ANÁLISIS DE LOS PROCESOS COGNITIVOS Y DE LAS INTERACCIONES SOCIALES ENTRE ALUMNOS (16-17) EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE COMPARAN ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS. UN ESTUDIO DE CASOS

Tesis doctoral de Pedro Cobo Lozano
Dirigida por el Dr. Josep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la **Universitat Autònoma de Barcelona**

Enero de 1998

CAPÍTULO 6

SOBRE LA VALORACIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS IMPLICADOS EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PCASP

> La evaluación del pensamiento de orden superior, especialmente de los procesos de pensamiento asociados con la resolución de problemas, es una tarea extremadamente difícil de hacer bien. E incluso los mejores instrumentos y técnicas sólo son tan buenos como la persona que los utiliza —es decir, el profesor—.
>
> Lester y Kroll (1990)

6.1. Introducción

En este capítulo hacemos un breve repaso de la literatura relacionada con las formas de valorar los conocimientos implicados en los procesos de resolución de problemas, de acuerdo con la tipología que hemos establecido en Capítulo 2—conocimientos conceptuales y procedimentales—, y concretamos esas formas de valoración en dos pruebas que analizamos en profundidad haciendo hincapié en los siguientes aspectos:

- En la presentación de cada ítem en función de los contenidos matemáticos que pretendemos evaluar.
- En los contenidos matemáticos que involucra cada ítem, tanto de los que se pretende valorar como de los que subyacen a cada uno de ellos.
- En el establecimiento de unos criterios de valoración que nos permitan definir, con la menor ambigüedad posible, categorías de conocimientos en las que encuadrar las respuestas de los diferentes alumnos.
- En la relación que los contenidos matemáticos que pretende evaluar cada ítem tienen con las diferentes formas de resolver los problemas que proponemos en el Capítulo 5.

6.2. Antecedentes sobre técnicas de evaluación de los conocimientos implicados en la resolución de problemas. Técnicas de evaluación de los trabajos escritos

La resolución de problemas de matemáticas es una habilidad compleja que exige del resolutor determinados conocimientos relacionados: *a)* con los contenidos matemáticos de los problemas que se resuelven, como son los hechos y conceptos, las técnicas específicas —"información básica manipulable", según E. L. Baker (1990)— y las recuperaciones de dichas informaciones durante los procesos de resolución o *b)* con las habilidades que muchos autores califican como de orden superior y que nosotros hemos denominado procedimientos independientes de los contenidos matemáticos, que son propios de la resolución de cualquier tipo de problema.

Para analizar y evaluar en profundidad los procesos implicados en la resolución de problemas es necesario comprender las interacciones que se producen entre los tipos de conocimientos que hemos considerado (Baker, 1990). Ahora bien, un análisis, por separado, de cada uno de ellos —como el que hemos hecho en capítulos anteriores— y un análisis de las diferentes maneras de evaluarlos —como haremos a continuación— nos facilitará la comprensión no sólo de la evolución del conocimiento de los alumnos a lo largo del proceso de resolución, sino la forma en que pueden interactuar en dicho proceso.

Así pues, pretendemos, en las páginas siguientes, identificar las principales técnicas de evaluación de los diferentes conocimientos implicados en los procesos de resolución de problemas y adaptar alguna o algunas de ellas a la evaluación de los conocimientos de los alumnos en relación con los PCASP que consideramos.

Es obvio que la utilización de cualquier técnica para evaluar los conocimientos implicados en los procesos de resolución de problemas —ya sean del tipo de análisis de trabajos escritos, de respuestas a diferentes tipos de tests o de técnicas de observación directa— exige la determinación previa y el análisis[1] de lo que se pretende evaluar, como hicimos en el capítulo anterior.

Ahora bien, la dificultad de evaluar los conocimientos implicados en la resolución de problemas, debido precisamente a su naturaleza, nos exige, como es opinión generalizada de los estudiosos del tema, combinar, al menos, dos tipos de técnicas. En nuestro caso hemos considerado oportuno tener en cuenta técnicas que analizan los trabajos escritos de los alumnos —en las que hemos diferenciado las que evalúan los conocimientos conceptuales, técnicos y los relacionados con las habilidades utilizadas en la propia resolución de problemas (analizando la forma de atacar el problema y grado de desarrollo del proceso de resolución)— y las que analizan los procesos de resolución de problemas mediante la observación directa de la interacción de dos alumnos durante el proceso de resolución, que detallamos en el Capítulo 3 y ponemos en práctica en el 8.

[1] Análisis que se puede facilitar mediante la construcción, ya clásica, de esquemas que relacionen los contenidos con los objetivos (Pérez Juste, 1986), los contenidos con el nivel cognitivo (Kulm, 1990), o los más adaptados a la resolución de problemas —porque muchos de los procesos cognitivos considerados están relacionados directamente con esta área del conocimiento (Pandey, 1990)—, que son los que relacionan contenidos y procesos. T. Pandey concibe las líneas que dividen la matriz contenido/proceso como difusas para, después, considerar los ítems que evalúan los procesos para cada contenido como manchas y situarlos entre las líneas que forman las celdas de la matriz, para significar que es difícil que un determinado ítem esté relacionado con un solo proceso.

Por otra parte, R. Charles, F. Lester y P. O'Daffer (1987) construyen tests de elección múltiple para evaluar los procesos de pensamiento en la resolución de problemas sobre la base de una lista de objetivos simples asociados a tales los procesos, sin fijar los contenidos de los problemas que proponen. Las técnicas de dichos autores son aplicadas posteriormente por D. Kroll, J. Masinglia y S. Mau (1992) a la evaluación de los procesos de resolución de problemas en grupos pequeños de alumnos que trabajan de forma cooperativa.

6.2.1. Sobre la evaluación de conocimientos conceptuales

J. I. Pozo (1992) identifica cinco técnicas para evaluar los conocimientos de los alumnos sobre contenidos conceptuales, analizando ventajas e inconvenientes para cada uno de ellos. Comentamos brevemente tres de ellas[2] puesto que algunos de los ítems que presentamos en las páginas siguientes son adaptaciones de dichas formas de evaluar los conocimientos conceptuales.

a) Una de ellas es la que el autor llama "reconocimiento de la definición". Es una técnica que trata de identificar un concepto a partir de diferentes definiciones presentadas en forma de ítem de elección múltiple. No corresponde exactamente al reconocimiento de una definición el ítem 3a (apartado 6.3.3, p. 130) presentado en las pruebas que proponemos, ya que no se trata de reconocer una definición, pero puede encajar en este apartado puesto que lo que se propone es reconocer entre una serie de posibles casos de igualdad de triángulos los que son correctos.

b) La "identificación y categorización de ejemplos" pone en juego el reconocimiento o la evocación "para identificar situaciones relacionadas con un concepto" (p. 74). Hemos de establecer una diferencia clara entre la evocación, mediante la cual el alumno ha de generar los propios ejemplos, y el reconocimiento en el que "al alumno se presenta una lista de objetos o hechos que debe categorizar" (p. 75).

Puede encajar en este apartado la construcción de mapas conceptuales asociados a un determinado concepto, establecida por J. D. Novak y D. B. Gowin (1988), como forma de evaluar las estructuras conceptuales ya sea mediante la evocación y jerarquización de conceptos y ejemplos asociados a uno dado, o por medio de la asociación y categorización de conceptos, hechos u objetos dados. A pesar de que la realización de mapas conceptuales es, posiblemente, una de las técnicas que mejor puede llegar a representar la estructura conceptual de los alumnos y es, por tanto, una de las más completas, pensamos que tiene el inconveniente de que los alumnos han de estar muy familiarizados con las reglas básicas que rigen la construcción de dichos mapas, de ahí que no la hayamos utilizado en las pruebas que hemos construido.

En cambio, incluimos en dichas pruebas dos ítems —de asociación de conocimientos[3]— que pueden encuadrarse dentro de la técnica de "identificación y categorización", más relacionados con procesos de reconocimiento que con los evocación:

- El ítem 1 (apartado 6.3.1), en el que presentamos una lista cerrada de objetos concretos —figuras geométricas— que los alumnos han de categorizar mediante la

[2] No comentamos ni utilizamos en nuestras pruebas la técnica que J. I. Pozo llama "definición del significado", a pesar de ser la más usada, porque, desde nuestro punto de vista, fomenta la reproducción literal y puede camuflar graves deficiencias de comprensión. Mucho más acertada nos parece la técnica que el autor denomina "exposición temática", que pide al alumno "la realización de una composición o exposición, normalmente escrita, sobre determinada área conceptual" (p. 73) y que trata de que el alumno establezca comparaciones buscando analogías y diferencias entre los conceptos de una misma área conceptual. No la utilizamos en las pruebas que hemos construido porque requiere procedimientos expositivos —orales o escritos— difíciles de valorar y a los que los alumnos no están acostumbrados.

[3] Construidos siguiendo las claves de redacción de los ítems de asociación de conocimientos (Pérez Juste, 1986), es decir, evitando dar pistas que permitan llegar a alguna respuesta por eliminación. Para ello, en el ítem 1 hemos dispuesto dos conjuntos de diferente número de figuras, de tal forma que dos de dichas figuras de un conjunto estén asociadas a una del otro, y en el ítem 5 hemos construido dos conjuntos de igual número de elementos, pero, como en el caso anterior, dos elementos de un conjunto están asociados a uno del otro, quedando en este caso algún elemento libre de uno de los dos conjuntos.

asociación de los que tengan las mismas propiedades relacionadas, en este caso, con los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza de figuras geométricas.

- El ítem 5 (apartado 6.3.5), en el que mostramos una lista cerrada de figuras y fórmulas con la intención de construir un ítem de reconocimiento —mejor que de evocación, lo que hubiera supuesto sólo la presentación de figuras y hubiera exigido la generación, por parte del alumno, de las fórmulas correspondientes— en un doble sentido; en primer lugar, el reconocimiento y posterior asociación de una fórmula a su figura correspondiente, y, en segundo lugar, la identificación, en la figura, de los elementos que intervienen en la fórmula.

c) Otra de las técnicas propuestas por J. I. Pozo para la evaluación de conceptos es la que llama "aplicación a la solución de problemas", que consiste en plantear situaciones problemáticas más o menos complejas que exijan la activación de determinados conceptos.

Esta técnica es también bastante completa (según el autor, porque integra, como mínimo, a las dos anteriores) ya que —además de que los conceptos adquieren sentido o llegan a alcanzar su verdadero significado matemático cuando están inmersos en diferentes situaciones problemáticas (Balacheff, 1990, Vergnaud, 1990)— permite la conexión entre conceptos y procedimientos sin la cual "los estudiantes pueden tener un buen sentido intuitivo para las matemáticas, pero no resuelven los problemas o pueden generar respuestas, pero no comprender lo que están haciendo" (Hiebert y Lefevre, 1986, p. 9).

A pesar de ser una de las técnicas más completas, como hemos dicho, precisamente por ello tiene el inconveniente de que no es fácil la búsqueda de situaciones problemáticas adecuadas que permitan la activación de los conceptos que nos interesa evaluar, por una parte, y la integración que, en la resolución de dichas situaciones, se produce entre los diferentes tipos de conocimientos y la consiguiente dificultad de evaluarlos por separado.

Es por eso que hemos elegido algunas situaciones "sencillas" en el sentido de que su resolución requiere la aplicación de sólo una determinada técnica detrás de la cual subyace algún concepto directamente relacionado con ella que se evalúa por separado —véanse los ítems 2 y 7c—, o que su evaluación se hace de forma implícita dentro de los criterios de valoración de la propia técnica, como ocurre con los ítems 3b, 4, 7a y 7b, y, en menor medida, con el 6, porque sólo involucra el conocimiento de la fórmula del área del triángulo, de sobra conocida para los alumnos de estas edades.

6.2.2. **Sobre evaluación de conocimientos procedimentales**

C. Coll y E. Valls (1992) indican que hay que diferenciar dos fases en el aprendizaje de los procedimientos, referidos a cualquier disciplina, que nosotros los separamos en tres por lo que se refiere a su concreción a la resolución de problemas. El análisis de estas tres fases que componen el aprendizaje y posterior conocimiento de un determinado procedimiento facilitará su comprensión, pero no presupone, en absoluto, ni que dichas fases sean fáciles de identificar en el proceso de resolución de un problema, ni que sean fáciles de evaluar por separado.

Como señalan los citados autores, "aprender bien los procedimientos quiere decir que se pueden evocar y aplicar con facilidad" (p. 127). Estos procesos de evocación, aplicación y los que subyacen tras ellos, es decir, los procesos de toma de decisiones son las tres fases que analizamos brevemente a continuación.

- El proceso de evocación requiere necesariamente, por parte del alumno, el conocimiento previo y suficiente del procedimiento, es decir, el enunciado de las reglas generales que lo componen.
- La segunda fase del conocimiento de un procedimiento tiene que ver con lo que hemos llamado "saber hacer", es decir, su uso y aplicación a situaciones problemáticas concretas.
- La tercera, que entrelaza a las dos primeras, la referimos al conocimiento, basado en gran medida en la experiencia, de las decisiones que se han de tomar por lo que se refiere a saber, en cada situación, el orden de las acciones a ejecutar, las condiciones en que deben aplicarse los procedimientos, o el control del acceso, en general no automático (Schoenfeld, 1985b), a los recursos que posea el alumno, en definitiva, el conocimiento de las estrategias directivas que permitan evocar y aplicar con éxito un determinado procedimiento en situaciones diferentes.

En esta situación, C. Coll y E. Valls indican seis dimensiones que hay que tener en cuenta a la hora de evaluar los procedimientos. Estas dimensiones están relacionadas con las tres fases de aprendizaje que hemos considerado anteriormente, a saber:

- grado de conocimiento sobre el procedimiento;
- aplicación del procedimiento a situaciones particulares;
- corrección y precisión de las acciones que componen el procedimiento;
- grado de automatización del procedimiento;
- generalización del procedimiento en otros contextos;
- grado de acierto en la elección de procedimientos para solucionar una tarea.

En el Capítulo 2 hemos diferenciado entre procedimientos técnicos —directamente relacionados con los contenidos matemáticos de los problemas que se resuelven—, y la integración de éstos con determinadas heurísticas, en lo que hemos llamado enfoques. Esto nos obliga a abordar su evaluación, por lo que se refiere a los trabajos escritos de los alumnos, planteando situaciones de diferente naturaleza.

Para evaluar los procedimientos técnicos hemos optado por seguir las indicaciones de R. Charles, F. Lester y P. O'Daffer (1987), en el sentido de plantear situaciones problemáticas muy concretas, es decir, que se resuelvan aplicando o sólo una determinada técnica —ítems 2, 3b, 4, 7b y 7c— o, en algún caso, dos —ítem 4— que se evalúan por separado, y presentándolas directamente de forma abierta —ítems 2 y 3b— o en forma de ítems de elección múltiple[4] —ítems 4, 6, 7b, 7c—, como hacen los citados autores, pero añadiendo a esa elección múltiple un "por qué", como sugieren F. K. Lester y D. L. Kroll (1990), que justifique la elección, con la doble finalidad de reducir la aleatoriedad de las respuestas y de saber mejor el grado de conocimiento y el proceso de aplicación de la

[4] El objeto de la presentación de estos ítems en forma de elección múltiple no es tratar de despistar al alumno, sino proporcionar información sobre las dificultades de comprensión (Pozo, 1992) mediante la elección, en cada caso, de distractores que en muchos de los ítems que presentamos han salido de la presentación previa de las pruebas de una forma abierta a un grupo numeroso de alumnos que no participaron en el resto de la investigación. Por otra parte, la necesidad de centrar las respuestas en torno a cuatro o cinco tipos facilita su evaluación al mismo tiempo que no se pierde información sobre las deficiencias de comprensión si los distractores han sido elegidos de forma adecuada.

técnica. Ambas formas de presentación de los ítems nos han obligado a construir criterios de valoración para cada uno de ellos que no hubieran sido necesarios si la presentación fuera simplemente como ítem de elección múltiple.

Por otra parte, a pesar de que R. Charles, F. Lester y P. O'Daffer (1987) construyen ítems de elección múltiple para medir el conocimiento de los alumnos sobre diferentes habilidades o estrategias relacionadas con la resolución de problemas, es el propio F. K. Lester y D. L. Kroll (1990, p. 64-65) y otros autores (Pandey, 1990, p. 45, Baker, 1990, p. 8) los que desaconsejan explícitamente la utilización de tal técnica para medir los procesos de pensamiento en la resolución de problemas a través de los trabajos escritos de los alumnos.

Es por eso que hemos preferido presentar al alumno para su resolución completa determinados problemas —ítems 8A, 9A y 10, en la prueba inicial, e ítems 8B, 9B y 10, en la prueba final— cuya resolución exija la identificación y el desarrollo de algún enfoque y utilizar la técnica que R. Charles, F. Lester y P. O'Daffer llaman de "puntuación analítica" para evaluar las resoluciones de los problemas presentados, determinando, previamente, las fases del proceso de la resolución que queremos evaluar; presentando los problemas al alumno de forma que se resalten las fases que queremos evaluar; y construyendo, después, — como detallamos en el apartado 6.3.12 de este capítulo— las escalas de puntuación de acuerdo con las fases consideradas.

A pesar de la decisión que hemos tomado en el sentido de inclinarnos por la utilización de una escala de puntuación analítica, hemos de ser conscientes, desde el principio, de las dificultades que tendremos en su uso, puestas ya de manifiesto no sólo por F. K. Lester y D. L. Kroll (1990) en el párrafo que hemos utilizado como lema en la presentación de este capítulo, sino también por R. Charles, F. Lester y P. O'Daffer, por lo que se refiere a la comparación de unos trabajos con otros o a la dificultad inicial de utilización de las normas de puntuación, como confirman S. L. Meier (1992) y C. G. Schloemer (1994) cuando construyen y utilizan unas normas de puntuación, adaptadas de los autores citados anteriormente, para evaluar los trabajos que los alumnos hacen en casa en relación a la resolución de problemas.

En resumen, las pruebas que hemos construido se pueden clasificar, en la tipología establecida por R. Pérez Juste (1986), como "pedagógicas" ya que están relacionadas con los fenómenos educativos, "de capacidad (o rendimiento máximo)" porque se centran básicamente en evaluar aptitudes, habilidades, etc., "psicométricas" porque establecemos la valoración de sus ítems desde un punto de vista cuantitativo, "de tipo individual", y no por eso aplicables a muchos individuos, porque pretenden valorar procesos más que resultados, y "de papel y lápiz" porque las responde el alumno con estos útiles.

6.3. Presentación de las pruebas

En la prueba inicial, los ítems fueron presentados a los alumnos en el mismo orden en que los analizamos aquí. En la prueba final, de los ítems comunes a las dos pruebas, variamos tanto el orden externo como el interno, es decir, modificamos el orden de las opciones de respuesta que incluimos en cada ítem.

6.3.1. Ítem 1

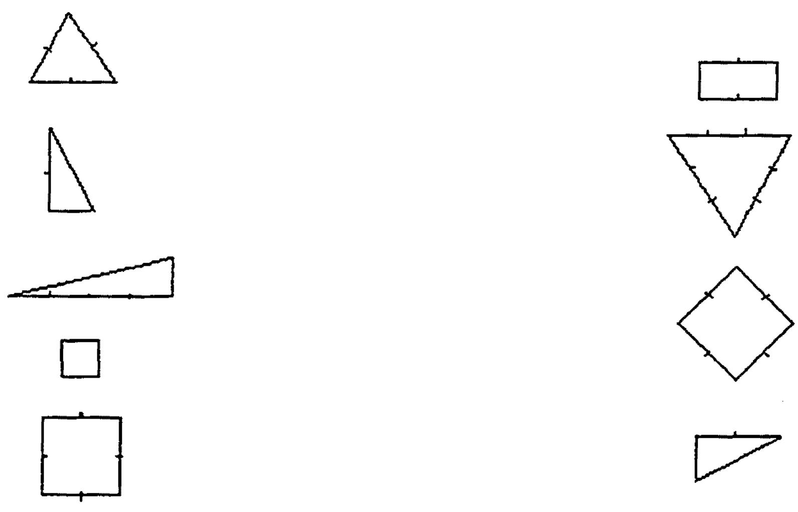
La finalidad de este ítem es evaluar los conocimientos de los alumnos sobre los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza, así como la relación que hay entre ellos —en el sentido de que las únicas figuras que son equivalentes y semejantes a la vez son las congruentes—, a partir de la visualización de las propiedades de figuras geométricas sencillas (triángulos cuadrados y rectángulos) y de la búsqueda de asociaciones entre las de la misma naturaleza (congruentes, equivalentes y semejantes).

6.3.1.1. *Presentación del ítem 1*

1.- Une las figuras de la izquierda con las de la derecha con flechas de la forma:

$\xrightarrow{\quad i \quad}$ las que sean iguales;
$\xrightarrow{\quad e \quad}$ las que tengan la misma área (equivalentes);
$\xrightarrow{\quad s \quad}$ las que sean semejantes;

(Puedes poner dos o más letras sobre una flecha si consideras que las dos figuras asociadas son a la vez i y e, s y e, etc.).



Este es un ítem de asociación entre las figuras geométricas de dos listas —columnas— con las siguientes características:

- El número de componentes de cada columna es diferente, cinco en la de la izquierda, cuatro en la de la derecha.
- El ítem lo hemos construido de forma que haya dos asociaciones entre figuras congruentes —y por tanto han de ser también asociaciones entre figuras equivalentes y semejantes—, dos asociaciones entre figuras que sólo son equivalentes y otras dos entre figuras que sólo son semejantes (Figura 6.3.1);

- A pesar de que no queda ninguna figura de las dos columnas sin asociar, las hay de las que parte una sola flecha o varias y a las que llegan una sola flecha o varias.
- Hemos optado por utilizar la nomenclatura: "igualdad" de figuras, en lugar de congruencia, y "figuras de la misma área (equivalentes)" para eliminar la influencia del desconocimiento de los términos concretos de congruencia y equivalencia.

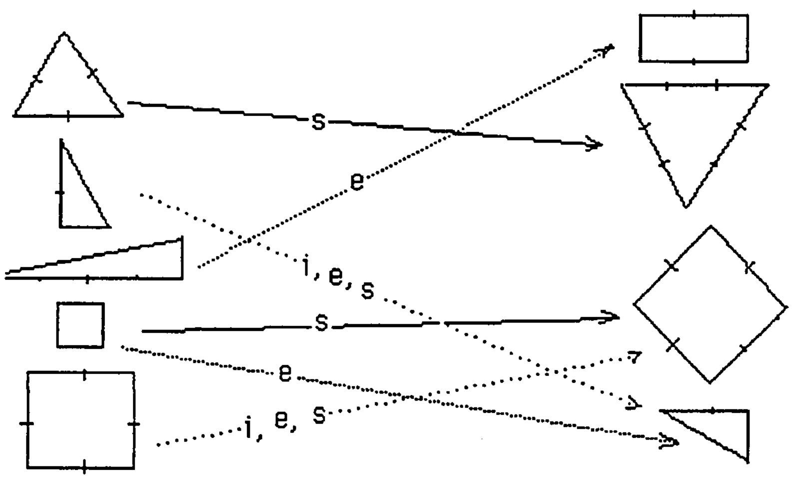


Figura 6.3.1

- Hemos señalado segmentos unitarios iguales sobre los lados de todas las figuras, excepto en las diagonales de los triángulos rectángulos por no contener un número exacto de unidades, para evitar las referencias numéricas. Un aspecto que se ha de resaltar, por los errores y confusiones que produce, es el hecho de señalar los segmentos unitarios sobre los lados de los dos triángulos equiláteros, lo que, en cierta forma, los sumerge en mallas triangulares a diferencia del resto de las figuras que pueden considerarse inmersas en mallas cuadrangulares.

6.3.1.2. *Contenidos matemáticos que involucra*

La presentación del ítem en forma gráfica y la exigencia a los alumnos de que simplemente asocien las figuras congruentes equivalentes y semejantes sin pedir ningún tipo de descripción escrita de las características de las figuras asociadas ni del porqué de las asociaciones que establecen, nos permitirá identificar las ideas que los alumnos tienen sobre tales conceptos basándonos sólo en la visualización de las propiedades que caracterizan a la congruencia , a la equivalencia y a la semejanza. Así pues, la estructura conceptual que subyace a la respuesta de este ítem relaciona la visualización de las propiedades de las figuras que intervienen, mediante la búsqueda de analogías y diferencias entre las de cada columna, con los conceptos involucrados —congruencia, equivalencia y semejanza— y de estos entre sí.

Además, esta forma de presentar el ítem nos permite identificar —con ejemplos concretos y sencillos y de una manera fácil[5] (simplemente asociando figuras)— la idea que tienen los alumnos de la relación que hay entre los tres conceptos que manejamos, en el sentido de saber hasta qué punto conocen que las únicas figuras semejantes y equivalentes a la vez han de ser necesariamente congruentes.

Independientemente de las lagunas que puedan presentar los alumnos en el conocimiento de cada uno de los tres conceptos y en su relación, podríamos destacar —y con esta finalidad se han elegido las figuras— la inclinación que tienen muchos alumnos a identificar como semejantes los triángulos de la Figura 6.3.2a, o como equivalentes el triángulo y el rectángulo de la Figura. 6.3.2b.

(a)

(b)

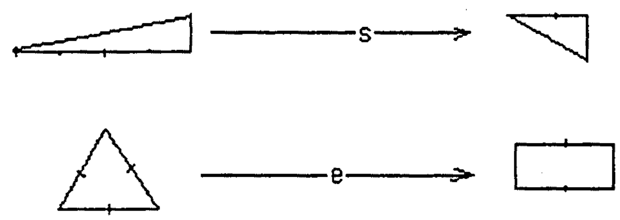


Figura 6.3.2

En el segundo caso (Figura 6.3.2b), la confusión se produce por considerar el triángulo inmerso en una malla cuadrangular e identificar su altura con una medida de 2 segmentos unitarios.

Los conceptos que evaluamos en este ítem aparecen en los cuatro problemas que resuelven por parejas los alumnos (Capítulo 5). En efecto:

- En el problema del paralelogramo, han de identificar y justificar la equivalencia de dos triángulos y en la línea 1 del espacio básico de dicho problema (p. 100), la congruencia de triángulos aparece como uno de los elementos fundamentales de la ejecución.
- La congruencia vuelve a aparecer, principalmente, en la línea 1 del espacio básico del problema del hexágono (p. 105).
- En el problema del triángulo desempeña un papel básico la semejanza de triángulos, también es importante la congruencia, sobre todo si queremos seguir las líneas 2 y 3 de su espacio básico, y la equivalencia para buscar la relación final entre las dos áreas (p. 109).
- Igualmente la congruencia vuelve a aparecer en la resolución del problema del cuadrado (p. 115).

[5] Las pruebas que habíamos hecho antes de obtener la presentación definitiva del ítem para relacionar los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza utilizando diagramas de Venn no resultaron satisfactorias por las dificultades de los alumnos en la comprensión de tales diagramas. Tampoco lo fueron las pruebas que hicimos pidiendo la veracidad o falsedad de determinadas afirmaciones sobre la relación entre los tres conceptos. Además, en las dos técnicas desechadas no prevalecía la visualización de las figuras, que era el enfoque que queríamos dar a la presentación del ítem.

6.3.1.3. *Criterios de valoración y categorización de los conocimientos*

En cuanto a la valoración de las respuestas de los alumnos y a la categorización de conocimientos, el ítem presenta dos particularidades que comentamos a continuación.

1) No consideraremos ni errónea ni acertada, es decir, ignoraremos una asociación como la que se muestra en la Figura 6.3.3, donde las dos figuras son iguales y se hace una asociación de figuras equivalentes.

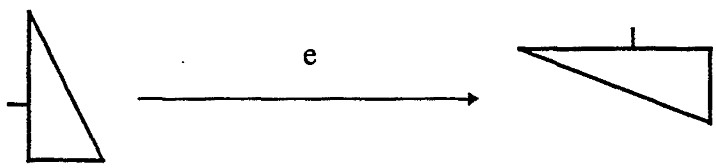


Figura. 6.3.3

2) Además hemos de considerar las posibilidades que tienen los alumnos de hacer asociaciones correctas de dos figuras y al mismo tiempo, sobre el mismo concepto, hacer asociaciones incorrectas. Es el caso de una respuesta del tipo de la Figura 6.3.4, donde se combinan asociaciones correctas e incorrectas.

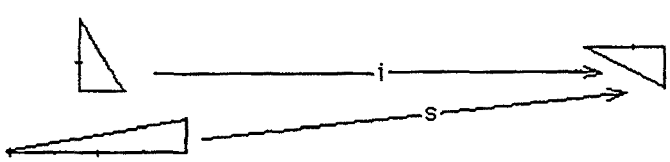


Figura 6.3.4

A la hora de evaluar y categorizar los conocimientos de los alumnos hemos tenido en cuenta, como se muestra en el párrafo siguiente, este tipo de respuestas considerándolas de un nivel inferior a las respuestas en las que sólo aparecen asociaciones correctas.

Así pues, los niveles de conocimiento que identificamos —según valoremos los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza, respectivamente— se pueden resumir en los siguientes, ordenados de menor a mayor grado de conocimiento:

Nivel I: Ninguna asociación correcta.

Nivel II: Una asociación correcta y otras incorrectas.

Nivel III: Una asociación correcta y otra incorrecta.

Nivel IV: Dos asociaciones correctas y otras incorrectas.

Nivel V: Dos asociaciones correctas y una incorrecta.

Nivel VI: Sólo una asociación correcta.

Nivel VII: Sólo dos asociaciones correctas.

Idénticas categorías consideramos para los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza.

Por lo que se refiere a las relaciones entre los tres conceptos, de acuerdo con las características del ítem (hay dos figuras de la primera columna que son congruentes a otras dos de la segunda y, por tanto, han de ser también equivalentes y semejantes), las respuestas las podemos representar utilizando la Tabla 6.3.1, a la que se pueden añadir columnas para identificar asociaciones incorrectas que haga el alumno y filas para comparar las respuestas de unos alumnos con las de otros (o las de un alumno antes y después de las resoluciones conjuntas de los problemas).

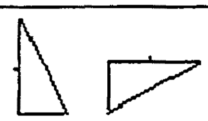
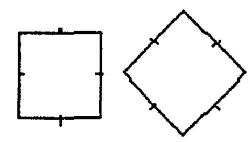
			... ...
Alumno A			
... ...			

Tabla 6.3.1

Por ejemplo, la respuesta de la Figura 6.3.5 correspondería a un nivel de conocimiento VII de congruencia, a un nivel V de equivalencia y a un nivel V de semejanza.

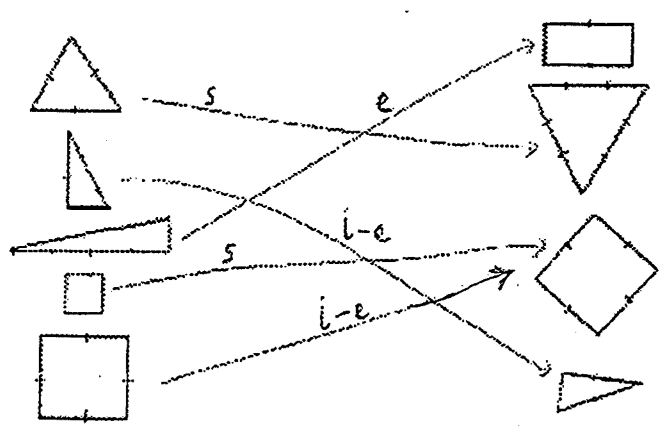


Figura 6.3.5

Además, la relación entre los tres conceptos la visualizaríamos en la Tabla 6.3.2, en la que se observa que este alumno sólo relaciona la congruencia con la equivalencia.

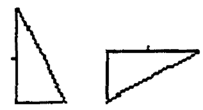
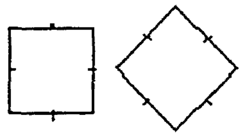
		
Alumno A	i/e	i/e

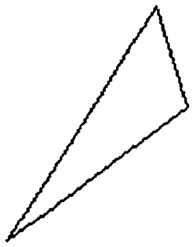
Tabla 6.3.2

6.3.2. Ítem 2

La finalidad de este ítem es doble: reconocer el número de alturas que el alumno asocia a un triángulo, por una parte, e identificar las que es capaz de representar correctamente, por otra.

6.3.2.1. *Presentación del ítem 2*

2.- Representa las alturas del triángulo de la figura.



