherentes con sus respuestas a la pregunta 5: "*Traza la gráfica de una función que pase por los puntos A y B y tenga por lo menos un máximo relativo y un mínimo relativo. Señala cada uno de ellos"*. Estos 30 estudiantes trazan una línea curva que pasa por estos puntos (A y B), señalando los valores máximos y mínimos locales.

Por el contrario, otra idea intuitiva de máximo y mínimo asocia éstos con el punto más alto o más bajo de una grafica. Respuestas del tipo: *"máximo es el punto más alto en una gráfica y mínimo es el punto mas bajo en una gráfica"* se acompañan, en respuesta a la pregunta 5 (ver Anexo 17), con dos formas de señalar el máximo y el mínimo:

- Se sitúa un segmento de línea recta entre los puntos A y B, y se señala el punto A como el máximo y el B como el mínimo.

- Se traza una función que pasa por estos puntos, señalando el valor más alto de la gráfica como el máximo absoluto y el más bajo como el mínimo absoluto.

Otro significado es el que asocia los puntos extremos con el aumento o disminución de la función. Ejemplo de ello es: *"máximo es el mayor aumento que se puede mostrar en una gráfica y mínimo es la mínima disminución en una gráfica"*. Estos estudiantes, que entienden máximo como un crecimiento en la gráfica y mínimo como un decrecimiento, señalan estos valores de dos formas:

- Se sitúa un segmento de línea recta entre los puntos A y B, y se señala el punto A como el máximo y el B como el mínimo.
- Se trazan una función que pasa por estos puntos, señalando los valores máximos y mínimos locales.
- No se identifica.

Los significados sobre los conceptos de función y de extremo están relacionados con aquellas dificultades que se manifiestan en tareas de construcción y/o interpretación del concepto de función, cuyo análisis se muestra a continuación.

4.3.3 Dificultades vinculadas al concepto de función

Las tareas de construcción y/o interpretación del concepto de función se hallan en dos preguntas de la prueba: en la pregunta 6, donde se propone un entorno natural y conocido por los estudiantes y en la pregunta 7, que está vinculada con un contexto geométrico.

En la primera pregunta se plantea la situación de una persona que sube y baja una montaña en bicicleta y se solicita dibujar la gráfica que represente tal situación: *"cambiode la velocidad con respecto al tiempo*". Por lo general, se responde (ver Anexo 18) a partir del *cambio de velocidad*. El 75% del grupo (ver Tabla 4.5) comprende la situación planteada y grafica el comportamiento real de la variable velocidad, de acuerdo con los cambios en el tiempo.

CATEGORIA	FRECUENCIA ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA
Cambio de velocidad	36	0.75
Entorno físico	10	0.21
No representa	2	0.04
Total	48	1

Tabla 4.5 *Representación gráfica de una función desde una descripción verbal*

La primera dificultad se manifiesta por una *interpretación icónica de la situación* estudiada, la apreciación visual de la imagen primaria (la montaña) impide representar la variable velocidad como una función del tiempo. Es el caso de las respuestas de 10 estudiantes, quienes representan la grafica como imagen del *entorno físico* (como si fuera un corte topográfico) y otros dos estudiantes que no pueden responder a esta pregunta.

La segunda dificultad se halla, precisamente, en la *incomprensión de la relación de dependencia. C*uando se solicita interpretar esta relación, a partir de la pregunta *"¿La velocidad es una función que depende del tiempo?"*, no se reconoce (ver Anexo 19) la dependencia y, como consecuencia de ello, se pierde sentido al concepto de función. Sucede que:

- De los 36 estudiantes, que representan de manera correcta los cambios de la velocidad, sólo 16 reconocen que la velocidad está en función del tiempo, con una referencia directa a la formula $v = d/t$. Aunque sólo uno de ellos hace mención a la regla de la función, es decir, que a cada valor del tiempo le corresponde uno y sólo un valor de la velocidad.

- De los restantes 12 estudiantes, que no realizan la representación gráfica de la función, sólo en un caso se reconoce que la velocidad es la variable dependiente y el tiempo la variable independiente.

En resumen, en opinión del 65% del grupo, la velocidad no es una función que dependa del tiempo. Por el contrario, se relaciona la velocidad con el tiempo total que tarda la excursión en bicicleta, por ejemplo: *"entre mayor velocidad menor tiempo"*; y otras respuestas relacionan la velocidad con las condiciones del terreno, por ejemplo: *"no depende del tiempo, la velocidad depende de las condiciones del terreno"*. La incomprensión de la relación de dependencia, de la velocidad con respecto al tiempo, incide de manera directa en la manera en que los estudiantes conciben el comportamiento de la velocidad.

En consecuencia, se produce una tercera dificultad causada por la *incomprensión del comportamiento de la función*. A la pregunta: "*¿Puedes decir algo sobre crecimiento y/o decrecimiento en esta situación?"* todos los estudiantes reconocen que la velocidad cambia, es decir aumenta y disminuye; pero en la totalidad de respuestas (ver Anexo 20) no se hace mención alguna al comportamiento de la velocidad, en función de los cambios de la variable independiente (tiempo). Por el contrario, se reconoce el cambio de velocidad en función del terreno, es decir que, la velocidad disminuye cuando sube la montaña y aumenta cuando baja la montaña.

En la segunda pregunta, donde se plantea una condición geométrica: la suma de dos lados adyacentes de un rectángulo es 15 cm, surgen otras dificultades. La primera dificultad se origina por la *incomprensión del lenguaje matemático elemental.* Cabe mencionar que, durante el desarrollo de la prueba, muchos estudiantes preguntaron: "*¿Qué significa la palabra adyacentes?".* Esta incomprensión motiva al profesor proporcionar una respuesta sobre el significado de esta frase, que se comprende cuando se les plantea ideas como: "*adyacentes significa contiguos (unidos, que se juntan) o bien que forman un ángulo entre ellos*". Se produce aquí una incomprensión, no sólo del lenguaje simbólico, también del lenguaje matemático elemental expresado en forma verbal.

En adición a la anterior, surge una segunda dificultad causada por la *imposibilidad de traslación de ideas, expresadas en lenguaje geométrico, al lenguaje de funciones*. Esta dificultad se pone de manifiesto en la tarea de construir la tabla de valores y la grafica, con los valores de un lado del rectángulo y los valores de su área. De todo el grupo, sólo 17 estudiantes (ver Anexo 21) fueron capaces de representar la tabla de valores y, a partir de ésta, la grafica con los valores de un lado y los valores de área obtenidos. Estos estudiantes reconocen, además, que la longitud del lado es la variable independiente y el área obtenida es la variable dependiente.

El resto del grupo (31 estudiantes) no puede representar, en tabla de valores, la condición algebraica del problema y, como resultado, no pueden esbozar la grafica que representa esta situación. Ocurren dos situaciones:

- No es posible construir el concepto de función, a partir de la condición del problema: *"la suma de los lados adyacentes de un rectángulo es 15 cm"*, en la tabla de valores.

- Se intenta calcular el área de un triángulo, en similitud a un problema trabajado en la unidad en el que efectivamente se determina el área del triángulo.

La tercera dificultad se origina por la *incomprensión del lenguaje algebraico en un contexto geométrico,* Precisamente cuando se tiene que escribir la ecuación que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente. Los 17 estudiantes (ver Anexos 21 y 22) que fueron capaces de representar la tabla y la gráfica de la función escriben la ecuación algebraica en una de las formas siguientes:

- En 7 de las respuestas se realiza traducción, de la tabla y gráfica, a la ecuación de la forma: $A = x\ (15\text{-}x)$,

- En 8 respuestas no se realiza esta traducción y se responde con una de las expresiones: $A = L*L$ o $A = b*a$, y

- En dos casos no se responde a esta pregunta.

El resto del grupo solo escribe una ecuación algebraica en la forma: $A = L*L$, como resultado de un nivel de conocimiento muy elemental sobre los contextos geométrico y algebraico.

Estos significados y dificultades en la prueba final hacen referencia únicamente a las respuestas de 48 estudiantes del grupo de estudio, quienes solamente participaron en las actividades programadas para el grupo. A continuación analizamos cuáles son los significados y las dificultades que se presentaron en la prueba, tomando como referencia las respuestas de los 6 estudiantes de la muestra.

4.4 Fase II: Análisis de significados y dificultades en la muestra

Una de las sesiones de trabajo de los estudiantes de la muestra tuvo como objetivo exponer y discutir las respuestas de la prueba final. Por ello, y para efectos de nuestro análisis, se toman dos fuentes de datos: las transcripciones literales (fotocopias) de las respuestas de la muestra (ver Anexos 23.1 a 23.7) a las siete preguntas de la prueba final y la sesión grabada (cuya trascripción se muestra en el Anexo 24), donde estos estudiantes exponen sobre las dificultades para responder las preguntas. Los propósitos del análisis son:

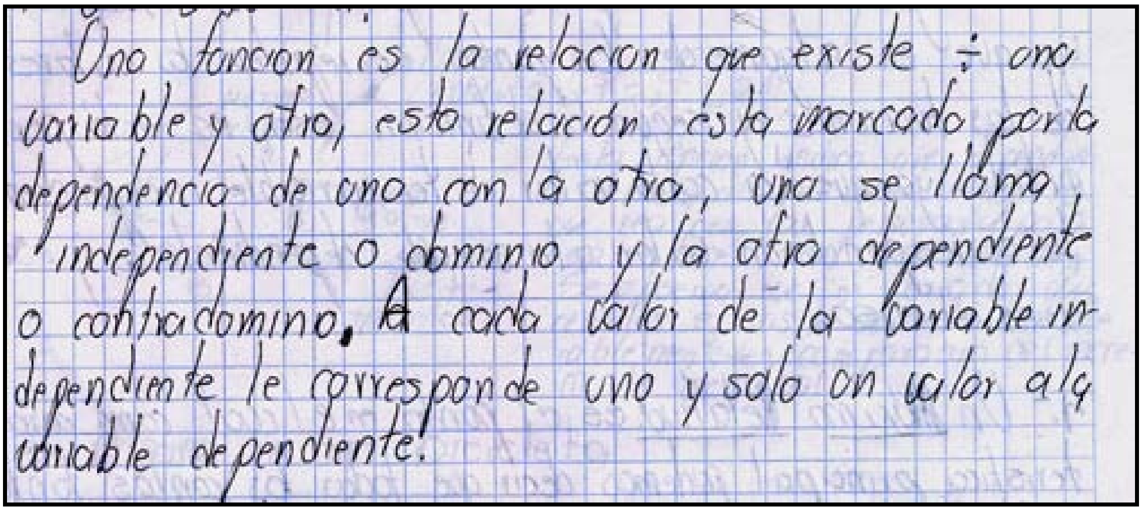
1) Comparar los resultados de la muestra con los hallazgos sobre significados y dificultades en el grupo.
2) Conocer cuáles son, cómo y porqué se manifiestan las dificultades en la prueba.

Bajo este enfoque, en el mismo orden de análisis realizado para el grupo, se detallan los resultados de la muestra:

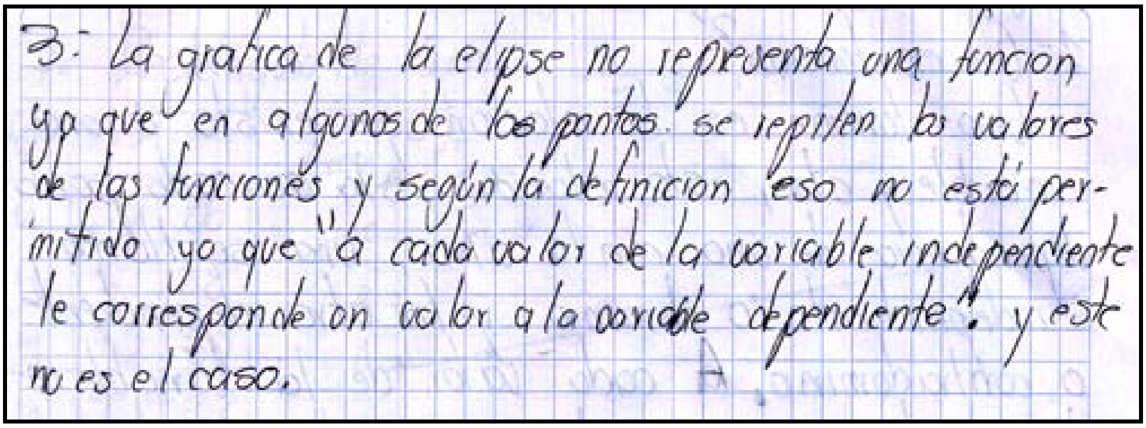
4.4.1 Significados sobre el concepto de función

Las respuestas (ver Anexo 23.1) a la pregunta: "*¿Qué es función?*" se dividen en dos categorías:

I) <u>Regla</u>: se reconoce la dependencia de una variable con respecto a otra, a través de una regla que asocia a cada valor de la variable independiente uno y solo un valor de la variable dependiente. Esta es la respuesta de cuatro estudiantes; según Antonio, por ejemplo:

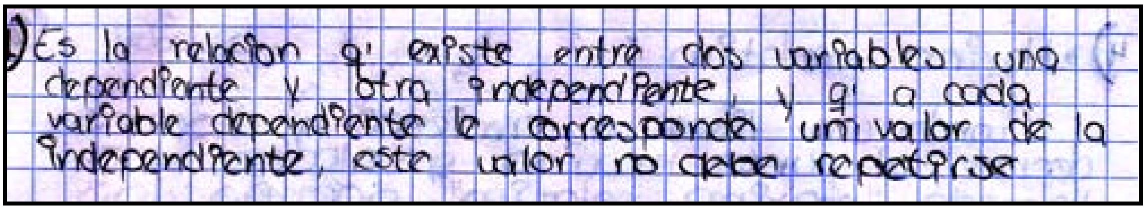

Una funcion es la relacion que existe ÷ una variable y otra, esta relacion esta marcada por la dependencia de una con la otra, una se llama independiente o dominio y la otra dependiente o contradominio. A cada valor de la variable independiente le corresponde uno y solo un valor a la variable dependiente.

Esta idea de función es utilizada para responder a la pregunta 3 de la prueba; Antonio, cuando tiene que decidir si la figura representa la gráfica de una función numérica, plantea que:



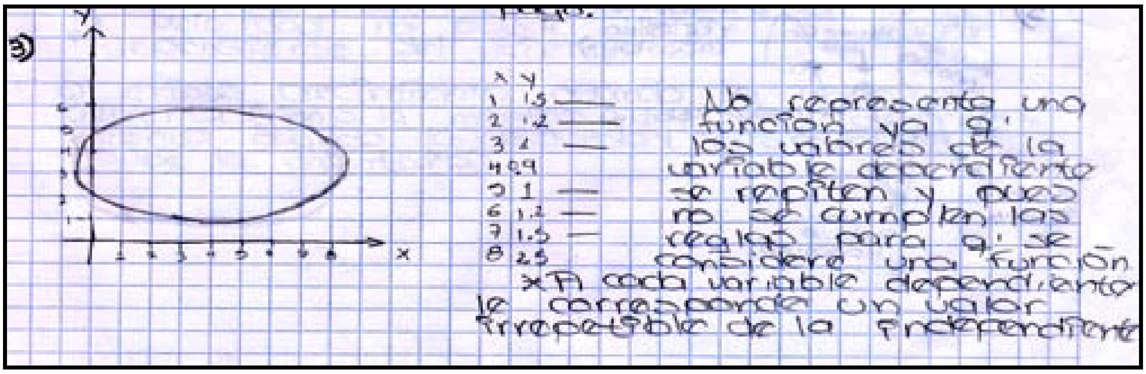
3: La grafica de la elipse no representa una funcion ya que en algunos de los puntos se repiten los valores de las funciones y según la definicion eso no está per-mitido ya que "a cada valor de la variable independiente le corresponde un valor a la variable dependiente" y esto no es el caso.

De manera similar, aunque mal expresado, responde María:



1) Es la relación q' existe entre dos variables una dependiente y otra independiente, y q' a cada variable dependiente le corresponde un valor de la independiente, este valor no debe repetirse

El error en la respuesta de María se produce por una confusión entre las variables; obsérvese que asigna valores a una de las variables y obtiene valores de la otra, para llegar a la conclusión de que la figura no es una función. Su respuesta concreta es:



x	y
1	1.5
2	1.2
3	1
4	0.9
5	1
6	1.2
7	1.5
8	2.5

No representa una funcion ya q' los valores de la variable dependiente se repiten y pues no se cumplen las reglas para q' se considere una función xq a cada variable dependiente le corresponde un valor irrepetible de la independiente

Esta confusión se aprecia en un fragmento de la propia entrevista (ver Anexo 24):

<u>María:</u> *bueno yo tuve dificultades en esta, en la de interpretar si era o no una función*,

<u>Investigador</u>: *¿tu qué crees?*

<u>María</u>: *que no, que no era una función*

<u>Investigador</u>: *¿por qué?*

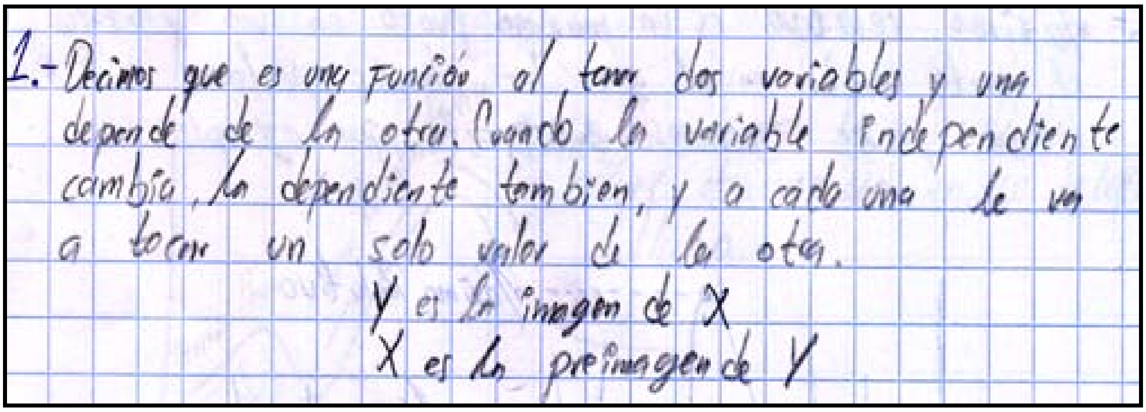
<u>María</u>: *porque, los valores dependientes se repetían*

<u>Investigador</u>: *¿cómo se repiten?*

<u>María</u>: …. [no responde a la pregunta]

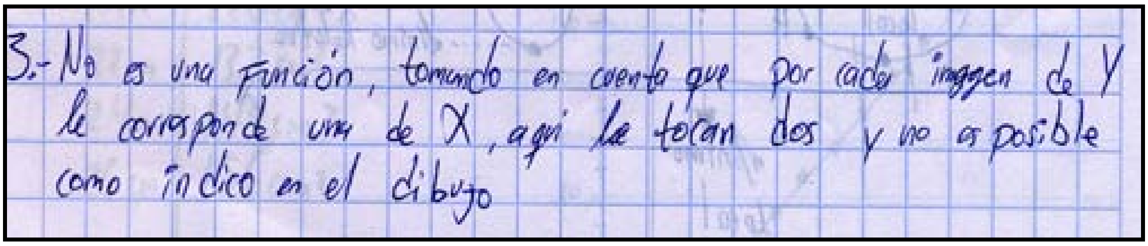
De lo cual se puede inferir que María puede manejar el concepto de función, pero tiene dificultades para expresar su significado, tanto en forma oral como escrita.

Similar, aunque menos precisa en cuanto a la idea de regla, es la respuesta de Madomna, quien responde:



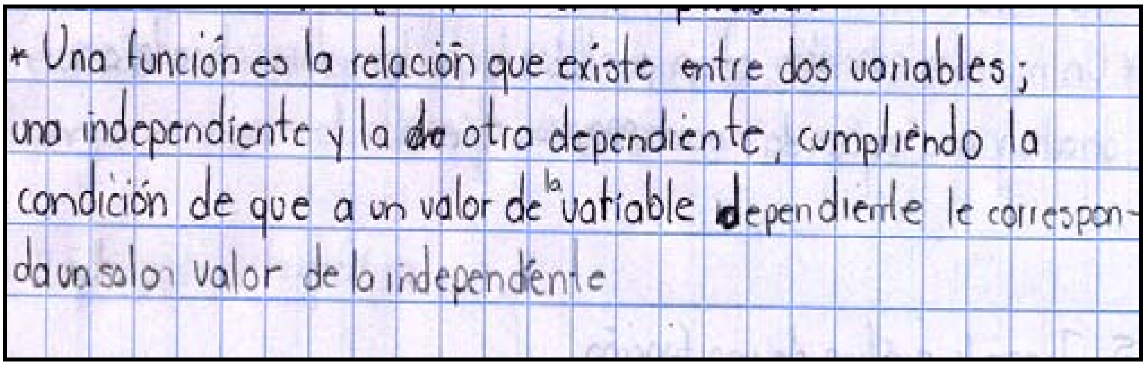
1.- Decimos que es una función al tener dos variables y una depende de la otra. Cuando la variable independiente cambia, la dependiente tambien, y a cada una le va a tocar un solo valor de la otra.
Y es la imagen de X
X es la preimagen de Y

Obsérvese que hace especial énfasis en el comportamiento de la variable dependiente, en función de los cambios en la variable independiente. Pero la imprecisión en la idea de regla se muestra cuando, para decidir si la figura representa la gráfica de una función plantea:



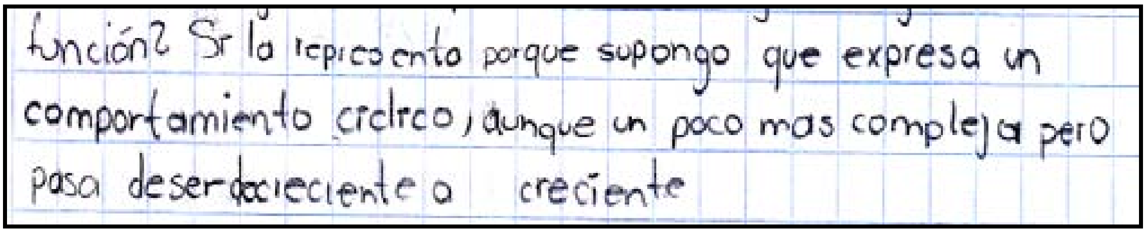
3.- No es una función, tomando en cuenta que por cada imagen de Y le corresponde una de X, aqui le tocan dos y no es posible como indico en el dibujo

De su respuesta se puede intuir que confunde la regla que gobierna la relación entre las variables. Similar es la respuesta que expone Patricia, quien explica el concepto de esta manera:



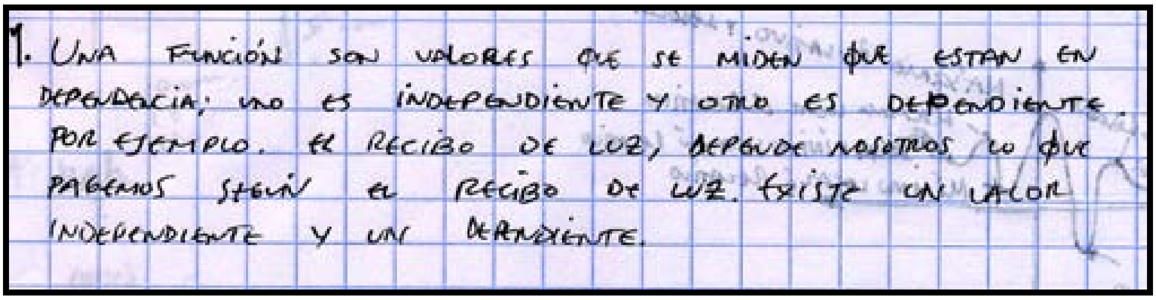
* Una función es la relación que existe entre dos variables; una independiente y la ~~de~~ otra dependiente, cumpliendo la condición de que a un valor de la variable dependiente le correspon-da un solo valor de la independiente

Aunque, posteriormente olvida el enunciado de función y explica la existencia de una función en base a recuerdos, que tienen relación con sus experiencias anteriores o con conocimientos y explicaciones de clases anteriores. Su respuesta es:

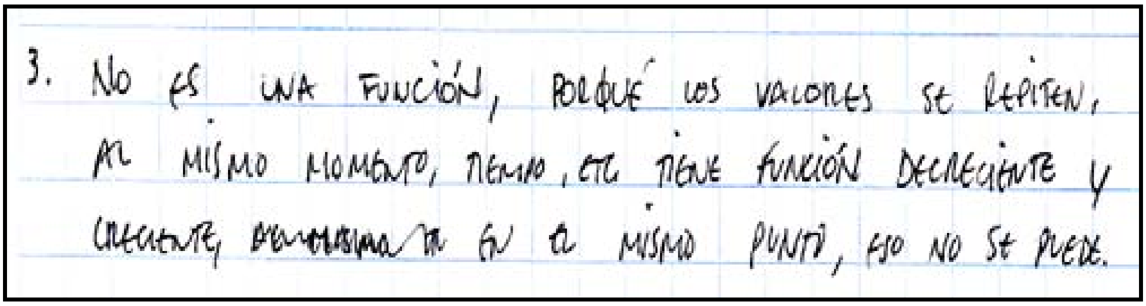

función? Si la represento porque supongo que expresa un comportamiento cíclico, aunque un poco mas compleja pero pasa de ser decreciente a creciente

II) Relación entre valores: la idea de función se asocia a una relación entre valores, con cierto grado de dependencia entre ellos.

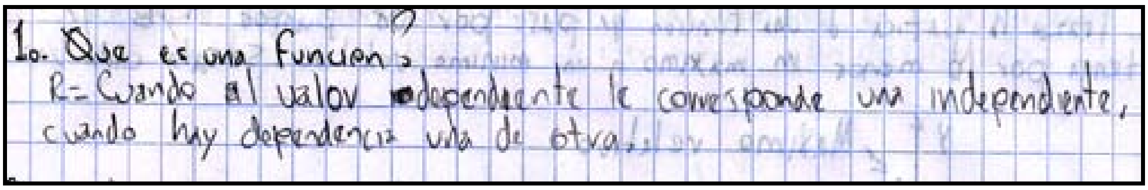
De este modo responden dos estudiantes. Para Sergio, por ejemplo:


1. Una función son valores que se miden que estan en dependencia; uno es independiente y otro es dependiente. Por ejemplo. el recibo de luz, depende nosotros lo que pagemos según el recibo de luz. Existe un valor independiente y uno dependiente.

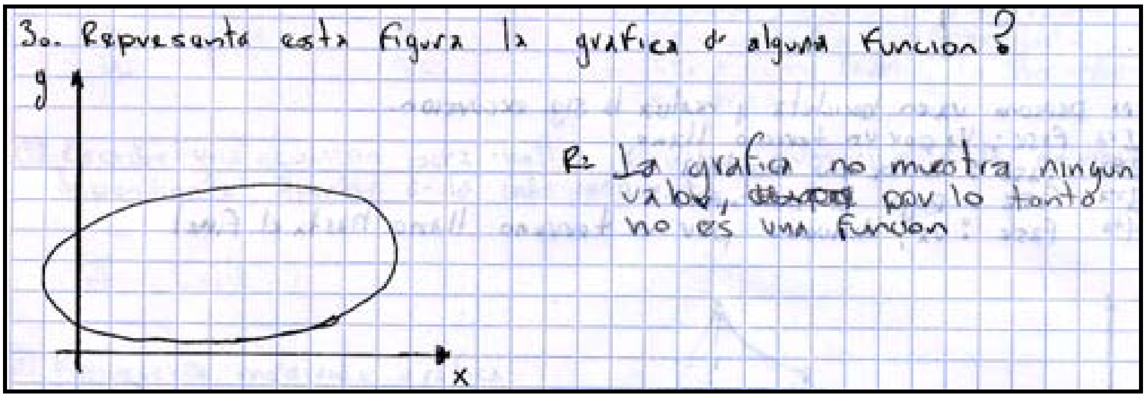
Donde predomina la idea de "*valores*", en sustitución de la idea de variables de la función. Como consecuencia de su propia idea de función, al responder a la pregunta 3 plantea:


3. No es una función, porqué los valores se repiten, al mismo momento, tiempo, etc. tiene función decreciente y creciente, en el mismo punto, eso no se puede.

En este mismo sentido, centrándose en los aspectos cuantitativos (necesidad de la existencia de valores numéricos), Esteban explica el concepto de función como sigue:


1o. Que es una funcion?
R= Cuando al valor dependiente le corresponde una independiente, cuando hay dependencia una de otra.

Para Esteban la existencia de una función depende incluso de que existan valores específicos. En respuesta a la pregunta 3 expone:



En su opinión no existe una función, como resultado de no puede reconocer la relación, gráficamente mostrada entre las variables. Su incomprensión del concepto se hace evidente en este fragmento de la entrevista (ver Anexo 24):

Investigador: *bien, correcto, ¿para que se una función tiene que suceder que, a cada valor del dominio le corresponde uno y solo un valor de la imagen?*

María: *si,* [afirma entender y estar de acuerdo con la idea anterior]

Investigador: … *y como pueden ver, a cada valor de x le corresponden dos valores de y [muestra la figura 1 de la prueba], entonces no es una función.*

Esteban: *bueno, ya lo entiendo, me doy cuenta de que no lo expresé así* [observa su repuesta y se percata de que no es correcto el razonamiento]

Como se puede observar, las ideas sobre el concepto de función, de los estudiantes de la muestra, no son totalmente coincidentes con las del grupo de estudio. La diferencia se halla en dos aspectos: (i) el grado de explicación de las respuestas es significativamente mayor, en la muestra que en el grupo, (ii) las respuestas de la muestra aportan nuevos elementos de conocimiento, en especial lo relativo a la ejemplificación del concepto de función. A modo de resumen (ver Tabla 4.6) se comparan los resultados del grupo y de la muestra.

Salvo en las respuestas de dos estudiantes, existe un reconocimiento de la existencia de dos variables interconectadas por una relación de dependencia, así como de regla que asocia a estas dos variables. En el significado que poseen algunos de estos estudiantes subyace la idea, en ocasiones imprecisa o incorrecta, sobre la existencia de una regla en la definición del concepto de función, la cual es utilizada en la interpretación del concepto, es decir, cuando se tiene que cuando se tiene que decidir si la figura representa o no una función.

Los estudiantes del grupo de estudio no siempre se sostienen las ideas de relación entre variable y/o de regla de función, cuando se tienen que decidir si la figura representa o no una función numérica; muchos estudiantes, que utilizan dichas ideas para definir la función, la olvidan cuando deben interpretar el concepto.

Definición del concepto	Antonio	Madomna	María	Patricia	Sergio	Esteban	Total del grupo
Regla	x						7
Regla Inversa		x	x	x			3
Dependencia entre variables							16
Relación entre valores					x	x	9
Expresión matemática							9
Otra							4
Ejemplos sobre el concepto							
Ejemplos nuevos	x		x	x	x		6
Ejemplos de la unidad		x				x	42
Interpretación del concepto							
Se utiliza la regla de función	x						12
Se utiliza la regla inversa		x	x				2
Referencia a ejemplos				x	x	x	34

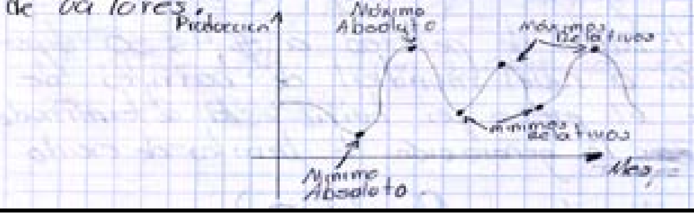
Tabla 4.6: *Resumen de significados sobre el concepto de función*

4.4.2 Significados sobre el concepto de extremo de una función

Las respuestas (ver Anexo 23.4) a la pregunta 4: *¿Qué entiendes por máximo relativo y por mínimo relativo de una función?* se vinculan a dos categorías de significados:

Valor en una localidad: cuando la idea respecto a la existencia de un punto extremo se vincula con la existencia de un mayor (máximo) o menor (mínimo) en una localidad de valores. En opinión de Antonio, por ejemplo:

4.- Un Máximo Relativo: es el punto en el cual como característica principal podemos decir que todos los puntos tanto a la izquierda y a la derecha son mas pequeños que el punto en cuestion, en otras palabras es el punto máximo de aumento, eso en una vecindad de valores.
Un mínimo Relativo: es el punto en el que todos los valores situados tanto a su derecha como a su izquierda son mas grandes que el punto en cuestion, en otras palabras es el punto mínimo de disminución, eso en una vecindad de valores.



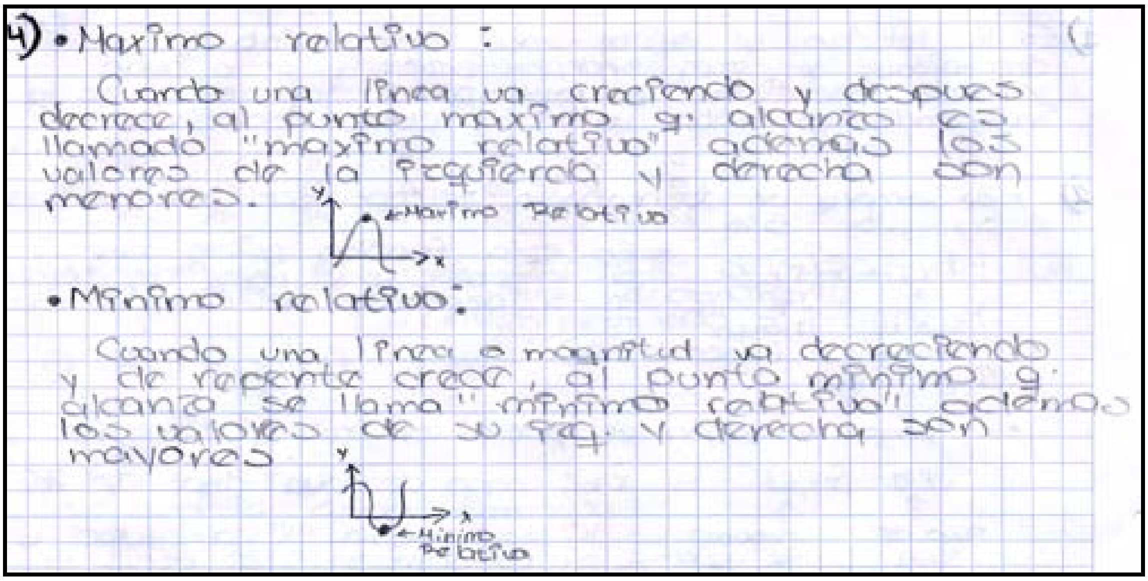
Este estudiante posee una idea visual sobre la existencia de los puntos extremos locales, que la explica, incluso, con la representación gráfica de una situación contextualizada. Sin embargo, distorsiona la idea de extremos relativos cuando, para aportar mayor precisión, confunde estos conceptos con máximo aumento o mínima disminución.

Menos precisa, en tanto que no explicita una diferencia entre los puntos extremos locales y los absolutos, es la respuesta de Patricia:

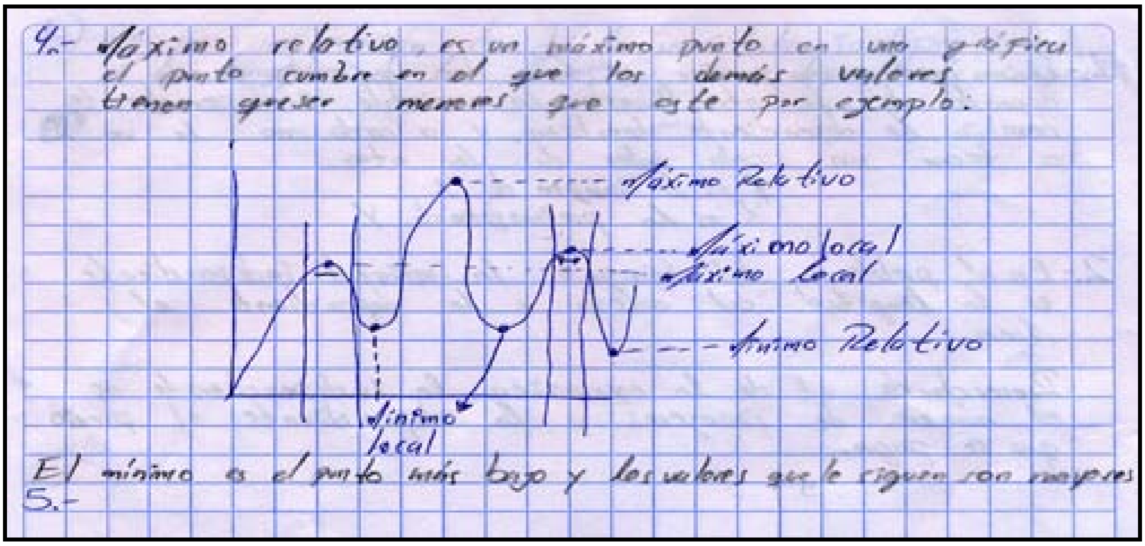
*Máximo relativo de una función es un punto tal que los valores que se encuentren a su derecha y a su izquierda sean menores que

que él.
Un mínimo relativo es un punto tal que los valores ubicados a su derecha y a su izquierda sean mayores que él.

Cambio de comportamiento: la explicación principal de los valores máximo y mínimo de una función se basa en la idea de un cambio en el comportamiento. Un ejemplo se halla en la respuesta de María, donde se expone la idea acompañada de una representación gráfica del concepto, pero no se hace mención a la variable dependiente de la función, como tampoco al comportamiento de la función.



Valor más alto: en la respuesta se plantea que los puntos extremos son los valores más alto (máximos) y más bajo (mínimos) en la gráfica. Ejemplo de esta idea es la que expone Madomna, quien representa de manera correcta los puntos extremos locales, pero con una explicación que vincula éstos con la idea de altura:



Su explicación verbal no coincide con la representación realizada de los extremos relativos de una función, debido al manejo inadecuado del lenguaje común y al poco dominio del lenguaje matemático.

En resumen, el significado de puntos extremos relativos, de los estudiantes de la muestra (ver Tabla 4.7), se centra principalmente en dos ideas: (i) la que vincula éstos con el cambio de comportamiento de la gráfica y (ii) la que los vincula con los valores más alto y más bajo en cierta localidad de valores.

Significados en la definición del concepto	Antonio	Madomna	María	Patricia	Sergio	Esteban	Total de la Grupo
Cambio de comportamiento			x			x	9
Valor en una vecindad	x			x	x		21
Valor más alto		x					12
Aumento o disminución							3
No responde							3
Significados en la construcción del concepto							
Valores locales	x	x	x	x	x	x	32
Valores absolutos							6
Línea recta							6
No identifica							4

Tabla 4.7 *Resumen de significados sobre el concepto de extremo de una función*

En las respuestas de estos seis estudiantes, a diferencia de las respuestas del grupo, existen varias características positivas que deben ser señaladas:

1. Todas las respuestas se acompañan de una representación gráfica del concepto.
2. La categoría de *"aumento o disminución"* no es tomada en consideración en las respuestas de la muestra.
3. Existe mayor nivel de explicación sobre el significado de los puntos extremos de una función.

En las respuestas sobre máximo y mínimo, tanto del grupo como de la muestra, la explicación se basa en un razonamiento desde lo visual observado o imaginado, es decir, se hace referencia a estos puntos (como puntos en la gráfica), sin hacer mención alguna al concepto de función o a los cambios en su comportamiento. Por otra parte, muchos estudiantes pueden identificar (señalar) estos valores (máximo y mínimo) en la gráfica, aunque la explicación verbal no sea coherente con la representación gráfica realizada.

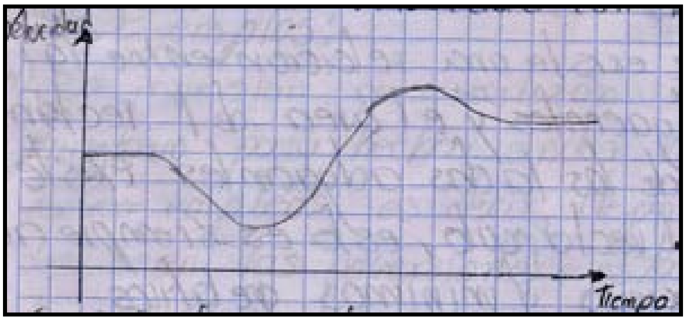
Los significados que poseen los estudiantes de la muestra sobre los conceptos de extremo de una función y función, tienen también una relación directa con un conjunto de dificultades que se manifiestan en tareas de construcción y/o interpretación del concepto de función. A continuación se analizan estas dificultades.

4.4.3 Dificultades vinculadas al concepto de función

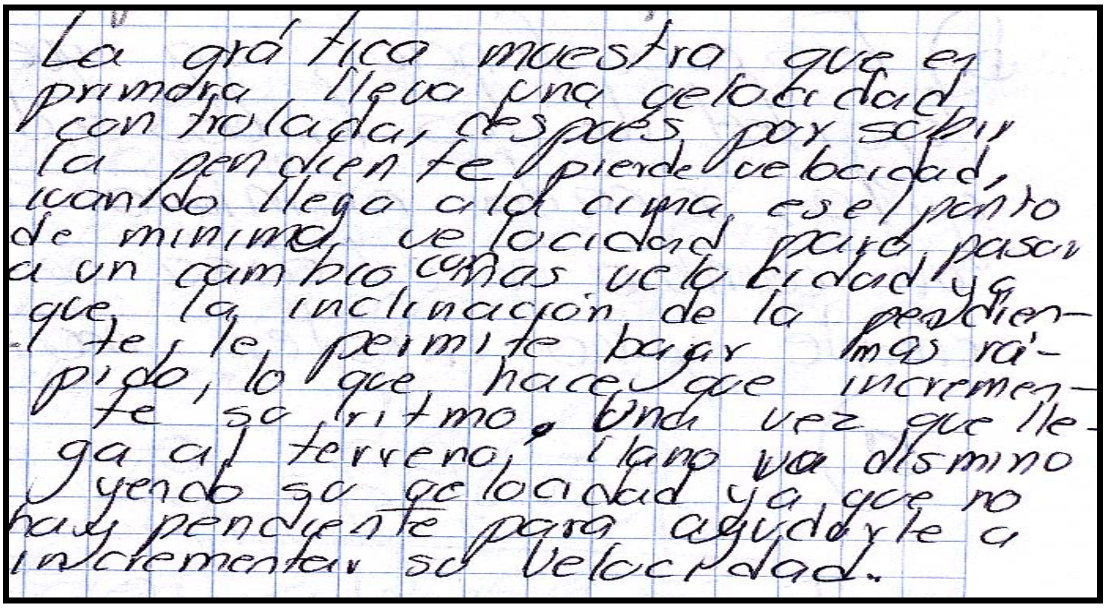
Siguiendo el análisis realizado para el grupo, se toma como fuente de análisis las categorías de respuestas en tareas de construcción y/o interpretación del concepto de función, es decir, las vinculadas a las preguntas 6 y 7 de la prueba final.

En la pregunta 6 se hace referencia a la situación de una persona que sube y baja una montaña en bicicleta y se solicita dibujar la gráfica que representa el *"cambio de la velocidad con respecto al tiempo"*. Salvo en la respuesta de un estudiante, en todos los casos (ver Anexo 23.6) se construye la grafica, acompaña de una interpretación adecuada de la situación analizada.

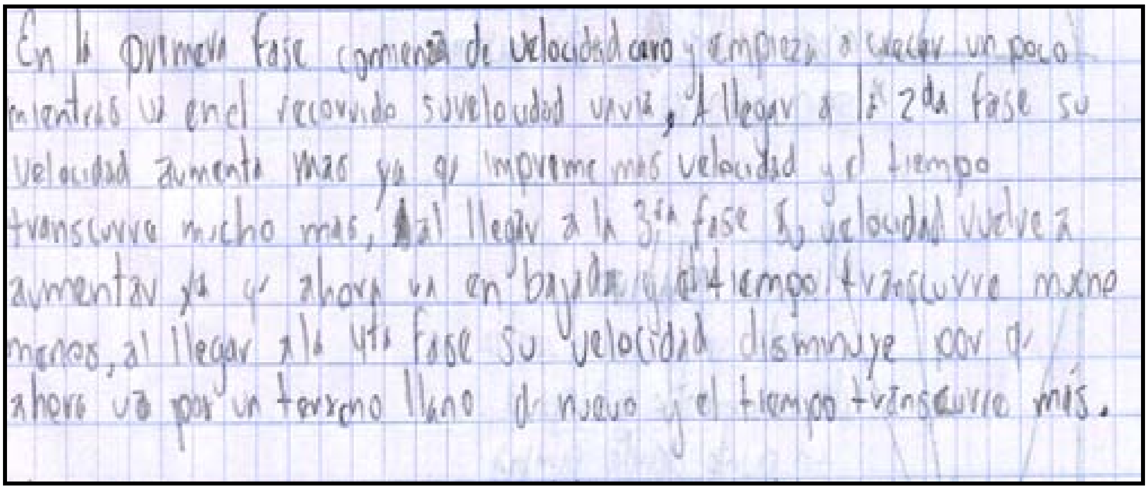
Un ejemplo se halla en la representación que realiza Antonio:



Acompañada de la siguiente interpretación sobre la situación propuesta:

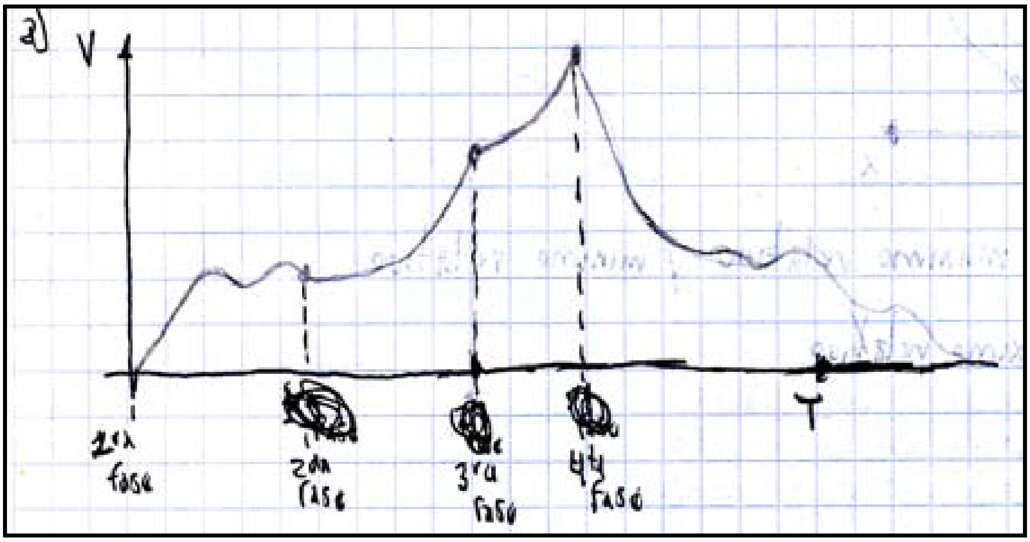

La gráfica muestra que en primera llega una velocidad controlada, después por subir la pendiente pierde velocidad, cuando llega ala cima es el punto de minima velocidad para pasar a un cambio con mas velocidad ya que la inclinación de la pendiente, le permite bajar mas rápido, lo que hace que incremente su ritmo, una vez que llega al terreno llano va disminuyendo su velocidad ya que no hay pendiente para ayudarle a incrementar su velocidad.

Esteban, a diferencia del resto de los estudiantes, interpreta los cambios de velocidad como una imagen de las condiciones físicas de cada fase del recorrido, es decir, de la montaña. Suinterpretación es:



En la primera fase comenzó de velocidad cero y empieza a crecer un poco mientras va en el recorrido su velocidad varía, al llegar a la 2da fase su velocidad aumenta mas ya q imprime mas velocidad y el tiempo transcurre mucho mas, al llegar a la 3ra fase su velocidad vuelve a aumentar ya q ahora va en bajada y el tiempo transcurre meno menos, al llegar a la 4ta fase su velocidad disminuye por q ahora va por un terreno llano de nuevo y el tiempo transcurre más.

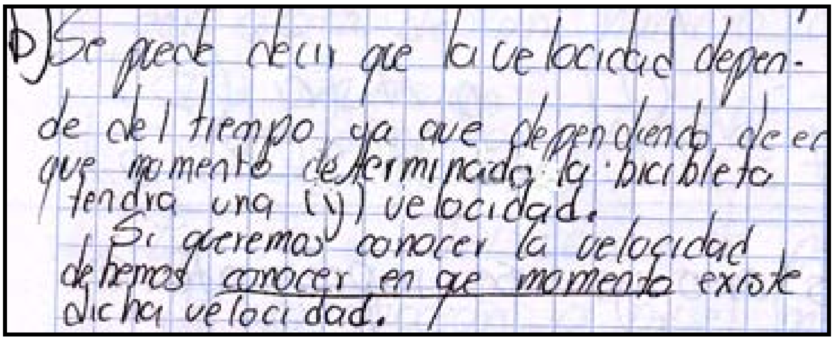
Para describir la representación gráfica realizada, el *entorno físico*:



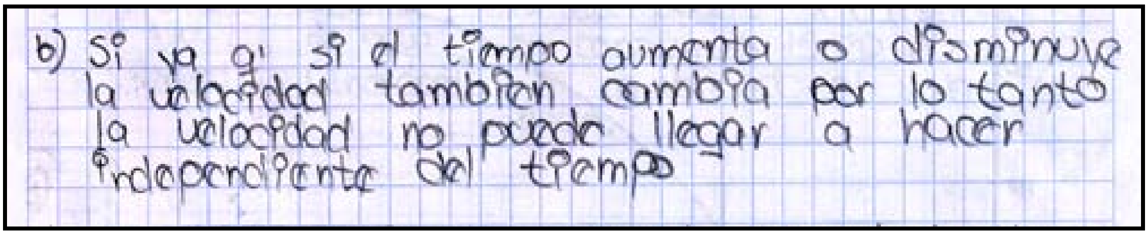
Podríamos entender, de la representación que realizan estos estudiantes, que existe una adecuada comprensión de la dependencia entre variables, así como de la regla que asocia éstas en el concepto de función. Sin embargo, se pone de manifiesto una dificultad, producida por la *incomprensión de la relación de dependencia*, que contradice las explicaciones, anteriormente expuestas, sobre el concepto de función.

Por una parte, cuando se explica el concepto de función, en respuesta a la primera pregunta, se reconoce la existencia de dos variables interconectadas por una relación de dependencia y se percibe, de alguna manera, la comprensión de la regla que establece la relación entre las variables. La realidad es otra, ya que en esta situación contextualizada no se reconoce la *dependencia* de la velocidad con respecto al tiempo. De los cinco estudiantes que esbozan la representación gráfica de la situación estudiada, sólo dos reconocen esta dependencia cuando responden a la pregunta: *"¿La velocidad es una función que depende del tiempo?"*.

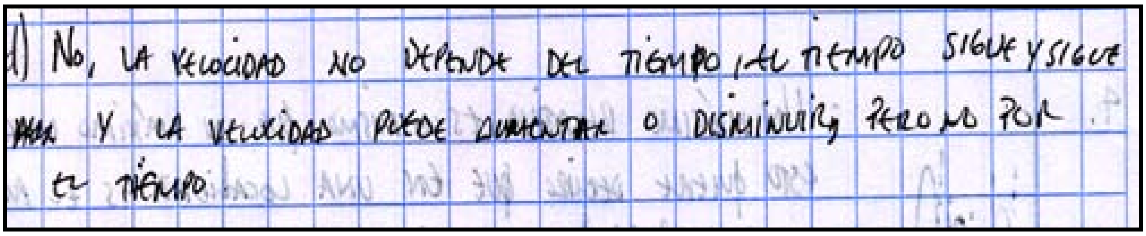
Es el caso particular de la respuesta de Antonio, cuya idea resulta ser más cercana a la idea de dependencia entre variables:


b) Se puede decir que la velocidad depende del tiempo ya que dependiendo de en que momento determinado la bicicleta tendra una (y) velocidad.
Si queremos conocer la velocidad debemos conocer en que momento existe dicha velocidad.

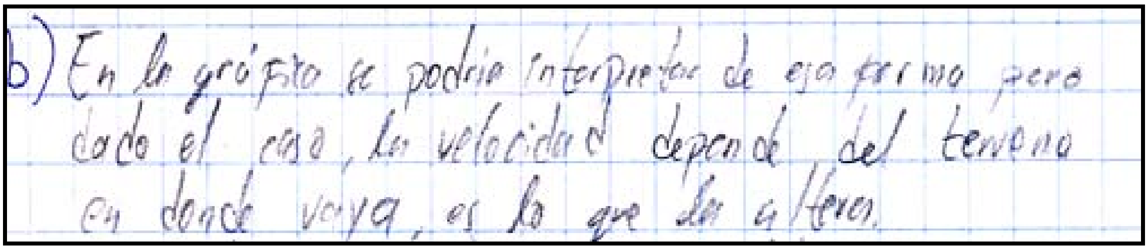
O la respuesta imprecisa de María, en la cual se pierde sentido al significado del tiempo:


b) Si ya qi si el tiempo aumenta o disminuye la velocidad tambien cambia por lo tanto la velocidad no puede llegar a hacer independiente del tiempo

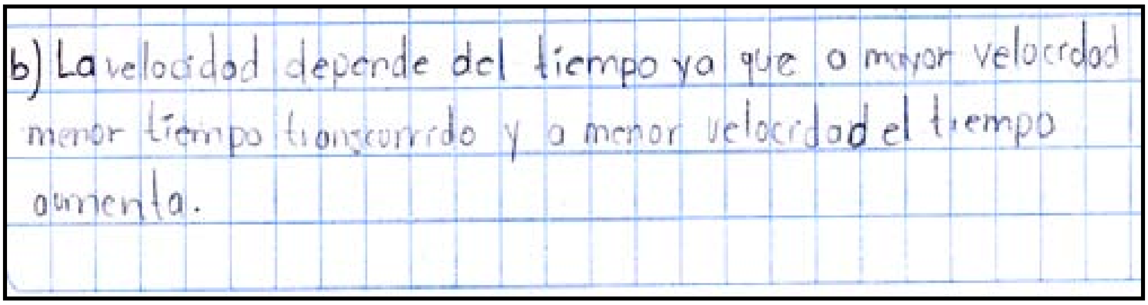
Otras ideas, muy distanciadas de la noción de dependencia, se hallan en las respuestas del resto de los estudiantes. Para Sergio, por ejemplo, no existe relación alguna entre estas dos variables; él expone:


d) NO, LA VELOCIDAD NO DEPENDE DEL TIEMPO, EL TIEMPO SIGUE Y SIGUE Y LA VELOCIDAD PUEDE AUMENTAR O DISMINUIR PERO NO POR EL TIEMPO

Por otra parte, Madomna reconoce la dependencia de la velocidad en función de las condiciones del terreno. Ella expone:


b) En la gráfica se podria interpretar de esa forma pero dado el caso, la velocidad depende del terreno en donde vaya, es lo que la altera.

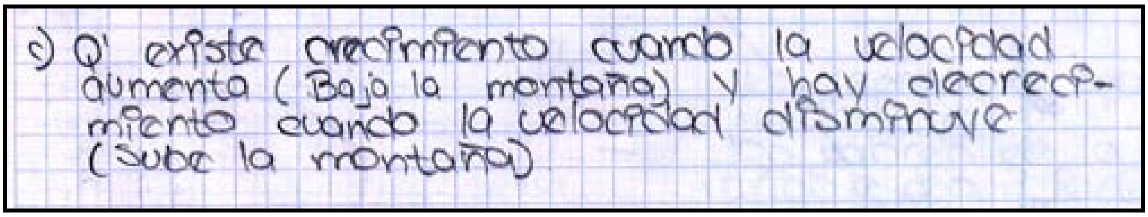
En otros casos se reconoce una *dependencia inversa*: se asume que el tiempo (tiempo de llegada) es quien depende de la velocidad de la bicicleta. Un ejemplo de ello es la respuesta de Patricia, donde se plantea que:



b) La velocidad depende del tiempo ya que a mayor velocidad
menor tiempo transcurrido y a menor velocidad el tiempo
aumenta.

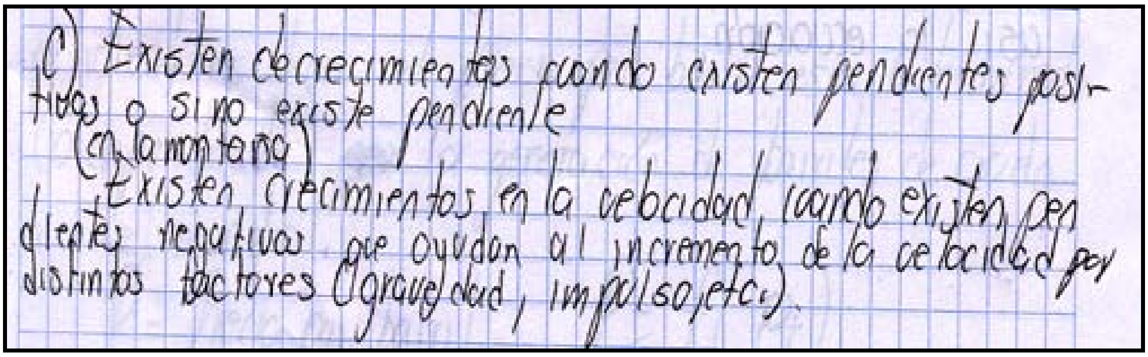
Esta dificultad puede incidir en la forma en que los estudiantes conciben el comportamiento de la función. En efecto, existe *incomprensión sobre comportamiento de la función* cuando se responde a la pregunta: *¿Puedes decir algo sobre crecimiento y/o decrecimiento en esta situación?*

Se reconoce el comportamiento de la velocidad, pero *en función de las condiciones físicas del terreno*. Las ideas van en este sentido:



c) Q' existe crecimiento cuando la velocidad
aumenta (Bajo la montaña) y hay decreci-
miento cuando la velocidad disminuye
(Sube la montaña)

Solo se diferencia Antonio, de cuya respuesta se puede intuir que existe comprensión sobre el comportamiento de la velocidad *en función de la variable independiente*. Su respuesta es:



c) Existen decrecimientos cuando existen pendientes posi-
tivas o si no existe pendiente
(en la montaña)
Existen crecimientos en la velocidad cuando existen pen-
dientes negativas que ayudan al incremento de la velocidad por
distintos factores (gravedad, impulso, etc.)

A modo resumen, las respuestas de la muestra son coincidentes con las del grupo. Existe un reconocimiento desde el punto de vista visual sobre el comportamiento de la función; pero no se reconocen los cambios de velocidad (crecimiento y decrecimiento) en función de los cambios en la variable independiente, tal y como se pretende explicar en la unidad didáctica.

El planteamiento de la situación es determinante en la forma de razonamiento y, como consecuencia, en las respuestas de los estudiantes. Es interesante que, con independencia de la representación gráfica realizada, los estudiantes (ver Tabla 4.8) entienden el comportamiento de la variable dependiente de los cambios en las condiciones físicas del terreno. Resulta evidente, en esta situación, la pérdida de sentido del concepto de función. De todos los estudiantes que responden a la prueba:

- sólo 19 estudiantes (17 del grupo y 2 de la muestra de un total de 54) reconocen la dependencia de la velocidad con respecto al tiempo.

- sólo un estudiante (que pertenece a la muestra) reconoce que el comportamiento de la variable dependiente depende de la variable independiente.

CATEGORIA	Antonio	Madomna	María	Patricia	Sergio	Esteban	Total Grupo
Representación gráfica de la situación							
Cambio de velocidad	x	x	x	x	x		36
Entorno físico						x	10
No representa							2
Reconocimiento de la dependencia entre variables							
Dependencia directa	x		x				17
Dependencia inversa				x	x		16
No se reconoce la dependencia		x				x	15
Reconocimiento del comportamiento de la función							
En función de la variable independiente	x						0
En función de las condiciones físicas del terreno		x	x	x	x	x	48

Tabla 4.8 D*ificultades sobre el concepto de función en una situación contextualizada*

En la pregunta 7 se plantea una situación en contexto geométrico y se proponen tareas de construcción de las diferentes formas de representación del concepto de función: tabla, gráfica y ecuación.