El tipo de triángulo que se elija desempeña un papel fundamental en la presentación de este ítem. La elección de dicho triángulo la hemos hecho teniendo en cuenta dos aspectos: su posición y su forma.

Por lo que respecta a su posición, nos hemos decidido por uno que no fuera estándar (ninguno de sus lados es vertical u horizontal), puesto que en la resolución de PCASP la mayoría de las veces los triángulos se presentan de esa forma.

Por lo que respecta a su forma, hemos optado, por la misma razón que antes, por un triángulo obtusángulo, en lugar de rectángulo o acutángulo, con la finalidad de saber si los alumnos identificaban y representaban las alturas que caen fuera de los lados del triángulo (Figura 6.3.6).

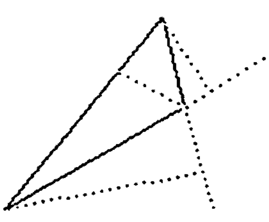


Figura 6.3.6

Por otra parte, la forma indeterminada de presentar el enunciado del ítem: "Representa las alturas del triángulo", nos permite saber el número de alturas que el alumno asocia a un triángulo, independientemente de que sepa o no representarlas correctamente.

6.3.2.2. *Contenidos matemáticos involucrados*

La representación gráfica de las alturas de un triángulo es un procedimiento que hemos catalogado como rutinario, pero que está asociado, por una parte, a ciertos tipos de conocimientos conceptuales —nos referimos a que el alumno ha de saber lo que es un triángulo y conocer algunas de sus propiedades, entre ellas, qué es una altura y cuántas alturas tiene un triángulo— y, por otra, a otros procedimientos del mismo tipo, como puede ser el trazado de una recta perpendicular a otra dada desde un punto exterior a la misma[6]. Ambos tipos de conocimientos son necesarios, aunque no suficientes, para la correcta representación de las alturas de un triángulo.

En particular, A. Gutiérrez y A. Jaime (1996), en un estudio pormenorizado sobre la comprensión del concepto de altura de un triángulo por parte de alumnos de Magisterio, consideran tres conceptos previos al trazado de la altura de un triángulo sobre un lado concreto: el de recta perpendicular a otra dada, el de recta perpendicular desde un punto dado a un segmento dado o a su prolongación, y el de vértice opuesto a un lado de un triángulo.

Además, A. Gutiérrez y A. Jaime identifican los errores más frecuentes de los alumnos a la hora de trazar la altura de un triángulo sobre uno de sus lados, como son: la confusión de la altura con la mediana o con la mediatriz, la no identificación de la altura exterior, la asociación de la altura con una semirecta o con uno de los lados, o la ausencia de la perpendicularidad, en algunos casos. A estos tipos de errores haremos referencia cuando analicemos las características cognitivas de cada alumno (Capítulo 7).

La identificación y representación de las alturas de un triángulo son fundamentales en la resolución de los cuatro problemas del Capítulo 5, pero principalmente en:

- el problema del paralelogramo, ya que las líneas 2, 3 y 4 de su espacio básico (Cuadro 5.3.1, p. 100) no se pueden implementar si no se identifican las alturas de los diferentes triángulos que aparecen;
- el problema del triángulo, sobre todo si seguimos la línea 1 de su espacio básico (Cuadro 5.3.3, p. 109), en el que la aplicación de la fórmula del área del triángulo exige el reconocimiento de la igualdad de dos alturas.

6.3.2.3. *Criterios de valoración y categorización de los conocimientos*

Puesto que, como hemos indicado antes, el ítem está redactado de forma que en la respuesta de los alumnos se valore tanto la representación de las alturas de un triángulo

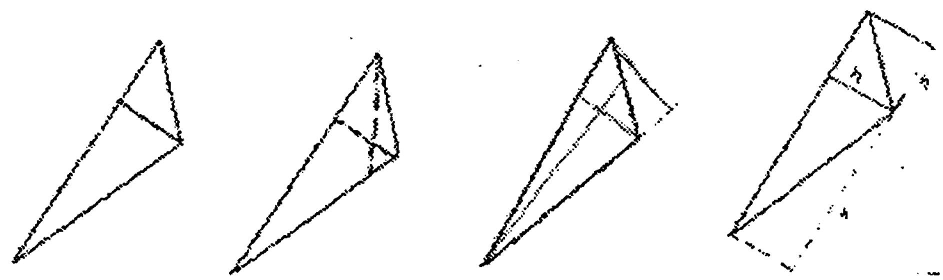
[6] Cuando hablamos de trazado de una recta perpendicular a otra no nos referimos a las características de la representación con regla y compás de una recta perpendicular a otra, sino simplemente a la representación aproximada de dicha recta, sin la utilización de tales instrumentos de dibujo, es decir, formando un ángulo de 90° una con la otra.

como el hecho de que éste tiene tres alturas, establecemos por separado los criterios para la evaluación de ambos tipos de conocimientos.

Por lo que respecta al número de alturas de un triángulo, los niveles de conocimiento en orden creciente serían:

Nivel I: El alumno desconoce el número de alturas de un triángulo y por tanto su representación. Un caso como éste sólo se daría si no hay respuesta por parte del alumno.

Nivel II: El alumno representa —correcta o incorrectamente— sólo una de las tres alturas del triángulo; suponemos que asocia a dicho triángulo una sola altura, como se muestra en la Figura 6.3.7a.



(a) (b) (c) (d)

Figura 6.3.7

Nivel III: Si hay elementos que muestran que el alumno trata de representar dos alturas, sea de forma correcta o incorrecta (fig. 6.3.7b).

Nivel IV: El alumno conoce de la existencia de tres alturas aunque su representación no sea correcta, como los ejemplos que mostramos en las Figuras 6.3.7c y d.

Las categorías anteriores están asociadas a la representación de las alturas de un triángulo. Los niveles de conocimiento de esa técnica los podemos diferenciar como sigue:

Nivel I: No representa correctamente ninguna altura.

Nivel II: Representa correctamente una sola altura (Figuras 6.3.7c y d).

Nivel III: Representa correctamente dos alturas (Figuras 6.3.7c).

Nivel IV: Representa correctamente las tres alturas.

6.3.3. **Ítem 3**

El objetivo de este ítem es identificar la idea que tienen los alumnos sobre la necesidad del establecimiento de los criterios de igualdad de triángulos, el conocimiento que tienen sobre dichos criterios, y su aplicación a la situación concreta que proponemos.

6.3.3.1. *Presentación del ítem 3*

3.- a) Indica, con una cruz, la (o las) respuesta correcta.

Para justificar que dos triángulos cualesquiera son iguales, sería suficiente comparar:

a1) Dos lados y un ángulo cualquiera de uno de los triángulos con sus correspondientes del otro.

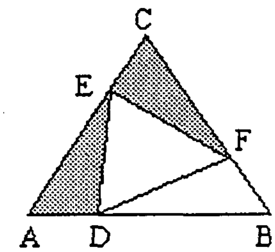
a2) Dos lados de uno de los triángulos con sus correspondientes del otro.

a3) Tres ángulos de uno con sus correspondientes del otro.

a4) Dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de un triángulo con sus correspondientes del otro.

a5) Sería necesario comparar a la fuerza los tres ángulos y los tres lados de uno de los triángulos con sus correspondientes del otro.

b) Suponemos que ABC es un triángulo equilátero y los segmentos AD, BF y CE son iguales. Cómo justificarías que los triángulos rayados de la figura son iguales? Explícalo detalladamente.



Hemos optado por presentar el ítem en dos apartados. En el primero proponemos un ítem de reconocimiento de los criterios de igualdad de triángulos en forma de elección múltiple, con sólo una respuesta correcta, aunque el enunciado deja abierta la posibilidad de varias respuestas. Por tanto, este apartado valora el conocimiento sobre uno de los casos de igualdad de triángulos, el que se muestra en la opción a4.

Entre las opciones que proponemos en el apartado *a* las hay que simplemente valoran el conocimiento de los criterios de igualdad de triángulos —opciones a1 hasta a4—, y una —opción a5—, incompatible con las anteriores, que nos permite conocer la necesidad que tienen los alumnos de establecer dichos criterios de igualdad.

En el apartado *b* proponemos un caso concreto de aplicación de criterios de igualdad de triángulos, con la particularidad de que el criterio que hay que aplicar no aparece entre las opciones del anterior apartado, en el que se pide una explicación detallada y abierta (no sujeta a elección entre opciones) de que los triángulos sombreados son iguales.

6.3.3.2. *Contenidos matemáticos involucrados*

Los conocimientos que involucra este ítem, como hemos dicho en la presentación, tienen que ver con los criterios de igualdad de triángulos —apartado a— y su aplicación al caso concreto de la igualdad de los triángulos rayados del apartado b).

La justificación de la igualdad de los triángulos rayados está basada en la igualdad de ángulos y lados del triángulo equilátero ABC.

La aplicación de criterios de congruencia de triángulos está presente en los cuatro problemas del Capítulo 5, pero especialmente en:

- la ejecución de la línea 1 del espacio básico del problema del paralelogramo (Cuadro 5.3.1, p. 100);
- la ejecución de la línea 1 del espacio básico del problema del hexágono (Cuadro 5.3.2, p. 105);
- las ejecuciones de las líneas 2 y 3 del espacio básico del problema del triángulo (Cuadro 5.3.3, p. 109);
- el movimiento de doblar las esquinas en el enunciado del problema del cuadrado justifica la congruencia de los triángulos doblados (Cuadro 5.3.4, p. 115).

6.3.3.3. *Criterios de valoración y categorización*

Establecemos por separado la categorización para cada uno de los elementos que se valoran.

Por lo que respecta al nivel de conocimiento que el alumno tiene de los criterios de igualdad de triángulos, las respuestas las podemos agrupar en los niveles siguientes:

Nivel I: Ausencia de respuesta o respuesta incorrecta.

Nivel II: Se eligen dos o más opciones entre las que se encuentra la a5. Este nivel corresponde a un caso de incongruencia en la respuesta.

Nivel III: Sólo se elige la opción a5, lo que denotaría un desconocimiento de la necesidad de aplicar criterios de igualdad de triángulos.

Nivel IV: Dos o más opciones entre las que está la correcta, pero no la a5.

Nivel V: Únicamente se elige la opción correcta.

Por lo que respecta al nivel de aplicabilidad de los criterios, las respuestas las podemos ordenar de menor a mayor nivel de conocimiento de la forma siguiente:

Nivel I: Entra dentro de este nivel de conocimiento la ausencia de respuesta o cualquier respuesta incongruente del tipo:

—Són proporcionals ja que tenen els múltiples costats. Això ens diu el teorema de Tales: Dos triangles seran iguals si tenen els costats i els angles iguals.

Nivel II: La justificación que se da es errónea, no correspondiendo a ningún criterio de igualdad. Como cuando comparan las bases y alturas para aplicar las fórmulas, confundiendo la congruencia con la equivalencia, o como cuando las respuestas son del tipo: “son iguales porque tienen los ángulos y lados iguales” sin más, o como las del ejemplo siguiente:

Són iguals, ja que la altura i altra [illegible] dels angles són iguals en els tres.

Nivel III: Hay un intento de aplicar algún criterio de igualdad de triángulos, pero no es completa su aplicación. El ejemplo siguiente nos da una idea del tipo de respuesta que incluiríamos en este nivel.

Que són iguals, perquè si els segments EC i AD són iguals i sabem que els costats AC i CB són iguals, llavors sabem que els segments EA i CF també són iguals $\boxed{AC - EC = CB - FB}$

Nivel IV: Aplicación correcta de algún criterio de igualdad sin razonar la igualdad de todos los elementos homólogos, como, por ejemplo:

los 2 triángulos marcados son iguales porque a los catetos pequeños de [illegible] son iguales y los otros largos también (ya que el de [illegible] es un triángulo equilátero), la hipotenusa también lo es y por lo tanto los dos triángulos son iguales.

Nivel V: Si además de lo anterior se razona o justifica la igualdad de los elementos homólogos basándose en los datos del enunciado y en las propiedades de los triángulos equiláteros, es decir, se da una respuesta en la que se ponga de manifiesto la igualdad de los lados AD y CE, según el enunciado, la igualdad de los lados AE y CF, por ser diferencia de dos segmentos iguales —AC y CB, como lados de un triángulo equilátero, y CE y BF, según el enunciado—, y además tienen iguales los ángulos comprendidos (A y C) por serlo de un triángulo equilátero. Una respuesta que entraría dentro de este nivel sería la siguiente:

Si ABC és un triangle equilàter vol dir que
$AB = BC = AC$ i si $AD = BF = CE$ vol dir que
els costats DB, CF i EA són iguals. Sabem que
si ABC és triangle equilàter
i els triangles equilàters són equiangles llavors els
angles $\angle C$, $\angle A$ i $\angle B$ són iguals.
Amb això sabem que tenen dos costats iguals i un angle
igual i per això podem demostrar que són iguals

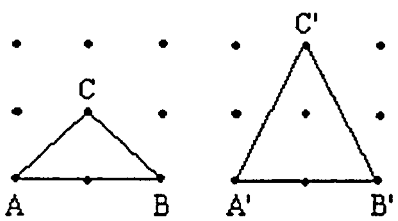
6.3.4. Ítem 4

La finalidad de este ítem es identificar los procedimientos que el alumno es capaz de utilizar para comparar las áreas de los dos triángulos que se muestran en la presentación, cuando dichos triángulos están inmersos en una malla cuadrangular. En particular, pretendemos saber si el alumno sólo "aplica fórmulas" para justificar la relación entre las áreas de los triángulos, o también encuentra y justifica dicha relación aplicando la "equidescomposición".

6.3.4.1. *Presentación del ítem 4*

Presentamos el ítem en forma de elección múltiple incluyendo una demanda de explicación de la respuesta y pedimos al alumno la justificación de su respuesta de otra forma distinta a la anterior para saber si es capaz de aplicar algún otro procedimiento que le lleve a justificar la relación.

4.- Se trata de comparar las áreas de los triángulos de la figura. Indica la respuesta que te parezca correcta.



El área del triángulo A'B'C' es:

- ☐ 3 veces
- ☐ 2 veces la del triángulo
- ☐ 1.5 veces ABC
- ☐ No hay suficientes datos para comparar dichas áreas.

Explica cómo lo has hecho. Intenta justificar tu respuesta de otra forma.

Los triángulos los presentamos inmersos en una malla cuadrangular —en lugar de dar una medida de la longitud de sus lados y altura— para no inclinar al alumno a la aplicación de la fórmula y facilitar la descomposición y recomposición de la figura.

6.3.4.2. *Contenidos matemáticos involucrados*

Uno de los conocimientos que más se utilizan en la comparación de dos áreas es la aplicación de las fórmulas correspondientes ya sea para el cálculo, por separado, de ambas áreas y la búsqueda, posterior, de la relación, o para comparar los elementos de las fórmulas con la finalidad de obtener directamente la relación pedida.

En el ítem concretamos las figuras geométricas en dos triángulos inmersos en una malla cuadrangular, lo que facilita la aplicación directa de la fórmula —base por altura partido por dos— si ésta es conocida para el cálculo directo de ambas áreas o la comparación de sus bases y alturas.

Por otra parte, la inmersión de las figuras en la malla cuadrangular facilita también el proceso de equidescomposición —división de la figura y su posterior recomposición— de varias formas, como mostramos en la Figura 6.3.8. En las dos primeras (Figura 6.3.8a y b), reducimos los dos triángulos a unidades cuadradas, y la tercera (Figura 6.3.8c) nos permite descomponer y recomponer el triángulo A'B'C' para obtener dos iguales al ABC.

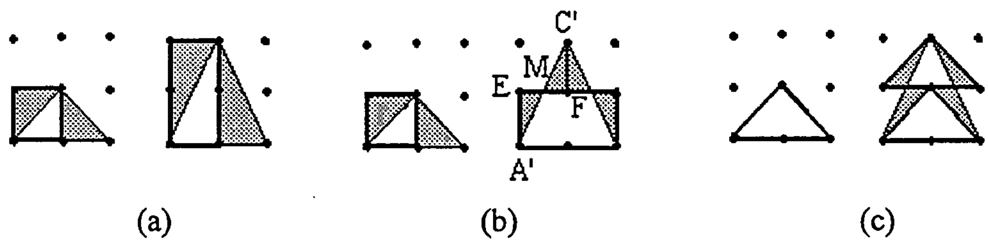


Figura 6.3.8

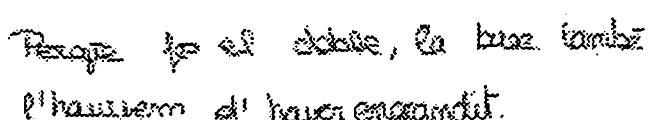
El proceso de recomposición exige el conocimiento de algunas propiedades relacionadas con la malla de puntos, como pueden ser: *a)* la división de un cuadrado (o rectángulo) en dos triángulos congruentes por una de sus diagonales; *b)* los criterios de congruencia de triángulos, *c)* la identificación de M como punto medio de los segmentos A'C' y EF (Figura 6.3.8b), etc.

Basta echar una ojeada a los espacios básicos de los problemas del Capítulo 5 para ver que la aplicación de fórmulas y, en especial, la comparación de sus elementos aparece en todos los problemas. Por el contrario, la técnica de equidescomposición aparece en el desarrollo de la línea 1 del espacio básico del problema del hexágono (p. 105) y se puede utilizar en la ejecución de los dos enfoques identificados del problema del cuadrado (p. 115).

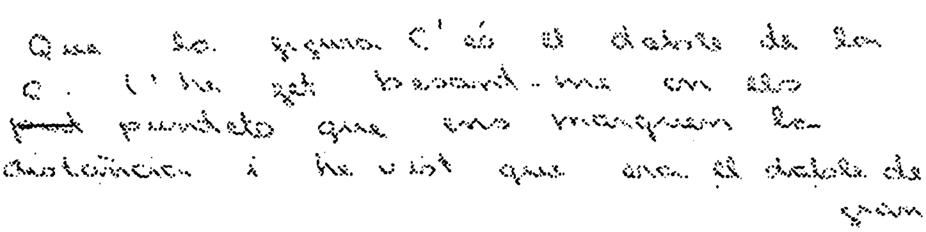
6.3.4.3. *Criterios de valoración y categorización*

Para la valoración de la técnica de comparación de elementos lineales y aplicación de la fórmula del área del triángulo establecemos los siguientes niveles de conocimiento:

Nivel I: Si no identifican la relación entre ambos triángulos, ya sea porque no aplican ninguna técnica (no hay respuesta) o porque aplican alguna de forma incorrecta. Respuestas como la siguiente entrarían dentro de esta categoría:


Perquè si el doble, la base també
l'haurem d'haver engrandit.

Nivel II: Si identifican la relación sin llegar a comparar los elementos lineales, quedando la justificación indeterminada, como en el caso siguiente:


Que la figura C' és el doble de la
C. L'he fet basant-me en els
~~punt~~ puntets que em marquen la
distància i he vist que era el doble de
gran

Nivel III: Si llegan a identificar la técnica —comparando las bases y las alturas—, pero hay algún tipo de deficiencia a la hora de aplicarla, lo cual produce una respuesta incorrecta o no llega a producirse respuesta. Respuestas como las tres que se muestran a continuación entrarían dentro de esta categoría:

Sí. Porqué la altura del triángulo A'B'C es el doble de alto, pero de ancho no.

Perquè el triangle A'B'C' té el doble d'altura; però no el doble de base i per tant és 1'5 vegades el triangle ABC. Tindria 2 vegades ABC si tingués el doble d'altura i el doble d'ample. Tindria 3 vegades ABC si tingués el triple d'altura i el triple de base

Té el doble d'alçada però té la mateixa base per tant, no arriba a doblar la seva àrea respecte al petit.

Nivel IV: Si la identificación y la aplicación es del todo correcta y por tanto la respuesta también es correcta. Consideramos justificaciones correctas las dos que mostramos a continuación.

Aquí ens diuen com a unitat la distància entre punt i punt. Veiem que el triangle ABC té base 2 i altura 1 i el triangle A'B'C' té base 2 i altura 2 i així dóna 1 i 2 respectivament

Amb la fórmula $A_T = \frac{b \cdot h}{2}$, i agafant les distàncies entre els punts com a unitat.

Para la valoración de la técnica de equidescomposición establecemos también cuatro niveles de conocimiento, a pesar de la dicotomía que hay en las respuestas de los alumnos cuando intentan aplicar otra técnica distinta de la aplicación de fórmulas —o no lo hacen o lo hacen de alguna de las formas descritas en la Figura 6.3.8, sin dar justificaciones, sólo basándose en la visualización de la descomposición—.

Nivel I: Si no identifican la relación entre ambos triángulos, ya sea porque no aplican ninguna técnica (no hay respuesta) o porque aplican alguna de forma incorrecta.

Nivel II: Si identifican la relación sin llegar a aplicar la técnica de equidescomposición. quedando la justificación indeterminada.

Nivel III: Se identifica la técnica y la justificación se hace visualmente. No hay otro tipo de justificación que no sea la gráfica.

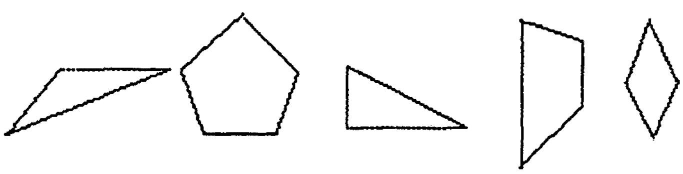
Nivel IV: Hay una argumentación basada en la aplicación de, por ejemplo, criterios de igualdad de triángulos.

6.3.5. Ítem 5

La finalidad de este ítem es evaluar el conocimiento de los alumnos sobre determinadas fórmulas que se utilizan directa o indirectamente en la resolución de los PCASP y el reconocimiento de los elementos que intervienen en ellas.

6.3.5.1. *Presentación del ítem 5*

6.- Algunas de las siguientes figuras se pueden asociar a una (o varias) fórmula. Hazlo e identifica, sobre la figura, los elementos a los que corresponden los símbolos (letras) de la fórmula.



$$1)\ \beta = \frac{180.(n-2)}{n}; \quad 2)\ \mathrm{A} = \frac{a * c * \operatorname{sen}\beta}{2}; \quad 3)\ \mathrm{A} = \frac{b+b'}{2} * h;$$

$$4)\ \mathrm{b}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2 - 2\mathrm{a}{*}\mathrm{c}{*}\cos\beta; \quad 5)\ \mathrm{A} = \frac{perimetro * apotema}{2}.$$

La forma de presentar el ítem, dando un conjunto de figuras geométricas y otro de fórmulas, lo convierte en un ítem de asociación —han de asociar los elementos de cada conjunto— y de reconocimiento, más que de evocación, precisamente porque se dan las fórmulas y se pide que se reconozcan las figuras a las que corresponden, evitando de esta forma un grado de memorización mayor.

Las características más destacadas de la presentación del ítem las podemos resumir como sigue:

- El número de elementos de cada lista es el mismo, cinco figuras geométricas y cinco fórmulas.
- Hay 7 asociaciones correctas (Figura 6.3.9), no quedando ninguna fórmula sin asociar, pero sí una figura (el rombo) a la que no corresponde ninguna fórmula.

Además hay fórmulas —la 4 y la 2, correspondientes al teorema del coseno y al área del triángulo, respectivamente— que se pueden asociar a los dos triángulos.

1 ⟶ b; 2 ⟶ a; 2 ⟶ c; 3 ⟶ d; 4 ⟶ a; 4 ⟶ c; 5 ⟶ b

Figura 6.3.9

- Para identificar con mayor exactitud el grado de conocimiento que los alumnos tienen de las fórmulas hemos pedido que identifiquen sobre las figuras los elementos que intervienen en ellas.

6.3.5.2. *Contenidos matemáticos involucrados*

No podíamos olvidar en las pruebas que estamos elaborando un ítem de las características del que mostramos aquí, precisamente por la importancia que tiene el conocimiento de fórmulas en la resolución de los PCASP.

No pretendemos, en este ítem, saber si los alumnos son capaces de aplicar las fórmulas en situaciones concretas, pero tampoco nos conformamos con su simple memorización, ya que la experiencia nos dice que muchas veces los alumnos memorizan la fórmula pero son incapaces de identificar sus elementos.

De las muchas posibilidades de elegir las figuras y fórmulas del ítem nos hemos decidido por incluir la fórmula del área de un polígono regular (pentágono), la del trapecio, el teorema de Pitágoras y la fórmula para calcular la medida del ángulo interior de un polígono regular. Hemos incluido la figura del rombo como distractor.

Además incluimos algunas fórmulas con referencias trigonométricas porque los alumnos que intervienen —de tercero de BUP y COU— tienen tendencia a utilizar ese tipo de fórmulas.

Como hemos indicado en el ítem anterior, el conocimiento de las fórmulas y la identificación de sus elementos es fundamental en la resolución de los cuatro problemas del Capítulo 5, en especial las que se refieren al triángulo, hexágono, cuadrado y trapecio, entre otras.

6.3.5.3. *Criterios de valoración y categorización*

La clasificación de las respuestas de los alumnos la hacemos teniendo en cuenta tres características:

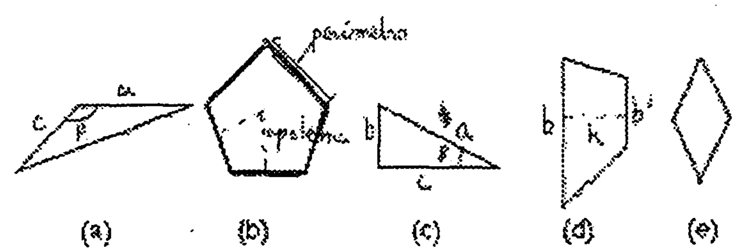
- la asociación de la fórmula con su figura correspondiente, sin más, es decir, sin tener en cuenta la identificación de los elementos de la fórmula, a la que podemos identificar como "asociación correcta";
- la identificación, de forma correcta, en la figura de todos los elementos que hay en la expresión de la fórmula; y
- la consideración de las asociaciones incorrectas.

Así pues, la Tabla 6.3.2 nos servirá para clasificar e identificar las respuestas de los alumnos tanto por lo que se refiere a las asociaciones correctas e incorrectas, como a los elementos que de ellas identifican. Hemos optado por resumir las respuestas en una tabla porque no nos interesa tanto el número de asociaciones correctas como cuáles son las que realmente hacen.

	No identifica ningún elemento o los identifica de forma errónea	Sólo identifica algunos elementos	Los identifica todos
Asociaciones correctas			
Asociaciones incorrectas			

Tabla 6.3.2

Una aplicación concreta de la tabla anterior la tendríamos en el ejemplo siguiente:



1) $B = \frac{180*(n-2)}{n}$; (e) 2) $A = \frac{a*c*senB}{2}$; (a) 3) $A = \frac{b+b'}{2} * h$; (d)

4) $b^2 = a^2 + c^2 - 2accosB$; (c) 5) $A = \frac{perímetro * apotema}{2}$ (b)

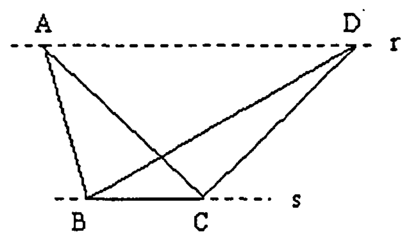
	No identifica ningún elemento o los identifica de forma errónea	Sólo identifica algunos elementos	Los identifica todos
Asociaciones correctas			Área triángulo/Triángulo (2/a) Área trapecio/Trapecio (3/d) T. del coseno/Triángulo rectángulo (4/c) Área polígono regular/Pentágono (5/b)
Asociaciones incorrectas	Ángulo interior/Rombo (1/e)		

6.3.6. Ítem 6

La finalidad de este ítem es comparar las áreas de dos triángulos por aplicación de sus fórmulas relacionando sus elementos entre sí (igualdad de bases y alturas).

6.3.6.1. *Presentación del ítem 6*

6.- De la figura siguiente sólo sabemos que r y s son rectas paralelas.



El área del triángulo ABC es:

- ☐ 2 veces
- ☐ 1.5 veces
- ☐ Igual
- ☐ No hay suficientes datos para comparar dichas áreas.

la del triángulo BCD

¿Por qué?

La presentación del ítem sigue el formato que hemos elegido en ítems anteriores —elección múltiple con demanda de justificación—, pero la elección y presentación de la figura está relacionada con lo que pretendemos valorar. Es decir, aunque es fundamental la identificación de las alturas de ambos triángulos, no pretendemos buscar situaciones en las que, como en el ítem 2, ése sea el principal objetivo, por eso presentamos la figura en forma estándar (base horizontal).

6.3.6.2. *Contenidos matemáticos involucrados*

En este ítem pretendemos valorar el conocimiento del alumno sobre el procedimiento de comparar las bases y las alturas de dos triángulos para relacionar sus áreas. Aunque consideraremos válida una respuesta que justifique la igualdad de las áreas diciendo, sin más, que tienen la misma base e igual altura —aunque ésta no se represente—, es evidente que la estructura conceptual que subyace a la aplicación de esta técnica es, además del conocimiento de la comparación de los elementos del triángulo (base y altura), la misma que en el ítem 2.

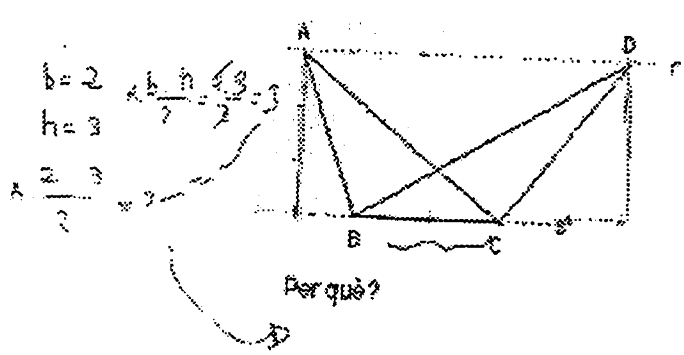
Situaciones como la descrita en este ítem las podemos encontrar en la ejecución de las líneas 3 y 4 del espacio básico del problema del paralelogramo (p. 105) y en la línea 1 del espacio básico del problema del triángulo (p. 109).

6.3.6.3. *Criterios de valoración y categorización*

Nivel I: La opción que se elige no es la correcta independientemente de la justificación que se dé. Entrarán dentro de este nivel respuestas como la que da un alumno que después de inclinarse por la opción "no hay datos suficientes" da la siguiente explicación: "Podria ser que les àrees fossin iguals, però no hi ha prou dades per a comparar-ho, ja que no sabem ni la longitud dels costats ni els seus angles".

Nivel II: La opción elegida es la correcta, pero no hay justificación o se da alguna que no es correcta o dice simplemente "por intuición" o "a ojo".

Nivel III: Consideramos correcta una respuesta que señale la opción adecuada y en la justificación haga referencia a la igualdad de las bases y de las alturas, aunque éstas no se representen, o dé valores concretos a la base y alturas, como ocurre en el ejemplo siguiente:



6.3.7. **Item 7**

Hemos construido este ítem con una doble finalidad:

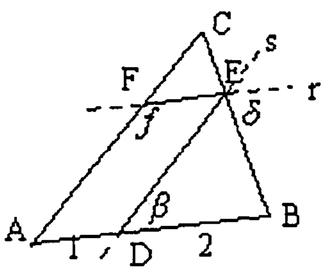
a) Evaluar los conocimientos de los alumnos sobre hechos tales como las relaciones que hay entre los ángulos determinados por dos rectas paralelas y una secante o entre las áreas de dos figuras semejantes y su razón de semejanza, así como los procedimientos que tienen que ver con la aplicación del teorema de Tales y de los criterios de semejanza de triángulos.

b) Plantear una situación problemática similar a la del problema del triángulo (analizado en el Capítulo 5), aunque en un contexto y con una estructura, en cuanto a lo que se pide y a la forma de pedirlo, diferentes, para observar si el alumno es capaz de asociar ambas situaciones y ver de qué forma influyen la una sobre la otra en todos los aspectos que analizamos en la resolución del problema del triángulo y en el análisis de las respuestas, al ítem, posteriores a la resolución de dicho problema.

6.3.7.1. *Presentación del ítem 7*

8.- De la siguiente figura sabemos que ABC es un triángulo cualquiera, la recta r es paralela al lado AB, la s es paralela al lado AC y los segmentos AD y DB miden 1 cm y 2 cm, respectivamente.

a) De las siguientes afirmaciones indica (con una X) la que consideres correcta.



- ☐ los ángulos β y δ son iguales;
- ☐ los ángulos β y δ suman 90°;
- ☐ los ángulos β y f suman 180°.

Explica por qué.

b) De las siguientes afirmaciones indica la (o las) que consideres correctas:

El segmento AF es:
- ☐ triple
- ☐ doble
- ☐ una vez y media

del FC

- ☐ no se pueden comparar las longitudes de los dos. segmentos.

¿Por qué?

c) De las siguientes afirmaciones indica la que consideres correcta:

El área del triángulo ABC es:
- ☐ 9 veces
- ☐ 12 veces
- ☐ 4 veces

la de FEC

- ☐ no hay datos suficientes para comparar ambas áreas.

¿Por qué?

Optamos por evaluar los contenidos matemáticos de los tres apartados haciendo referencia a una sola figura, acercándonos más, de esa forma, a la presentación real de un problema geométrico, en el sentido de que los conceptos y procedimientos involucrados en su resolución están relacionados entre sí. A pesar de ello, siguiendo con nuestra idea inicial de evaluar los conocimientos conceptuales y técnicos sobre situaciones problemáticas concretas, hemos dividido el ítem en tres apartados presentados en forma de "ítems de elección múltiple", en los que se pide una justificación de la opción que se elija.

En los tres apartados hemos optado porque la respuesta sea única para simplificar su dificultad, siendo las opciones presentadas en los apartados *b* y *c* mutuamente excluyentes y dando explícitamente la información de una única respuesta en el apartado *a* —"(...) indica la respuesta que consideres correcta"—.

Las opciones de los apartados *b* y *c* han sido elegidas entre las respuestas más frecuentes que se produjeron en un test abierto presentado a alumnos del mismo nivel.

Merece ser destacado el alto número de respuestas relacionadas con las últimas opciones de ambos apartados —de ahí su inclusión— debido a la tendencia a aplicar la comparación de las magnitudes longitudinales de las fórmulas cuando se comparan áreas de triángulos.

Por lo que respecta al apartado a, las opciones que presentamos son sólo tres de las muchas que se podían elegir, distribuidas de la siguiente forma: un caso de igualdad, otro de complementariedad y el tercero de suplementariedad, evitando, en los dos últimos casos, la nomenclatura técnica para facilitar la comprensión.

6.3.7.2. *Contenidos matemáticos involucrados*

Agrupamos en este ítem elementos de contenido bien diferenciados. En primer lugar, contenidos matemáticos que tienen que ver con las relaciones entre los ángulos formados por dos rectas paralelas que son cortadas por una secante. En segundo lugar, la aplicación del teorema de Tales para buscar la relación entre AF y FC (apartado *b*), ya sea de forma directa, $\frac{BD}{DA} = \frac{BE}{EC} = \frac{DE}{FC}$, o de forma indirecta para justificar la semejanza de los triángulos DBE y FEC —que solucionaría el apartado *b*—, o de ABC y FEC, que, junto con la aplicación del hecho de que la razón de las áreas de dos figuras semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza, solucionaría el apartado *c*.

$$\frac{\text{Area de ABC}}{\text{Area de FEC}} = \left(\frac{AB}{FE}\right)^2 = \left(\frac{3}{1}\right)^2$$

Naturalmente, la semejanza de esos dos pares de triángulos está basada o en el contenido matemático del apartado *a* —igualdad de ángulos homólogos—, o en la aplicación del teorema de Tales (apartado *b*) —proporcionalidad de lados homólogos—. De ahí la coherencia de la presentación conjunta de los tres apartados del ítem.

Como hemos dicho anteriormente, la situación que hemos planteado en este ítem es similar a la del problema del triángulo del Capítulo 5, por tanto los conocimientos que se evalúan se utilizan en los enfoques identificados de dicho problema (p. 106).

6.3.7.3. *Criterios de valoración y categorización*

Valoramos por separado cada apartado: en el *a*, las "relaciones angulares"; en el **b**, la "aplicación del teorema de Tales", y en el *c*, la "aplicación de los criterios de semejanza de triángulos".

Categorización de respuestas para valorar las "relaciones angulares":

Nivel I: Si no se elige ninguna opción o se elige de forma incorrecta, independientemente de la justificación que se dé.

Nivel II: Si la opción elegida es la correcta y no hay ningún tipo de justificación, o la única explicación es: "Porque me lo parece", "por intuición", o respuestas parecidas, como en el caso siguiente: "Porque ß es complementario de *f*".

Nivel III: Si la opción es la correcta, pero la justificación que se da es incompleta, como, por ejemplo, la que se muestra a continuación:

Perquè el segment FE és paral·lel a DB i el segment BE és paral·lel a FA.

Nivel IV: Si la opción es la correcta y en la justificación se hace referencia a la posición de los ángulos ß y *f* cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante, como la siguiente respuesta:

Perquè el segment AC i ED són paral·leles i el segment AB i FE també, l'angle que formen el costat CF i FE és igual que β.

Categorización de respuestas para valorar la técnica "aplicación del teorema de Tales":

Nivel I: Si no se elige ninguna opción o se elige incorrectamente, independientemente de la justificación que se dé.

Nivel II: Si la opción elegida es la correcta y no hay ningún tipo de justificación, o la única explicación es: "Porque me lo parece", "por intuición", o justificaciones que simplemente repiten lo que se pide, como es el caso de la respuesta: "Porque si la razón entre AD y AB es 3, la razón entre EC y BC también ha de ser 3".

Nivel III: Si la opción es la correcta y la justificación es incompleta, ya sea porque las referencias al teorema de Tales o a la semejanza de triángulos no son suficientemente explícitas, es decir, no se especifica qué triángulos son semejantes o a qué rectas paralelas cortadas por una secante se aplica el teorema de Tales, o porque hay una referencia implícita o explícita a la proporcionalidad de los lados, sin aludir a la semejanza o al teorema de Tales.

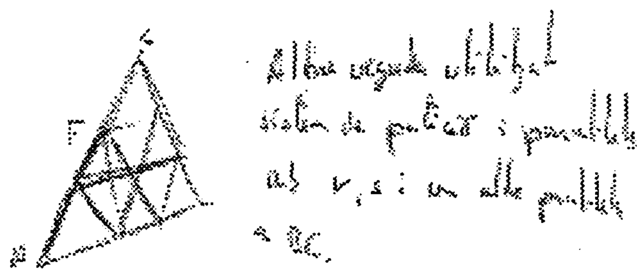
Nivel IV: Si la opción es correcta y hay una justificación suficiente basada en referencias acertadas y completas al teorema de Tales y a la semejanza de los triángulos DBE y FEC.

Categorización de respuestas para valorar la técnica “aplicación de criterios de semejanza de triángulos”[7]:

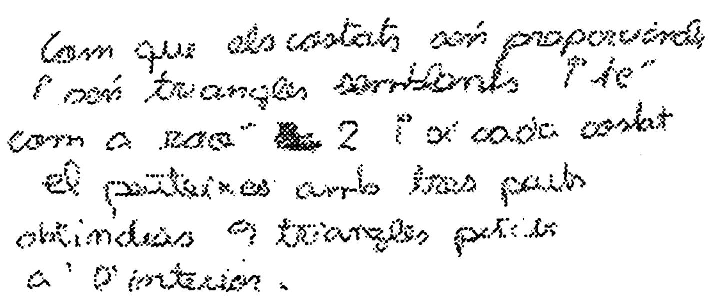
Nivel I: Si no se elige ninguna opción o se elige incorrectamente, independientemente de la justificación que se dé.

Nivel II: Si la opción elegida es la correcta y no hay ningún tipo de justificación, o la única explicación es: “Porque me lo parece”, “por intuición”, o respuestas análogas.

Nivel III: Si la opción es acertada y la justificación incluye la división del triángulo ABC en 9 triángulos iguales al FEC mediante la apreciación u observación de que los lados AC y BC miden tres veces los lados FC y EC, respectivamente, como en el caso de una respuesta del tipo:



o si se hace referencia a la semejanza de los triángulos ABC y FEC —sin llegar a razonarla completamente— y a la razón de proporcionalidad entre sus lados sin mencionar la relación entre la razón de semejanza y la de las áreas de las figuras semejantes; es el caso de una respuesta como la siguiente:



Nivel IV: Si la opción es correcta y la justificación de la semejanza es completa y además se hace referencia a la relación entre la proporcionalidad de los elementos lineales homólogos y el área de dos figuras semejantes.

[7] En este apartado valoramos conjuntamente el procedimiento de aplicación de criterios de semejanza de triángulos y el conocimiento que han de tener los alumnos del hecho puntual de que en figuras semejantes la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza (aspecto que se valora realmente en la última categoría).

6.3.8. **Presentación de los ítems 8, 9 y 10.**

Como dijimos en el Capítulo 3, la segunda parte de las pruebas de valoración de conocimientos, que presentamos a los alumnos para que respondan de forma individual, consta de tres problemas, dos de ellos diferentes en las dos pruebas —el 8A y 9A, que corresponden a la inicial y el 8B y 9B, a la final— y el 10 común a ambas.

Los problemas del mismo número los hemos elegido de forma que sean similares en cuanto a la naturaleza de los enfoques mediante los que se puede abordar su resolución, como ponemos de manifiesto en el análisis que hacemos de ellos en los apartados siguientes.

Además, tanto el 8 (A o B), como el 9 (A o B) y el 10 son problemas cuyas resoluciones se pueden atacar de formas similares a las del problema del paralelogramo (pp. 96-100), a las del problema del hexágono (pp. 101-104) y a las del problema del cuadrado (pp. 110-115)[8], respectivamente, con la finalidad de analizar los cambios que se producen en las formas en que los alumnos abordan la resolución de los problemas de la prueba final respecto a los de la inicial y a los de la resolución conjunta.

Para facilitar el análisis y la evaluación de los problemas que proponemos, los enunciados los presentamos en un modelo en el que pedimos al alumno que resuelva el problema, que, al mismo tiempo, escriba lo que está haciendo en cada momento y que resuma los pasos que ha seguido para encontrar la solución.

Se indicó a los alumnos la necesidad de que utilizaran bolígrafo en la escritura, que tacharan con una línea las partes que consideraran incorrectas, y que entregaran todos los cálculos que hubieran realizado. Tomamos tal decisión porque eso nos podía ayudar a identificar el enfoque por el que los alumnos habían optado, cómo se había generado y el grado de desarrollo que conseguían, así como los conocimientos que utilizaban[9].

En los apartados siguientes mostramos sólo los enfoques que fueron identificados por un grupo de alumnos que resolvió los problemas en plan experimental (Capítulo 3). Así, por ejemplo, no aparecen, en el análisis que hacemos, enfoques que están relacionados con la consideración de casos particulares, límite y singulares.

6.3.9. **Problemas 8A y 8B**

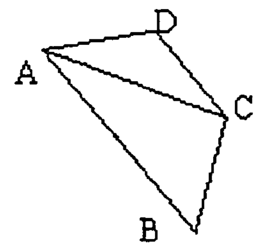
Proponemos dos problemas cuya resolución se pueda abordar de forma similar a la del problema del hexágono (pp. 101-104), con la finalidad de analizar el enfoque que los alumnos implementan individualmente, si tiene que ver con los que implementan en la resolución conjunta, y si dicha resolución influye en la del problema 8B.

[8] También incluimos en esta prueba un ítem —el número 7 (p. 142)— que abarca las características del problema del triángulo (pp. 105-109).

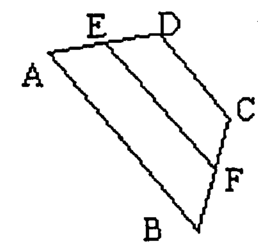
[9] No es nuestra intención identificar la variedad de enfoques que es capaz de reconocer un alumno, como hace A. H. Schoenfeld (1985b), o que es capaz de implementar, como hace L. Puig (1996), ni de cuantificar el número de problemas resueltos o casi resueltos, como hace el propio A. H. Schoenfeld cuando trata de comparar los resultados de dos grupos de alumnos en la resolución de cinco problemas por aplicación de determinadas estrategias.

6.3.9.1. *Enunciados*

8A. Una de las diagonales grandes de un hexágono regular lo divide en dos trapecios iguales. Si consideramos uno de ellos y trazamos una de sus diagonales, obtenemos dos triángulos. Busca la relación entre las áreas de dichos triángulos.



8B. Si dividimos por la mitad un hexágono regular obtenemos el trapecio ABCD de la figura. Si E y F son los puntos medios de los segmentos AD y BC, respectivamente, busca la relación que hay entre las áreas de los trapecios ABFE y FCDE.

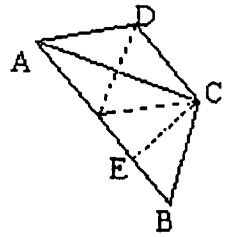


6.3.9.2. *Identificación de enfoques*

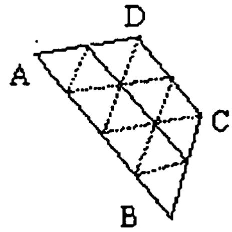
Desarrollamos dos formas de abordar la resolución de estos problemas y las agrupamos en dos enfoques: el primero, que exige la descomposición inicial de la figura dada en otras — "división de la figura en partes"—, para aplicar después otra técnica algebraica o geométrica, y el segundo que, sin descomposición previa, utiliza directamente el lenguaje algebraico —"utilización del lenguaje algebraico"— para obtener la solución mediante la aplicación de las fórmulas de las áreas de las figuras que aparecen en el enunciado.

1) División de la figura en partes.

1a) En el caso del problema 8A, la naturaleza especial del trapecio —obtenido a partir del hexágono regular, por tanto, es un trapecio isósceles y con la base mayor doble que la menor, que es, a su vez, igual que los otros lados (Figura 6.3.10a)— nos facilita su división en tres triángulos equiláteros iguales. Dos de ellos quedan, a su vez, divididos en triángulos rectángulos, que podemos justificar que son iguales por la aplicación de criterios de igualdad y basándonos en la igualdad de tres de los lados del trapecio y de éstos con los segmentos que unen los vértices DC con el centro. Esto nos permite obtener la relación buscada, ya sea utilizando como unidad de medida el triángulo EBC, o simplemente aplicando la técnica de equidescomposición, como se muestra en la resolución de la Figura 6.3.11.



(a)



(b)

Figura 6.3.10

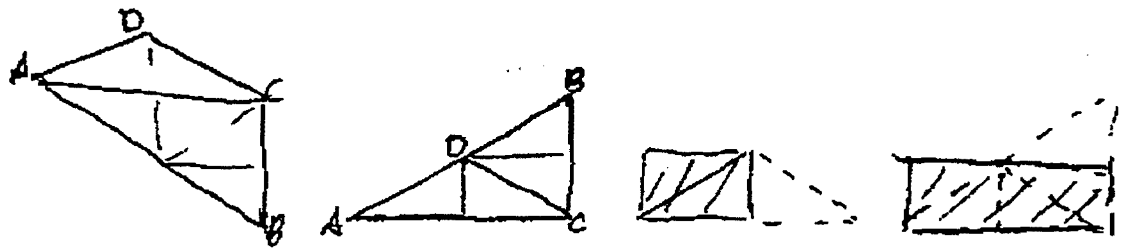
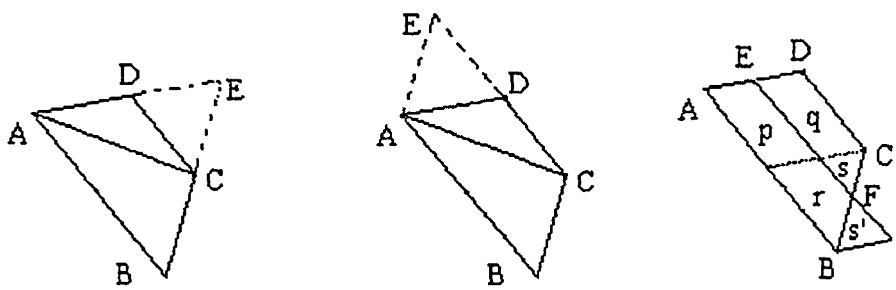


Figura 6.3.11

Otros tipos de descomposiciones, basados en la complementación del trapecio original con triángulos equiláteros y en la búsqueda de la relación entre las áreas de los triángulos por comparación de bases y alturas, los mostramos en la Figura 6.3.12a, donde los triángulos ABC y ACE son iguales, así como los ACD y DCE, y, por tanto, ADC tiene la mitad de área que ABC. De igual forma se puede razonar en el caso de la Figura 6.3.12b.



(a) (b) (c)

Figura 6.3.12

1b) En el caso del problema 8B, la división del trapecio se puede hacer trazando paralelas a sus lados, como indicamos en la Figura 6.3.10b. La igualdad de los triángulos obtenidos, basada en la relación entre los lados del trapecio y en el hecho de que las rectas que se trazan son paralelas a los lados, nos permite identificar la relación entre las áreas de los trapecios simplemente contando unidades triangulares.

Otro procedimiento de descomposición del trapecio, bastante parecido al anterior, lo mostramos en la Figura 6.3.12c, donde hemos trazado la paralela al lado AD por C, reduciéndose el problema a comparar el área del triángulo s con la del trapecio r y de éste con el paralelogramo p o q (que son iguales).

(a) (b)

Figura 6.3.13

2) Utilización del lenguaje algebraico.

2a) En el caso del problema 8A, identificamos los lados de ambos triángulos y sus alturas. La comparación de sus áreas la obtenemos mediante la aplicación de las fórmulas correspondientes, ya sea:

• basándonos en el reconocimiento de los ángulos y de la relación entre los lados del trapecio y de los triángulos (Figura 6.3.13a):

$$A_1 = \frac{x.x.\operatorname{sen} 60^\circ}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}; \quad A_2 = \frac{x.2x.\operatorname{sen} 120^\circ}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}; \; A_2 = 2A_1;$$

• comparando directamente las áreas de los dos triángulos basándonos en la relación entre sus bases y sus alturas:

$$A_1 = \frac{2x.h}{2} = x.h; \quad A_2 = \frac{x.h}{2}; \quad A_2 = 2A_1.$$

• considerando la base AC y la altura DE del triángulo ACE (Figura 6.3.13b) y la base AC y la altura CB del triángulo ACB, y justificando que la relación entre las alturas es uno a dos, puesto que los triángulos rectángulos ADE y ACB son semejantes de razón uno —hipotenusa AD— a dos —hipotenusa AB—.

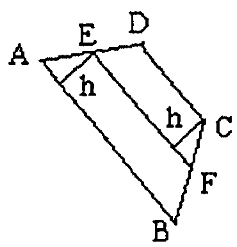


Figura 6.3.14

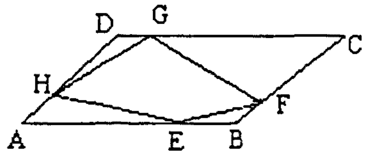
2b) El enfoque algebraico del problema 8B (Figura 6.3.14) se basa en la relación que hay entre las bases de los dos trapecios, AB es el doble de DC y EF es la semisuma de las dos, es decir, 3/2 de DC. Con esta relación y sabiendo que las alturas de los dos trapecios son iguales, podemos abordar la resolución con la única dificultad de la aplicación correcta de la fórmula del área del trapecio y del desarrollo de los cálculos algebraicos.

6.3.10. **Problemas 9A y 9B**

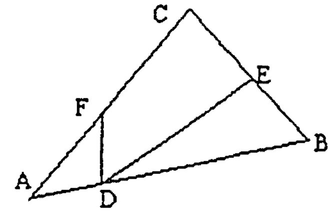
Proponemos dos problemas cuya resolución se pueda abordar de forma similar a la del problema del paralelogramo (p. 96), con la finalidad de analizar el enfoque que los alumnos implementan individualmente, si tiene que ver con los que implementan en la resolución conjunta, y si dicha resolución influye en la del problema 9B.

6.3.10.1. *Enunciados*

9A. ABCD es un paralelogramo y H y F son dos puntos cualesquiera de los lados AD y BC, respectivamente, con la condición de que los segmentos AH y BF sean iguales. Busca la relación que hay entre las áreas del paralelogramo y la del cuadrilátero EFGH, donde E y G son dos puntos cualesquiera de los lados AB y CD, respectivamente.



9B. ABC es un triángulo cualquiera y E y F son los puntos medios de los lados BC y AC, respectivamente. Si D es un punto cualquiera del lado AB, ¿qué relación hay entre el área del cuadrilátero DECF y la suma de las áreas de los triángulos DBE y ADF?



6.3.10.2. *Identificación de enfoques*

Desarrollamos aquí dos formas de abordar estos problemas y las agrupamos en dos enfoques: el primero, que exige la descomposición inicial de la figura dada en otras —por eso lo denominamos "división de la figura en partes"—, para aplicar después otra técnica algebraica o geométrica, y el segundo —al que llamamos "utilización del lenguaje algebraico"—, que, sin descomposición previa, utiliza directamente el lenguaje algebraico para obtener la solución mediante la aplicación de las fórmulas de las áreas de las figuras que ya aparecen en la figura del enunciado.

1) División de la figura en partes.

1a) En el caso del problema 9A, la división del paralelogramo se puede hacer de dos formas:

- Mediante el trazado de las rectas HF, GM y EN paralelas a los lados del paralelogramo (Figura 6.3.15a), lo que reduce la comparación de las áreas del paralelogramo ABCD y del cuadrilátero EFGH a la simple comparación de cada paralelogramo —HMGD, MFCG, AENH y EBFN— con uno de los triángulos obtenidos al trazar una de sus diagonales.

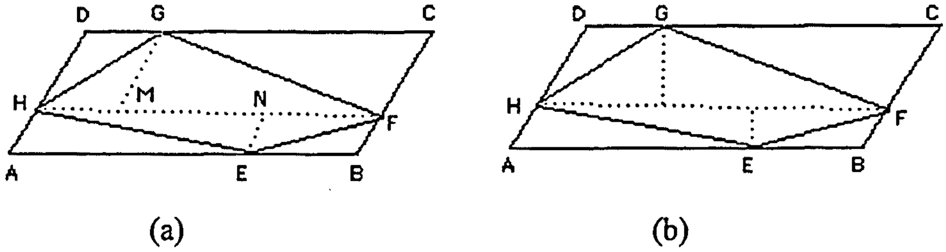


Figura 6.3.15

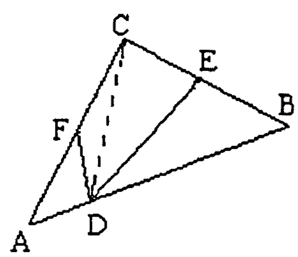
Se necesita aplicar, después de la división de la figura en cuatro paralelogramos, los criterios de igualdad de triángulos, o conocer el hecho de que la diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.

• Una simple división del paralelogramo en otros dos mediante el trazado de la recta HF (Figura 6.3.15b), paralela a los lados AB y CD, nos permite comparar ambas áreas simplemente aplicando la técnica de comparar un paralelogramo con un triángulo que tengan la misma base y altura.

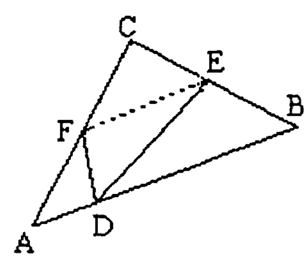
1b) En el caso del problema 9B, la descomposición se puede hacer de más formas que en el caso anterior, por ejemplo:

• Si dividimos el cuadrilátero DECF mediante la diagonal DC (Figura 6.3.16a), obtenemos dos triángulos —DEC y DCF— que son, respectivamente, equivalentes a los triángulos DBE y ADF, puesto que tienen las mismas bases —BE=EC y AF=FC— y las mismas alturas —perpendiculares de D a cada uno de los lados CB y AC, respectivamente—.

Este enfoque exige, además de la división del cuadrilátero como lo hemos hecho, saber representar correctamente las alturas de los triángulos y aplicar la técnica de comparar áreas de triángulos mediante la comparación de sus bases y sus alturas.



(a)



(b)

Figura 6.3.16

• Si la división del cuadrilátero la hacemos trazando el segmento FE, que une los puntos medios de los lados AC y BC (Figura 6.3.16b) y, por tanto, paralelo al lado AB, podemos aplicar la fórmula del área del triángulo para justificar que la suma de las áreas de los triángulos DEF y FEC es igual a la de DBE más ADF. La justificación de esa relación está basada en el hecho de que las alturas de todos los triángulos —sobre los lados FE y AB— son iguales y en que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es la mitad del tercer lado.

• El caso que mostramos en la Figura 6.3.17a se basa en la descomposición del triángulo ABC en otros cuatro iguales, mediante el trazado de rectas paralelas a los lados por los puntos medios F y E, y en la justificación posterior de que DEF y GEF son equivalentes, por tener la misma base —EF— y la misma altura —AB y EF son paralelas—.

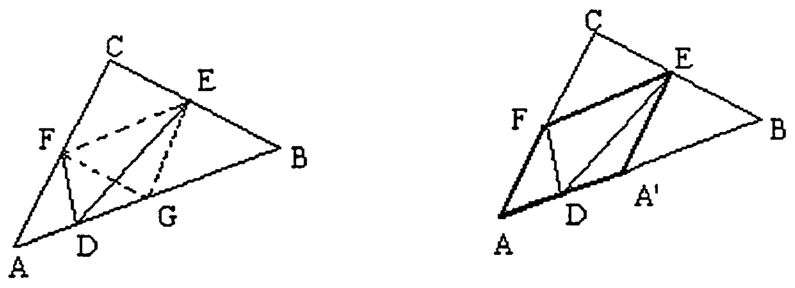


Figura 6.3.17

• La descomposición que mostramos en la Figura 6.3.17b es parecida a la anterior, pero en ella sólo hemos trazado las paralelas A'E, al lado AC, y EF, al lado AB. Se puede justificar la igualdad de los triángulos A'BE y FEC, así como que el triángulo DEF es la mitad del paralelogramo AA'EF porque tienen la misma base y altura, y, de ahí, la equivalencia del triángulo DEF con ADF y DA'E.

2) Utilización del lenguaje algebraico.

2a) En el problema 9A (Figura 6.3.18), el cálculo del área (A_c) del cuadrilátero EFGH la podemos hacer restando del área (A_p) del paralelogramo ABCD las de los cuatro triángulos —AEH, EBF, FCG y GDH— de las esquinas. Para ello, hemos de aplicar las fórmulas de las áreas de las figuras que intervienen —triángulos y paralelogramo— y tener en cuenta que AE + EB = DG + GC = AB = DC, y que la suma de las alturas $h_1 + h_2$ de los triángulos es la del paralelogramo.

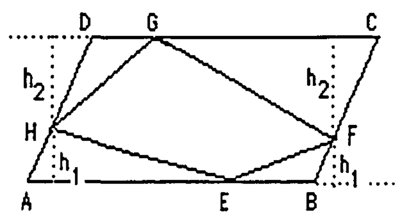


Figura 6.3.18

Así pues, tenemos que: $A_p = AB.h$

$$A_c = A_p - A_{tr.AEH} - A_{tr.EBF} - A_{tr.FCG} - A_{tr.GDH};$$

$$A_c = AB * h - \frac{AE * h_1}{2} - \frac{EB * h_1}{2} - \frac{DG * h_2}{2} - \frac{GC * h_2}{2} =$$

$$= AB * h - (AE + EB) * \frac{h_1}{2} - (DG + GC) * \frac{h_2}{2} =$$

$$= AB * h - \frac{AB * (h_1 + h_2)}{2} = \frac{AB * h}{2}$$

$$A_p = 2A_c$$

2b) En el problema 9B (Figura 6.3.19), el cálculo del área (A_C) del cuadrilátero DECF la podemos hacer restando del área (A_T) del triángulo ABC las de los dos triángulos ADF y DBE. Para ello, sólo hemos de aplicar las fórmulas de las áreas de las figuras que intervienen —siempre triángulos— y basarnos en que la altura h_1 es la mitad de la h.

De esta forma tenemos que:

$$A_{tr.ADF} + A_{tr.DBE} = \frac{AD * h_1}{2} + \frac{DB * h_1}{2} = \frac{AB * h_1}{2}$$

$$Ac = A_T - (A_{tr.ADF} + A_{tr.DBE}) = \frac{AB * h}{2} - \frac{AB.h_1}{2} = \frac{AB * h_1}{2}$$

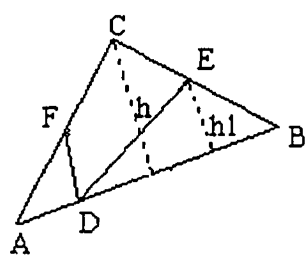


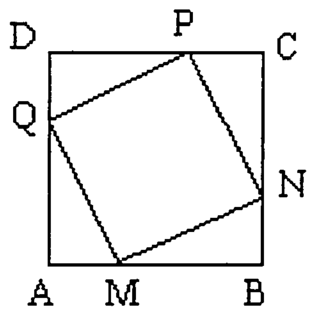
Figura 6.3.19

6.3.11. **Problema 10**

Con la propuesta de este problema pretendemos identificar, como ocurre en el problema del cuadrado (pp. 101-104), la forma en que el alumno se aproxima a su resolución, si lo hace de una forma inductiva, considerando medidas concretas para los segmentos DP y PQ hasta obtener la relación pedida entre las áreas —aplicando el "método de ensayo-error"—, o si , por el contrario, lo hace de una forma deductiva, es decir, si el alumno elige desde el principio una identificación simbólica adecuada de los elementos de los cuadrados que le permita obtener la razón DP/PC a partir de la razón entre las áreas.

6.3.11.1. *Enunciado*

10. ABCD y MNPQ son dos cuadrados, como se observa en la figura. ¿Cuál ha de ser la razón entre los segmentos DP y PC para que la razón entre las áreas de los dos cuadrados sea $\frac{5}{8}$.



6.3.11.2. **Identificación de enfoques**

Según lo dicho en el apartado 6.3.11, se puede abordar este problema utilizando dos enfoques diferentes: *a)* el asociado al "método ensayo-error", y *b)* la utilización de un lenguaje algebraico. Estos dos enfoques son los que trataremos de identificar en los trabajos escritos de los alumnos.

a) La aproximación inductiva consta de los pasos siguientes: dar valores concretos a los segmentos DP y PC (o DQ); calcular el lado PQ del cuadrado MNPQ aplicando el teorema de Pitágoras; calcular el área del cuadrado ABCD, sabiendo que su lado es DP más DQ; y, finalmente, comparar ambas áreas.

b) La resolución del problema mediante la identificación simbólica de los segmentos DP y DQ tiene el inconveniente, para los alumnos que participan en la investigación, del desarrollo algebraico que conlleva.

$$\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}=\frac{5}{8}; \quad \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+2xy}=\frac{5}{8}; \quad \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\left(\frac{y}{x}\right)}=\frac{5}{8};$$

si p = $\frac{y}{x}$, obtenemos: $3p^2-10p+3=0$, de donde p = 3 y p= $\frac{1}{3}$

Así, el paso de la segunda a la tercera igualdad suele ser, para ellos, infranqueable, si es que llegan a ese grado de desarrollo.

La aplicación de los enfoques que acabamos de exponer requiere, por parte de los alumnos, ciertos conocimientos conceptuales y técnicos, en este caso relacionados con las fórmulas de las áreas de cuadrados y triángulos, pero sobre todo los que tienen que ver con la manipulación de expresiones algebraicas.

6.3.12. **Criterios de valoración**

Nuestro propósito es hacer un análisis cualitativo detallado de las resoluciones escritas de los alumnos con la finalidad de identificar qué enfoques y qué tipo de conocimientos utilizan para, de esa forma, compararlos con los usados antes, durante y después de los procesos de resolución orales. A pesar de ello, proponemos a continuación, para seguir la tónica general de este capítulo, una escala de valoración del desarrollo del enfoque que los alumnos implementan en la resolución de los problemas propuestos.

Primero, reconocemos el tipo de enfoque que el alumno identifica de acuerdo con los descritos en los apartados anteriores —división de la figura en partes, utilización del lenguaje algebraico y aproximación inductiva—. Para ello nos basamos en la resolución que haga el alumno, en los contenidos de las descripciones y en el resumen de la resolución. Después tratamos de establecer el grado desarrollo que alcanza el enfoque que pone en práctica, según el esquema que mostramos a continuación:

Grado I : Lo asociamos a las resoluciones de los alumnos que sigan cualesquiera de los apartados siguientes:
- no desarrolla nada el enfoque que plantea;
- el desarrollo lo hace de forma errónea;
- hace un desarrollo que no corresponde con el enfoque identificado.