La dificultad primera y fundamental proviene de *la incomprensión del lenguaje común*. A los estudiantes les resulta complicado responder (ver Anexo 23.7) por la incomprensión de la palabra "*adyacentes*". Se manifiesta incluso en la entrevista (ver Anexo 24), como se muestra en el siguiente fragmento:

Investigador: *¿Qué dificultades se encontr aron ustedes en el examen?*

Antonio: *una palabra yo creo, que se generaliza, lo puedo conocer con los que estuve platicando, incluyéndome a mi se me dificultó la palabra adyacente*

Investigador: *lados adyacentes, una dificultad que yo……*

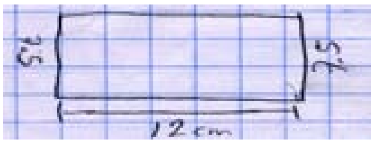
Antonio: *es que es lógica, si, pero no tienes el concepto*

Investigador: *bien, yo les pregunto: ¿cuál es el cubículo adyacente al mío?*

Sergio: *el de al lado, los que están a los lados*

Es interesante que, de inicio, la palabra *"adyacentes"* no sea conocida por los estudiantes. Obsérvese que, después de planteado un ejemplo en un contexto conocido, continúa la dificultad por incomprensión de la frase *"lados adyacentes"*, como se muestra en otro fragmento de la entrevista:

Madomna: *maestro, en un rectángulo, yo tomo como adyacentes éstos [señala, en su repuesta, dos lados opuestos del rectángulo que son adyacentes a la base]*, *están adyacentes a la base*



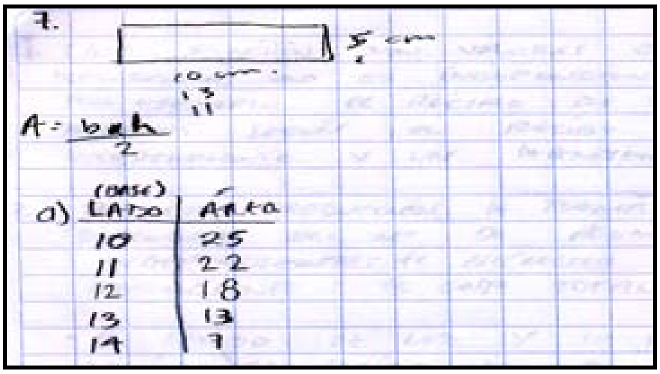
Antonio: *no, son los dos de arriba y de abajo*

Madomna: *están adyacentes a la base*

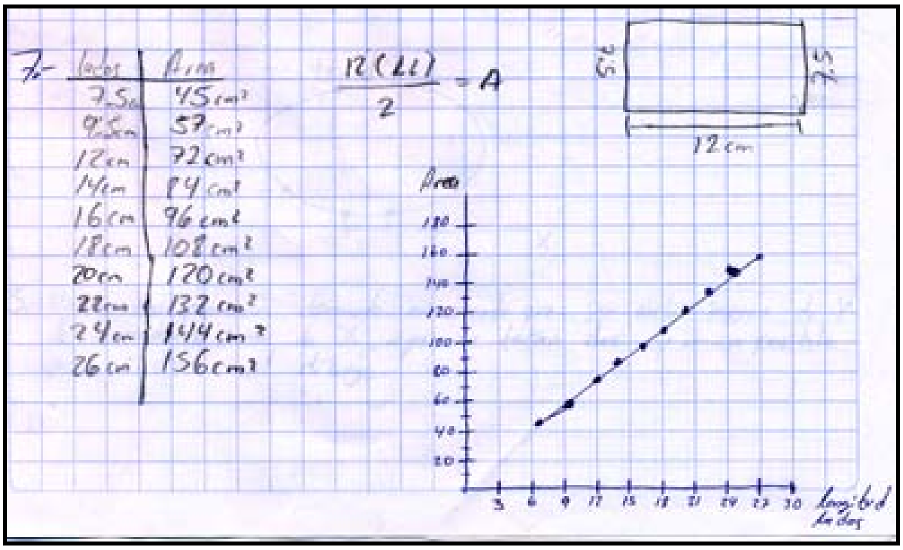
Sergio: *no, porque eran lados, todos son lados*

Una segunda dificultad proviene del contexto geométrico, por la *imposibilidad de trasladar las ideas, expresadas en lenguaje geométrico, al lenguaje de funciones.* Los estudiantes n*o pueden representar*, a partir de la frase*"la suma de los lados adyacentes de un rectángulo es 15 cm",* la tabla de valores solicitada.

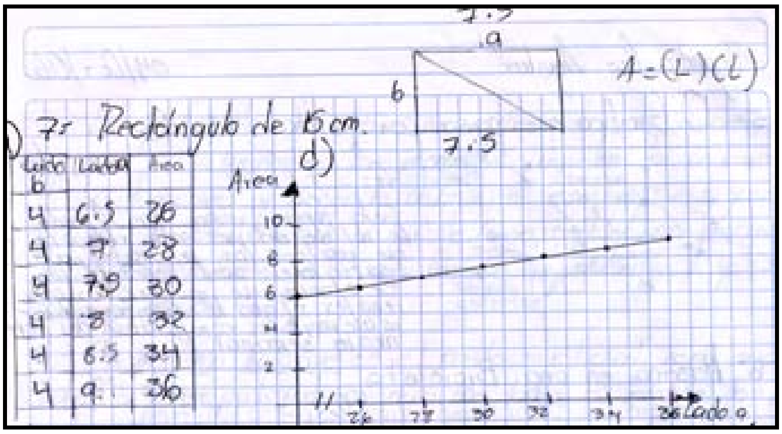
Un ejemplo es la respuesta de Sergio, donde se observa incluso desconocimiento de la idea de área de un rectángulo:



En esta misma idea se halla la respuesta de Madomna; en correspondencia con su idea de "*lados adyacentes a la base*" fija un valor (12 cm.) a uno de los lados para determinar los valores del área y, como resultado de esta operación, obtiene un modelo lineal de representación gráfica.



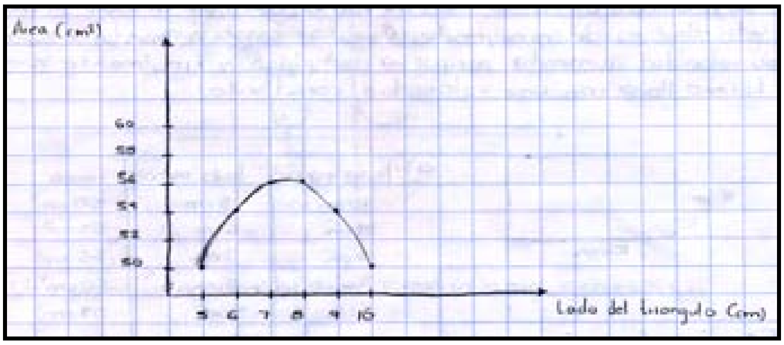
Por otra parte, Antonio supone constante el valor de uno de los lados del rectángulo y obtiene valores del área. De nuevo aquí, no se comprende la condición planteada verbalmente, o bien resulta difícil realizar una traducción de las ideas expresadas en lenguaje geométrico al lenguaje de funciones.



Por el contrario, en las respuestas de otros tres estudiantes *se puede representar* la función en las formas solicitadas. Un ejemplo se halla en la tabla de valores que escribe Patricia:

a) lado mayor	lado menor	area
10cm	5 cm	50 cm²
9 cm	6 cm	54 cm²
8 cm	7 cm	56 cm²
7cm	8cm	56 cm²
6cm	9 cm	54 cm²
5cm	10cm	50 cm²
4cm	11 cm	44 cm²

Acompañada de una correcta traducción a la representación gráfica de la función:



Se manifiesta, finalmente, una tercera dificultad en respuesta (ver Anexo 23.7) a la pregunta: "*escribe una ecuación que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente*". En algunos casos, la incomprensión del problema hace que la construcción algebraica no exprese la condición planteada. Madomna, por ejemplo, escribe la ecuación en la forma:

$$\frac{12(LL)}{2} = A$$

En la respuesta de Antonio se percibe también un nivel de conocimiento muy elemental, sobre los contextos geométrico y algebraico; él escribe la expresión:

$$A = (L)(L)$$

De una forma parecida responden Patricia y Esteban, a pesar de haber representado ambos la función en sus formas de tabla y gráfica:

$$A = (L_1)(L_2)$$

En conclusión, en la inmensa mayoría de los casos *no se realiza la traducción* a la ecuación algebraica, como consecuencia de la *incomprensión del lenguaje algebraico*, que fue objeto de estudio en niveles de enseñanza precedentes a la universidad. Sólo un estudiante, María, *realiza traducción* de la tabla y/o gráfica a la ecuación solicitada. Ella escribe la ecuación de la siguiente forma:

c) $A = x(x-15)$

$\uparrow$ Valor de un lado

En resumen, y a modo de comparación (ver Tabla 4. 9), el conocimiento que se tiene sobre los contextos, tanto geométrico como algebraico constituyen obstáculos fundamentales en el proceso para concebir y construir las diferentes formas de representar una función.

CATEGORIA	Antonio	Madomna	María	Patricia	Sergio	Esteban	Total del Grupo
Representación de función, en tabla y gráfica							
Se puede representar			x	x		x	17
No se puede representar	x	x			x		31
Construcción de la expresión algebraica de una función							
Se realiza traslación			x				7
No se realiza traslación				x		x	10
No se comprende	x	x			x		31

Tabla 4.9. *Dificultades sobre el concepto de función, en un contexto geométrico*

Resulta difícil trasladar el conocimiento, expresado en lenguaje geométrico, a las diferentes formas de representar una función. Para muchos estudiantes resulta incomprensible incluso la expresión verbalmente planteada, ocasionado quizás por un proceso de enseñanza aprendizaje que se fundamenta en la reiteración de ejercicios rutinarios carentes de significados para los estudiantes.

Unido a lo anterior, existe un nivel de conocimiento elemental sobre la forma (y formula) para calcular el área de un rectángulo, que es insuficiente para establecer el nexo necesario entre la condición del problema y la expresión algebraica como modelo de esta situación.

De este modo, del análisis de la prueba final deriva un conjunto de dificultades, que se puede sintetizar del siguiente modo:

- La interpretación de una situación en contexto (interpretación icónica).
- La comprensión de la relación de dependencia entre variables en contexto
- La comprensión del comportamiento de la función.
- La comprensión de términos del lenguaje común.
- La traslación de ideas, expresadas en lenguaje geométrico, al lenguaje de funciones.
- La comprensión del lenguaje algebraico en contexto geométrico.

La génesis de estas dificultades tiene relación con las experiencias anteriores del estudiante, ya sean experiencias cotidianas o del conocimiento formal adquirido en el proceso de aprendizaje. Abordaremos a continuación las dificultades que condicionan el aprendizaje de estos conceptos en el desarrollo de launidad didáctica .

4.5 Fase III: Localización de dificultades en el proceso de aprendizaje de la unidad didáctica

En el desarrollo de la unidad didáctica se intenta que los estudiantes se familiaricen primero con las ideas intuitivas que le permitan, posteriormente, elaborar los aspectos conceptuales referidos a los conceptos de función y extremo de una función. En este sentido, se invita y orienta a los estudiantes a realizar un conjunto de tareas de aprendizaje, algunas desarrolladas bajo la orientación y guía del profesor en clases, y otras diseñadas para el trabajo individual. En este contexto, y desde la perspectiva de la investigación, se obtiene un conjunto de datos sobre el proceso de aprendizaje, desde las fuentes siguientes:

1. Cuaderno de trabajo individual de los estudiantes.
2. Observación no participante, en clases, del investigador.
3. Diario del profesor.

Intentaremos pues, localizar aquellas dificultades y/o factores en el proceso de aprendizaje, que tienen relación directa con los significados y las dificultades de la prueba final.

4.5.1 Dificultades manifiestas en el trabajo individual de los estudiantes

El análisis parte aquí de las respuestas a las tareas del material de trabajo extraclase (ver Anexo 7), en el cual se propone a los estudiantes un conjunto de problemas (tareas), agrupados en tres secuencias de aprendizaje, y de cuyas respuestas se puede intuir la relación, directa o indirecta, con las dificultades observadas en la prueba final. Las respuestas a los problemas más significativos se exponen a continuación:

<u>En la secuencia 1: Lectura e interpretación de gráficas</u>

Problema 1.2. Se pone de manifiesto una dificultad de interpretación; a la pregunta: "*¿Qué bolsa conviene más en términos de precio?*" muchos estudiantes responden, atendiendo sólo a la lectura de la magnitud precio y no a la relación existente entre ésta y el peso de las bolsas. La dificultad se debe a la incomprensión de la frase "*en términos de precio",* que dificulta la comprensión de la proporcionalidad existente entre estas dos magnitudes y no permite que se pueda dar respuesta a la pregunta: "*¿Qué par de bolsas convienen por igual?*".

Problema 1.4. El 28% de los estudiantes realiza una *interpretación icónica* de los cambios de la velocidad del coche la grafica es una representación (un dibujo) de la montaña. A ello se añade la forma en que otros estudiantes representan los cambios de velocidad: el 50% de los estudiantes asume un *modelo lineal* (trazando segmentos de línea recta) para representar las diferentes fases del recorrido.

Problema 1.5. En este problema se observa una *interpretación icónica* de la situación gráficamente contextualizada, cuando se responde a la pregunta: "*se desea saber si, en el instante de tiempo t = 3, la velocidad del coche A es menor, igual o mayor que la velocidad del coche B*". El 40% de los estudiantes no reconocen la velocidad como una relación entre las magnitudes (espacio y tiempo), que se explica a través de la pendiente de la recta. Para la mayoría de los estudiantes el coche tiene menor velocidad que el coche B en el instante de tiempo t = 3; en las respuestas se relaciona la velocidad con la idea de altura, con argumentos del tipo:

- El coche B ya tiene velocidad, no parte del origen como A, esta arriba en el eje.
- El coche B estaba situado más lejos y llevaba mayor velocidad.
- El coche B no parte del origen, recorrió mas distancia en el mismo tiempo.

Una situación similar se observa en las respuestas a la pregunta: *¿y en el instante de tiempo t = 6, es menor, igual o mayor?* Se plantea que las velocidades de ambos coches se igualan en el instante de tiempo t = 6. En este caso, la imagen visual de dos líneas que se unen impide una interpretación adecuada de la velocidad; algunos argumentos son:

- Ambos coches tienen la misma distancia y tiempo.
- Los coches se encuentran en el mismo lugar.
- Los dos coches llegan al mismo punto, se encontraron en t = 6.
- Al tiempo t = 6 los dos coches se interceptan.

<u>En la secuencia 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*</u>

Problema 2.1. Los estudiantes realizan las representaciones, en forma de tabla y gráfica, de los cambios de temperatura. Sin embargo, se manifiestan dos dificultades en la interpretación de esta situación:

1. No se comprende, por muchos estudiantes, el sentido de la pregunta: *"¿En que momento la temperatura debió ser de 38 ^{0} C?"*. La incomprensión de la frase "*debió ser"* provoca que se responda a partir de los valores directamente observados, es decir, en el período entre las 14 y 16 h y a las 20 h.

2. Esta dificultad, en la *comprensión del lenguaje común,* surge de nuevo en respuesta a la pregunta: *¿Cuándo se mantuvo Manuel estable*? Se interpreta la palabra "*estable"* como sinónimo de normal y, como consecuencia, se responde que se mantiene estable cuando la temperatura es de 36 ^{0} C.

Problema 2.4. En esta situación surge una dificultad para concebir y representar el concepto de función. Muchos estudiantes (40%) no pueden establecer la relación de la distancia con las magnitudes citadas en el problema (velocidad y tiempo), y por el contrario trazan la tabla y la gráfica de la relación entre la velocidad y el tiempo.

La interpretación inadecuada de esta situación incide, de manera directa, en la forma de concebir la dependencia de la distancia respecto al tiempo transcurrido. En el 50% de las respuestas no se reconoce que la distancia dependa del tiempo. En algunas respuestas se entiende una *dependencia inversa*, ejemplo: "*entre más lejos, mas tiempo tarda en regresar*" y en otras, una dependencia de la distancia respecto a la velocidad, ejemplo: "*la distancia varia con la velocidad*".

Problema 2.5. Es una situación, en contexto geométrico, de relativa facilidad; la mayoría de los estudiantes es capaz de construir las dos representaciones solicitadas, tabla y gráfica, del concepto de función. Sin embargo, provocado por una interpretación inadecuada de la situación, no se reconoce siempre la relación existente entre las variables implicadas, es decir, entre la longitud del cateto menor y el área del triángulo.

En efecto, cuando se solicita: "*Explica que pasaría con el valor numérico de la variable dependiente, si seguimos aumentando el valor numérico de la variable independiente*", el 41% de los estudiantes no reconoce que el área es la variable dependiente. Se asume, por el contrario, que el cateto mayor es la variable dependiente; ejemplos de tales ideas son: *"aumenta el triple"* o "*aumenta proporcionalmente*". Estas ideas son acompañadas con la respuesta a la pregunta: *"¿Se puede representar mediante una ecuación, que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente?"*, donde se plantean expresiones del tipo: *"VD = 3VI"* o *"Y = 3x"*

La dificultad de los estudiantes puede estar causada por dos razones: (i) la necesidad de asignar valores a un cateto para obtener el valor del otro, y con éstos determinar el valor del área, o (ii) el hecho de dar mayor importancia a la condición: *"la longitud de uno es el triple de la longitud del otro",* que al propósito del problema: *"se desea estudiar como cambia el área del triángulo cuando variamos la longitud de los catetos".*

Problema 2.6. En esta situación si se reconoce la relación de dependencia, a la pregunta: *"¿El valor del coche depende del tiempo transcurrido?"* Todos manifiestan, de una u otra manera, que el valor del coche cambia (se deprecia) a medida que transcurre el tiempo. El nivel de comprensión es mayor en este problema, quizás debido a dos factores: (i) es una situación más cercana a las experiencias anteriores del estudiante, o (ii) se involucran solamente dos variable de estudio, que no crean dificultad o desconcierto en los estudiantes.

Las actividades de esta secuencia y sus tareas se ejecutan sin realizar, por parte del profesor, mención alguna a dos ideas relacionadas en el concepto de función, es decir, a los conceptos de variable y de relación de dependencia. Por ello, se exponen a continuación otros problemas y dificultades que están en relación directa con el estudio de los conceptos de: función, variable y dependencia entre variables.

En la secuencia 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

Problema 3.2 Propone una situación en contexto geométrico, que resulta ser muy difícil de responder. Se ponen de manifiesto las dificultades siguientes:

La primera dificultad surge por la imposibilidad de trasladar las ideas, expresadas en lenguaje común y contexto geométrico, al lenguaje de funciones. No se comprende la expresión: *"expresar el número de metros de cerca requerido como una función de la longitud del lado frontal"*, que impide al estudiante poder concebir una función, donde la cantidad de metros de cercado depende de la longitud del lado frontal.

La segunda dificultad surge del contexto geométrico: no se comprende la relación existente entre el área y el perímetro. Por esta razón, no se entiende el proceso de asignar valores al lado frontal, dado un valor del área, para determinar el lado lateral. Sin embargo, cuando se pregunta: *¿Cómo se calcula el área?* la respuesta de los estudiantes es: *"base por altura"*.

Se pierde sentido a la relación existente entre el perímetro y el área de un rectángulo; surge una tercera dificultad, producida por la incomprensión del lenguaje algebraico en un contexto geométrico. Al estudiante le resulta difícil establecer la relación existente entre las magnitudes involucradas: longitud de los lados, el área establecida del camping y los metros de cercado. Todo lo anterior ocasiona que no se puede responder a la pregunta: "*construye una tabla de valores del número de metros de cercado, a partir de los valores que le asignes al lado frontal*".

La cuarta dificultad se halla en la incomprensión del lenguaje algebraico, a partir del contexto geométrico planteado. En efecto, después de lograda la tabla y la representación gráfica, no se comprende el proceso para hallar la longitud de un lado del rectángulo, dado el área y la longitud del otro lado. Por esta situación no se puede responder a: "*escribe una ecuación que exprese la relación entre la longitud del lado frontal a la carretera y el número de metros de cercado*".

Una última dificultad se relaciona, de manera directa, con el lenguaje común y con el concepto de extremo de una función. Los estudiantes no intuyen la necesidad de determinar el punto extremo (mínimo) de la función cuando se les pregunta: *"¿Cuál es la mínima longitud de cerca necesaria para cercar el camping?"*

Problema 3.3. Es una situación que resulta ser relativamente fácil para los estudiantes, se comprende el significado de la pregunta: *"¿Cuáles son las dimensiones de los lados que garantizan la existencia de un máximo relativo para el área del triángulo?",* a partir del conocimiento que se tiene sobre el concepto de máximo relativo de una función.

La diferencia en los niveles de comprensión entre ambas preguntas (hallar un mínimo en el problema 3.2 y hallar un máximo en el problema 3.3) surge de la diferencia en la redacción de ambas preguntas. En la primera (problema 3.2) no se hace mención, de manera explícita, al concepto de *"mínimo relativo"*, razón por la cual no se entiende la idea escrita. Por el contrario, en la segunda pregunta (problema 3.3) se menciona la palabra *"máximo relativo"* que resulta ser conocida por los estudiantes. Se pone de manifiesto que, efectivamente, el dominio que se tiene del lenguaje común puede constituir una dificultad en el proceso de aprendizaje. La comprensión del discurso escrito constituye una dificultad, causada por la manera en que se presentan las ideas en un problema específico; aunque, un buen nivel de comprensión del texto no es condición suficiente para una correcta respuesta.

En efecto, en el problema 3.3 se comprende el sentido de la pregunta sobre el máximo relativo de la función, pero se asocia éste con el mayor valor que puede tomar el área del triángulo. El 67% de los estudiantes reconocen la existencia de un valor máximo para el área, cuando en realidad no existe; surgen respuestas del tipo: "*depende de los valores que asigne, para que el área aumente",* o *"cualquier número mayor de cero garantiza de que exista un máximo relativo"*. La dificultad se produce por una interpretación inadecuada del comportamiento de la función: para algunos estudiantes el valor máximo relativo se halla, precisamente, en el último valor calculado en la tabla de valores. Un ejemplo de respuesta es: *"el valor de 9 en la x da 121.5, que es el valor máximo obtenido"*.

Problema 3.4. En esta situación surge de nuevo la dificultad antes mencionada. Se asocia el concepto de puntos extremos (en el 27% de las respuestas) con la idea de altura, o se interpreta éste a partir de los valores previamente calculados. Se reconoce, de manera errónea, la existencia de valores máximos y mínimos relativos que en realidad no existen. Ejemplos de este hecho son: "*hay máximo cuando el coche vale 120,00 pesos"* o *"si hay mínimo, en la fecha que dejé de hacer era mínimo"*.

Problema 3.5 En las respuestas a este problema se vincula igualmente los puntos extremos con la altura; el 50% de los estudiantes responde atendiendo únicamente a los valores absolutos, producido quizás por la percepción de que los puntos extremos, en la situación analizada, son los más altos o bajos, según sea el caso.

En adición a lo anterior, existe una diferencia sustancial entre las respuestas de los problemas 3.5 y 3.4, que proviene de la propia representación graficada. En efecto, cuando los valores extremos existen (caso del problema 3.5) son reconocidos con menor grado de dificultad; en cambio, cuando éstos no existen (caso del problema 3.4) se intenta explicar su existencia a partir de los valores más altos (bajos), ya sean visualizados en la grafica o calculados en la tabla de valores.

Problema 3.6. En esta situación se pone de manifiesto otra dificultad vinculada al dominio del lenguaje común; se presenta por la imposibilidad de trasladar las ideas, expresadas en lenguaje común, al lenguaje algebraico. Los estudiantes no pueden elaborar una tabla de valores que relacione las variables: coste, ingreso y beneficio, por dos razones:

1. Resulta problemático deducir de la frase "*coste de 3 dólares por libro*" la expresión algebraica que relaciona el costo total (CT) con la cantidad de libros comprados (Q), es decir, no se llega a plantear la expresión del tipo: *"CT = 3Q"*

2. De la idea fundamental de este problema: "*la librería planea bajar su precio para estimular las ventas y estima que, por cada dólar de reducción en el precio se venderán 20 libros más"* no se pueden establecer la relación entre los aumentos sucesivos en las ventas y las sucesivas disminuciones en el precio

La problemática antes expuesta aborda las dificultades en el trabajo individual, que tienen relación con el nivel de conocimiento de los estudiantes y con sus propias experiencias cotidianas. En este momento resulta pertinente formularse la siguiente pregunta: ¿estas dificultades se manifiestan también en el proceso de aprendizaje, es decir, en las clases de la unidad didáctica? Para responder a este interrogante se enfoca el análisis a aquellas dificultades que se generan durante el proceso de enseñanza aprendizaje generado en clase, bajo la dirección, orientación y guía del profesor.

4. 5.2 Dificultades manifiestas en las clases de la unidad didáctica

Analizar el proceso de aprendizaje en clase significa estudiar lo acontecido durante el estudio de las secuencias de la unidad didáctica (ver Anexo 6), desde la perspectiva de dos fuentes de datos: la observación no participante del investigador (ver Anexo 25) y las observaciones escritas por el profesor en su diario (ver Anexo 26). Intentaremos describir los problemas más significativos y su relación con las dificultades manifiestas en la prueba final y en las respuestas a los problemas del material de trabajo extractase.

<u>En la secuencia 1: Lectura e interpretación de gráficas</u>

ACTIVIDAD 1. Los estudiantes recuerdan la formula para determinar la pendiente de una recta, dado los puntos A (2,-3) y B (-3,5). Sin embargo, no se comprende cómo utilizar la ecuación de una recta para obtener nuevos puntos.

ACTIVIDAD 3. Pone de manifiesto la incomprensión del significado de la línea recta, cuando se intenta responder a la pregunta *"¿Quiénes realizaron una llamada a la misma distancia aproximadamente?"*; muchos estudiantes no comprenden la idea básica de pendiente de una recta.

ACTIVIDAD 4. Se produce una dificultad por la incomprensión del sentido de los ejes de coordenadas; en las respuestas de algunos estudiantes se reconoce, de manera incorrecta, que el Gráfico 1 ilustra la situación representada.

ACTIVIDAD 6. Es trabajada en equipos de estudiantes y genera muchas ideas controvertidas, pero interesantes, sobre la manera de interpretar una situación concreta. Las respuestas a la pregunta: *"¿Cuál de las siguientes graficas representa mejor esta situación?"* casi siempre parten de una imagen mental, que no se asocia la relación existente entre las magnitudes (velocidad y tiempo), y entre éstas y las pendientes en cada punto de la curva mostrada. Por el contrario, se evoca el dibujo de la situación con argumentos del tipo:

- La gráfica A, ya que la bola gana velocidad y disminuye poco a poco.
- La gráfica D, porque parte del reposo, la velocidad aumenta y baja.
- La gráfica A, la bola está en reposo y cuando es golpeada la velocidad aumenta, se obtiene la máxima altura y cuando llega al hoyo está en reposo.
- La gráfica D, ya que la bola parte del reposo, la velocidad aumenta y por gravedad disminuye hasta que llega al hoyo.
- La gráfica A, empieza cuando está en el suelo, al golpearla toma velocidad.

<u>En la secuencia 2: Estudio de los fenómenos de cambio</u>

ACTIVIDAD 8. Su planteamiento es: **“***Supongamos que se presenta, durante la organización de una excursión turística, la siguiente situación: Una Empresa ofrece en alquiler un autobús con capacidad para 15 personas, a un precio total de 2,000 pesos. Cada viajero debe pagar el mismo precio”*. Los estudiantes deben realizar tres descripciones, verbal, tabla y gráfica, para responder a la pregunta: *“¿Cómo sabemos cuanto debe pagar cada uno de los viajeros?”*. Existe una dificultad en la *interpretación y análisis* de esta situación; algunos estudiantes no comprenden el proceso para determinar el pago individual de cada pasajero e intentan calcular el pago para 15 viajeros, y después multiplicar este resultado por diferentes valores correspondientes al número de viajeros.

Otra dificultad se halla en que se asume un *modelo lineal como representación gráfica.* Después de calculado el precio a pagar, para diferente número de viajeros (o de participación en la excursión) se asume un modelo lineal y continuo en el comportamiento de esta relación. Se intenta describir la relación mediante una gráfica de barras, tipo de descripción que es muy trabajada en otros niveles de enseñanza.

ACTIVIDAD 9. Parte de un contexto geométrico, cuyo enunciado es: *Se tiene un triángulo rectángulo, tal que la longitud de un cateto es el triple de la longitud del otro*.

Los estudiantes deben realizar tres descripciones: verbal, tabla y gráfica, para responder a la pregunta: *“¿Cómo cambia el área del triángulo cuando variamos la longitud del cateto menor, manteniendo la condición de que la longitud del otro cateto es el triple de su longitud?”.*Todos los estudiantes reconocen la forma de calcular el área del triángulo, sin embargo se halla una dificultad por *incomprensión del comportamiento* del área. Algunas respuestas a la pregunta: “*¿Qué ocurre con el área cuando el valor de x crece?”* son:

- El área crece.
- Existe proporcionalidad, es decir pendiente constante.

Es evidente que los estudiantes confunden la relación existente entre el área y la longitud del cateto menor, con la proporcionalidad directa que existe entre la longitud de ambos catetos, es decir, entre *x* y *3x*.

ACTIVIDAD 11. Su planteamiento es: "*Se conoce que la población de cierto poblado va creciendo. Un economista reunió datos sobre el número de habitantes en los años: 1990, 1992, 1995, 1999, 2001 y 2004. Los datos se muestran en la siguiente tabla*"

Año 1990

Tiempo (t), en años	*0*	*2*	*5*	*9*	*11*	*14*
Población (en miles)	*20.0*	*21.6*	*22.1*	*23.9*	*24.9*	*26.4*

Tabla 4.10 *"Comportamiento de la población por años"*

Después de representada la gráfica de esta relación resulta difícil responder a las preguntas: *"¿por qué no hay crecimiento en línea recta?"* o *"¿tiene sentido unir los puntos?"*. La dificultad para interpretar el comportamiento de la población tiene una causa: los estudiantes no comprenden que, en condiciones normales, la población debe crecer más cada año; no existe un recurso para entender y/o explicar el comportamiento no lineal de la función.

Actividades 12 y 13. En estas actividades se responde sin dificultad a las preguntas: *"¿Qué puedes decir del comportamiento de la ganancia total?"* o *"¿Qué puedes decir del comportamiento del costo total?"*, respectivamente. Los enunciados de ambas situaciones proporcionan al estudiante el conocimiento necesario para interpretar el comportamiento de las funciones; en ellas, a diferencia de lo que sucede en la actividad 11, existe un recurso de explicación inmediato, fácil de comprender y vinculado a las experiencias anteriores de los estudiantes.

<u>En la secuencia 3: El concepto de función. Características de su comportamiento</u>

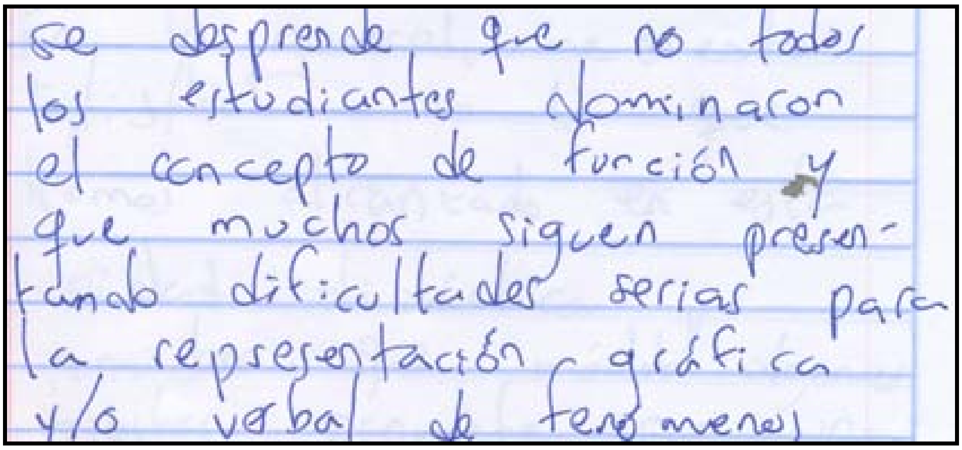
Las clases de esta secuencia tienen un carácter explicativo, sus ideas se exponen mediante una lectura comentada de los contenidos de la secuencia 3 (ver Anexo 6). En los comentarios del profesor destacan varios aspectos importantes que tienen relación directa con el concepto de función:

1. Es uno de los conceptos centrales de la matemática y, en particular, de la modelación matemática en la ciencia económica.
2. La existencia de cuatro formas esenciales de representar los fenómenos antes estudiados, a saber: verbal, tabla de valores, gráfica y ecuación o formula.
3. La existencia de una relación de causalidad entre las variables.
4. La posibilidad de establecer la relación de dependencia entre las variables.

Sobre el desarrollo de esta secuencia se pueden realizar varios comentarios:

Actividad 14: Resulta ser de fácil comprensión para los estudiantes; ésta introduce las ideas de variable y de dependencia entre las variables. El profesor, con ayuda de estos ejemplos, introduce el concepto de función y hace especial énfasis en la idea de que: a cada valor de una de las variables le corresponde uno y sólo un valor de la otra variable.

Los estudiantes escuchan las explicaciones del profesor sin comentario y/o preguntas; al parecer se entiende todo. Sin embargo, existe la sensación de que no se comprende bien la regla de función. El propio profesor destaca en sus notas escritas:


se desprende que no todos los estudiantes dominaron el concepto de función y que muchos siguen presentando dificultades serias para la representación gráfica y/o verbal de fenómenos

El poco nivel de comprensión motiva que el profesor introduzca otros ejemplos de funciones, no abordados en las actividades anteriores pero más cercanas a las experiencias de los estudiantes. Así mismo, introduce ejemplos de relaciones que no cumplen la regla de función, a saber: la relación "*padre de*" y la relación: *"tener por progenitor a"*

No obstante las explicaciones y ejemplos del profesor, los estudiantes no son capaces de plantear una relación que sea una función. A la pregunta: *"¿Qué entiendes por función?"* se responde con ideas como:

Estudiante 1: *"e una relación de dependencia entre una variable y otra"*

Estudiante 2: *"la relación tiene que ser de uno a uno"*

Estudiante 3: *"a cada elemento del dominio le corresponde un elemento del contradominio"*

Se tiene una idea inconclusa y parcial sobre el concepto de función, producida por el obstáculo epistemológico en su comprensión, unido a las imprecisiones en el lenguaje oral de los estudiantes.

Actividad 15. En esta actividad se observa un nivel adecuado de comprensión de las tareas a realizar, aunque en las respuestas de algunos estudiantes se observan imprecisiones en el lenguaje utilizado.

Actividad 16. Se responde sin dificultad, aunque en ocasiones con ideas imprecisas en la expresión verbal. Se observa una mayor comprensión de las ideas sobre crecimiento y decrecimiento de una función, en especial cuando se analiza su representación grafica, la cual resulta ser más cercana a las ideas previas de los estudiantes.

Actividades 17 y 18 El profesor introduce, con ayuda de los ejemplos anteriores, el concepto de punto extremo de una función. Por medio de una gráfica, con puntos máximos y mínimos, insiste en las ideas y/o características de la función, con las que podemos afirmar o negar la existencia de estos puntos Así mismo, establece la diferencia entre los puntos extremos locales o relativos y los puntos extremos absolutos. Los estudiantes, finalmente, responden con relativa facilidad a las preguntas planteadas en estas actividades finales de la unidad didáctica.

Como se puede apreciar, algunas de las dificultades que poseen los estudiantes para responder los problemas, tanto de la prueba final como del trabajo extraclase se hallan también en el desarrollo de las clases. Éstas se pueden resumir en:

- Dificultad para interpretar gráficas que representan situaciones en contextos presumiblemente conocidos por los estudiantes.

- Dificultad en comprender el significado de los conceptos analizados en la unidad, entre los que destacan: función, la relación entre variables, la dependencia funcional entre variables y la pendiente de la línea recta

Unido a ello, y a causa de las concepciones del estudiante sobre lo que significa estudiar matemática, no existe el hábito de preguntar, cuestionar o examinar los conceptos estudiados en la clase. Prevalece la costumbre de intentar comprender ejercicios tipos, que involucren lo estudiado en clase, y donde la actividad sea realizar algunas operaciones aritméticas y/o algebraicas supuestamente conocidas y/o trabajadas por el profesor durante la clase.

En este contexto, un aspecto importante de análisis es precisamente la contribución de la unidad didáctica como herramienta diseñada para el aprendizaje, sus aspectos positivos y negativos, tanto de diseño como de su aplicación con el grupo de estudio.

4.6 Fase IV: Evaluación de la unidad didáctica y su desarrollo

Realizar un análisis riguroso sobre la contribución de la unidad didáctica al proceso de aprendizaje resulta ser una tarea arriesgada; no se tienen todos los elementos que permitan discernir en que medida la unidad coadyuva a que el estudiante obtenga un adecuado nivel de conocimiento sobre los conceptos de función y extremo de una función. Sin embargo, es posible realizar una valoración tomando en cuenta algunas de las respuestas de los estudiantes, así como las percepciones que poseen los estudiantes y el profesor sobre las cuestiones relacionadas con su diseño y desarrollo. Las fuentes de datos son:

- Las pruebas inicial y final, con el objeto de comparar el nivel de respuesta del grupo de estudio antes y después de aplicar la unidad didáctica.
- La prueba final y los resultados mostrados en Cuesta (2005) para comparar el nivel de conocimiento del grupo de estudio con el nivel de conocimiento de estudiantes que aprobaron el curso de Cálculo II.
- La entrevista realizada al profesor y el cuestionario aplicado a los estudiantes para conocer las percepciones sobre la unidad y su desarrollo.

En este apartado mostramos indicios sobre el funcionamiento de la unidad, así como las posibles mejoras en las etapas de diseño y desarrollo.

4.6.1 Análisis comparativo de los niveles de respuestas

Es posible analizar los niveles de respuestas del grupo de estudio desde dos puntos de vista: (i) al comparar cómo responden dichos estudiantes a una misma pregunta que se les propone, antes y después del desarrollo de la unidad didáctica, y (ii) al comparar las respuestas, a preguntas específicas sobre los conceptos de función y extremo de una función, que se proponen a los estudiantes que participan en la unidad didáctica y a estudiantes que no participan en ésta, pero que ya aprobaron el curso de Cálculo I.

El nivel de respuesta antes y después de la unidad didáctica

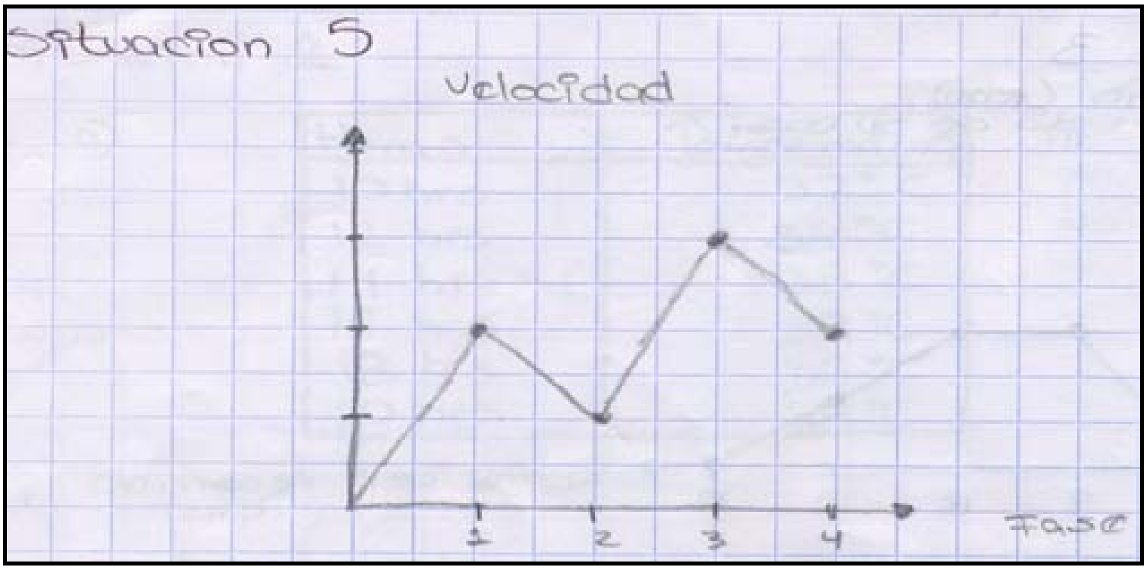
Las respuestas de los estudiantes del grupo de estudio refleja un nivel de conocimiento diferente ante una pregunta específica, que se les propone, tanto en la prueba final como en la prueba inicial de la unidad didáctica. Este es el caso de la situación No 5 de la Prueba Inicial (ver Anexo 4) que constituye, precisamente, el problema No 6 de la Prueba Final (ver Anexo 9). Con esta finalidad de análisis, la situación (problema) se propone en la prueba inicial, no se estudia durante el desarrollo de la unidad y se propone de nuevo en la prueba final de la unidad. Su planteamiento es:

Una persona, en una bicicleta, realiza la siguiente excursión:
1ra. Fase: Va por un terreno llano.
2da. Fase: Sube una montaña.
3ra. Fase: Baja la montaña.
4ta. Fase: Va, de nuevo, por un terreno llano.
Dibuja en una gráfica como cambia la velocidad con respecto al tiempo durante toda la excursión. **Explica tu gráfica con palabras.**

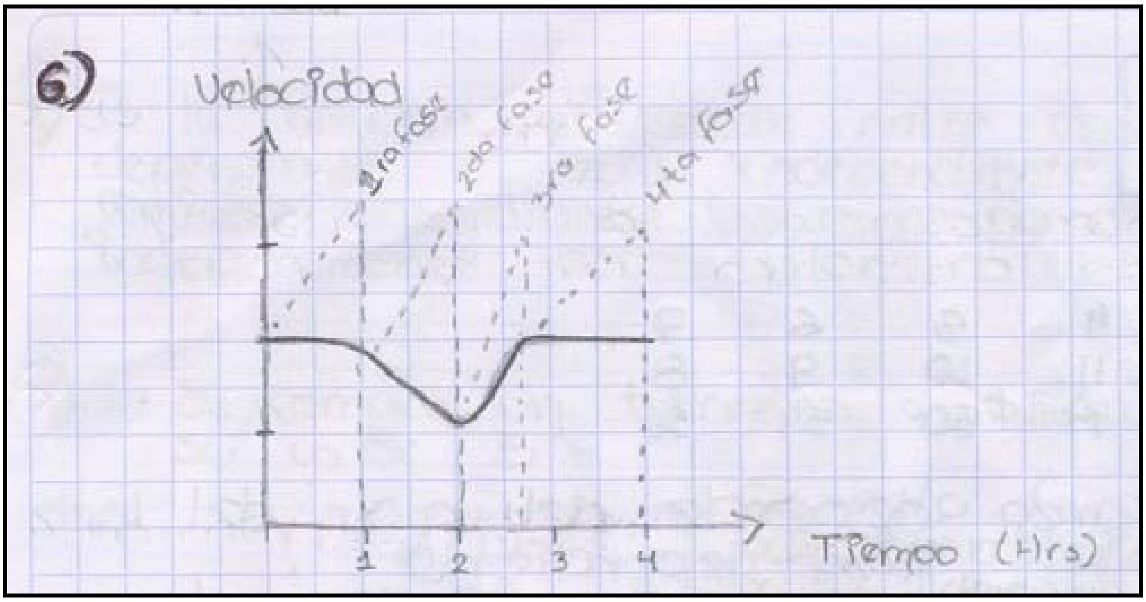
En la prueba inicial, de 56 estudiantes sólo 8 estudiantes (el 14%) logran representar, aunque con errores, la gráfica que representa el cambio de la velocidad con respecto al tiempo. El resto del grupo no comprende la situación planteada y representa la situación física (la montaña) o plantea inconvenientes para responder del tipo:

- *"no entiendo qué es terreno llano"*
- *"no entiendo cómo cambia la velocidad con respecto al tiempo"*
- *"no sé interpretar situaciones de tiempo sin tener el lapso"*
- *"el concepto de manejar un solo término, por los lugares, como que no me quedan claras las ideas"*

En la prueba final el nivel de comprensión de esta pregunta es mucho mayor. Un total de 41 estudiantes (el 80,3% del grupo) logran representar el cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Un ejemplo de la diferencia respecto al nivel de respuestas se halla en la respuesta de María; en respuesta a la prueba inicial grafica el cambio de velocidad con respecto al tiempo de la manera siguiente:



En la prueba final su respuesta es diferente, en tanto que propone una representación gráfica cualitativamente mejor:



En sentido general, el nivel de conocimiento en la prueba final es significativamente mayor que en la prueba inicial; aunque, como ya se mencionó en el epígrafe 4.4.3, existe una dificultad en la interpretación de la dependencia entre las variables, producida porque no se reconoce que la velocidad dependa del tiempo, sino de las condiciones físicas del terreno.

<u>El nivel de respuesta del grupo y de otros estudiantes que aprobaron Cálculo I.</u>

Más importante y significativa es la comparación del nivel de respuestas de los estudiantes que participan en la unidad didáctica con el nivel de respuestas de aquellos estudiantes que cursaron y aprobaron la asignatura Cálculo I. En la investigación diagnóstica (Cuesta 2005) se preguntó a 36 estudiantes inscritos al curso de Calculo II sobre los conceptos de función y extremo de una función. Tres de estas preguntas se proponen también a los estudiantes que participan en la unidad didáctica.

Las preguntas se le proponen a los estudiantes que, no sólo aprobaron el programa de estudios (ver Anexo 3) de Cálculo I con un total de 90 horas de clases, sino que en el momento de realizar la prueba habían estudiado el concepto de función de varias variables en el curso de Cálculo II. En el caso del grupo de estudio, se proponen estas preguntas en la prueba final, después de haber cursado únicamente 18 horas de clases de la unidad didáctica.

A continuación mostramos un análisis comparativo, entre las respuestas de 10 estudiantes de Cálculo II, entrevistados en la investigación diagnóstica y las respuestas del grupo de estudio que participaron en el desarrollo de la unidad didáctica.

Las respuestas a la pregunta *¿Qué es una función?* difieren (ver Tabla 4.11) por el significado que poseen los estudiantes de uno y otro grupo.

Significados	Grupo de Cálculo II	Grupo de estudio
Regla		7
Regla inversa		3
Dependencia entre variables	5	16
Relación entre valores		9
Expresión matemática	5	9
Otra		4
Total	10	48

Tabla 4.11 *Comparativo de respuestas sobre el concepto de función*

Los estudiantes entrevistados (grupo de Cálculo II) poseen una idea sobre función en la que predomina el aspecto utilitario sobre el concepto. Surgen ideas como: "*es que no sé, si lo escribo si puedo identificar que es una función*", o "*una función es la que tiene, no se…una característica para resolver un ejercicio, una función".* Tales respuestas no son más cercanas al concepto de función, que las respuestas de los estudiantes del grupo de estudio. Por otra parte, los que participaron en la unidad didáctica explican el concepto, mayoritariamente, a partir de la relación de dependencia entre las variables, acompañada, en algunos casos, con una explicación parcial o total sobre la regla de la función.

Otra diferencia de significados se halla en las respuestas, de uno y otro grupo, a la pregunta: *"¿La figura 1 representa la gráfica de alguna función numérica de una variable? Explica"*.

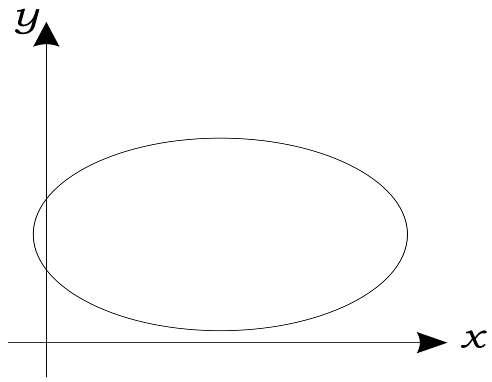


Figura 1

La dificultad observada en las respuestas de los estudiantes que aprobaron la signatura Cálculo I se produce por una apreciación icónica del dibujo (lenguaje icónico). El estudiante argumenta muy apegado a la fotografía literal, sin poder explicar el significado de los conceptos y expresiones. Ejemplos de respuestas son: "*mi x tiene dos alturas*", "*para que sea función debe topar solo con el punto x y con el punto y*" o "*no puedo determinar los valores que representan mi altura*".

En las respuestas del grupo de estudio no aparecen respuestas como las anteriores, pero se manifiesta otra dificultad, que consiste en que los estudiantes intentan responden por similitud o semejanza con ejemplos conocidos o estudiados en la unidad. El 68 % de los estudiantes del grupo (ver Tabla 4.6) recurre a una comparación mental de la figura con ejemplos conocidos. No obstante, 17 estudiantes (el 31,4% del grupo) hacen uso de la idea de regla, no siempre de manera correcta, de para decidir que la figura representa una función.

Otra diferencia entre ambos grupos se halla en las respuestas a la pregunta: "*¿Que entiendes por máximo y mínimo?"*. Los estudiantes que aprobaron Cálculo I, en muchos casos, argumentan a través de la fotografía literal (lenguaje icónico) de la representación gráfica. Señalan los puntos máximos y mínimos, sin poder puede explicar porqué constituye un máximo o un mínimo. En otros casos se identifica el valor máximo o mínimo a la idea de altura, es decir, se vincula la existencia del máximo de la función con el valor más alto y la del mínimo con el valor más bajo. Ejemplos de respuestas son: "*máximo es el valor más grande", "el máximo es el punto más alto que se obtenga en una determinada función", "mínimo es el valor más pequeño".*

Los estudiantes del grupo de estudio, por el contrario, vinculan la idea de puntos extremos a uno de dos significados: (i) un punto donde cambia el comportamiento de la función. Ejemplo: *"a su izquierda crece y a su derecha decrece"* y (ii) un punto donde se halla el valor mas alto (bajo) en cierta *localidad de valores*. Ejemplo: *"el mínimo es el punto local mas bajo, por izquierda y derecha son máximos al punto".*

Al comparar las respuestas a estas preguntas de uno y otro grupo, se observa que la unidad didáctica facilita, en alguna medida, la comprensión de los conceptos de función y extremo de una función. El profesor, en un momento de la entrevista (ver Anexo 27), reconoce que el nivel de comprensión es mayor con la aplicación de la unidad. Este fragmento se muestra a continuación:

> <u>Investigador</u>: "*¿el estudiante promedio de este curso tiene una idea más alejada del concepto de función, en comparación con los estudiantes que aprobaron Cálculo I?"*
>
> <u>Profesor</u>: *"Me parece que en este momento sí, puede ser inferior; lo que me parece que logramos fue un aprendizaje de corto plazo. Es decir, que en el momento en que ellos estudiaron la unidad entendían el concepto abstracto mejor que los estudiantes de cálculo, aunque me parece que faltó algo de práctica".*

Debemos tener presente, como ya se expuso, que los estudiantes que participan en la unidad didáctica poseen menor experiencia en el estudio de los conceptos de función y extremo de una función que los estudiantes que ya aprobaron el programa de la signatura Cálculo I. La unidad didáctica proporciona, en comparación con el programa de Cálculo I, una idea intuitiva más cercana a la comprensión de estos conceptos, que puede ser de mucha utilidad a los estudiantes para comprender las ideas y conceptos que son objeto de estudio en los curso de Cálculo.

Existen otros elementos para evaluar la unidad didáctica; se hallan en las respuestas de los estudiantes al cuestionario, así como en las ideas expuestas por el profesor durante la entrevista. A continuación se muestran estas percepciones del grupo y del profesor.

4.6.2 Las percepciones de los estudiantes y del profesor sobre la unidad didáctica

Los elementos más importantes para evaluar la unidad se hallan en las respuestas al cuestionario (ver Anexo 28); dan una idea sobre cómo perciben los propios participantes la contribución de este instrumento al proceso de aprendizaje de los conceptos estudiados. En primera instancia se relatan las ideas tal y como se exponen, para posteriormente realizar algunos comentarios, desde la experiencia docente del investigador y del profesor.

Debemos destacar que existe un conjunto de aspectos de la unidad que es valorado de manera positiva por los estudiantes; estos aspectos se agrupan como sigue:

La actuación del profesor en clase: existen ideas muy positivas sobre la actuación del profesor en clase; los estudiantes aprecian en especial:

- *"la forma de explicar paso a paso"*
- *"la disposición a enseñar, su preocupación constante por el aprendizaje"*
- *"el nivel de empatía con el grupo"*
- *"la motivación al aprendizaje"*

La forma de enseñanza: la filosofía de trabajo con la unidad didáctica es otro aspecto muy valorado por los estudiantes. Las opiniones van en el sentido de que:

- *"son problemas y actividades muy completos"*
- *"existe aplicación a la economía"*
- *"la forma de trabajo (la dinámica) es muy buena"*
- *"la manera de enseñar es buena"*
- *"se motiva la participación de los estudiantes"*
- *"son problemas y actividades que ayudan a razonar"*

La unidad didáctica: sobre el instrumento los aspectos que más agradan son:

- *"la interpretación de gráficas"*
- *"el cuaderno de trabajo de clase, por ser sencillo y claro"*
- *"se proponen ejemplos sencillos"*
- *"el material de trabajo extraclase"*
- *"la planificación del curso"*
- *"el estudio de fenómenos de cambio"*
- *"el estudio de funciones"*

Por otra parte, las respuestas a la pregunta 3 del cuestionario *"¿Cuál de las tres secuencias te fue más difícil de aprender?"* difieren de un estudiante a otro. De los 54 estudiantes, sólo 4 no reconocen dificultad alguna en las secuencias, y otros 10 no deciden en cuál es la secuencia más difícil. Para los restantes 40 estudiantes existe una secuencia más difícil, cuyos argumentos se muestran en la Tabla 4.12.

¿Por qué es la secuencia más difícil de aprender?		
Secuencia 1: Lectura e interpretación de gráficas	Secuencia 2: Estudio de los fenómenos de cambio	Secuencia 3: El concepto de función
10 estudiantes	9 estudiantes	21 estudiantes
- *"por no estar seguro de mis respuestas"* - *"no saber que partes la componen"* - *"por ser la introducción al curso"* - *"por la interpretación"*	- *"por no comprender la razón para unir los puntos de la grafica"* - *"se solicita mucha descripción"* - *"los problemas de área son difíciles"* - *"son problemas más difíciles de analizar e interpretar"*	- *"el concepto es difícil"* - *"definir que es y que no es una función"* - *"mayor dificultad para entender"* - *"necesidad de realizar más ejercicios sobre el concepto"* - *"las letras y símbolos son confusas"* - *"el juego de palabras"*

Tabla 4.12 *"Argumentos sobre la secuencia más difícil de la unidad didáctica"*

Una situación similar se presenta en las respuestas a la pregunta 4: *"¿Cuál de las tres secuencias te fue más fácil de aprender?"* De los 54 estudiantes, 45 estudiantes deciden sobre la secuencia que consideran más fácil de aprender. Algunos de los argumentos de respuestas se muestran en la Tabla 4.13.

¿Por qué es la secuencia más fácil de aprender?		
Secuencia 1: Lectura e interpretación de gráficas	Secuencia 2: Estudio de los fenómenos de cambio	Secuencia 3: Funciones
23 estudiantes	6 estudiantes	16 estudiantes
- *"es sencillo"* - *"muy práctica"* - *"recordaba lo estudiado en el bachillerato"* - *"son datos fáciles de entender"* - *"es más interesante"* - *"son cosas visuales y más fáciles"*	- *"es más practica"* - *"ya tenía una base de la secuencia anterior"* - *"me gustó mucho más"*	- *"son conceptos muy entendibles"* - *"tenía ya conocimiento previo"* - *"se había analizado en secuencias anteriores"* - *"comprendí la forma de abordarla"* - *"ya sé el concepto y la relación con la gráfica"*

Tabla 4.13 *"Argumentos sobre la secuencia más fácil de la unidad didáctica"*

Los estudiantes hallan más fácil y atractiva la secuencia inicial, cuyas actividades de aprendizaje están relacionadas con la lectura e interpretación de gráficas y por el hecho de que sus problemas son relativamente más fáciles de responder. En respuesta a la pregunta 7 se plantean los dos problemas que, en opinión de la mayoría de los estudiantes, poseen mayor grado de dificultad (ver Tabla 4.14).

Problema	Tipo de problema	Frecuencia absoluta
1.5	Interpretación de pendientes de líneas rectas a partir de la relación de las magnitudes espacio y tiempo	7
2.5	Construcción de tabla, grafica y ecuación algebraica a partir de un entorno geométrico (triángulo rectángulo)	11
3.1	Interpretación del concepto de función a partir de la relación existente entre dos magnitudes	8
3.2	Construcción de las diferentes formas de representar una función a partir de entorno geométrico	24
3.5	Interpretación del comportamiento de una función a partir de una gráfica en una situación contextualizada	8
3.6	Construcción de los conceptos de función y de extremo de una función en contexto algebraico	9
Otros	El resto de los problemas (12) de la unidad didáctica	41
Total	54 estudiantes que seleccionan dos problemas	108

Tabla 4.14 *"Problemas de mayor grado de dificultad"*

Estas apreciaciones de los estudiantes coinciden con el hallazgo de dificultades en el proceso de aprendizaje; se mencionan precisamente aquellos problemas que tienen relación directa o dependen de los conocimientos de tipo algebraico y/o geométrico, es decir, aquellos donde se hallan muchas de las dificultades de los estudiantes.

Otras preguntas del cuestionario tienen el propósito de obtener evidencia respecto a la apreciación de los estudiantes sobre dos aspectos muy importantes de la unidad didáctica. Estos aspectos son:

I) El material de trabajo utilizado en la unidad didáctica

En las respuestas a la pregunta 5 *"¿Cómo evalúas el material de trabajo (guía) de las clases?* los estudiantes se manifiestan de manera positiva sobre el material de trabajo de la clase. Le otorgan una calificación promedio de 8,66 en escala de 0 a 10; unido a ello, se considera que los problemas se ajustan a las actividades estudiadas en clase. Para los estudiantes el grado de dificultad de las tareas, en comparación con las actividades realizadas en clase, es de 2,17, en promedio, en una escala de: 1 (fáciles) a 3 (difíciles).

II) El sistema de evaluación

El sistema de evaluación, de cualquier asignatura, resulta ser una cuestión muy valorada por los estudiantes; influye en sus calificaciones finales y posee, como es lógico, una consecuencia directa en los resultados de rendimiento académico. Por este motivo, y como parte del diseño de la unidad didáctica, se entendió pertinente proponer un sistema de evaluación (ver Anexo 29) que motivara, ante todo, el trabajo cotidiano de los estudiantes. De este modo el estudiante obtiene su calificación en un 50% por el resultado de las tareas realizadas y la participación en clase, y en otro 50% por los resultados del examen (evaluación) final de la unidad didáctica.

Existe una apreciación positiva del sistema de evaluación de la unidad didáctica. A la pregunta 9 *"¿Qué opinas sobre todo el sistema de evaluación de esta unidad?"* se responde con frases del tipo:

- *"es bueno, aceptable"*
- *"es correcto, todo influye en la evaluación"*
- *"ayuda mucho al estudiante"*
- *"está bien planteado y estructurado"*
- *"es una forma no mecanizada de responder"*
- *"es bueno y diferente a lo anterior"*
- *"los problemas deben ser más sencillos"*
- *"se sale de la monotonía habitual"*

Por otra parte, en respuesta a la pregunta 10 *"¿Qué tipo de preguntas esperabas en el examen de esta unidad?"* algunos estudiantes (14) responden: *"esperaba problemas o ejercicios", "problemas, no tener que explicar nada", o "problemas prácticos".* Ideas de este tipo tienen mucha relación con las concepciones propias del estudiante sobre la enseñanza, el aprendizaje y su forma de evaluación.

En cambio, para la mayoría (40 estudiantes) el examen final se ajusta a lo estudiado en el curso; el grado de dificultad del examen (prueba final) se evalúa, como promedio, en 1,93 en una escala de: 1(más fácil que el curso) a 3 (más difícil que el curso). Las opiniones van en este sentido:

- *"lo esperaba tal y como fue"*
- *"similar a lo realizado en clases"*
- *"más adecuado a las gráficas"*
- *"más adecuado a funciones"*
- *"más difícil"*

En general se tiene una idea positiva sobre la unidad didáctica. A las preguntas: *"¿Qué beneficio o provecho te aportó esta unidad?, ¿En que te ayudó?"* los estudiantes responden que el provecho se halla en que permite:

- *"identificar bien los problemas"*
- *"entender y comprender cosas que veía muy complicadas"*
- *"comprender funciones"*
- *"interpretar gráficas"*

- *"razonar, entender y no mecanizar"*

Existen también algunos aspectos de la unidad que no gustaron a los estudiantes. Éstos se pueden agrupar en varias ideas centrales:

La actuación del profesor en clase: preocupa a algunos estudiantes la forma en que se explican y/o abordan las actividades de la unidad. Surgen planteamientos en el sentido de que:

- "*el profesor en ocasiones se sale del tema en su explicación"*
- *"se repite mucho, se explica mucho"*
- *"se habla de cosas no vistas en clase"*
- *"en ocasiones la clase es tediosa*"
- *"en ocasiones se pone nervioso"*

La forma de trabajar: a algunos de los estudiantes les inquieta que sea necesario realizar actividades de aprendizaje, tales como: "*hacer tareas*", "*tareas como forma de evaluación*" o "*examen final"*.