Grado II : Inicia la puesta en práctica, pero es claramente incompleta porque:
- no podemos identificar la técnica empleada al no dar ningún tipo de explicación;
- no pasa de la consideración de ciertos casos particulares sencillos o de cómputos elementales;
- tiene errores conceptuales o de cálculo considerables, o deficiencias graves en el conocimiento de determinados conceptos o técnicas.
- no hace una identificación simbólica adecuada.

Ejemplos ilustrativos de resoluciones correspondientes a este grado de desarrollo serían los siguientes:

1) Se hace la división del paralelogramo ABCD del problema 9A (Figura 6.3.18) mediante el segmento HF, se identifican las alturas de los paralelogramos que resultan y se propone calcular sus áreas aplicando la fórmula lado por lado, o aplicando, después, otras fórmulas incorrectas.

2) No se elige una identificación simbólica adecuada, por ejemplo, en el problema 10, y se hace un desarrollo como el siguiente: $\dfrac{AB.BC}{QM.MN}=\dfrac{5}{8}$; $\dfrac{DP+PC.CN+NB}{QN.MN}=\dfrac{5}{8}$; $DP+PC=\dfrac{\frac{5}{8}.QM.MN}{CN+NB}$; etc. (Figura del enunciado, apartado 6.3.11.1), no llegando, obviamente, a ningún resultado.

3) Se representa una figura como la 6.3.12a, correspondiente a la resolución del problema 8A, y se expresa la igualdad de los segmentos AD y BC, la de los triángulos ABC y ACE, y se dice que el triángulo DCE es equilátero. Es evidente que este alumno afronta el problema de forma geométrica, pero en la puesta en práctica que trata de iniciar no expresa ningún tipo de razonamiento, por lo que hace un desarrollo muy incipiente.

Grado III: Reservamos este grado de desarrollo para las situaciones en las que se inicia la puesta en práctica de forma razonable, se produce un planteamiento correcto, pero no va seguido de ningún tipo de desarrollo algebraico.

Esta situación se produce con frecuencia en la resolución del problema 10, en la que los alumnos eligen de forma correcta las incógnitas DP y DQ, expresan adecuadamente las fórmulas de las áreas de los cuadrados en función de DP y DQ y llegan a expresar la relación: $\frac{DP^2+DQ^2}{(DP+DQ)^2}=\frac{5}{8}$, sin proseguir en el desarrollo de la expresión obtenida.

Grado IV: Este grado de desarrollo corresponde a una ejecución muy avanzada, pero debido a diversas razones —errores computacionales, desconocimiento de algún concepto imprescindible para continuar, deficiencias en el desarrollo de los cálculos sobre todo algebraicos que no le permiten continuar— no consigue llegar al final o lo consigue, pero por los motivos anteriores obtiene un resultado erróneo, o bien correcto, pero basando la argumentación sólo en la visualización de la división de la figura.

Ejemplos ilustrativos de resoluciones correspondientes a este grado de desarrollo serían los siguientes:

1) Un alumno llega a obtener la expresión $A_1 = \frac{AB}{CD} * A_2$ en la resolución del problema 8A, donde A_1 y A_2 son las áreas de los triángulos ABC y ACD que tienen por bases AB y CD, respectivamente. Ésta es una situación en la que el alumno ha hecho, hasta este momento, una resolución correcta, pero no obtiene el resultado final porque desconoce la relación entre AB y CD.

2) Un alumno comienza el desarrollo de la expresión planteada en el ejemplo del grado de desarrollo III y llega a obtener una ecuación del tipo: $PC^2\text{-}5DP.PC\text{-} \frac{5}{8}DP^2 = 0$, y no sabe seguir al no identificar como incógnita el cociente $\frac{DP}{PC}$, o por no asignar a DP o PC algún valor de referencia, por ejemplo, la unidad.

3) Las ejecuciones de enfoques geométricos que expliciten la igualdad de triángulos, aunque no den una justificación de ella, han de estar dentro de este nivel. Esto ocurre con frecuencia en las ejecuciones de los enfoques geométricos de los problemas 8A, 8B, 9A y 9B, en los que, tras la descomposición de la figura en triángulos, los alumnos expresan su igualdad, sin más. Son situaciones en las que los triángulos que se obtienen resultan de dividir un paralelogramo por una de sus diagonales, un triángulo equilátero por una de sus alturas, etc., es decir, en las que desempeña un papel importante la visualización de la figura.

Grado V: Hace una ejecución completa del enfoque identificado, dando una respuesta correcta al problema propuesto y los argumentos necesarios para llegar a ella, o dando una repuesta incorrecta, pero de forma que la incorrección sea debida a errores computacionales sin importancia.

CAPÍTULO 7

CARACTERÍSTICAS COGNITIVAS DE LOS ALUMNOS

Nuestras afirmaciones sobre conocimientos no pueden ser mejores ni peores que los instrumentos de recolección de datos que utilicemos.

J. D. Novak y D. B. Gowin (1988)

7.1. Introducción

La descripción que hacemos de las características cognitivas de los alumnos proviene de dos fuentes: por una parte, del conocimiento que tenemos de su actuación y comportamiento como consecuencia del trato diario en las clases de matemáticas, y, por otra, de las respuestas individuales que los alumnos dan a la prueba inicial sobre valoración de los conocimientos matemáticos involucrados en los problemas que comparan áreas de superficies planas (véase el Capítulo 6).

En los apartados que siguen —correspondientes a cada pareja—, describimos las características generales de los alumnos; presentamos los resultados comparativos de los miembros de cada pareja en forma gráfica; y hacemos un análisis detallado de las respuestas, de cada uno de ellos, a la prueba inicial.

7.2. El caso de las alumnas Rosa y Anna

Rosa y Anna son dos alumnas de 16 años que se sientan juntas en todas las clases, a pesar de ello, fuera del instituto no tienen una relación de amistad especial.

Rosa es una chica brillante en el quehacer diario de la clase. Lo manifiesta con intervenciones, no muy frecuentes, pero generalmente muy afortunadas, que aportan visiones de ejercicios y problemas distintas de las que se trabajan en clase. Tiene un tipo de pensamiento que podríamos calificar como geométrico, ya que su tendencia es a expresar las ideas que tiene por medio de representaciones gráficas de las diferentes situaciones —"hago dibujos", como suele decir en repetidas ocasiones—, aunque sus conocimientos sobre conceptos y técnicas específicas no son muy amplios.

Pensamos que el rendimiento de Rosa no está de acuerdo con su creatividad e imaginación ni con su visión geométrica de los problemas, aunque siempre aprueba las matemáticas sin dificultad. El enfoque algebraico que se da a las matemáticas en estas edades puede ser la causa de que Rosa no esté entre los mejores alumnos de la clase en cuanto a resultados en las pruebas de evaluación, no obstante, sus opiniones inspiran un cierto respeto entre sus compañeros.

Rosa fue elegida para esta experiencia precisamente por su visión geométrica e imaginativa de las situaciones problemáticas, aunque tiene ciertas dificultades en el manejo de expresiones algebraicas.

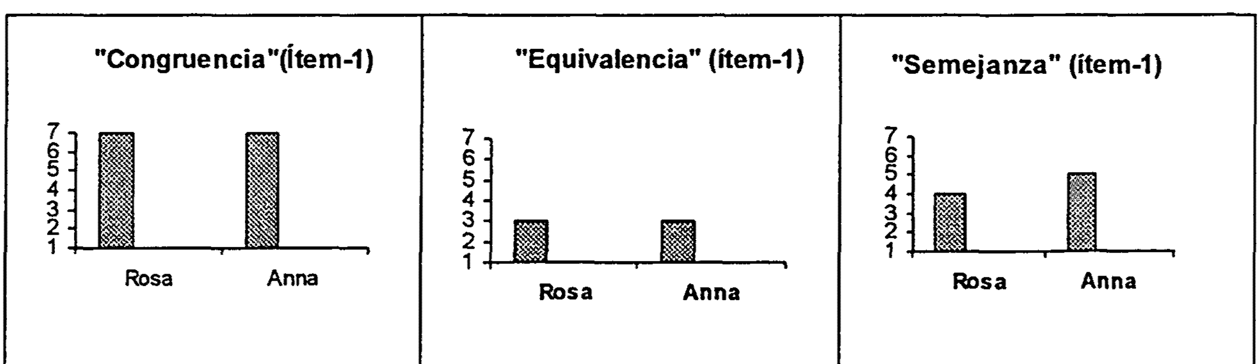
Anna es una alumna más "abierta" que Rosa y expresa sus opiniones en clase de forma más espontánea y sincera. Participa en todas las discusiones de la clase. Saca mejores notas que su compañera en la asignatura de matemáticas, sin ser de las más brillantes de la clase. Su visión de los problemas de matemáticas es mucho más algebraica que la de Rosa.

El nivel de confianza entre Rosa y Anna las lleva a establecer en la clase diálogos que, si se mantienen en las resoluciones que proponemos, pueden ser interesantes de analizar y pueden reflejar, con bastante aproximación, su actuación en la clase.

7.2.1. Respuestas de Rosa y Anna a la prueba inicial. Niveles de conocimiento

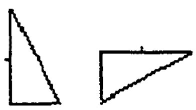
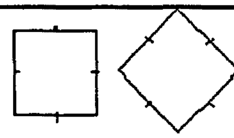
El esquema gráfico comparativo de la Tabla 7.2.1[1] muestra los niveles de conocimiento de Rosa y Anna respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP (resultados de la prueba inicial). En los párrafos que le siguen comentamos brevemente las respuestas de cada alumno a los ítems de la prueba inicial.

Tabla 7.2.1. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Rosa y Anna según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial

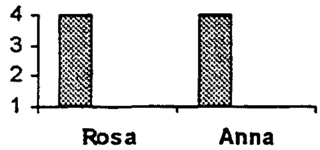


[1] En este esquema gráfico sólo incluimos los resultados de los ítems 1 a 7 (parte común de las pruebas inicial y final). Consideramos que la inclusión del grado de desarrollo que las alumnas alcanzan en la resolución de los problemas 8, 9 y 10 no aportaría información importante, ya que en las resoluciones de dichos problemas nos interesa especialmente los tipos de enfoques que las alumnas ponen en práctica.

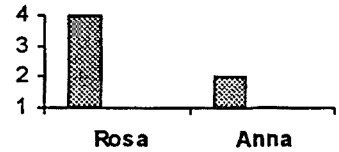
"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

		
Rosa	congr./equiv.	congr./equiv.
Anna	congr./equiv.	congr./equiv.

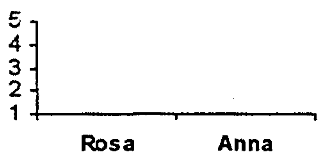
"Número Alturas" (ítem-2)



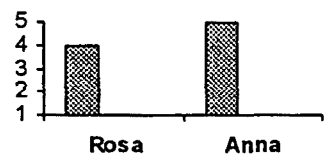
"Representación Alturas"(ítem-2)



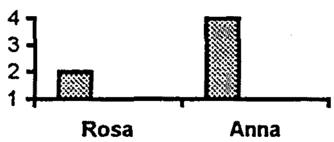
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



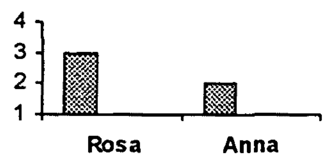
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)



"Aplicación de Fórmulas" (ítem-4)

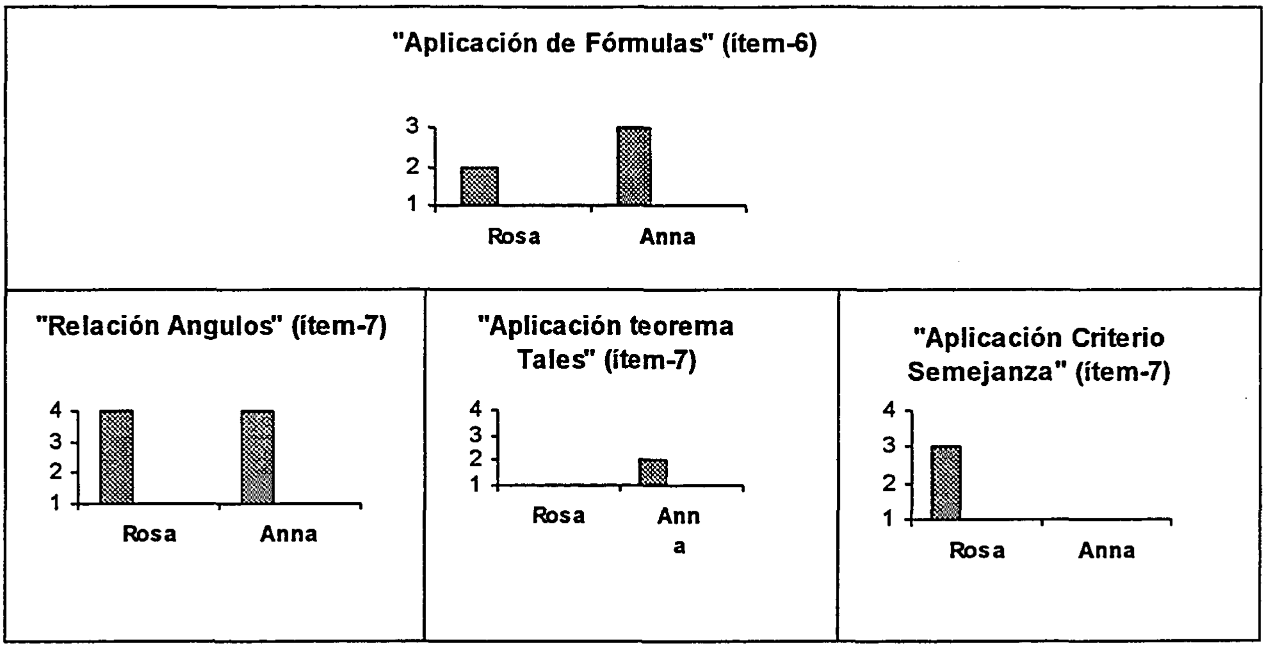


"Equidescomposición" (ítem-4)



"Reconocimiento de Fórmulas" (ítem 5)

	No identifica ningún elemento o de forma errónea		Sólo identifica algunos elementos		Identifica todos los elementos	
Asociaciones correctas				Área políg. reg./ Pentágono (5/b)	T. coseno/ Triáng.obst.(4/a)	T. coseno/ Triáng. obst.(4/a) Área triángulo/ Triáng. obst.(2/a) Área Trapecio/ Trapecio (3/d)
	Rosa	Anna	Rosa	Anna	Rosa	Anna



7.2.1.1. *Análisis de las respuestas de Rosa a la prueba inicial*

Los niveles de conocimiento de Rosa respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP, según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial, son los siguientes:

- En el ítem 1 Rosa asocia correctamente las figuras congruentes de la Figura 7.2.1 (nivel VII), pero por lo que se refiere a la equivalencia, sólo hace una asociación correcta (c-a'), no reconoce como equivalentes las figuras d y d' y asocia incorrectamente a con a' (nivel III). Reconoce como semejantes los triángulos a y b', obviando la relación entre los cuadrados d y c' (nivel VI). Además, asocia los conceptos de equivalencia y congruencia, pero no establece ninguna relación de ellos con la semejanza (Figura 7.2.1).

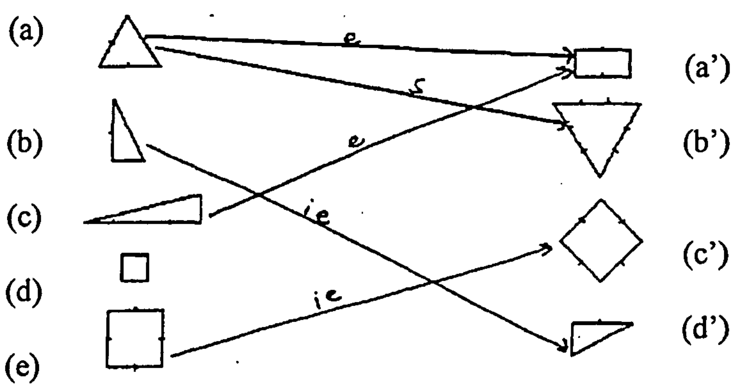


Figura 7.2.1

- Asocia tres alturas a un triángulo (nivel IV) —ítem 2— y las representa correctamente (nivel IV).

- No identifica ningún criterio de igualdad de triángulos (nivel I), pero trata de aplicar el criterio de igualdad de los tres lados homólogos, aunque sin éxito total porque no justifica debidamente —simplemente dice que son iguales— la igualdad de los lados DE y EF (nivel IV). Su respuesta es la siguiente: "Si el triangle és equilàter els 3 costats han de ser iguals i, per tant, si els segments AD i CE són iguals, els segments que queden també han de ser iguals, i els segments que uneixen D, F i E són iguals també".
- Da una relación correcta de las áreas de los triángulos del ítem 4 y la justifica diciendo: "He pogut resoldre els problemes mitjantçant dibuixos", realizando la descomposición de la Figura 7.2.2 (nivel III en equidescomposición).

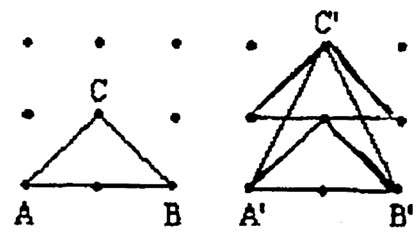


Figura 7.2.2

- Sólo reconoce la fórmula del teorema del coseno e identifica los elementos en el triángulo obstusángulo.
- De la relación entre las áreas de los triángulos del ítem 6, su respuesta es la siguiente: "Podria ser que les àrees fossin iguals, però no hi ha prou dades per a comparar-les, ja que no sabem ni la longitud dels costats ni els seus angles", que corresponde a un nivel de conocimiento II.
- Rosa encuentra la relación entre los ángulos β y *f* del ítem 7a (Figura 7.2.3), y para justificarla hace referencia a la igualdad de los ángulos a y β, por una parte, y a la de c y *f*, por otra (Figura 7.2.3), sin nombrar ni el paralelismo ni la condición de paralelogramo del cuadrilátero ADEF (nivel IV). No utiliza el teorema de Tales (ítem 7b), afirmando que no se pueden comparar los segmentos AF y FC porque no hay datos suficientes (nivel I). Encuentra la relación correcta entre las áreas de los triángulos ABC y FEC, y descompone el primero de ellos en nueve triángulos mediante rectas paralelas a los lados del triángulo que pasan por D, E y F, dando como único razonamiento: "A mi em sembla que l'àrea del triangle ABC és 9 vegades la del triangle FEC. Gràcies al dibuix" (nivel III).

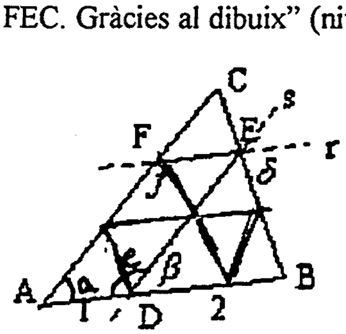
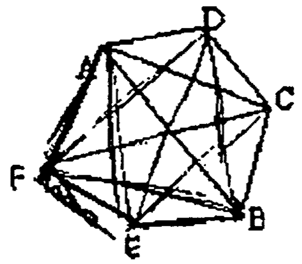


Figura 7.2.3

- Rosa resuelve el problema 8A utilizando el recurso de dividir el trapecio en triángulos (Figura 7.2.4), para lo cual representa, primero, el hexágono completo, después traza todas sus diagonales, obteniendo seis triángulos equiláteros, y, por último, traza la altura del triángulo OBC.



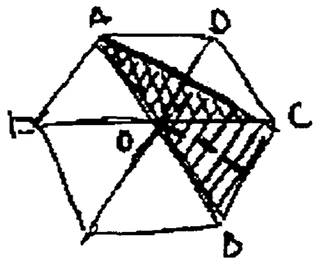


Figura 7.2.4

La relación entre las áreas de los dos triángulos la justifica de la siguiente forma: "El tros ratllat del triangle ABC —se refiere al triángulo AOC— té la mateixa àrea que el triangle ADC i l'àrea del triangle OCD és igual a l'àrea del triangle OAC, per tant, l'àrea del triangle ACB és el doble de l'àrea del triangle ADC".

Observamos que Rosa no justifica las relaciones de igualdad y no hace referencia a la igualdad de ningún elemento —ni lineal ni angular— de la figura. Así pues, esta resolución corresponde a un grado de desarrollo IV.

- La resolución del problema 9A también sigue el desarrollo del enfoque consistente en dividir el paralelogramo en otros. Ahora, Rosa llega a tal descomposición trazando primero la paralela HF a los lados AB y CD, y después, como ella dice, "intento col.locar els triangles del paral.lelogram —se refiere a los cuatro de las esquinas— dins del quadrilàter". Después de algunos intentos, como se pone de manifiesto en la figura tan "cargada" que realiza, logra "colocarlos" (Figura 7.2.5).

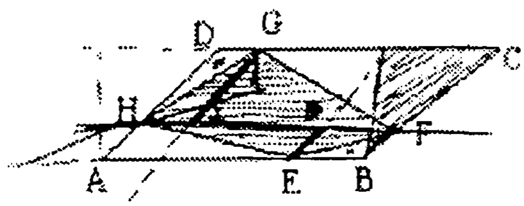


Figura 7.2.5

Asignamos a la resolución un grado de desarrollo IV puesto que sólo se limita a indicar la igualdad de los triángulos HDG y HIG, GFI y GCF, EBF y EOF, HDE y HAE, sin más.

- En el problema 10, Rosa intenta encontrar un enfoque geométrico, de eso tenemos constancia porque sobre la figura del enunciado traza las diagonales y algunas paralelas, pero al no encontrar ninguno opta por expresar la razón de las áreas utilizando una identificación simbólica que no es adecuada. En el apartado 6.3.12 (ejemplo 2) incluimos, como ejemplo, su resolución (grado de desarrollo II).

7.2.1.2. *Análisis de las respuestas de Anna a la prueba inicial*

Los niveles de conocimiento de Anna respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP, según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial, son los siguientes:

- Anna asocia correctamente las figuras congruentes de la Figura 7.2.6 (nivel VII). Por lo que se refiere a la equivalencia, hace una asociación correcta —c y a'— y otra incorrecta —a y a'— (nivel III). Las asociaciones de las figuras semejantes son correctas, pero a ellas añade la de los triángulos c y d' (nivel V). Además, asocia los conceptos de equivalencia y congruencia, pero no establece ninguna relación de ellos con la semejanza (Figura 7.2.6).

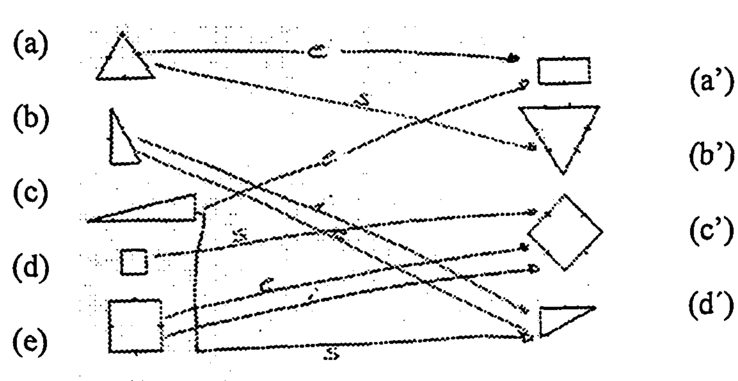


Figura 7.2.6

- Reconoce en un triángulo tres alturas (nivel IV), pero sólo es capaz de representar correctamente una de ellas, la que va al interior de uno de los lados (nivel II).
- Elige una opción incorrecta (a1) por lo que se refiere a los criterios de igualdad de triángulos del ítem 3a (nivel I), pero aplica de forma correcta el criterio lado-ángulo-lado del apartado 3b —no señalado en el apartado anterior— y justifica la igualdad de los elementos homólogos (nivel V).
- Compara correctamente las áreas de los triángulos del ítem 4 (nivel IV). Para ello calcula cada una de ellas por separado, aplicando la fórmula y tomando como unidad de medida la de la malla, con lo cual hace un cálculo numérico con resultados concretos. No da ninguna otra justificación de la relación.
- Asocia correctamente cuatro de las fórmulas con sus respectivas figuras —fórmula del teorema del coseno, expresión del área del triángulo en función de uno de sus ángulos, área del trapecio y área del polígono regular— e identifica los elementos de las tres primeras, no reconociendo la apotema del pentágono.
- Identifica la igualdad de las áreas de los triángulos del ítem 6, basándola en la coincidencia de sus bases y en la igualdad de sus alturas (nivel III). Observamos cómo Anna representa de forma correcta las alturas de los dos triángulos de este ítem, que están en posición estándar, pero es incapaz de representar correctamente las alturas que caen fuera de las bases en el triángulo del ítem 2.

- En el ítem 7a Anna identifica la igualdad de los ángulos β y *f* y la justifica diciendo que "β és l'angle que li falta a *f*", argumentado la igualdad de β y *f* haciendo referencia al paralelismo de sus lados (nivel IV). Elige la opción correcta en su respuesta al ítem 7b, pero deja en blanco la justificación (nivel II). No hay datos suficientes, según Anna, para comparar las áreas de los triángulos ABC y FEC en el ítem 7c (nivel I).

- Anna resuelve algebraicamente el problema 8A, aunque previamente hace una descomposición del trapecio en triángulos, de los que parece representar sus alturas. Considera el segmento AC como base de ambos triángulos (Figura 7.2.7). Traza la altura DM y expresa, sin justificar, que dicha altura es la mitad del lado BC. A continuación calcula las dos áreas por separado: $A_P = \dfrac{AC.DM}{2}$ y $A_G = \dfrac{AC.BC}{2} = \dfrac{AC.2DM}{2}$ y expresa la relación entre ellas.

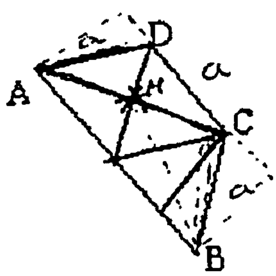


Figura 7.2.7

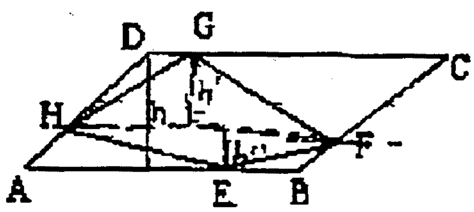


Figura 7.2.8

De acuerdo con la valoración que establecimos en el Capítulo 6 (apartado 6.3.12), y puesto que Anna no utiliza ningún argumento para justificar la relación entre las alturas, asignamos a esta resolución un grado de desarrollo IV.

- En el problema 9A, Anna traza la recta HF (Figura 7.2.8), así como las alturas de los triángulos (o paralelogramos) que resultan y compara sus áreas —una la mitad de la otra— diciendo que tienen igual base y altura (grado de desarrollo V).

- Anna hace una aproximación inductiva a la solución del problema 10, descompone el cuadrado ABCD en forma de cruz (Figura 7.2.9), trazando paralelas a los lados por los puntos M, N, P y Q, y llega a la conclusión, asociando la solución a la figura, de que la relación entre las áreas es 5/9. Parece no entender que el objetivo del problema es la búsqueda de la relación entre los segmentos DP y PC, y no la de las áreas. Asociamos a su resolución con un grado de desarrollo I.

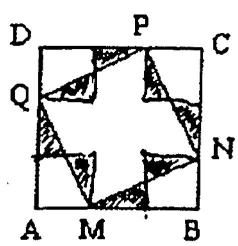


Figura 7.2.9

A la vista de las respuestas de Rosa y Anna a los ítems de la prueba inicial, podemos concluir que, en cierta forma, Rosa y Anna se complementan en el sentido de que, como dijimos en el apartado 7.2, hay una tendencia en Anna a afrontar las cuestiones y problemas de forma algebraica —recordemos el tratamiento del ítem 4, o el mayor reconocimiento de fórmulas (ítem 5), o la resolución de los problemas 8A y 9A, donde utiliza el recurso a las fórmulas de las áreas de los triángulos y paralelogramos—. Por el contrario, Rosa no destaca por su mayor conocimiento conceptual, pero sí que podemos reconocer en ella una cierta tendencia a atacar los ítems descomponiendo las figuras. Ejemplos ilustrativo de ello son las respuestas que da al ítem 4, la descomposición que hace del triángulo del ítem 7c, y, sobre todo, la resolución que hace de los problemas 8A y 9A.

7.3. El caso de los alumnos Laia y Jaume

Laia y Jaume son dos alumnos de 16 años que estudian tercero de BUP. Se sientan juntos en las clases, pero esta situación es casual, ya que los chicos de estas edades, igual que las chicas, tienen tendencia a agruparse entre ellos. En este caso, Laia y Jaume coinciden en una fila en la que hay tres chicas, por un lado, y dos chicos, por otro. En las clases de matemáticas se ha llegado a establecer entre ellos una especie de competencia que origina interesantes diálogos, que pretendemos reproducir en el contexto que consideramos.

A pesar de que Laia es una alumna que siempre ha superado las matemáticas, no podemos decir que sea muy brillante en esta asignatura, simplemente aprueba sin esforzarse demasiado y, normalmente, se conforma con el aprobado. No estudia con regularidad y deja sin hacer los deberes frecuentemente. Es muy extrovertida y muy impulsiva, hasta el punto de ser la primera en responder a las preguntas que hace el profesor —de manera no siempre correcta— y de interrumpir con frecuencia las intervenciones de sus compañeros. No atiende a las sugerencias de los profesores para que reflexione sus respuestas antes de intervenir. No hemos observado en ella ninguna tendencia a enfocar los problemas y actividades de clase de forma geométrica.

Jaume es un alumno mucho más reflexivo que Laia. Sus intervenciones en la clase se producen a petición del profesor y en contadas ocasiones por iniciativa propia, pero, en cambio, son continuos los diálogos con su compañera. A veces, estos diálogos acaban en desacuerdos evidentes. Suele ser en estas ocasiones cuando Jaume pregunta las dudas que tiene respecto a la materia. Jaume es un alumno que siempre hace los deberes que propone el profesor para casa y obtiene en matemáticas mejores notas que Laia —en los dos últimos curso de BUP tiene una media de casi notable—, pero, igual que ella, tiene tendencia a enfocar algebraicamente los problemas y actividades de clase.

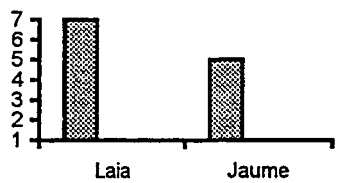
7.3.1. Respuestas de Laia y Jaume a la prueba inicial. Niveles de conocimiento

El esquema gráfico comparativo de la Tabla 7.3.1[2] muestra los niveles de conocimiento de Laia y Jaume respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP (resultados de la prueba inicial). En los párrafos que le siguen comentamos brevemente las respuestas de cada alumno a los ítems de la prueba inicial.

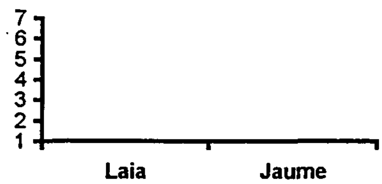
[2] Como en el apartados 7.2, en este esquema gráfico sólo incluimos los resultados de los ítems 1 a 7, que es la parte común de las pruebas inicial y final.

Tabla 7.3.1. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Laia y Jaume según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial

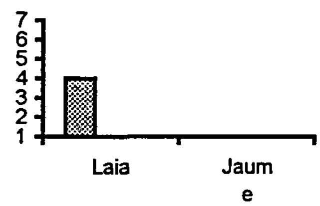
"Congruencia"(Ítem-1)



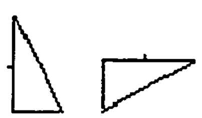
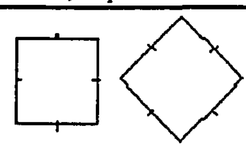
"Equivalencia" (ítem-1)



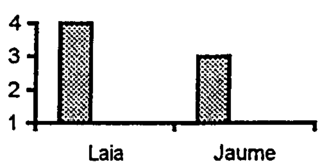
"Semejanza" (ítem-1)



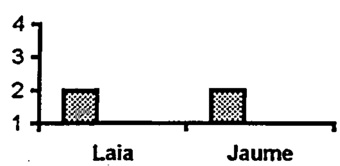
"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

			
Laia	congr./equiv./sem.	congr./equiv./sem.	----
Jaume	congr./equiv.	congr./equiv.	congr./equiv.