El nivel de comprensión: en opinión de algunos, aunque pocos, estudiantes existen actividades y/o problemas que no se entienden. Las ideas que se exponen son:

- "*el juego de palabras utilizado es muy difícil"*
- *"la forma de resolver los problemas en ocasiones es enredada"*
- *"las tareas son muy difíciles"*
- *"se solicitan tareas sin ver ejemplos en clase*"

La unidad didáctica: sobre el instrumento las opiniones van en el sentido de que:

- "*se dedica mucho tiempo a gráficas"*
- *"faltaron ejemplos del tema, necesidad de problemas más variados"*
- *"la idea de graficar sin números resulta difícil de entender"*
- *"existen muy pocas actividades con funciones*"

Otro aspecto que se manifiesta como negativo, y que afectó el desarrollo de la unidad, es el excesivo número de estudiantes que participan en esta experiencia docente.

En general, los estudiantes reconocen que la unidad didáctica debe mejorar en algunos aspectos (ver Tabla 4.15), tanto de su diseño como de su desarrollo.

En el diseño de la unidad	En el desarrollo de la unidad
1. *"que contenga más ejemplos de situaciones"* 2. *"que los ejemplos sean más entendibles"* 3. *"que se pidan casos donde aplicar lo estudiado"* 4. *"que se promueva la participación de todos los estudiantes"* 5. *"que se realice un resumen al terminar cada clase"*	1. *"que se expliciten más las tareas solicitadas"* 2. *"que el profesor no se salga del tema"* 3. *"que el profesor especifique más el resultado deseado en cada actividad"* 4. *"que el profesor se más exacto al responder una pregunta"*

Tabla 4.15 *"Sugerencias de los estudiantes para mejorar la unidad didáctica"*

En resumen, muchas de las ideas que los estudiantes exponen sobre la unidad didáctica, surgen del propio contexto en que se aplica y de condiciones en que ésta se desarrolla; algunas son coincidentes con la manifestación, antes expuesta, de dificultades en el proceso de aprendizaje y con la apreciación personal del profesor que dirigió la realización de la unidad didáctica. Intentaremos pues, realizar algunos comentarios sobre algunas ideas que expresan los estudiantes sobre la unidad didáctica.

El primer y principal problema para el desarrollo de la unidad fue sin duda el tamaño del grupo. Aplicar la experiencia educativa a un grupo de 58 estudiantes resultó ser una tarea difícil; el propio profesor en un fragmento de la entrevista (ver Anexo 27) plantea: "*el grupo fue demasiado grande, ese es el principal problema que tuvimos, la disciplina fue bastante difícil de controlar, y eso creo que es el reflejo de una cosa un poco más profunda, que es el desinterés de muchos estudiantes. Dos aspectos me llamaron la atención, ahora que veía las notas que escribí en el diario; al principio pensaba que tenían una buena motivación y ciertamente logramos eso en un buen porcentaje de los muchachos (estudiantes). Pero una parte del grupo, que eran normalmente los más desordenados, no está en disposición de estudiar. Me parece que el problema es más grave, más de fondo porque no saben que hacen en la escuela, no tienen mucha idea para que estudian; de manera que con un grupo tan grande y con estudiantes de esa mentalidad era difícil controlarlo*".

Otra opinión, expresada por algunos estudiantes, es la relativa al nivel de comprensión de las actividades y problemas de la unidad. Se plantean ideas como: "*el juego de palabras utilizado es muy difícil" o "la forma de resolver los problemas en ocasiones es enredada"* que tienen un fundamento objetivo. Efectivamente, la investigación pone en evidencia (ver aspecto 4.4.3) la existencia de una dificultad en la comprensión de términos del lenguaje común, y que el propio profesor reconoce (ver Anexo 27) en este fragmento de la entrevista:

Profesor: *"si encontré algunas dificultades para la comprensión de ciertos conceptos; hay un problema que viene del lenguaje, hay simplemente palabras que no se entienden"*.

Investigador: "*¿te refieres al lenguaje matemático?"*

Profesor: "*no, al lenguaje cotidiano; simple y sencillamente hay palabras que no se entienden, problemas que están planteados con palabras que no podían resolver porque no sabían que significaba algo o lo respondían mal porque tienen una concepción errónea del significado de las palabras"*.

Otras ideas surgen de las experiencias anteriores del estudiante, de sus propias concepciones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática o de sus creencias sobre lo que significa adquirir conocimiento de matemática. Por ejemplo, resulta interesante que inquiete a un estudiante la forma de trabajo diseñada con actividades como: "*tareas*", "*tareas como forma de evaluación*". Ello, sin duda, es un reflejo de toda una cultura de la enseñanza y el aprendizaje que ha provocado que dicho estudiante no sepa que hace en la universidad y mucho menos porqué estudia. La idea que poseen muchos de los estudiantes sobre el aprendizaje es muy contraria a los objetivos planteados en la unidad didáctica; como expone el profesor: "*el estudiante viene y trata de cumplir, y con eso como sobrevivir, se da por bien servido y realmente no es muy consciente de lo que tiene que aprender"* (ver Anexo 27).

Otro hecho importante es que algunos estudiantes perciban, que durante el desarrollo de la unidad se solicitan tareas sin ver ejemplos en clase. Aquí se manifiesta otro problema: el estudiante para responder un problema de tarea necesita un prototipo de éste, desarrollado anteriormente en la clase. Se reconoce incluso que el examen final estaba adecuado a la unidad; sin embargo algunos estudiantes esperaban en este examen preguntas como: *"problemas o ejercicios", "problemas, no tener que explicar nada", o "problemas prácticos"*.

Los estudiantes tienen la percepción de que la unidad les ayudó a comprender y razonar, a *"entender y no mecanizar"*. A pesar de sus desaciertos, la unidad didáctica es un intento por desarrollar la idea intuitiva de los conceptos de funciones y extremo de una función. Como se aprecia en las respuestas al cuestionario, la unidad motivó a los estudiantes, pero en su diseño no se tuvo suficientemente en cuenta que: "*los estudiantes necesitan un resultado concreto para ponerse a trabajar y a pensar; como que les resulta difícil ver que la matemática también se trata de discutir ideas, de discutir conceptos*" (ver Anexo 27).

Otro aspecto importante a destacar en relación con la unidad didáctica es la contribución del colectivo de profesores del Departamento de Métodos Cuantitativos; ellos aportaron ideas que contribuyen al diseño de la unidad didáctica. En particular destacan las ideas del profesor que la desarrolla, su contribución fue decisiva, tanto en la fase de diseño como en la fase de aplicación.

Por este motivo, las ideas que se exponen a continuación toma en cuenta no sólo las percepciones del profesor sobre el desarrollo de la unidad, sino también sus ideas en la fase de diseño, discusión y aprobación en el colectivo de profesores. En opinión del profesor la unidad es un buen intento por mejorar la enseñanza de la matemática en la Facultad de Economía; considera que su mayor contribución se halla en que motiva el aprendizaje de los conceptos estudiados: función y extremo de una función. Pero también insiste en la necesidad de adecuar la forma en que se proponen sus contenidos; en su opinión, se deben tener presente las características de los estudiantes y las dificultades observadas en esta primera aplicación.

En opinión del profesor, la primera adecuación debe estar en la relación existente entre las ideas sobre un concepto y el lenguaje utilizado para transmitir y/o trabajar dicho concepto. Sucede que no siempre el lenguaje utilizado es de dominio del estudiante; por ejemplo, la pregunta "*¿Qué bolsa conviene más en términos de precio?*" o la frase: "*estable*" no son de dominio de los estudiantes, lo cual crea una dificultad en el proceso de aprendizaje. Una vía de solución a este conflicto puede ser, en opinión del profesor, la realización de una revisión profunda del lenguaje utilizado en los cursos de secundaria y/o bachillerato, de tal manera que permita plantear los contenidos en ese lenguaje utilizado y de dominio de los estudiantes.

Por otra parte, si bien la unidad es una manera diferente y útil de plantear los contenidos, se debe tener presente la importancia que el estudiante confiere a la obtención de un resultado concreto cuando estudia conceptos matemáticos. El profesor expone (ver Anexo 27): "*en cuanto al lenguaje, en cuanto al estilo de plantearles los problemas, me parece que la unidad es bastante buena. Pero que se queda un poco corta en términos de esto que estamos descubriendo, de que para ellos (los estudiantes) no tener el resultado concreto, no tener el numerito, no tener una receta, un algoritmo que memorizar, que dominar operativamente, que los lleve a un resultado concreto parecería que como para ellos no es importante*".

Otro aspecto a mejorar tiene relación con los objetivos de la unidad; es necesario insistir más durante su desarrollo en los objetivos de cada una de las secuencias estudiadas. Los objetivos de aprendizaje se hallan en el material de la unidad, pero durante las clases no se precisa la manera en que éstos se cumplen o no. El propio profesor reconoce (ver Anexo 27) que: "*aunque se insistió bastante, tendríamos que insistir más en que lo importante no es que aprendan a hacer operaciones, no es que dominen recetitas, que dominen algoritmos, sino que sean capaces de utilizar estas ideas, estos conocimientos para aplicarlos en el contexto de la economía*".

Es necesario adecuar el concepto de función; en opinión del profesor este concepto, después de culminada la unidad didáctica, no se domina de manera práctica. En uno de sus comentarios plantea: "*escribí en el pizarrón: el logaritmo es una función creciente, algunos (varios, la gran mayoría) del grupo tenían problemas para entender que el logaritmo era un función*" y luego, a manera de resumen, expone que: "*es más fácil para ellos diferenciar que una función es creciente o decreciente, que reconocer qué es* *o no es una función*" (ver Anexo 27). En síntesis, el estudiante reconoce que se está en presencia de una función cuando el profesor del curso afirma su existencia; ésta es una dificultad que no fue posible de solventar con la unidad didáctica.

En este sentido, una solución que el profesor propone, desde su experiencia con la unidad didáctica, se halla en la posibilidad de mencionar e utilizar el concepto de función en el inicio de la unidad didáctica, o al menos tan pronto como sea posible: "*la idea sería trabajar sobre la secuencia de funciones y plantear unos problemas un poco más completos y solamente poner antes de abordar funciones aquello que sea necesario para resolver esos problemas, y dejar que la misma idea motive el resto del curso. Yo sí sigo pensando que hay que sacarlos de esta costumbre de pensar que las matemáticas se trata de resolver correctamente, repitiendo lo que hace el maestro, en los problemas que el maestro plantea y sin pensar porque se resuelven así*" (ver Anexo 27).

La unidad didáctica en buena medida coadyuva a la comprensión del concepto de función y otros conceptos asociados, entre los que destacan: la relación funcional entre las variables, las características de su comportamiento y el propio concepto de punto extremo de una función. Esuna manera intuitiva y diferente de enseñar estos conceptos, comparado con la enseñanza que se establece en los planes y programas de estudio hoy vigentes.

Todas las ideas anteriores muestran los resultados generados en el proceso de aprendizaje, que surge de la aplicación de la unidad didáctica, así como, de la propia unidad didáctica como innovación educativa en el contexto en que se diseña y aplica: la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

Las conclusiones de este trabajo se establecen y están condicionadas por las características del contexto en que éste se desarrolla, por el marco teórico de referencia, así como por el enfoque metodológico de la investigación, incluida la unidad didáctica como punto de referencia para analizar y valorar el proceso de aprendizaje de un grupo de estudiantes. En consecuencia, y en base a los objetivos planteados en la investigación, presentaremos las conclusiones derivadas de los resultados de este estudio de campo en tres apartados interrelacionados.

En primer lugar destacan aquellas conclusiones que se relacionan con la determinación de dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función, así como con la coincidencia que existe con los resultados obtenidos en investigaciones anteriores. En segundo lugar, se exponen las principales conclusiones relativas al diseño de la unidad didáctica y su aplicación a un grupo concreto de estudiantes. Finalmente se concluye sobre los aspectos más relevantes del problema de investigación y sus implicaciones, tanto para la enseñanza del cálculo en la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana como para otras posibles investigaciones.

5.1 En relación con la identificación de dificultades en el proceso de aprendizaje

Realizar conclusiones sobre el proceso de aprendizaje derivado de la aplicación de la unidad didáctica nos obliga a resumir, en primera instancia, qué significados asocian los estudiantes a los conceptos de función y extremo de una función para, en base a estos significados, concluir sobre las principales dificultades que surgen cuando el estudiante se enfrenta a tareas de análisis, interpretación, y construcción de dichos conceptos. En este sentido es necesario precisar varios aspectos que son concluyentes de este trabajo de investigación.

Sobre el concepto de función

El concepto de función se identifica, generalmente, con la existencia de una relación de dependencia entre dos variables; muchos estudiantes explican la existencia de una relación de dependencia entre dos variables, pero en muchos casos no se comprende la regla que domina dicha relación entre las variables de la función. La investigación corrobora, al igual que los resultados obtenidos por Ruhana y Bruekheimer (1998), que muchos estudiantes no son capaces de establecer la relación entre las variables de la función. Otros estudiantes logran definir el concepto de función, pero fracasan, tal y como lo plantea Leinhardt et al (1990), en decidir si una gráfica representa o no una función.

El esquema conceptual del estudiante, en términos de Tall y Vinner (1981), evoca dos aspectos del concepto:

(i) La existencia de una relación de dependencia entre dos variables, cuyo significado no siempre se comprende e influye en la respuesta del estudiante cuando debe clasificar que relaciones son funciones y cuales no. Estos resultados son coincidentes con los expuestos por Markovits et al (1986); la idea que se tiene sobre los conceptos de preimagen e imagen de la función causa confusión en la comprensión de la regla de la función.

(ii) Las funciones y ejemplos de funciones estudiados en clase, como recuerdos inmediatos o prototipos, que necesita el estudiante para responder una pregunta o para abordar la solución de un problema. El estudiante necesita o se auxilia de un prototipo en el sentido que lo explica Tall (1992_a), y como se pone de manifiesto también en las investigaciones de Fabra y Deulofeu (2000).

La unidad didáctica propone, a diferencia del curso de Cálculo I, una manera intuitiva de abordar el concepto de función. Sin embargo, resulta difícil para el estudiante pasar de una etapa inicial de comprensión a otra etapa donde el concepto se especifica mediante una definición formal. La estructura cognitiva de nuestros estudiantes, en el sentido que la explica Azcárate (1995), está más asociada con algunas de las características de la función que con el propio concepto de función, tales como: crecimiento, decrecimiento y existencia (o no) de extremos, en especial cuando éstas se visualizan mediante la representación gráfica.

La investigación pudo corroborar la existencia de dificultades en tareas de interpretación y construcción del concepto de función, producidas por el efecto combinado de los significados que poseen los estudiantes sobre este concepto y del conocimiento que se tiene sobre los contextos en que se deben realizar dichas tareas.

En primer lugar, llama la atención la manera en que influye la incomprensión de la dependencia funcional entre variables cuando se tiene que decidir en un contexto concreto (un ciclista que sube y baja una montaña) si la relación entre dos variables supuestamente conocidas (la velocidad y el tiempo) es una función. En efecto, la falta de experiencia sobre el contexto llega hasta el punto que para muchos estudiantes la velocidad no depende del tiempo, mientras para otros existe una relación inversa de dependencia, es decir, el tiempo depende de la velocidad. Se confirma, en este caso, la idea de Artigue (1990) respecto a que ciertas dificultades en el aprendizaje tienen una estrecha relación con la propia experiencia personal del estudiante.

Este es un aspecto relevante a destacar, que confirma las ideas de Dreyfus (1991_b). No se logra asociar el concepto de función con otros conceptos conocidos por el estudiante; éste asocia el concepto sólo con las situaciones que le son conocidas y dadas en el proceso de instrucción, en nuestro caso la unidad didáctica. Su experiencia personal se basa en lo "*estudiado*" y no desarrolla la capacidad de utilizar este concepto de una manera flexible en situaciones conocidas o problemas que formen parte de sus experiencias personales y conocimientos anteriores.

Por otra parte, las tareas de construcción relacionadas con las diferentes formas de representar el concepto de función, así como la traducción entre ellas, en el sentido de Janvier (1987_b), quedan afectadas cuando se desarrollan en un contexto geométrico. En este estudio se pudo constatar que:

1. La incomprensión de un término del lenguaje común (ejemplo *lados adyacentes*) crea un conflicto en la tarea de concebir la función desde un contexto geométrico.
2. El nivel de conocimiento sobre el contexto geométrico es muy elemental, hasta el punto que en muchos estudiantes se crea un conflicto para construir las diferentes formas de representación del concepto de función.
3. Muchos estudiantes no pueden transferir la función, de la tabla y/o gráfica, a la ecuación algebraica.

Como consecuencia, para muchos estudiantes es un conflicto trasladar las ideas expresadas en lenguaje geométrico al lenguaje de funciones; unido a ello, no se tiene, como indican Lesh et al (1987), la habilidad para establecer la relación entre los diferentes sistemas de representación (modelos, diagramas, lenguaje hablado y símbolos escritos), y por consiguiente resulta difícil realizar la construcción que, en el sentido de Janvier (1987_b), consiste en pasar de la descripción verbal de una situación a la gráfica y/o tabla.

Es cierto que el estudio que nos ocupa no tuvo por objetivo directo indagar sobre el nivel de conocimiento de los estudiantes en los contextos geométrico y algebraico, pero se ha podido constatar que trasladar las ideas geométricas, verbalmente planteadas, al lenguaje de funciones ha planteado un grave conflicto a muchos estudiantes. Se manifiesta una dificultad, ya señalada en Cuesta (2005), para expresar relaciones, planteadas verbalmente o desde el entorno geométrico, en lenguaje algebraico. El poco nivel de comprensión del lenguaje algebraico en un contexto geométrico impide al estudiante integrar las diferentes formas de representación del concepto de función y flexibilizar los cambios entre ellas.

Unido a ello, resulta difícil trasladar la idea de función, expresada en forma de tabla y gráfica a su representación algebraica, que corrobora las ideas de Markovits et al (1986) y de Leinhardt et al (1990) respecto a la dificultad en la traducción de una forma de representación a otra, en especial cuando se trata del paso de una gráfica a una ecuación. Esta situación puede deberse también a que los estudiantes se limitan, como explica Dreyfus (1991_b), a trabajar únicamente con la representación algebraica de la función y no conciben ni la idea, ni la necesidad de trasladar a una ecuación, el conocimiento que se tiene en forma de tabla y/o gráfica. Estos resultados son coincidentes con la dificultad planteada por Artigue, referida a la ruptura álgebra/cálculo en el estudio del cálculo, y con los resultados de Steinbring (1993), quien expone que uno de los problemas de comprensión de funciones emerge del contexto de representación.

En esta misma dirección, debemos destacar la dificultad que existe para trasladar algunas ideas expresadas en lenguaje común al lenguaje algebraico. Por solo recordar un ejemplo: de la frase "*coste de 3 dólares por libro*" resulta difícil concebir la expresión algebraica que relaciona el costo total con la cantidad de libros comprados. Éste es precisamente un obstáculo vinculado al currículum de enseñanza, en el sentido que lo expone Tall (1989); los estudiantes conocen la ecuación de la recta, pero sus experiencias están fundadas en la reiteración con casos y ejemplos sencillos, lo cual provoca una dificultad muchas veces insuperable cuando intentan, a partir de la frase propuesta, diseñar la función lineal en el contexto de la economía.

Otro aspecto que no puede soslayarse, es el referido a la comprensión del lenguaje común en el proceso de aprendizaje de los contenidos y conceptos implicados en la unidad didáctica, en especial en las tareas vinculadas con las diferentes formas de representación del concepto de función: interpretación, traducción y construcción. Es interesante que muchas de las dificultades halladas en la investigación se manifiesten en relación, directa o indirecta, con otras dificultades en la comprensión de algunos términos del lenguaje común utilizado en este proceso.

La investigación constató que algunos de las situaciones y problemas planteados a los estudiantes resultan difíciles de responder, de inicio, por la incomprensión de preguntas como: *"¿Cuál es la mínima longitud de cerca necesaria para cercar el camping?"*, de la que no se concibe la idea de hallar el valor mínimo de una función, o *"expresar el número de metros de cerca requerido como una función de la longitud del lado frontal",* cuyo nivel de comprensión no permite concebir y construir el concepto de función.

Esta dificultad puede atribuirse a la incomprensión de los términos en que se expone la condición de un problema, aspecto este del conocimiento que resulta ser determinante en el proceso de aprendizaje. Frases como: "*lados adyacentes*", "*en términos de precio", "temperatura estable"* llegan a causar dificultad en el estudiante para responder algunas preguntas que les fueron propuestas en el desarrollo de la unidad didáctica. La dificultad se halla en que el estudiante no posee una representación adecuada, en el sentido que lo exponen Goldin y Janvier, (1998), sobre los conceptos que intenta estudiar, provocado por desconexiones del sistema lingüístico mediante el cual se plantea y discute el contenido matemático.

Sobre el concepto de extremo de una función

El concepto de extremo de una función se explica en la mayoría de los casos por el cambio del comportamiento de la función o por su posición en una cierta localidad de valores. Pero la explicación se apoya casi siempre en la representación gráfica; cuando se intenta responder sobre este concepto, la imagen evocada, en términos de Tall (1991), es la visualización gráfica del concepto, en la cual el estudiante se siente más cómodo para expresar sus ideas. En algunas ocasiones el estudiante identifica los valores máximos y/o mínimos, pero en su explicación (oral o escrita) asocia éstos con la idea de altura en la gráfica; se pone de manifiesto que el estudiante no puede, en el sentido que lo exponen Lesh y Behr (1987), establecer la relación entre dos sistemas de representación del concepto, por una parte la representación gráfica del concepto y por la otra la descripción verbal.

El significado que poseen los estudiantes se halla en estrecha relación con una idea intuitiva visual en contexto gráfico; el estudiante es hábil en señalar donde se hallan puntos máximos y mínimos relativos en una gráfica, pero en muchas ocasiones no hace referencia alguna al concepto de función, ni a los cambios de comportamiento de una de sus variables con respecto a los cambios en la otra. En otras ocasiones el significado de máximo y mínimo se identifica a la idea de aumentos y disminuciones, pero utilizados como sinónimo de altura en la gráfica, es decir, se identifica el máximo al mayor aumento en la gráfica y el mínimo a la mayor disminución.

En la investigación se ponen de manifiesto otras dificultades vinculadas con la idea que se tiene de máximo y mínimo relativo, muchas de ellas provocadas por una interpretación inadecuada del comportamiento de la función. Para algunos estudiantes el valor máximo relativo de una función creciente se halla, precisamente, en el último valor calculado en la tabla de valores, dicho de otra manera, se entiende el máximo como el mayor valor calculado. Una situación similar ocurre cuando se trata de un mínimo relativo.

De forma complementaria al análisis del proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función, se han identificado otras dificultades relacionadas con la lectura e interpretación de graficas. Las dificultades más relevantes son:

1. La incomprensión de la relación entre variables mostradas en la gráfica. Algunos estudiantes analizan una situación contextualizada, atendiendo sólo a una lectura literal de las magnitudes involucradas (por ejemplo: el precio o el peso de las bolsas de azúcar) y sin establecer la relación manifiesta entre ellas. Como consecuencia, se pierde sentido para responder a la pregunta: *"¿qué bolsa conviene más en términos de precio?"*. Este resultado es coincidente con la idea expuesta por Deulofeu (1995), en su análisis sobre algunos aspectos del pensamiento de los estudiantes en relación con las gráficas cartesianas: existe una tendencia a discretizar una situación, en la que sólo se consideran los puntos relevantes de la gráfica y se restringe la dependencia funcional entre variables a las coordenadas de estos puntos.

2. La incomprensión del significado de la pendiente de la recta. Algunos estudiantes no reconocen, en una gráfica de una situación contextualizada, la velocidad como la pendiente de la recta, por el simple hecho de que no se comprende el concepto de pendiente. En el sentido que lo expone Azcárate (1992), muchos estudiantes se caracterizan por asociar a la palabra "*pendiente*" la imagen mental del coeficiente "*a*" en la fórmula del tipo $y = ax + b$; en el esquema conceptual, el aspecto algorítmico predomina sobre los aspectos, tanto geométrico como funcional. Se identifica incluso la velocidad a la altura de la recta en la gráfica.

3. La interpretación icónica de situaciones gráficas contextualizadas. Muchos estudiantes realizan una interpretación icónica de los cambios de la velocidad de un coche que sube y baja una montaña rusa; para estos estudiantes la gráfica que debe representar los cambios de velocidad es, en esencia, una representación (una imagen) de la montaña. Esta resultado fue mostrado en Cuesta (2005) y resulta ser uno de los errores conceptuales en el sentido de Leinhardt et al (1990); el estudiante interpreta la gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación, es decir una representación icónica.

5.2 En relación a la innovación didáctica

En la investigación, y con el objetivo de analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función en las condiciones del sistema educativo de la Facultad de Economía de la UV, nos propusimos diseñar y aplicar una unidad didáctica en torno a estos conceptos. Con esta finalidad se proponen, entre otros, dos objetivos relacionados con la innovación didáctica: (i) aplicar y evaluar la unidad didáctica propuesta, (ii) analizar las posibles aportaciones de la unidad didáctica al proceso de enseñanza aprendizaje de los contenidos del programa de Calculo I.

En lo que respecta al diseño de la unidad didáctica, podemos afirmar que ciertamente es una innovación dentro del marco curricular (plan de estudios) de la Licenciatura en Economía de la Universidad Veracruzana. Constituye un primer intento por cambiar el ejercicio de la docencia, actualmente centrado en la transmisión de información por parte de los profesores. Desde la perspectiva del entorno educativo en que ésta se diseña y aplica posee varios aspectos a destacar:

1) Es un esquema de enseñanza centrado en el aprendizaje, tal y como lo exige el Modelo Educativo Flexible (MEF) que se implementa en la Universidad Veracruzana.

2) Toma como referencia las ideas y propuestas del colectivo de profesores del Departamento de Métodos Cuantitativos de la Facultad de Economía.

3) Se diseña a partir del diagnóstico, Cuesta (2005), sobre las dificultades de los estudiantes de economía en el aprendizaje del concepto de extremo de una función.

Conviene destacar la manera en que se concibe el proceso de aprendizaje de los estudiantes. La propia experiencia práctica de la enseñanza en la Facultad de Economía, así como los resultados empíricos del diagnóstico, Cuesta (2005), han demostrado que con mucha dificultad los estudiantes pueden acceder, como exige el programa de estudios de Cálculo I, al conocimiento del concepto de función, que le permita posteriormente aprender, manejar y aplicar los conceptos de límite, derivada e integral, y adquirir competencias para plantear y resolver problemas elementales de optimización en economía.

En estas condiciones de enseñanza, una de las aportaciones de la unidad radica en que se propone un nuevo entorno de aprendizaje, que se inicia con la concreción de objetivos específicos, no sólo más accesibles, sino que aprovechan en mayor medida el conocimiento inicial del estudiante. Además, la unidad es un intento por integrar el conocimiento matemático al desarrollo cognitivo actual de los estudiantes, en tanto que orienta un contenido matemático específico con nuevos recursos para el aprendizaje.

Uno de los recursos utilizados en la unidad didáctica, a diferencia de la manera en que se aborda el concepto de función en el curso tradicional de Cálculo, es precisamente el entorno gráfico. Éste constituye una vía de aproximación más cualitativa a los conceptos de función y extremo de una función, coadyuva a la generación de ideas intuitivas desde situaciones del mundo real, algunas de ellas, incluso, relacionadas con el conocimiento económico del estudiante.

Otro recurso de enseñanza es el relacionado con el orden temático para analizar los conceptos de función y extremo de una función. En el curso de Cálculo I el profesor aborda el concepto de función bajo el supuesto de que los estudiantes conocen ideas tan importantes como: variable y relación de dependencia entre variables. En la unidad didáctica se intenta primero estudiar situaciones relacionadas con fenómenos de cambio, que permitan de manera natural estudiar la dependencia funcional entre dos variables y, como resultado de ello, el concepto de función. En consecuencia con esta idea, se estudia el concepto de extremo, como una característica que posee el comportamiento de algunas funciones y se analizan las ideas intuitivas acerca de la forma en que se visualizan los extremos de una función en la gráfica, sin utilizar herramientas de Cálculo Diferencial.

Existen otros aspectos positivos, a favor de la unidad didáctica como experiencia de aprendizaje, que merecen ser mencionados:

1. La unidad didáctica codyuva en mayor medida a la comprensión de las ideas intuitivas sobre función y extremo de una función, que la secuencia de enseñanza contenida en el programa de estudios de Cálculo I de la Facultad de Economía. Como resultado de su aplicación, los estudiantes que participan en la unidad didáctica muestran un mayor nivel de compresión sobre determinados aspectos del conocimiento sobre función y extremo, que los estudiantes que cursaron la asignatura de Cálculo I.

2. La secuencia de aprendizaje de la unidad no sólo es un acercamiento más intuitivo al estudio de estos conceptos, sino además, constituye una forma de aprendizaje más atractiva y dinámica, que ayuda al estudiante a razonar y comprender los conceptos estudiados.

3. Los materiales de trabajo utilizados por el estudiante en el desarrollo de la unidad didáctica son diferentes, por su estructura y contenido, a los libros de texto utilizados en el curso de Cálculo I. El material es valorado de manera

positiva por los estudiantes, lo cual puede contribuir a disminuir el temor de los estudiantes en el estudio de los conceptos de la matemática.

4. La unidad contribuye, en opinión de los estudiantes, a identificar y razonar los problemas sobre funciones y extremo de una función, a interpretar gráficas, a comprender la idea intuitiva sobre función. La planificación de las actividades, la forma de enseñanza y el sistema de evaluación son valorados de manera positiva por los estudiantes del grupo.

Existen otros aspectos negativos que merecen también especial atención:

En primer lugar destaca el tamaño del grupo; la unidad se aplica a un grupo de 58 estudiantes, lo cual influyó en la disciplina y motivación de algunos estudiantes, así como en la posibilidad de controlar y evaluar el proceso de aprendizaje por parte del profesor.

En segundo orden, consideramos también relevante las consideraciones referidas a las concepciones que poseen los estudiantes sobre lo que significa estudiar y aprender en clase de matemáticas. Durante todo el proceso de investigación se pudo observar que para muchos estudiantes no son relevantes los aspectos que ellos llaman "*teóricos*" de la explicación del profesor en clase; en cambio, se le presta demasiada importancia a la realización de rutinas, en otras palabras a "*problemas prácticos*" o "*ejercicios*". La tendencia a mecanizar y buscar un resultado concreto no permite que el estudiante pueda analizar y discutir las ideas y conceptos del proceso de aprendizaje, que es precisamente uno de los propósitos de la unidad didáctica.

En tercer lugar, otro aspecto que afecta el desarrollo de la unidad didáctica es la escasa experiencia en su aplicación. Por una parte, no se tienen antecedentes, en el colectivo de profesores de matemática de la Facultad de Economía, sobre los posibles resultados de aplicar una experiencia educativa que, sin duda, rompe el esquema tradicional de intervención del profesor en el aula; para el profesor que la imparte es un cambio en el ejercicio de la docencia, con una organización metodológica muy diferente al curso tradicional de Cálculo.

Por otra parte, el estudiante no se encuentra preparado para un enfoque de aprendizaje muy diferente a sus experiencias anteriores dentro del sistema educativo; se pudo constatar que a los estudiantes les resultó inesperada e incluso inaudita la manera en que se desarrolló la enseñanza de los conceptos implicados en la unidad didáctica.

Con independencia a los aspectos antes citados, positivos y negativos, convendría exponer algunas de las posibles mejoras a la unidad didáctica. A continuación se detallan algunos aspectos en los que se puede modificar, en especial en relación a su diseño:

A) Es necesario profundizar en el conocimiento sobre el concepto de función, a través de diversos problemas y/o situaciones más completas y variadas, que permitan al estudiante relacionar todas las ideas y conceptos analizados en la unidad didáctica.

B) En preciso proponer un glosario de aquellos términos del lenguaje común, que puedan causar dificultad en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

C) Se debe analizar de manera permanente con los estudiantes, el nivel comprensión de los contenidos, así como el logro de los objetivos propuestos en la unidad didáctica.

5.3 En relación con el problema de investigación y sus implicaciones didácticas

El aspecto más relevante de este estudio se halla en la propia génesis del problema de investigación, cuya reflexión se centra en la enseñanza y el aprendizaje de los contenidos matemáticos que se imparten a los estudiantes de la Licenciatura en Economía de la Universidad Veracruzana, en especial los relativos a funciones y determinación de los puntos extremos de una función. El problema conjetura sobre la posibilidad de un cambio en el proceso de instrucción actual, en el cual los estudiantes se enfrentan al estudio de la teoría de funciones y al procedimiento de determinación de máximos y mínimos de una función, aplicando los criterios clásicos de la primera y segunda derivada, para posteriormente aplicar este conocimiento al análisis de las condiciones de optimo económico de funciones, como: ingreso, costo y utilidad, entre otros.

El cambio consiste en replantear la tarea didáctica, bajo la premisa de que existe una diferencia entre el conocimiento, en tanto construcción social con una manifestación intencionada en el ámbito de la Institución Académica y el conocimiento como construcción personal del estudiante. En correspondencia con ello, se plantearon dos hipótesis de investigación:

1. En las condiciones actuales del MEIF de la Facultad de Economía, y con el insuficiente nivel de preparación de los estudiantes en secundaria y bachillerato, es posible determinar una secuencia de aprendizaje que estimule el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y extremo de una función.

2. Resulta posible una organización metodológica de los contenidos matemáticos desde el concepto de función, las características de su comportamiento, sus formas de representación hasta llegar al concepto de extremo de una función.

Los resultados obtenidos en la investigación confirman estas suposiciones; en las condiciones actuales, y dado el nivel de preparación de los estudiantes, no sólo es posible, sino además necesario diseñar e implementar una secuencia de enseñanza de estos conceptos con dos finalidades específicas: (i) acceder al significado de estos conceptos mediante un proceso de comprensión, donde se activen la experiencia y el conocimiento anterior del estudiante, y (ii) vincular el lenguaje formal de la matemática con su significado referencial en el proceso de aprendizaje.

El proceso de investigación pone de relieve un hecho importante: los estudiantes que inician estudios de economía pueden acceder, con menor grado de dificultad, al conocimiento intuitivo sobre los conceptos de función y extremo de una función, si el proceso de enseñanza se fundamenta en el diseño de una unidad didáctica; entendida ésta como: "*una organización de de objetivos, actividades y medios, centrada en un propósito o problema y preparada para su uso en una situación de enseñanza-aprendizaje*" Sepúlveda y Rajadell (2001, p. 299).

El problema y los resultados obtenidos en la investigación corroboran dos ideas de Leinhardt et al (1990): la primera respecto a la posibilidad de abordar el concepto de función desde las intuiciones del estudiante que estén basadas en su conocimiento sobre situaciones del mundo real, y la segunda sobre la posibilidad de fomentar dichas intuiciones en el conocimiento del estudiante sobre el entorno gráfico.

La investigación, pese a sus limitaciones, contribuye a la comprensión de los problemas relativos al proceso de enseñanza - aprendizaje de nuestros estudiantes; los resultados de la misma nos han permitido conocer cuáles aspectos de conocimiento causan dificultades en el proceso de aprendizaje de los conceptos de función y de extremo de una función. Por otra parte, sitúa la investigación en el ámbito de la enseñanza y propone, mediante el diseño y aplicación de unidades didácticas, un marco de referencia para formular y comprobar conjeturas, elaborar estrategias de enseñanza y, como consecuencia, identificar nuevos recursos y métodos de enseñanza dentro del propio sistema educativo de la Facultad de Economía.

La aportación más importante al sistema educativo es que concibe y analiza las dificultades en el aprendizaje, no sólo desde la perspectiva del nivel de desarrollo cognitivo de los estudiantes. La investigación reconoce que muchas de estas dificultades tienen relación directa con el propio sistema de enseñanza, y en particular con la manera en que se exponen y estructuran los contenidos que el estudiante debe aprender. Desde esta perspectiva, la unidad didáctica es una propuesta que parte de las dificultades del estudiante, para concebir un tipo de enseñanza que estimule el proceso de aprendizaje.

Conviene destacar que, en comparación con la práctica de la enseñanza del Cálculo, la investigación contribuye en varios aspectos de la práctica educativa y tiene implicaciones didácticas para los agentes más importantes del sistema educativo: los estudiantes y el colectivo de profesores.

Para el estudiante:

- Es un tipo de enseñanza más adecuada a su nivel de conocimiento, en la que se proponen problemas y actividades que le permiten un acercamiento paulatino a los conceptos estudiados,
- La enseñanza estimula un tipo de razonamiento, que parte de analizar ideas y conceptos de una manera natural, sin mecanizar formulas y/o procedimientos establecidos, y
- Resulta ser un aprendizaje más beneficioso y atractivo, que cambia el papel del estudiante como constructor de su propio conocimiento.

Para el profesor:

- Es una manera diferente de planificar y gestionar los contenidos teóricos, y su relación con los problemas,
- Propone una metodología de enseñanza que rompe el esquema tradicional de explicar primero conceptos y proponer, posteriormente, ejemplos y/o aplicaciones, y
- Modifica su papel como gestor de la enseñanza y del aprendizaje.

Finalmente, debemos subrayar la importancia de la investigación para el sistema educativo, cuyo proceso de cambio actual sugiere que el interés curricular debe recaer sobre la formación de los estudiantes, más que en la transmisión de información por parte de los profesores.

El presente trabajo no sólo es un acercamiento, desde la didáctica de las matemáticas, a la problemática que plantea la línea de investigación: "*Problemas en la comprensión y utilización de la modelación matemática en la economía*", sino que propone un entorno de enseñanza viable para la adquisición de los conceptos matemáticos que se relacionan de manera directa e influyen en la comprensión de la propia teoría económica.

Es también un marco de reflexión y discusión sobre el papel e importancia de la Didáctica de la Matemática y de la investigación en Didáctica de la Matemática dentro del propio sistema educativo. Todos los profesores reconocemos las dificultades que entraña el conocimiento matemático en general, comprendemos que existen problemas para aprender los contenidos matemáticos, o que sencillamente al estudiante le resulta difícil aprender. Pero más difícil resulta responder a preguntas como: ¿cuáles son las dificultades específicas?, ¿dónde y cómo se manifiestan?, o ¿cuáles son sus causas?.

Por esta razón, y en el entendido de que es posible identificar los problemas en el aprendizaje con una aplicación concreta en la práctica educativa, parece conveniente y oportuno dirigir la investigación a dos escenarios importantes de estudio, a saber:

I) En la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana: Implementar el trabajo realizado a otros conceptos de las matemáticas relacionados con la economía.

II) En la Secretaría de Educación y Cultura del Estado de Veracruz: Promover investigaciones similares en los últimos años de secundaria y/o bachillerato del Estado de Veracruz.

Desde la perspectiva de la didáctica no es posible, ni tiene sentido plantearse un cambio si previamente no se problematiza en el propio contexto en que se manifiestan tales dificultades de aprendizaje. En este sentido la investigación es un inicio en la introspección a esta problemática, crea la pauta de un proceso de investigación sobre los problemas relativos, tanto a la enseñanza como al aprendizaje, de cara a mejorar la práctica educativa de la Facultad de Economía de la Universidad Veracruzana.

La unidad didáctica, pese a sus imperfecciones, tanto en el diseño como en su aplicación, contribuye al proceso de aprendizaje de los estudiantes, estimula la creación de significados y plantea una forma diferente de enseñanza. Es un punto de vista diferente respecto de enseñanza de los conceptos matemáticos y un marco idóneo para analizar las dificultades en la comprensión del conocimiento matemático, cuyo estudio, Sierpinska (1990), nos plantea el interrogante sobre la relación existente entre comprender y conocer, entendiendo la comprensión y los obstáculos como dos piezas complementarias de una realidad, para nosotros, todavía desconocida.

Bibliografía

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, M. A. y otros. (1973). *La matemática: Su contenido, métodos y significado*. Vol I. Madrid: Alianza Universidad.

Anguera, M. (1988). *La Observación en el aula.* Barcelona: Graó.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 10 (2,3), p. 241-286.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. *En Artigue, M.; Douady, R.; Moreno, L. y Gómez, P. (Eds), Ingeniería didáctica en educación matemática.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ayers, T., Dubinsky, E. y Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 19(3), p. 243-259.

Azcárate (1990) *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Tesis de doctoral. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

Azcárate, C. (1995). Sistemas de Representación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, p. 53-61.

Azcárate, C. (1997) Si el eje de las ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *SUMA*, 25, p. 23-30.

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. *Colección.* Madrid: Editorial Síntesis.

Bachelard, G. (1948) *La formación del espíritu científico.* México: Siglo

Bedoya, M. E. (2002) *Formación inicial de profesores de matemáticas: Enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras* graficadoras. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Borba, M. C. y Confrey, J. (1996). A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. *Educational St*udies *in Mathematics*, 31 (3), p. 319-337.

Breidenbach, D. y Dybinsky, E. D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational St*udies *in Mathematics*, 23, p.247-285.

Brousseau, G.(1983). Les obstacles epistemologuiques et les problemas en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2) p.167-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), p. 33-115.

Budnick, F. S. (1990) *Matemáticas Aplicadas para Administración, Economía y Ciencias Sociales*. México: McGraw-Hill.

Chazan, D. (1993). ¿F(X) = G(X)? An approach to modelling whit algebra. *For the Learning in Mathematics*, 13 (3) 22-26.

Confrey, J. y Smith, E.(1994). Exponential Functions, Rates of Chance and the Multiplicative Unit. *Educational St*udies *in Mathematics*, 26 (2-3), p. 35-164.

Cornu, B. (1991) Limits EnTall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, A. Publishers, p. 153-166.

Cuesta, A. (2005). *Dificultades de los estudiantes de economía en el aprendizaje del concepto de extremo de una función.* Tesis de maestría.Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

Courant, R. (1971). *¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos.* Madrid: Edición Española Aguilar.

Davis, R. Young, S. y McLoughlin, P. (1982). *The roles of "understanding" in the learning of mathematic. Urbana/Champaign Curriculum Laboratory; University of Illinois.*

Delgado*, C.* (1998). *Estudio microgenético de los esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios del primer curso.* Tesis Doctoral. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

Del Rincón, D., Arnal, J., Latorre, A. y Sans, A. (1992). *Técnicas de Investigación en Ciencias Sociales.* Madrid: Morata.

De Pablo, P. y Vélez, R. (1993). *Unidades didácticas, proyectos y talleres.* Madrid: Alhambra Longman

De Pro Bueno*,* A. (1999). Planeación de unidades didácticas por los profesores: Análisis de tipos de actividades de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 17 (3), p. 411-429.

Deulofeu, J. (1993). Els Gràfics cartesians de funcions: un estudi de les concepcions dels alumnes centrat en el significat del gràfic. Tesis doctoral. Bellatera: Universidad Autónoma de Barcelona.

Deulofeu, J. (1995) Concepciones de los alumnos de secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 4, p. 6-16.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. In P. Nesher and J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and congnition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge: University Press, p. 113-133.

Dreyfus, T (1991a). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking* Dordrecht: Kluwer, A. P, p. 82-94.

Dreyfus., T (1991b) Advanced mathematical thinking processes. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking* Dordrecht: Kluwer, A. P, p. 25-41.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, p. 33-48.

Espinosa, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de límite de una función. Una propuesta metodológica para el análisis *Enseñanza de la Ciencias*, 18 (3) p. 355-368.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos". *RELIME*, 2 (3), p. 207-230.

Fischbein, E. y Baltsan, M. (1999). The mathematical concept of set and the collection model.*Educational St* udies *in Mathematics*, 37, p.1-22.

Glaeser, G. (1981) Epsitémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 2 (3), p. 303-346.

Goetz, J. P. (1988) *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa.* Madrid: Morata.

Goldin, G. (1998).Representations and the psychology of mathematics education: Part II. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2), p.137-165.

Goldin, G. y Janvier, C. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: Part I. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (1), p.1-4.

Gómez., A. J. (1998) *Contribució A' Estudi dels processos de modelizació a L'Enseñament/Aprenentatge de les matematiques a nivell universitari.* Tesis Doctoral. Bellaterra: Univesidad Autónoma de Barcelona

Guershon, H, Trgalová, J. (1996) Higher mathematics Education. En Bishop, A. J. et al (Eds), *International Handbook of Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, p. 675-700.

Herbel-Eisenmann, B. A., et al (2006). Reconsidering the study of mathematical instructional practices: the importance of curricular context in understanding local and global teacher change. *Journal of Mathematics Theacher Education*, 9, p. 313-345.

Hercovics, N. (1989). Cognitive obstacles encountered in the teaching and learning of álgebra. In: S. Wagner, & C. Kieran (Eds). *Research issues in the teaching on learning of algebra.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Lawerence Erlbaum Associates, p. 60-86.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations.* Tesis doctoral no publicada, university of Nottingham.

Janvier, C. (1987a). Representations and understanding: The notion of function as an example. In C, Janvier. (Ed). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* NJ: Lawrence Er, p. 67-71.

Janvier, C. (1987b). Translation processes in mathematics education In C, Janvier. (Ed) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. NJ: Lawrence Er, p.27-32.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna.* Madrid: Editorial Siglo XXI

Leinhardt, G, Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning and Teaching. *Review of Educational Research*, 60, p. 1-64.

Lesh, R., Post, T. y Behr M. (1987) Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C, Janvier. (Ed). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics. NJ: Lawrence Er*, p.33-40.

Latorre, A., Del Rincón, D. y Arnal, J. (1997). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: Graó

Lithner, J. (2001). Student's mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational St*udies *in Mathematics*, 48,

Markovits Z., Bat-Sheva E., Bruckheimer M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, 6 (2) p. 18-24.

Mc Kernan, J. (2001) *Investigación-acción y currículum.* Madrid: Morata

Mendez., M., Cuesta, A. (2001) *Programa de estudio de Cálculo I. Documento de trabajo de la Facultad de Economía.* Veracruz: Universidad Veracruzana.

Mendez, M., Bustamante, W., Watty, L. (2003) *Programa de estudio de Introducción a los Métodos Cuantitativos. Documento de trabajo de la Facultad de Economía.* Veracruz: Universidad Veracruzana.

MEC (1989). *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria. Área de Matemáticas,* Madrid: MEC.

Morente, M. I. (2000). *Estudio de las dificultades de los alumnos de secundaria obligatoria en los procesos de traducción funcional. Elaboración de una propuesta didáctica.* Trabajo de Investigación. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

Moschkovich, J. N. (1999). Student's use of the X-intercept as an existence of a transitional conception. *Educational St*udies *in Mathematics*, 37, p.169-197.

Nerbovig., M. H. (1973) *Planteamiento de unidades.* Buenos Aires: Guadalupe.

Papert, S., (1980). *Mindstorms, Basic Books*. New York & Harvester Press, Brighton, UK.

Romero, M. L. (1991). *Un modelo didáctico para la adquisición del concepto de límite.* Tesis Doctoral, Universidad de Murcia.

Riviére, V. (1998). El currículum de matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. *SUMA,* 29, p.53-72.

Ruhana, E. y Bruekheimer, M. (1998). Univalente: A critical on non-critical characteristics of functions? *For the Learning in Mathematics*, 18 (2), p. 30-32.

Ruíz, I. L. (1993). *Concepciopnes de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico, y didáctico.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Jaén.

Ruíz, J. y Ispizúa, M. (1989). *La descodificación de la vida cotidiana: Métodos de investigación cualitativa.* Bilbao: Universidad de Deusto

Segura, L. M. (2001) Estudi de les funcions utilizant el full de calcul como a eina de traball. Anàlisi d'un proces construciu basat en la manipulaciò i la vizualizaciò. Tesis Doctoral. Bellaterra: Universidad Autónoma de Barcelona.

Shell Centre for Mathematical Education (1990). *El lenguaje de funciones y gráficas.* Traducción y adaptación de Félix Alayo. Ministerio de Educación y Cultura. Universidad del Pais Vasco.

Sepúlveda, F y Rajadell, N. (2001). *Didáctica general para psicopedago gos.* Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, p.1-36.

Sierpinska., A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning in Mathematics*, 10 (2), p.24-36.

Smith, R. T. y Minton, R. B. (2000) *Cálculo, Tomo 1.* Santa Fe de Bogotá: McGraw-Hill.

Steinbring, H. (1993). Problems in the development of mathematical knowledge in the classroom: the case of the calculus lesson. *For the Learning in Mathematics*, 13 (3) p. 37-50.

Tall, D. (1985) Understanding the calculus. *Mathematics Teaching, 110, p. 49-53.* Versión en castellano de Melchor Pérez Ortoneda: La comprensión del cálculo.

Tall, D. (1989) Diferent Cognitive Obstacles in a technological Paradign, In: S. Wagner, & C. Kieran (Eds). *Research issues in the teaching on learning of algebra.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Lawerence Erlbaum Associates, p. 87-92.

Tall, D. (1991) *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publishers. Nether Lands.

Tall, D. (1992_a) Students' mental prototypes for functions and grafhs. *International Journal of Mathematics Education in Science and Tecnology,* 23 (1), p. 39-50

Tall, D. (1992_b). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. En Douglas, D. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* Macmillan, New York, pp. 495-511.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A.J. Bishop et al (Eds). *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Printed in the Netherlands, p. 289-325.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12 (2), p. 151-169.*

Turégano, M. P. (1998). Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de la Ciencias*, 16 (2) p. 233-249.

Vall de Pérez, C. y Deulofeu, J. (2000) Las ideas de los alumnos respecto a la dependencia funcional entre variables. *SUMA*, 33, p. 73-81.

Villareal, M. (2000). Mathematical Thinking and Intellectual Tecnologies: The visual and the algebraic. *For the Learning in Mathematics*, 20 (2), p. 2-7.

Vinner, S. (1991)The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En Tall, D. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht: Kluwer, p. 65-81.

INDICE DE ANEXOS

ANEXO 1. Resultados del Examen CENEVAL de la Generación 2005

BACH	GLOBAL	RV	RM	MC	CN	CS	MAT	ESP	ING	DER.	MAT2
72	89,2	81,3	100,0	93,3	100,0	66,7	85,7	92,9	70,0	70,0	85,0
91	87,3	87,5	94,1	66,7	85,7	83,3	100,0	92,9	15,0	65,0	73,7
88	86,3	87,5	88,2	86,7	85,7	91,7	100,0	64,3	25,0	90,0	73,7
79	85,3	81,3	88,2	86,7	85,7	83,3	92,9	78,6	60,0	75,0	45,0
86	84,3	93,8	88,2	73,3	78,6	83,3	100,0	71,4	40,0	85,0	94,7
86	79,4	68,8	94,1	73,3	85,7	66,7	85,7	78,6	70,0	70,0	80,0
94	78,4	62,5	82,4	80,0	71,4	75,0	100,0	78,6	40,0	45,0	84,2
90	77,5	62,5	82,4	86,7	71,4	83,3	85,7	71,4	75,0	80,0	57,9
90	77,5	75,0	100,0	60,0	64,3	58,3	92,9	85,7	75,0	65,0	70,0
92	76,5	75,0	88,2	60,0	78,6	75,0	92,9	64,3	55,0	55,0	55,0
77	75,5	75,0	82,4	73,3	78,6	58,3	85,7	71,4	45,0	70,0	52,6
96	74,5	87,5	82,4	46,7	64,3	75,0	78,6	85,7	25,0	70,0	68,4
85	74,5	87,5	76,5	80,0	42,9	75,0	85,7	71,4	85,0	70,0	52,6
80	73,5	68,8	82,4	93,3	78,6	66,7	78,6	42,9	25,0	45,0	63,2
80	73,5	62,5	76,5	46,7	71,4	83,3	85,7	92,9	35,0	65,0	40,0
96	73,5	62,5	88,2	86,7	57,1	58,3	85,7	71,4	35,0	40,0	42,1
92	72,5	87,5	76,5	66,7	50,0	58,3	78,6	85,7	65,0	50,0	52,6
81	71,6	62,5	70,6	73,3	78,6	58,3	100,0	57,1	20,0	75,0	63,2
99	70,6	62,5	94,1	73,3	50,0	66,7	78,6	64,3	45,0	60,0	70,0
84	70,6	75,0	94,1	73,3	50,0	75,0	64,3	57,1	45,0	65,0	55,0
98	69,6	62,5	82,4	46,7	71,4	58,3	92,9	71,4	60,0	45,0	25,0
77	68,6	75,0	70,6	66,7	57,1	91,7	42,9	78,6	30,0	75,0	36,8
80	67,6	43,8	64,7	73,3	85,7	75,0	64,3	71,4	25,0	60,0	20,0
94	66,7	37,5	88,2	60,0	64,3	75,0	85,7	57,1	50,0	30,0	70,0
78	66,7	50,0	70,6	73,3	42,9	75,0	92,9	64,3	20,0	60,0	60,0
94	66,7	75,0	52,9	66,7	50,0	83,3	78,6	64,3	30,0	50,0	42,1
90	65,7	87,5	94,1	53,3	57,1	66,7	35,7	57,1	45,0	60,0	15,0
84	65,7	68,8	70,6	46,7	78,6	66,7	71,4	57,1	40,0	60,0	40,0
90	64,7	50,0	70,6	80,0	64,3	66,7	78,6	42,9	50,0	55,0	25,0
69	64,7	81,3	82,4	46,7	64,3	50,0	57,1	64,3	40,0	60,0	63,2
79	63,7	68,8	52,9	80,0	78,6	58,3	50,0	57,1	40,0	60,0	26,3
77	62,7	68,8	70,6	66,7	50,0	58,3	57,1	64,3	35,0	35,0	20,0
82	62,7	62,5	64,7	66,7	71,4	58,3	71,4	42,9	50,0	50,0	50,0
82	62,7	56,3	76,5	53,3	57,1	66,7	78,6	50,0	30,0	65,0	52,6
69	61,8	62,5	70,6	60,0	50,0	66,7	71,4	50,0	25,0	55,0	36,8
90	61,8	68,8	35,3	93,3	78,6	58,3	71,4	28,6	30,0	50,0	45,0
82	60,8	56,3	58,8	60,0	92,9	58,3	64,3	35,7	55,0	65,0	45,0
80	60,8	68,8	88,2	53,3	50,0	50,0	71,4	35,7	25,0	40,0	63,2
93	60,8	56,3	70,6	66,7	57,1	50,0	85,7	35,7	25,0	35,0	42,1
82	60,8	43,8	64,7	73,3	57,1	50,0	78,6	57,1	35,0	70,0	31,6
95	59,8	43,8	70,6	60,0	64,3	50,0	64,3	64,3	30,0	30,0	47,4
86	59,8	50,0	64,7	66,7	42,9	41,7	92,9	57,1	30,0	45,0	30,0
87	58,8	62,5	41,2	66,7	50,0	50,0	78,6	64,3	50,0	55,0	15,0
75	58,8	75,0	64,7	60,0	64,3	41,7	50,0	50,0	60,0	55,0	47,4
87	57,8	75,0	82,4	26,7	42,9	50,0	71,4	50,0	30,0	50,0	50,0
82	57,8	62,5	58,8	60,0	42,9	75,0	64,3	42,9	60,0	55,0	35,0
86	56,9	37,5	70,6	60,0	57,1	83,3	57,1	35,7	20,0	60,0	31,6
75	56,9	50,0	76,5	53,3	50,0	50,0	50,0	64,3	40,0	50,0	42,1
82	56,9	62,5	64,7	66,7	42,9	50,0	64,3	42,9	20,0	70,0	36,8
96	56,9	62,5	64,7	60,0	35,7	41,7	78,6	50,0	30,0	45,0	52,6
71	53,9	68,8	52,9	60,0	64,3	58,3	35,7	35,7	45,0	55,0	25,0
63	53,9	68,8	41,2	73,3	35,7	50,0	50,0	57,1	50,0	25,0	15,0

ANEXO 1 (continuación)

BACH	GLOBAL	RV	RM	MC	CN	CS	MAT	ESP	ING	DER	MAT2
80	52,9	43,8	52,9	66,7	50,0	75,0	42,9	42,9	30,0	55,0	15,8
91	52,9	56,3	52,9	53,3	50,0	58,3	42,9	57,1	10,0	40,0	20,0
81	52,9	62,5	41,2	53,3	71,4	66,7	35,7	42,9	45,0	50,0	35,0
77	52,9	56,3	58,8	73,3	42,9	66,7	42,9	28,6	30,0	60,0	40,0
90	52,0	50,0	58,8	53,3	28,6	50,0	85,7	35,7	40,0	35,0	50,0
86	52,0	31,3	70,6	46,7	42,9	50,0	64,3	57,1	30,0	30,0	36,8
79	52,0	56,3	70,6	46,7	42,9	41,7	57,1	42,9	25,0	55,0	47,4
87	52,0	56,3	58,8	40,0	35,7	50,0	78,6	42,9	20,0	35,0	63,2
75	52,0	37,5	52,9	66,7	57,1	66,7	50,0	35,7	15,0	40,0	40,0
84	52,0	37,5	52,9	53,3	42,9	41,7	78,6	57,1	30,0	45,0	26,3
73	51,0	50,0	52,9	60,0	35,7	50,0	57,1	50,0	10,0	45,0	10,5
89	51,0	31,3	52,9	53,3	28,6	66,7	85,7	42,9	20,0	35,0	42,1
78	51,0	37,5	58,8	46,7	57,1	50,0	57,1	50,0	30,0	35,0	36,8
87	50,0	56,3	52,9	40,0	35,7	58,3	57,1	50,0	20,0	60,0	10,0
72	50,0	37,5	52,9	60,0	71,4	33,3	42,9	50,0	30,0	50,0	42,1
94	50,0	50,0	29,4	66,7	57,1	66,7	42,9	42,9	40,0	50,0	20,0
69	49,0	43,8	70,6	26,7	50,0	41,7	50,0	57,1	35,0	15,0	26,3
82	49,0	56,3	64,7	26,7	35,7	41,7	42,9	71,4	25,0	50,0	42,1
80	49,0	75,0	47,1	53,3	42,9	50,0	50,0	21,4	15,0	40,0	35,0
75	49,0	62,5	41,2	53,3	50,0	33,3	50,0	50,0	25,0	45,0	30,0
80	48,0	62,5	58,8	53,3	28,6	41,7	21,4	64,3	20,0	35,0	26,3
77	47,1	43,8	70,6	33,3	21,4	25,0	85,7	42,9	45,0	40,0	30,0
73	47,1	50,0	52,9	53,3	42,9	25,0	50,0	50,0	20,0	35,0	21,1
75	46,1	50,0	58,8	66,7	14,3	58,3	21,4	50,0	25,0	45,0	52,6
76	46,1	37,5	41,2	46,7	71,4	41,7	64,3	21,4	25,0	40,0	26,3
74	46,1	43,8	29,4	60,0	35,7	66,7	21,4	71,4	25,0	35,0	40,0
74	45,1	37,5	52,9	40,0	28,6	50,0	57,1	50,0	40,0	30,0	47,4
75	45,1	50,0	29,4	80,0	35,7	66,7	21,4	35,7	15,0	40,0	21,1
70	44,1	62,5	41,2	46,7	35,7	33,3	50,0	35,7	10,0	35,0	42,1
72	44,1	56,3	64,7	26,7	35,7	25,0	57,1	35,7	50,0	40,0	31,6
83	43,1	31,3	41,2	60,0	42,9	66,7	28,6	35,7	20,0	40,0	10,5
80	43,1	43,8	52,9	33,3	35,7	58,3	35,7	42,9	35,0	45,0	36,8
73	42,2	31,3	58,8	40,0	35,7	33,3	64,3	28,6	10,0	25,0	55,0
80	42,2	50,0	35,3	20,0	42,9	50,0	64,3	35,7	20,0	40,0	26,3
71	42,2	43,8	17,6	53,3	57,1	50,0	21,4	57,1	35,0	40,0	25,0
82	41,2	37,5	41,2	46,7	42,9	41,7	42,9	35,7	15,0	20,0	15,8
90	41,2	62,5	35,3	46,7	42,9	41,7	28,6	28,6	20,0	20,0	21,1
80	41,2	50,0	23,5	53,3	50,0	41,7	28,6	42,9	40,0	55,0	35,0
70	40,2	31,3	47,1	26,7	35,7	16,7	50,0	71,4	20,0	25,0	15,8
81	40,2	37,5	17,6	80,0	42,9	33,3	28,6	42,9	25,0	35,0	20,0
96	39,2	37,5	41,2	33,3	64,3	41,7	28,6	28,6	25,0	55,0	30,0
79	39,2	37,5	29,4	33,3	50,0	41,7	50,0	35,7	20,0	25,0	21,1
74	37,3	43,8	23,5	33,3	21,4	66,7	42,9	35,7	20,0	40,0	21,1
79	37,3	31,3	35,3	40,0	50,0	33,3	35,7	35,7	10,0	35,0	30,0
92	37,3	31,3	29,4	13,3	50,0	41,7	42,9	57,1	30,0	50,0	47,4
73	36,3	37,5	41,2	33,3	28,6	25,0	50,0	35,7	5,0	30,0	26,3
65	34,3	37,5	35,3	33,3	14,3	41,7	42,9	35,7	35,0	20,0	31,6
70	34,3	43,8	41,2	20,0	35,7	33,3	21,4	42,9	20,0	25,0	30,0
68	34,3	43,8	29,4	33,3	35,7	33,3	21,4	42,9	20,0	25,0	20,0
73	34,3	18,8	47,1	46,7	28,6	41,7	14,3	42,9	10,0	40,0	25,0
92	30,4	37,5	17,6	20,0	21,4	50,0	21,4	50,0	25,0	45,0	20,0

ANEXO 2. Contenidos del Programa de Estudios de IMC

<table>
<tr><th>25.1 Teóricos</th><th>25.2 Heurísticos</th><th>25.3 Axiológicos</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Aritmética.</td><td rowspan="9">Respeto y tolerancia:
- Apertura a las sugerencias, críticas y puntos de vista de los demás.
- Respeto a las normas establecidas.

Solidaridad y cooperación.

Seguridad en sí mismo.

Responsabilidad:
- Disciplina en el trabajo.
- Puntualidad en la entrega de resultados.

Honestidad:
- En el manejo de la información.
- Honradez profesional.

Rigor científico.

Creatividad.</td></tr>
<tr><td>Propiedades de las operaciones de suma, resta, multiplicación y división (las que sean pertinentes en cada caso) con números naturales, enteros, racionales y reales. Números primos, factorización de enteros en números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo de conjuntos finitos de números enteros.</td><td>Identificación de números naturales, enteros, racionales y reales. Uso de las propiedades de las operaciones con números para la solución de operaciones aritméticas que incluyan fracciones y signos de agrupación. Uso de la calculadora científica para la solución de operaciones aritméticas que incluyan fracciones y signos de agrupación.</td></tr>
<tr><td>Leyes de los exponentes. Relación entre radicales y exponentes.</td><td>Uso de las leyes de los exponentes para la solución de operaciones aritméticas que incluyan fracciones, signos de agrupación y exponentes (enteros y fraccionarios). Uso de la calculadora científica para la solución de operaciones aritméticas que incluyan fracciones, signos de agrupación y exponentes (enteros y fraccionarios).</td></tr>
<tr><td>Regla de tres, porcentajes, tasas de interés, tasas de crecimiento, logaritmos con base entera.</td><td>Aplicación de todos los conceptos y técnicas estudiados hasta el momento para la resolución de problemas planteados en un lenguaje no matemático.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Álgebra de polinomios.</td></tr>
<tr><td>Definición del concepto de polinomio y clasificación de polinomios de acuerdo a su número de indeterminadas, a su grado y a su número de términos.</td><td>Distinguir polinomios de otras expresiones algebraicas. Clasificar polinomios de acuerdo a su número de indeterminadas, a su grado y a su número de términos.</td></tr>
<tr><td>Suma y resta de polinomios. Propiedades de la suma de polinomios.</td><td>Reconocimiento de términos semejantes, solución de sumas y restas de polinomios que involucren signos de agrupación.</td></tr>
<tr><td>Propiedades de la igualdad.</td><td>Uso de las propiedades de la suma de polinomios y de las propiedades de la igualdad para despejar en ecuaciones de primer grado con una incógnita.</td></tr>
<tr><td>El uso de símbolos en matemáticas. El concepto de modelo matemático.</td><td>Distinción entre variables, constantes y parámetros. Identificación de variables endógenas y exógenas. Aplicación de las ecuaciones de primer grado para la resolución de problemas planteados con palabras.</td></tr>
</table>

ANEXO 2 (continuación)

<table>
<tr><th>25.1 Teóricos</th><th>25.2 Heurísticos</th><th>25.3 Axiológicos</th></tr>
<tr><td colspan="2">2. Álgebra de polinomios (continuación).</td><td rowspan="13">Respeto y tolerancia:
- Apertura a las sugerencias, críticas y puntos de vista de los demás.
- Respeto a las normas establecidas.

Solidaridad y cooperación.

Seguridad en sí mismo.

Responsabilidad:
- Disciplina en el trabajo.
- Puntualidad en la entrega de resultados.

Honestidad:
- En el manejo de la información.
- Honradez profesional.

Rigor científico.

Creatividad.</td></tr>
<tr><td>La propiedad distributiva y la multiplicación de polinomios. Deducción de los productos notables. Propiedades de la multiplicación de polinomios.</td><td>Uso de la propiedad distributiva y de los productos notables para la solución de multiplicaciones de polinomios.</td></tr>
<tr><td>Deducción de las reglas de factorización.</td><td>Resolución de problemas de factorización.</td></tr>
<tr><td>Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.</td><td>Solución de ecuaciones de segundo grado. Aplicación de las ecuaciones de segundo grado para la resolución de problemas planteados con palabras.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Elementos de Teoría de Conjuntos.</td></tr>
<tr><td>Precisión del concepto de conjunto.</td><td>Identificación de elementos de un conjunto.</td></tr>
<tr><td>Contención e igualdad entre conjuntos.</td><td>Obtención de todos los subconjuntos de un conjunto finito dado. Identificación de subconjuntos de conjuntos más generales. Identificación de conjuntos iguales.</td></tr>
<tr><td>Operaciones básicas con conjuntos: unión, intersección, diferencia y complementación.</td><td>Solución de problemas sobre uniones, intersecciones, diferencias y complementos de conjuntos. Conteo de elementos de uniones e intersecciones: el principio de inclusión–exclusión. Trazado de diagramas de Venn para la representación de uniones, intersecciones, diferencias y complementos y su utilización para la deducción de igualdades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Desigualdades e intervalos de la recta real.</td></tr>
<tr><td>Propiedades de la relación de orden en el conjunto de los números reales. Definición del concepto de intervalo.</td><td>Uso de las propiedades de la relación de orden para la solución de desigualdades lineales y cuadráticas en una incógnita, expresando los resultados como intervalos.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. El plano cartesiano y el trazado de gráficos.</td></tr>
<tr><td>Introducción del sistema de coordenadas cartesianas rectangulares en el plano. Introducción de la terminología comúnmente utilizada (abscisa, ordenada, cuadrante, etc.).</td><td>Identificación de las coordenadas de un punto dado en el plano y ubicación del punto del plano que tiene las coordenadas dadas. Identificación de los signos de las coordenadas de acuerdo con el cuadrante. Elaboración de gráficas de dispersión que expliquen la interrelación que hay entre dos variables económicas.</td></tr>
<tr><td>El teorema de Pitágoras y la fórmula de distancia entre dos puntos. Ecuación de la circunferencia.</td><td>Cálculo de la distancia entre dos puntos dados. Deducción de la ecuación de una circunferencia dada y ubicación en el plano de la circunferencia que representa a una ecuación particular.</td></tr>
</table>

ANEXO 2 (continuación)

<table>
<tr><th>25.1 Teóricos</th><th>25.2 Heurísticos</th><th>25.3 Axiológicos</th></tr>
<tr><td colspan="2">5. El plano cartesiano y el trazado de gráficos (continuación).</td><td rowspan="6">Respeto y tolerancia.

Solidaridad y cooperación.

Seguridad en sí mismo.

Responsabilidad.

Honestidad.

Rigor científico.

Creatividad.</td></tr>
<tr><td>El concepto de pendiente y la ecuación de la recta.</td><td>Aplicaciones del concepto de pendiente en el contexto de la teoría económica. Deducción de la ecuación de una recta a partir de dos datos. Ubicación en el plano de la recta que satisface una ecuación lineal dada.</td></tr>
<tr><td>Funciones cuadráticas y recíprocas.</td><td>Graficación de funciones cuadráticas y recíprocas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">6. Matemáticas discretas.</td></tr>
<tr><td>La notación sigma para sumas (o notación de “sumatoria”). Propiedades de la suma expresadas en términos de la notación sigma.</td><td>Simplificación y solución de expresiones que involucren la notación sigma. Sumas simples y sumas dobles.</td></tr>
<tr><td>El principio fundamental de conteo. Los conceptos de permutación y de combinación.</td><td>Uso del principio fundamental de conteo y de las fórmulas de permutaciones y de combinaciones.</td></tr>
</table>

ANEXO 3 Contenidos del Programa de Estudiosde Cálculo I

<table>
<tr><th>25.1 Teóricos</th><th>25.2 Heurísticos</th><th>25.3 Axiológicos</th></tr>
<tr><td>T1. Comprender las nociones elementales de la Lógica y la Teoría de Conjuntos y reforzar la comprensión del concepto de función real de una variable real:

T1.1. Nociones elementales de Lógica y Teoría de Conjuntos. La necesidad de hacer demostraciones en Matemáticas.

T1.2. Funciones reales de una variable real, sus gráficas y algunos ejemplos importantes: funciones lineales, polinomiales, racionales, logarítmicas y exponenciales.</td><td>H1. Manejar las herramientas básicas de la Lógica y la Teoría de Conjuntos y aplicar el concepto de función real de una variable real en el contexto de temas elementales de Economía:

H1.1. Uso de símbolos en Matemáticas y comprensión del lenguaje formal. Uso del lenguaje de la Teoría de Conjuntos.

H1.2. Aplicaciones en Economía: la pendiente como tasa de cambio, el modelo keynesiano de consumo, conjuntos presupuestarios, optimización cuadrática, problemas de crecimiento y decrecimiento, interés compuesto, etc.</td><td rowspan="2">Respeto y tolerancia:
- Apertura a las sugerencias, críticas y puntos de vista de los demás.

Solidaridad.

Seguridad en sí mismo.

Responsabilidad:
- Disciplina en el trabajo.
- Puntualidad en la entrega de resultados.

Honestidad.

Rigor científico.

Creatividad.</td></tr>
<tr><td>T2. Comprender los conceptos de límite y continuidad, así como sus consecuencias:

T2.1. El concepto intuitivo de límite.
T2.2. La noción de continuidad.

T2.3. Límites que involucran al infinito.

T2.4. Definición formal de límite.

T2.5. Definición formal de continuidad.
T2.7. El Teorema del Valor Intermedio.
T2.8. El Teorema de existencia de valores máximos y mínimos.</td><td>H2. Calcular límites y aplicar el concepto de continuidad y sus consecuencias:

H2.1. Cálculo de límites utilizando diversas técnicas.
H2.2. Reconocimiento de funciones continuas.
H2.3. Cálculo por diversas técnicas de límites que involucran al infinito.
H2.4. Aplicar la definición formal de límite.
H2.5. Aplicar la definición formal de continuidad.</td></tr>
</table>

ANEXO 3 (continuación)

25.1 Teóricos	25.2 Heurísticos	25.3 Axiológicos
T3. Comprender el concepto de derivada, las reglas de derivación y las propiedades básicas de las funciones derivables:	H3. Calcular derivadas, aplicar las propiedades de las funciones derivables y las técnicas de derivación y aplicar la noción de derivada en el contexto de temas elementales de Economía:	
T3.1. El problema de hallar rectas tangentes y de determinar la velocidad instantánea.		
T3.2. Tasa promedio de cambio y tasa instantánea de cambio. Definición de la derivada.	H3.2. Aplicaciones en Economía: costos marginales, producto marginal del capital, producto marginal del trabajo, etc.	
T3.3. Reglas de derivación.	H3.3. Uso de las reglas de derivación. Aplicaciones en Economía.	
T3.4. Aproximaciones lineales.	H3.4. Determinación de la mejor aproximación lineal a una función.	
T3.5. Derivadas de funciones implícitas.	H3.5. Uso de la derivación implícita para determinar tasas instantáneas de cambio.	
T3.6. El Teorema del Valor Medio.		
T3.7. Derivadas de orden superior.	H3.7. Cálculo de derivadas de orden superior.	
T4. Comprender los fundamentos teóricos de la optimización de funciones reales de una variable real, así como las definiciones de concavidad y convexidad para funciones:	H4. Aplicar las técnicas de optimización y los conceptos de concavidad y convexidad para funciones, especialmente en el contexto de temas elementales de Economía:	
T4.1. Definición de valores extremos globales y locales.	H4.1. Reconocimiento *a priori* de valores extremos globales y locales.	
T4.2. Puntos críticos y los criterios de la primera derivada y de la segunda derivada.	H4.2. Determinación de valores extremos locales.	
	H4.3. Problemas de optimización en Economía: costos mínimos, beneficios máximos, etc.	
T4.4. Concavidad y convexidad.	H4.4. Reconocimiento de funciones cóncavas y convexas. Aplicaciones en Economía: utilidad del consumidor, etc.	

ANEXO 3 (continuación)

25.1 Teóricos	25.2 Heurísticos	25.3 Axiológicos
T5. Comprender el concepto de integral y el Teorema Fundamental del Cálculo:	H5. Calcular integrales, aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo y aplicar el concepto de integral en el contexto de temas elementales de Economía:	
T5.1. Definición y propiedades de las antiderivadas (o primitivas) de una función.	H5.1. Cálculo de antiderivadas sencillas.	
T5.2. Propiedades algebraicas de la suma. Notación *sigma*.	H5.2. Cálculo de sumas. Algunas fórmulas útiles.	
T5.3. Áreas y la integral definida.	H5.3. Cálculo de sumas de Riemann e integrales definidas.	
T5.4. El Teorema Fundamental del Cálculo.	H5.4. Utilización del Teorema Fundamental del Cálculo para cálculosrutinarios.	
	H5.5. Técnicas de integración: por sustitución, por partes, de funciones racionales.	
	H5.6. Aplicaciones de la integral en Economía: variación de la reserva de divisas de un país, distribución del ingreso (o renta), análisis de la influencia del ingreso en la demanda, etc.	

ANEXO 4. Prueba Inicial de la Unidad Didáctica

FACULTAD DE ECONOMÍA
UNIVERSIDAD VERACRUZANA

PRUEBA INICIAL

Nombre y Apellidos: ____

Situación 1: En una papelería se venden 5 paquetes de bolígrafos. El número de bolígrafos y el precio correspondiente a cada paquete se muestran en la tabla:

Número de bolígrafos por paquete	4	6	8	10	14
Precio del paquete (en Pesos)	42	60	72	100	147

a) Representa esta situación en una grafica.
b) ¿Cuál paquete conviene más? ¿**Por qué**?

Situación 2: Manuel está enfermo, su madre le toma la temperatura en varias ocasiones y obtiene las siguientes mediciones:

- A las 10 horas la temperatura fue de 37 ^{0} C y dos horas después tenía 39 ^{0} C.
- A las 14 horas tenía 38 ^{0} C y continuó igual hasta las 16 horas.
- A las 18 horas tenía 36 ^{0} C y a las 20 horas había subido en 2 ^{0} C.

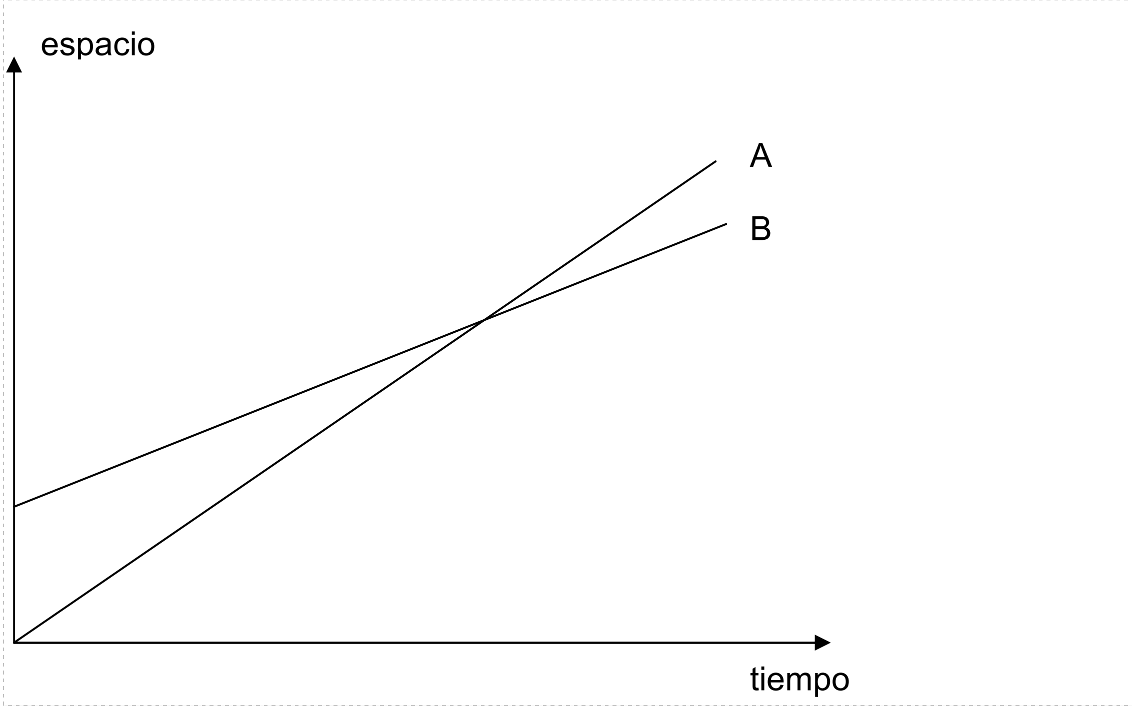
a) Realiza una tabla que relacione las horas con las mediciones de temperatura.
b) Representa esta situación en una grafica.
c) ¿En qué momento la temperatura debió ser de 38 ^{0} C?
d) ¿Cuándo se mantuvo estable Manuel?

Situación 3: Un ciclista sale de casa a dar un paseo, desde las 8 am. hasta las 12 del día. Durante la primera hora lleva una velocidad constante de 30 km/h y luego descansa una hora. Después del descanso regresa a una velocidad de 15 km/h.

a) Realiza una tabla de valores donde se represente el tiempo (en horas) y la distancia a la que se encuentra de la casa.
b) Realiza una gráfica donde se represente esta situación.

ANEXO 4 (continuación)

Situación 4: Dos coches, A y B se mueven como se indica en la gráfica.



a) Se desea saber si, en el instante de tiempo t = 3, la velocidad del coche A es menor, igual o mayor que la velocidad del coche B. **Explica tu respuesta**

b) ¿En el instante de tiempo t = 6, la velocidad del coche A es menor, igual o mayor que la velocidad del coche B?

Situación 5: Una persona, en una bicicleta, realiza la siguiente excursión:

1ra. Fase: Va por un terreno llano.
2da. Fase: Sube una montaña.
3ra. Fase: Baja la montaña.
4ta. Fase: Va, de nuevo, por un terreno llano.

Dibuja en una gráfica como cambia la velocidad con respecto al tiempo durante toda la excursión. **Explica tu gráfica con palabras.**

GRACIAS

ANEXO 5.1. Respuestas del Profesor Antón al Cuestionario de la Unidad

Escriba en cada columna, **todos los elementos de conocimiento**, sobre cada uno de los aspectos que usted ve necesarios para el desarrollo de la experiencia que usted imparte.

GRAFICAS	FUNCIONES	EXTREMO DE FUNCION
1. la escala de los ejes. 2. la relación entre elementos de los pares ordenados Únicamente se revisan gráficos de dos ejes. Remitirse al capítulo 2 de Parkin, "Elaboración y utilización de gráficas"	1. la representación algebraica. 2. la relación funcional entre variables Se utilizan funciones con carácter informal para indicar que una variable depende de otra o más. Las funciones se expresan de la siguiente manera: $Y = f(X)$ $Y = f(X, W, Z)$ Un ejemplo es la función de inversión: $I = f(Y,i)$ Entre los ejemplos de función más utilizados se encuentran las relaciones lineales: $Y = a + bX$ Entre las funciones que se revisan se encuentran: las funciones de oferta y de demanda, la función consumo, etc.	1. la idea intuitiva. 2. sus características La idea de extremos de la función se revisa de manera intuitiva, cuando se exponen las teorías del productor y del consumidor. Al graficar las funciones de producción y de utilidad se indican y se explican los máximos de la funciones.

ANEXO 5.2 Respuestas del Profesor Enric al Cuestionario de la Unidad

Escriba, en cada columna, **todos los elementos de conocimiento**, sobre cada uno de los aspectos que usted ve necesarios para el desarrollo de la experiencia que usted imparte.

GRAFICAS	FUNCIONES	EXTREMO DE FUNCION
3. la escala de los ejes. 4. la relación entre elementos de los pares ordenados 5. Identificación de los ejes como dominio y codominio 6. Relación con otras gráficas de la misma clasificación (rectas, parábolas, circunferencias). 7. Puntos particulares de las gráficas (cresta, valle). 8. Elementos que distinguen (coeficientes, exponentes, etc.) 9. Ocurrencia con diferentes escalas 10. Interpretación con líneas (punteadas o seguidas)	3. la representación algebraica. 4. la relación funcional entre variables 5. La regla de correspondencia (verbal o por ecuación) 6. Dominio y codominio 7. Función numérica o de otro tipo 8. Clasificación 9. Continua o discreta (en su dominio y/o en su codominio) 10. Interpretación física si la hay	3. la idea intuitiva. 4. sus características 5. Clasificación 6. Interpretación en un problema 7. Relación con los conceptos teóricos 8. Método o métodos de obtención 9. Definición en términos de desigualdades 10. Importancia de su apoyo en la solución de problemas

ANEXO 5.3 Respuestas del Profesor Matías al Cuestionario de la Unidad

Escriba, en cada columna, **todos los elementos de conocimiento**, sobre cada uno de los aspectos, que usted ve necesarios para el desarrollo de la experiencia que usted imparte.

GRAFICAS	FUNCIONES	EXTREMO DE FUNCION
1. La escala de los ejes. 1.1. Correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos de la recta y el conjunto de los números reales. 1.2. Escalas de medición para variables numéricas continuas. 2. Localización de puntos en el plano cartesiano. 2.1. Correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos del plano y el conjunto de los pares ordenados de números reales. 2.2. Caracterización de subconjuntos sencillos del plano de acuerdo a las coordenadas de sus puntos, por ejemplo, los ejes, los cuadrantes. 2.3. Uso de coordenadas variables para la representación de conjuntos de puntos, por ejemplo, el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen x>5, el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas suman 1, etc. 3. Distancia entre dos puntos. 3.1. El Teorema de Pitágoras. 3.2. La fórmula para la distancia entre dos puntos. 4. Ecuación de la circunferencia. 4.1. Caracterización de la circunferencia como conjunto de puntos equidistantes al centro. 4.2. Deducción de la ecuación de la circunferencia a partir de la fórmula para la distancia entre dos puntos. 5. Ecuación de la recta. 5.1. El concepto de pendiente. 5.2. Deducción de la ecuación de la recta. 5.3. Aplicaciones del concepto de pendiente en economía. 6. El concepto de gráfica de una función.	1. El concepto de función como fórmula que relaciona variables. 2. El concepto general de función como relación entre conjuntos.	1. Ideas intuitivas acerca de máximos y mínimos, de preferencia sin utilizar herramientas de Cálculo Diferencial. 2. Ideas intuitivas acerca de la forma en que se visualizan los extremos de una función en la gráfica. 3. Formalización del concepto de extremo de una función. 4. El concepto de punto crítico de una función. 5. Criterios para determinar si un punto crítico es máximo, mínimo o ninguno de los dos.

ANEXO 5.4 Respuestas del Profesor Jaume al Cuestionario de la Unidad

Escriba, en cada columna, **todos los elementos de conocimiento**, sobre cada uno de los aspectos, que usted ve necesarios para el desarrollo de la experiencia que usted imparte.

GRAFICAS	FUNCIONES	EXTREMO DE FUNCION
1.-La escala de los ejes, aunque esto se debe omitir en una primera presentación del tema. 2.-Interpretación de un punto del plano coordenado como un par ordenado y viceversa. 3.-Asociación y entendimiento de una ecuación de dos variables como el conjunto de puntos del plano que la satisfacen.	1.-La idea de asociación entre elementos de dos conjuntos, dando esta por medio de una tabla, en palabras, por una fórmula, etc. 2.- Justificación de las denominaciones de variable independiente, dependiente así como variables endógenas y exógenas. 3.- Comprensión de la distancia que toma un par ordenado (x_0,y_0) con el eje y como el valor de la variable endógena y_0 que la función asocia al valor de la variable exógena x_0 correspondiente. 4.- Elaboración de una gráfica mediante valores funcionales. 5.- Interpretación de la gráfica de una función como la representación geométrica de la función.	1.-la idea intuitiva de máximo y mínimo absolutos mediante ejemplos que no requieran cálculo 2.- Reconocimiento del valor extremo absoluto como el valor máximo (mínimo) de entre todos los valores funcionales posibles de una función. 3.- Interpretación geométrica de un valor extremo como el la “altura” máxima (mínima) que toma la función. 4.- Diferenciación entre valor extremo absoluto y relativo mediante la idea de un intervalo de valores que se le permita tomar a la variable independiente. Interpretación geométrica de esta restricción como la consideración de solo una sección de la gráfica de la función. 5.- Comprensión del valor extremo relativo como la “altura” que toma la gráfica de f en puntos donde esta forma “cúspides” o “valles”. 6.- Elaboración y justificación de la determinación de los valores extremos relativos por medio de los puntos críticos, así como con los criterios de la primera y segunda derivada.

ANEXO 6. Material de Clase de la Unidad Didáctica

Unidad Didáctica: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función*"

INTRODUCCIÓN

En esta unidad te presentamos un conjunto de actividades, que se agrupan en tres secuencias de aprendizaje; estas secuencias son:

SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*
SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*
SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

Dichas actividades, dentro de cada secuencia, poseen un orden consecutivo. Cada una se compone de un enunciado inicial, seguido de un conjunto de tareas que se deben realizar, es decir, responder. Tus respuestas a las tareas, siguiendo las orientaciones del profesor, pueden ser individuales o en grupo de estudiantes, de manera escrita o verbal.

Como podrás observar, algunas tareas poseen mayor grado de dificultad que otras, sin embargo esto no debe perjudicar tu nivel de participación. Tu participación es muy importante y se puede manifestar de varias maneras:

- cuando respondes, de manera escrita u oral, a las preguntas objeto de análisis,
- cuando participas, exponiendo tus ideas personales, en grupos de trabajo o a todo el grupo de estudiantes de la clase,
- cuando solicitas la colaboración, del profesor o de tus compañeros, para esclarecer cualquier duda o solucionar una dificultad personal.

Es importante que intentes trabajar para dar respuesta a las preguntas que se asignan como trabajo independiente. Estas actividades y tareas se encuentran en el *Material de Trabajo Extraclase* y serán orientadas por el profesor al terminar cada clase.

Objetivos de aprendizaje: Existe un conjunto de objetivos, cuyo cumplimiento debes analizar y cuestionar durante el desarrollo de las actividades y tareas:

1) Lograr familiaridad con el conocimiento que nos aportan las gráficas, así como con el significado en cada situación específica estudiada.
2) Comprender, a partir del análisis de ejemplos concretos de fenómenos de cambio, la idea de variable y de dependencia funcional entre variables.
3) Reconocer, en cada situación estudiada, la variable independiente y la variable dependiente, así como las unidades que puede asumir cada variable.
4) Lograr familiaridad con un conocimiento intuitivo y global del concepto de función, a partir de los diferentes lenguajes en los que se puede representar este concepto: verbal, numérico (tablas), gráfico y algebraico.
5) Lograr familiaridad con la idea intuitiva de puntos extremos de una función, a partir de ejemplos concretos.

ANEXO 6 (continuación)

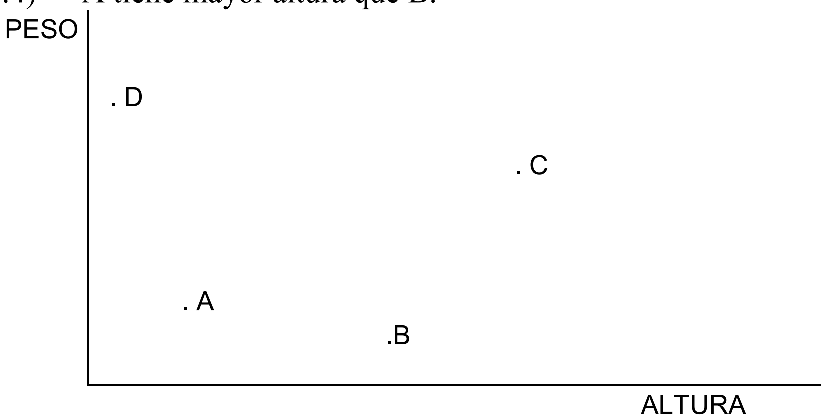
SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*

ACTIVIDAD 1: En un sistema de ejes cartesianos, en papel cuadriculado, se pide:

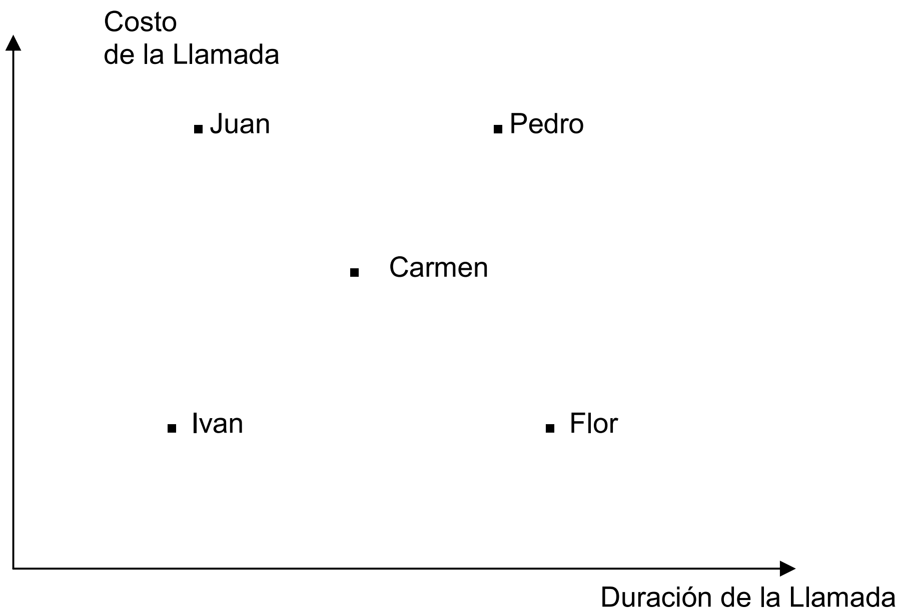
1.1) Representar los puntos: A (2,-3); B (-3,5); C (1,0); D (0,4), E (-4,-5).
1.2) Trazar la recta que pase por los puntos A y B.
1.3) Buscar las coordenadas de otros dos puntos de dicha recta.

ACTIVIDAD 2: Tomando en cuenta la siguiente gráfica, diga si las afirmaciones son correctas o incorrectas (justifica tu decisión).

2.1) B es el menos pesado y de menor altura.
2.2) D pesa más que C.
2.3) C es el más alto y pesado.
2.4) A tiene mayor altura que B.



ACTIVIDAD 3: Cinco personas hicieron llamadas telefónicas desde la ciudad de Xalapa, y a la misma hora, a otras ciudades del país. Se conoce que a mayor distancia es mayor el precio por minuto de llamada.
Cada persona anotó el costo total de su llamada y el tiempo de la misma en la siguiente gráfica:

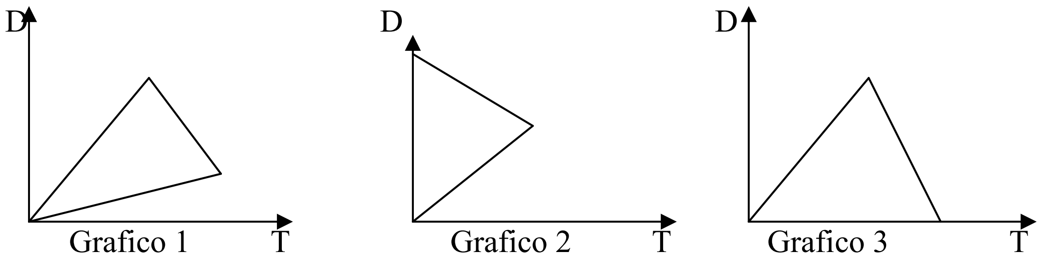


ANEXO 6 (continuación)

Se te pide responder las preguntas siguientes:

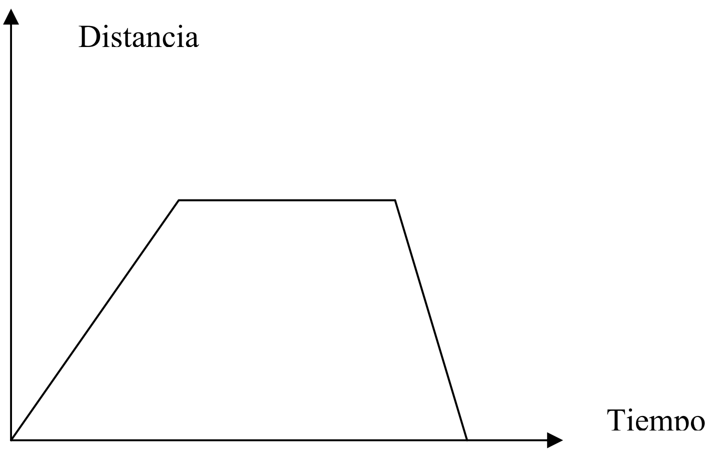
3.1) ¿Quién realizó una llamada a la ciudad más lejana? **Explica.**
3.2) ¿Quién realizó una llamada a la ciudad más cercana? **Explica.**
3.3) ¿Quiénes realizaron una llamada a la misma distancia aproximadamente? **Explica.**

ACTIVIDAD 4: Una persona sale de su casa para comprar el periódico y regresa inmediatamente. Mostramos tres "*supuestos*" gráficos de la relación, entre la distancia a la que se encuentra esta persona de su casa y el tiempo transcurrido desde que salió. (D representa a la distancia y T al tiempo).



4.1) ¿Cuál de estos tres gráficos ilustra la situación? **Explica.**
4.2) ¿Por qué los otros dos gráficos no pueden ilustrar esta situación? **Explica en cada caso.**

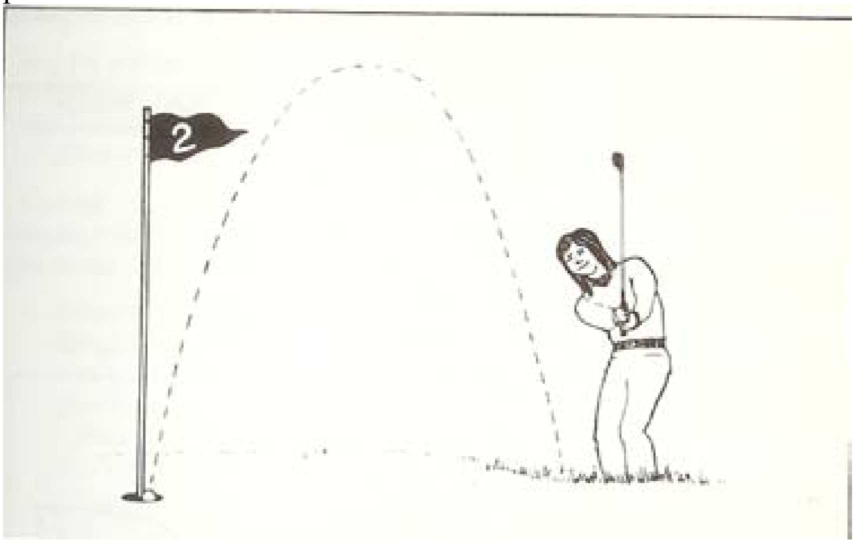
ACTIVIDAD 5: La siguiente gráfica muestra el paseo de una persona por el campo, saliendo de su casa.



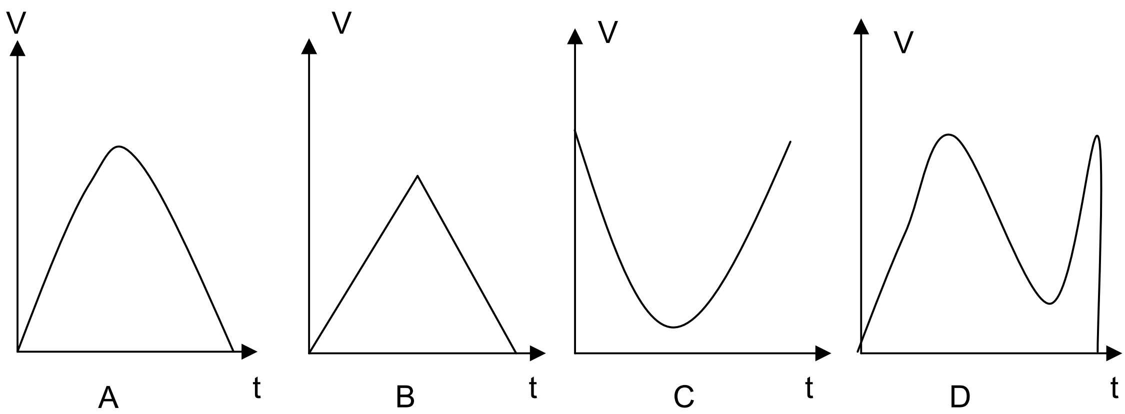
5.1) Describe con tus palabras lo que ocurrió.

ANEXO 6 (continuación)

ACTIVIDAD 6: Una persona golpea una bola de golf como se muestra en el dibujo. Se estudia el cambio, a través del tiempo (T), de la velocidad (V) de la bola cuando va por el aire.

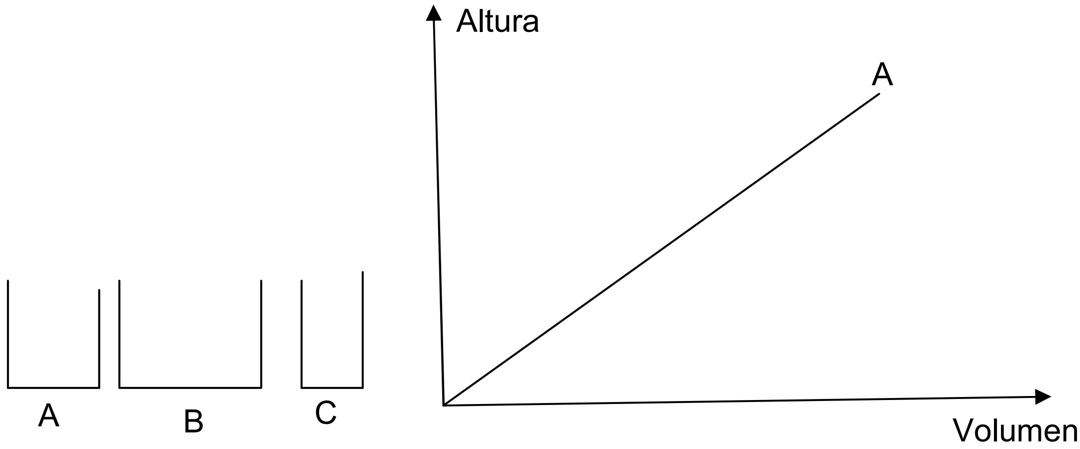


6.1) ¿Cuál de las siguientes graficas representa mejor esta situación? **Explica tu respuesta.**



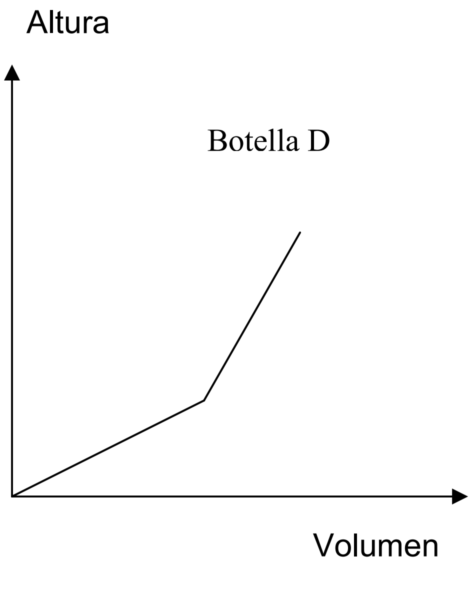
ANEXO 6 (continuación)

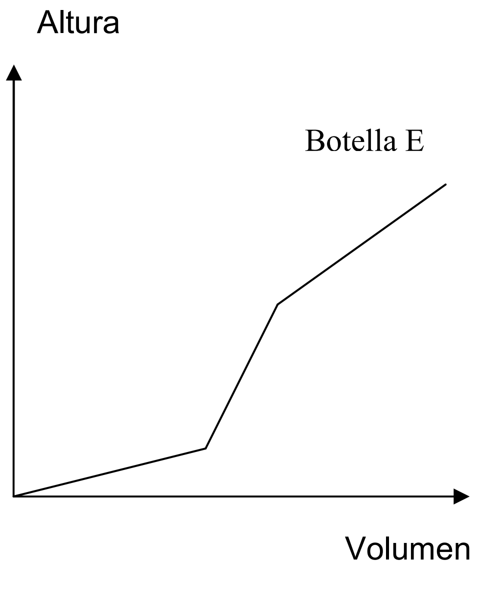
ACTIVIDAD 7: La siguiente gráfica muestra cómo varía la altura del agua en la botella A, a medida que cae dentro de ella goteando de manera continua, es decir, de manera uniforme.



7.1) En la misma gráfica, muestra como varía la altura con relación al volumen para las botellas B y C. **Argumenta tu respuesta y señala la gráfica de cada botella.**

7.2) Las siguientes gráficas se han obtenido a partir del mismo proceso anterior, al llenar dos botellas. **Dibuja las botellas.**





ANEXO 6 (continuación)

SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*

ACTIVIDAD 8: Supongamos que se presenta, durante la organización de una excursión turística, la siguiente situación. Una Empresa ofrece en alquiler un autobús con capacidad para 15 personas, a un precio total de 2,000 pesos. Cada viajero debe pagar el mismo precio.

Pregunta: ¿Cómo sabemos cuanto debe pagar cada uno de los viajeros?

Para dar respuesta a la pregunta podemos realizar varias descripciones de la relación que se establece entre la cantidad de personas que viajan y el pago individual.

8.1) Descripción verbal: Se te pide que realices una descripción verbal para dar respuesta a la pregunta anterior.

8.2) Descripción mediante una gráfica aproximada: Sin marcar puntos exactos, en el sistema de ejes cartesianos, intenta describir la relación entre la cantidad de personas y el pago individual.

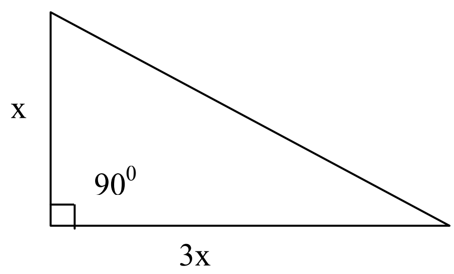
8.3) Descripción mediante una tabla: Construye una tabla de valores para el número de viajeros y el precio que paga cada uno.

8.4) Dibujar la gráfica: Coloca en un sistema de ejes cartesianos los valores antes obtenidos, colocando en cada eje los valores de la tabla.

8.5) Ecuación algebraica: Escribe una ecuación que exprese la relación entre el número de personas y el precio individual.

ANEXO 6 (continuación)

ACTIVIDAD 9: Se tiene un triángulo rectángulo, tal que la longitud de un cateto es el triple de la longitud del otro, como se muestra en el dibujo:



Pregunta: ¿Cómo cambia el área del triángulo cuando variamos la longitud del cateto menor, manteniendo la condición de que la longitud del otro cateto es el triple de su longitud?

Podemos realizar varias descripciones de la relación que se establece entre la longitud del cateto menor y el área del triángulo.

9.1) Descripción verbal: Se te pide que realices una descripción verbal para dar respuesta a la pregunta anterior.

9.2) Descripción mediante una gráfica aproximada: Sin marcar puntos exactos, intenta describir la relación entre la longitud del cateto y el área del triángulo.

9.3) Descripción mediante una tabla de valores: Construye una tabla de valores del área asignando diferentes valores al cateto.

9.4) Dibujar la gráfica: Coloca en el sistema de ejes cartesianos los valores antes obtenidos, colocando las variables en cada eje los valores de la tabla.

9.5) Ecuación algebraica: Escribe una ecuación que exprese la relación entre la longitud del cateto y el área del triángulo.

ANEXO 6 (continuación)

Algunas actividades vinculadas al contexto de la Economía

ACTIVIDAD 10: Un fabricante sabe que el costo de las materias primas para elaborar su producto (pares de zapatos) es de 50.5 pesos por cada unidad de producción, es decir, por cada par de zapatos.

10.1) Elabore una tabla que relacione la cantidad de pares de zapatos con el costo total de fabricación.
10.2) Representa en una gráfica esta relación. ¿Qué puedes decir del comportamiento del costo de fabricación?
10.3) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿por qué?
10.4) ¿Existe alguna expresión algebraica que pueda expresar esta relación?

ACTIVIDAD 11: Se conoce que la población de cierto poblado va creciendo. Un economista reunió datos sobre el número de habitantes en los años: 1990, 1992, 1995, 1999, 2001 y 2004. Los datos se muestran en la siguiente tabla:

Año 1990

Tiempo (t), en años	0	2	5	9	11	14
Población (en miles)	20.0	21.665	22.103	23.944	24.921	26.462

11.1) Representa en una gráfica esta relación. ¿Qué puedes decir del comportamiento de la población? ¿Cuál es, a tu juicio, la razón de ese comportamiento?

11.2) ¿Tiene sentido unir los puntos? ¿Por qué?

ANEXO 6 (continuación)

ACTIVIDAD 12: El equipo de editores de una revista científica se encuentran con el problema de hallar cuál debe ser el precio de venta para obtener ganancia de la venta. Se contrata los servicios de otro equipo de investigación para conocer el precio más favorable, tanto para los compradores como para la editora.

Los resultados del equipo de investigación demostraron que si se vendía cada revista a 10 pesos la ganancia total sería nula, ya que el ingreso obtenido no puede rebasar los gastos de su elaboración. Si se vendía cada una a 80 pesos la comprarían muy pocas personas y como consecuencia la ganancia también sería nula.

Estos resultados se muestran en la tabla siguiente:

Precio por revista (pesos)	10	20	30	40	45	50	60	70	80
Ganancia total (pesos)	0	600	1,000	1200	1225	1200	1,000	600	0

12.1) Elabore una gráfica que relacione el precio de venta de cada revista con la ganancia total obtenida por la editora.

12.2) ¿Qué puedes decir del comportamiento de la ganancia total?

ACTIVIDAD 13: Por cada pedido de materias primas, un fabricante debe pagar costos de solicitud para cubrir los gastos de manejo y transporte. Después de haberlas recibido, las materias primas son almacenadas lo que origina costos de almacenamiento.

Si cada pedido es grande los costos de solicitud serán bajos, ya que se requieren pocos envíos, pero los costos de almacenamiento serán grandes. Si cada pedido es pequeño, los costos de solicitud son altos y los costos de almacenamiento serán bajos. El costo total de manejo de materias primas es la suma del costo de pedidos y del costo de almacenar.

Un estudio de investigación determinó la relación entre la cantidad de unidades en cada pedido y el costo total. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Cantidad de unidades por pedido	100	200	300	400	500	600	700	800
Costo total	1,170	1,000	833	800	820	867	929	1,000

13.1) Elabore una gráfica que relacione la cantidad de unidades por pedido y el costo total.

13.2) ¿Qué puedes decir del comportamiento del costo total?

ANEXO 6 (continuación)

SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

En cada una de las actividades anteriores (de la 8 a la 13) se analizó la relación entre dos magnitudes.

Por magnitud se entiende una característica que puede ser medida y su valor expresado mediante un número, por ejemplo: el precio que se paga por la excursión (Actividad 8) o la longitud de un cateto del triángulo (Actividad 9).

En cada actividad se pudo establecer la relación entre dos magnitudes a través de tablas de valores, o con la representación gráfica de algunos de estos valores, y en algunos casos llegamos incluso a representar, mediante formula, la relación que se establece entre las magnitudes estudiadas. Se observa además, en estos casos, que el tipo de relación es de dependencia, es decir, una magnitud depende de la otra.

Por relación de dependencia entendemos aquella, en la que la forma en que cambia una de estas magnitudes depende de la variación de la otra magnitud, por ejemplo: el costo total de fabricación de zapatos cambia en dependencia de cómo variamos la cantidad de pares que se fabrican (Actividad 10).

Actividad 14: Surgen entonces varias preguntas iniciales, que te solicitamos responder:

14.1) ¿Cuáles son las magnitudes que varían en cada situación estudiada?
14.2) ¿Cuál es la relación de dependencia en cada situación? **Argumenta tu respuesta.**

Para responder a estas preguntas te pedimos que escribas tus ideas en la tabla siguiente:

ACTIVIDAD	**SITUACIÓN**	**MAGNITUDES QUE VARÍAN**		**RELACIÓN DE DEPENDENCIA**
8	Excursión			
9	Triángulo			
10	Costo Fabricación			
11	Población			
12	Revista			
13	Costo Total			

ANEXO 6 (continuación)

Lo hasta aquí analizado nos permite elaborar varias ideas conceptuales. A continuación se exponen:

Se pudo observar la existencia de dos magnitudes que varían, razón por la cual se le llaman *variables*. De modo que:

VARIABLE: Es una magnitud que varía y que puede tener un valor cualquiera de los comprendidos en un conjunto. De modo que el número de viajeros en la excursión (Actividad 8) es una variable y puede tomar valores enteros positivos pero nunca mayores de 15.

Las variables son de dos tipos:

- Independiente: Es aquella que asume valores y cambia de un valor a otro sin depender de la otra variable.
- Dependiente: Es la aquella que también cambia pero los cambios de un valor a otro dependen de los cambios que se producen en la otra variable.

RELACIÓN DE DEPENDENCIA: Es un tipo especial de relación entre las variables, observemos que:

- Por cada valor de la variable "*Cantidad de Excursionistas"* se obtiene un solo valor de la variable "*Pago Individual".*

- Por cada valor de la variable "*Longitud del Cateto"* se obtiene un solo valor de la variable *Área del Triángulo.*

Es decir, en cada situación los cambios en la variable independiente provocan cambio en la variable dependiente, de tal forma que por cada valor de la variable independiente se obtiene (se puede calcular) sólo un valor de la variable dependiente.

Por esa razón afirmamos que la variable dependiente está en función (depende) de la variable independiente.

Así podemos decir que:

- El "*Costo de fabricación"* está en función (depende) del "*Número de unidades fabricadas".*
- La "*Ganancia*" está en función (depende) del "*Precio de venta".*
- El "*Número de Habitantes"* está en función (depende) del "*Tiempo".*

ANEXO 6 (continuación)

FUNCIÓN: De manera genérica y abreviada decimos que: una variable *y* está en función de otra variable *x* si por cada valor de *x* se obtiene un único valor de *y*. Se puede afirmar también que cada valor de *x* tiene asociado un valor de *y*

Se dice entonces que:

- *y* depende de *x*
- *y* está en función de *x*

Otra manera es:

y es la imagen de *x*
x es la preimagen de *y*

Esta idea se puede simbolizar como sigue:

$$y = f(x)$$

Otras formas de simbolizar pueden ser:

$$x \mapsto y$$
$$x \mapsto f(x)$$

EJEMPLOS DE FUNCIONES:

EJEMPLO 1: De la tabla de valores o de la gráfica, que se obtienen en la Actividad 8, se puede afirmar que:

El pago de cada excursionista está en función (depende) de la cantidad de excursionistas, es decir que:

$$P = f(C),$$

donde: *P* representa el pago de cada excursionista y *C* representa la cantidad de personas que participa en la excursión.

EJEMPLO 2: En la Actividad 12, si observamos la tabla de valores o la gráfica, se comprende que la Ganancia está en función (depende) del precio de venta de las revistas:

$$G = f(P),$$

donde: G representa la ganancia y P el precio al que se vende cada una de las revistas

ANEXO 6 (continuación)

EJEMPLO 3: En la Actividad 9, el área del triángulo esta en función o depende de la longitud del cateto. Esto se aprecia tanto en la tabla de valores como en la gráfica obtenida, es decir que:

$$A = f(x),$$

donde: A representa el área y x representa la longitud del cateto menor.

Incluso se pudo obtener una fórmula concreta, que representa también la relación funcional que existe entre estas dos variables:

$$A = 3x^2/2$$

VARIACIÓN DE LA FUNCIÓN: Un aspecto importante, en el comportamiento de la función, es reconocer y estudiar *cómo varía* la variable dependiente cuando cambia la variable independiente.

Observamos por ejemplo, en la Actividad 12, la función expresada mediante la tabla o la gráfica. Recordemos que la tabla es:

Precio por revista (pesos)	10	20	30	40	45	50	60	70	80
Ganancia total (pesos)	0	600	1,000	1200	1225	1200	1,000	600	0

- cuando el precio de venta aumenta de 10 pesos a 20 pesos, la ganancia aumenta su valor de 0 pesos a 600 pesos, es decir que: el aumento de la variable independiente (precio) provoca un aumento de la variable dependiente (ganancia),
- en el intervalo de 10 a 45 pesos los aumentos en el precio provocan aumentos en la ganancia hasta el punto donde el precio es de 45 pesos y la ganancia es de 1225 pesos,
- cuando el precio de venta aumenta de 45 pesos a 50 pesos, la ganancia disminuye de 1225 pesos a 1200 pesos, es decir que: el aumento de la variable independiente (precio) provoca una disminución en la variable dependiente (ganancia),
- en el intervalo de 45 a 80 pesos los aumentos en el precio provocan disminución en la ganancia hasta el punto donde el precio es de 80 pesos y la ganancia es de 0 pesos.

Las ideas anteriores se observan en la propia representación gráfica de la función. La función aumenta hasta el precio de 45 pesos y después disminuye.

Actividad 15: Un análisis similar se puede hacer con el ejemplo de la **Actividad 13.**

15.1 Te solicitamos que realices el análisis anterior, tomando como ejemplo esta actividad.

ANEXO 6 (continuación)

Una función puede, en un intervalo estar creciendo y en otro, por el contrario, estar decreciendo. Estas ideas se pueden resumir como sigue:

CRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN: Se dice que la función crece (está creciendo) si los aumentos de valores en la variable independiente provocan un aumento de los valores de la variable dependiente.

DECRECIMIENTO DE LA FUNCIÓN: Se dice que la función decrece (está decreciendo) si los aumentos de valores en la variable independiente provocan una disminución de los valores de la variable dependiente.

Actividad 16: ¿Qué sucede con las funciones antes descritas?

16.1) ¿La función de la actividad 8 crece o decrece?
16.2) ¿La función de la actividad 9 crece o decrece?
16.3 ¿La función de la actividad 10 crece o decrece?
16.4) ¿La función de la actividad 11 crece o decrece?
Podemos, con los ejemplos de las funciones estudiadas, resumir que:

- existen funciones que solamente (siempre) crecen,
- existen otras que solamente (siempre) decrecen,
- otras que van creciendo y después decrecen,
- otras que van decreciendo y después crecen,
- hay otros casos que no hemos ejemplificado.

Actividad 17: Regresemos a la actividad 12 y observemos que: precisamente cuando el precio llega a 45 pesos la función cambia su comportamiento, es decir que, de ser creciente hasta P =45, pasa a ser decreciente. Esto se observa en las dos formas en que hemos representado la función: gráficamente y mediante tabla de valores.

17.1 ¿Qué sucede con la función en el punto P = 45, es decir cuando el precio por revista es de 45 pesos?
17.2 ¿Qué representa este precio en la función?

PUNTOS EXTREMOS

La respuesta a esta pregunta se encuentra en otra idea importante: *el concepto de punto extremo de una función.*

Una función tiene un punto extremo (extremo relativo) en aquel punto de la variable independiente, donde la función cambia su comportamiento; se pueden dar dos casos:

- Máximo Relativo o Local: si la función en un punto pasa de ser creciente a decreciente, entonces posee un máximo relativo (local) en este punto.

ANEXO 6 (continuación)

- Mínimo Relativo o Local: si la función en un punto pasa de ser decreciente a creciente, entonces posee un mínimo relativo (local) en este punto.

EJEMPLOS:

EJEMPLO DE MÁXIMO LOCAL: En la **Actividad 12** se puede observar, en la representación gráfica o en la tabla de valores, que la función posee su valor máximo, precisamente cuando el precio es de 45 pesos. Obsérvese que hasta este precio la función crece y a partir de él decrece. En este valor la función posee un máximo local.

A partir de la experiencia con este ejemplo podemos decir que: una función $y = f(x)$ posee un **máximo local** en el punto de la abscisa $x = a$ si $f(x) < f(a)$ para todos los puntos x próximos al valor a.

EJEMPLO DE MÍNIMO LOCAL: En la **Actividad 13** se puede observar, en la representación gráfica o en la tabla de valores, que la función posee su valor mínimo, precisamente cuando el pedido de materias primas es de 800 unidades. Obsérvese que hasta este volumen de pedido la función decrece y a partir de él crece. En este valor la función posee un mínimo local.

A partir de la experiencia con este ejemplo podemos decir que: una función $y = f(x)$ posee un **mínimo local** en el punto de la abscisa $x = a$ si $f(x) > f(a)$ para todos los puntos x próximos al valor a.

Actividad 18: ¿Qué puedes decir sobre la existencia de máximos o mínimos locales?

18.1) En el caso de la función de la Actividad 8.
18.2) En el caso de la función de la Actividad 9.
18.3) En el caso de la función de la Actividad 10.
18.4) En el caso de la función de la Actividad 11.

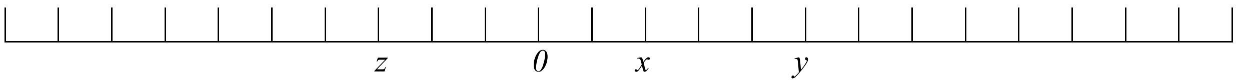
ANEXO 7. Material de Trabajo Extraclase de la Unidad Didáctica

MATERIAL DE TRABAJO EXTRACLASE

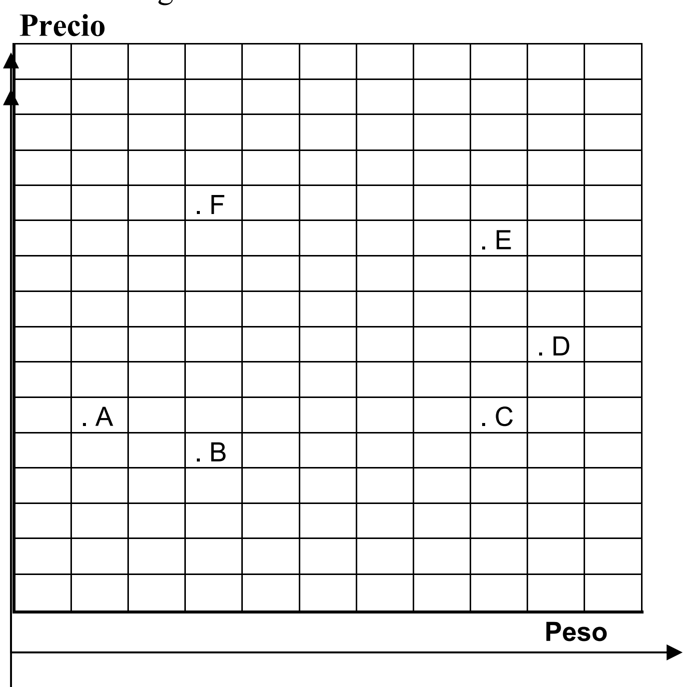
Unidad Didáctica: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función*"

SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*

Problema 1.1: Representa, en la recta graduada, los puntos que corresponden a los valores de: $3x$, $4x - y$, $y - 2x$, $x - z$.



Problema 1.2: Un comerciante vende bolsas de azúcar, cuyos pesos y precios se muestran en la gráfica. Cada bolsa está marcada con una letra



Se te pide responder a las preguntas siguientes: **Argumenta en cada caso**

a) ¿Qué bolsa es la más pesada?
b) ¿Qué bolsa es la más barata?
c) ¿Qué bolsas tienen el mismo precio?
d) ¿Qué bolsas tienen el mismo peso?
e) ¿Qué bolsa conviene más en términos de precio, la F o la C?
f) ¿Qué bolsa conviene más en términos de precio, la B o la C?
g) ¿Qué par de bolsas convienen por igual?