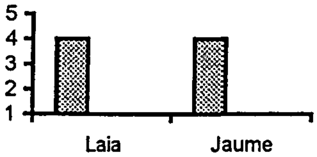
"Número Alturas" (ítem-2)



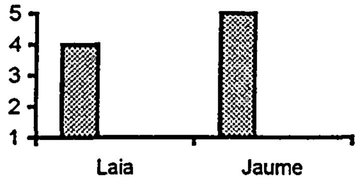
"Representación Alturas"(ítem-2)



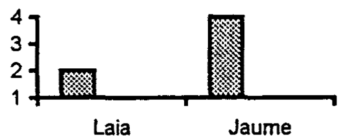
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



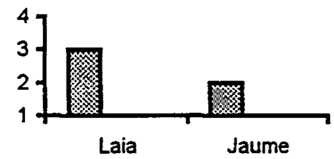
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)



"Aplicación de Fórmulas" (ítem-4)



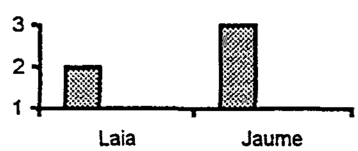
"Equidescomposición" (ítem-4)



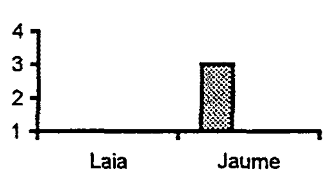
"Reconocimiento de Fórmulas" (ítem 5)

	No identifica ningún elemento (o de forma errónea)		Sólo identifica algunos elementos		Identifica todos los elementos	
Asociaciones correctas			Ángulo int./ Pentág.(1/b)	Área pent./ Pentág.(5/b)	Área trapecio/ Trapecio (3/d) T. coseno/ Triáng. obst.(4/a)	Área trapecio/ Trapecio (3/d) T. coseno/ Triáng.obst.(4/a)
	Laia	Jaume	Laia	Jaume	Laia	Jaume

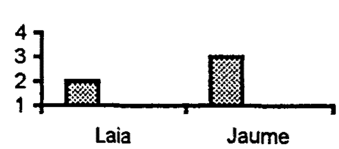
"Aplicación de Fórmulas" (ítem-6)



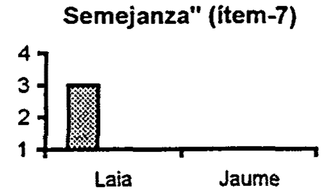
"Relación Angulos" (ítem-7a)



"Aplicación teorema Tales" (ítem-7)



"Aplicación Criterio Semejanza" (ítem-7)



7.3.1.1. *Análisis de las respuestas de Laia a la prueba inicial*

Los niveles de conocimiento de Laia respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP, según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial, son los siguientes:

- Identifica correctamente las figuras congruentes del ítem 1 (nivel de conocimiento VII), no asocia ninguna de las figuras que sólo son equivalentes (nivel I) e identifica las semejantes, pero a ellas añade asociaciones como las d con a' y c con d' (Figura 7.3.1), que no se corresponden con ese concepto (nivel IV).

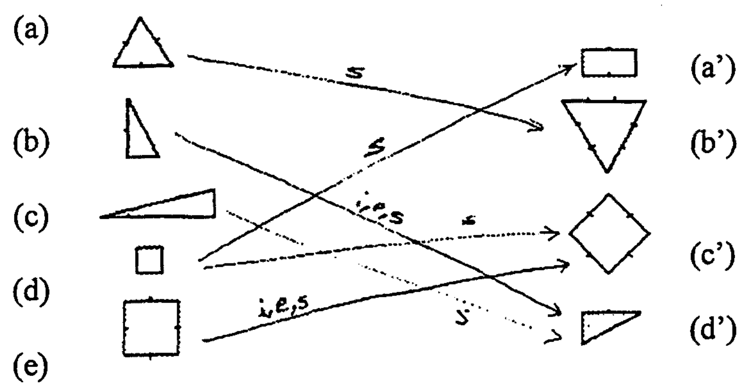


Figura 7.3.1

Relaciona correctamente los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza.

- Asocia tres alturas al triángulo del ítem 2 (nivel IV), pero representa incorrectamente dos de ellas (Figura 7.3.2), lo que corresponde a un nivel de conocimiento II. Observamos que Laia asocia el concepto de altura con el de perpendicularidad.

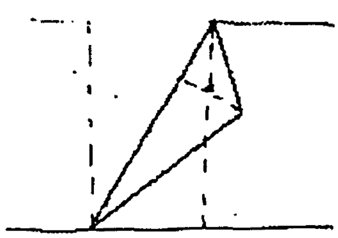


Figura 7.3.2

- En el ítem 3a, Laia identifica como criterios de congruencia de triángulos todas las opciones que hemos incluido excepto la a5. A esta respuesta hemos asociado un nivel de conocimiento IV. Laia aplica el criterio de congruencia correspondiente a la igualdad de los tres lados homólogos en su respuesta al ítem 3b. Para ello, justifica la igualdad de dos pares de lados —AE y AD con CF y CE, respectivamente—, pero no lo hace correctamente para el tercer par —DE con EF—, ya que no concreta que ambos segmentos se opongan a ángulos iguales, en cambio, da a entender en su respuesta que si dos triángulos tienen dos pares de lados homólogos iguales, entonces todos sus ángulos también lo son (nivel IV).

- Laia completa los triángulos ABC y A'B'C' del ítem 4 para obtener un cuadrado y un rectángulo (Figura 7.3.3), y relaciona las áreas de la siguiente forma: " (...) Veiem que l'àrea del triangle ABC és 1/4 de la figura total, i que la del triangle A'B'C' són 2/4 parts → $\frac{2}{4}:\frac{1}{4}=2$. Un és doble de l'altre", lo que corresponde a un nivel III en la equidescomposición. No utiliza la fórmula del área del triángulo para justificar la relación que establece (nivel II).

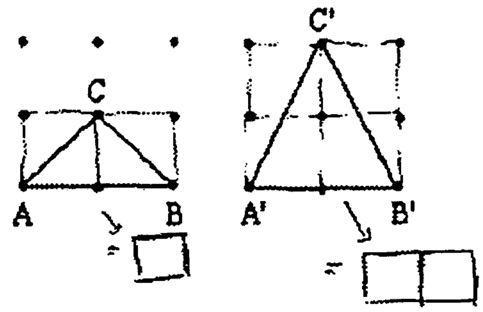


Figura 7.3.3

- En el ítem 5, Laia hace tres asociaciones correctas de las siete posibles: la fórmula del teorema del coseno con el triángulo obstusángulo; la expresión del ángulo interior de un polígono regular con el pentágono; y la fórmula del área del trapecio con dicha figura. En los tres casos identifica en las figuras todos los elementos que intervienen en sus respectivas fórmulas, excepto el ángulo β del pentágono regular.

- Selecciona la opción correcta del ítem 6, pero la única justificación que se le ocurre, después de identificar que los dos triángulos tienen la misma base, es la siguiente: "Per molt que D estigui cap a la dreta, el B no es mou, per tant com més lluny se'n vagi més s'estrenyerà el triangle, per tant no agafa més àrea. Continua sent la mateixa" (nivel II).

- En la respuesta que da al ítem 7a, Laia señala dos opciones (nivel I). En el ítem 7b elige la opción correcta, pero la justificación no se corresponde con ella, ya que dice: "Perquè si dividim el costat en 4 parts, en el costat FA n'hi caben 3" (nivel II), siendo la opción que elige la que establece una relación de 2 a 1. En el ítem 7c selecciona la opción correcta y descompone el triángulo ABC en nueve triángulos, pero la única justificación que da es: "Perquè he anat dividint i més o menys crec que és 9 vegades més gran" (nivel III).

- Para resolver el problema 8A, Laia representa los triángulos ABC y ACD por separado (Figura 7.3.4), e identifica en cada uno de ellos la base y la altura para aplicar las fórmula del área del triángulo. Igualmente, llega a aplicar el teorema de Pitágoras para expresar unos elementos en función de otros y la fórmula del área del rombo OCDA —de forma incorrecta— para tratar de calcular el área del triángulo ACD. Abandona este enfoque cuando comprueba que no obtiene nada. Opta después por descomponer los triángulos ABC y ACD en otros, (Figura 7.3.4). A esta descomposición acompaña la siguiente explicación: "(...) Em limito a dividir els dos triangles en parts (fraccions) que són triangles rectangles, per veure clar la relació que guarden els dos triangles". Obtiene, de esa forma, la razón entre las áreas de los triángulos ABC y ACD (grado de desarrollo IV).

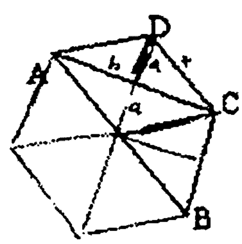


Figura 7.3.4

- A pesar de que Laia trata de descomponer el paralelogramo del problema 9A, no lo consigue. Intenta identificar simbólicamente los elementos del paralelogramo, pero "le salen muchas incógnitas" —"Em van surtint incògnites"—, es decir, hace una identificación simbólica que no es adecuada (grado de desarrollo II).
- Laia enfoca algebraicamente la resolución del problema 10, es decir, hace una identificación simbólica de los elementos de la figura —llama "x" al lado DC, "n" al PC y "l" al lado del cuadrado MNPQ— y trata de encontrar la relación entre "n" y "x-n" a partir de las igualdades $l^2 = 5$ y $x^2 = 8$, obtenidas al interpretar la proporción $\frac{l^2}{x^2} = \frac{5}{8}$. Las deficiencias en los desarrollos algebraicos —aplica incorrectamente el teorema de Pitágoras, calcula erróneamente la $\sqrt{5}$— y en la interpretación de lo que es "x" —considera que "x" es DQ— le llevan a obtener un resultado sin sentido —razón entre las áreas negativa— (grado de desarrollo II).

Las respuestas de Laia a los ítems de la prueba inicial nos permiten hacernos una idea de las características de su conocimiento sobre los contenidos matemáticos que consideramos. De tales características destacamos las tres que nos parecen más importantes: por una parte, Laia no representa correctamente todas las alturas de un triángulo, pero está claro que asocia dicho concepto con el de perpendicularidad; por otra, las justificaciones que Laia da de las respuestas a los ítems 6, 7b y 7c, que están basadas en apreciaciones visuales de las relaciones entre los elementos de las figuras; y, por último, la primera iniciativa de Laia cuando afronta la resolución de un problema siempre es identificar simbólicamente los elementos de las figuras para aplicar las fórmulas de sus áreas. Ante el fracaso de sus enfoques algebraicos, sólo en la resolución del problema 8A opta por un enfoque basado en la descomposición de la figura. Esta técnica es la que utiliza en la respuesta que da al ítem 4.

7.3.1.2. *Análisis de las respuestas de Jaume a la prueba inicial*

Los niveles de conocimiento de Jaume respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP, según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial, son los siguientes:

- Identifica correctamente las figuras congruentes del ítem 1, pero también asocia como congruentes los triángulos rectángulos c y d' de la Figura 7.3.5 (nivel V). Relaciona como equivalentes las figura d con c' y la a con b', que son semejantes (nivel I), y como semejantes la a con d' (nivel I).

  Además, identifica los conceptos de equivalencia y congruencia, ya que asocia como congruentes todas las figuras que para él son equivalentes (b con d', e con c' y c con d')..

(a) (a')

(b) (b')

(c)

(d) (c')

(e) (d')

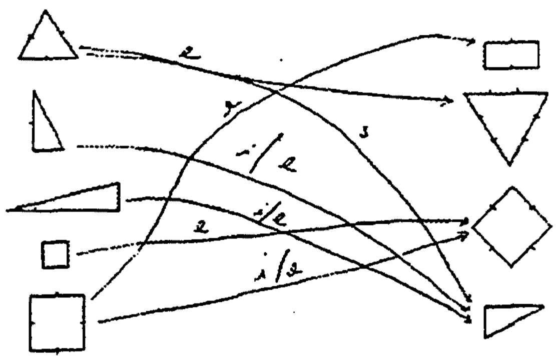


Figura 7.3.5

- Representa dos de las tres alturas de un triángulo (nivel III). Las dos van a parar al interior del lado opuesto (Figura 7.3.6), una de ellas perpendicularmente, y la otra oblicuamente, lo que corresponde a un nivel de conocimiento II.

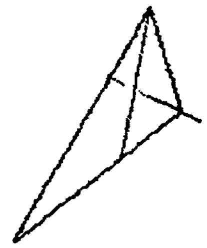


Figura 7.3.6

- En el ítem 3a Jaume identifica el criterio de igualdad de triángulos, pero también considera congruentes dos triángulos que tengan los tres ángulos iguales (nivel IV). En el ítem 3b, utiliza el criterio de igualdad de dos pares de lados homólogos y del ángulo comprendido para justificar la igualdad de los triángulos. Se basa en la condición de equilátero del triángulo ABC para razonar la igualdad de lados y ángulo homólogos ABC (nivel V).
- Jaume selecciona la opción correcta del ítem 4 y razona la relación entre las áreas de los triángulos, cuyas fórmulas expresa, indicando la de sus alturas —una el doble de la otra— y diciendo: "Com que la base sempre és AB=A'B', només es duplica un valor, l'altura" (nivel IV). No razona de ninguna otra forma la relación entre las áreas de los triángulos (nivel II en la equidescomposición).
- En la respuesta al ítem 5, Jaume hace tres asociaciones correctas de las siete posibles (no hace asociaciones incorrectas): el trapecio con su fórmula, el pentágono regular con la fórmula que corresponde al área que encierra, y el triángulo obstusángulo con la fórmula del teorema del coseno. En las tres identifica todos los elementos que aparecen en las fórmulas, excepto la apotema del pentágono que la asocia con una de sus diagonales.

- Jaume indica la relación de igualdad entre las áreas de los triángulos del ítem 6 y, para razonar su respuesta, expresa la fórmula del área del triángulo e indica que los dos triángulos tienen la misma base y sus alturas son iguales. La igualdad de las alturas la justifica diciendo: "Sempre serà la mateixa perquè la distància de r a s sempre és la mateixa (són paral·leles)". Esta respuesta corresponde a un nivel de conocimiento III.

  A pesar de la justificación que da Jaume de la igualdad de las alturas, en ningún momento las representa, aunque implícitamente reconoce su perpendicularidad a las rectas "r" y "s". En cierta forma, esta respuesta se contradice con la representación —no perpendicular al lado— de una de las alturas en el ítem 2. En cualquier caso, la posición estándar de los triángulos puede facilitar la visualización de las alturas de ambos, aunque éstas vayan a parar a la prolongación de la base.

- Elige la opción correcta del ítem 7a, pero no hace referencia al paralelismo de los lados para justificar la igualdad de los ángulos correspondientes (nivel III). Selecciona la opción correcta del ítem 7b, pero en ningún momento alude a la semejanza de triángulos ni el teorema de Tales, aunque hace referencia a la proporcionalidad de segmentos (nivel III). No elige la opción correcta del ítem 7c (nivel I).

- En la resolución del problema 8A, Jaume pone en práctica un enfoque algebraico que consiste en expresar las áreas de los triángulos y tratar de compararlas (Figura 7.3.7). Para ello, hace el siguiente desarrollo: elige en ambos triángulos la misma base AC; reconoce el triángulo ACB como rectángulo e identifica el lado BC como altura; representa también la altura del triángulo ACD sobre el lado AC; y trata de calcular la razón de las áreas. Jaume abandona este enfoque porque no sabe la relación que hay entre las alturas (grado de desarrollo IV). Después, descompone el trapecio en triángulos y alude a la "proporcionalidad" de los triángulos que resultan, pero vuelve a aplicar, sin éxito, la fórmula del área del triángulo.

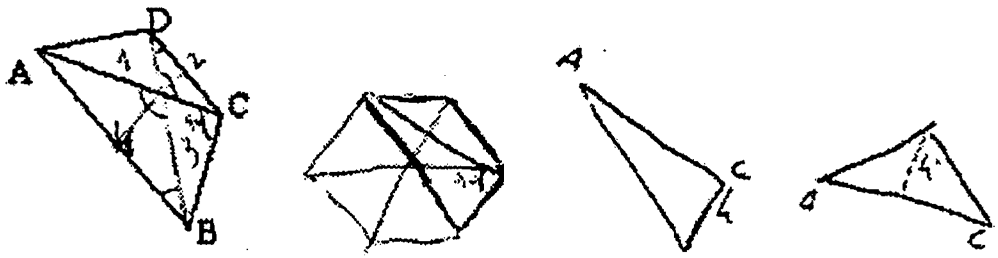


Figura 7.3.7

- En la resolución que Jaume hace del problema 9A, observamos (Figura 7.3.8) cómo descompone el paralelogramo en dos mediante el segmento HF y aplica las fórmulas de las áreas de las figuras que obtiene. Para aplicar dichas fórmulas, identifica la altura del paralelogramo ABCD (h) y las de los triángulos que resultan (h' y h'') y expresa la relación que hay entre ellas (h=h'+h''). Sólo un error en la expresión de las fórmulas de las áreas de los triángulos le impide obtener el resultado correcto (grado de desarrollo IV).

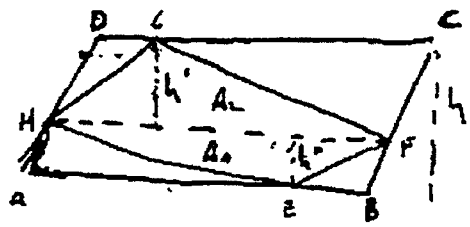


Figura 7.3.8

- En la resolución del problema 10, Jaume parece que se inclina por un enfoque algebraico, pero su desarrollo es tan incipiente como erróneo, ya que identifica simbólicamente el lado PQ como "y" y el segmento DP como "x", y sólo expresa la razón de las áreas de los cuadrados de la forma: $\frac{y^2}{x^2} = \frac{5}{8}$ (grado de desarrollo I).

De las respuestas de Jaume a los ítems de la prueba inicial destacamos tres características: su desconocimiento de la representación de las alturas de un triángulo y de los conceptos de equivalencia y semejanza; la argumentación perfectamente razonada de la congruencia de los triángulos del ítem 3b, por aplicación de un criterio de congruencia que no aparece en el 3a; y la tendencia que tiene a enfocar la resolución de los problemas aplicando las fórmulas de la áreas de las figuras que intervienen. Esta situación se produce en la resolución de los problemas 8A, 9A, 10 y en las respuestas a los ítems 4 y 6, aunque en el caso del problema 9A hay una descomposición previa a la aplicación de fórmulas.

7.4. El caso de los alumnos Pere y Lluís

Pere y Lluís son estudiantes de COU que acaban de cumplir 17 años y que, igual que las parejas que hemos analizado anteriormente, se suelen sentar juntos en las clases de matemáticas.

Pere es un alumno muy inteligente, rápido en comprender las explicaciones del profesor y bastante reflexivo. Siempre es de los primeros en acabar las actividades que se le proponen, lo que le convierte en un alumno al que sus compañeros más próximos consultan con frecuencia, a pesar de ello, no tiene demasiado protagonismo público en la clase. Cuando responde a las preguntas del profesor, lo suele hacer de forma precisa y generalmente acertada. Aprueba todas las asignaturas con buenas notas, pero en matemáticas destaca sobre las demás, a pesar de que, según él, no las estudia demasiado.

No hemos notado en Pere una inclinación especial a utilizar razonamientos de tipo geométrico, pero utiliza esos recursos cuando se lo piden o no tiene otros, como observamos en las respuestas que da a los ítems de la prueba inicial de valoración de conocimientos.

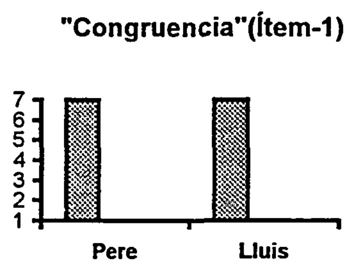
Lluís es un alumno lento en la comprensión y asimilación de las explicaciones del profesor y en la realización de actividades en las clases de matemáticas, pero suple esta desventaja respecto a su compañero con una gran tenacidad y persistencia en aclarar las dudas que tiene. No repara en preguntar públicamente lo que no entiende, aunque muchas veces suele hacer sus preguntas también en privado, y generalmente no se conforma con las explicaciones que se le dan hasta que él mismo es capaz de expresarlas con sus propias palabras. Lluís es un alumno al que conocemos desde antes de que entrara en el instituto, por ello, podemos decir que su interés por las matemáticas y su dedicación a ellas fuera de las horas de clase le han llevado a obtener, en dicha asignatura, una nota media de notable en los últimos tres cursos.

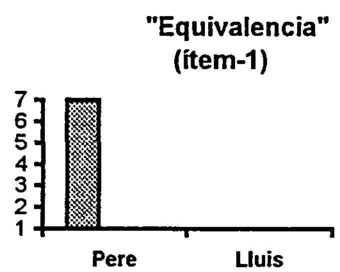
En clase de matemáticas, Lluís utiliza casi siempre razonamientos del tipo algebraico. Esta idea se confirma en las respuestas que da a los ítems de la prueba inicial.

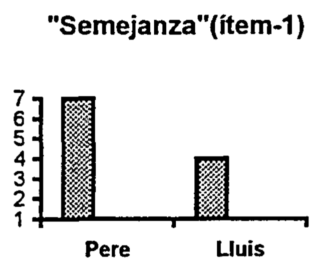
7.4.1. **Respuestas de Pere y Lluís a la prueba inicial. Niveles de conocimiento**

El esquema gráfico comparativo de la Tabla 7.4.1[3] muestra los niveles de conocimiento de Pere y Lluís respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP (resultados de la prueba inicial). En los párrafos que le siguen comentamos brevemente las respuestas de cada alumno a los ítems de la prueba inicial.

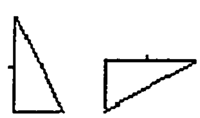
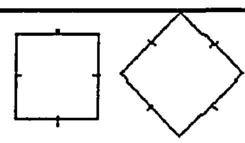
Tabla 7.4.1. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Pere y Lluís según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial





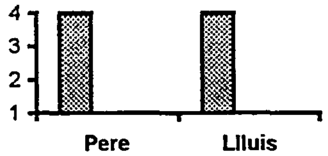


"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

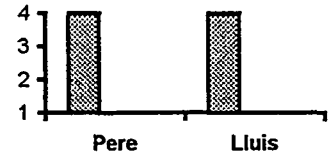
		
Pere	congr.	congr.
Lluís	congr./equiv.	congr./equiv.

[3] Como en los apartados 7.2 y 7.3, en este esquema gráfico sólo incluimos los resultados de los ítems 1 a 7, que es la parte común a las pruebas inicial y final.

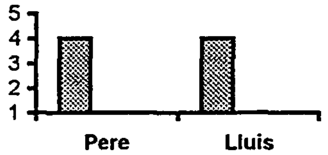
"Número Alturas" (ítem-2)



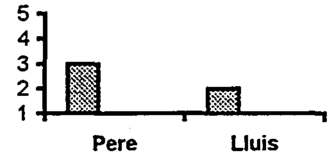
"Representación Alturas" (ítem-2)



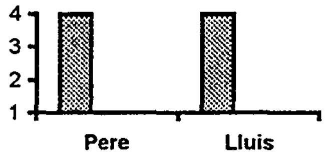
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



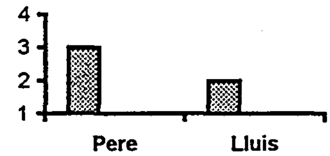
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)



"Aplicación de Fórmula" (ítem-4)

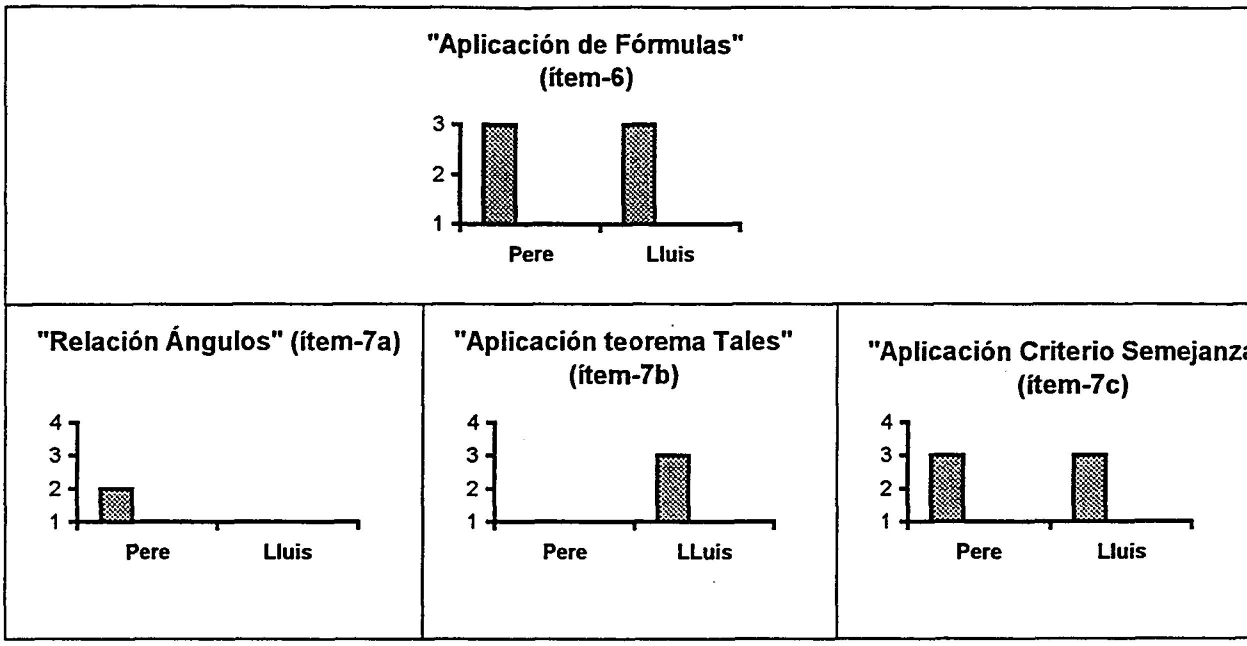


"Equidescomposición" (ítem-4)



"Reconocimiento de Fórmulas" (ítem 5)

	No identifica ningún elemento o los identifica de forma errónea		Identifica algunos elementos	Identifica todos los elementos	
Asociaciones correctas		Área pentág./Pentág.(5/b) T. coseno/Triáng. rect.(4/c) Área trap./Trapecio (3/d)		Área triáng./Triángulo obst. y rectángulo (2/a y c) Área pentág./ Pentágono (5/b) Área trapecio/Trapecio (3/d)	
Asociaciones incorrectas		Ángulo int./Triáng.obs(1/a) Área triáng./Rombo (2/e)			
	Pere	Lluís		Pere	Lluís



7.4.1.1. *Análisis de las respuestas de Pere a la prueba inicial*

Los niveles de conocimiento de Pere respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP, según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial, son los siguientes:

- En el ítem 1, Pere identifica las figuras congruentes, las semejantes y las equivalentes, lo que corresponde en cada caso a un nivel de conocimiento VII. En cambio, no hace ninguna asociación de esos tres conceptos.
- Asocia tres alturas a un triángulo (nivel IV) —ítem 2— y las representa correctamente (nivel IV).
- Identifica el criterio de congruencia de triángulos del ítem 3a —opción a4—, pero además considera que dos triángulos son congruentes si tienen sus tres ángulos homólogos iguales —opción a3—, y si tienen dos lados y un ángulo cualquiera iguales a sus homólogos del otro triángulo —opción a1—. Este tipo de respuesta la hemos asociado a un nivel de conocimiento IV.
- Justifica la igualdad de los triángulos rayados del ítem 3b, razonando la igualdad de dos de sus lados y expresando, sin más, que tienen un ángulo igual (nivel III).
- Elige la opción correcta en el ítem 4 y justifica la relación entre los triángulos utilizando dos técnicas: en primer lugar, compara las bases y las alturas de los dos triángulos y aplica la fórmula (nivel IV); y, en segundo lugar, descompone cada uno de los triángulos en otros dos iguales y los recompone para formar un cuadrado y un rectángulo (Figura 7.4.1). Pere adjunta a la Figura 7.4.1 el siguiente texto: "Dividint el triangle en triangles menors i ajuntant-los per a formar quadrats o rectangles". De acuerdo con la asignación de niveles de conocimiento que hemos establecido en el Capítulo 6, esta respuesta corresponde a un nivel III.

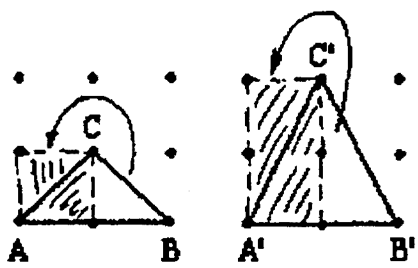


Figura 7.4.1

- En el ítem 5, Pere hace cuatro asociaciones correctas de las siete posibles: la fórmula del área del triángulo con las dos figuras correspondientes; el pentágono con la fórmula de su área; y el trapecio con su fórmula. En los cuatro casos identifica en las figuras todos los elementos que intervienen en sus respectivas fórmulas.
- Identifica correctamente la equivalencia de los triángulos del ítem 6 y la justifica escribiendo: "La base BC és la mateixa i l'alçada (distància entre r i s) també" (nivel III).
- Elige la opción acertada en el ítem 7a, aunque la justificación que da no es correcta porque se basa en que la suma de los ángulos opuestos de un paralelogramo es 180° (nivel II). En el 7b la opción elegida —no se pueden comparar las longitudes de los dos segmentos— no es la correcta (nivel I). En el ítem 7c elige la opción correcta y trata de justificarla haciendo referencia a la semejanza para poder aplicar la fórmula del área del triángulo —"els triangles són semblants, AB és 3 vegades FE, i AC és 3 vegades FC. Llavors per a= $\frac{b.a}{2}$"—, pero no especifica ni los triángulos que son semejantes ni el porqué lo son, y tampoco se refiere en ningún momento a la relación entre las alturas de los triángulos (nivel III).
- Como observamos en la Figura 7.4.2, Pere hace una resolución del problema 8A basándose únicamente en la aplicación de la técnica de "romper y rehacer". La visualización desempeña en esta resolución un papel fundamental, ya que Pere no siente la necesidad de justificar la igualdad de los triángulos en que divide al trapecio (grado de desarrollo IV), siendo su única explicación: "Divideixo els triangles en altres més petits (tots iguals). Els agrupo i obtinc dos rectangles, un doble que l'altre".

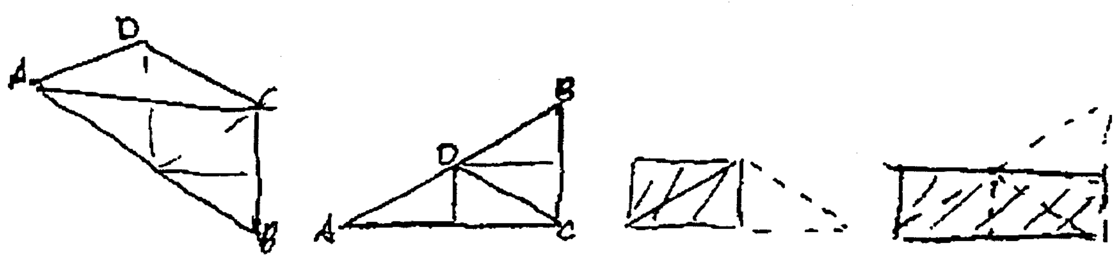


Figura 7.4.2

- En la resolución del problema 9A, Pere divide el paralelogramo en dos mediante el segmento HF. Justifica la relación entre los paralelogramos que obtiene y los triángulos inscritos aplicando las fórmulas de ambos e identificando la igualdad de sus bases y sus alturas (grado de desarrollo V).