ANEXO 7 (continuación)

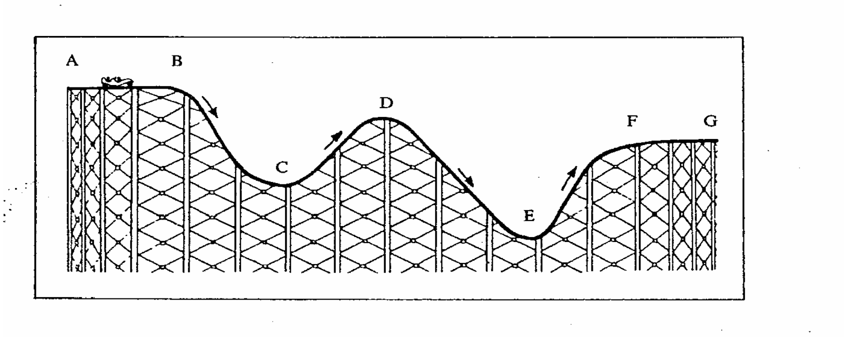
Problema 1.3: En la Facultad de Economía hay una máquina de vender bebidas. En un día típico ocurre lo siguiente:

- la máquina comienza medio llena a las 9:00 am,
- no se venden bebidas antes de las 9:00 am y después de las 5:00 pm,
- las bebidas se venden a una ritmo lento durante el día, excepto en el descanso de la mañana (11:00 - 11:30 am) y de comida (2:00 – 3:00 pm). En estos dos períodos es mayor la demanda de bebidas,
- la maquina se llena justo antes de la comida (a la 1:50 pm) y requiere de diez minutos para ser llenada.

Dibuja en una gráfica cómo varía el número de bebidas que hay en la máquina, desde las 7:00 am hasta las 7: 00 pm. Especifica en t gráfica los horarios

Problema 1.4: El dibujo muestra el recorrido de una montaña rusa. La pista por donde viajan los coches está señalada con diferentes puntos: A, B, C, D, E, F y G, se sabe que entre los puntos A y B los coches viajan a una velocidad lenta y constante

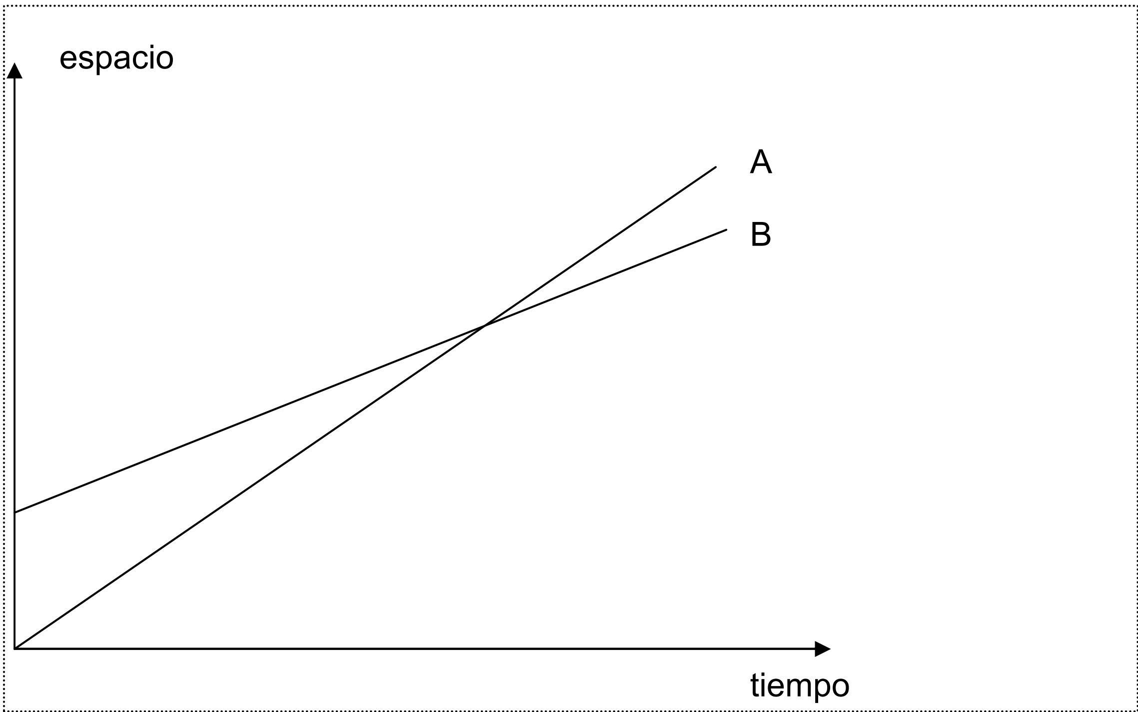
La montana rusa



a) ¿Cómo varía la velocidad del coche durante el recorrido que va desde el punto A hasta el punto G? **Explica por escrito y con tus palabras.**
b) Describe tu respuesta escrita mediante una gráfica.

ANEXO 7 (continuación)

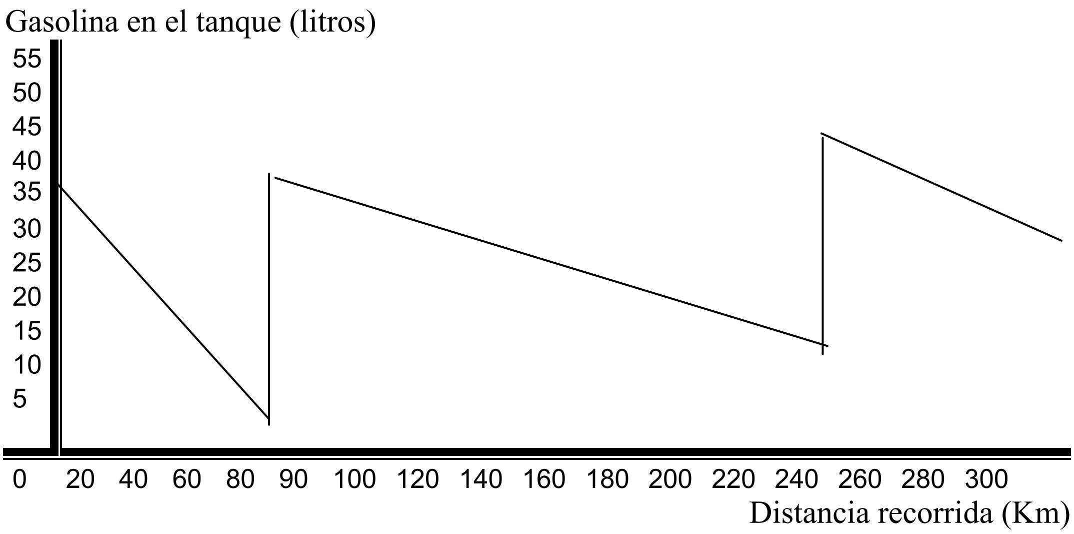
Problema 1.5: Dos coches A y B se mueven como se indica en la gráfica



a) Se desea saber si, en el instante de tiempo t = 3, la velocidad del coche A es menor, igual o mayor que la velocidad del coche B. **Explica**

b) ¿y en el instante de tiempo t = 6?, es ¿menor, igual o mayor? **Explica**

Problema 1.6: La gráfica siguiente muestra cómo varía la cantidad de gasolina que hay en el tanque de un coche durante un viaje por carretera



a) ¿Cuánta gasolina usó en los primeros 120 Km?
b) ¿En qué momento el coche consumió demasiada gasolina?
c) ¿Cuánta gasolina ha puesto durante el viaje?

ANEXO 7 (continuación)

SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*

Problema 2.1: Manuel está enfermo, su madre le toma la temperatura en varias ocasiones y obtiene las siguientes mediciones:

- A las 10 horas la temperatura fue de 37 ^{0} C y dos horas después tenía 39 ^{0} C,
- A las 14: 00 horas tenía 38 ^{0} C y continuó igual hasta las 16: 00 horas,
- A las 18 horas tenía 36 ^{0} C y a las 20 horas había subido en 2 ^{0} C.

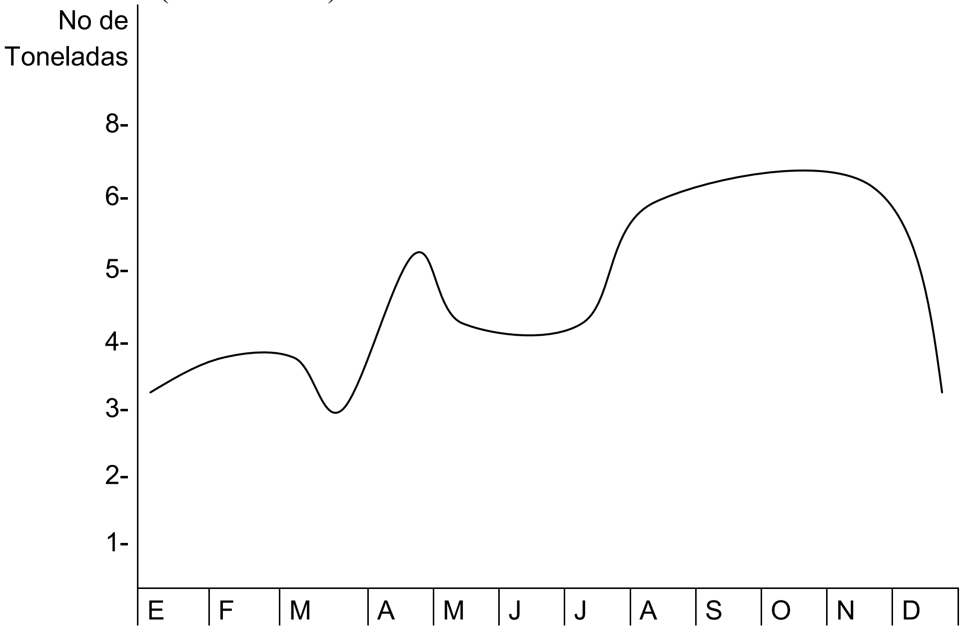
a) Realiza una tabla de valores con las mediciones obtenidas de la temperatura.
b) Representa esta situación en una gráfica.
c) ¿En que momento la temperatura debió ser de 38 ^{0} C?
d) ¿Cuándo se mantuvo se mantuvo Manuel estable?
e) ¿Cuándo se obtiene el valor máximo de temperatura? ¿**Por qué**?

Problema 2.2: En una papelería se venden 5 paquetes de bolígrafos. El número de bolígrafos y el precio correspondiente, de cada paquete, se muestran en la tabla:

Número de bolígrafos por paquete	4	6	8	10	14
Precio del paquete (en Pesos)	42	60	72	100	147

b) Representa esta situación en una grafica
c) ¿Qué paquete conviene más en términos de precio? ¿**Por qué**?

Problema 2.3: La gráfica muestra el comportamiento de la producción diaria de una fábrica de fertilizante (en toneladas)



a) ¿En qué período la producción diaria fue igual o mayor a las 5 toneladas?
b) ¿Cuál es el intervalo mayor de tiempo durante el cual se ha logrado aumento de la producción?
c) ¿Cuál es el período de mayor disminución de la producción?
d) ¿En que mes se alcanzó el mayor aumento de producción?

ANEXO 7 (continuación)

Problema 2.4: Un ciclista sale de casa a dar un paseo, desde las 8 am. hasta las 12 del día. Durante la primera hora lleva una velocidad constante de 30 km/h y luego descansa una hora. Después del descanso regresa a una velocidad de 15 km/h.

c) Realiza una tabla de valores donde se represente el tiempo (en horas) y la distancia a la que se encuentra de la casa.
d) Realiza una gráfica donde se represente esta situación.
e) ¿Depende la distancia, a la que se encuentra de la casa, del tiempo transcurrido? **Explica.**

Problema 2.5: Setiene un triángulo rectángulo, tal que la longitud de un cateto es el triple de la longitud del otro. Se desea estudiar como cambia el área del triángulo cuando variamos la longitud de los catetos, manteniendo la condición de que la longitud de uno es el triple de la longitud del otro.

a) Realiza una tabla de valores, con los valores del cateto menor y los valores del área
b) ¿Cómo se puede representar esta relación en una gráfica?
c) Explica que pasaría con el valor numérico de la variable dependiente, si seguimos aumentando el valor numérico de la variable independiente.
d) ¿Se puede representar mediante una ecuación, que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente?

Problema 2.6: Cuando compré mi coche, en la agencia, me costó 120, 000 pesos. Después del primer año su valor se había depreciado en un 20% anual, es decir que:

El valor después del primer año es: 120,000 * (1- 0.20) = 96,000 pesos

Si esta tendencia continúa:

a) ¿Cuál es el valor al final de cada año? Realiza los cálculos para varios años más.
b) ¿Cuál es la grafica que expresa esta situación?
c) ¿El valor del coche depende del tiempo transcurrido? **Explica.**

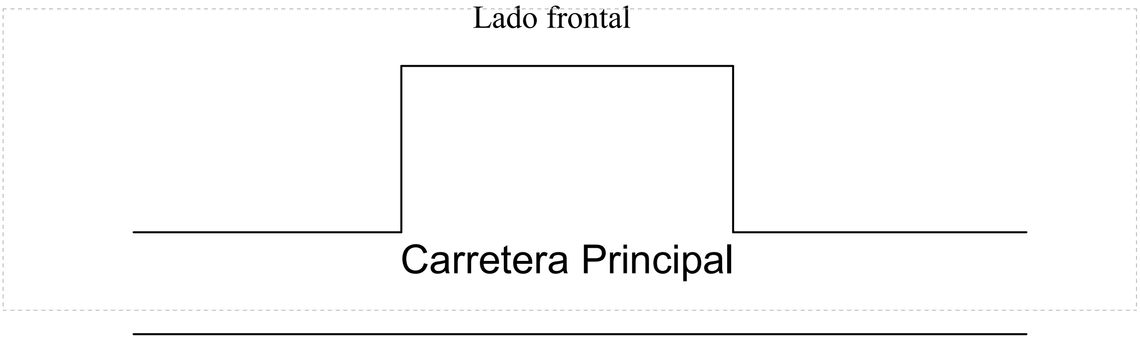
ANEXO 7 (continuación)

SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

Problema 3.1: De los siguientes pares de magnitudes, indica cuáles de ellas representa una función. **Explica en cada caso**

a) La edad de un padre y la edad de su hijo.
b) La longitud del lado de un cuadrado y su perímetro.
c) La longitud de un lado del cuadrado y su área.
d) La edad de una persona y el color de sus ojos.
e) El importe del recibo de la luz y la cantidad que se debe pagar.
f) La edad de una persona y su talla de camisa.

Problema 3.2: El departamento de carreteras, del Gobierno Municipal, está planeando construir un área de camping al lado de una carretera principal. Debe ser rectangular con un área de de 5,000 metros cuadrados y debe ser adyacente a la carretera, como se muestra en el dibujo.



Se pide expresar el número de metros de cerca requerido como una función de la longitud del lado frontal.

a) Construye una tabla de valores del número de metros de cercado, a partir de los valores que le asignes al lado frontal.
b) Diseña un gráfico a partir de los valores antes obtenidos, indicando las variables que colocas en cada eje.
c) Escribe una ecuación que exprese la relación entre la longitud del lado frontal a la carretera y el número de metros de cercado.
d) ¿Cuál es la mínima longitud de cerca necesaria para cercar el camping? (Recordar que el lado adyacente a la carretera no se puede cercar)

Problema 3.3 En el caso del problema 2.5.

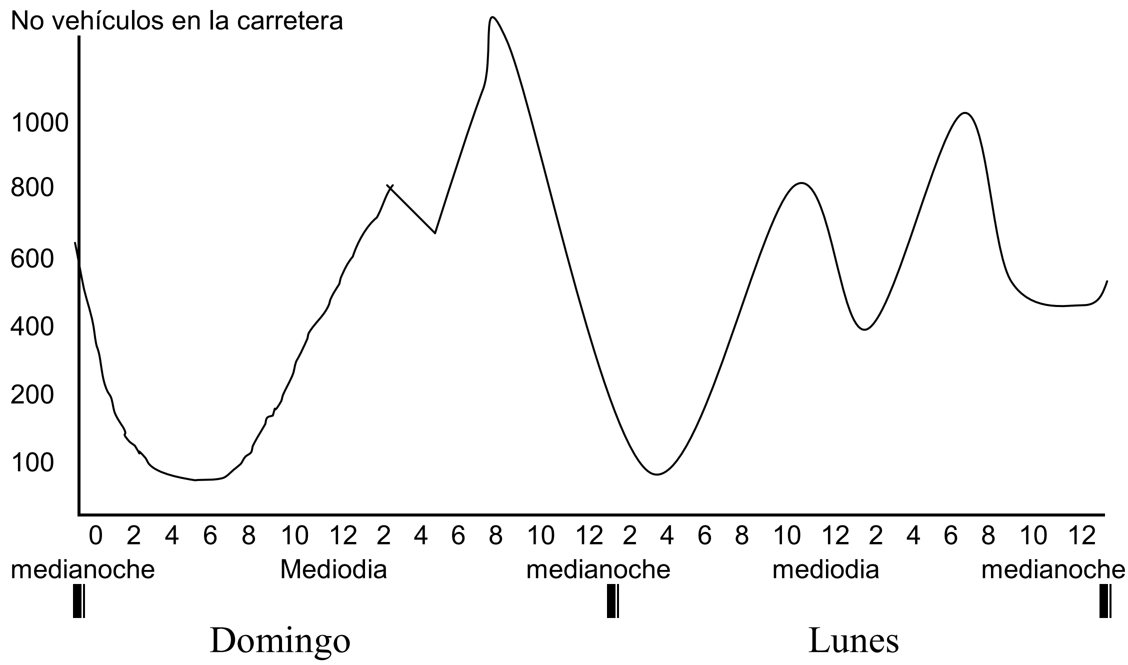
a) ¿Se puede afirmar que el área del triángulo está en función de la longitud de sus lados? **Explica.**
b) ¿En que intervalo de valores existe crecimiento?, ¿y decrecimiento?
c) ¿Cuáles son las dimensiones de los lados que garantizan la existencia de un máximo relativo para el área del triángulo? **Argumenta.**

ANEXO 7 (continuación)

Problema 3.4: En el caso del problema 2.6:

a) ¿Es una función?, ¿Dónde es creciente?, ¿Dónde es decreciente? **Argumenta.**
b) ¿Existe un valor máximo relativo?, ¿mínimo relativo? **Argumenta.**

Problema 3.5: Se realizó un informe para estudiar el volumen de tráfico que circula por una de las carreteras del Estado de Veracruz. Los resultados se publicaron mediante la gráfica, que muestra el número de vehículos que usa esta carretera en cada momento de tiempo durante un domingo y un lunes de Abril.



a) Intenta explicar por escrito lo que entiendas de la gráfica.
b) Compara lo que sucede el domingo con relación al lunes. ¿Dónde crees que podría estar situada esta carretera? **¿Por qué?**
c) ¿Está el número de vehículos en función de la hora del día? **Explica.**
d) ¿Dónde existe valor máximo relativo?, ¿Valor mínimo relativo? **Explica.**

EN EL SIGUIENTE PROBLEMA TE SUGERIMOS TRABAJAR CON EXCEL

Problema 3.6 *: La librería de un colegio puede obtener del editor el libro *Social Groupings of the American Dragonfly* a un coste de 3 dólares por libro. La librería vende el libro a 15 dólares por ejemplar y, a este precio, ha estado vendiendo 200 ejemplares por mes. La librería planea bajar su precio para estimular las ventas y estima que, por cada dólar de reducción en el precio se venderán 20 libros más. ¿A qué precio debería vender el libro la librería para generar el mayor beneficio (ganancia) posible?

Recuerda que: Beneficio = Ingreso por la venta – Costo por la Compra

ANEXO 8. Material de Orientaciones Metodológicas para el profesor

ORIENTACIONES METODOLÓGICAS

Unidad Didáctica: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función*"

El presente material es una propuesta, un conjunto de recomendaciones para el profesor en referencia a la forma de abordar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los contenidos implicados en la unidad didáctica. La unidad, cuyos contenidos, actividades de aprendizaje y objetivos se especifican en el material didáctico, es un intento de enfocar el proceso de enseñanza de una forma diferente a la clase tradicional.

Para su desarrollo, se proponen tres secuencias de aprendizaje:

SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*
SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*
SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

OBJETIVOS DE ENSEÑANZA: Se pretende que los estudiantes

- Se familiaricen con el conocimiento que nos aportan las gráficas, así como con el significado en cada situación específica estudiada.
- Comprendan, a partir del análisis de ejemplos concretos de fenómenos de cambio, la idea de variable y de dependencia funcional entre variables.
- Puedan reconocer, en cada situación estudiada, la variable independiente y la variable dependiente, así como las unidades que puede asumir cada variable.
- Logren familiaridad con un conocimiento intuitivo y global del concepto de función, a partir de los diferentes lenguajes en los que se puede representar este concepto: verbal, numérico (tablas), gráfico y algebraico.
- Se familiaricen con la idea intuitiva de puntos extremos de una función.

Un aspecto importante es mantener la secuenciación de contenidos de la unidad, en ella los estudiantes son invitados a responder y analizar un conjunto de actividades y tareas. Constituye un proceso gradual y paulatino de aprendizaje, donde la tarea del profesor es guiar el aprendizaje y crear condiciones propicias para que los estudiantes desarrollen un aprendizaje reflexivo y creativo.

Es requisito indispensable que los estudiantes, en cada momento de la clase, planteen sus opiniones o ideas, la forma en que abordan las tareas, los resultados logrados en ellas y, muy importante, las dudas y dificultades en la solución de las tareas de clase y del trabajo extraclase.

Por esta razón, las actividades y tareas están diseñadas para que el estudiante se familiarice primero con las ideas intuitivas que le permitan, posteriormente, elaborar los aspectos conceptuales. La unidad no define conceptos y ejemplifica, por el contrario introduce primero al estudiante en situaciones concretas de aprendizaje, que le permitan lograr alguna experiencia previa antes del enunciado de cada concepto.

ANEXO 8 (continuación)

A continuación se detallan algunas recomendaciones específicas para desarrollar cada una de las actividades, así como el tiempo presumible de trabajo en clase.

SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*

En esta secuencia el estudiante debe realizar traducciones entre descripciones verbales y gráficas que representan situaciones en un contexto determinado. El profesor debe prestar especial atención al significado cualitativo de las gráficas, dado que es uno de los aspectos menos estudiados en todos los niveles de enseñanza.

Se conoce que, los estudiantes poseen un conjunto de experiencias y/o conocimiento con ideas erróneas, que se evidencian cuando trabajan con gráficas que representan situaciones de un determinado contexto. Un ejemplo de ello es cuando el estudiante interpreta la gráfica como un dibujo de la situación objeto de análisis.

Es conveniente que, en el análisis de cada actividad se trabaje primero individual o en grupos de dos o tres estudiantes, para posteriormente incentivar la discusión y el debate, la participación de todos y la generación espontánea de ideas. El profesor debe motivar al estudiante a expresar sus ideas en los términos que le sean favorables, así como crear un ambiente de seguridad en cada uno de los estudiantes.

Algunas de las actividades propuestas son de interpretación, es decir, donde el estudiante toma sentido o capta el significado de una situación específica. Otras actividades son de construcción, donde se genera algo nuevo, que puede ser situar puntos o construir una gráfica o ecuación.

ACTIVIDAD 1: *20 minutos*

- *Trabajar primero todas las tareas en parejas de estudiantes,*
- *Solicitar la exposición de algunas de las parejas,*
- *Discusión de los resultados.*

El propósito es situar a los estudiantes en la representación de puntos en el sistema de ejes cartesianos. El profesor debe asegurarse de que los estudiantes no presenten dificultades que, posteriormente, puedan perjudicar el desarrollo de otras actividades. Debe asegurarse el dominio de:

- la recta numérica,
- el significado de los cuadrantes en el sistema de ejes cartesianos, y
- las coordenadas de los puntos del plano.

ANEXO 8 (continuación)

ACTIVIDAD 2: *20 minutos*

- *responder cada pregunta de manera individual,*
- *exposición individual y análisis de resultados*

Es de lectura de puntos en una gráfica. El estudiante debe identificar:

- las magnitudes que están representadas en cada eje,
- el significado del origen de coordenadas, y
- el sentido direccional de cada eje de coordenadas.

ACTIVIDAD 3: *25 minutos*

- *analizar cada tarea en grupos de cuatro estudiantes,*
- *exponer y discutir las respuestas de cada grupo.*

Exige que el estudiante razone de manera cualitativa sobre el sentido de los puntos representados en el plano cartesiano. Se debe prestar especial atención a la relación entre las dos magnitudes implicadas: duración y costo de las llamadas. La dificultad se presenta cuando el estudiante olvida, en su análisis, la relación entre ambas variables y responde atendiendo solo a una de ellas.

ACTIVIDAD 4: *20 minutos*

- *5 minutos de reflexión individual,*
- *10 de discusión de resultados, en equipos de cuatro estudiantes, y*
- *exposición de un equipo, debate en clase.*

Esta tarea consiste en interpretar una situación concreta, donde están involucradas las magnitudes de tiempo y distancia. El estudiante, aún conociendo el significado de ambas magnitudes, puede tener dificultades al no poder establecer la relación existente entre el tiempo transcurrido y la distancia de la casa. Dos casos pueden ser:

- que se pretenda analizar la situación a partir del dibujo representado, y
- que se pierda el sentido direccional del eje que representa el tiempo.

ACTIVIDAD 5: *20 minutos*

- *trabajo individuad (10 minutos) y entrega de respuestas ,*
- *análisis de las respuestas en clase.*

La tarea consiste en realizar una descripción verbal o escrita de la situación representada en la gráfica. Se puede provocar un error conceptual, en tanto que el estudiante puede responder atendiendo al dibujo y no a la relación distancia tiempo que se establece.

ANEXO 8 (continuación)

Es muy fructífero aquí el trabajo y la exposición personal de cada uno de los estudiantes, las ideas que deben ser discutidas en clase. El profesor debe servir de moderador, señalando aquellos elementos de conocimiento que no resulten de la discusión.

ACTIVIDAD 6: *30 minutos*

- *10 minutos de reflexión individual,*
- *10 minutos de trabajo en equipos de cuatro estudiantes, y*
- *10 minutos de discusión de propuestas de los equipos.*

Se presenta aquí otra actividad donde el estudiante puede confundir la gráfica, que representa la relación entre las magnitudes velocidad y tiempo, con el dibujo de la situación "*recorrido de la pelota*". Otra dificultad se presenta si el estudiante confunde la velocidad con la distancia recorrida (altura) de la pelota.

El profesor debe propiciar un ambiente de discusión en que los estudiantes puedan expresar sus ideas. Se puede trabajar, inicialmente, en grupos pequeños y posteriormente debatir todas las opiniones en la clase.

ACTIVIDAD 7: *30 minutos*

- *10 minutos de trabajo en equipos para responder la tarea 7.1,*
- *5 minutos de exposición de respuestas de los equipos,*
- *10 minutos de análisis en equipos de la tarea 7.2,*
- *5 minutos de exposición de la tarea 7.2 en clase.*

Esta actividad posee mayor complejidad ya que el estudiante debe construir conocimiento, a partir de la interpretación de la tasa de cambio, sobre una situación donde la altura del líquido depende del volumen de éste, dentro de cada recipiente. Es un problema interesante para abordar, de una manera intuitiva, la noción de pendiente en el análisis de las gráficas.

ANEXO 8 (continuación)

SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*

Las actividades de esta secuencia son de construcción, el estudiante debe generar en cada tarea algo, ya sea una tabla, una gráfica o una expresión algebraica. Posee un carácter de introducción y aborda esencialmente los fenómenos de cambio como vía útil para introducir la dependencia funcional entre variables.

El profesor debe tener presente que, sin mencionar de manera explícita el concepto de función, se intenta un acercamiento paulatino a este concepto a través de problemas donde se utilizan los conceptos en que se apoya. No se pretende, por tanto, que el profesor mencione y/o utilice de manera explícita el concepto de función, así como los diferentes conceptos en que se fundamenta: dominio, recorrido, variables dependiente e independiente.

El estudiante debe obtener, en esta secuencia, familiaridad con los diferentes lenguajes de representación del concepto de función: expresión verbal, tabla de valores, gráfica y en algunos casos con la expresión algebraica. Se debe procurar que se desarrolle la capacidad de poder realizar algunas traducciones entre uno y otro lenguaje.

ACTIVIDAD 8: *40 minutos*

- *destinar 10 minutos para responder las tareas 8.1 y 8.2 en equipos,*
- *exposición en 10 minutos de las tareas 8.1 y 8.2,*
- *destinar 10 minutos para responder individualmente las tareas 8.3, 8.4 y 8.5,*
- *exposición en 10 minutos de las tareas 8.3, 8.4 y 8.5*

En la tarea 8.1 el profesor debe procurar que el estudiante se percate de que:

- el número de personas puede tomar valores enteros entre 5 y 15,
- el pago individual asume valores concretos que dependen del número de personas, es decir, toma valores en dependencia de los valores del número de personas, y
- ambos varían, pero uno de ellos depende de la variación del otro.

En la tarea 8.2 el estudiante debe lograr, por sí solo, lo siguiente:

- asignar nombres a cada uno de los ejes de coordenadas,
- dar sentido a la dirección de los ejes de coordenadas,
- atender a las características generales de la gráfica para describir el comportamiento general, y
- describir, de manera global (sin detalles), cómo se relacionan y comportan dos magnitudes: el número de viajeros y el pago individual.

En la tarea 8.3 el estudiante puede realizar solo algunos cálculos, posteriormente se le puede mostrar toda la tabla. Se debe procurar, si embargo, que se comprenda el proceso de asignar valores a una de las magnitudes para poder obtener los valores de la otra.

ANEXO 8 (continuación)

En la tarea 8.4 el profesor debe tener en cuenta que el estudiante construye una gráfica a partir del conocimiento anterior sobre el problema, en especial la tabla de valores. El estudiante debe:

- hacer énfasis en la graduación e interpretación de los ejes,
- graduar los ejes y elegir la escala de cada eje,
- situar los puntos dados, por sus coordenadas, y
- comparar este resultado con la descripción global que realizó anteriormente.

En la tarea 8.5 se debe procurar que los estudiantes trabajen de manera individual, y posteriormente es aconsejable el trabajo en grupos y la discusión en toda la clase.

Tener presente que los estudiantes deben asignar un nombre o letra del alfabeto a cada una de las magnitudes involucradas, por ejemplo:

P = precio pagado por cada participante en la excursión.
n = número de participantes.

Intentar que se entienda y explique el sentido de la expresión algebraica $P = 2{,}000/n$.
Motivar la respuesta a la pregunta: *¿Cómo se llegó a este resultado?*

ACTIVIDAD 9: 4*0 minutos*

- *destinar 20 minutos para responder, en equipos, todas las tareas, y*
- *exposición en 20 minutos de las respuestas a las tareas.*

En la tarea 9.1 es importante que el estudiante se percate de que al asignar un valor a x, obtenemos un valor para el área del triángulo, por tanto:

- se obtiene un valor de área por cada valor de x, y
- el área depende del valor que asignemos a x.

En la tarea 9.2 el profesor debe procurar que:

- sólo se atienda a las características generales de la gráfica,
- se asigne un nombre a cada eje, y
- se describa de manera global (sin detalles) cómo se relacionan y comportan, la longitud del cateto y el área del triángulo.

En la tarea 9.3 se debe procurar que:

- los estudiantes comprendan que: x (la longitud del cateto) puede tomar cualquier valor no negativo, sea entero o no entero, y
- se comprenda el proceso de asignar valores a una de las magnitudes para poder obtener los valores de la otra.

ANEXO 8 (continuación)

En la tarea 9.4 los estudiantes deben:

- graduar los ejes y elegir la escala de cada eje, así como interpretar el sentido de cada eje de coordenadas
- situar los puntos dados, por sus coordenadas
- comprender la relación de dependencia de una variable con respecto a la otra

En la tarea 9.5 el estudiante puede expresar sus ideas verbalmente a todo el grupo, o bien que se reúnan en grupos de trabajo. Intentar que se entienda y explique el sentido de la expresión algebraica:

$$A = 3x^2/2,$$

donde: x = longitud del cateto menor, y
A = área del triangulo

Actividades vinculadas al contexto de la Economía

Las Actividades 10 y 11, que a continuación se exponen, tienen como propósito situar al estudiante en problemas en el contexto de la ciencia económica, pero con un grado de dificultad matemática similar a las anteriores.

El conocimiento económico que se utiliza es de fácil comprensión, no obstante el profesor debe asegurar primero que se entienden las condiciones planteadas.

ACTIVIDAD 10: *20 minutos*

- *destinar 15 minutos para responder, en equipos, todas las tareas, y*
- *exposición en 15 minutos de las respuestas a las tareas.*

El profesor debe atender a dos aspectos importantes:

1) El estudiante debe seleccionar, a su criterio, los valores de la cantidad de pares de zapatos para obtener el costo de producción. Esta magnitud solo puede tomar valores enteros positivos; sin embargo, puede presentarse dificultad en reconocer estos valores como los únicos posibles de toda la recta numérica

2) Los estudiantes deben expresar sus criterios respecto al comportamiento del costo cuando varía el número de unidades de producción.

ACTIVIDAD 11: *25 minutos*

- *destinar 15 minutos para responder, en equipos, todas las tareas, y*
- *exposición en 10 minutos de las respuestas a las tareas.*

ANEXO 8 (continuación)

En esta actividad una dificultad, que se puede presentar, es la idea de asumir que el comportamiento de la gráfica es similar al de una recta. Otra dificultad se puede presentar si el estudiante, después de reconocer que existe un crecimiento, supone que éste es constante.

Las actividades 12 y 13, que a continuación se exponen, tienen como propósito que el estudiante comprenda otra característica de las gráficas: un crecimiento acompañado después de un decrecimiento, o un tramo de decrecimiento seguido de un crecimiento.

Sin mencionar el concepto de extremo, se debe procurar un acercamiento a la idea intuitiva sobre la existencia de los puntos extremos en una función. El profesor debe procurar, en ambas tareas, que los elaboren y expresen sus propias ideas.

ACTIVIDAD 12: 25 *minutos*

- *destinar 15 minutos para responder en equipos, y*
- *exposición en 10 minutos de las respuestas de los equipos.*

ACTIVIDAD 13: 25 *minutos*

- *destinar 15 minutos para responder en equipos, y*
- *exposición en 10 minutos de las respuestas.*

ANEXO 8 (continuación)

SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

El aspecto más importante de esta secuencia es la posibilidad de aprovechar las actividades anteriores, en las que se aborda esencialmente los fenómenos de cambio, como vía útil para introducir varios conceptos:

Variable: Con los ejemplos anteriores introducir el concepto de variable, así como el conjunto de valores que puede asumir cada variable.

Dependencia de variable: El estudiante puede, con las situaciones anteriores, comprender la razón por la que se afirma que: "*una variable depende de la otra*".Es necesario precisar las ideas de: *variable independiente* y*variable dependiente*

El estudiante deben ser capaz de:

- expresar su idea respecto a la dependencia entre variables
- responder a la pregunta: ¿Qué variable depende de otra?, ¿por qué?

Función: Se recomienda abordar el concepto de función como la expresión de una dependencia entre variables. Es importante, con la ayuda de las actividades anteriores, profundizar en las diversas formas de representar una función:

- el modelo(físico, social, económico, etc)
- la descripción verbal
- la tabla de valores
- la gráfica
- la expresión algebraica

Extremos de una función: Debe iniciar con el análisis de variación de la función, asiendo uso, tanto de la tabla como de la gráfica. Es importante que el estudiante pueda comprender la variación de la función con el uso de ambas formas de representación.

El profesor debe provocar un tipo de discusión, en la que los estudiantes se percaten de la particularidad de cada una de estas funciones. Para ello se debe enfatizar en los aspectos de visualización de la representación gráfica de las funciones y hacer especial énfasis en la forma de la curva de la función.

Por otra parte, el profesor debe resaltar la idea de que una función puede alcanzar varios valores máximos y mínimos relativos locales. Aprovechar la discusión de los estudiantes para enfatizar en la característica que debe cumplir la existencia de un máximo (mínimo) relativo de una función.

En síntesis, la tarea principal del Profesor es motivar y facilitar la discusión, en un ambiente en el que cada estudiante pueda comunicar sus ideas personales, respecto a la información matemática que se estudia.

ANEXO 9. Prueba Final de la Unidad Didáctica

PRUEBA FINAL

Nombre y Apellidos: ____

1. ¿Qué es una *función*? **Explica con tus palabras.**

2. Plantea dos ejemplos de funciones. Señala en cada ejemplo cual es la variable independiente y la variable dependiente.

3. ¿Representa la figura 1 la gráfica de alguna función numérica de una variable? **Explica tu respuesta.**

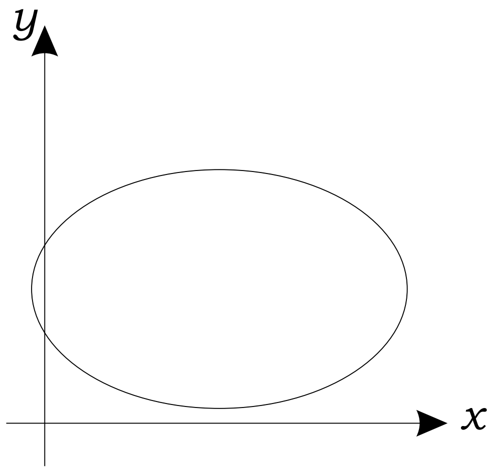
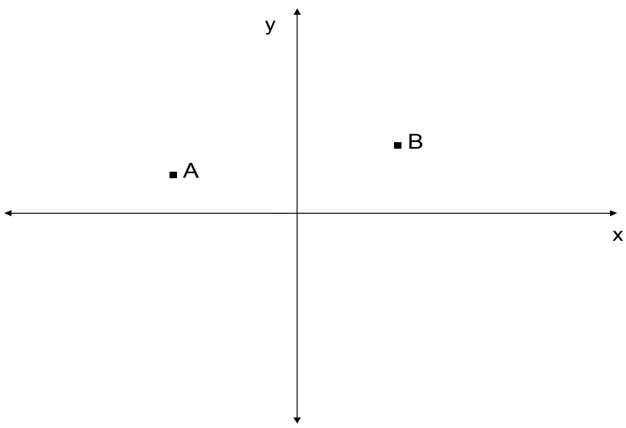


Figura 1

4. ¿Qué entiendes por máximo relativo y por mínimo relativo de una función? **Explica con tus palabras.**

5. Traza la gráfica de una función que pase por los puntos A y B y tenga por lo menos un máximo relativo y un mínimo relativo. **Señala cada uno de ellos.**



ANEXO 9 (continuación)

6. Una persona, en una bicicleta, realiza la siguiente excursión:

1ra Fase: Va por un terreno llano
2da Fase: Sube una montaña
3ra Fase: Baja la montaña
4ta Fase: Va, de nuevo, por un terreno llano hasta el final

a) Dibuja la gráfica: *"Cambio de la velocidad con respecto al tiempo"* **Explica la gráfica**.
b) ¿La velocidad es una función que depende del tiempo? **Explica**.
c) ¿Puedes decir algo sobre crecimiento y/o decrecimiento en esta situación?

7. La suma de los lados adyacentes de un rectángulo es 15 cm. Se desea estudiar como varía el área del rectángulo cuando variamos la longitud de los lados.

a) Realiza una tabla de valores con los valores de un lado y los valores del área que se obtengan.
b) ¿Cómo se puede representar esta relación mediante una gráfica?
c) ¿Es ésta relación una función?, ¿Cuáles son las variables?
d) Escribe una ecuación que permita hallar el valor numérico de la variable dependiente a partir del valor de la variable independiente.

GRACIAS

ANEXO 10. Cuestionario Aplicado a los Estudiantes del Grupo de Estudio

UNIVERSIDAD VERACRUZANA
FACULTAD DE ECONOMÍA

Estimado Estudiante,

Hemos culminado, en este curso, la primera unidad: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función",* dividida en sus tres secuencias:

SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*
SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*
SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

Resulta necesario conocer y evaluar las dificultades, problemas y errores del proceso de enseñanza aprendizaje. Por este motivo solicitamos tu valiosa colaboración en este cuestionario, cuyas respuestas serán de mucha utilidad para nuestro trabajo

1. Enumera dos aspectos o cuestiones, de la unidad, que no te gustaron

2. Enumera dos aspectos o cuestiones, de la unidad, que fueron de tu agrado

3. ¿Cuál de las tres secuencias te fue más difícil de aprender?, **¿por qué?**

4. ¿Cuál de las tres secuencias te fue más fácil de aprender?, **¿por qué?**

5. ¿Cómo evalúas el material de trabajo (guía) de las clases? En escala de 0 a 10______

6. Los problemas de tareas, comparados con lo realizado en clase, son: (marca con X)

___ Más difíciles
___ Más fáciles
___ Están adecuados a las clases

ANEXO 10 (continuación)

7. Enumera los dos problemas de las tareas, de mayor grado de dificultad el responder

Problema No_______ y Problema No__________

8. Con respecto a las explicaciones del profesor en clases, plantea tres cosas en las que debemos mejorar nuestro trabajo:

a)

b)

c)

9. ¿Qué opinas sobre todo el sistema de evaluación de esta unidad?

10. ¿Qué tipo de preguntas esperabas en el examen de esta unidad? **Especifica**

11. El examen final, en comparación con todo lo estudiado, fue:

___ Más difícil
___ Más fácil
___ Está adecuado a lo estudiado

12. Finalmente: ¿Qué beneficio o provecho te aportó esta unidad?, ¿En que te ayudó?

MUCHAS GRACIAS

ANEXO 11. Evaluación Diagnóstica / Agosto de 2006

Universidad Veracruzana
Facultad de Economía

Academia de Métodos Cuantitativos

Evaluación Diagnóstica – Agosto de 2006

Nombre del alumno:

____

Marca en el recuadro el programa académico al que te inscribiste:

☐ Licenciatura en Economía ☐ Licenciatura en Geografía

Nombre de la escuela preparatoria de procedencia:

____

Localidad de la escuela preparatoria de procedencia:

____

Instrucciones:

- Esta evaluación diagnóstica tiene como único objetivo conocerte para poder orientarte mejor, por lo tanto, te pedimos absoluta honestidad.
- Solicitamos también tu mejor esfuerzo, trata de responder las 25 preguntas.
- Lee detenidamente cada pregunta antes de seleccionar una respuesta.
- Puedes hacer los cálculos que consideres pertinentes en hojas separadas, **NO** es necesario que entregues esas hojas junto con tu examen.
- Para cada pregunta, **MARCA** únicamente una opción como respuesta.

Aritmética

1. El resultado de simplificar la expresión $\frac{2^{1/3} \cdot \sqrt{2}}{2^{5/6}}$ es:

(a) $\frac{4^{5/6}}{2^{5/6}}$	(b) 1	(c) $\frac{6}{15}\sqrt{2}$	(d) No se puede simplificar.

2. ¿Cuál es el valor de la expresión $10 + 8/4 - (2 + 6)\cdot 5 - 4$?

(a) 13.5	(b) 35	(c) 76	(d) –32

3. Si conocemos que 24 litros de aceite pesan 22.08 kilogramos, ¿cuánto pesarán 50 litros?

(a) 47.5 kilogramos	(b) 27.2 kilogramos	(c) 52.63	(d) 46 kilogramos

ANEXO 11 (continuación)

4. ¿Cuál es el resultado de: $-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\left(-\frac{4}{3}-12\right)$?

(a) –136/36	(b) 22/3	(c) 28/3	(d) –28/3

5. ¿Cuál de los siguientes números es primo?

(a) 1	(b) 2	(c) 9	(d) 27

6. Si un lápiz costaba $1.50 el año pasado y este año cuesta $2.50, ¿cuál fue el porcentaje de aumento en el precio del lápiz?

(a) 66.66%	(b) 1%	(c) 0.01%	(d) 0.66%

Álgebra

7. El perímetro de un rectángulo es de 110 cm. y uno de sus lados es 11 cm. más largo que el otro, ¿cuánto miden los lados?

(a) 50 cm. y 60 cm.	(b) 25 cm. y 30 cm.	(c) 25 cm. y 36 cm.	(d) 22 cm. y 33 cm.

8. La multiplicación del polinomio $2x+3$ por el polinomio $2x-3$ da como resultado:

(a) $4x^2-6x-9$	(b) $4x$	(c) $4x^2-9$	(d) $4x^2+6x+9$

9. La factorización del polinomio x^2-5x+6 es:

(a) $(x-3)(x-2)$	(b) El polinomio no se puede factorizar.	(c) $(x+3)(x+2)$	(d) $(x-6)(x+1)$

10. La factorización del polinomio x^2-1 es:

(a) El polinomio no se puede factorizar.	(b) $(x+1)(x-1)$	(c) $(x-1)^2$	(d) $(x+1)^2$

11. La ecuación $3x-6=x-2$:

(a) Tiene por única solución a $x=2$.	(b) Tiene por única solución a $x=-2$.	(c) No tiene soluciones.	(d) Tiene dos soluciones: $x=\pm 2$.

12. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\begin{matrix} x+y=4, \\ x-y=2, \end{matrix}$ y elige la opción correcta:

(a) Tiene una única solución: $x=2, y=5$.	(b) Tiene una única solución: $x=3, y=1$.	(c) Tiene dos soluciones: $x=3, y=1$.	(d) No tiene soluciones.

Teoría de Conjuntos

13. Considera los conjuntos $A=\{1,2,3\}$ y $B=\{1,2,3,4,5\}$. Entonces:

(a) $A \subset B$	(b) $A \in B$	(c) $A \supset B$	(d) $A = B$

14. Para los conjuntos del ejercicio anterior, $A \cap B$ es igual a:

(a) $\{1,2\}$	(b) el conjunto B	(c) el conjunto $\varnothing$	(d) el conjunto A

15. Para los conjuntos del ejercicio 13, $A \cup B$ es igual a:

(a) $\{1,2,3,4,5,6\}$	(b) el conjunto A	(c) el conjunto B	(d) $\{1,2,3\}$

16. Si el conjunto X tiene 10 elementos, el conjunto Y tiene 8 elementos y el conjunto $X \cap Y$ tiene 5 elementos, ¿cuántos elementos tiene el conjunto $X \cup Y$?

(a) 18	(b) 13	(c) 23	(d) No se puede determinar.

ANEXO 11 (continuación)

Desigualdades e intervalos en la recta real

17. Si a y b son números reales tales que $a < b$, entonces:

(a) $-a < -b$	(b) $-a = -b$	(c) $-a > -b$	(d) $-a \geq -b$

18. Los números reales x que satisfacen las desigualdades $-5 < x \leq 3$ forman el intervalo:

(a) $(-5,3)$	(b) $(-5,3]$	(c) $[-5,3]$	(d) $[-5,3)$

19. La desigualdad $2x + 5 \leq 7$ tiene por soluciones:

(a) Solamente al número 1.	(b) A todos los números del intervalo $[1,\infty)$.	(c) A todos los números del intervalo $(-\infty,1)$.	(d) A todos los números del intervalo $(-\infty,1]$.

20. Resuelve la desigualdad $\lvert 5x + 7\rvert \geq 18$.

(a) $x \geq \frac{11}{5}$ o $x \leq -5$	(b) $x \geq \frac{11}{5}$	(c) $-\frac{11}{5} \leq x \leq \frac{11}{5}$	(d) No se puede resolver.

El plano cartesiano y el trazado de gráficos

21. La pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1,1)$ y $(2,3)$ es:

(a) −1/2	(b) 1/2	(c) 2	(d) −2

22. La distancia entre los puntos $(1,1)$ y $(3,1)$ es:

(a) 2	(b) (2,0)	(c) 1	(d) $\sqrt{2}$

23. El primer cuadrante en el plano cartesiano está formado por todos los puntos con coordenadas que son:

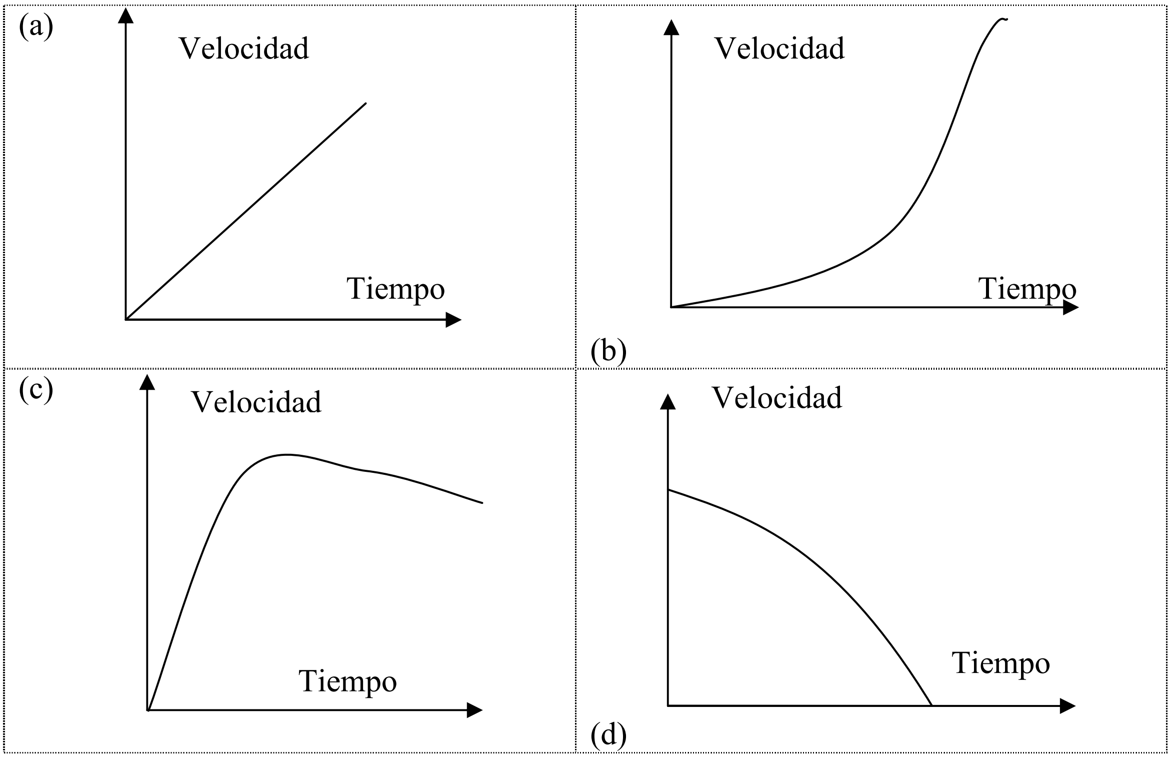
(a) Ambas negativas.	(b) La primera negativa y la segunda positiva.	(c) La primera positiva y la segunda negativa.	(d) Ambas positivas.

24. La ecuación $y = 4x^2 + 5$ representa:

(a) Una recta.	(b) Una parábola.	(c) Una circunferencia.	(d) Una elipse.

ANEXO 11 (continuación)

25. A la velocista mexicana Ana Gabriela Guevara, especialista en los 400 metros planos, se le pide participar en la carrera de 1,500 metros planos. ¿Cuál de las siguientes gráficas representa mejor lo que ocurrirá con su **velocidad** conforme transcurre el tiempo que dura la carrera?



Gracias por tu esfuerzo. En una escala de 1 (muy fácil) a 10 (muy difícil), asigna el grado de dificultad que consideras que tiene el examen:

____

ANEXO 12. Respuestas de la Evaluación Diagnóstica

Estudiante	Resultado Aritmética	Resultado Álgebra	Resultado Conjuntos	Resultado Desiguald.	Resultado Gráficos	RESULTADO GLOBAL
Máxima Puntuación	**6**	**6**	**4**	**4**	**5**	**25**
1	6	6	4	4	5	25
2	4	6	3	4	5	22
3	5	6	3	2	5	21
4	4	5	3	3	4	19
5	5	6	2	3	3	19
6	5	4	3	3	3	18
7	4	6	2	3	3	18
8	3	5	3	1	5	17
9	4	6	2	3	2	17
10	5	5	2	2	3	17
11	5	5	0	1	5	16
12	4	3	2	3	4	16
13	3	6	3	1	3	16
14	5	5	2	1	3	16
15	4	5	2	3	2	16
16	2	5	4	2	3	16
17	4	6	2	1	3	16
18	5	4	2	0	4	15
19	3	5	1	3	3	15
20	4	4	3	1	3	15
21	3	5	2	0	5	15
22	3	3	4	2	3	15
23	5	6	0	0	4	15
24	5	4	2	1	3	15
25	3	5	1	3	3	15
26	4	4	1	0	5	14
27	4	5	1	2	2	14
28	6	2	3	0	3	14
29	4	3	1	2	4	14
30	3	6	2	1	2	14
31	3	6	1	1	3	14
32	2	3	3	1	4	13
33	3	4	2	1	3	13
34	5	2	2	1	3	13
35	2	4	3	2	2	13
36	2	6	1	0	4	13

ANEXO 12 (continuación)

Estudiante	Resultado Aritmética	Resultado Álgebra	Resultado Conjuntos	Resultado Desiguald.	Resultado Gráficos	RESULTADO GLOBAL
Máxima Puntuación	**6**	**6**	**4**	**4**	**5**	**25**
37	2	5	0	2	3	12
38	3	4	1	1	3	12
39	3	6	0	1	2	12
40	3	3	1	1	4	12
41	4	3	2	0	3	12
42	2	5	1	0	4	12
43	4	1	1	1	4	11
44	3	5	1	0	2	11
45	2	4	1	3	1	11
46	4	2	0	1	4	11
47	2	2	3	0	3	10
48	2	3	1	1	3	10
49	2	4	1	2	1	10
50	1	4	0	2	3	10
51	4	3	1	1	0	9
52	3	2	0	1	3	9
53	2	2	1	0	4	9
54	2	3	0	1	3	9
55	3	2	1	2	1	9
56	1	5	1	1	1	9
57	3	4	0	0	2	9
58	3	2	0	0	4	9
59	4	2	0	3	0	9
60	2	4	1	0	1	8
61	1	1	2	1	3	8
62	3	2	1	2	0	8
63	2	3	0	0	3	8
64	1	2	0	1	3	7
65	1	4	1	0	1	7
66	2	3	0	0	2	7
67	1	3	0	2	0	6
68	2	2	0	0	2	6
69	1	3	0	0	0	4
70	2	1	0	0	1	4
71	0	1	0	1	1	3

ANEXO 13. Respuestas a la Pregunta 1 de la Prueba Final

¿Qué es función?. Explica con tus palabras
Es cuando a un valor de la VI le corresponde uno y solo un valor de la VD
Una dependencia entre valores, existe un valor independiente que puede aumentar o disminuir.
Son los valores que se le puede dar a una variable
Interrelación entre un conjunto ordenado de individuos de una población
Una interrelación de variables, cuando a un elemento del contradominio o VI le corresponde un elemento del dominio o VD
Es aquella que expresa la relación que hay entre dos variables, debe ser una relación de dependencia
es cuando a una variable le corresponde otra variable, a una independiente le corresponde una sola dependiente
Es cuando una VD depende de otra VI, a la VD le corresponde solo una valor de la independiente
Sin respuesta
Una relacion entre dos variables, VD y VI, a la VI le toca un único valor de la VD
Una relacion de dominio y contradominio, a cada elemento del D le corresponde uno del contradominio
Una unión de variables donde una depende de otra para determinar un valor
relacion entre VD y VI, donde a cada valor de la Vi se le debe asignar un solo valor
expresion matematica donde la VD depnde de la VI
auqella que tiene valores de depdencia e independencia
cuando tenemos dos datos que tienen relacion, uno indep y otro dependiente
cuando una situacion depende de la otra para que pueda aumentar o disminuir
cuando una var esta en fucnion de otra, una depdende del valor asignado de la otra
cuando una base de datos, las vari indepdndientes tiene diferentes valores
una realcion entre variable depdndiente y a esta toca un solo elemento indepebdiente
es una var indep que modiifica un unico valord dependiente para darnos un unico resultado
cuando un avlor depdnde de un factor
emanera en que se expresa la solucion de un problema connletra y palabras
relacion entre una valor y otro
cuando la magnitud de los valores cambia pueden ir creciendo y decreciendo
es cuando una magnitud que tiene una valor le corresponde otro valor
ecuacion que existe cuando hay una VD y una VI
aquella que solo le corresponde un elemneto del contradominio
es la depdndencia entre VD y VI
realcion entre una VD y una VI, cada una con un valor unico
realcion de dependencia entre VI y VD
cuando hay dos variables, una Dep y otra indep
dos var una dep y otra indep
nomtre que se le da a las variables dep e indep, VI que no cambia y VD que si cambia
aquella que tiene dos variables, una dep y otyra indep, una depdende de la otra
representacion algebracia que muestra refrencia de una cosa X con otra cosa Y
tiene dos variables que son indep y dep al valor del dominio le corresponde uno del contradominio
ecuacion donde hay dos variables que pueden ser dep e indep, sirve para expresar cosas
depndendia del eje Y con respecto al eje X
es cuando hay valores dependiante y valores indep
cuando una var poseee dependencia y contradominio de otra, a cada valor de X le corresponde uno de Y
cuando una var depdnde de otra
relacion entre dos Var que reciben el nombre de dep e indep
realcion entre dos variables , una dep y otra indep
relacion dependiente entre dos variables, a cada elemento del dominio le corresponde uno del contradominio
realcion entre dos variables, una dep y otra indep
realcion de dos variables, una depende de la otra
cuando alguna variable depende de la otra, si el auemnto de una afecta a la otra

ANEXO 14. Respuestas a la Pregunta 2 de la Prueba Final

Plantea dos ejemplos de funciones.

EJEMPLO 1

cantidad de zapatos enalmacen y el costo de los zapatos
el numero de bancas en un salon y el numero de alumnos
el cambio de velocidad (VI) respecto al tiempo (VD)
el area de una triangulo isoseles y el valor de su base
el area de un triangulo depende de la longitud del cateto
y=F(X)
blusas en una tienda (VI) y el precio de las blusas (VD)
La alongitud y el perímetro de un ractángulo
x=y*+1
A =F(X)
area del cuadrado y un lado
ganancia que depende del costo
calificaciones y responsabilidad en el estudio
los catetos de una truangulo y su area
el costo unitario depende del numero de pasajeros
la excursion,el precio depnde de la cantidad de pasjeros
la poblacion y el tiempo
el tringulo y el cateto menor
horas trabajada y pago por horas
area y longitud del lado
la famili, hijos y padres
costo total y pares de calcetas
velocidad y tiempo
cantidad de ropa (VI) y costo de la ropa (VD)
A=3x2/2
el valor de una caja de lapices depdnde del numero de lapices
A=3x2/2
dos conjunto
el beneficio depnde del precio
padres e hijo
la longitud de los lados y perimetro
x= F(y), x es VD
CURP y la persona, CURP VI
peso de una mochila esta en fucnion de la cant de libros
y=f(X), y es VI
dos conjuntos Hombres y mujeres
x=2y
Area VI y lados VD
Distancia y tiempo
longitud y area
hombres y mujeres
tiempo que depnde de la velocidad
area de cuadreado y la ongitud de sus lados
longitud de los lados y el area del cuadrado
Precio total depdnde del costo total
el costo de la llamada y los minutos que dura
perimetro y medida de sus lados

ANEXO 14 (continuación)

Plantea dos ejemplos de funciones.

EJEMPLO 2

distancia recorrida y tiempo transcurrido
el peso esta en función de su estatura
el costo de pedido (VI) y el precio de venta (VD)
el costo total y el numero de unidades pedidas
la talla de una persona esté enfunción de su edad
el costo de fabri. depende del num. de lápices que se produzcan
un recibo telefonico y el monto a pagar
la longitud y el área de un rectángulo
x=y
CT=F(NP)
el gasto de agua consumida y el importe a pagar
la distancia rrecorrida que depende del tiempo
la devaluación de una objeto depende del tiempo
nr
la edad de una hijo y la edad de su padre
el valor del coche y los años transcurridos
el area del tiangulo y la medida de sus lados
materias y zapatos elaborados
no de zapatos y precio por unidad
perimetro del cuadrado y longitud
chicas y luis miguel
nr
distancia y tiempo
cantidadde canicas y niños jugando
G=f(P)
eltiempo en llenar de agua un garrafondepdnde del volumen
nr
dos conjuntos
la altura depdnde de la edad
area de cuadrado y lados
el valor de una objeto con el tiempo
z=f(p) Z es VD
el recibo de luz y el pago
el area del cuadrado depdnde de la losngitud de sus lados
me transporto a casa, Tes VI y yo soy la VD
luis miguel y mujeres
A=3x2/2
Ct = CA + CP
longitud y area
importe de recibo y cantidad a pagar
una persona que tenga 6 postres a alegir
los años y la vejéz
cateto del triangulo y su area
longitud de los catetos y el area de un triángulo
numero de personas y cuartos dispopnible para dormir
el numero de vehículos que transitan por la carretera ye el tiempo
el valor del aunto depende de la depreciación

ANEXO 15. Respuestas a la Pregunta 3 de la Prueba Final

¿Representa la figura 1 la gráfica de alguna función numérica?

no, a cad valor de cada uno de los ejes le tocan dos valores
solo podría ser la parte superior o inferior, se representan dos valores con distintos con cordenadas en x igual
no, porque es circular y las funciones son lineas, perpendiculares, paralelas
no, a cada elemento del dominio le corresponden dos elementos del contradominio
no sabria si lo es, en clase manejamos varias y ninca ese tipo de gráfica
nr
si, a cada punto le corresponde unha cordenada para formar una gráfica
no, no indica ninguna realcion de dependencia entre los ejes
si, ya que necesitan variables y valores que dieran origen a la grafica
no, a cad valor de x le debe tocar un solo valor de la VD
si, a cada elemento de x le toca un elemento de y
si, solo que manejando numeros negativos y positivos
si, existe una maximo y un minimo relativo
si, si x aumenta la otra tambien
si, porque
no, para que sea funcion tiene que ir aumentando o disminuyendo, en este caso no ocurre
no, porque se observa una elipse, sin punto que indique que crece o decrece
no, porque parece que x depdnde de y o que y depdnde de los avlores de x
no, porque np puede volver al mismo lugar de origen
si, pporque se pueden dar a conocer, a cad valor del eje x le correponde uno de Y, la funcion decrece y crece
si, lo que hubo un ciclo ya cada valor de x le toco uno de y
no, para tener funcion debe depdnder de algun factor
no puede representar ninguna funcion
si, la forma de parabola que si los valores cambian la figura cambia
al parecer no, para mi no tiene ningun valor del que tiene que haber
no, a x no le corresponde un solo valor de y
si, el maximo relativo y el minimo relativo
no, ninguna grafica es redonda, debe ser recta o parabola
no, no se muestra que depdndwe de que
no existe relacionde variables, todo esta encerrado
no, no se marca una inicio y un fin, no se sabe que representa
no, a la VI si le pueden tocar mas de una valor, a la dependiente no
no, no se sabe cual es la VI y la VD
si, la circusnferencia depdnde del plano cartesiano que esta ahí
no porque solo existe una var que es Y, deben ser dos, dep e indp
no porque carece de propiedades y son indtreminados los puntos
X esta e fucnion de Y, ya que Y aumenta X aumenta
no, una f al representarla debe ser una parabola, notiene ningun origen
no, porque alñ eje Y le corresponde mas de una valord del eje X
si, a cada valor le corresponde un valor
si, porquedepdnde de la altura que posea para saber la longitud que trazará
no, no veo equivalencia de repercusión en la grafica
no, en este caso le esta tocando mas de una valor a la VD
no, ya que a X le esta signando mas de una valor de la preimagen
no, a x le corresponde mas de una valor de y
nr
nr
nr

208

ANEXO 16. Respuestas a la Pregunta 4 de la Prueba Final

¿Qué entiendes por máximo relativo?
Máximo

cuando un f crece y despues decrece al punto max que se alcanza
punto mas alto representado en una grafica
se refiere a ciarta zona de la grafica, no a toda la grafica
punto alto en una variacion de cierta longitud
valor maximo en una vecindad
cuando en una parte del dominio le corresponde el contradominio de mayor valor absoluto
valor maximo de una grafica
valor mas alto en una rango de la grafica
punto mas alto al que llega la VD
numero mayor pero a nivel local
punto mas alto en una funcion, en una parte o vecindad
punto mayor en una funcion con respecto a su localidad
punto mas alto en una f, por el lado izq crece y por el derecho decrece
punto mas alto al pasar de de una f decrec a una funcion creciente
dentro de una intervalo es el mayor, con valores manores antes y despues que el
cuando encontramos una aumento y luego una disminución
tos los valores que crecen en una f, dentro de una grafica
cuando a un periodo un punto alcanza el maximo
cuando llega a lo alto ya a sus lados es menor
cuando en garfica o tabla la f crece y decrece en algunos intervalos
indica que todos los punto a su alrrededor son menores
la f es encuentra elevado constantemente
nr
el mas alto valor de una f
cuando el valor en la grafica llega a un punto max y empieza a decrecer
en su vecindad sus valores a izq y derche son menores
punto mas alto
punto mas alto en una grafica
nr
punto en la grafica que uestra ser superior a los demas, local
valor maximo dentro de una localidad
en una tabla o grafica es el punto donde deja de aumentar y disminuye
se presenta en una intervalo cuando la funcion empieza a ser decreciente
es el punto en una vecindad del dominio que muestra mayor valor que los demas
es el maximo en determinada parte, no es absoluto
cuando en una grafica hay varios valores se observa el mayor que los demas
punto local mas alto, que por derecha e izquierad sean minimos al punto
es el valor mas grande en un periodo, lapso respecto a los demas respecto a los ejes x y y
el que se encuentra en una parte de la grafica
es aquel que lleva un maximo nivel,
ees el mas alto punto de todos los maximos
el punto maximo en alguna entidad, el mas alto
es mayor que un amx local
se puede observar en una grafica mas facilmante que es mas alto que los demas
punto mas alto en una grafica , a su izq crecimiento y a su derecha decrecimiento
el valor mas alto al que puede aspirar una variable

ANEXO 16 (continuación)

¿Qué entiendes por mínimo relativo?

Mínimo
cuando una f decrece y despues crece, al punto minimo
el punto mas bajo
se refiere a cierta zona de la grafica
punto mas bajo en cierta localidad
valor min en cierta vecindad
nr
el valor mas bajo de una grafica
el numero de menro valor en un rango de la grafica
punto mas bajo al que llega la VD
numero menor a nivel local
punto mas bajo en una funcion, en una parte o vecindad
punto menro en una funcion con respecto a su localidad
punto mas minimo, por el lado izq crece y por el dereco tambien
punto mas alto al pasar de una f crec. a una fucnion decrec
aquel dentro de una intervalo es el menro y debe contar coan valores menores antes y despues
cuando hay una disminucion y luego un aumento
todos los valoresque decrecen
cuando en una periodo un punto es mas bajo
cuando llega a un punto mas bajo y a sus lados es mayor
cuando la funcion crece ya lueego decrece
todos los puntos a su alrrededor son mayores
toda ka f se encuentra en una nivel estable
nr
el valor mas bajo de una f
cuando el valor llega a un punto minimo y empieza a crecer
en su localidad sus valores a izq y dercha son mayores
punto mas bajo
punto mas bajo en una grafica
nr
punto en la grafica que muestra ser menor a los demas, local
valor minimodentro de una localidad
es cuando en una grafica o tabla, deja de aumentar y disminuye, es min relativo
se presenta en una intervalo cuando la funcion empieza a ser creciente
punto dentro de una localidad del dominio que es menro que los demas
es el minimo en determinada parte
cuando en una grafica hay vario valores se observa uno que es menor que los demas
es el punto local mas bajoque por derecha e izquierda sean maximos el punto
es el valor mas pequeño en un periodo o intervalo respecto a los ejes x y y
aquel que viene de un amax, viebne disminuyendo y despues aumenta
es aquel donde a de decrecer según los terminos indicado
el que esta mas bajo de todos los minimos
es el punto mas bajo por el momento
es el menro que una minimo local
puntop donde se puede observar en uan garfica que es mas bajo que los demas
el mas bajo dentrode una grafica, asu izq exirte decrec y a su derecha crecimiento
valor mas bajo al que puede aspirar una variable
es la minima disminución que se muestra en una grafica

ANEXO 17. Respuestas a la Pregunta 5 de la Prueba Final

Traza la gráfica de una función que pase por los puntos A y B

señala max y min
segmento de recta de A (max) a B (min)
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
linea recta que pasa por A y B
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
segmento de recta de A (max) a B (min)
señala max y min
puntos de inflexion
señala max y min
segmento de recta de A (max) a B (min)
nr
señala max y min
señala max y min
señala max y min
segmento de recta de A (max) a B (min)
segmento de recta de A (max) a B (min)
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
señala max y min
nr
max y min absolutos solamente
max y min absolutos solamente
señala max y min
garfica y no señala los puntos extremos
no grafica nada
max y min absolutos solamente
solo señala un max y un min
no grafica nada
max y min absolutos solamente
min incorrecto, solo absolutos
max y min absolutos solamente

ANEXO 18. Respuestas a la Pregunta 6 a) de la Prueba Final

Dibuja la gráfica Cambio de velocidad
bien
bien
bien
bien
bien
mal
bien
bien
bien
bien
mal
bien
bien
bien
bien
bien
mal, dibuja montaña
bien
bien
mal, dibuja montaña
mal, dibuja montaña
mal, dibuja montaña
bien
bien
bien
bien
bien
mal, dibuja montaña
bien
bien
señala puntos
bien
señala puntos
bien
mal, dibuja montaña
bien
bien
bien
bien
bien
mal, dibuja montaña
bien
bien
bien
bien
bien
mal, dibuja montaña
bien

ANEXO 19. Respuestas a la Pregunta 6 b) de la Prueba Final

¿La velocidad depende del tiempo?

si porque la velocidad se calcula como V = d/t
no, proruq en la 3ra fase habria pasado tiempo, fue donde mas velocidad alcanzo
si, al tiiempo le corresponde una cant en cuanto a veloc
entre mayor veloc menro es el tiempo utilizado
no, la velocidad no depende, aunque el t aumenta el se puede parar
la velocidad no es funcion, es la Vd de la funcion, depdnde del tiempo
si,. la velocidad es la VI del tiempo
no, porue si t transcurre la velocidad aumenta, y no es posible
no, la velocidad puede variar en intervalos muy cortosde tiempo
si, ya que no puedes llevar una veloc sin que el tiempo transcurra
si, velocidad VD y tiempo VI
si, a cada t le corresponde una velocidad
no, se puede obtener cualquier velocidad sin importar el tiempo
si porque a mayor velocidad menos tiempo
no, en todo caso el t depende de la velocidad
no, el t pasa sim importar la velocidad a que vaya la persona
no, el tiempo es quien depdnde de la velocidad
si, cuando sube la velocidad disminuye, depdende del tiempo
no poruq velocidad aumenta y diminuye, el t depende de la velocidad
no, depende mas del lugar
si, el t depende de la velocidad
si, miientras mas aumenta la velocidad mas disminuye el tiempo
si, entre mas tiempo la velocidad tiende a disminuir
si, conforme t avanz la velocidad aumenta o disminuye
si, dpnde de la velocidad que lleve es el t al que se llega
si, conform el tiempo (VI) es la velocidad (VD)
si, a mayor t trancurre mayor es la distancia que recorre
si, entre mayor velocidad menor tiempo
no, porque no es una velocidad constante, depende del camino
no, depdnde de las condiciones del terreno
no, depdnde del terreno
si, V=d/t, van relacionados
no, depende de la fuerza que se tenga
si, V=d/t,
no, el t depdnde de la velocidad
no, depdnde del terreno
si, el t es la independiente y velocidad es la dependiente
si, V=d/t
si, si velocidad es constante el t va a ser igual, auemnta velocidad disminuye el t
si, la velocidad varia conforme pasan las fases
si, a cierta velocidad le corresponde un cierto tiempo
si, el t siempre es independiente, la velocidad depende del tiempo
no, el t es el que depende de la velocidad
si, si vas a mayor velocidad el tiempo sería menor
si, velocidad toma un valor con el tiempo
no, depende del terreno
si porque si velocidad disminuye aumenta el tiempo
si, ya qye influye en la velocidad

ANEXO 20. Respuestas a la Pregunta 6 c) de la Prueba Final

¿Puedes decir algo sobre crecimiento y/o decrecimiento en esta situación?

aum, dis, aum y dism
decrec y crecim
auemnta y disminuye velocidad
nr
decreci, y crecimi
el crec y decre se deben a los cambios de velocidad
dcrece y crece la velocidad
no, el tiempo no puede retroceder
hay decrecimiento y crecimiento
dcrece y crece la velocidad
la f dcrece y crece
decrecimintо y crecimiento
dcreciemin y creciemi respecto a la velocidad
en llano veloc y tiempo son constantes, cuando sube el t aumenta y cuando baja el t disminuye
no se peude decir algo
dism y auemnta la velocidad
crec cuando sube y decrec cuando baja
cuando sube la veloc decrece y cuando baja la velocidad crece
crece cuando auemnta la velocidad y decrece cuando disminuye
cuando crece la velocidad disminuye y cuando decrece la velocidad aumenta
el crecimiento se realiza conforme a su velocidad
crece cuando sube el terreno, decrece al bajar la montaña
crecimiento cuando baja la montaña y decreciemiento al subir la montaña
crecimiento cuando baja la montaña y decreciemiento al subir la montaña
crece velocidad cuando baja y decrece cuando sube
son cambios que dependen de la velocidad
crece y decrece
velocidad auemnta y disminuye
velocidad auemnta y disminuye
cuando decrece la velocidad dsiminuye y cuando crece la velocidad aumenta
crece velocidad cuando baja y decrece cuando sube
auemnta y disminuye velocidad
cuando sube la velocidad disminuye y cuando baja aumenta
si cuando vel auemnta con el aumenta, disminuye con el aumento del tiempo
el t aumenta cuando sube la montaña y en llano t disminuye y velocidad aumenta
al subir velocidad disminuye al bajar la velocidad aumenta
si, ya que existe un minimo relativo
conform sube la velocidad disminuye, cuando baja aumenta la velocidad
conform sube la velocidad disminuye, cuando baja aumenta la velocidad
crecimiento cuando baja la montaña y decreciemiento al subir la montaña
hay crecimiento pausado y luego un decrecimiento lento
dcrece cuando sube y crece cuando baja
la variable decrecio y crecio
nr
cuando sube la velocidad disminuye y cuando baja aumenta
creciemiento y decrecimeinto conel tipo de terreno
crece en ciertos puntos la velocidad
velocidad dcrece y crece

ANEXO 21. Respuestas a la Pregunta 7 a) y b) de la Prueba Final

RECTANGULO	
TABLA	**GRAFICA**
si	bien
mal	mal
triangulo	mal
mal	mal
mal	mal
si	bien
triangulo	mal
si	bien
si	bien
si	bien
si	bien
si	bien
mal	mal
mal	mal
nr	nr
mal	mal
mal	mal
mal	mal
mal	mal
si	bien
mal	mal
nr	nr
si	puntos
si	bien
mal	mal
si	bien
triangulo	mal
mal	nr
nr	nr
si	bien
si	bien
si	bien
mal	nr
mal	mal
nr	nr
mal	mal
mal	mal
mal	mal
si	bien
si	no se puede
mal	mal
mal	mal
triangulo	mal
mal	mal
si	bien
mal	mal
mal	mal
mal	mal

ANEXO 22. Respuestas a la Pregunta 7 c) y d) de la Prueba Final

¿Es una función? **¿cuál es la ecuación?**

VI	VD	ECUACION
lado	area	no
lado	area	no
lado	area	no
lado	area	no
lado	area	A=bh/2
lado	area	x(15-x)
x	area	3x2/2
lado	area	x(15-x)
lado	area	x(15-x)
lado	area	bh =A
lado	area	x(15-x)
lado	area	xy=A
lado	area	no
suma de lados	area	A=bh/2
nr	nr	nr
lado	area	L*L = A
lado	area	L*L = A
lado	area	bh =A
lado	area	B/C
lado	area	L*L = A
lado	area	A=bh/2
nr	nr	nr
lado	area	bh =A
lado	area	VD = LA*LA
lado	area	X2/2
lado	area	x(15-x)
lado	area	3x2
lado	area	A =x 2x/2
nr	nr	nr
lado	area	x(15-x)
lado	area	bh =A
lado	area	x(15-x)
nr	nr	nr
lado	area	A = L*L
nr	nr	nr
lado	area	VD=15X
lado	area	A=X*7.5
lado	area	A=LA*LL
lado	area	nr
lado	area	A=b*a
no, varia mucho	no, varia mucho	L*37.5
lado	area	2x+2y=15
lado	area	A=(F)
lado	area	A=x+2y
lado	area	A=b*h
lado	area	C=b*15
lado	area	3x2/2

ANEXO 23.1 Respuestas de la muestra a la Pregunta 1: *¿Qué es función?*

Respuesta de Antonio

1.- Que es funcion?
Una funcion es la relacion que existe ÷ una variable y otra, esta relacion esta marcada por la dependencia de una con la otra, una se llama independiente o dominio y la otra dependiente o contradominio. A cada valor de la variable independiente le corresponde uno y solo un valor a la variable dependiente.

Respuesta de María

1) Es la relación q' existe entre dos variables una dependiente y otra independiente, y q' a cada variable dependiente le corresponde un valor de la independiente, este valor no debe repetirse

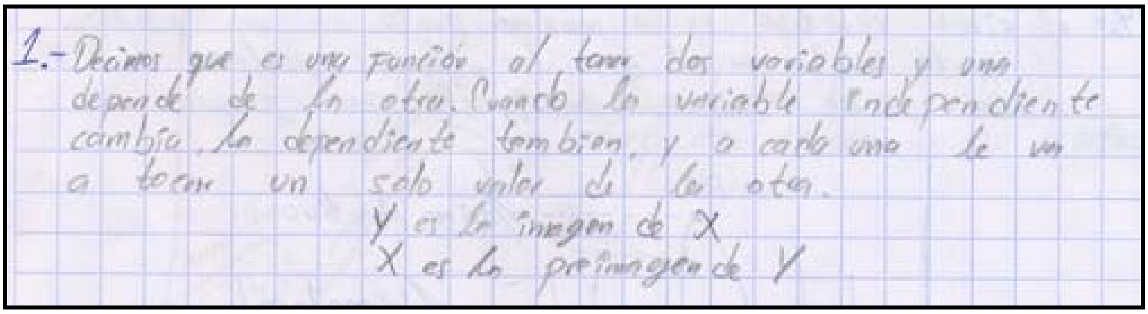
Respuesta de Esteban

1o. Que es una funcion?
R= Cuando el valor independiente le corresponde una independ
cuando hay dependencia una de otra.

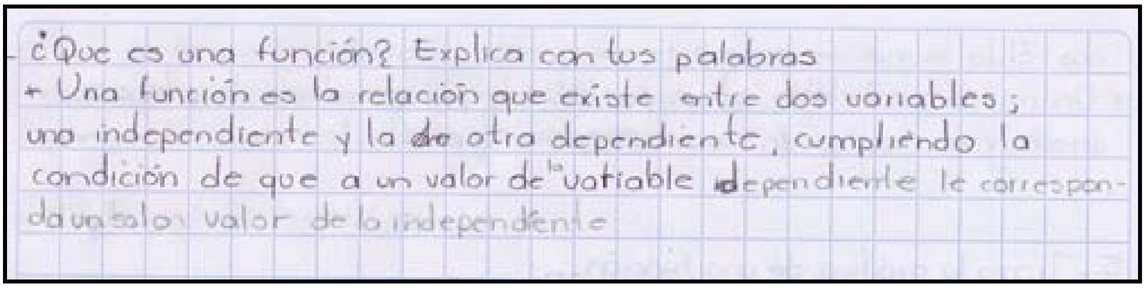
Respuesta de Sergio

1. UNA FUNCIÓN SON VALORES QUE SE MIDEN QUE ESTAN EN DEPENDENCIA; UNO ES INDEPENDIENTE Y OTRO ES DEPENDIENTE. POR EJEMPLO. EL RECIBO DE LUZ, DEPENDE NOSOTROS LO QUE PAGEMOS SEGÚN EL RECIBO DE LUZ. EXISTE UN VALOR INDEPENDIENTE Y UN DEPENDIENTE.

Respuesta de Madomna


1.- Decimos que es una función al tomar dos variables y una depende de la otra. Cuando la variable independiente cambia, la dependiente tambien, y a cada una le va a tocar un solo valor de la otra.
Y es la imagen de X
X es la preimagen de Y

Respuesta de María


¿Que es una función? Explica con tus palabras
+ Una función es la relación que existe entre dos variables; una independiente y la ~~de~~ otra dependiente, cumpliendo la condición de que a un valor de la vatiable dependiente le correspon-da un solo valor de la independiente

ANEXO 23.2 Respuestas de la muestra a la Pregunta 2: ***Plantea dos ejemplos de funciones***

Respuesta de Antonio

a) La inversion que realizan las personas con capital monetario para hechar andar nuevas empresas genero ~~nuevos~~ mas empleos, es decir dependiendo de que tan grandes sean las inversiones, estaran en función de estas la generación de un numero cualquiera de empleos.

I = inversion
Eg = Empleos generados $\qquad Eg = f(I)$

b) El precio del barril de petroleo a $48.50 depende de la producción a nivel mundial de barriles de petroleo, es decir el precio por barril esta determinado (o depende de) ~~por~~ la generación de barriles de crudo a nivel mundial.

P = Precio por barril $\qquad P = f(P_T)$
P_T = Producción total

Respuesta de María

Se compra un terreno a $5,000 cada año aumenta su valor 5%

$VT = f(T)$

Valor de Terreno (Dependiente) — Tiempo (Independiente)

* En esta funcion quiero dar a entender q el valor del terreno va a depender del tiempo (años)

• El pago del agua es por el consumo q tengas

$PA = f(C)$

pago de agua (Depend) — Consumo de agua (Independ)

* El pago de agua depende del consumo pues si gastas 10 lts pagas "x" cantidad y si consumes 15, 20, etc... va ir cambiando el valor del pago.

ANEXO 23.2 (continuación)

Respuesta de Esteban

2.- Plantea 2 ejemplos de funcion.
1.- El valor de un coche q. por cada año q. transcurre va ~~pa~~ disminuyendo un 10%. La variable independiente sería los años y la dependiente será el valor del coche
2.- El area de un triangulo y la longitud de uno de sus lados. La variable independiente es uno de sus lados y la dependiente sería el area.

Respuesta de Sergio

2. · En una producción de plumas, el costo total va a depender del nº de plumas que se fabriquen.
Independiente: el número de plumas
Dependiente: el costo total

· El recibo de luz y lo que pagamos. Nosotros pagamos según el recibo de luz.
Independiente: recibo de luz
Dependiente: el monto a pagar.

Respuesta de Madomna

2.- En el problema del triangulo la variable independiente es la longitud del cateto y la dependiente el área.
Recordando el de la excursión la independiente es el número de pasajeros y la dependiente el precio que se paga.

Respuesta de Patricia

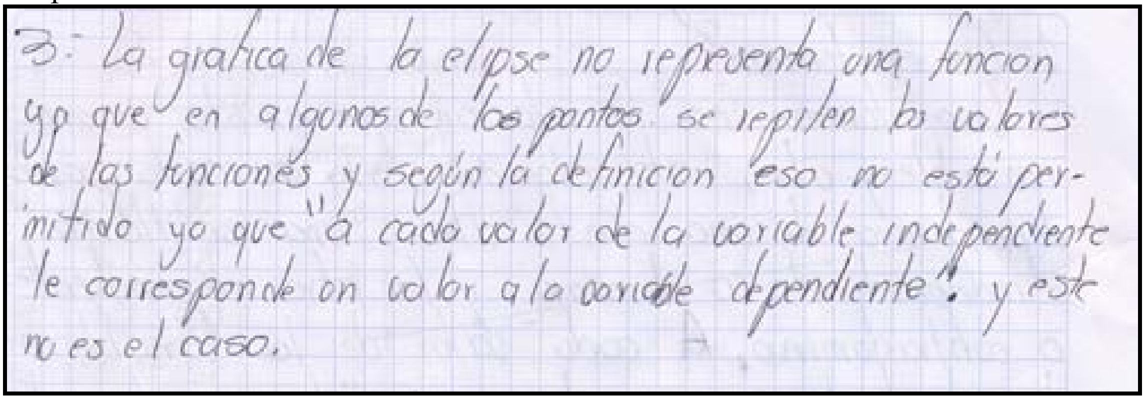
Plantea dos ejemplos de funciónes. Señala en cada ejemplo cual es la variable independiente y cuál es la variable dependiente

Ejemplo #1 (Juan trabaja en una ensambladora de autos en Estados Unidos y le pagan a 10 dólares la hora)
En este ejemplo la variable independiente es el tiempo ya que el trancurre sin importar si Juan trabaja o no, o si es mucho o poco tiempo, y la variable dependiente pues es el salario porque depende de las horas que (tiempo [variable independiente) trabaje para asignarle su salario

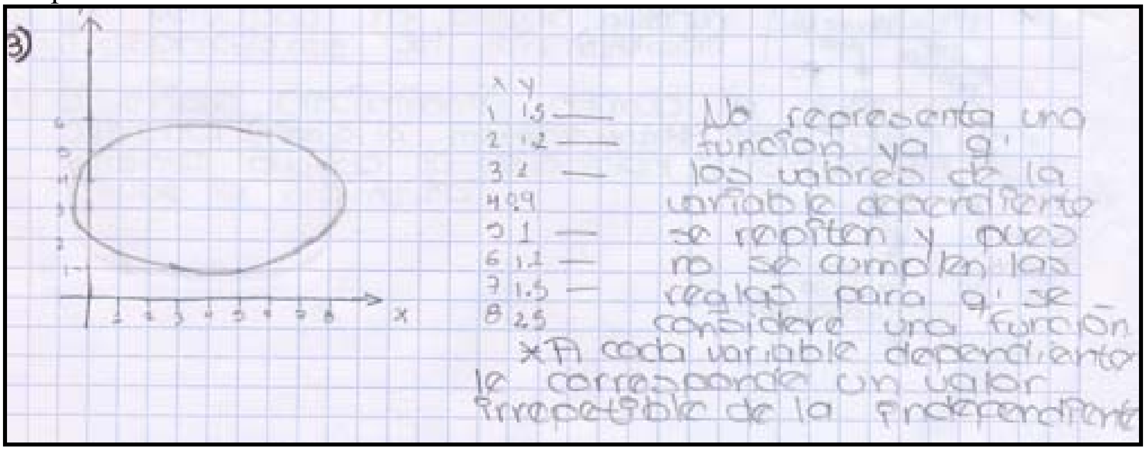
Ejemplo # 2 (Pedro compró un televisor de 55" hace 4 años y le costo $25 000 ahora lo quiere vender pero ya no cuesta lo mismo)
La variable independiente es el tiempo ya que transcurre sin afectarle nada respecto a la T.V pero la variable dependiente es el costo de la tele que conforme paso el tiempo va disminuyendo.

ANEXO 23.3 Respuestas de la muestra a la Pregunta 3: ***¿Representa la figura 1 una función?***

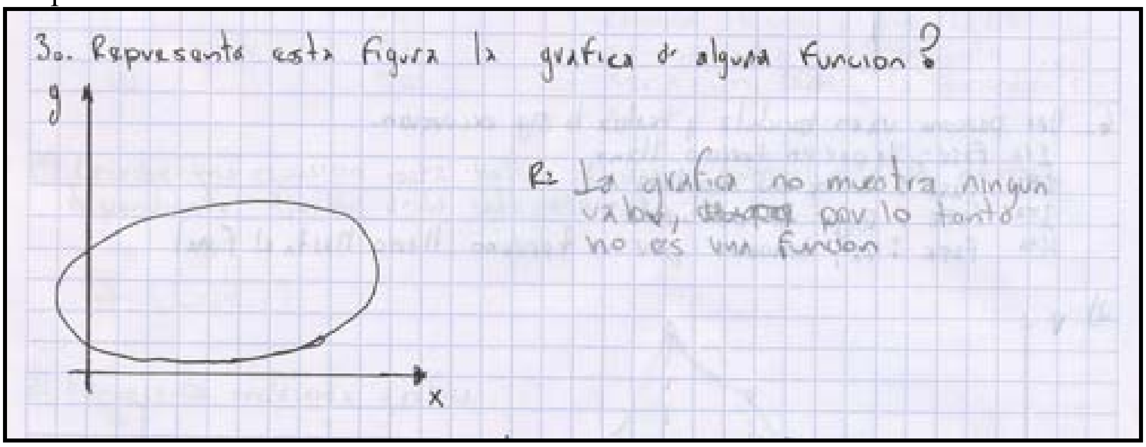
Respuesta de Antonio



Respuesta de María



Respuesta de Esteban

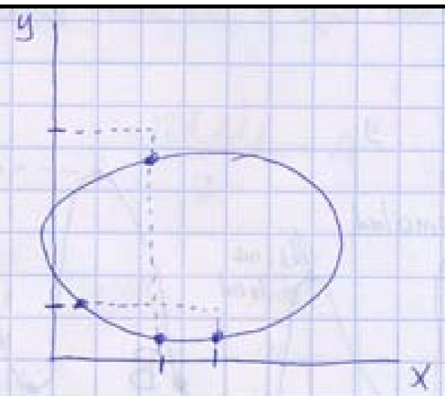


ANEXO 23.3 (continuación)

Respuesta de Sergio

3. No es una función, porqué los valores se repiten, al mismo momento, tiempo, etc tiene función decreciente y creciente, ~~[illegible]~~ en el mismo punto, eso no se puede.

Respuesta de Madomna



3.- No es una función, tomando en cuenta que por cada imagen de Y le corresponde una de X, aquí le tocan dos y no es posible como indico en el dibujo

Respuesta de María

3.- Analiza la figura 1. ¿Representa esta figura la gráfica de una función? Si la representa porque supongo que expresa un comportamiento ciclico, aunque un poco mas compleja pero pasa deserdeciente a creciente

ANEXO 23.4 Respuestas de la muestra a la Pregunta 4: ***¿Qué entiendes por máximo relativo y por mínimo relativo de una función?***

Respuesta de Antonio

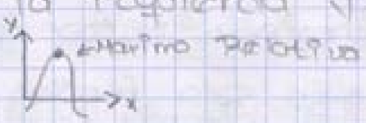
4.- Un Máximo Relativo: es el punto en el cual como característica principal podemos decir que todos los puntos tanto a la izquierdo y a la derecha son mas pequeños que el punto en cuestion, en otras palabras es el punto máximo de aumento, eso en una vecindad de valores.

Un mínimo Relativo: es el punto en el que todos los valores situados tanto a su derecha como a su izquierda son mas grandes que el punto en cuestion, en otras palabras es el punto mínimo de disminución, eso en una vecindad de valores.

Respuesta de María

4) • Maximo relativo:

Cuando una línea va creciendo y despues decrece, al punto maximo q. alcanza es llamado "maximo relativo" ademas los valores de la izquierda y derecha son menores.

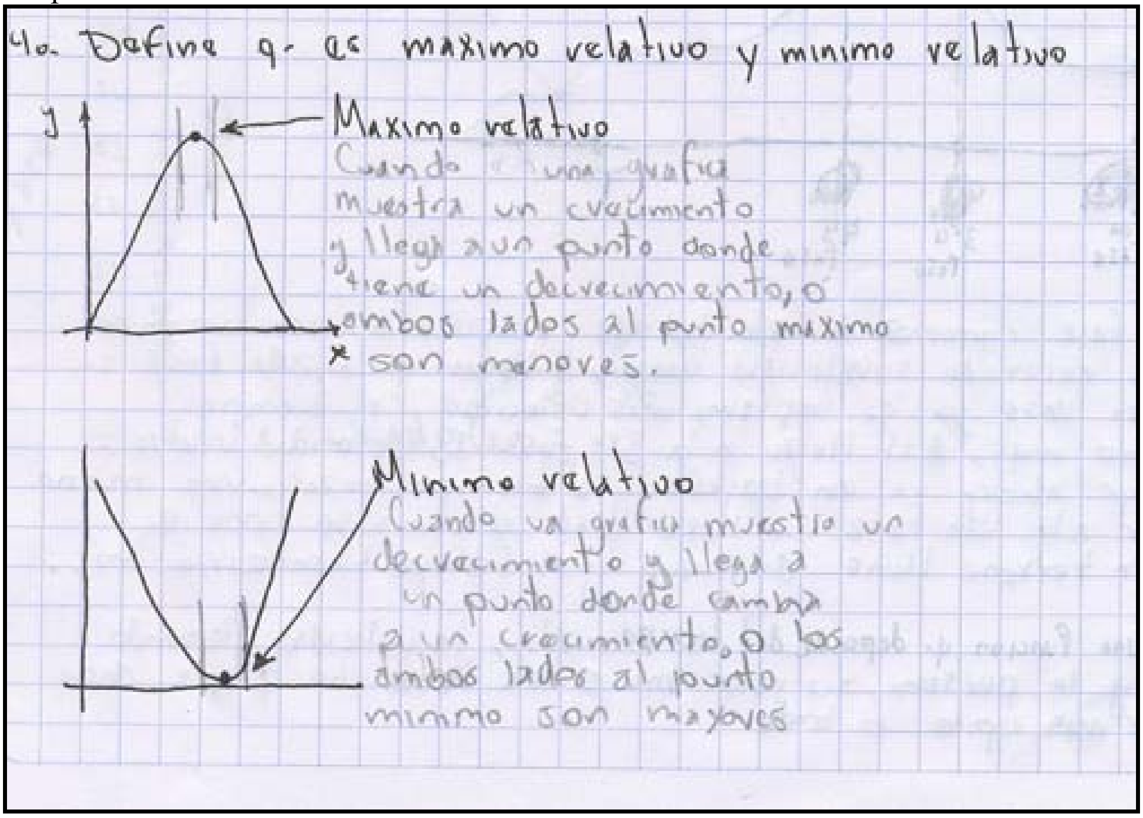


• Minimo relativo:

Cuando una línea o magnitud va decreciendo y de repente crece, al punto mínimo q. alcanza se llama "mínimo relativo" ademas los valores de su izq. y derecha son mayores

ANEXO 23.4 (continuación)

Respuesta de Esteban



4a. Define q. es maximo relativo y minimo relativo

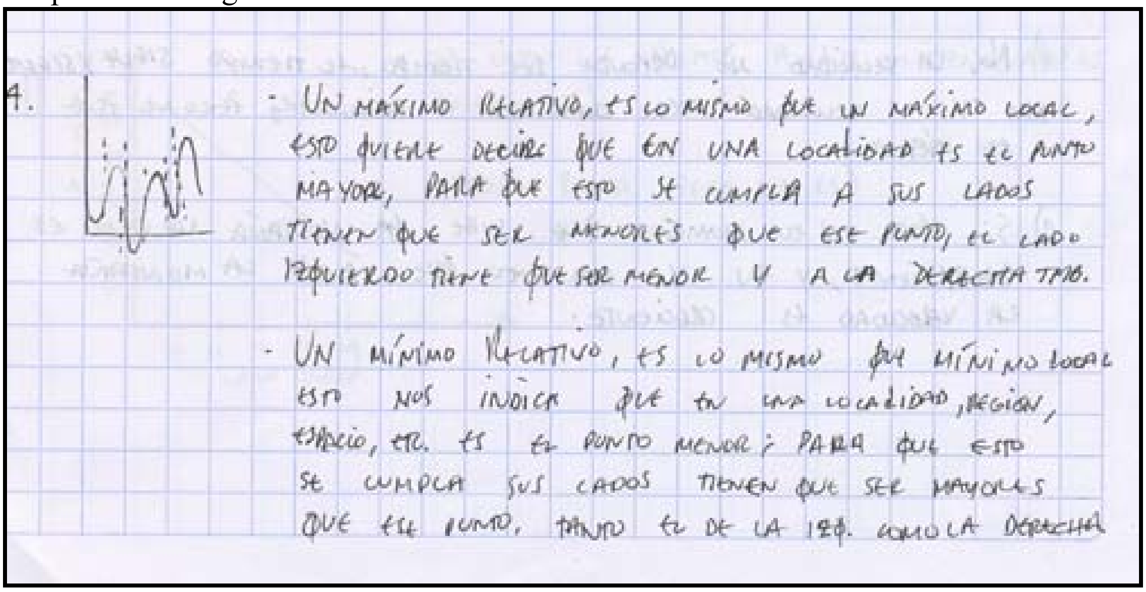
Maximo relativo

Cuando una grafica muestra un crecimiento y llega a un punto donde tiene un decrecimiento, o ambos lados al punto maximo son menores.

Minimo relativo

Cuando ua grafica muestra un decrecimiento y llega a un punto donde cambia a un crecimiento, o los ambos lados al punto minimo son mayores

Respuesta de Sergio

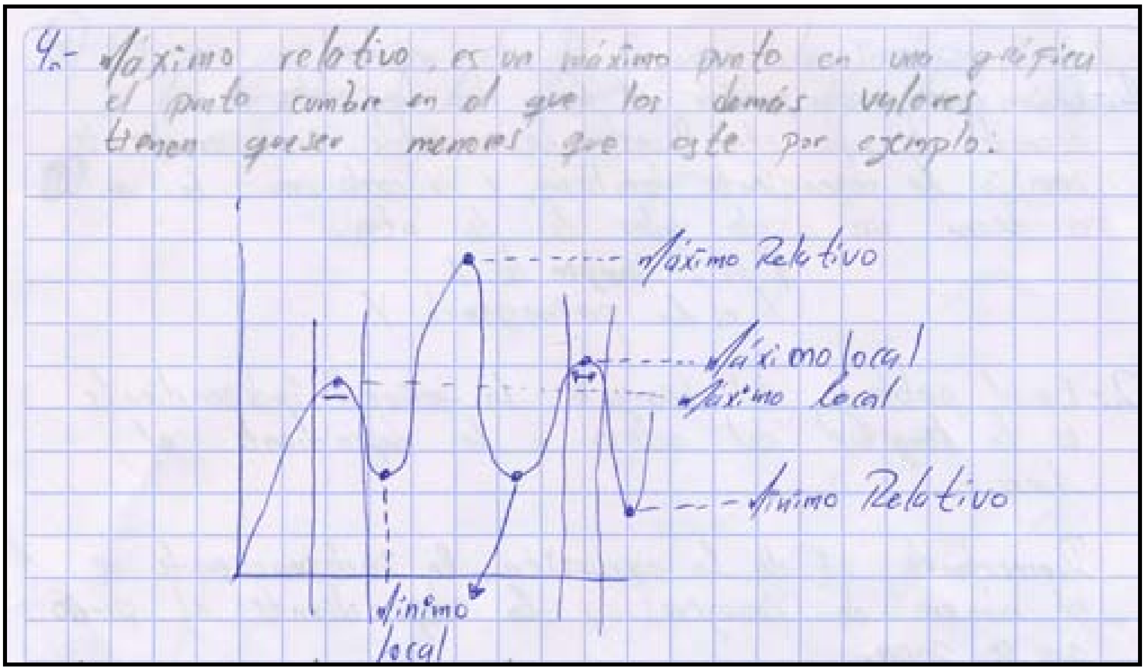


4.

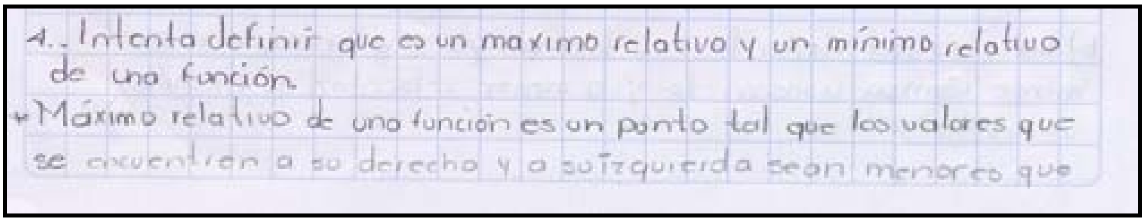
- UN MÁXIMO RELATIVO, ES LO MISMO QUE UN MÁXIMO LOCAL, ESTO QUIERE DECIR QUE EN UNA LOCALIDAD ES EL PUNTO MAYOR, PARA QUE ESTO SE CUMPLA A SUS LADOS TIENEN QUE SER MENORES QUE ESE PUNTO, EL LADO IZQUIERDO TIENE QUE SER MENOR Y A LA DERECHA TMB.
- UN MÍNIMO RELATIVO, ES LO MISMO QUE MÍNIMO LOCAL ESTO NOS INDICA QUE EN UNA LOCALIDAD, REGIÓN, ESPACIO, ETC. ES EL PUNTO MENOR; PARA QUE ESTO SE CUMPLA SUS LADOS TIENEN QUE SER MAYORES QUE ESE PUNTO, TANTO EL DE LA IZQ. COMO LA DERECHA

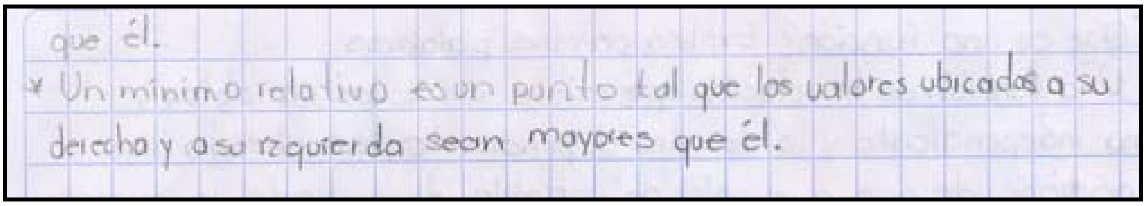
ANEXO 23.4 (continuación)

Respuesta de Madomna


4.- Máximo relativo, es un máximo punto en una gráfica el punto cumbre en el que los demás valores tienen que ser menores que este por ejemplo:

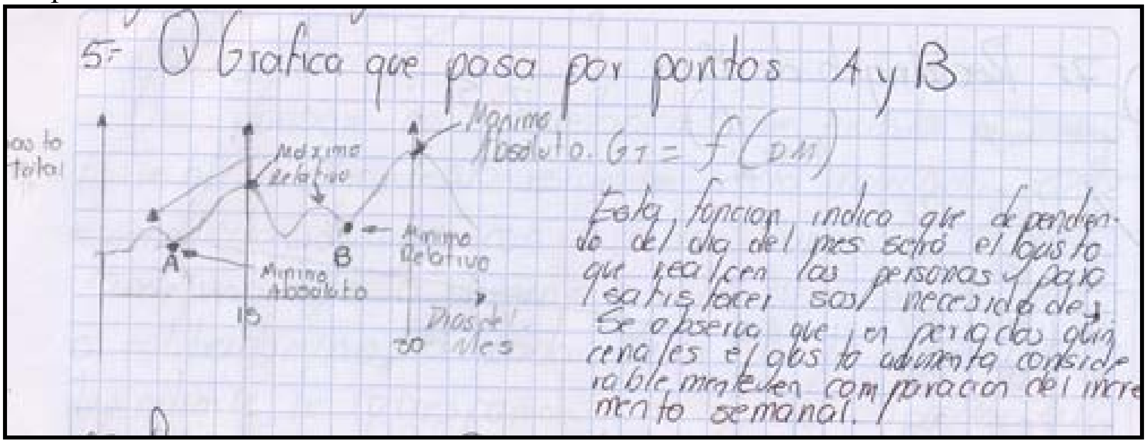
Respuesta de Patricia


4.- Intenta definir que es un maximo relativo y un mínimo relativo de una función.
* Máximo relativo de una función es un punto tal que los valores que se encuentren a su derecho y a su izquierda sean menores que

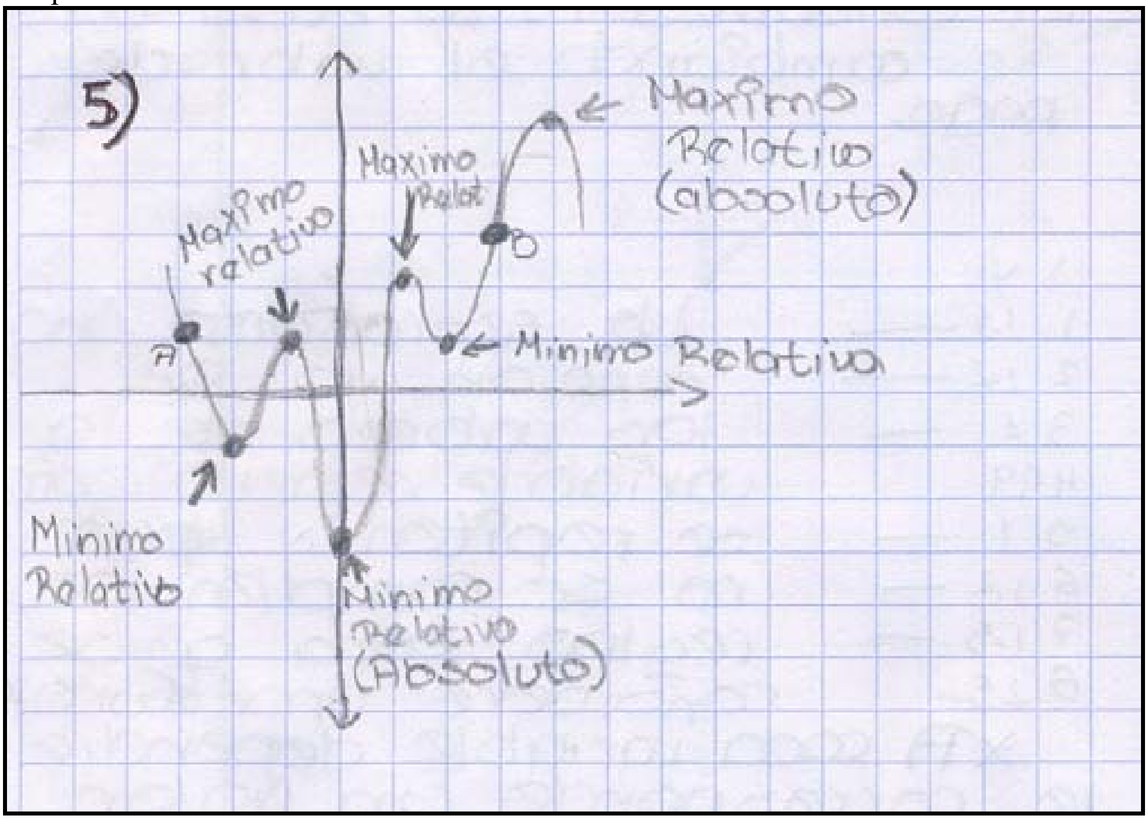

que él.
* Un mínimo relativo es un punto tal que los valores ubicados a su derecho y a su izquierda sean mayores que él.

ANEXO 23.5 Respuestas de la muestra a la Pregunta 5

Respuesta de Antonio

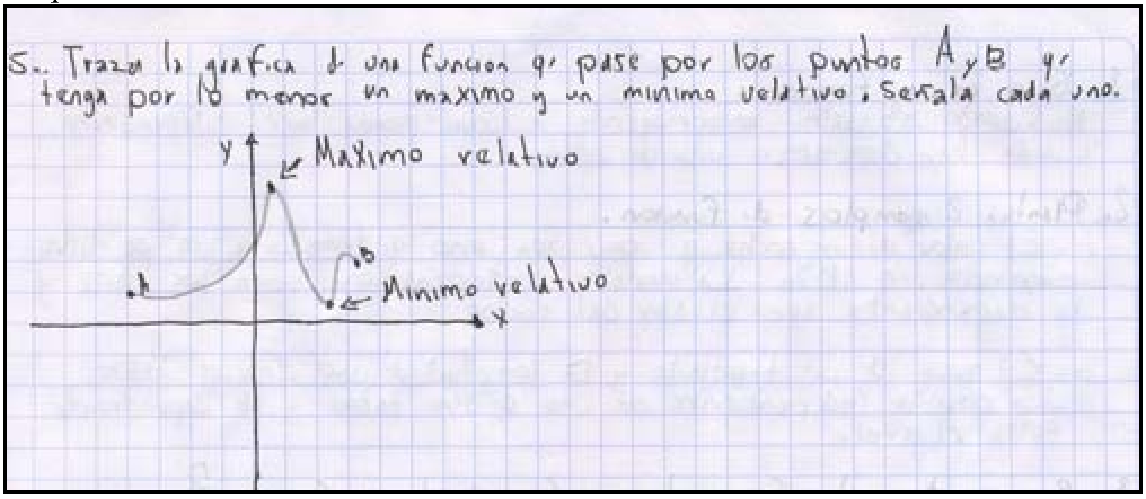


Respuesta de María

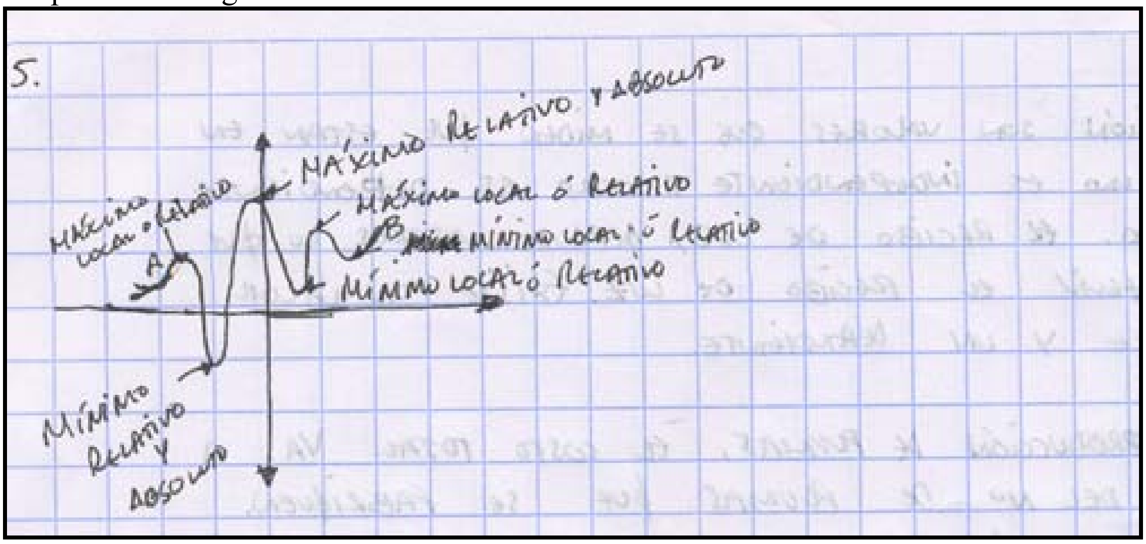


ANEXO 23.5 (continuación)

Respuesta de Esteban

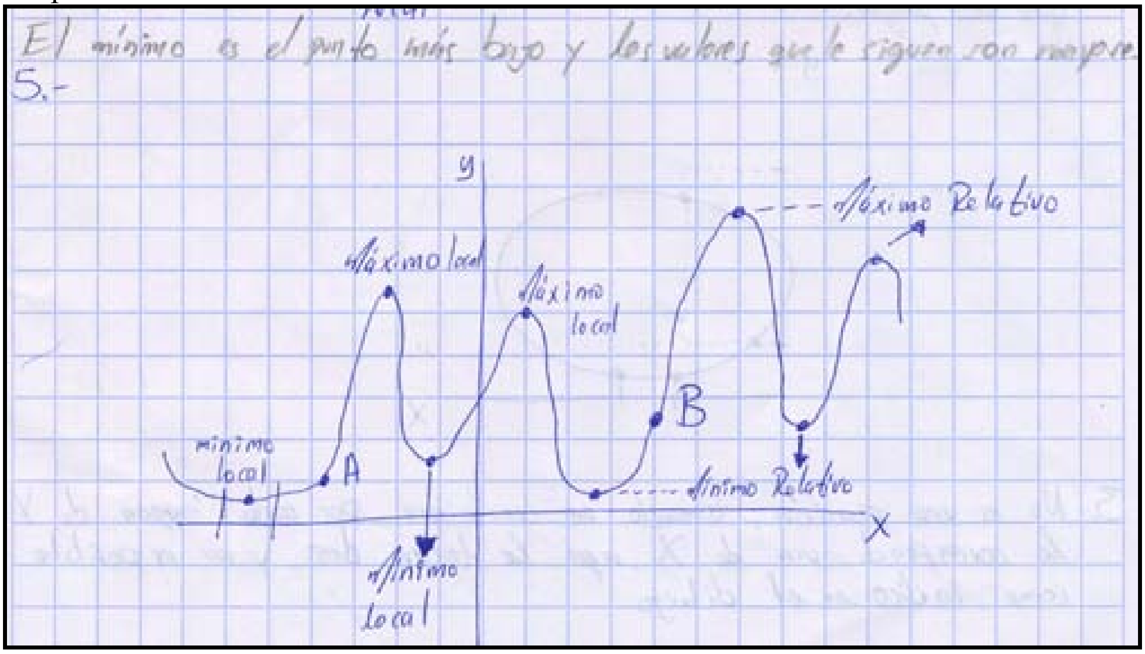


Respuesta de Sergio

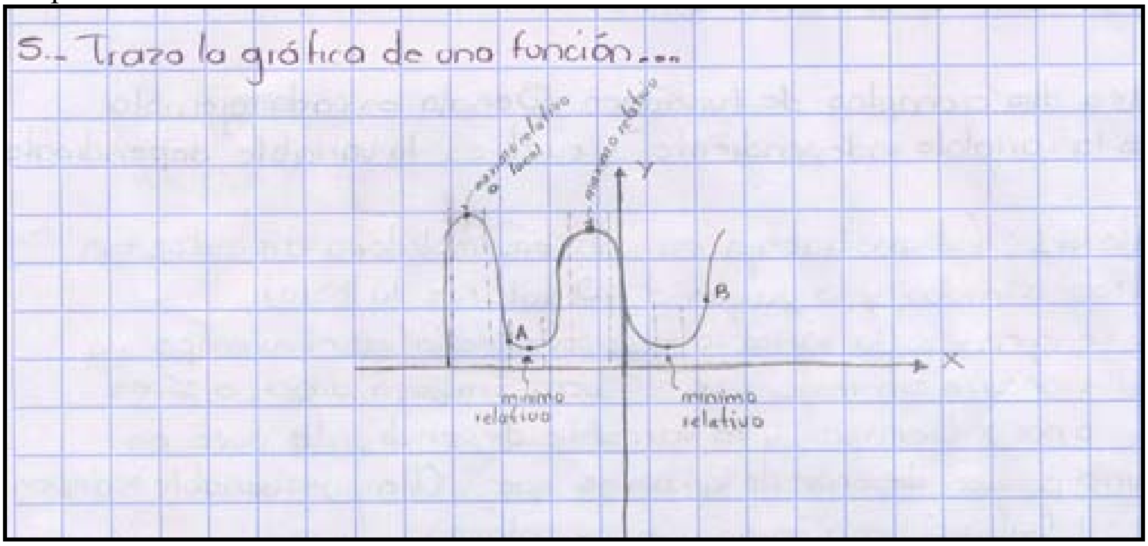


ANEXO 23.5 (continuación)

Respuesta de Madomna

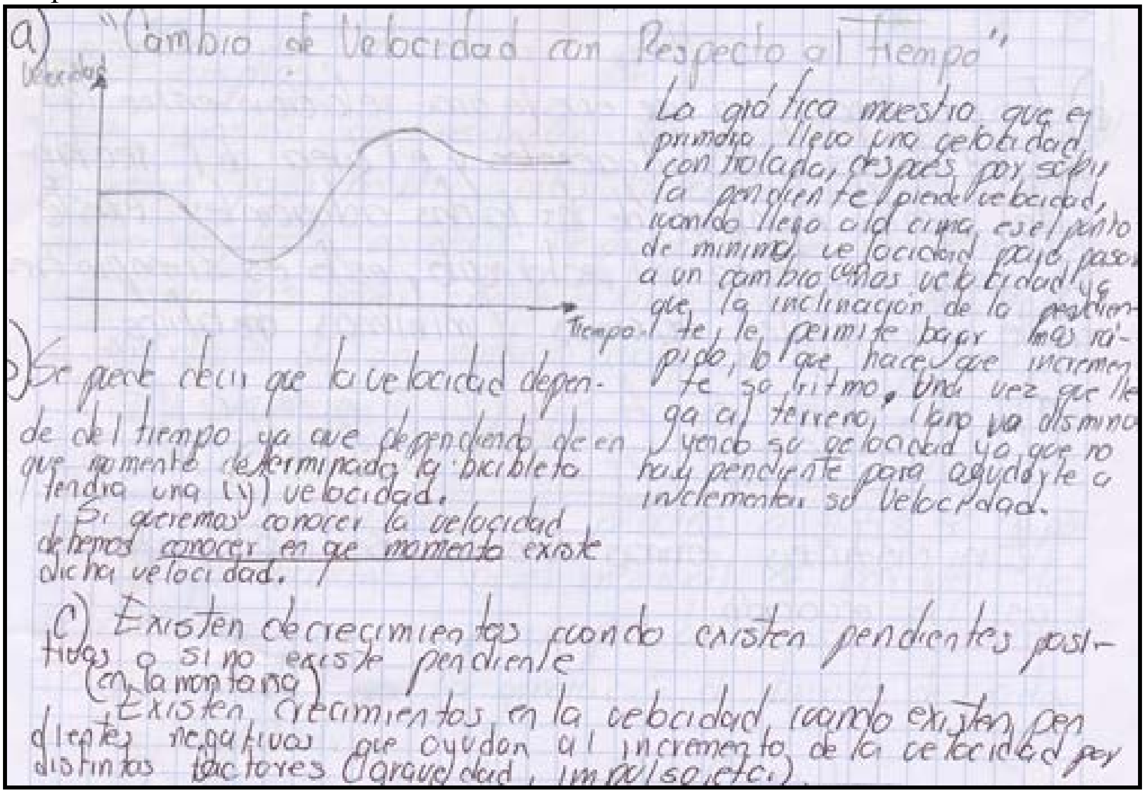


Respuesta de Patricia



ANEXO 23.6 Respuestas de la muestra a la Pregunta 6

Respuesta de Antonio



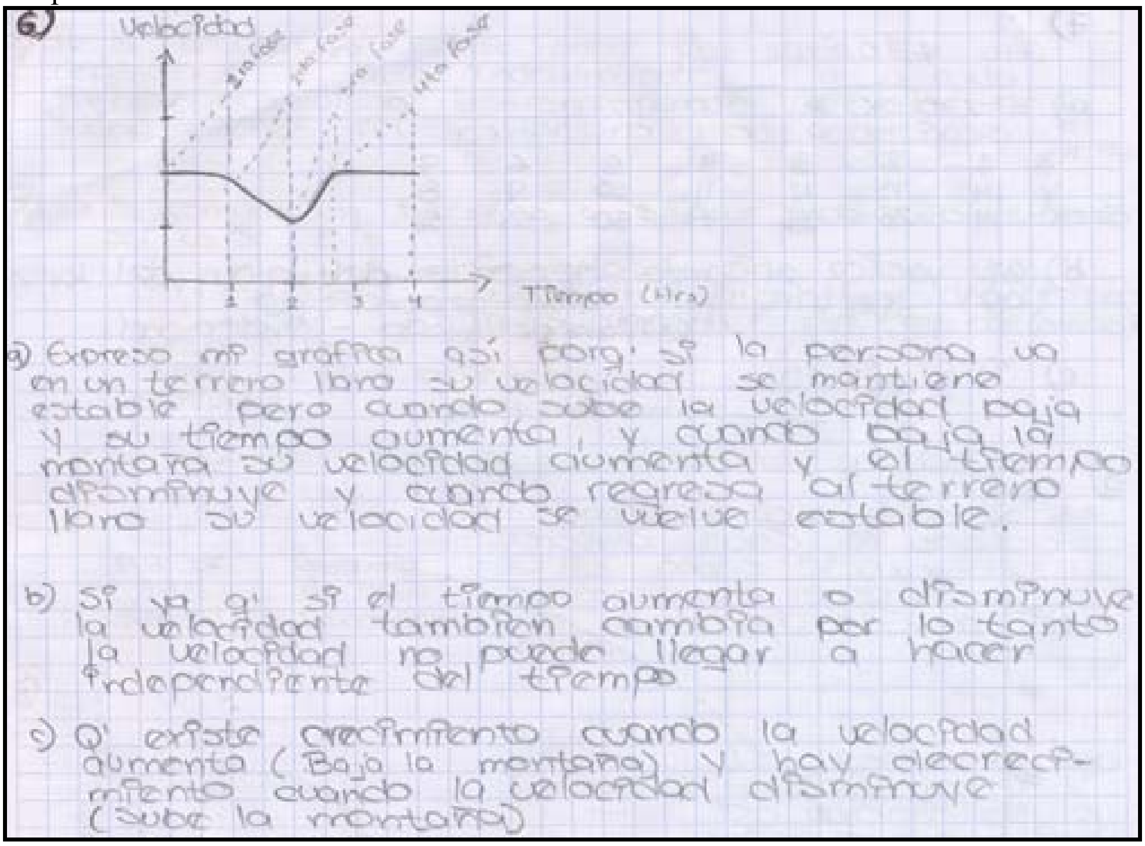
a) "Cambio de Velocidad con Respecto al tiempo"

La gráfica muestra que en primero llevo una velocidad controlada, después por subir la pendiente pierde velocidad, cuando llego a la cima es el punto de mínima velocidad, pues paso a un cambio más velocidad ya que la inclinación de la pendiente le permite bajar más rápido, lo que hace que incremente su ritmo, una vez que llega al terreno llano va disminuyendo su velocidad ya que no hay pendiente para ayudarle a incrementar su velocidad.

b) Se puede decir que la velocidad depende del tiempo ya que dependiendo de en que momento determinado la bicicleta tendría una (y) velocidad.
Si queremos conocer la velocidad debemos conocer en que momento existe dicha velocidad.

c) Existen decrecimientos cuando existen pendientes positivas o si no existe pendiente (en la montaña)
Existen crecimientos en la velocidad cuando existen pendientes negativas que ayudan al incremento de la velocidad por distintos factores (gravedad, impulso, etc.)