- En la resolución del problema 10, Pere pone en práctica un enfoque algebraico de la siguiente forma: en primer lugar, iguala la razón de las áreas de los cuadrados a $\frac{5}{8}$ y obtiene la relación $PN = \sqrt{\frac{5}{8}}.DC$, entre sus lados; después, aplica el teorema de Pitágoras para obtener $PN^2 = (DC\text{-}DP)^2 + DP^2$; y, por último, sustituye en esa expresión la primera relación que ha obtenido y efectúa los desarrollos algebraicos correspondientes hasta llegar a la ecuación $\frac{5}{8}DP^2 + \frac{10}{8}DP.PC\text{-}PC^2 = 0$. A partir de aquí no sabe seguir. Como observamos, el desarrollo es avanzado (grado IV), pero la falta de recursos tales como la asignación de un valor de referencia a uno de los segmentos, o la división de la igualdad entre DP^2 para obtener una ecuación de segundo grado en función de la razón $\frac{PC}{DP}$, obliga a Pere a abandonar.

En resumen, Pere tiene un nivel de conocimientos muy alto sobre los contenidos matemáticos implicados en la comparación de áreas, a excepción de dos aspectos concretos: la relación entre los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza (ítem 1), y la aplicación que hace del teorema de Tales (ítem 7b).

Además, Pere utiliza indistintamente procedimientos de tipo geométrico, no olvidemos la justificación que da del ítem 4 y la forma de enfocar el problema 8A, y de tipo algebraico, como, por ejemplo, su conocimiento de las fórmulas (ítem 5) y la aplicación que hace de las mismas en el ítem 6 y en la forma de enfocar los problemas 9A y 10.

7.4.1.2. *Análisis de las respuestas de Lluís a la prueba inicial*

Los niveles de conocimiento de Lluís respecto a los contenidos matemáticos implicados en la resolución de los PCASP, según sus respuestas a los ítems de la prueba inicial, son los siguientes:

- En el ítem 1, Lluís identifica las figuras congruentes (nivel VII). Igualmente lo hace con las figuras semejantes, aunque en ese caso añade a esas dos asociaciones las de las figuras c con d' y d con a' (Figura 7.4.3), lo cual corresponde a un nivel de conocimiento IV. No identifica ninguna de las figuras que sólo son equivalentes (nivel I).

  Únicamente relaciona la equivalencia con la congruencia.

- Asocia tres alturas a un triángulo (nivel IV) —ítem 2— y las representa correctamente (nivel IV).

- Identifica el criterio de congruencia de triángulos del ítem 3a —opción a4—, pero además considera que dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y un ángulo cualquiera iguales a sus homólogos del otro triángulo —opción a1—. Este tipo de respuesta la hemos asociado a un nivel de conocimiento IV.

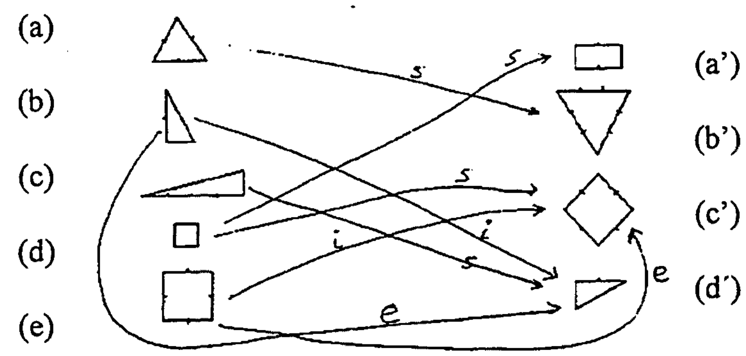


Figura 7.4.3

- No aplica ningún criterio para justificar la congruencia de los dos triángulos del ítem 3b. Además, la mezcla que hace de referencias a ángulos, bases y áreas nos muestra que Lluís no distingue entre congruencia y equivalencia (nivel II).
- En el ítem 4 elige la opción correcta, pero para justificarla sólo utiliza la técnica de aplicar la fórmula del área del triángulo y expresar la relación entre sus elementos (nivel IV). Lluís escribe: "A= $\frac{b.h}{2}$; h = alçada del triangle ABC; A' = $\frac{b.2h}{2}$= b.h $\Rightarrow$2A = b.h =A' ".
- En el ítem 5 hace cinco asociaciones, de las que sólo tres son correctas: el trapecio con su fórmula; el triángulo rectángulo con la expresión del teorema del coseno; y el pentágono con la fórmula de su área. En ningún caso identifica en las figuras los elementos que intervienen en las fórmulas.
- Selecciona la opción correcta en el ítem 6. Tras representar la altura correspondiente a la base común de los dos triángulos, Lluís justifica la selección que hace de la siguiente forma: "Perquè A = $\frac{b.h}{2}$ i si la base és *BC* per als dos triangles i l'alçada també és la mateixa, llavors A1 = A2" (nivel III).
- La respuesta de Lluís al ítem 7a es incorrecta, igual que su justificación: "Perquè el segment AB és paral.lel a r i els angles β i δ són complementaris $\Rightarrow$ sumen 90°" (nivel de conocimiento I). En los casos de los ítems 7b y 7c, asignamos a las respuestas de Lluís un nivel de conocimiento III, ya que elige las opciones correctas, pero en las justificaciones que da sólo se refiere implícitamente a la proporcionalidad de los lados —"Perquè les bases són una la meitat de l'altra", en el primer caso, y "la base passa de 3 a 1 $\Rightarrow$la altura també ho farà així, multipliques dues vegades per 3", en el segundo—, sin hacer referencia a la semejanza ni al teorema de Tales.
- En la resolución del problema 8A, Lluís expresa el área de cada uno de los triángulos y busca relaciones entre sus elementos. Utiliza los lados AB y CD como bases de los triángulos ABC y ACD, respectivamente, y representa las alturas de ambos triángulos sobre dichos lados, llegando a identificar visualmente su

igualdad. El desarrollo que Lluís hace de la resolución de este problema lo mostramos en la Figura 7.4.4.

La expresión del resultado final pone de manifiesto el desconocimiento que Lluís tiene de la relación que hay entre AB y CD, a pesar de que en un momento determinado de su resolución representa el hexágono regular que contiene al trapecio del enunciado (Figura 7.4.4). Asignamos a la resolución de este problema un grado de desarrollo IV.

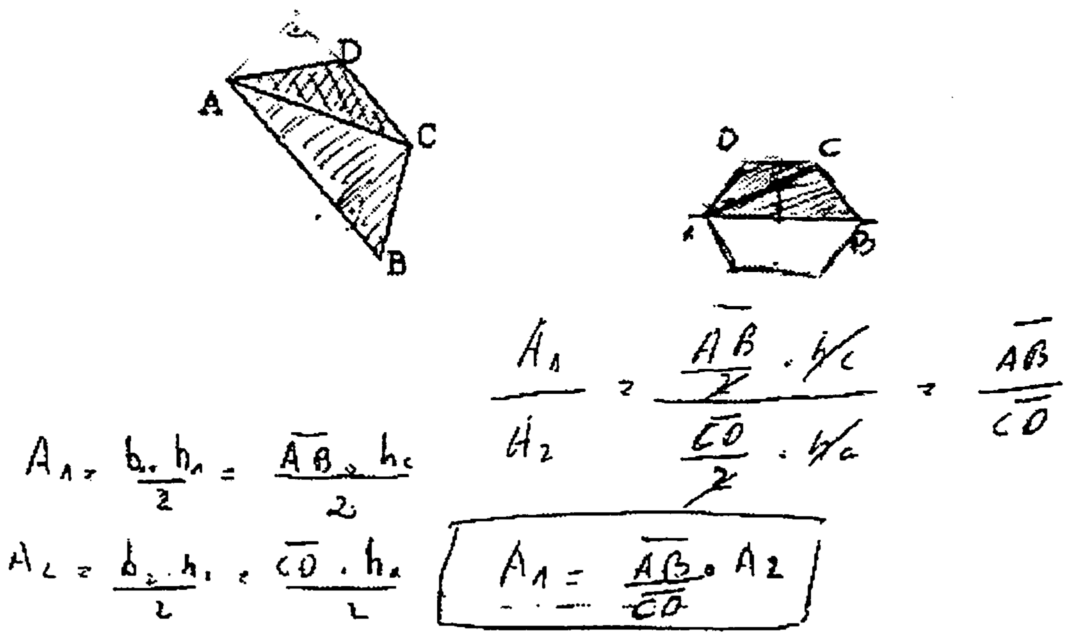


Figura 7.4.4

- En la resolución del problema 9A, Lluís divide el paralelogramo ABCD en dos mediante el segmento HF (Figura 7.4.5), y expresa las áreas del cuadrilátero EFGH (y del paralelogramo ABCD) como suma de las áreas de los triángulos (y paralelogramos) en que ha quedado dividido. En el desarrollo algebraico posterior, es importante la expresión de la altura del paralelogramo ABCD como suma de las de los ABFH y HFCD. Lluís identifica esa relación, pero no llega a aplicarla porque un fallo en la expresión del área del paralelogramo HFCD le conduce a la expresión $\frac{A_{ABCD}}{A_{HGFE}} = \frac{4h_F + 2h_G}{h_F + h_G}$ (h_F y h_G son las alturas de los paralelogramos ABFH y HFCD y de los triángulos HFE y HFG, respectivamente), en la que queda bloqueado (grado de desarrollo IV).

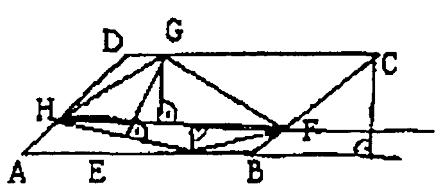


Figura 7.4.5

- Enfoca la resolución del problema 10 de forma algebraica, planteando la proporción $\frac{A_{MNPQ}}{A_{ABCD}} = \frac{5}{8}$ y expresando las áreas de los cuadrados ABCD y MNPQ en función de sus lados, que identifica por c_1 y c_2, respectivamente. La relación errónea que establece entre los segmentos DP y PC, cuya razón pretende obtener, y los lados c_1 y c_2, le conduce, de forma casi inmediata, a un resultado final que no es correcto. La resolución avanzada que Lluís consigue se corresponde con un grado de desarrollo IV, ya que las deficiencias en las relaciones entre los segmentos le facilitan el desarrollo algebraico que hace.

Como podemos observar por las respuestas a la prueba inicial, Lluís también tiene un nivel de conocimientos alto sobre los contenidos matemáticos implicados en la comparación de áreas, pero con algunas lagunas concretas en la comprensión de determinados conceptos —equivalencia y semejanza (ítem 1)—, en la aplicación de los criterios de igualdad de triángulos (ítem 3b), y en la utilización de las relaciones angulares (ítem 7a). Además, a diferencia de Pere, Lluís utiliza siempre enfoques algebraicos basados en la aplicación de fórmulas y en la búsqueda de relaciones entre sus elementos, no olvidemos su respuesta al ítem 4 y la forma de afrontar la resolución de los problemas 8A, 9A y 10.

7.5. Resumen de las características cognitivas de los alumnos

Según hemos analizado en los apartados anteriores, tenemos tres parejas de alumnos con características cognitivas diferentes:

Rosa y Anna son dos alumnas de tercero de BUP que, en cierta forma, se complementan, ya que Anna tiene tendencia a enfocar las cuestiones y problemas aplicando las fórmulas de las áreas de las figuras y buscando relaciones entre los elementos de las mismas, mientras que en Rosa, que tiene deficiencias en el cálculo con expresiones algebraicas, reconocemos una tendencia a afrontar los problemas descomponiendo las figuras en otras más sencillas.

Tanto Laia como Jaume son alumnos de tercero de BUP que se inclinan, en general, por una forma algebraica de enfocar los problemas, identificando simbólicamente los elementos de las figuras, de forma no siempre adecuada, y buscando relaciones entre ellos para aplicar las fórmulas de las áreas de las figuras que intervienen. Ambos tienen deficiencias en el reconocimiento de las alturas de un triángulo y en la comprensión de los conceptos de equivalencia y semejanza, entre otros. Es manifiesta la impulsividad de Laia y la actitud mucho más reflexiva de Jaume. Con frecuencia protagonizan en las clases de matemáticas diálogos que ponen de manifiesto una cierta competencia entre ellos.

Pere y Lluís son dos alumnos de COU con un nivel de conocimientos alto sobre los contenidos matemáticos involucrados en la resolución de PCASP. A pesar de ello, Lluís tiene algunas lagunas en determinados conceptos, tiende a enfocar los problemas aplicando las fórmulas de las áreas de las figuras, muestra cierta lentitud en la realización de actividades, y tiene una gran capacidad para insistir en la compresión de lo que no entiende. Por el contrario, Pere utiliza indistintamente procedimientos algebraicos y geométricos en la resolución de problemas y es rápido en la asimilación de las explicaciones del profesor.

CAPÍTULO 8

ANÁLISIS DE LOS PROCESOS DE RESOLUCIÓN

> Necesitamos observar, y precisamos hacerlo muy bien, con imaginación, con audacia y con dedicación. Si no observamos, nunca veremos qué es lo que ocurre. Si no vemos lo que sucede, nunca sabremos qué patrones existen. Sin estos patrones, nunca habrá el tipo de teoría que queremos construir.
>
> R. Bakerman y J. M. Gottman (1989)

8.1. Introducción

En los apartados que siguen analizamos en profundidad los cuatro procesos de resolución de cada pareja de alumnos, de acuerdo con el esquema de análisis cualitativo que hemos mostrado en el Capítulo 3. Para ello, transcribimos cada proceso de resolución, identificamos los intercambios y dividimos el protocolo escrito en episodios, analizamos microscópicamente cada uno de los episodios desde el punto de vista cognitivo, metacognitivo e interactivo, y, por último, resaltamos las características generales del proceso de resolución.

8.2. Análisis de los procesos de resolución de Rosa y Anna

8.2.1. Actuación de Rosa y Anna en la resolución del problema del paralelogramo

8.2.1.1. *Transcripción del proceso de resolución*

1. Anna: *Si M és un punt qualsevol de la diagonal AC del paral.lelogram ABCD, quina relació hi ha entre les àrees dels triangles ratllats de la figura (Figura 8.2.1).*

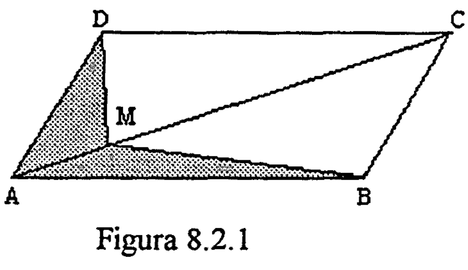


Figura 8.2.1

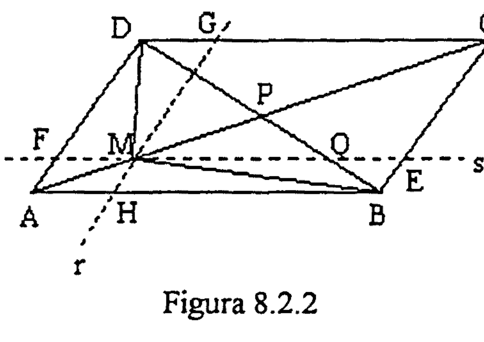


Figura 8.2.2

2. Rosa: [Lee en voz baja]. *Va!, comencem el paral.lelogram* =[empieza a representar la Figura 8.2.3]=

3. Anna: *=Si M és un punt qualsevol* [empieza también a representar, Figura 8.2.4] *de la diagonal AC ...=*

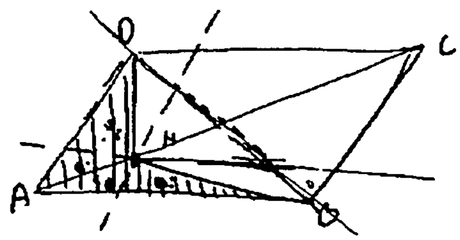


Figura 8.2.3

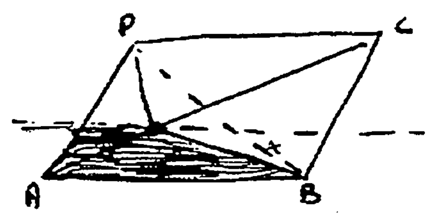


Figura 8.2.4

4. Rosa: [Copia las letras del enunciado y raya los triángulos AMD y AMB].
5. Anna: *Del paral.lelogram A, B, C i D* [pone las letras en los vértices], *quina relació...* [vuelve a leer en voz baja], *quina relació hi ha ...*
6. Rosa: *Entre aquest* [AMB] *i aquest?* [AMD, señalando sobre la Figura 8.2.3]. *Aquest costat d'aquí* [AM] *el tenen..., és el mateix, no?* [señala sobre la Figura 8.2.4] <pausa(5)>

Figura 8.2.5

7. Anna: *Espera, a veure, tenim un* [AMB] *i un altre* [AMD, representa los dos triángulos fuera del paralelogramo, Figura 8.2.5]. *Aquest costat* [indica el lado AM del triángulo AMB y pone sobre él una x] *i aquest costat* [indica el lado AM del triángulo AMD y pone sobre él una x].
8. Rosa: *Aquest...* [indica AM sobre la Figura 8.2.1].
9. Anna: *Aquest* [indica AM de la Figura 8.2.5] *és aquest* [indica AM de la Figura 8.2.4].
10. Rosa: *Ah sí!*
11. Anna: *I aquests dos* [DM y AD, Figura 8.2.5], *és que ho veig diferent jo...*
12. Rosa: *Sí, sí, sí.*
13. Anna: *És que jo l'he dibuixat apart.*
14. Rosa: *Val / A veure* <pausa(15)>
14'.Rosa: *Si aquí fem l'altra diagonal ...* [traza la diagonal BD, Figura 8.2.2].
15. Anna: [Representa también la diagonal BD, Figura 8.2.4].
16. Rosa: [Indica el segmento MP sobre la Figura 8.2.3 y después va a la Figura 8.2.1 y une, sin marcar, los vértices B y D].
17. Anna: *Queda aquest dibuix* [traza la recta s paralela a AB en la Figura 8.2.4, véase Figura 8.2.2, y señala los triángulos MBE y AMB], *no?*
18. Rosa: *Has traçat la paral.lela passant pel punt M. Tracem la paral.lela passant pel punt M* [la representa también sobre la Figura 8.2.3 que está construyendo].
19. Anna: *Sí. No són iguals perquè aquest...* [señala el triángulo MBE y el AMB], *perquè aquest* [BE] *no és pas paral.lel a aquest* [AM]. *El que és igual...*
20. Rosa: *== El que és igual és aquest d'aquí* [DMF, sobre la Figura 8.2.3] *amb aquest d'aquí* [MPD], *no?*

21. Anna: *Quin?*
22. Rosa: *Aquest d'aquí amb aquest tros d'aquí* [repite].
23. Anna: *Sí, però sobra aquest trosset d'aquí* [se refiere a que, para completar el triángulo AMD, falta el AMF y lo indica sobre la Figura 8.2.4].
24. Rosa: *I ens sobra aquest tros d'aquí petit* [AMF, Figura 8.2.3].
25. Anna: *Però també serà igual, tot això, tot això* [AFMB, que lo raya en la Figura 8.2.4, ver Figura 8.2.2] *serà igual a aquest* [MBE].
26. Rosa: *Com? /*
27. Anna: *Ah no!*
28. Rosa: *Ah!, ja ho tinc Anna, mira, si pintes una altra diagonal, ai!, una altra paral.lela* [representa la recta r y señala el segmento BC para significar su paralelismo], *no?, aquest d'aquí* [BEM] *és igual que aquest d'aquí* [HBM] *i aquest d'aquí* [AHM] *és igual que aquest d'aquí* [AMF].
29. Anna: *Sí.*
30. Rosa: *I aquest d'aquí* [FMD] *és igual que aquest d'aquí* [DMG], *no?*
31. Anna: *Sí, sí.*

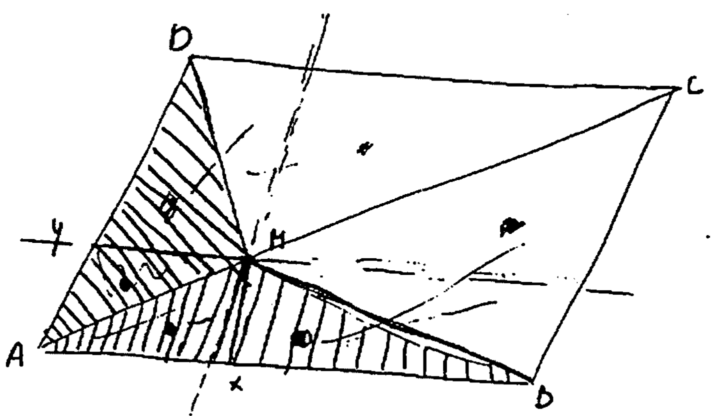


Figura 8.2.6

32. Rosa: *Doncs així, aquest d'aquí ...* [indica ABM] <pausa(10)>

32'.Rosa: *A veure, ho faig més gran* [comienza a representar la Figura 8.2.6], *ho veurem millor i cabran totes les línies.*

33. Anna: [Empieza también a representar la Figura 8.2.7]. *Hem de buscar la relació entre aquest* [AHM] *i aquest* [AMF], *vull dir, entre tot aquest* [ABM] *i aquest* [AMD].

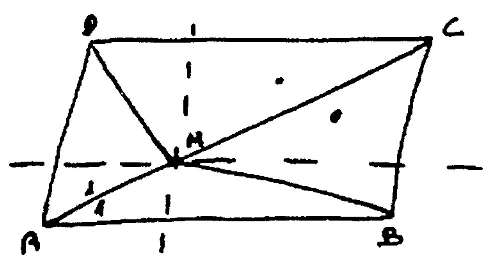


Figura 8.2.7

34. Rosa: [Continúa representando sin hacer caso de Anna].

34'.Rosa: *D'aquest d'aquí* [AMD, lo raya en la Figura 8.2.6] *amb aquest d'aquí* [ABM, también lo raya, Figura 8.2.6], *no?*

35. Anna: [Pone un 1 sobre los triángulos AHM y AMF, Figura 8.2.7]. *I aquest tros* [indica AHMF] *és com si l'haguéssim descartat, perquè és el mateix. Aquest i aquest* [indica los triángulos AHM y AMF, Figura 8.2.6] *és el mateix, només ens falta relacionar aquest* [FMD] *amb aquest* [HMB]; *i aquest* [FMD] *és el mateix que aquest* [MDG] *i aquest* [HMB] *és el mateix que aquest* [MBE, lo indica sobre la Figura 8.2.6, representada por Rosa] /
36. Rosa: *Sí. Aquest i aquest és el mateix* [FMD y MDG], *i aquest i aquest és el mateix* [MBE y HMB] <pausa(15)>
36'.Rosa: [Simula representar las rectas r y s sobre la Figura 8.2.1]. *I ara què?*
37. Anna: *Si M és un punt qualsevol de la diagonal AC* [lee el enunciado y pone todas las letras sobre la Figura 8.2.7] *troba la relació entre les àrees...* [continúa leyendo].
38. Rosa: [Mientras tanto Rosa recalca los segmentos MH y FM en la Figura 8.2.6]. *Aquest costat d'aquí* [MH] *i aquest costat d'aquí* [FM] *és el mateix, no? Aquest costat d'aquí i aquest d'aquí* [repite] *és el mateix, no? /*
39. Anna: *No.*
40. Rosa: *Com que no? Aquest és el mateix, aquest és el mateix, aquest és el mateix* [señala los lados AF, FM, AH y HM] *Ah no! Això representa un altre paral.lelogram* [FMHA], *aquest d'aquí* [HM] *és igual que aquest d'aquí* [AF], *i aquest d'aquí* [AH] *és igual que aquest d'aquí* [HM] /
40'.Rosa: *Jo diria que l'àrea d'aquest triangle* [FMD] *i aquest* [HMB] *és igual.*
41. Anna: *Per què?*
42. Rosa: *Eh?, per..., no sé* [vuelve a la Figura 8.2.1 e indica las rectas r y s sin representarlas].
43. Anna: *Pel morro, no? És igual pel morro* [ríen] <pausa(6)>
44. Rosa: =[Representa la Figura 8.2.8]=
45. Anna: =[Pone x en el punto H e y en el F, Figura 8.2.6]=

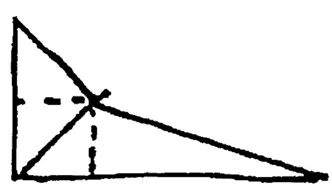


Figura 8.2.8

46. Rosa: [Representa en la Figura 8.2.8 las alturas con puntos y vuelve a la Figura 8.2.6] <pausa(18)>
46'.Rosa: *A veure, si aquest d'aquí el tallem per aquí* [indica el paralelogramo ABCD] *ens queda aquest paral.lelogram aquí* [GMEC], *i aquesta àrea* [AFM] *és igual que aquesta* [AHM], *no? Aquestes dues són iguals* [repite], *no?*
47. Anna: *Sí.*
48. Rosa: *Per tant l'àrea d'aquí* [FMGD] *ha de ser igual que la d'aquesta* [HBEM], *no? Però, per què?*
49. Anna: *Clar, perquè aquest* [MEC] *torna a ser igual que aquest* [MCG, señala sobre la Figura 8.2.7]. *Clar, si aquest* [AMF] *i aquest* [MCG] *és igual que aquest* [AHM] *i aquest* [MEC], *tota aquesta àrea* [FMGD] *ha de ser la mateixa que aquesta* [HBEM].
50. Rosa: *Per tant...* [señala FMGD y HBEM, queriendo indicar la igualdad de sus áreas].

51. Anna: *Però això, com ho sabem?*
52. Rosa: *Com ho sabem? Espera, si tenim un paral.lelogram* [ABCD], *si el partim per la meitat* [indica AC], *aquesta banda ha de ser igual que aquesta* [indica los triángulos ABC y ACD], *no? Aquesta banda ha de ser igual que aquesta* [repite].
53. Anna: *ABC és igual a ACD* [lo escribe].
54. Rosa: *I per tant aquesta...* [indica el paralelogramo MECG], *ABC és igual a ACD* [lo copia también]. *Per tant, si ho fem més petit* [se refiere al paralelogramo MECG], *aquesta* [MEC] *també ha de ser igual que aquesta* [MCG], *perquè aquestes són paral.leles* [se refiere a los lados del paralelogramo], *no?*
55. Anna: *Aquesta* [MEC] *i aquesta* [MCG] *han de ser iguals.*
56. Rosa: *I aquesta* [AHM] *i aquesta* [AMF] *també són, doncs, per tant, aquesta* [FMGD] *i aquesta* [HBEM], *també, no? I si fem la meitat* [indica MB y DM], *pues aquesta* [FMD] *és igual que aquesta* [HBM], *no? /*
57. Anna: *Sí, sí.* [no muy convencida], *però clar si no ho raonem d'alguna manera..., dic jo* <pausa(5)>
58. Rosa: *Un paral.lelogram* [ABCD] *té la mateixa àrea aquí que aquí* [indica ACD y ABC]. *Si això ho fem més petit ...* [indica el paralelogramo MECG]. *Si aquestes són paral.leles...* [se refiere a las rectas r y s].
59. Anna: *==Continua sent igual això* [MEC] *i això* [MCG] *=perquè si aquestes són paral.leles=*
60. Rosa: *=I això d'aquí* [AHM y AMF] *també= si les paral.leles continuen per aquí* [indica r y s], *també.*
61. Anna: *Per tant, aquest* [FMGD] *ha de ser igual que aquest* [HBEM] *i si ho dividim per la meitat...*
62. Rosa: *L'àrea d'aquest triangle* [MCG] *més l'àrea d'aquest* [FMGD] *ha de ser igual a l'àrea d'aquest* [MEC] *més l'àrea d'aquest* [HBEM] *més l'àrea d'aquest* [AHM], *no?, i, per tant, si dividim per la meitat* [indica DM], *encara que ho dividíssim en quatre trossos, o en cinc, o en sis, sempre donaria el mateix un que l'altre* [indica FMD y DMG], *si els dividim, són iguals. Si ara fem una altra diagonal, aquí també* [indica HE] *donaria igual, aquí que aquí* [indica HEM y HBE], *i la mateixa aquí que aquí* [señala los cuatro triángulos en que queda dividido el paralelogramo HBEM al trazar sus dos diagonales].
63. Anna: *Jo, per mi sí.*
64. Rosa: *I jo. Per tant, l'àrea és la mateixa aquí* [HBM] *que aquí* [FMD], *ja està, no? /*
65. Anna: *Com si ara partíssim això per la mitat* [GE] *i agaféssim un tros aquí i aquí* [indica dos partes de las cuatro en que queda dividido el paralelogramo MECG], *com tot ho partim per la meitat...* <pausa(7)>. *Jo diria que és el mateix /*
66. Rosa: *Ja està, no?*
67. Anna: *Més o menys* <pausa(5)>
68. Rosa: *Podem tornar-lo a dibuixar, torna a dibuixar-lo!*
69. Anna: [Representa la Figura 8.2.9].

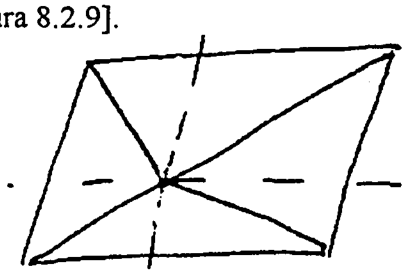


Figura 8.2.9

70. Rosa: *Com són paral.leles* [r y s] *queda la mateixa àrea aquí que aquí* [indica MCG y MEC], *ja està!*

8.2.1.2. *Microanálisis del proceso de resolución*

A) Lectura

La presentación del enunciado del problema —con parte escrita y gráfica— y la recomendación del investigador de que no escriban sobre el folio del enunciado marcan el inicio de este episodio, en el sentido de que Rosa y Anna se ven obligadas a hacer su propia representación. La hacen cada una en su folio.

El trabajo en paralelo que sigue a la indicación de Rosa (intervención 2) de efectuar el gráfico —"Va!, comencem el paral·lelogram"— dura 40 segundos y acaba con la identificación cooperativa del objetivo del problema. El hecho de que el trabajo en paralelo no acabe con una puesta en común sobre la interpretación gráfica que hacen es debido a que las alumnas se limitan a copiarlo del enunciado del problema.

B) Exploración

La pausa de la intervención 6 marca la frontera de separación entre lo que ha sido una simple interpretación del enunciado y lo que pasa a ser una búsqueda, un tanto desordenada, de relaciones entre los elementos de la figura del enunciado.

Hay en este episodio cuatro aspectos importantes que conviene resaltar. Están relacionados con las diferentes aportaciones que van realizando las alumnas. Los dos últimos son relevantes para el desarrollo posterior del proceso de resolución.

a) Rosa (intervención 6) reconoce el lado común de los dos triángulos que se comparan. Este reconocimiento es aprovechado por Anna para hacer una representación alternativa en la que identifica, mediante "x", el lado común de los dos triángulos. La identificación es la culminación de un intercambio cooperativo, pero el enfoque algebraico que apunta se abandona porque la continuación del diálogo, que no es cooperativa, se produce por medio de tres intercambios del tipo validación-continuación encabezados por Anna , de los que sólo en uno hay una cierta progresión —el que se corresponde con la identificación de los lados desiguales (intervención 11)—.

El intento de identificación simbólica por parte de Anna es coherente con sus características cognitivas, analizadas en el apartado 7.2.

b) Rosa representa la diagonal BD del paralelogramo ABCD (intervención 14') en su afán de buscar alguna relación entre las figuras que se obtienen.

Ninguno de los dos intentos descritos en los apartados anteriores son tenidos en cuenta en el resto del proceso.

c) Es, en cambio, Anna la que, después de dejarse llevar por la iniciativa de Rosa en las intervenciones anteriores, traza la recta "s", paralela a AB por M (intervención 17). El trazado de "s" marca definitivamente la dirección del proceso. Las siguientes intervenciones son intentos erróneos, con las consiguientes rectificaciones, de búsqueda de igualdades entre las figuras que se obtienen con el trazado de la paralela “s”.