Respuesta de María



6)

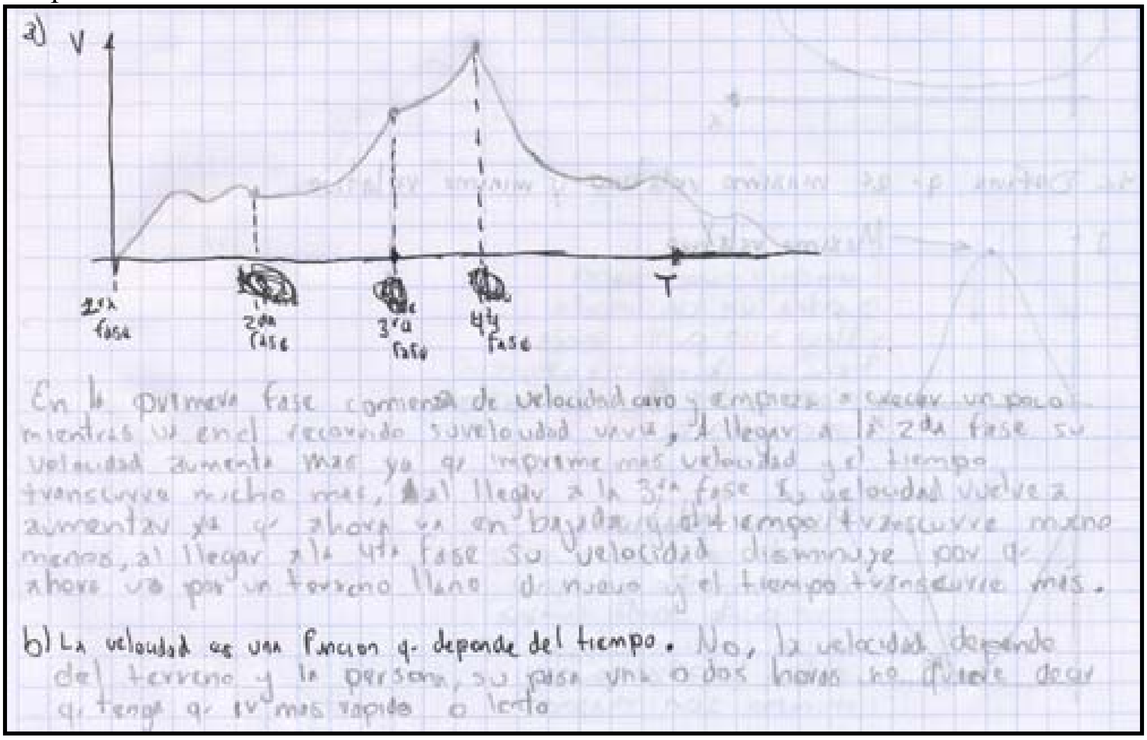
a) Expreso mi gráfica así porq' si la persona va en un terreno llano su velocidad se mantiene estable pero cuando sube la velocidad baja y su tiempo aumenta, y cuando baja la montaña su velocidad aumenta y el tiempo disminuye y cuando regresa al terreno llano su velocidad se vuelve estable.

b) Si ya q' si el tiempo aumenta o disminuye la velocidad también cambia por lo tanto la velocidad no puede llegar a hacer independiente del tiempo

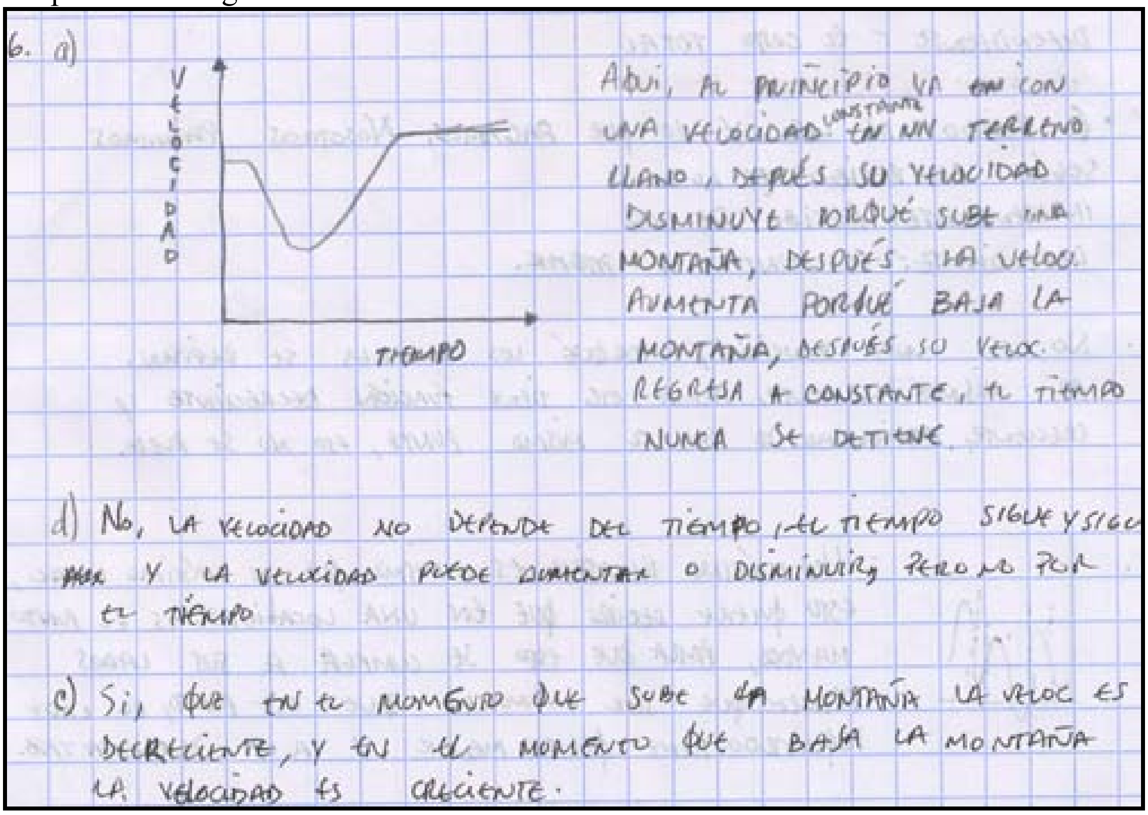
c) Q' existe crecimiento cuando la velocidad aumenta (Baja la montaña) y hay decrecimiento cuando la velocidad disminuye (Sube la montaña)

ANEXO 23.6 (continuación)

Respuesta de Esteban

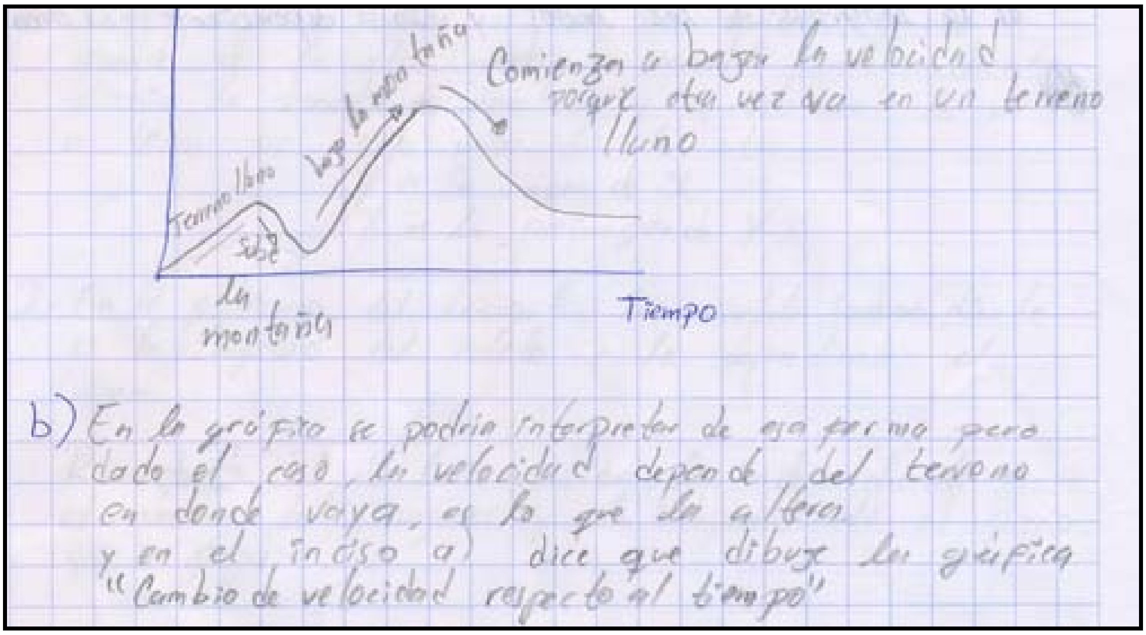


Respuesta de Sergio

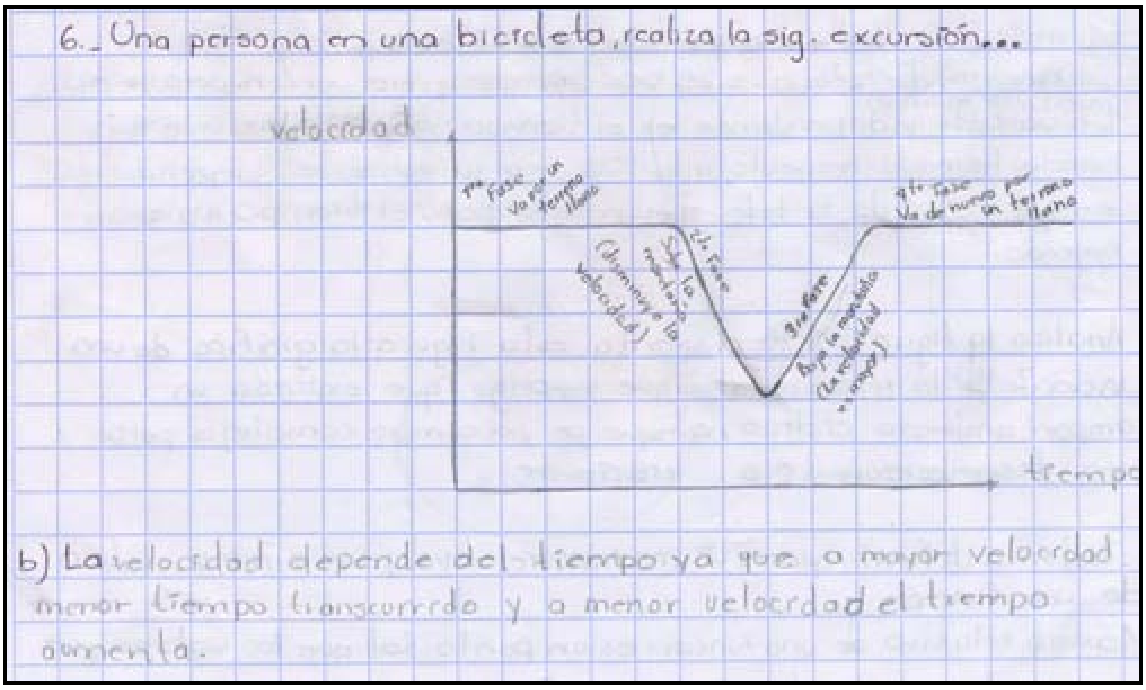


ANEXO 23.6 (continuación)

Respuesta de Madomna

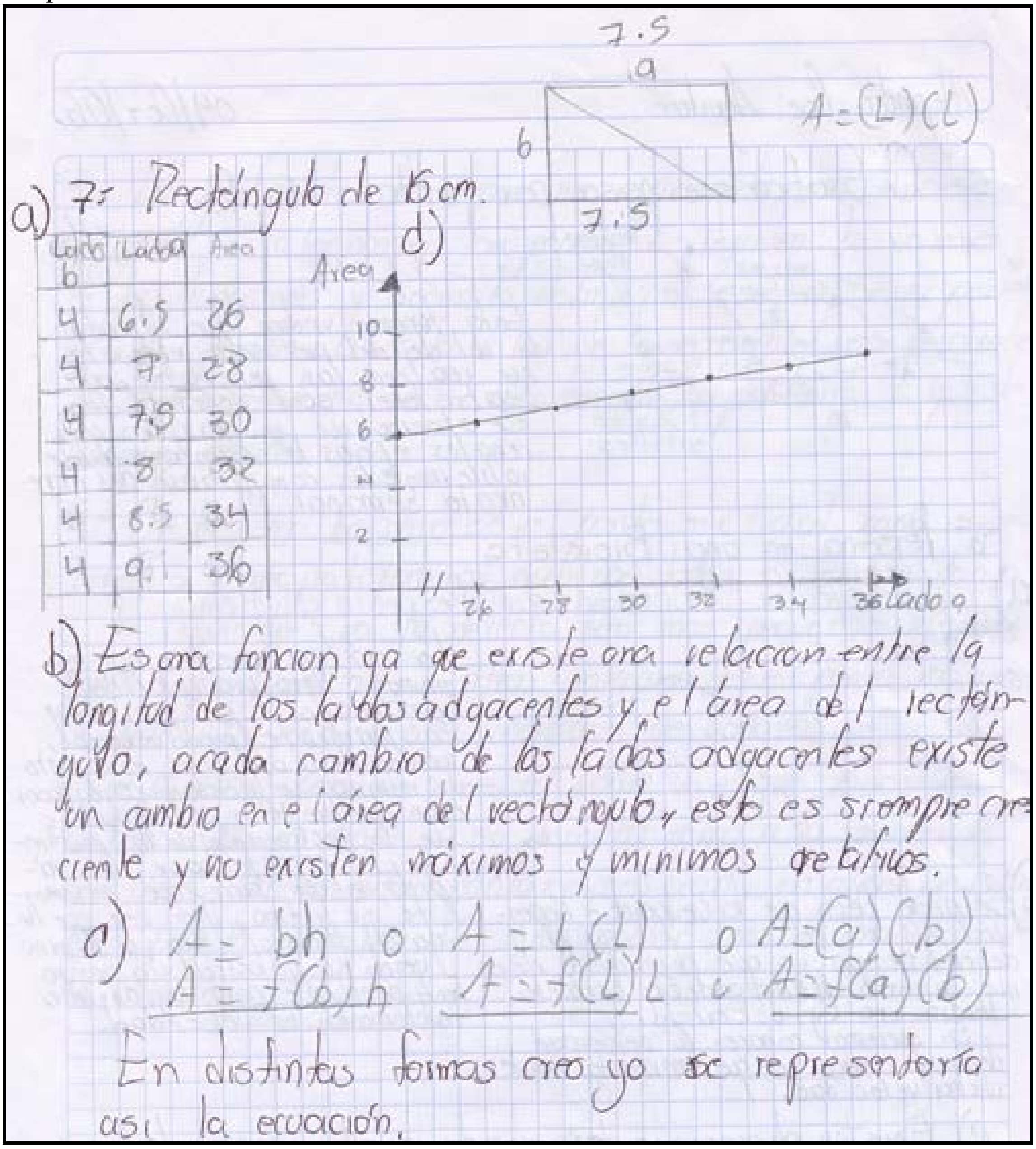


Respuesta de Patricia



ANEXO 23.7 Respuestas de la muestra a la Pregunta 7

Respuesta de Antonio



7.5

9

6

7.5

$A=(L)(L)$

a) 7- Rectángulo de 15 cm.

Lado b	Lado a	Area
4	6.5	26
4	7	28
4	7.5	30
4	8	32
4	8.5	34
4	9	36

d)

b) Es una fancion ya qe existe una relacion entre la longitud de los lados adgacentes y el área del rectángulo, acada cambio de los lados adgacentes existe un cambio en el área del rectángulo, esto es siempre creciente y no existen máximos y mínimos gráficos.

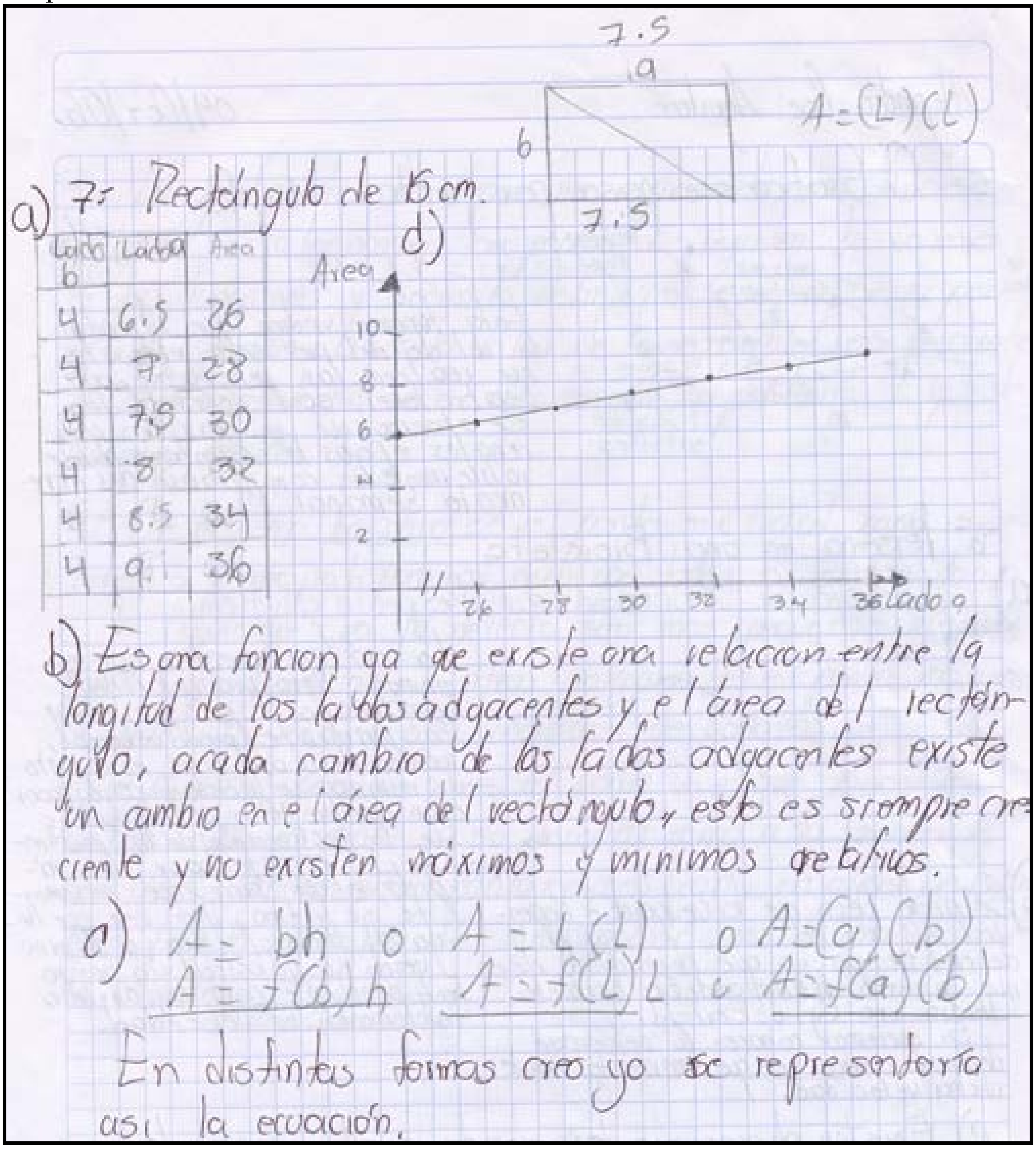
c) $A = bh$ o $A = L(L)$ o $A=(a)(b)$

$A = f(b)h$ $A = f(L)L$ $A = f(a)(b)$

En distintas formas creo yo se representaría así la ecuación.

ANEXO 23.7 (continuación)

Respuesta de María



7.5

a

6

7.5

$A = (L)(L)$

a) 7- Rectángulo de 15 cm.

Lado b	Lado	Area
4	6.5	26
4	7	28
4	7.5	30
4	8	32
4	8.5	34
4	9	36

d)

b) Es una funcion ya que existe una relacion entre la longitud de los lados adyacentes y el área del rectángulo, a cada cambio de los lados adyacentes existe un cambio en el área del rectángulo, esto es siempre creciente y no existen máximos y minimos crebticos.

c) $A = bh$ o $A = L(L)$ o $A = (a)(b)$

$A = f(b)h$ $A = f(L)L$ o $A = f(a)(b)$

En distintas formas creo yo se representaria así la ecuación.

ANEXO 23.7 (continuación)

Respuesta de Esteban

7. La suma d. 2 lados adyacentes d. un rectangulo es 15 cm. Se desea estudiar como varia el area del rectangulo cuando variamos la longitud d. los lados.

a)

L_1	L_2	A
5	10	50
6	9	54
7	8	56
8	7	56
9	6	54
10	5	50

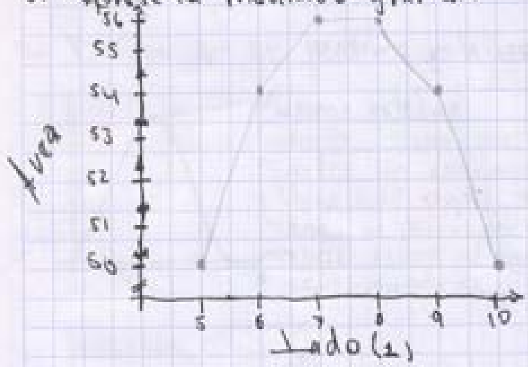
b) Es esta una funcion. Cual es la variable dependiente e independiente.

Si es funcion por q. el area cambia si uno d. sus lados cambia. La independiente seria un lado y la dependiente el area

c) Escribe una ecuacion para hallar e valor numerico d. la variable dependiente apartir d. la independiente

$A=(L_1)(L_2)$

d) Representa mediante grafica.



ANEXO 23.7 (continuación)

Respuesta de Sergio

7.

5 cm

10 cm.

13

11

$A: \frac{b \cdot h}{2}$

a)

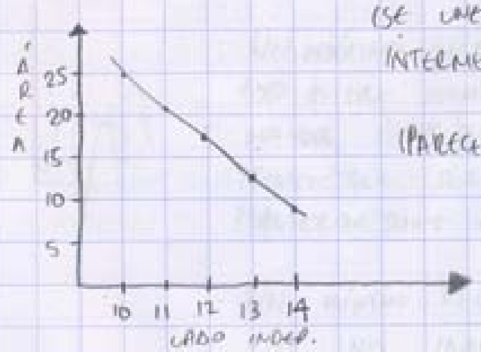
(BASE) LADO	ÁREA
10	25
11	22
12	18
13	13
14	7

b) SI, PORQUÉ CONFORME CAMBIE EL LADO, EL ÁREA CAMBIA, EL ÁREA ES EL VALOR DEPENDIENTE DEL LADO QUE ES EL INDEPENDIENTE

c) ÁREA (VALOR DEPEND) = $\frac{\text{LADO BASE} \cdot \text{LADO ALTURA (VALOR INDEPENDIENTE)}}{2}$

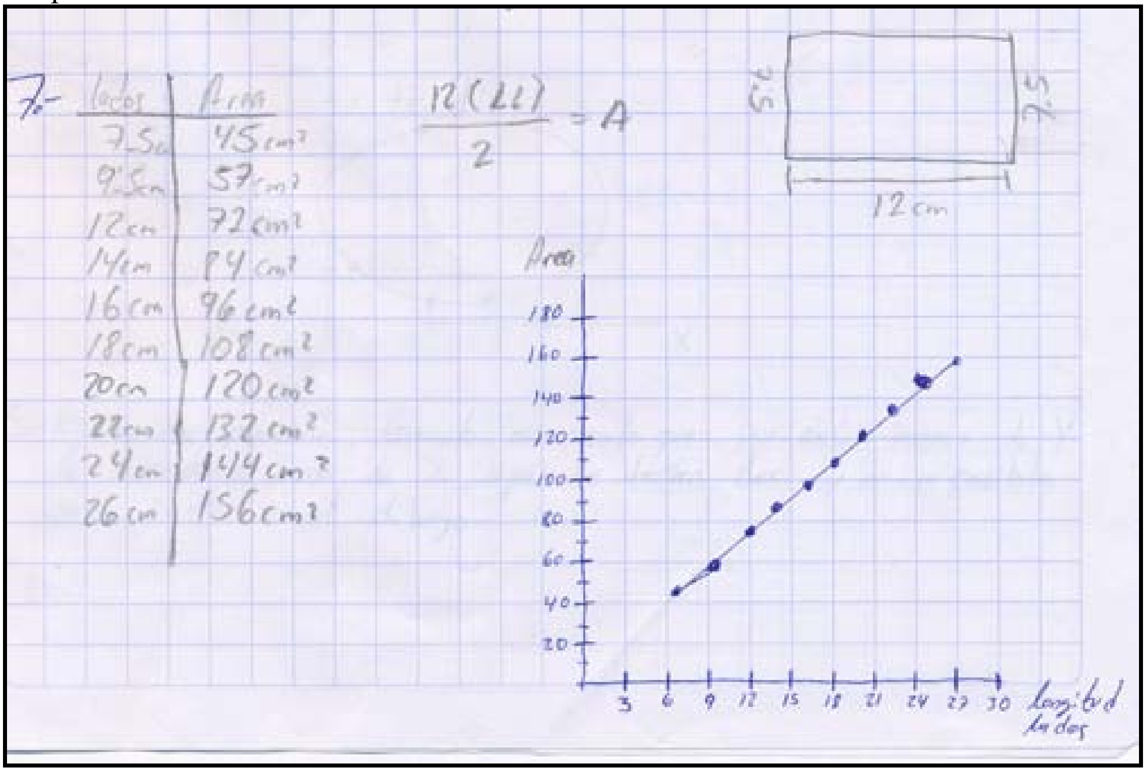
d) (SE UNEN LOS PUNTOS PORQUÉ EXISTEN VALORES INTERMEDIOS)

(PARECE RECTA, PERO NO ES)



ANEXO 23.7 (continuación)

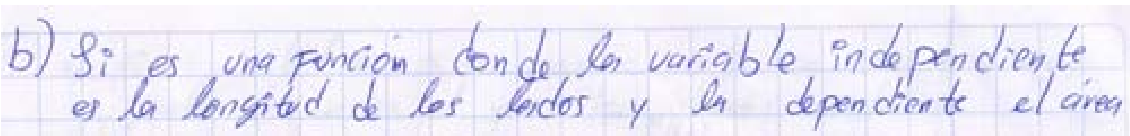
Respuesta de Madomna



7.-

lados	Área
7.5cm	45cm²
9.5cm	57cm²
12cm	72cm²
14cm	84cm²
16cm	96cm²
18cm	108cm²
20cm	120cm²
22cm	132cm²
24cm	144cm²
26cm	156cm²

$$\frac{12(22)}{2} = A$$



b) Si es una función donde la variable independiente es la longitud de los lados y la dependiente el área

ANEXO 23.7 (continuación)

Respuesta de Patricia


7.-

5 cm

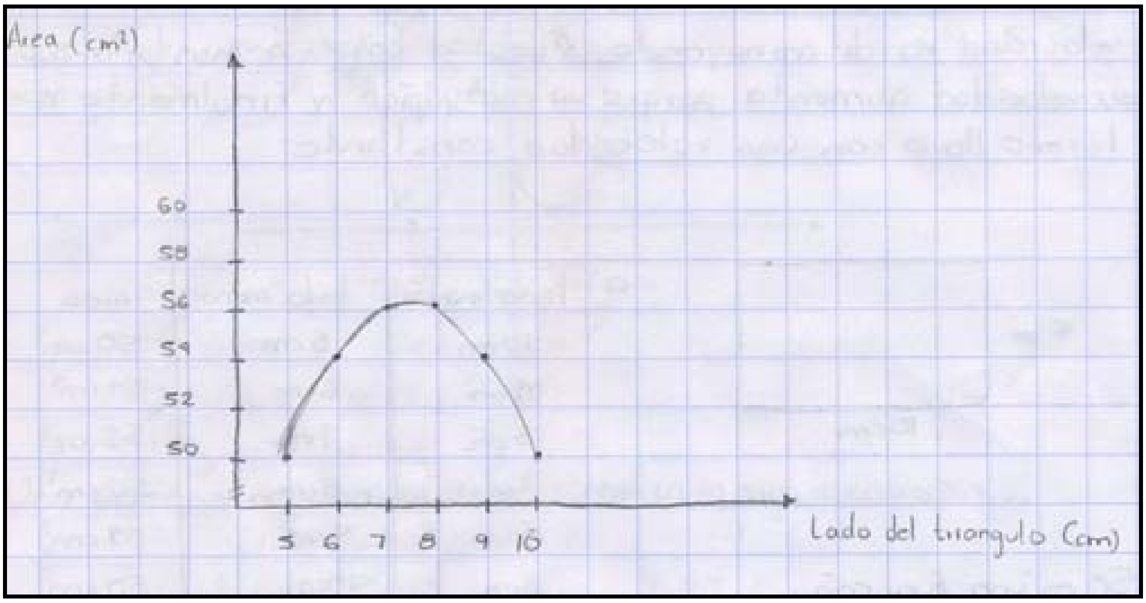
10cm

a)

lado mayor	lado menor	area
10cm	5cm	50 cm^2
9 cm	6 cm	54 cm^2
8 cm	7 cm	56 cm^2
7cm	8cm	56 cm^2
6cm	9 cm	54 cm^2
5cm	10cm	50 cm^2
4cm	11 cm	44 cm^2

b) Si es una funcion, la variable dependiente es el área y la independiente el lado del rectangulo

c) A= L₁xL₂



ANEXO 24. Trascripción de la entrevista grabada

ENTREVISTA PARA EL ANALISIS DE LA PRUEBA FINAL

Investigador: Procederemos a realizar un análisis del examen. ¿Qué dificultades se encontraron ustedes en el examen?

Alejandro: una palabra yo creo, que se generaliza, lo puedo conocer con los que estuve platicando, incluyéndome a mi, se me dificultó la palabra adyacente

Investigador: lados adyacentes, una dificultad que yo…

Alejandro: es que es lógica, si, pero no tienes el concepto

Investigador: bien, yo les pregunto: ¿cuál es el cubículo adyacente al mío?

José: el de al lado, los que están a los lados

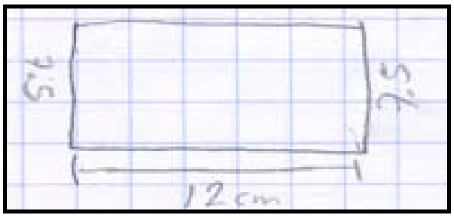
Marlene: ahaa, los opuestos

Investigador: yo tengo dos cubículos adyacentes, están juntos al mío

Marlene: los opuestos

Investigador: si hablamos de edificios adyacentes a la facultad, tenemos por una lado la guardería y por el otro el cine

Marlene: maestro, en un rectángulo, yo tomo como adyacentes éstos [*señala, en su repuesta, dos lados opuestos del rectángulo que son adyacentes a la base*], están adyacentes a la base



Alejandro: no, son los dos de arriba y de abajo

Marlene: están adyacentes a la base

José: no, porque eran lados, todos son lados

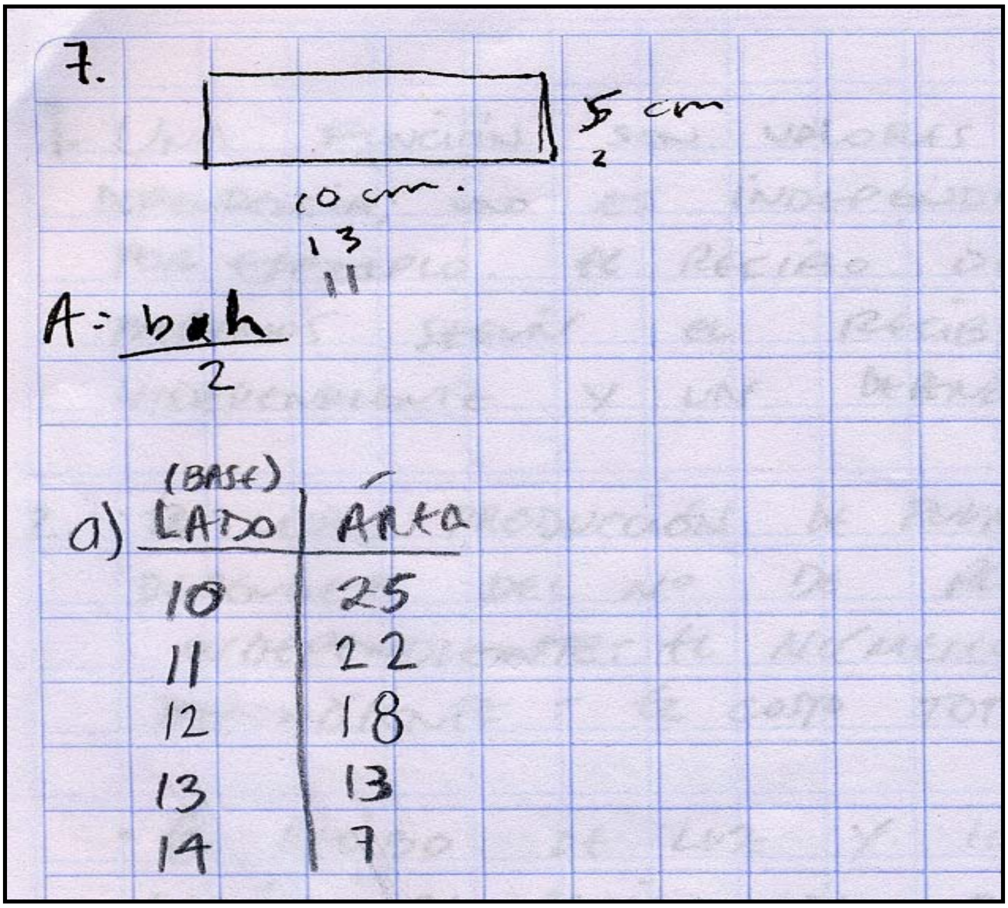
Investigador: no, veamos un rectángulo, adyacentes son todas las parejas que forman un ángulo. *[El investigador dibuja en la pizarra un rectángulo cuyos lados son, y explica todas las parejas de lados que se consideran adyacentes],* ¿Qué están formando entre si los lados adyacentes?

José: ángulos

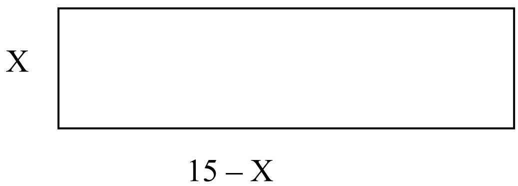
ANEXO 24 (continuación)

<u>Investigador</u>: correcto, están formando ángulos *[explica los lados que son iguales y los que son adyacentes]*

<u>José</u>: bueno yo lo puse aquí, pero mi formula según yo, es base por altura sobre dos *[señala su respuesta escrita]*



<u>Investigador</u>: observa José, lo que plantea el problema, la suma de dos adyacentes cualesquiera es igual a 15 cm, tomemos entonces dos adyacentes. Tomemos, por ejemplo, dos lados de este rectángulo y digamos que: *[traza en el pizarrón en triángulo y señala dos lados]*



<u>Investigador</u>: Si X es cero entonces 15 – X es 15; si mide un centímetro, ¿cuanto mide el otro lado?

<u>Carlos</u>: 14 cm

ANEXO 24 (continuación)

Investigador: ¿si mide dos?

Marlene: trece

Investigador: correcto

Alejandro: ya entiendo

Marlene: entonces, ¿la fórmula como quedaría?

Investigador: bueno, ¿Qué pasó José, en este problema?

José: yo lo tuve bien, bueno está mal porque lo dividí entre dos

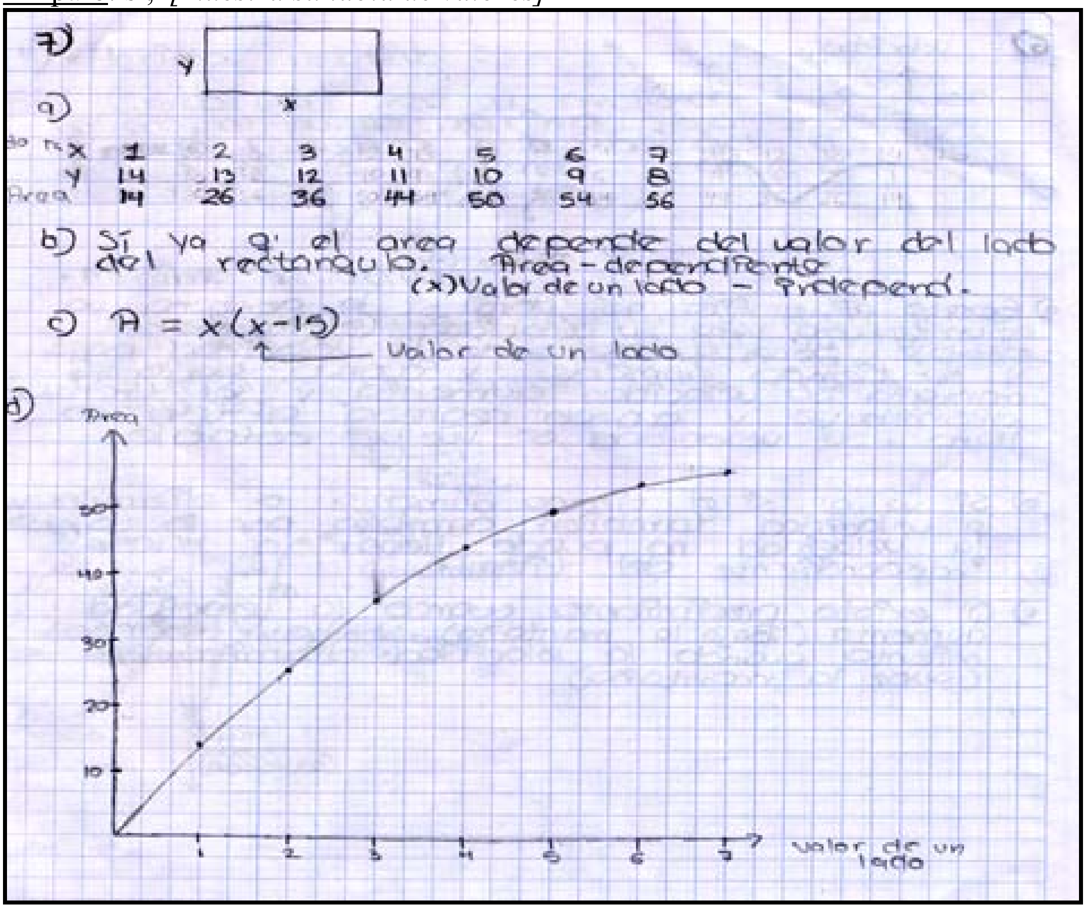
Investigador: es decir que para ti José ¿el área de un rectángulo es base por altura entre dos?

José: no

Amparo: mi duda es ¿cómo tenía que quedar la gráfica?, ¿curva?

Investigador: ¿la grafica?, ¿le asignaste valores a la tabla?

Amparo: si, *[muestra su tabla de valores]*



ANEXO 24 (continuación)

Investigador: vamos a construir, entre todos, la tabla de valores, si le damos valores a X y 15-X obtenemos valores de A *[traza en el pizarrón la tabla de valores]*, ¿si X es igual a uno?

Amparo: 14

Investigador: ¿dos?

Amparo: 13 y 26 *[Amparo le dicta todos los valores al Investigador y se obtiene la tabla]*

X	15-X	A
1	14	14
2	13	26
3	12	36
4	11	44
5	10	50
6	9	54
7	8	56
8	7	56
9	6	54

Investigador: observen que podemos continuar asignando valores a la tabla, ¿Qué sucedió entonces con este problema?

Marlene: no sé maestro

Investigador: el problema era mas sencillo que el problema del Camping*[referencia al problema 3.2 del material didáctico (ver anexo)]*

Alejandro: si, la verdad es que es más sencillo

José: bueno, a mi se me dificultó también el problema del camping

Marlene: maestro, se me dificulta lo de adyacente y lo de la formula

Alejandro: fue el concepto maestro *[referencia a la palabra adyacente]*

Investigador: observen que podemos seguir aumentando valores, pero sucede que entre los valores de X =7 y X =8 *[se representa gráficamente la información de la tabla anterior]*. Observen que posterior a X =7 el valor del área aumenta, ¿Qué sucede si seguimos asignando valores?, ¿creen ustedes que siga aumentando?

[Silencio, no se responde a esta pregunta]

Investigador: yo creo que cuando X = 7.5 cm sucede algo, ¿Cuánto es la multiplicación de 7.5 por 7.5?

ANEXO 24 (continuación)

Carlos: es 56.25

Investigador: ¿ése es el máximo valor de área?

José: si, de ahí comienza a bajar el valor del área

Investigador: significa esto que, se obtiene área máxima cuando el rectángulo se convierte en un cuadrado, es decir que es un cuadrado, cuando los lados son iguales

Carlos: hay que determinar el margen para llegar a eso

Investigador: ¿en que lugar está el margen?

Carlos: está el máximo, es siete y ocho *[hace referencia a la tabla anterior, donde los valores mayores son en X = 7 y en X = 8]*

José: no, es en 7.5

Investigador: es entre siete y ocho pero te falta el punto intermedio que es 7.5 y 7.5

Carlos: fueron 7 y 8 los que quedaron iguales

Investigador: ¿tu dices que un lado es 7 y el otro lado es igual a 8?, pero es que hay un punto intermedio para llegar al máximo

Amparo: ¿y si se queda en siete nada más?,

Investigador: no encuentras el máximo

Amparo: bueno es que en realidad no me piden esto en el examen

Investigador: esta bien, no lo piden, si lo piden el máximo está en el valor de X =7.5

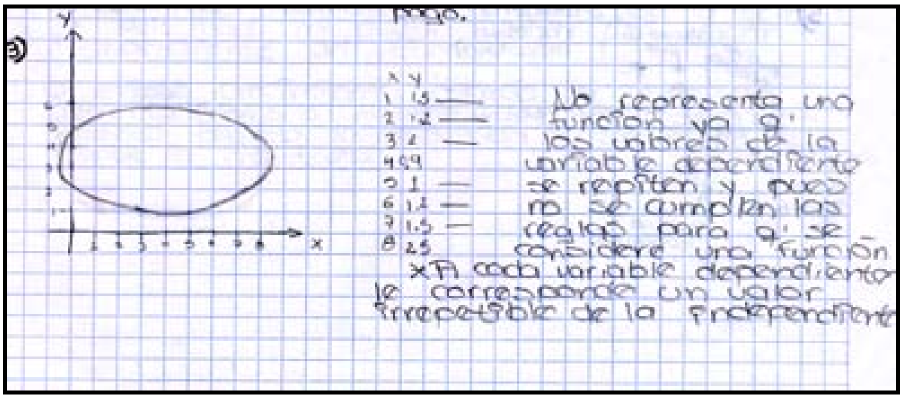
Investigador: otra pregunta, ¿era necesario unir los puntos en la gráfica?

José: si era necesario *[todos coinciden en que es necesario unir los puntos]*

Investigador: ¿hay dificultad en alguna otra pregunta?

Amparo: bueno yo tuve dificultades en esta, en la de interpretar si era o no una función, *[muestra su respuesta a la pregunta No 3 del examen final]*

ANEXO 24 (continuación)



Investigador: ¿tu que crees?

Amparo: que no, que no era una función

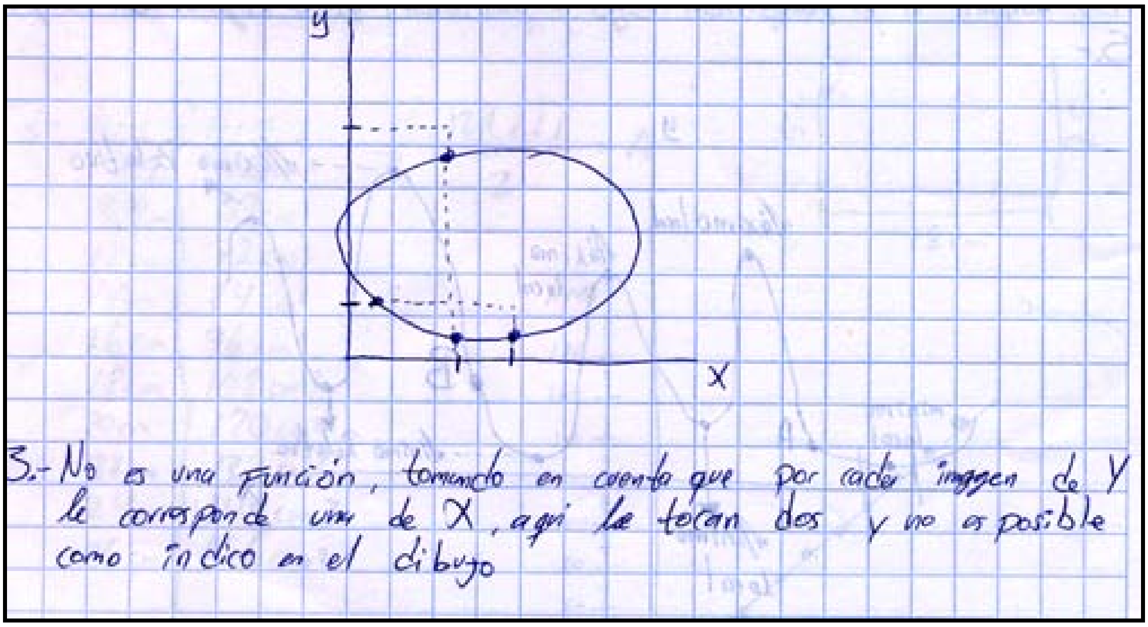
Investigador: ¿por qué?

Amparo: porque, los valores dependiente se repetían

Investigador: ¿cómo se repiten?

Amparo: ….

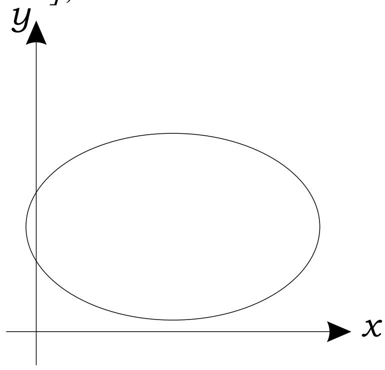
Marlene: mire maestro, yo aquí lo indiqué *[muestra su respuesta a la pregunta]*



Investigador: bien, correcto, para que se una función tiene que suceder que, a cada valor del dominio le corresponde uno y solo una valor de la imagen

Amparo: si, *[afirma entender y estar de acuerdo con la idea anterior]*

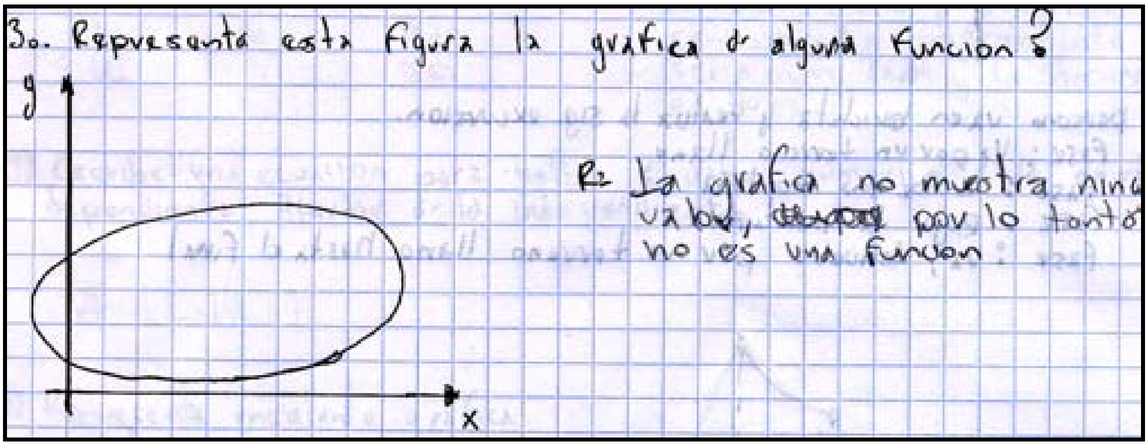
Investigador: y como pueden ver, a cada valor de x le corresponden dos valores de y *[muestra la figura 1 de la prueba],* entonces no es una función



Investigador: ¿se respondió esta pregunta bien?, *[señala a Carlos, José y Alejandro]*

José: si, si lo respondí

Carlos: bueno, ya lo entiendo, me doy cuenta de que no lo expresé así *[observa su repuesta y se percata de que no es correcto el razonamiento]*



Investigador: ¿existe alguna otra dificultad con alguna pregunta del examen?

[Todos observan las respuestas del examen]

[No hay comentarios sobre otras dificultades]

Investigador: entonces las preguntas de mayor dificultad fueron la del rectángulo y….

José: la de función *[en referencia a la pregunta No 3 de la prueba]*

Investigador: ¿qué les pereció el examen?, ¿se ajusta a lo estudiado en la unidad?,

Amparo: si se ajusta, está bien

ANEXO 24 (continuación)

Investigador: ¿se ajusta?

Marlene: es como una parte del cuadernillo *[referencia a los materiales: de clase y material de trabajo extraclase]*

Carlos: un repaso

Amparo: es como un resumen de las clases

Investigador: ¿Qué creen que faltó de preguntar en el examen?

Marlene: nosotros temíamos que preguntara de formula pendientes, de calcular pendiente, pero dijimos no es posible porque no lo vimos como tal

Investigador: en efecto, el profesor realizó solo un ejercicio cuando explico el concepto de pendiente, nunca fue el interés del profesor

Marlene: si, así fue, se tomó parte del programa

José: yo pensé que vendría más de función

Investigador: eso pensaste, pero hay muchas preguntas de funciones, en todas hay funciones involucradas

Amparo: yo pensé que vendrían más problemas

José: yo me refiero a como dice Marlene, de problemas

Investigador: por el tiempo del examen solo se puede preguntar lo más significativo

José: si este examen me lo ponen recién entrando a la Facultad, no sabría como responderlo

Investigador: lógico, recién llegados es difícil de responder

José: por ejemplo esta pregunta, ¿qué es una función?, no la podría responder. Pero yo creo que este curso [*referencia a la unidad]* ha ayudado bastante

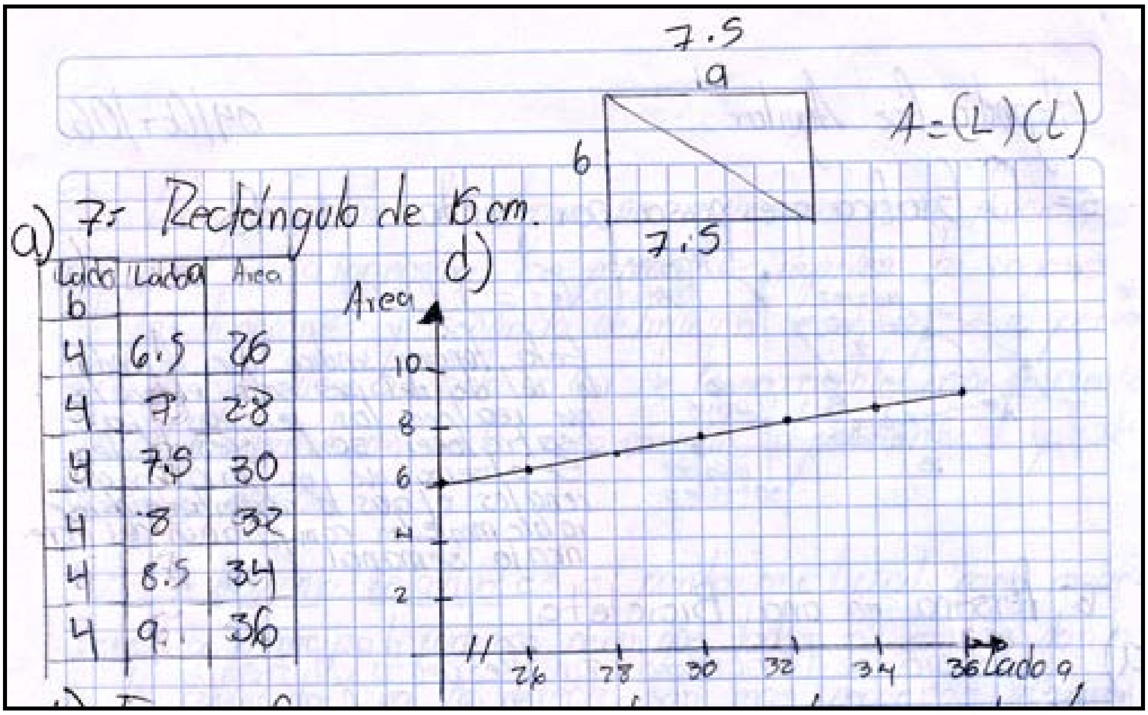
Investigador: si es cierto, pero eso se podrá medir en el curso de Cálculo, cuando estudies esta asignatura te vas a percatar de si este curso te ayudó o no te ayudó

Investigador: ¿alguna pregunta o comentario sobre el examen?

Marlene: quiero saber que escribieron en la fórmula de la pregunta del rectángulo

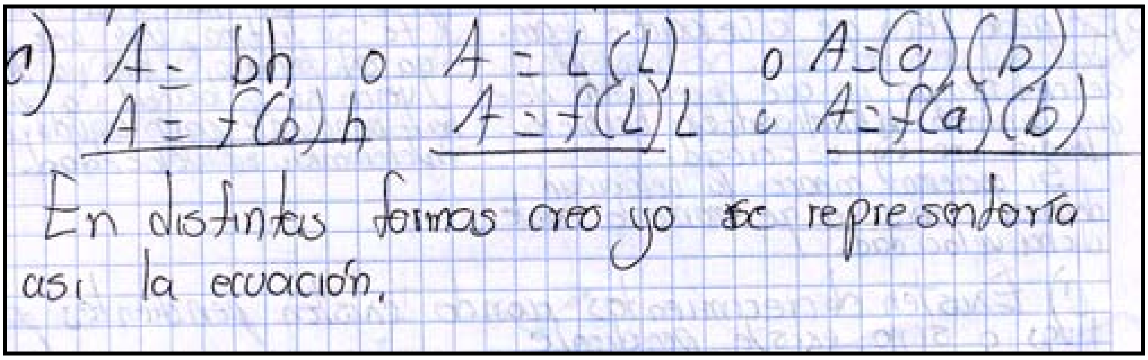
Alejandro: yo hice lo del rectángulo, lo dividí en dos triangulitos, en cateto opuesto y adyacente *[muestra su respuesta]*

ANEXO 24 (continuación)

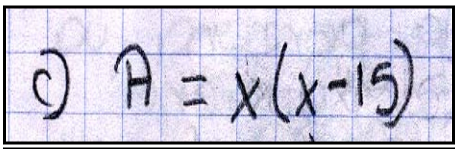


Investigador: ¿calculas el área como lo hace José, dividiendo entre dos?

Alejandro: no, pero veo que no está bien *[observa su respuesta sobre la ecuación]*

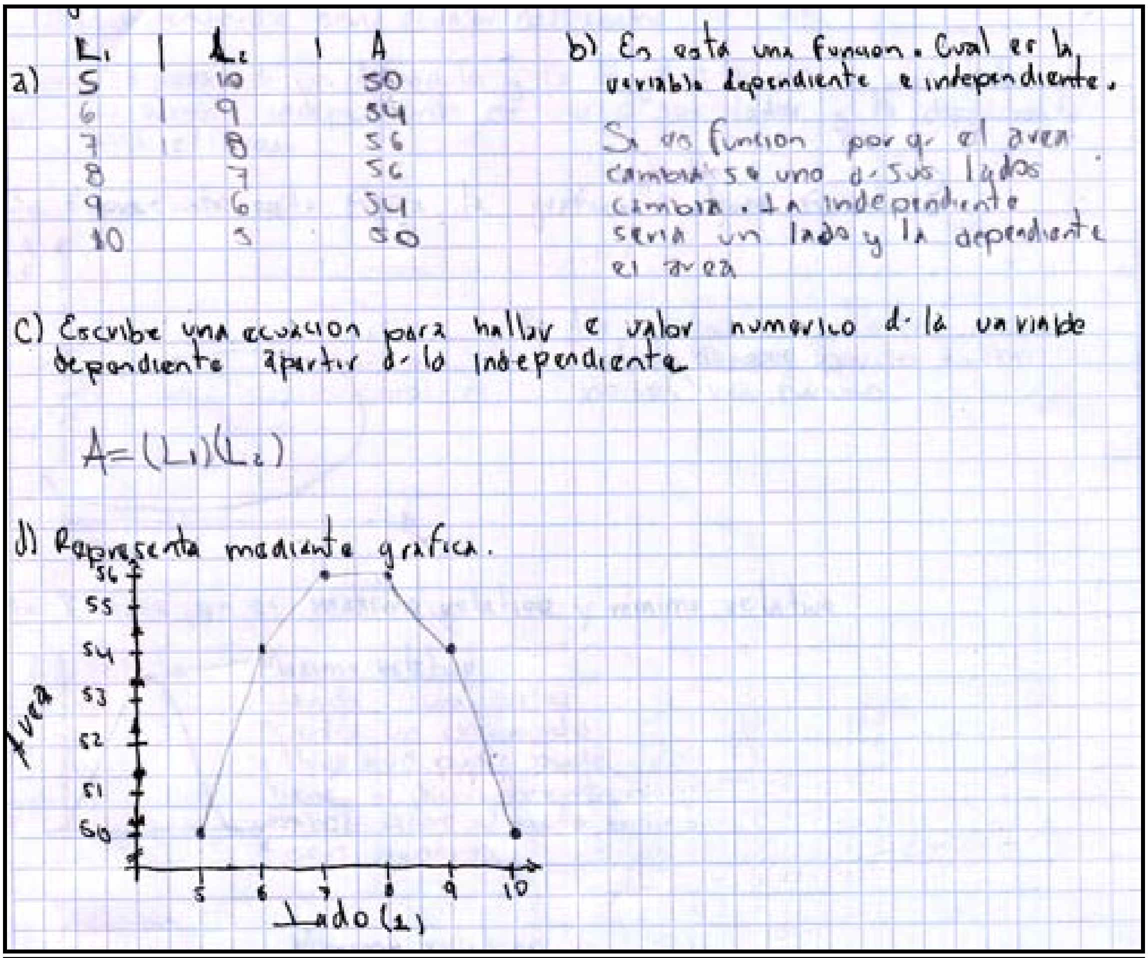


Amparo: yo lo hice así, *[muestra sus resultados]*



Investigador: correcto, esa es la respuesta correcta

Carlos: yo nada mas puse esto *[muestra sus resultados]*



L_1	L_2	A
5	10	50
6	9	54
7	8	56
8	7	56
9	6	54
10	5	50

b) Es esta una funcion. Cual es la variable dependiente e independiente.

Si es funcion porq el area cambia si uno d. sus lados cambia. La independiente seria un lado y la dependiente el area

C) Escribe una ecuacion para hallar e valor numerico d. la variable dependiente apartir d. la independiente

$A=(L_1)(L_2)$

d) Representa mediante grafica.

Investigador: bueno, lo expresas en función de los dos lados, es decir L_1 y L_2. En el caso de Amparo la idea es más completa, en tanto que responde a lo que se pregunta en el examen

José: bueno yo tomé lado base por lado altura entre dos

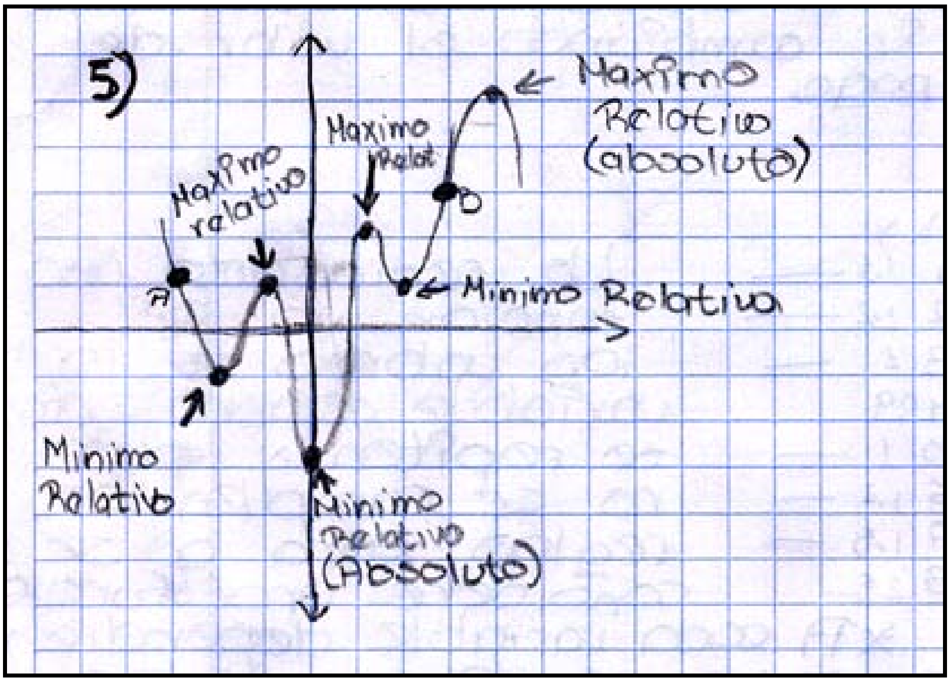
[todos se ríen]

Amparo: yo tengo una duda, en hacer la grafica que pase por los puntos A y B *[hace referencia a la pregunta No 5 de la prueba]*

Investigador: ¿Qué respondes en esa pregunta?

Amparo: Hice esto *[muestra su respuesta a la pregunta]*

ANEXO 24 (continuación)



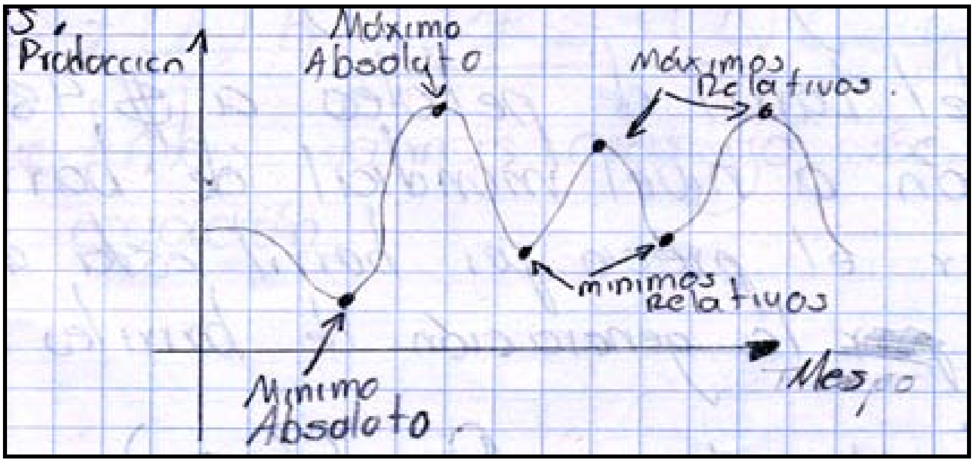
Investigador:, muy bien, ¿todos coinciden están de acuerdo con la respuesta de Amparo?

[Reconocen que la respuesta es correcta]

Alejandro: bueno, ¿se puede poner algo real?

Investigador: ¿qué es lo que pones real?

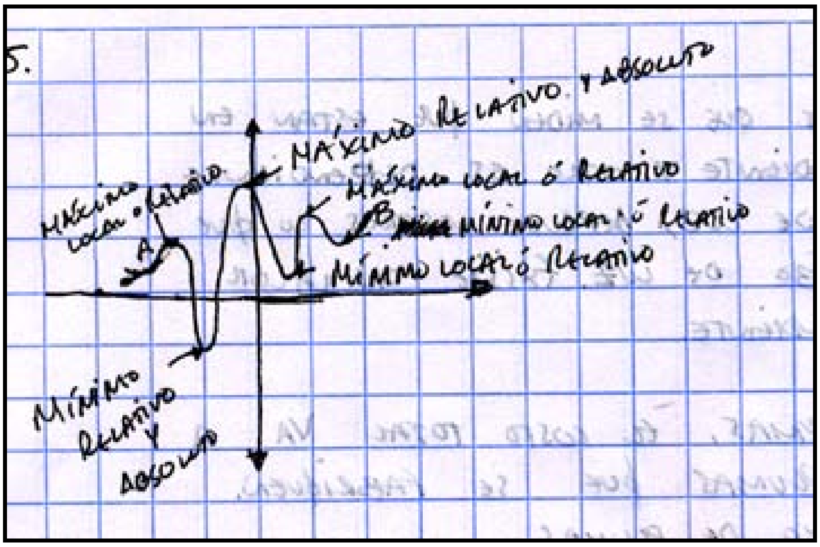
Alejandro: puse, en los momentos en que personas tienen más dinero *[muestra su respuesta]* semanalmente y quincenalmente, hice que el punto A fuera el mínimo, está al inicio del mes



Investigador: ¿hay un mínimo ahí?

Alejandro: si, el A, esta es la primera semana del mes, termina la semana y la persona ya no tiene dinero

José: yo me basé en esto *[muestra su respuesta a la pregunta No 5]*



Investigador: yo les pregunto ¿las respuestas de ustedes, tienen al menos un máximo y un mínimo relativo?, claro que debe pasar por los dos puntos

[Todos reconocen que si,que tienen una máximo y un mínimo relativo]

Investigador: muchas gracias *[El investigador agradece la colaboración, de todos, durante toda la unidad]*

ANEXO 25. Algunas notas de la observación no participante en clase.

NOTAS ESCRITAS EN LAS OBSERVACIONES DE CLASES

Clase 6. Secuencia 2

Esta es la clase inicial de la Secuencia No 2: "Estudio de los fenómenos de cambio".

Actividad 8. El profesor inicia con una explicación sobre la importancia de responder de manera consecutiva y ordenada las actividades consecutivas 8.1, 8.2, 8.3 y 8.4. Se les pide que, de manera individual, den respuesta a la interrogante: ¿Cómo sabemos cuanto debe pagar cada uno de los viajeros?

Tarea 8.1: Se observan dificultades, en tanto que algunos estudiantes no comprenden el proceso para determinar el pago individual de cada pasajero (viajero). Por ejemplo:

a) Se intenta calcular el pago para 15 viajeros y después multiplicar este resultado por diferentes variantes de número de viajeros
b) Se asume que viajan 15 personas.

Tarea 8.2: Después de calculado el precio que debe pagar cada viajero, para diferentes variantes de participación en la excursión, existe la dificultad para imaginar el comportamiento aproximado de la gráfica: Por ejemplo:

a) Se asume una línea decreciente, pero constante
b) Se utiliza una gráfica de barras

Tarea 8.3: En ella se ponen de manifiesto la dificultad con la tarea 8.1. El profesor debe colaborar con algunos de los estudiantes para realizar la tabla de valores.

Tarea 8.4: El profesor solicita a dos estudiantes escribir la respuesta de esta tarea el la pizarra. Se pudo observar que:

a) Los dos estudiantes trazan la grafica de línea, es decir se unen los puntos de coordenadas (cantidad de viajeros, precio individual). El profesor pregunta por la existencia de un error en la gráfica y los estudiantes no se percatan, debido a que se asumen valores reales en el eje horizontal (cantidad de viajeros) y en el eje vertical (precios que se pagan)
b) El profesor insiste en preguntar ¿cuáles son los valores posibles para el eje horizontal?, se comprende por un estudiante que deben ser valores enteros entre 1 y 15, sin embargo no existe comprensión en el error de las gráficas.
c) Ante esta situación el profesor debe responder y adecuar la tarea a una gráfica de puntos inconexos

Actividad 9: El profesor explica el sentido del ángulo propuesto y de la actividad a realizar, comparándola con la actividad anterior.

ANEXO 25 (continuación)

Tarea 9.1: Los estudiantes otorgan demasiada relevancia a la relación que existe entre los ángulos del triángulo recto. El profesor les plantea que, a afectos de este problema, no es relevante y pregunta: ¿cómo calcular el área de un triángulo? Se responde, casi todos lo entienden, que A = b*h/2

El profesor pregunta: ¿Qué ocurre cuando x crece? Se observa una dificultad en las respuestas:

a) todos reconocen que el área crece, nada más
b) para un estudiante el área sigue igual aunque cambie el cateto menor, y como consecuencia el cateto mayor
c) se plantea que existe proporcionalidad, es decir pendiente constante
d) se confunde la proporcionalidad entre el área y la longitud del cateto menor con la proporcionalita directa que existe entre la longitud de los catetos, es decir *x* y *3x*

El profesor insiste en que la forma del crecimiento del área, en virtud del crecimiento de la longitud del cateto menor no es proporcional. Ejemplifica con dos variables: x y x^2, con el uso de la tabla de valores, hace notar que el crecimiento de loa valores no es proporcional. Solo un estudiante se percata de que el cambio es constante en la longitud del cateto pero el área cambia no constante, es decir que cambia cada vez más

Por otra parte existe confusión sobre el comportamiento de la curva a trazar, inducida por la pendiente constante de la hipotenusa del triángulo

Tarea 9.2 Como consecuencia de lo antes expuesto, para los estudiantes es difícil responder a esta tarea

Clase 7. Secuencia 2

El profesor motiva la necesidad de responder, la actividad 9, que fue iniciada en la clase anterior. Recuerda las condiciones del problema objeto de estudio

En la clase anterior se pudo dar respuesta a la tarea 9.1, es decir que ya conocemos que el área del triángulo se como $A = 3x^2/2$, se conoce además que ésta varía en dependencia del valor que asume el cateto menor. Se puedo comprobar que la forma de la gráfica que debemos obtener no es lineal, en tanto que a incrementos constantes de x, el valor de A no crece de manera constante.

Los estudiantes participan en la elaboración de la gráfica en el pizarrón. Se entiende que los puntos (coordenadas) en el plano cartesiano deben ser unidos con una línea (curva) que tiende a subir a medida que asignamos valores mayores en la longitud del cateto menor.

Actividad 10: Se pide a los estudiantes que respondan de manera individual

Est 1: realiza la tabla en el pizarrón, todos coinciden en esencial con sus resultados

ANEXO 25 (continuación)

Est 2: traza la grafica en el pizarrón, se reconoce que posee un comportamiento lineal y que el costo aumenta a medida que se fabrican mas pares de zapato

Profesor: ¿Cuál es la pendiente'.

Salón: existe reconocimiento en que su valor es 50.5, a partir de la expresión algebraica $Ct = 50.5q$. Sin embargo, no se reconoce cual es el intercepto de la expresión lineal, idea que no es comprendida a plenitud

Actividad 11: Se solicita trabajar de manera individual y posteriormente varios estudiantes copian en el pizarrón sus resultados individuales.

Se observa que no se tiene hábito y/o habilidad en el manejo de los ejes y sus escalas de medición. En un fragmento de la clase ocurrió el siguiente diálogo entre el profesor (P) y los estudiantes (E)

Profesor: ¿qué dificultades se observan?

E1: esta mal, las escalas son incorrectas

P: ¿tienen importancia las escalas?

E2: para poder ver bien el comportamiento

E3: el eje de población no puede asumir cualquier valor

E4: si se puede porque es en miles

E5: no se puede unir

E6: tiene sentido en el eje de las personas, porque son datos aproximados

El profesor insiste en que unir los puntos proporciona una imagen aproximada de lo que puedo ocurrir en cualquier intervalo de tiempo (datos no aportados en el problema). Se observa que no existe, en general, buenos hábitos de graficación. Se solicita trabajar en casa la gráfica

Clase 8. Secuencia 2

Continuamos con la**acti vidad 11**. Se solicita que se muestre la gráfica en el pizarrón

P: ¿por qué no hay crecimiento en línea recta?

E1: porque somos seres humanos

El profesor explica que para cualquier población el comportamiento no es lineal. ¿Qué ocurriría si fuese una pendiente constante?

ANEXO 25 (continuación)

E2: no es posible porque eso significa que los nacimientos y muertes aseguran un equilibrio

P: ¿por qué no es factible?, ¿Por qué en cada período no puede ocurrir los mismo?. Se observa que no se comprende las ideas de E1 y del profesor

Se insiste por el profesor la idea de que entre mas grande es la población hay mas probabilidad de que se reproduzca. La población va creciendo y conforme crece aumenta el número de parejas y por tanto de nacimientos. Es mayor le número de nacimientos que el número de muertes. La población cada año sube, pero cada año sube más que los anteriores

Esto queda como una duda para los estudiantes, no existe un recurso de explicación que sea entendible por ellos

Tarea 11.2. ¿Tiene sentido unir los puntos?

Se hace énfasis en que resulta incorrecto, pero unir nos permite tener una idea de lo que sucedió en años intermedios. Nos permite imaginar la población de algunos de los años no mostrados. Existe comprensión de esto

Actividad 12. Se trabaja de manera individual con buena comprensión del problema objeto de análisis. Se nota cierta habilidad ya en decidir como deben ser los ejes de coordenadas

E1 realiza una grafica invirtiendo los ejes, ganancia en el eje horizontal y precio en el eje vertical, resulta invertida

P: pregunta por las dificultades observadas:

E2 problema con la escala de los ejes
E3 tiene problemas para interpretar por otra persona
E4mejopr si se colocan los ejes de otra forma

Profesor plantea que es un tema convencional, en economía se viola esta regla

E5: muestra su gráfica con el precio en el eje horizontal y la ganancia en el eje vertical.

Se entiende por todos que da mejor idea que la anterior, se insiste por el profesor en que en ésta la ganancia al parecer depende del precio, idea que es de fácil comprensión por los estudiantes

El profesor insiste en que la manera de entender depende de cómo situamos los ejes, mejor entendimiento para los que la leen e interpretan. El problema fundamental está en las escalas de valores que se asumen por los estudiantes. Se nota mayor madurez en el trabajo, pese a que algunos tienen dificultades para graficar y necesitan del auxilio de su compañero más cercano en la clase.

Clase 9. Secuencia 2

En esta clase, última de la secuencia No 2, el profesor propone a los estudiantes que den respuesta a la actividad 13

13.1) Elabore una gráfica que relacione la cantidad de unidades por pedido y el costo total.

Con relativa felicidad los estudiantes resuelven esta tarea, se propone en el pizarrón su respuesta. No todos los estudiantes tiene en cuenta la necesidad de unir los puntos de la función mediante una línea, aunque se comprende su comportamiento

13.2) ¿Qué puedes decir del comportamiento del costo total?

Los estudiantes reconocen que la gráfica primero disminuye hasta el valor de las abscisas de 400, y posterior a este valor la línea tiende a aumentar

Clase 10. Secuencia 3

Esta es la clase inicial de la Secuencia No 3: "El concepto de función. Características de sus comportamiento". El profesor propone una lectura comentada sobre el contenido de esta secuencia. Se detiene para explicar que lo antes estudiado, en las actividades de la 8 a la 13, nos permite madurar las ideas que nos acerquen al concepto de función.

Insiste en que función es uno de los conceptos centrales de la matemática en particular y de la modelación matemática en la ciencia económica. Explica que, como se puedo apreciar existen cuatro formas esenciales de representar loa fenómenos antes estudiados, a saber: verbal, tabla de valores, gráfica y ecuación o formula.

El objetivo final es llegar a establecer la relación existente entre las magnitudes implicadas en cada una de las actividades, es decir una relación de dependencia.

Los estudiantes atienden a la explicación del profesor sin dar comentarios y no se toman notas sobre las ideas que escuchan.

<u>Actividad 14:</u> El profesor pregunta sobre la existencia de dudas y/o comentarios; en vista de que no hay ninguna aportación propone dar respuesta a la Actividad 14. Insiste en la existencia de una relación de causalidad, que no siempre es tan explicita en las actividades de la 8 a la 13.

- Sobre la actividad 8 algunos estudiantes dan sus criterios, para la mayoría queda claro que el precio que se paga depende de la cantidad de excursionistas.
- Con respecto a la actividad 9, para muchos estudiantes, las magnitudes que varían son: x (la longitud del cateto menor), 3x (la longitud del cateto mayor) y A (le área).

ANEXO 25 (continuación)

- Bajo la insistencia del maestro, en precisar las variables bajo estudio, se logra entender que las magnitudes que la relación de dependencia se establece entre la longitud del cateto menor y el área del triángulo.
- Sobre la actividad 10 se comprende fácilmente las magnitudes que varían.
- Sobre la actividad 11 los estudiantes reconocen que la población depende del tiempo y que no es posible pensar en una relación inversa de dependencia.
- En la actividad 12 se entiende que la ganancia depende del precio.
- En actividad 13, el costo depende de la cantidad de zapatos que se elaboran

El profesor introduce el concepto de variable, enfatiza en algunos ejemplos ya estudiados, y cuyos valores están comprendidos en un conjunto. Con la ayuda del recuadro anterior insiste en la idea de VI y VD. Con la ayuda de la actividad 8 profundiza en los posibles valores que puede tomar una variable específica, en este caso: número de viajeros. Explica porque a cada valor, de los posibles números de viajeros, le corresponde un solo valor de pago individual

Salón: escucha las explicaciones del profesor si comentario y/o preguntas. Al parecer se entiende todo; sin embargo el profesor se percata de que no se comprende bien y retoma un ejemplo que, aunque mas divertido, le es mas cercano a los estudiantes.

Ejemplo: supongamos que cada mujer del conjunto de todas las estudiantes del salón, puede elegir como pareja a un estudiante varón del propio salón. En este caso a cada mujer le corresponde un varón. Se introducen los conceptos de dominio e imagen de una función

Salón: se observa pronto que este ejemplo le es más familiar a los estudiantes, se comprende la idea: a cada muchacha le corresponde uno solo, pero cada varón puede ser elegido por mÁs de una muchacha.

Profesor: ¿quien puede plantear otro ejemplo? No se plantean otros ejemplos de relaciones que sean o no funciones

Profesor: Otro ejemplo puede ser si tenemos en un conjunto ambos padres de una familia y en otro conjunto los cinco hijos. La relación "*padre de",* se observa que a cada padre le corresponde mas de un hijo, entonces no estamos en presencia de una función

Ejemplo: La relación: *"tener por progenitor a"*, vale preguntar de nuevo ¿es una función? El profesor explica porque no es una función, dado que no se muestra signos de comprensión de estas ideas. Dos observaciones importantes son:

1) La mayoría de los estudiantes no toman nota sobre estas explicaciones
2) no existen preguntas y por tanto nos queda la interrogante: ¿es comprensible o no el concepto de función?

ANEXO 25 (continuación)

Clase 11. Secuencia 3

En esta clase se pretende estudiar la variación de una función. Y el profesor comienza por preguntar sobre el concepto de función. ¿Qué entiendes por función?

E1: Alejandro dice: es una relación de dependencia entre una variable y otra E2: la relación tiene que ser de uno a uno E3: a cada elemento del dominio le corresponde un elemento del contradominio.

El profesor plantea la relación existente entre el conjunto de todos los mexicanos y el conjunto de los CURPs de México. Además de ser una función es una correspondencia uno a uno

El profesor introduce la idea de crecimiento y de decrecimiento de una función, a partir de cómo varían los valores de la variable dependiente

Actividad 15: Se puede observar muy buena comprensión de las tareas a realizar, algunos aportan su respuesta de manera verbal (con sus propias palabras). Se observa algunas imprecisiones en el lenguaje utilizado en las respuestas. Se insiste en la importancia de reconocer los cambios que sufre el comportamiento de la función, que permitan generar, posteriormente, nuevas ideas conceptuales

Actividad 16: Los estudiantes responden con seguridad, aunque en ocasiones con ideas imprecisas en la expresión verbal. El profesor introduce la idea de función constante y surge la duda de que si la VI puede disminuir

Se observa una mayor comprensión de las ideas de esta clase, resultan ser más cercanas a las ideas previas de los estudiantes. Aumenta el número de preguntas sobre el contenido estudiado.

El profesor insiste en la diferencia entre puntos extremos locales o relativos y puntos extremos absolutos, utiliza para ello el recurso nemotécnico de la comparación de diferentes montañas de México

Actividad 17: No existen problemas en la comprensión de las tareas, se responde a ellas con relativa facilidad

El profesor introduce el concepto de punto extremo de una función en base a los ejemplos anteriores. Resulta de fácil comprensión para los estudiantes. Por medio de una gráfica con puntos máximos y mínimos se insiste el las ideas que las características que están presente en la función, y con las que podemos afirmar o negar la existencia de estos puntos

Actividad 18: Todos los estudiantes, de manera individual, comprenden y pueden dar respuesta alas tarea asignadas en la actividad

El profesor da por terminado el tema inicial del curso

ANEXO 26 Notas Escritas por el profesor en el diario de clase.

NOTAS EN EL DIARIO DEL PROFESOR

Introducción a los Métodos Cuantitativos / DIARIO DEL PROFESOR

* Miércoles 23/Ago/2006:

1) Buena motivación de los estudiantes, pocos tenían expresión de disgusto y muchos mostraron interés.

2) Hay que pensar qué hacer con aquellos que se adelanten con la resolución del material de clase. Una opción es pedirles que ayuden a sus compañeros.

3) El registro de las participaciones se ve difícil. Hacer gafetes facilitará la identificación de los estudiantes que participen.

ANEXO 26 (continuación)

* Viernes 25/Ago/2006:

1) Es necesario planificar bien las sesiones de los viernes, qe sun solamente de una hora.

2) De la exposición de los resultados correctos del diagnóstico puede observarse que no se debe exponer rápidamente.

* Lunes 28/Ago/2006:

Prueba inicial de la Unidad Didáctica sobre funciones.

* Miércoles 30/Ago/2006:

* Inicio de la Unidad didáctica sobre funciones.

* Problemas de disciplina con un pequeño grupo de estudiantes.

* Se observa que les cuesta trabajo seguir un proceso de razonamiento (deducción de la ec. de la recta).

ANEXO 26 (continuación)

Lunes 04/Sep/2006:
Creo que tengo que motivar más la participación en clase, en especial, de los alumnos que no participan.

* Miércoles 06/Sep/2006:
Hice el ritmo de la clase mucho más lento y parece que se entendió mejor.

* Viernes 08/Sep/2006:
Motivar la participación y la discusión es interesante para ellos; sin embargo, cuesta trabajo hacer que guarden silencio mientras uno de ellos habla. A mí me causa un poco de malestar el desorden, me desespero fácilmente. No soy muy bueno para tratar con ellos.

ANEXO 26 (continuación)

Lunes 11/Sep/2006:
Hoy me fue dificil explicar el problema de las botellas, en particular, en su relación con el concepto de pendiente. Aunque, al final, parece que en tendieron.
Me preocupa la alumna Joana Bautista, en el sentido de que le echa ganas, se esfuerza, pero siempre tiene malas ideas. Hay que motivarla, que darle confianza para que llegue hasta el punto en que las ideas comiencen a ser buenas.

ANEXO 26 (continuación)

*Lunes 18/Sep/2006:

Varias preocupaciones:

1) Tareas perdidas.

2) Problemas para que los alumnos entiendan el lenguaje, les parece impreciso.

3) El punto 2) puede provocar descontento respecto a la forma de calificar.

4) No puedo manejar las participaciones en el sentido de ~~[illegible]~~ que tiendo a responder yo, cuando hay demasiadas ideas.

ANEXO 26 (continuación)

Valoración final (13/Oct/06)

En general, se observa una buena disposición de los estudiantes con respecto al curso; sin embargo, es necesario señalar que un porcentaje no bajo de ellos sigue mostrando una actitud "tradicionalista" de flojera.

También, de la evaluación de la unidad didáctica se desprende que no todos los estudiantes dominaron el concepto de función y que muchos siguen presentando dificultades serias para la representación gráfica y/o verbal de fenómenos de cambio. Sin embargo, esto podría atribuirse

ANEXO 26 (continuación)

a la actitud de los estudiantes mencionada arriba, porque los estudiantes que constantemente trabajaron y participaron en clases sí lograron alcanzar los objetivos de aprendizaje planteados.

También es de considerarse la dificultad inherente al concepto de función.

En lo general, me siento satisfecho con lo que hemos alcanzado en esta unidad didáctica y considero que, [illegible] algunos ajustes, promete ser una opción para resolver el profundo problema de

ANEXO 26 (continuación)

los cursos del Área de Métodos Cuantitativos en la Fac. de Economic de la UV.

ANEXO 27. Trascripción de la entrevista al profesor.

ENTREVISTA REALIZADA AL PROFESOR

Investigador: El objetivo de esta entrevista es conocer tu criterio sobre dos aspectos: la unidad didáctica como instrumento de la enseñanza, que tanto sirve, que dificultades tiene y el otro es, el proceso de aprendizaje en la propia unidad didáctica; cómo lo valoras, que dificultades, qué problemas hay. ¿Cuál es tu parecer sobre todo el proceso?

Profesor: Empezamos por el proceso de aprendizaje. Primero que nada, el grupo fue demasiado grande ese es el principal problema que tuvimos, la disciplina fue bastante difícil de controlar, y eso yo creo que es el reflejo de una cosa un poco más profunda, que es el desinterés de muchos estudiantes. A mi hubo dos cosas que me llamaron la atención ahora que veía las notas que escribí en el diario; al principio veía o pensaba que tenía una buena motivación y ciertamente logramos eso en un buen porcentaje de los muchachos (estudiantes). Pero hubo una parte del grupo, que eran normalmente los mas desordenados que no están en disposición de estudiar, a mi me parece que el problema ahí es mas grave, más de fondo porque no saben que hacen en la escuela, no tienen mucha idea para que están estudiando; de manera que con un grupo tan grande y con estudiantes de esa mentalidad era difícil controlarlo. La otra cosa que me llamó la atención fue, que había anotado que teníamos que pensar que hacer con los alumnos que se adelantaran en la resolución del material de clase, nunca se adelantaron ese no fue un problema, por lo que no tuvimos que pensar que hacer.

Investigador: si, es cierto.

Profesor: A mi me parece que es un reflejo de toda la misma cultura de la enseñanza, el estudiante viene y trata de cumplir, y con eso como sobrevivir y con eso se da por bien servido y realmente no es muy consciente de lo que tiene que aprender o no, creo ese fue el principal problema que tuve. De ahí en fuera, si encontré algunas dificultades para la comprensión de ciertos conceptos; hay un problema que viene del lenguaje, hay simplemente palabras que no se entienden.

Investigador: ¿te refieres al lenguaje matemático?

Profesor: no, al lenguaje cotidiano; simple y sencillamente hay palabras que no se entienden, problemas que están planteados con palabras que no podían resolver porque no sabían que significaba algo o lo respondían mal porque tienen una concepción errónea del significado de las palabras.

Investigador: por ejemplo: cuando se habló de temperatura estable, cuando se habló del caso del problema de las bolsas de azúcar en términos de precio.

Profesor: sí, sí, ¿Qué es lo que conviene más en términos de precio?, como que, a mi me sorprendió que siendo estudiantes de economía, los lados adyacentes. Bueno, hasta había estudiantes que no sabían que era el perímetro lineal.

Investigador: ¿Pero crees que ahí influyó mucho entonces el nivel de conocimiento del lenguaje?, ¿cómo?

ANEXO 27 (continuación)

Profesor: sí, es definitivo. También esto va más allá, no hay una costumbre de hacer una lectura de comprensión. Están acostumbrados a leer y ya

Investigador: ¿no hay interpretación de la lectura?

Profesor: leen sin preocuparse del significado de lo que leen, creo que eso.

Investigador: Por ejemplo, de las tres secuencias: una primera secuencia que es lectura interpretación de graficas, la segunda secuencia que es el estudio de fenómenos de cambios, donde se dan varias actividades, y la tercera secuencia que es la mas importante por ser el concepto de función. Esta última no tenía muchas actividades sin embargo se alimentaba de la primera y sobre todo de la segunda. Hay en tus notas de clase (en tu diario) una nota muy interesante: "*es que el concepto de función es muy difícil de comprender*".

Profesor: Sí, me acuerdo, yo creo que ahora tengo mas evidencia de esa dificultad; hay una cosa que me sorprendió, me parece que es más fácil para ellos comprender que significa que una función sea decreciente a comprender el concepto mismo de función. Cuando tu les planteas un problema, digamos en el desarrollo del curso posterior a esta unidad didáctica donde ellos tenían que descubrir que había una función en juego y encontrar la expresión algebraica para ello, o por lo menos una descripción verbal o una tabla tenían mas dificultad que para resolver problemas donde ya sabían que había una función en juego, podían ver la fórmula, podían ver la gráfica o podían ver la tabla y reconocer que era creciente o decreciente. Un ejemplo, les costó trabajo cuando vimos logaritmos, ahora al final del curso, darse cuenta que la aplicación que a un número lo mande su logaritmo es una función; eso les costó mas trabajo que después descubrir que el logaritmo es una función creciente.

Investigador: Cuando está dado el concepto y enunciado como función, sea como tabla de valores, como gráfica a partir sobre todo la gráfica el estudiante haya un recurso de explicación, ¿no?

Profesor: sí.

Investigador: Pero cuando no estaba dado, por ejemplo en los problemas de la prueba final, cuando se preguntaba si la velocidad dependía del tiempo había una explicación del tipo: no, el tiempo depende de la velocidad o la velocidad depende de las condiciones de terreno (en aquello de subir la montaña y bajar). El concepto de función no se enuncia, sin embargo está presente. Los alumnos aún habiendo explicado la función como una relación entre dos variables después decían no, el tiempo depende de la velocidad; claro está que toman el tiempo total que dura la excursión.

Profesor: Sí, hay una dificultad del lenguaje, hay una dificultad para contextualizar bien las palabras, en el primer ejemplo me llamó la atención no les alcanzaba la comprensión del concepto de función como tal, no les alcanzaba para que fuera una guía, para que el mismo concepto, la misma idea abstracta que tienen de función en general, no son capaces de utilizarla como una guía y plantear problemas específicos. Es decir, ¿de que tiempo me estarán hablando, del tiempo transcurrido durante toda la excursión o del tiempo, que va cambiando o que va moviéndose?, que es una variable durante el recorrido. Entonces ahí hay recurso, hubiera podido ser pensar que me dice la definición de función, empezando en pensar que hay cantidades que cambian o algo que la interpretación segunda es la correcta. Pero incluso hay una dificultad que a mi me sorprendió al final con esto de los logaritmos; me llamó mucho la atención, más allá de las dificultades algebraicas que persistieron de hecho, yo podría decir que la parte de aritmética y álgebra me siento un tanto desconcertado con el curso porque los alumnos que llegaron sabiendo algo de aritmética y algo de álgebra de antemano, teniendo cierta habilidad.

Investigador: ¿estás hablando del diagnóstico?, ¿los que tenían cierta ventaje de álgebra y aritmética?, ¿no la mostraron después?, ¿a eso te refieres?

Profesor: no no, me refiero a que quienes fueron capaces de aprender más fueron aquellos que ya sabían algo, quienes estaban completamente confundidos realmente aprendieron muy poco o no aprendieron nada, quedaron casi igual.

Investigador: si, te entiendo

Profesor: y entonces, más allá de esta dificultad operativa a mi me llamó mucho la atención en el tema de los logaritmos; es que este tema me sirvió para darme cuenta de muchas cosas porque era requerir todo el conocimiento previo del curso, entonces esta dificultad que yo decía, de no darse cuenta de que algo es una función.

Investigador: un concepto ¿entonces el concepto está presente aquí?

Profesor: el concepto de función no lograron aplicarlo o dominarlo al grado de utilizarlo en la práctica; incluso antes, esta dificultad que te decía hace rato que es más fácil para ellos diferenciar que una función es creciente o decreciente, que reconocer que es una función me pasó con esto de los logaritmos. Yo comencé dándoles la definición del logaritmo en base de un número x, pues como el exponente que tienes que ponerle a la base para que el resultado sea x. Y entonces para que practicaran la definición comencé haciéndoles algunas preguntas ¿el logaritmo en base 2 de 4? pues es dos, porque 2 porque dos al cuadrado es 4; ¿el logaritmo en base 2 de 8?, ah pues es 3 porque el logaritmo 3 al cubo es 8. Entonces, hasta ahí iba la dificultad del leguaje, al final del curso después de un semestre de estar hablando, de estar removiendo el lenguaje, hubo dos o tres que no sabían que al cubo significa poner un exponente tres, al cuadrado significa poner un exponente dos.

Investigador: tu partes del hecho de que eso ya se sabía.

Profesor: si, efectivamente

Investigador: ¿el problema entonces era que no se sabía que era elevar al cubo?

Profesor: algunos (dos o tres), muy pocos pero si lo lograron, después de poner estos ejemplos así muy sencillitos les quise mostrar que no todos los logaritmos son calculables fácilmente. Entonces les pedí el logaritmo en base 2 de 5, los dejé pensar un

ANEXO 27 (continuación)

rato, guiamos la discusión. Y después de un momento algunos me dijeron que era un número entre dos y tres, que debía ser 2 punto algo, porque el logaritmo en base dos de cuatro es dos y el logaritmo dos de ocho es tres, como 5 está entre 4 y 8 y el logaritmo dos de 5 debe estar entre dos y tres. Se dieron cuenta incluso sin saber que el logaritmo era una función, porque yo no lo había dicho nunca pero lo vieron en el comportamiento creciente del logaritmo, lo intuyeron.

Investigador: ¿estaba graficado?

Profesor: no, no estaba graficado, fue a partir de ejercicios; un poco en la discusión les hice observar que si dejamos la base fija y el exponente crece, entonces el resultado final va creciendo o sea sería hacerles ver que la función inversa del logaritmo (la función exponencial es creciente), eso es lo que les hice ver y algunos entendieron que también el logaritmo es creciente. Ellos se dieron cuenta que el logaritmo debía ser creciente. Pero después, a la hora que yo escribí en el pizarrón el logaritmo es una función creciente, algunos (ahí sí varios, la gran mayoría) del grupo tenían problemas para entender que el logaritmo era un función.

Investigador: es decir, que si en un enunciado, en un problema, en un contexto el profesor dice que hay una función el alumno de alguna forma trabaja con el concepto; sabe que existe el profesor lo dice y por lo tanto continúa. Pero en tanto el profesor no plantee esto ¿hay dificultad para entenderlo?

Profesor: incluso si se los plantea como yo lo hice (sin mayor preámbulo) los desconcierta.

Investigador: hay algunas preguntas, que están en la prueba final, que están en la unidad sobre el concepto de función. Algunos estudiantes respondían: *"es una relación entre variables"* otros decían *"es una relación de variables donde una depende de otra*" y otros llegaban a decir *"es una regla que asocia a cada valor de la unidad independiente uno y un solo valor"*. Pero cuando en una pregunta como: *¿este dibujo que está aquí es una función?,* los que habían incluso enunciado la regla lo olvidaban, se olvidaban de ella, e incluso recurrían a cosas como: *"este dibujo no lo vi en clase"*. Todo esto indica que los alumnos se fijan más en cuestiones visuales, porque el concepto de extremo también tiene ese problema. Yo le propongo a un estudiante un dibujo y le pregunto *"¿dónde están los puntos extremos locales?"* y casi todos van a los "*piquitos*" y dicen que son los puntos extremos. Sin embargo, les pides enunciar el concepto te dicen que el valor mas alto, o sea, aquí también volvemos a lo mismo. A mi parecer tienen una dificultad para expresarse, aún cuando entiendan la idea, no tienen un recurso dentro del mismo lenguaje que les permita una lógica de su explicación, su argumento falla.

Profesor: sí, tampoco tienen y me parece claro después de esto su manera de expresar o de estructurar bien sus ideas.

Investigador: En esta última secuencia, en la definición de extremos tú volviste sobre los problemas y empezaste a preguntar *"¿qué es una función?*", según las ideas de: variabilidad, crecimiento, decrecimiento. Yo observé también que, en una parte de la unidad planteas: "*A partir de la experiencia con este ejemplo podemos decir que: una*

ANEXO 27 (continuación)

función y = f(x) posee un máximo local en el punto de la abscisa x = a si f(x) < f(a) para todos los puntos x próximos al valor a"

Sin embargo, no hay una respuesta sobre extremo que tome, como recurso, esa definición. Por el contrario todos llegan a decir que es extremo (visualmente lo vocalizan). Cuando hablan del máximo y del mínimo muchos van con la idea que: "*si la función va creciendo y después decrece es un máximo*" y viceversa es un mínimo; otros hablan de una vecindad, pero la gran mayoría lo entienden por crecimiento.

<u>Profesor</u>: Sí, eso también es como una explicación que está más asociada con la idea visual o con la idea, digámoslo así, experimental; *"¿cuándo llegas hasta el punto más alto del cerro?"*, pues cuando va llegando a un determinado punto y después baja, llega hasta la cima del cerro.

<u>Investigador</u>: Hay también problema con la pendiente, no obstante aquella clase con las diapositivas; cuando se intenta interpretar aquella pregunta de los dos coches, se asocia un poco a la altura. Una cosa que yo observé es que no asocian el concepto de velocidad con distancia y tiempo, con espacio y tiempo. Si tu le preguntas fuera de este contexto a un alumno, por ejemplo en una clase de física te dice que la velocidad es igual a espacio entre tiempo, todos lo reconocen. Pero en este caso muchos se fijan en la imagen visual, la altura. La línea que traza el coche A estaba por debajo del coche B y por tanto, no importa la pendiente, tenía menor altura. Y cuando las líneas se interceptan la mayoría de las respuestas es: "*es la misma velocidad*". Es un poco lo visual, ¿que crees tú que pueda estar influyendo?

<u>Profesor:</u> En este caso me parece que hay una desconexión entre el concepto de pendiente y su significado cualitativo, pero inclusive geométrico. A mi me parece que el problema con el concepto de pendiente podría ser más delicado que incluso el concepto de función, y justo el viernes me pasó con una alumna que no tomó el curso. Ella está presentando su examen de última oportunidad de cálculo I y en un problema le pedía encontrar la tasa instantánea de cambio de una cierta función. La alumna se levantó del asiento y me preguntó que tenía que hacer ahí; yo me di cuenta tratando de orientarla un poco sin darle la respuesta de que el problema no era solamente que no asociara a la derivada con la tasa instantánea de cambio, sino más grave era que no había entendido la tasa promedio de cambio de una función. Por eso no podía pasar a la siguiente etapa, que era ver que la tasa de cambio también puede cambiar. A mi me parece que ahí hay una de las claves para la explicación, pero que no hemos podido afinar bien, yo siempre insisto en esta idea de que la tasa de cambio es constante la función de lineal y la tasa de cambio no es constante la función no es lineal.

Pero esta idea que fue planteada en el curso, justo esta idea no se entendió y el ejemplo es este problema de los automóviles, porque les insistimos varias veces en que vieran de que si la tasa de cambio era constante entonces era una línea recta y viceversa, si era una línea recta la tasa de cambio era constante. En este problema era línea recta las tres historias de los automóviles o mejor dicho, la relación distancia contra tiempo de los automóviles era línea recta y entonces ellos implícitamente ellos están diciendo en sus respuestas, implícitamente, que la pendiente está cambiando.

ANEXO 27 (continuación)

Investigador: Algunos que reconocen bien que el coche A tenía mayor pendiente, después dicen que es igual. Pero yo recuerdo la clase, que a mi me gustó mucho en lo personal, y recuerdo (vi la cara de los estudiantes) que mientras tu estabas explicando todo lo que para ellos es teoría, no sirve, no se va a preguntares nadie preguntó nada, nadie dijo nada, no hubo expresión, incluso dos alumnos escribieron de los 58 del grupo. En el momento en que pusiste un ejemplo de calcular la pendiente con dos puntos todos atendieron, todos preguntaron, tenían duda y se pusieron a trabajar. Aquí de nuevo hay un problema que viene de la enseñanza, de la costumbre *"de lo que se quiere"*. Por ejemplo: en una entrevista que yo les hago a los alumnos en que la que pregunté: *"¿qué les pareció el examen?",* les pareció incluso raro el examen, no difícil, llegan a decir que el examen está mas fácil que el curso; pero sin embargo les resulta raro. Pero "*¿por qué raro?"* y responden: *"porque pensamos que había que hacer cálculo, que había que hacer cosas, en este examen no había que hacer cálculos".*

Profesor: Además ese es uno de los problemas tradicionales sobre mis cursos, normalmente los estudiantes se quejan de que yo explico demasiado, de que le doy demasiado vueltas a la ideas; entonces sí esa es una costumbre digamos de no rastrear el origen de las ideas.

Investigador: De no saber de donde vienen, incluso me acuerdo que explicaste la historia del plano Cartesiano y nada de esto fue objeto de discusión, de análisis. Decir que el examen era raro, que era un examen no acostumbrado, una cosa no esperada es lo que resulta interesante. Toda la unidad se basa en ese tipo de trabajo, en un trabajo de razonamiento, de interpretar, de construir, de trasladar de un enunciado verbal a una tabla y/o gráfica y aún así el alumno no esperaba este examen.

Profesor: Sí, a mi me parece que es la clave para entender las dificultades de muchos, por ejemplo estaba esta chica [*en referencia a un estudiante con dificultades*], que le echaba muchas ganas, que trata de hacer el trabajo pero no entiende nada.

Investigador: si, es muy laboriosa

Profesor: Para ella digamos pareciera ser que el aprendizaje es hacer las operaciones, resolver algo que de un resultado concreto. Pero todo el trabajo de razonamiento parecería que no se ha dado cuenta de que lo tiene que hacer, de que esa es la esencia del asunto. Es algo, a pesar de que les he insistido mucho, en lo que logro todavía convencerlos, estoy luchando contra muchos años de formación académica.

Investigador: ¿El caso de la unidad como instrumento?, la unidad es atípica para nosotros, surge de una investigación y por tanto la unidad es como algo impuesto, aunque fue aprobada en nuestro Departamento. Es algo nuevo, que viene desde afuera ¿qué opinión tienes? A mi me interesan mucho tus críticas, tus comentarios, ¿qué proporciona la unidad?

Profesor: a mi me parece que, siguiendo en esta orden de ideas de esta observación de que los resultados para los muchachos tienen que ser concretos, tienen que ser un numerito, hacer operaciones que resolver un problema, poder hacer muchas cuentas, etc.

ANEXO 27 (continuación)

a mi me parece que en ese sentido bueno era un problema que no habíamos descubierto, a la unidad didáctica le ha faltado ahí.

Con ciertas adecuaciones que habría que hacer en cuanto al lenguaje, en cuanto al estilo de plantearles los problemas, a mi me parece que es bastante buena. Pero que se queda un poco corta en términos de esto que estamos descubriendo de que para ellos no tener el resultado concreto, no tener el numerito, no tener una receta, un algoritmo que memorizar, que dominar operativamente que los lleve a un resultado concreto parecería que como para ellos no es importante; lo que no sea eso no es importante, lo que implique profundizar las ideas, razonar, para la gran mayoría no sirve y no se espera por tanto. Empezando por ahí, a mi me parece que es una manera diferente y útil de presentar las cosas, esto de que al principio les digamos cual es objetivo de aprendizaje, que está escrito dentro del mismo material, a mi me parece que es bueno y que quizá uno de los errores en el curso fue pasar por esto demasiado rápido.

Habría de insistir en lo que se espera de ellos, y aunque se insistió bastante tendríamos que insistir más en que lo importante no es que aprendan hacer operaciones, no es que dominen recetitas, que dominen algoritmos, sino que sean capaces de utilizar estas ideas, estos conocimientos para aplicarlos en el contexto de la economía.

Investigador. Incluso en el material didáctico no hay problemas de este tipo (los que el estudiante espera y está acostumbrado), no hay ninguno, todos los problemas van en la misma línea.

Profesor.- Sí, no hay ninguno; pero si observas, cuando se podía generar alguna discusión era porque después de esa discusión ellos podían obtener un resultado concreto: la tabla de valores, la grafica de la función, la descripción verbal. Ellos si necesitan un resultado concreto para ponerse a trabajar y a pensar; como que les es difícil ver que la matemática también se trata de discutir ideas, de discutir conceptos.

Investigador. Es interesante, en mis notas de clase toda la discusión proviene después de haber hecho algo, que hicimos un cálculo o una tabla de valores o que estábamos graficando y a veces preguntabas ¿se debe o no abrir los puntos?, ¿por qué aunque no debamos unir los puntos es conveniente? , ¿Recuerdas aquel ejemplo de la población? era conveniente darle continuidad aquella función porque daba una idea aproximada del fenómeno, pero todas las discusiones del estudiante vienen cuando ya hizo algo o cuando estaba haciendo algo.

Profesor. Pero incluso en este tipo de preguntas sobre, si es conveniente o no, la conclusión final a algunos les molestaba, a veces es conveniente decirles o a veces no, decirles piensa cual es la mejor representación en el contexto de tu problema, decirles y no darles una respuesta en cierto sentido algorítmica o una respuesta tajante y definitiva; en tales casos en conveniente y en tales casos no

Investigador.- el de los zapatos no era conveniente, en el de la población si era conveniente; si hubo discusión sobre eso incluso fuera de clase.

ANEXO 27 (continuación)

Profesor.- Pero aquí la discusión fuera de clase fue porque no se quedaron satisfechos con la respuesta de que a veces si es conveniente y a veces no, como si hubieras dicho: cuando el conjunto de valores para la variable independiente es discreta, o cuando el dominio es un conjunto discreto solo hay que poner los puntitos y cuando el dominio es un conjunto continuo hay que unirlos. Si les hubiéramos dicho eso, a mi me queda la impresión que todos se hubieran quedar satisfechos. No es esa es la respuesta digámoslo así políticamente correcta y es lo que creo que ellos estaban esperando, que tu les dijeras cuando sí o cuando no, en tal caso sí y en tal no y san se acabó porque lo dice tu profesor, pero eso de contestarles; fíjate ¿Cuál de los dos dibujos posibles te da la mejor representación? los desconcertó y eso fue lo que hizo necesaria la discusión fue la del salón que algunos quedaron disgustados, e incluso recuerdo una de las críticas que nos hizo un alumno en el salón de clase, que no le gustó mucho el curso y dejó dicho de asistir. Él cree y nos dijo que las preguntas eran ambiguas que las preguntas eran mal formuladas y como que hay una cierta molestia ante las preguntas que no tienen respuesta concluyente en el sentido de que está bien o mal

Cuando tu respondes: lo correcto lo rigurosamente correcto sería hacer una gráfica así pero en este caso hacerla de esta manera ayuda a comprender mejor el dibujo, cuando tu les dices esto o cuando tu les planteas las preguntas de tal manera que ellos tienen que desarrollar todo un argumento, toda una idea y al final llegar a resultados concretos eso los desconcierta. Están más acostumbrados a los problemas bien formulados, bien estructurados desde el punto de vista lógico.

Investigador Decías de la unidad didáctica, que era necesario reconstruir el lenguaje de la forma de escribirlo ¿podrías profundizar en esto?

Profesor: Por las dificultades estas de la que hablábamos al principio de que hay cosas que no se entienden no se que sería lo mejor si hacer el intento, el esfuerzo por revisar un poco el lenguaje en sus cursos de secundaria o preparatoria y plantearlo en ese lenguaje. Por ejemplo lo de espacio contra tiempo causó conflicto, lo de velocidad espacio contra tiempo causó conflicto, incluso yo no estoy acostumbrado. Yo que estoy formado en México en las mismas preparatorias tampoco estoy acostumbrado hacerlo así; tampoco no me causa conflicto pero si tu me tomas por sorpresa y me dices define velocidad no te voy a decir espacio contra tiempo, te voy a decir distancia contra tiempo, entonces este tipo de dificultades, yo creo que habría que tener cuidado plantear las preguntas en un lenguaje al que ellos están acostumbrados. O comenzar así e ir migrando a un lenguaje mas ágil, tal vez durante la exposición e ir introduciendo otras palabras, ir viendo otros sinónimos que tengan el mismo significado.

Investigador: Es que no se esperaba que no se entienda la palabra *"estable"*, esta experiencia ahora nos dice algo, igual que la frase de "*que te conviene más en términos de precios"* no fue comentada, en términos de precios la que tenga menor precio. La frase confundió

Profesor: Si hubiésemos dicho "*precio por kilogramos*" sería más entendible. Pero no es posible, no es educarlos si los dejamos con su lenguaje limitado. No podemos escribir y hablar sólo en el lenguaje que en entienden los estudiantes.

ANEXO 27 (continuación)

Investigador: Pero si podemos ir del lenguaje que ellos dominan al lenguaje deseado.

Profesor: O hacerles un pequeño glosario de términos, que puedan consultar cuando tengan duda. Claro que sería casi imposible, o al menos tener cuidado en el momento de solicitar los trabajos (las tareas). El problema del lenguaje se manifiesta más en el trabajo extraclase. Dentro de la guía metodológica para el profesor debe estar el hecho de verificar, que el profesor verifique que los problemas de tareas se están resolviendo.

Investigador: Bueno, pero en este caso concreto existió todo un sistema de asesorías

Profesor: Pero no asistieron, asistieron sólo el día antes del examen

Investigador: Sobre las secuencia de la unidad, ¿qué puedes decir?

Profesor: Para mi es buena la secuencia. Sólo que al final es donde se observan problemas con la unidad, la secuencia última. Le faltan más ejercicios, más problemas, debe ser más larga la secuencia sobre funciones.

Investigador: Más extensa

Profesor: Si, el otro problema con la unidad se halla en el resto del curso. Yo siento que sería bueno tener las unidades didácticas de todo el curso. Porque una de las dificultades de hacer más grande la secuencia de funciones y extremo es la dificultad operativa

Investigador: ¿Por qué?

Profesor: Necesariamente deberíamos abordar otros problemas, como los que están en los libros de texto de cálculo. Abordar tipos de funciones, mencionar sobre operaciones con funciones. No porque sea urgente analizarlo, sino como una oportunidad para reafirmar el concepto de función. Darles oportunidad de practicar, por decirlo de alguna manera, el concepto de función. Abordar más ejercicios, incluso de tipo numéricos. Por ejemplo la indagación de extremos relativos por procedimientos algebraicos.

Investigador: Es la secuencia más débil del curso

Profesor: Las otras me parecen bastante bien, pero pensar muy bien para que los problemas no conlleven a la rutina. Hay que buscar otras fuentes bibliográficas, como el texto de máximos y mínimos. Problemas que no sean tan operativos, por el contrario que les despierte la creatividad. Finalmente, el problema principal es que no logramos despertar la creatividad de los estudiantes, llevarlos más allá del hecho de hacer cuentas

Investigador: Una pregunta, ¿el estudiante promedio de este curso tiene una idea más alejada del concepto de función, en comparación con los estudiantes que tomaron el curso de Cálculo I?

Profesor: Me parece que en este momento sí puede ser inferior; lo que me parece que logramos fue un aprendizaje más o menos de corto plazo, es decir, que en el momento en que ellos lo tomaron quizá entendían el concepto abstracto mejor que los estudiantes de cálculo, me parece que faltó algo de práctica.

Investigador: Una cosa que yo observé en la investigación primera en el doctorado cuando se les pregunta esta misma pregunta sobre si el dibujo representa o no una función; se le pregunta a los estudiantes que tomaron el curso de Cálculo I. Yo observo que las respuestas de los estudiantes de la unidad didáctica, en muchas ocasiones es mejor, de forma intuitiva.

Profesor: Sí, me parece que hay una mejor comprensión del concepto sí de la idea como tal, lo que me preocupa y eso lo verás la próxima semana en el examen final del curso me preocupa el ver si realmente lo aprendieron o no. Si les quedó como un conocimiento, después de esto vino lo de todo lo de aritmética, álgebra; de hecho todos saben que todo mundo debe presentar el examen final para tener una oportunidad de ver que se les quedó algo al final del curso, es lo que a mi me está preocupando ahora por esos indicativos que te decía les costó más trabajo ver cosa era una función en las gráficas ver que era creciente o decreciente, no sé

Investigador: Es mas fácil para un alumno decir donde hay una máximo o mínimo que definirlos.

Profesor: Sí, y cuando dice que cosa es, es más fácil la descripción operativa, el máximo porque primero iba creciendo y después va decreciendo o es un mínimo porque primero iba disminuyendo y después empieza a crecer esa es la descripción operativa, Ahora el problema de la descripción operativa es que no permite distinguir entre extremos absolutos y extremos relativos, bueno sí pero no o sea va decreciendo y después decrece pero el problema es que después no son capaces de ver desde donde viene creciendo y hasta donde crece, son incapaces de distinguir el máximo relativo y el máximo absoluto y eso incluso pasa con los de Cálculo II ese mismo problema lo tenían.

Investigador: Sí porque en definitiva a un máximo absoluto también le pasa eso

Profesor: Tuve que enunciar dos criterios de la primera derivada.

Investigador: ¿Sabes cómo distingue un máximo absoluto de un máximo relativo?

Profesor: El problema del mayor del máximo o del valor del mínimo, no es una buena regla operativa hay que equilibrar las dos cosas el aspecto de entender los conceptos de forma y el aspecto operativo como que hay que buscar problemas que les ayuden a unir los dos aspectos.

Investigador: Problemas más completos que esos

Profesor: Sí, mas completos.

Investigador: ¿Alguna otra cosa? ¿Algún comentario? ¿Qué te pareció el tiempo que duró el curso?

ANEXO 27 (continuación)

Profesor: sí a mi me pareció bien el tiempo, fue el adecuado. Además una cosa que logramos es que se hicieran una disciplina de trabajo, pero ahí es muy importante que el grupo sea pequeño y que el profesor tenga un asistente.

Investigador: ¿Si tu tuvieras que diseñar todas las unidades didácticas de este curso aritmética, álgebra, conjuntos, en qué lugar elegirías ésta?

Profesor: Yo creo que habría que pensarlo muy bien, pero sigo pensando lo mismo cuando discutimos si esta unidad fuera al principio de curso, una cosa de los argumentos a favor era que esta manera de abordar los problemas podría motivarlos a poner una necesidad de desarrollar las demás y elevar los conocimientos. A mi me parece que todo el curso debe tener la misma tónica, ya hablando del curso globalmente lo que se notó cuando salimos de la unidad didáctica de su material que está muy bien preparado y empezamos a ver el otro material hubo cierto desconcierto y en algunos cierta decepción y bajaron un poco el ritmo porque un poco era volver al método tradicional de matemáticas es necesario que todo el curso sea en la misma tónica y a mi me parece que habría de comenzar, a mi me parece que la clave del curso el concepto fundamental alrededor del cual se debe estructurar el curso es el concepto de función, a mi me parece que lo que debemos hacer es trabajar primero sobre la secuencia del concepto de función y sobre la secuencia de los extremos de funciones

Investigador: ¿E invertir el orden, este que está aquí?

Profesor: no necesariamente, yo creo que el concepto de función debe ir tan al principio del curso como se pueda porque permite ahorrar tiempo, porque una de las ventajas que yo tuve después, por ejemplo para hablar de ecuaciones es que tenía el recurso de graficar la función definida por el polinomio y que ellos vieran que la solución de las ecuaciones eran las intervenciones homogéneas eso es muy bueno. Me parece que el concepto de función sí debe ir lo mas al principio del curso que se pueda y sí debe usarse después por esa misma idea que es un concepto sumamente difícil y que hay que darle la oportunidad de usarlo empiezas viendo funciones y terminas viendo funciones digamos a partir de la primera clase en donde se empiece la secuencia de funciones todas las clases deben llevar la palabra función ese sería un parámetro, todas las clases deben nombrar la palabra función. Mi idea sería trabajar sobre la secuencia de funciones y plantear unos problemas un poco más completos y solamente poner antes en el curso lo que sea necesario para resolver esos problemas y dejar que la misma idea motive el resto del curso. Yo sí sigo pensando que hay que sacarlos de esta costumbre de pensar que las matemáticas se trata de resolver correctamente, repitiendo lo que hace el maestro, los problemas que el maestro plantea y sin pensar porque se resuelven así o mas allá por qué los planteó el maestro. Hay que sacarlos de esto, entonces hay que darles una motivación para aprender las partes áridas y aburridas del curso, llegar a hablar de logaritmos simple y sencillamente porque haya que hablar de logaritmos aburre a cualquiera. Llegar a hablar de logaritmos porque es una función interesante porque sirve para moldear modelos de Economía.

Investigador: Podría tomarlos como ejemplos de funciones

ANEXO 27 (continuación)

Profesor: Y dar previamente todo lo que sea necesario para este punto, habría que pensarlo muy bien, pero si me parece importante que el concepto de función esté muy al principio del curso. Es el concepto más difícil entonces hay que darles oportunidad de usarlo mucho tiempo.

Investigador: El problema algebraico influyó también mucho

Profesor: Pero ahí, cuidado, que viene de un contexto geométrico a un algebraico, si pero la manera tradicional de enseñar el álgebra poco resuelve las cosas, darles toda una unidad sobre polinomios y sobre ecuaciones no resuelve el problema. Trabajar también en la habilidad de traducir, de plantear problemas desde un contexto verbal.

Investigador: ¿Algún otro comentario?

Profesor: no

Investigador: Muchas gracias por la ayuda y el tiempo dedicado

ANEXO 28. Cuestionario realizado a los estudiantes.

CUESTIONARIO REALIZADO A LOS ESTUDIANTES DEL GRUPO

UNIVERSIDAD VERACRUZANA
FACULTAD DE ECONOMÍA

Estimado Estudiante,

Hemos culminado, en este curso, la primera unidad: "*Funciones, sus formas de representación y extremo de una función*", dividida en sus tres secuencias:

SECUENCIA 1: *Lectura e interpretación de gráficas*
SECUENCIA 2: *Estudio de los fenómenos de cambio*
SECUENCIA 3: *El concepto de función. Características de su comportamiento*

Resulta necesario conocer y evaluar las dificultades, problemas y errores del proceso de enseñanza aprendizaje. Por este motivo solicitamos tu valiosa colaboración en este cuestionario, cuyas respuestas serán de mucha utilidad para nuestro trabajo.

1. Enumera dos aspectos o cuestiones, de la unidad, que no te gustaron

2. Enumera dos aspectos o cuestiones, de la unidad, que fueron de tu agrado

3. ¿Cuál de las tres secuencias te fue más difícil de aprender?, **¿por qué?**

4. ¿Cuál de las tres secuencias te fue más fácil de aprender?, **¿por qué?**

5. ¿Cómo evalúas el material de trabajo (guía) de las clases? En escala de 0 a 10______

6. Los problemas de tareas, comparados con lo realizado en clase, son: (marca con X)

ANEXO 28 (continuación)

___ Más difíciles
___ Más fáciles
___ Están adecuados a las clases

7. Enumera los dos problemas de las tareas, de mayor grado de dificultad el responder

Problema No_______ y Problema No__________

8. Con respecto a las explicaciones del profesor en clases, plantea tres cosas en las que debemos mejorar nuestro trabajo:

a)

b)

c)

9. ¿Qué opinas sobre todo el sistema de evaluación de esta unidad?

10. ¿Qué tipo de preguntas esperabas en el examen de esta unidad? **Especifica**

11. El examen final, en comparación con todo lo estudiado, fue:

___ Más difícil
___ Más fácil
___ Está adecuado a lo estudiado

12. Finalmente: ¿Qué beneficio o provecho te aportó esta unidad?, ¿En que te ayudó?

MUCHAS GRACIAS

ANEXO 29 Sistema de Evaluación de la asignatura IMC

SISTEMA DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD DIDÁCTICA Y DEL CURSO INTRODUCIÓN A LOS MÉTODOS CUANTITATIVOS

Evaluación del desempeño:

Evidencia(s) de desempeño	Criterios de desempeño	Campo(s) de aplicación	Porcentaje
Respuesta a preguntas de examen.	- Honestidad y originalidad. - Precisión y claridad en la expresión de las ideas. - Aplicación correcta y pertinente de los procedimientos. - Validez de los razonamientos.	Salón de clases.	40% de examen final
Evaluaciones parciales Evaluación 1: Tema 1 Evaluación 2 Temas 2 y 3 Evaluación 3 Temas 4 y 5		Salón de clases.	60% de los resultados del trabajo cotidiano.

Acreditación.

Por ser un taller de carácter cursativo, es indispensable que el estudiante cumpla con el requisito de asistencia a clases establecido en el Estatuto de los Alumnos de la UV.

Además de esto, el estudiante deberá obtener un mínimo de 6 puntos en la *Evaluación Global del Desempeño*. Ésta se obtiene de:

1. Un examen final (ordinario) del curso, que aporta el 40 % de la evaluación.
2. Evaluación del Tema 1, compuesta por: el 10 % del examen parcial del tema y el 10 % de las tareas y participación en clase.
3. Evaluación de los Tema 2 y 3, compuesta por el 10 % del examen parcial de los temas y el 10 % de las tareas y participación en clase.
4. Evaluación de los Temas 4 y 5, compuesta por el 10 % del examen parcial de los temas y el 10 % de las tareas y participación en clase.

Tareas Es el conjunto de los trabajos (ejercicios y problemas) que se realizan fuera de la clase. El profesor las solicita en las clases con una fecha de entrega determinada, en algunos casos se responden de manera grupal y en otros de manera individual, según oriente el profesor.

Participación en clases: Son las diversas formas que tiene el estudiante de intervenir y contribuir al proceso de aprendizaje, tanto individual como colectivo. Las acciones pueden ser:

- Exponer, a todo el colectivo de estudiantes de la clase, la respuesta a una pregunta y/o problema.
- Explicar y/o ayudar a otros estudiantes de la clase.
- Plantear las dudas al profesor y/o a sus compañeros de clase.
- Mantener un clima de respeto, tolerancia y solidaridad hacia todos y cada uno de los estudiantes de la clase.