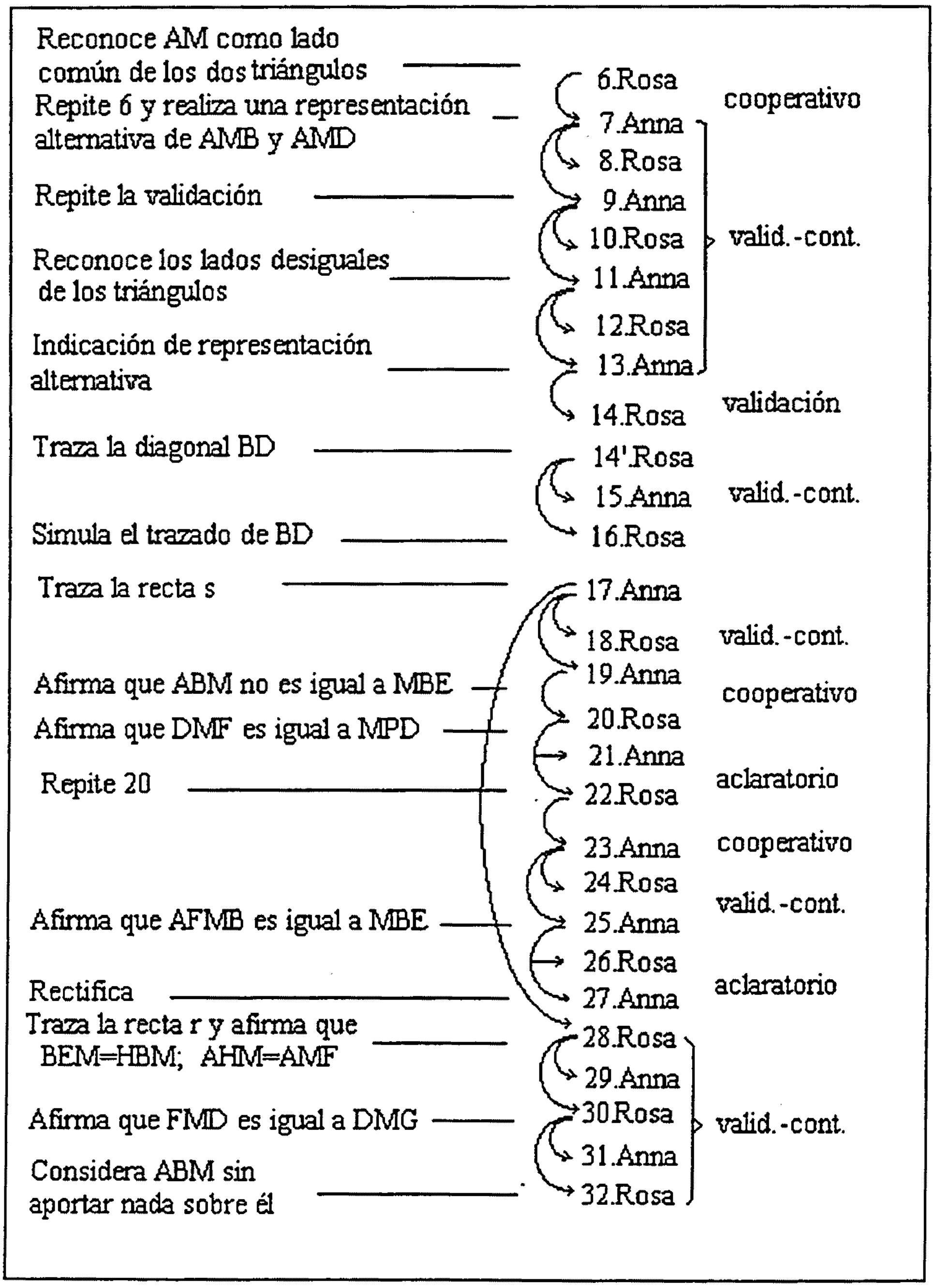


Figura 8.2.10

Hay una alternancia de ambas alumnas en las propuestas que hacen. Así, mientras Rosa propone la igualdad de DMF y MPD, Anna lo hace de las figuras AFMB y MBE.

d) Rosa recoge la idea inicial de trazar la paralela “s” representando (intervención 28) la recta “r”, que es paralela a AD por M. Esta paralela da lugar a un nuevo intento de reconocimiento, ahora fructífero, de la igualdad de determinados triángulos (BEM y HBM, AHM y AMF y FMD y DMG), lo que les obliga a proponer la realización de una nueva representación "más grande" del paralelogramo para poder visualizar las relaciones que han encontrado (intervención 32').

Observamos que se ha producido una evolución significativa a lo largo del episodio, ya que los intentos desordenados de aportaciones, sin finalidad concreta, se han convertido en búsqueda ordenada de relaciones entre los triángulos que resultan de la división del paralelogramo por las dos paralelas "r" y "s".

En la interacción que se produce (Figura 8.2.10), hay una alternancia en la sucesión de intercambios de los tipos validación-continuación y aclaratorios de la forma Rosa-Anna-Rosa y Anna-Rosa-Anna, separados por intercambios cooperativos o por pausas, en función de quién sea la alumna que va introduciendo información nueva.

Podemos, pues, caracterizar este episodio diciendo que Anna y Rosa se distribuyen, de forma más o menos equitativa, los papeles de preguntar y de validar las aportaciones realizadas por la otra. Es un estilo de interacción en el que cada interlocutora tiene la iniciativa en períodos cortos de tiempo, en función de los elementos de contenido matemático que va introduciendo, sean estos erróneos o no.

En relación a la aportación de ideas nuevas, hay un predominio de Rosa —que inicia el procedimiento del trazado de rectas con la diagonal BD, traza también la paralela "r" e identifica la igualdad de los triángulos de la intervenciones 28 y 30—, a pesar de la representación que Anna hace de la paralela "s", que es fundamental en el desarrollo del proceso porque marca el camino de la solución que finalmente obtienen.

C) Análisis

Las dos pausas de las intervenciones 32 y 36 delimitan perfectamente un episodio en el que cada una de las alumnas, por separado y durante 46 segundos, vuelve a hacer una representación gráfica "más grande" del paralelogramo. Las dos alumnas expresan, primero, lo que quieren conseguir (intervenciones 33 y 34'), y Anna hace, después, un análisis de la situación que reduce la comparación de los triángulos ABM y AMD a la de los HMB y FMD.

Estamos ante un episodio caracterizado por el hecho de que las alumnas hacen una nueva representación gráfica del paralelogramo en la que representan las rectas "r" y "s", que les sirven para delimitar y precisar el objetivo que quieren conseguir. La finalidad de la nueva representación es identificar visualmente los triángulos que son iguales. En ningún caso las igualdades de triángulos se justifican de otra forma que no sea la apreciación visual.

La Figura 8.2.11 nos muestra el esquema de la interacción que se produce en este episodio, en el que resaltamos el trabajo en paralelo que supone la representación, por separado, de un paralelogramo. Como en el episodio de lectura, tras el trabajo en paralelo Rosa identifica el objetivo del problema.

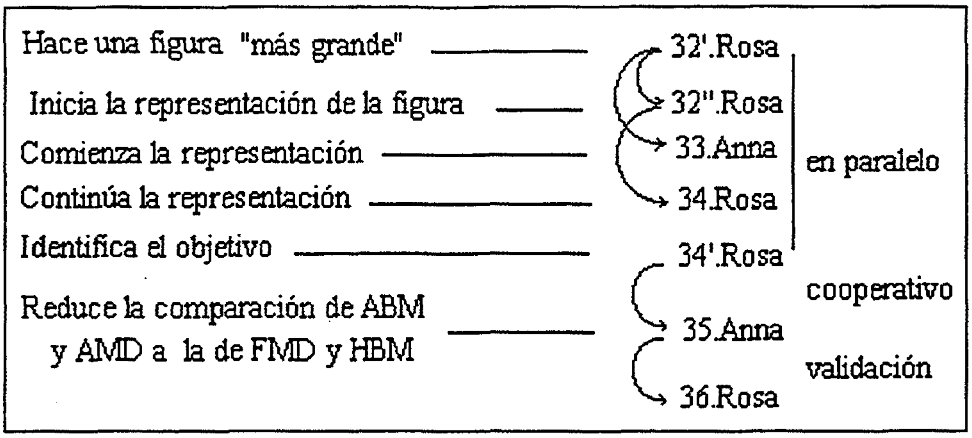


Figura 8.2.11

D) Exploración

La situación de bloqueo en la que las alumnas se encuentran, puesta de manifiesto por la pausa de la intervención 36 y la pregunta de Rosa (intervención 36') —"I ara què?"—, es abordada de forma diferente por ambas alumnas. Así, mientras Anna recurre a la lectura del enunciado, Rosa trata de buscar relaciones entre los lados del paralelogramo AHMF (Figura 8.2.12).

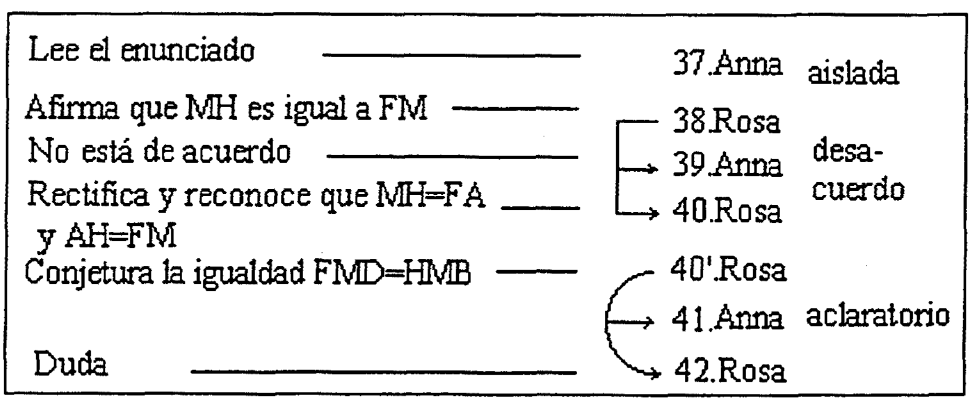


Figura 8.2.12

La propuesta que hace Rosa en relación a la igualdad de los lados contiguos (MH y FM) del paralelogramo, produce el rechazo de Anna y la rectificación, por parte de aquélla, en la intervención 40. A esa rectificación sigue la propuesta de una conjetura —la igualdad de las áreas de los triángulos FMD y HMD— que no sabe justificar.

La rectificación de Rosa después del intercambio de desacuerdo (intervenciones 38 a 40) no la podemos considerar como una oportunidad de aprendizaje porque no tenemos constancia previa de que Rosa desconozca las relaciones entre los lados opuestos de un paralelogramo.

Destacamos, pues, en este episodio, tres aspectos:

a) La situación de bloqueo es afrontada mediante un trabajo en paralelo que dura aproximadamente 30 segundos.

b) La aparición de una situación breve de desacuerdo que acaba con la rectificación, por parte de Rosa, de la propuesta errónea introducida por ella misma.

c) El establecimiento de una conjetura que pronostica sin fundamento la igualdad de las áreas de los triángulos FMD y HMB, puesto que Rosa no sabe responder a la pregunta de Anna sobre el porqué de dicha igualdad.

E) Ejecución

La situación de bloqueo que se produce cuando ambas alumnas no saben justificar la conjetura de Rosa sobre la equivalencia de los triángulos ABM y AMD, se pone de manifiesto con dos pausas (intervención 43 y 46) y es abordada con un trabajo en paralelo.

Durante la segunda pausa Rosa está gestando la idea que definitivamente resolverá el problema. En la intervención 46', Rosa considera el paralelogramo GMEC y, basándose en la igualdad de las áreas AFM y AHM, llega a la conclusión de que los paralelogramos FMGD y HBEM tienen la misma área (intervención 48). La justificación de dicha equivalencia es razonada por Anna (intervención 49) quien insiste en la igualdad de los triángulos MEC y MCG y AMF y AHM. En la intervención 52, y ante la demanda de justificación por parte de Anna, Rosa hace referencia al paralelogramo ABCD y a la igualdad de los triángulos que se obtienen al dividirlo por la diagonal AC. En la continuación del diálogo, y ante la duda expresada por Anna sobre el razonamiento efectuado, Rosa hace referencia a la condición de paralelogramos de ABCD, MECG y AHMF para justificar tales igualdades.

La conclusión final de que FMD y HBM tienen la misma área es aceptada con reservas por parte de Anna, que parece no considerar con entidad suficiente el razonamiento verbal que acaba de hacer Rosa —"Però clar si no ho raonem d'alguna manera..., dic jo" (intervención 57)— y en el que ella misma se ha involucrado. Esta duda obliga a las alumnas a repetir la argumentación en un episodio que hemos calificado como "verificación".

Destacamos en este episodio de ejecución varios aspectos:

a) La idea inicial de Rosa, implícita en la intervención 46', de dividir el paralelogramo ABCD en otros cuatro —GMEC, AHMF, HBEM y FMGD— y, sobre la base de que la diagonal divide a cada uno de ellos en dos triángulos iguales, llegar a la conclusión de la equivalencia de GMEC y HBEM.

b) La forma en que surge la idea que aporta Rosa como consecuencia de un tiempo —aproximadamente un minuto— de reflexión individual.

c) El hecho de que Anna parece no aceptar el tipo de razonamiento verbal iniciado por Rosa y del que ella misma es partícipe. Esta no aceptación se pone de manifiesto en la intervención 51 —"Però això, com ho sabem?"—, no dando validez al razonamiento que acaba de hacer, pero sobre todo al final del episodio (intervención 57) donde Anna pide otra forma de argumentar la igualdad a la que llegan.

Son las dudas de Anna sobre la forma de razonar la igualdad de las áreas de los paralelogramos y el poco convencimiento que muestra Rosa —al preguntar (intervención 48) el porqué de lo que ella introduce— lo que obliga a ambas alumnas a insistir y autoconvencerse sobre los argumentos que dan.

d) El papel comunicativo de Rosa consiste en ir razonando cada vez con más detalle la equivalencia de los paralelogramos FMGD y HBEM que introduce al principio del episodio (Figura 8.2.13), originando sus nuevas aportaciones (intervención 46' y 52) por medio de intercambios de validación-continuación. Mientras tanto, Anna desempeña el papel de validar las aportaciones de su compañera e introducir elementos de duda en el tipo de razonamiento que siguen (intervención 51 y 58). Entendemos que las validaciones de Anna son reales, es decir, comprende lo que dice su compañera, si tenemos en cuenta que en la intervención 49 reproduce completamente la argumentación introducida por Rosa.

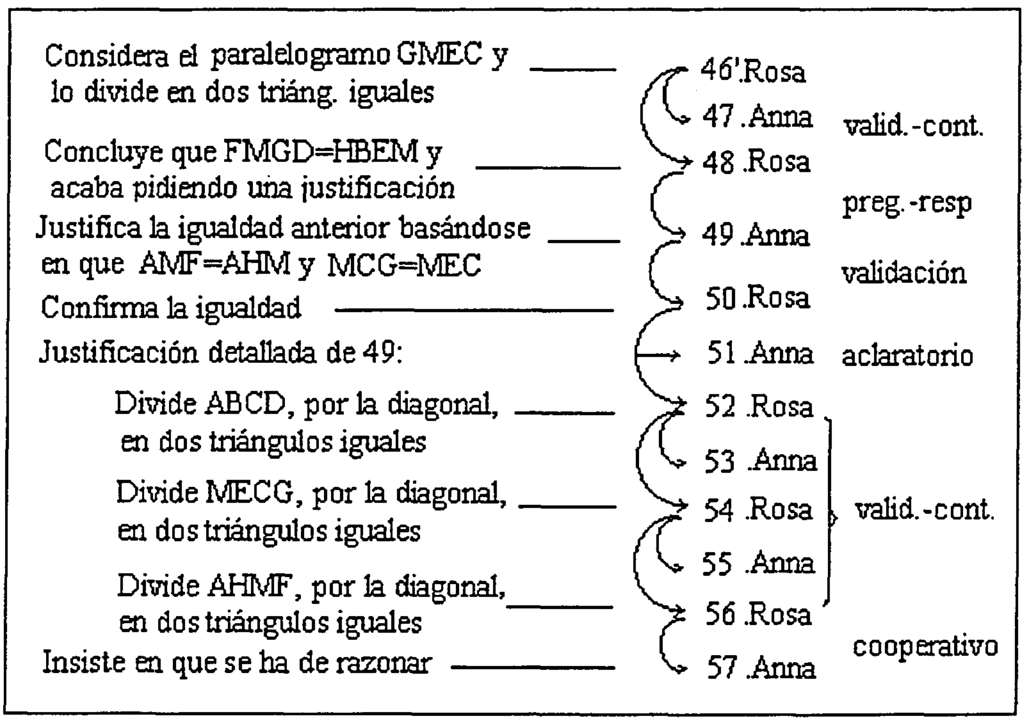


Figura 8.2.13

F) Verificación

La pausa de la intervención 57, originada por la desconfianza de Anna en el razonamiento efectuado en el episodio anterior —"Sí, sí, però clar si no ho raonem d'alguna manera..."—, al que parece no dar validez, origina un proceso de verificación de la solución obtenida que consiste en repetir paso a paso y de forma cooperativa todo el razonamiento efectuado en la ejecución.

El autoconvencimiento sobre la validez de los argumentos utilizados en la ejecución se pone de manifiesto tanto en la intervención 62 como en la 65, donde Rosa y Anna trazan otras diagonales del paralelogramo y explicitan la igualdad de los triángulos que obtienen.

Hay, ahora, en la justificación de las igualdades de los triángulos referencias al hecho de que la diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.

Destacamos dos aspectos de la verificación:

a) La cooperación que se produce a lo largo de casi todo el episodio (Figura 8.2.14). Ahora bien, el carácter local de cualquier intercambio, en este caso de los cooperativos, no contempla el hecho, que hemos de tener en cuenta aquí, de que las aportaciones nuevas que se hagan respecto de la intervención anterior pueden no ser novedosas en el contexto global del proceso de resolución. Éste es el caso que se nos presenta aquí, ya que la cooperación entendida como aportación de contenidos nuevos lo es a nivel local, incluso a nivel de episodio, pero las aportaciones que se van produciendo son repeticiones de las efectuadas en el episodio anterior (véase apartado 10.2).

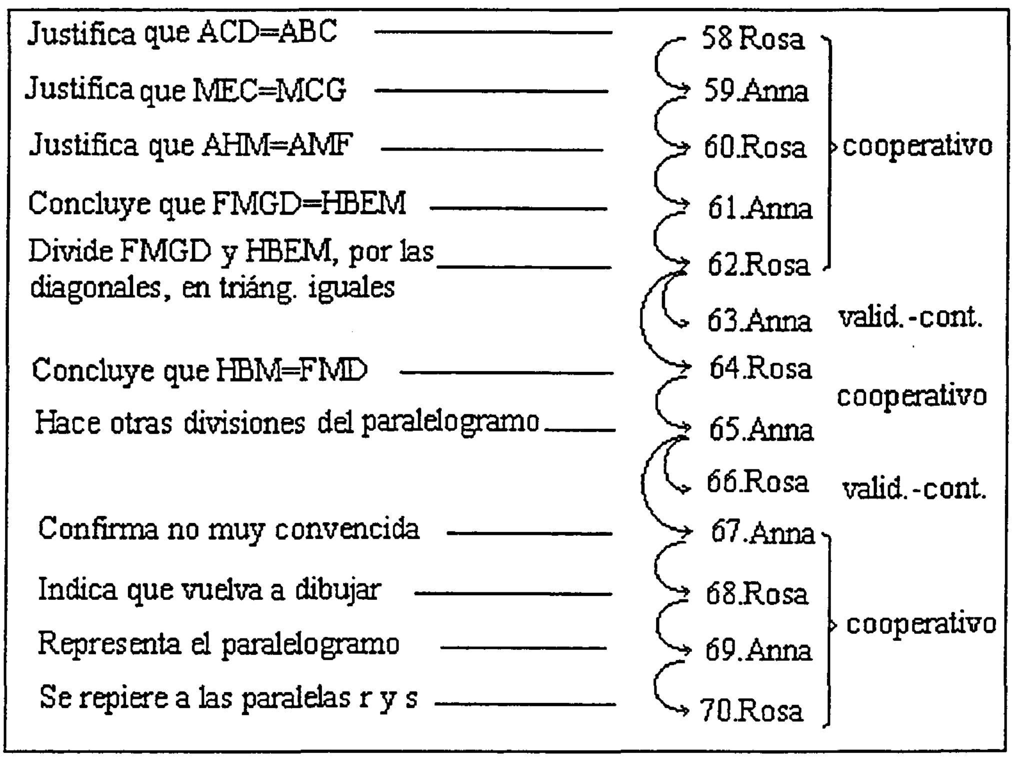


Figura 8.2.14

b) Hay un intento de reiniciar la verificación cuando Anna (intervención 67) da su consentimiento al razonamiento seguido de forma no muy convincente —"Més o menys"—. Posiblemente el tiempo que llevan resolviendo el problema y la imposibilidad de encontrar otro razonamiento alternativo que las satisfaga plenamente, hace a Anna desistir en la manifestación de sus dudas, dando por acabado el proceso.

8.2.1.3. *Características generales del proceso de resolución*

a) Papeles comunicativos de las alumnas

Una visión superficial de las Tablas 8.2.1 y 8.2.2 nos conduciría al error de pensar que hay una forma de actuar parecida de cada alumna en el proceso de resolución, sobre todo si nos fijamos en el número de intercambios que suponen un progreso en la resolución (cooperativos y validación-continuación progresivos) y en la compensación que hay entre ellos (8 del tipo Rosa-Anna y 4 del tipo Anna-Rosa-Anna, es decir, 12 continuaciones progresivas de Anna, por las mismas de Rosa —6 del tipo Anna-Rosa y otras tantas del tipo Rosa-Anna-Rosa—).

	COOPERATIVOS	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Rosa-Anna	8 (3)*	0	1(0)	9(3)
Anna-Rosa	6 (3)	2	0	8(3)
TOTAL	14 (6)	2	1(0)	17(6)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.2.1. Intercambios de dos intervenciones

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		INTERRUPCIÓN		ACLARATORIO		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Anna-Rosa-Anna	4(3)*	2	0	0	1(1)	0	5(4)	2
Rosa-Anna-Rosa	6(4)	1	0	0	1(1)	2	7(5)	3
TOTAL	10(7)	3	0	0	2(2)	2	12(9)	5

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.2.2. Intercambios de tres intervenciones

Un análisis en profundidad de la disposición y situación de dichos intercambios en el proceso de resolución y de sus contenidos reales nos permite sacar conclusiones bastante diferentes de lo que parece a simple vista.

En primer lugar (Tabla 8.2.1), hemos de decir que 8 de los 14 intercambios cooperativos se producen en el episodio de verificación final —4 de ellos seguidos— y el contenido de sus intervenciones son informaciones que ya han aparecido anteriormente, por tanto, no suponen ninguna aportación novedosa que no sea el repaso cooperativo —importante *per se*— de la solución que han obtenido.

En el resto del protocolo no se produce ninguna agrupación de dos intercambios cooperativos seguidos. Esto nos da una idea de que el progreso en la resolución no se ha producido como consecuencia de un trabajo cooperativo continuado, entendiendo la cooperación como reciprocidad en la construcción del discurso (apartado 10.2).

En segundo lugar, se producen 4 intercambios seguidos, de tres intervenciones cada uno, iniciados por Rosa, en el momento clave de la ejecución (no olvidemos que la ejecución en la resolución que analizamos es de tipo argumentativo), y 2, también seguidos, después del trazado, por parte de Rosa, de la segunda paralela (intervención 28).

En cambio, sólo 2 de los 6 intercambios del mismo tipo encabezados por Anna se encuentran seguidos (entre las intervenciones 23 y 27), estando asociados a la rectificación de una igualdad errónea introducida por ella misma.

El resto de los intercambios que encabeza Anna aparecen aislados y no suponen avances significativos en el proceso.

Como consecuencia de lo anterior, podemos afirmar que hemos detectado en Rosa una persistencia en justificar las aportaciones que introduce en momentos clave del proceso de resolución, sin duda favorecida por la actitud de Anna, que valida y pregunta estimulando dicha persistencia. Rosa tiene ideas, persiste en su desarrollo y genera argumentos nuevos.

Anna también tiene ideas —no olvidemos que es suya la idea de introducir una notación algebraica, o del trazado de la primera paralela, o de la reducción del objetivo del problema al de la comparación de otros triángulos (intervención 35)—, pero no hay tras de ellas una continuidad, podemos decir que agota enseguida la reflexión sobre las ideas que introduce. El papel de Anna está ligado, en general, a la realización de validaciones y a la introducción de dudas —por medio de preguntas o aserciones ("Per què?", "però això, com ho sabem?", "si no ho raonem d'alguna manera...", "més o menys")— que estimulan el proceso argumentativo de Rosa.

La forma de comportarse de Anna, sobre todo en el episodio de ejecución, produce el mismo efecto en el desarrollo del proceso que si las alumnas tuvieran puntos de vista divergentes sobre el tema que tratan, en este caso, sobre el tipo de razonamiento que originan.

El trabajo en paralelo se produce, principalmente, en tres momentos del proceso (con una duración aproximada de 45 segundos cada uno), dos de ellos asociados con el episodio de lectura y el tercero que se origina como consecuencia de la situación de bloqueo que tiene lugar después del episodio de exploración (intervención 43 a 46) y que desemboca en el proceso argumentativo, generado por Rosa, que forma parte de la ejecución.

b) Esquema de la sucesión de episodios

Una visión general del proceso de resolución, como la que mostramos en el esquema gráfico de la sucesión de episodios, nos permite analizar algunos momentos clave y su repercusión en el desarrollo del proceso.

• Con la identificación simbólica del lado común de los dos triángulos, las alumnas hacen un amago de utilizar el lenguaje algebraico, lo que hubiera supuesto la aplicación de las fórmulas de las áreas de las figuras, pero el abandono de este enfoque se hace porque no hay una continuidad, por parte de ninguna de las dos alumnas, que favorezca su desarrollo.

Además, dicho abandono genera la consideración de un plan implícito que consiste en dividir el paralelogramo por medio de rectas y comparar las figuras que resulten. Este enfoque se desarrolla progresivamente: primero, con el trazado de la paralela a AB por M;

después, con el de la paralela a AD por M, y, más tarde, con la reducción del objetivo del problema a la comparación de los triángulos HBM y FMD.

La realización de una figura "más grande" favorece el proceso de visualización.

• La pregunta: "I ara què?" da paso a una situación de bloqueo que es abordada de formas diversas: leyendo el enunciado, proponiendo igualdades de segmentos, dando lugar a desacuerdos, estableciendo alguna conjetura y trabajando en paralelo y en silencio. Como consecuencia de una reflexión silenciosa, Rosa introduce todos los elementos de la división del paralelogramo y razona la solución.

Destacamos en la parte final del proceso las intervenciones de Anna, que introducen aspectos de control relacionados con el tipo de razonamiento que siguen. Las dudas que esas intervenciones introducen, generan, por una parte, un razonamiento más detallado y, por otra, originan la verificación de la solución.

• Hemos de resaltar el enfoque geométrico que las alumnas implementan, buscando en todo momento procedimientos que dividan la figura en otras —trazado de paralelas, diagonales, etc.— para comparar las figuras iguales o equivalentes que se obtienen.

En cambio, son escasas las referencias a contenidos conceptuales —en muy contadas ocasiones hacen referencia a la diagonal del paralelogramo como divisora de éste en dos triángulos iguales y poco más—, pero lo que resulta más llamativo es que ni siquiera nombran ni sugieren la utilización de la fórmula del área del triángulo, sólo lo hacen en una ocasión (intervención 46), Rosa representa las alturas de los triángulos sin nombrarlas y rápidamente abandona esta idea. Esta última observación nos llama más la atención si consideramos que para muchos alumnos de estas edades, ése suele ser el único recurso que utilizan para resolver este tipo de problemas. Por eso, una resolución como ésta, que pone en práctica un enfoque geométrico, la podemos considerar bastante atípica, aunque en consonancia con las características cognitivas de Rosa.

• El proceso de resolución desarrollado es bastante lineal, en el sentido de que los episodios se suceden en un orden que parece "natural", si exceptuamos que después del análisis se vuelve a una búsqueda exploratoria que tiene su continuación en la ejecución y verificación final forzada por la desconfianza en el tipo de razonamiento utilizado.

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS

ROSA	EPISODIO	ANNA
	LECTURA (1-6)	
2 y 4. Representa el paralelogramo. 6. Identifica el objetivo.	Trabajan en paralelo copiando el paralelogramo del enunciado. El trabajo en paralelo acaba con la identificación cooperativa del objetivo.	3 y 5. Representa e identifica el objetivo.

	EXPLORACIÓN (7-32)	
	Se abandona el enfoque algebraico por no haber una continuidad cooperativa ni progresiva.	7. Nueva representación e identificación simbólica del lado común a los dos triángulos.
14'. Traza la diagonal BD del paralelogramo.		
	Se intenta, sin éxito, comparar las figuras que se obtienen como consecuencia del trazado de dicha paralela.	17 Traza la paralela "s" a AB por M.
28. Traza la paralela "r" a AD por M.	La descomposición del paralelogramo que proponen les permite visualizar la igualdad de los triángulos FMD=DMG, BEM=HBM y AHM=AMF. Rosa consigue esas igualdades en dos intercambios validación-continuación progresivos.	
32'. Propone la realización de una representación más grande.	↓	
	ANÁLISIS (32'-36)	
32' Y 34. Representa e identifica el objetivo	Trabajan en paralelo durante 46 segundos para hacer una nueva representación. El trabajo en paralelo acaba con la identificación del objetivo y la reducción del problema a la comparación de dos nuevos triángulos.	33. Vuelve a representar 35. Reduce el problema a la comparación de los dos triángulos: FMD y HMB.
	↓ T_1 (36-36')	

36'. "I ara què? " 38. Compara elementos lineales y propone la igualdad MH y FM. 40'. "Yo diría que el área de este triángulo [FMD] y éste [HMB] es igual.	EXPLORACIÓN (37-42) La situación de bloqueo se ataca con un trabajo en paralelo de 25 segundos y acaba con un desacuerdo resuelto por Rosa con el establecimiento de una conjetura.	37. Lee el enunciado.
	↓ T_2 (43-46)	
46'. Introduce en el razonamiento el paralelogramo GMEC. 48. Establece la equivalencia de los paralelogramos FMGD y HBEM. 54. Explicita la igualdad de los triángulos ABC y ACD obtenidos al dividir el paralelogramo ABCD por la diagonal AC para justificar la equivalencia de FMGD y HBEM. 56. Obtiene el resultado.	EJECUCIÓN (46'-57) Hay un plan implícito de ir comparando triángulos hasta obtener la equivalencia de ABM y AMD, basado en la descomposición que han hecho del paralelogramo. Anna introduce dudas sobre el razonamiento que obligan a Rosa a explicitar otras relaciones.	51. "Però això, com ho sabem?" 57. Nuevas dudas sobre el razonamiento —"Però clar si no ho raonem d'alguna manera..."—.
	↓	
	VERIFICACIÓN (58-70) Durante la verificación las alumnas repasan cooperativamente la solución que han obtenido.	

8.2.2. Actuación de Rosa y Anna en la resolución del problema del hexágono

8.2.2.1. *Transcripción del proceso de resolución*

1. Anna: *Si en un hexàngon regular s'uneixen alternativament —un sí i un no— tres dels seus vèrtexs s'obté un triangle. Busca la relació entre l'àrea de l'hexàgon i la del triangle obtingut* [lee].

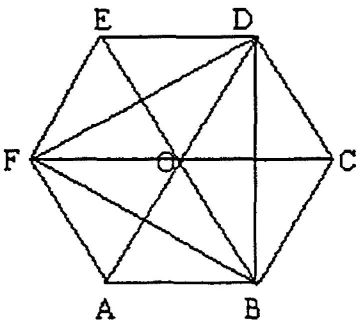


Figura 8.2.15

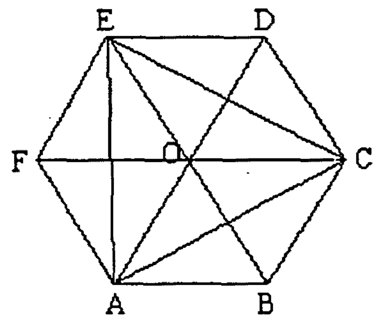


Figura 8.2.16

2. Rosa: *Dibuixem-lo!* [comienza a representar la Figura 8.2.17].
3. Anna: *Dibuixem un hexàgon regular* [empieza la representación de la Figura 8.2.18]. *S'uneixen alternativament, un sí i un no.*
4. Rosa: [Acaba la Figura 8.2.17, simula unir el centro con los vértices A y C].

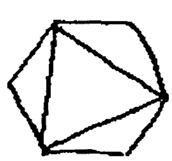


Figura 8.2.17

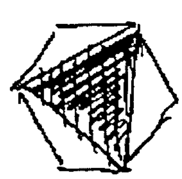


Figura 8.2.18

5. Anna: *I s'obté un triangle* [acaba de representar la Figura 8.2.18 y sombrea el triángulo ACE]. *Busca la relación entre l'àrea de l'hexàgon i la del triangle.*
6. Rosa: [Comienza una nueva representación, Figura 8.2.19, más grande que la primera, Figura 8.2.17]. *Aquest* [A] *amb aquest* [E], *aquest* [A] *amb aquest* [C] *i aquest* [C] *amb aquest* [E]. [A continuación traza todas las demás diagonales del hexágono], *ja està, ja ho veig, això és una ...* [indica AOE].

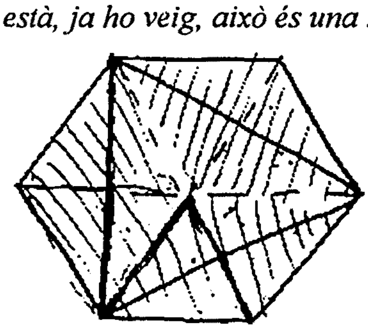


Figura 8.2.19

7. Anna: ==*Això...* [indica ACE].
8. Rosa: ==*I mitja* [indica AOE], *l'hexàgon són tres* [indica las líneas AOE, EOC y AOC], *és el doble que el triangle* [señala los triángulos ABC, CDE y EFA y el ACE], *no?*
9. Anna: *A veure, aquesta* [triángulo AOE] *i aquesta* [AE] *és la mateixa; aquesta* [EOC] *i aquesta* [ECD], *la mateixa; i aquesta* [COA] *i aquesta* [ABC], *la mateixa*
10. Rosa: *El triangle* [se refiere al ACE] *en té tres* [señala los triángulos ACO, CEO y EDA] *i l'hexàgon en té sis, és el doble.*
11. Anna: *És clar, l'àrea de l'hexàgon és el doble de la del triangle /*
12. Rosa: *Però, estàs segura que els triangles són iguals?*
13. Anna: *Es veu en el dibuix* [empieza a hacer la representación de la Figura 8.2.20].
14. Rosa: *És regular aquest hexàgon, eh?* [se refiere al que Anna está representando, Figura 8.2.20].
15. Anna: *Molt* [ríen].
16. Rosa: *Són tres rombes, tenim aquest* [AOEF], *aquest* [EOCD] *i aquest ...* [CBAO. Los raya, Figura 8.2.19].
17. Anna: [Continúa haciendo la Figura 8.2.20 y raya también los rombos].
18. Rosa: *El costat* [EA] *del triangle* [ACE] *és com si fos la diagonal llarga del rombe* [AOEF] *i després..., per això, són iguals aquest* [triángulo AOE] *i aquest* [AEF], *no?*

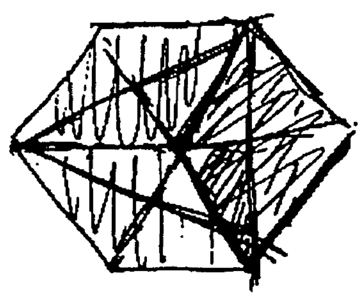


Figura 8.2.20

19. Anna: *Per què?*
20. Rosa: *El costat* [EA] *del triangle* [ACE] *és com si fos la diagonal llarga del rombe* [AOEF].
21. Anna: *Sí.*
22. Rosa: *N'hi ha tres* [indica los tres rombos AOEF, EOCD y CBAO] *i cadascun dels costats* [señala AE, AC y CE] *del triangle* [ACE] *és la diagonal llarga de cadascun dels rombes, no?*
23. Anna: *Sí, sí, jo ho faria així* <pausa(12)> [Recalca los lados de los rombos y acaba de completar la Figura 8.2.18, trazando las líneas FB, BD y DF] <pausa(7)>
24. Rosa: *I aquest costat* [AO] *i aquest costat* [FA] *i aquest d'aquí* [FO] *són tots iguals, és un triangle regular, i amb aquest d'aquí* [ABO] *són dos triangles equilàters.*
25. Anna: *És igual perquè...* [señala todos los segmentos que unen el centro del hexágono con sus vértices], *aquests...* [se refiere a los triángulos equiláteros en que queda dividido el hexágono al trazar los segmentos OA, OB, etc.]. *A veure, hi ha sis triangles. Són iguals perquè aquest costat d'aquí* [BC] *és igual que aquest d'aquí* [BO]. *Està format per triangles equilàters, l'hexàgon, no?*

26. Rosa: *Sí.*
27. Anna: *Per tant, aquest triangle* [OBM] *que ens queda aquí dintre és el mateix que aquest* [MBC] *i aquest* [OMD] *és igual que aquest* [MCD] *perquè està format pel mateix.*
28. Rosa: *És clar.*
29. Anna: *I tot és el mateix* [se refiere a los otros rombos].
30. Rosa: *És igual, per tant, l'àrea de l'hexàgon és el doble de l'àrea del triangle* [ACE].
31. Anna: *Sí.*

8.2.2.2. *Microanálisis del proceso de resolución*

A) Lectura

El trabajo en paralelo que sigue a la indicación de Rosa de interpretar gráficamente el enunciado verbal del problema —"Dibuixem-lo! (intervención 2)— no acaba hasta el episodio siguiente.

A pesar de que el enunciado no consta de una parte gráfica que lo ilustre, las alumnas no contrastan en ningún momento la interpretación que cada una de ellas hace, por separado, de dicho enunciado.

El hecho de que dicho trabajo en paralelo no acabe con una puesta en común sobre la interpretación gráfica que han hecho es debido a que Rosa, con el trazado de las diagonales, consigue una solución muy rápida en la intervención 6, basada en la visualización de una segunda figura que acaba de hacer (Figura 8.2.19). Las acciones de Rosa de trazar las diagonales del hexágono son reproducciones de las que realiza en el problema 8A de la prueba inicial.

B) Ejecución

La representación de una nueva figura más grande que la primera y, sobre todo, el trazado de todas las diagonales del hexágono son el origen de la visualización que Rosa hace de la relación entre el área del hexágono y la del triángulo ACE. Dicha relación la obtiene (intervenciones 6 y 8) dividiendo el hexágono en tres rombos, y estos, a su vez, en dos triángulos iguales, y contando después el número de rombos que contienen el hexágono —tres en total— y el triángulo ACE —uno y medio—.

Anna se incorpora a la ejecución de Rosa en la intervención 9, explicitando la igualdad de los triángulos AOE, AEF, EOC, ECD, etc.

Un nuevo recuento, por parte de Rosa, ahora tomando como unidad de medida el triángulo AOE, de los triángulos que contiene el hexágono y del triángulo ACE y la validación final de Anna culminan el episodio.

Observamos que las primeras intervenciones (6, 7 y 8) de la ejecución son una prolongación de las del episodio anterior, en cuanto al trabajo en paralelo de las alumnas, pues mientras Rosa construye su representación nueva, Anna va señalando elementos en la representación que había hecho al principio, ignorándose mutuamente.

Rosa capta la atención de Anna cuando adelanta un resultado del problema —establece que el área del hexágono es doble de la del triángulo ACE—. A partir de ese momento se producen dos intercambios cooperativos y uno de validación final de Anna

(Figura 8.2.21). En el primero de ellos, Anna explicita la igualdad de los triángulos y en el segundo Rosa los utiliza como nueva unidad de medida.

Traza todas las diagonales del hexágono y toma el rombo AOE como unidad	6.Rosa	en paralelo
Señala el triáng. ACE	7.Anna	
Cuenta los rombos que contiene el hex. y expresa su relación con ACE	8.Rosa	cooperativo
Divide el rombo en dos triáng. iguales	9.Anna	
Indica los triáng. que tiene el hexágono y el triáng. ACE	10.Rosa	
	11.Anna	validación

Figura 8.2.21

Podemos concluir que:

a) Hay dos aportaciones clave que marcan el desarrollo no sólo del episodio, sino del proceso completo. Ambas las introduce Rosa en la intervención 6. Una es la realización de una representación gráfica que podríamos catalogar como "bastante regular" y más grande que la que habían realizado al principio, lo que facilita la visualización de las relaciones que se establecen entre los elementos de las figuras; y, la otra, la división del hexágono en triángulos mediante el trazado de sus diagonales. Este procedimiento, ya utilizado en la resolución del problema anterior, es fundamental para abordar la resolución con éxito.

b) Dichas aportaciones surgen como consecuencia de un trabajo en paralelo de ambas interlocutoras, aunque después la propuesta de Rosa es ejecutada y aceptada, en principio, de forma cooperativa por las dos alumnas.

c) Los argumentos que justifican la relación encontrada entre las áreas del hexágono y del triángulo están basados únicamente en la visualización de la figura, ya que las alumnas sólo citan la igualdad de triángulos sin hacer referencia en ningún momento a la de sus elementos.

C) Verificación

La duda introducida por Rosa (intervención 12) sobre la igualdad de los triángulos AOE, AEF, etc. —"Però, estàs segura que els triangles són iguals?"— es el origen de un nuevo episodio en el que las alumnas verifican la relación que han encontrado en el anterior. En realidad, lo que hacen es repetir los mismos argumentos que han utilizado en la ejecución, pero ahora de una forma mucho más explícita y detallada.

Anna aprovecha los contenidos de las intervenciones 20, 22 y 24 de Rosa para explicitar la descomposición del hexágono en seis triángulos equiláteros (intervención 25) y repetir, en las intervenciones 27 y 29, lo que ha dicho Rosa anteriormente. Por tanto, en este episodio Rosa contribuye de una forma mucho más efectiva que Anna al desarrollo del proceso, ya que ella es la que descompone el hexágono en tres rombos (intervención 16); la que introduce la diagonal larga del rombo, con la intención de significar que lo divide en dos triángulos iguales; y la que justifica (intervención 24) la igualdad de los triángulos en que queda dividido el hexágono.

Las reflexiones de las alumnas en las pausas de la intervención 23 revitalizan momentáneamente el proceso, produciéndose después de ellas tres intervenciones en las que hacen referencia a la igualdad del radio y el lado del hexágono (intervención 24), a la de los seis triángulos que componen el hexágono (intervención 25), y a la división de cada uno de esos triángulos equiláteros en dos iguales mediante la diagonal del rombo (intervención 27).

El proceso de verificación acaba cuando ambas alumnas aceptan la relación entre las áreas que han encontrado.

De la interpretación que acabamos de hacer podemos concluir que:

a) El episodio de verificación se origina como consecuencia de la duda de Rosa sobre la veracidad de las igualdades de los triángulos que habían obtenido en el episodio anterior.

b) La primera parte del proceso de verificación —entre las intervenciones 13 y 23—, igual que el de ejecución, se caracteriza por la utilización de argumentos que tienen su origen en la visualización del hexágono "bastante regular" que representa Rosa (intervención 6), igual que el que representa Anna en la intervención 13. Las referencias iniciales a las apreciaciones visuales de la figura —"Es veu en el dibuix"— para justificar las igualdades de los triángulos dan paso a intervenciones en las que las alumnas aluden a la división del hexágono en rombos, a la diagonal larga del rombo y a la relación de ésta con el lado del hexágono.

En la segunda parte —sobre todo en las intervenciones 24 y 25—, las alumnas hacen referencia a la igualdad de lados y radios del hexágono y a la condición de equiláteros de los 6 triángulos que componen el hexágono para justificar las igualdades que establecen.

c) En este episodio se produce una alternancia en los papeles comunicativos de cada alumna (Figura 8.2.22), aunque es manifiesto el desequilibrio en las aportaciones de cada alumna. Así pues, la iniciativa la lleva Anna al principio (intervenciones 13 a 15), con la realización de una nueva figura. Después (intervenciones 16 a 24) es Rosa la que va verificando las relaciones de igualdad entre los triángulos, con alguna demanda de justificación (intervención 19) y tres validaciones de Anna (intervenciones 17, 21 y 23). La cooperación de Anna en la intervención 25 vuelve a invertir los papeles comunicativos.

La actuación de las alumnas caracteriza una forma de trabajo que llamaremos (Capítulo 10) alternativo, por la alternancia en la reproducción de papeles comunicativos similares a lo largo del episodio.

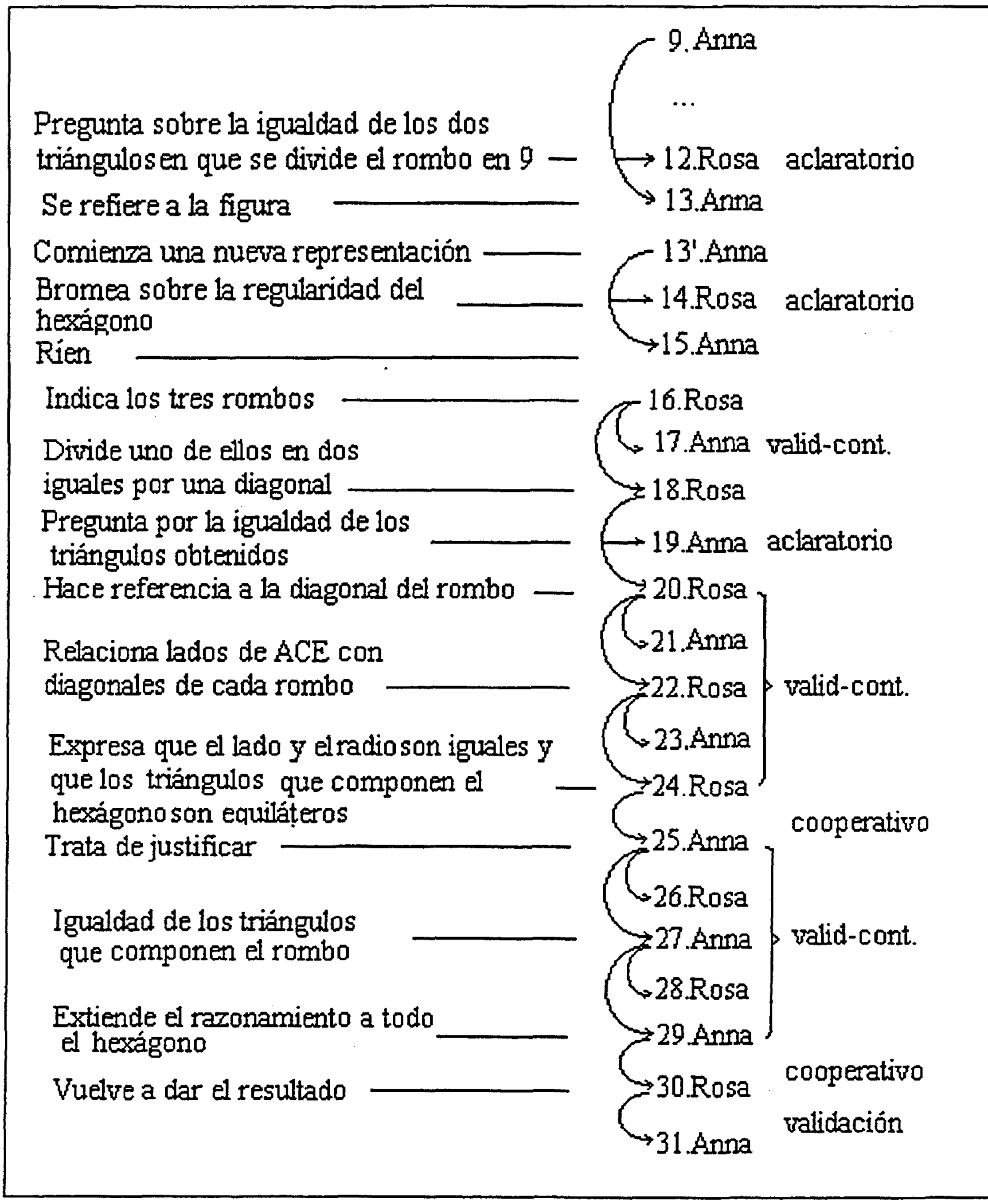


Figura 8.2.22

8.2.2.3. *Características generales del proceso de resolución*

a) Papeles comunicativos de las alumnas

La alternancia en los papeles comunicativos de las alumnas en el episodio más largo —el de verificación— origina la igualdad en el número de intercambios que se producen, como se observa en las Tablas 8.2.3 y 8.2.4. Esos papeles comunicativos están caracterizados por validaciones y por preguntas aclaratorias sobre contenidos de intervenciones anteriores, en algunos casos, y por respuestas y continuaciones del diálogo, generalmente progresivas, en otros.

Las alumnas trabajan en paralelo durante aproximadamente 30 segundos, mientras representan el hexágono, y como consecuencia de ese trabajo, Rosa introduce la división del hexágono en rombos y triángulos, que las conduce a la solución (intervención 69).

La resolución rápida del problema se consigue porque, tras la propuesta de Rosa (intervención 6), la mayoría de los intercambios que se producen —9 de 16— son progresivos o cooperativos.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Anna-Rosa	3	0	0	3
Rosa-Anna	3	2	0	5
TOTAL	6	2	0	8

Tabla 8.2.3. Intercambios de dos intervenciones

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		INTERRUPCIÓN		ACLARATORIO		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Rosa-Anna-Rosa	2	1	0	0	0	1	2	2
Anna-Rosa-Anna	1	1	0	0	1	1	2	2
TOTAL	3	2	0	0	1	2	4	4

Tabla 8.2.4. Intercambios de tres intervenciones

b) Esquema de la sucesión de episodios

En el inicio del proceso (intervención 6) hay dos puntos clave, que ya hemos indicado en el microanálisis: por una parte, la realización de una figura suficientemente grande y regular como para que se puedan visualizar las relaciones que se buscan, y, por otra, el trazado de todas las diagonales del hexágono.

Hay otro momento importante en el proceso, como se observa en el esquema gráfico de la sucesión de episodios, que coincide con la pregunta de Rosa sobre la igualdad de los triángulos que obtienen. La introducción de esa duda genera el episodio de verificación en el que profundizan sobre las relaciones entre los triángulos en que queda dividido el hexágono.

La ejecución del enfoque geométrico con el que atacan la resolución está basada en la visualización de la figura, aunque en un determinado momento mencionan, de pasada, la diagonal del rombo para significar que divide a éste en dos triángulos iguales, la igualdad del radio y el lado del hexágono, y la condición de equiláteros de los 6 triángulos obtenidos al unir el centro con los vértices.

No se produce una justificación rigurosa de las igualdades de los triángulos que proponen. Esto hace que no haya una revisión real de conceptos y técnicas relacionados con la aplicación de los casos de igualdad de triángulos.

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS

2. "Dibuixem-lo!". 4. Representa.	LECTURA (1-6) Trabajan en paralelo para interpretar el enunciado verbal. No hay una valoración cooperativa de la interpretación gráfica que hacen.	3. Comienza la interpretación y representación.
	↓	
6. Empieza una representación más grande del hexágono. Traza las diagonales del hexágono. 8. Establece la relación entre el área del hexágono y la del triángulo utilizando el rombo AOEF como unidad. 10. Expresa el área del hexágono y del triángulo ACE utilizando los triángulos AOE, AFE, etc.	EJECUCIÓN (6-11) Como consecuencia del trabajo en paralelo, Rosa divide el hexágono en triángulos y se dispone a contar los que caben en el triángulo ACE y en el hexágono. Continúa el trabajo en paralelo. Capta la atención de Anna.	9. Explicita la igualdad de los triángulos AOE y AFE, etc.
	↓	
12. Pregunta sobre la igualdad de los triángulos AOE, AFE,	VERIFICACIÓN (12-31) La verificación de la solución obtenida la realiza Rosa	13. Hace una nueva

etc.	(intervención 16 a 24) con la participación de Anna, quien se limita a validar y preguntar el porqué de alguna de las afirmaciones de Rosa.	representación del hexágono.
24. Hace referencia a la igualdad del radio y el lado del hexágono y a la condición de equiláteros de los triángulos que componen el hexágono.	Anna toma la iniciativa hasta el final.	25. Expresa que el hexágono está dividido en seis triángulos equiláteros.

8.2.3. Actuación de Rosa y Anna en la resolución del problema del triángulo

8.2.3.1. *Transcripción del proceso de resolución*

1. Rosa: *ABC és un triangle qualsevol i D un punt del costat AB que el divideix en dos segments que estan en proporció 3 a 1 (Figura 8.2.23). Si DE i DF són segments paral.lels als costats AC i BC, respectivament, i FE és la diagonal del paral·lelogram FDEC, quina és la relació entre les àrees dels triangles DBE i FEC?*

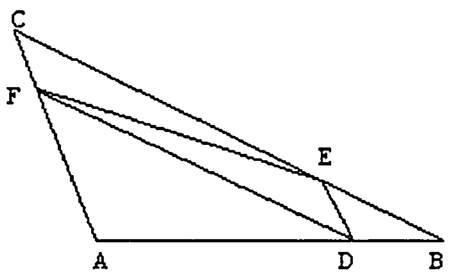


Figura 8.2.23

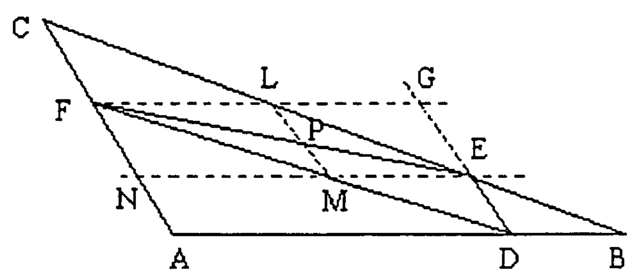


Figura 8.2.24

2. Anna: *A veure, deixa'm, ABC és un triangle qualsevol...* [lee en voz baja].
3. Rosa: [Comienza a representar la Figura 8.2.25].

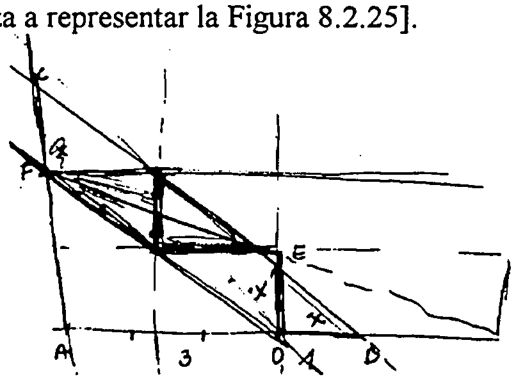


Figura 8.2.25

4. Anna: [Empieza también a representar la Figura 8.2.26, al mismo tiempo que mira el enunciado]. *Estan partits iguals, sí?*, [divide con puntos los lados CA y CB en tres segmentos iguales, mira lo que hace Rosa].

5. Rosa: *DBE i FED* [identifica esos triángulos y los señala varias veces. Lee en silencio. Escribe un 3 en el segmento AD y un 1 en el DB y divide el segmento AD en tres partes iguales], *potser tens raó, 3 a 1 / eh?*
6. Anna: *Sí. / Aquest* [DE] *és paral.lel a aquest* [CA. Ha dibujado el triángulo ABC y traza la recta DE, paralela a CA, Figura 8.2.26].
7. Rosa: [Lee]. *I l'altre, diu que DF és paral.lel a BC /*
8. Anna: *I aquest d'aquí ...* [traza la recta que contiene a DF, traza también FE, Figura 8.2.26].
9. Rosa: [Completa la Figura 8.2.25, escribiendo "paral.leles" en las rectas de puntos que ha trazado. Indica el paralelismo de las rectas FD y CB, Figura 8.2.25, señala los triángulos FDE y FEC] <pausa(51)>
10. Anna: *Aquest triangle* [indica el FDE] *és igual que aquest* [FEC].
11. Rosa: *Sí, ja ho he vist, aquests dos són iguals* [los señala].
12. Anna: *Perquè és un paral.lelogram* [se refiere al FDEC] *i...*
13. Rosa: = *Sí, però diu quina relación hi ha entre aquesta* [DBE] *i aquesta* [indica FDE. Prolonga los segmentos FE por E y AB por B].
14. Anna: [Pone las letras en los vértices de la Figura 8.2.26].

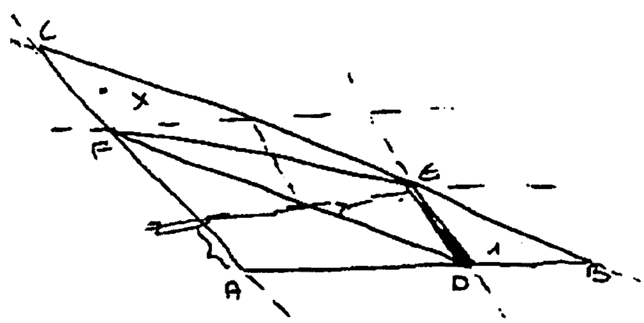


Figura 8.2.26

15. Rosa: [Traza por E una paralela a AB y señala los triángulos MDE y DBE, Figura 8.2.25].
16. Anna: *Aquesta és paral.lela a aquesta* [traza también, mirando lo que indica Rosa, por E una paralela a AB, Figura 8.2.26].
17. Rosa: *Si continuem amb aquesta d'aquí, si la diagonal la continuem* [vuelve a insistir en la prolongación de FE por E] *i això...* [prolonga también AB por B].
18. Anna: *Fem això, una paral.lela a aquesta* [representa en la Figura 8.2.25 una paralela a AB que pasa por E], *així, o no? I això d'aquí* [DBE] *és igual a això* [MDE], *o no?*
19. Rosa: *Sí, i després...* [traza, con puntos suspensivos, la prolongación de AB y la paralela a AB por E, un paralelogramo, Figura 8.2.25].
20. Anna: *I què?*
21. Rosa: *Per què això?* [se refiere a la igualdad de los triángulos DBE y MDE], *no sé* [ríen]. *Aquesta d'aquí* [MDE] *és igual que aquesta d'aquí?* [DBE].
22. Anna: *Sí.*
23. Rosa: *I aquest tros d'aquí* [FME], *què? Això que queda aquí...* [recalca el triángulo FME].
24. Anna: *És segur que és igual?* [indica los dos triángulos FME y DBE].

25. Rosa: *A veure, a veure si ho hem dibuixat bé* [se va a la Figura 8.2.23 e indica la paralela a AB por E]. *És igual, sí, jo diria que sí.*
25'.Rosa:[Simula en la Figura del enunciado las mismas prolongaciones que en la intervención 18]. *Fem això així, aquest rectangle* [DE y continuación de B] <pausa(9)>
26. Anna: *Relació entre...* [señala FDE y DBE].
27. Rosa: == *Entre aquest d'aquí* [FDE] *i aquest d'aquí* [DBE] <pausa(25)> [señala los segmentos ME y FM].
28. Anna: [Traza por F una paralela a AB, Figura 8.2.26]. *Si tracem...* [indica dicha paralela en la Figura 8.2.24]. *Aquest* [FME] *és igual que aquest* [FLE], *no?, seran iguals. Aquest que queda dalt* [FLC], *no és igual que aquest?* [DBE], *no, o sí? Jo diria que sí* [se va a la figura del enunciado y simula trazar la paralela a AB por F], *no.*
29. Rosa: [Hace igual]. *Sí*
30. Anna: *Sí que hauria de ser, perquè si d'aquí* [A] *aquí...* [N, sigue la recta EN]/
31. Rosa: *El tros d'aquí* [DB] *com seria amb aquest d'aquí?* [DE].
32. Anna: *Jo diria que aquest tros d'aquí a aquí* [AN] *és igual que aquest tros d'aquí a aquí* [DE], *clar, perquè són paral.leles, una paral.lela...* [indica DE y AC].
33. Rosa: *Sí, sí, aquest d'aquí* [DE] *seria el mateix que aquest d'aquí* [FL].
34. Anna: *Jo diria que aquest tros* [FL] *seria el mateix que aquest* [DB], *no?, perquè si partim d'aquí a aquí...* [AN].
35. Rosa: == *Perquè si tracem aquesta paral.lela* [paralela a AB por F], *aquest tros que ens queda aquí, aquest tros d'aquí* [FME] *és el mateix que aquest d'aquí* [FLE], *no?*
36. Anna: *Sí.*
37. Rosa: *I aquest d'aquí...* [DBE], *aquest d'aquí* [MDE] *i aquest d'aquí* [FLC] *són iguals / no?*
38. Anna: *Sí.*
39. Rosa: *Hem de buscar la relació entre aquest* [FDE] *i aquest* [DBE].
40. Anna: *Entre aquest i aquest.*
41. Rosa: *I aquest d'aquí, així,* [traza el segmento LM y señala el triángulo MEL] *és igual que aquest* [MDE], *no?*
42. Anna: *=Si féssim la paral.lela* [señala DE]=
43. Rosa: *=Si féssim la paral.lela= així* [traza la recta que contiene al segmento ML, Figura 8.2.24] *a aquest costat* [DE] *un altre cop.*
44. Anna: *Paral.lela també a aquesta* [indica CA].
45. Rosa: *Sí, ara el dibuix està una mica marcat* [se refiere a que está recargado, sigue señalando los triángulos MEL y MED. Vuelve a la Figura 8.2.23 y simula trazar las paralelas que ha trazado en la Figura 8.2.25].
46. Anna: *A veure* [comienza a hacer otra figura, sólo representa el triángulo ABC].
46'.Anna: *Això que diu que aquests segments estan en proporció 3 a 1, què?* [señala el enunciado].
47. Rosa: *Que aquest* [AD] *és 3 i aquest* [DB] *és 1, 3 d'aquests trossos* [señala NA, FN y CF], *em sembla que vol dir això, no sé / Anem a dibuixar-ho, no?* [se refiere a hacer un nuevo dibujo, pone la Figura del enunciado debajo de su folio y comienza a calcar].
48. Anna: *Sí home!, què fas?, ho calques?* [ríe].

49. Rosa: *És clar, perquè si no, no surt* [acaba de calcarlo y pone las letras en los vértices, Figura 8.2.27].
50. Anna: [Observa a Rosa, abandona su representación y se centra en el que acaba de hacer su compañera].
51. Rosa: [Pone letras en los vértices]. *Aquí hem traçat aquesta paral.lela* [paralela por E a AB], *que passa des d'aquí...* [NE].
52. Anna: *Hem arribat a què aquest...* [MDE].
53. Rosa: *═ Aquest d'aquí* [MDE] *és igual a aquest* [DBE].
54. Anna: *Perquè la mateixa distància que hi ha d'aquí a aquí* [NA], *hi ha d'aquí a aquí* [DE], *no?*
55. Rosa: *Sí, i el mateix angle, aquest* [NAB] *és aquest d'aquí* [EDB], *veus?*
56. Anna: *Perquè són paral.leles, perquè aquestes dues són paral.les* [EN y AD], *aquesta* [BE] *i aquesta* [DM] *són iguals.*
57. Rosa: *Sí /*
57'.Rosa: *A veure* [traza en la Figura 8.2.27 las rectas que contienen a los segmentos AC, DE, FD, AB y BC], *llavors hem dit que si fem una paral.lela a aquesta* [AB] *que passi per aquí...* [F].

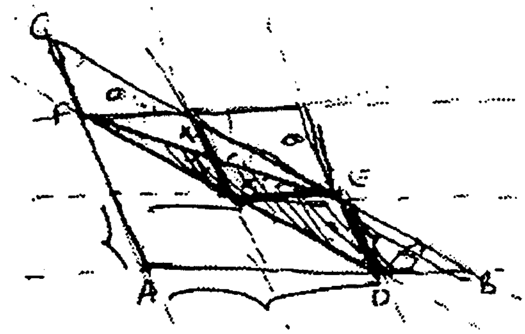


Figura 8.2.27

58. Anna: *Que passi pel punt F.*
59. Rosa: *Pel punt F.*
60. Anna: *I paral.lela al segment AB.*
61. Rosa: *I paral.lela a AB, aquestes dues són paral.leles* [lo escribe en el dibujo, Figura 8.2.27]. *I després aquest d'aquí* [triángulo FME] *és igual que aquest d'aquí* [FEL]. *I aquesta també, perquè aquesta i aquesta* [ME y LG] *són iguals i aquesta i aquesta* [DE y GE] *són iguals i la relació dels angles també* [no especifica cuáles], *per tant, aquest* [DBE], *aquest* [MDE] *i aquest* [LEG] *també són iguals, no?*
62. Anna: *I aquest?* [FLC].
63. Rosa: *I aquest* [FLC] *és igual, perquè aquest* [FC] *i aquest* [GE] *són paral.lels i també són iguals i els angles també, aquest* [ángulo FLC], *aquest* [ángulo GLE], *aquest* [ángulo LEG] *i aquest* [ángulo MDE] *també són iguals, no?* [no especifica claramente los ángulos].
64. Anna: *Sí / relació...*
65. Rosa: *═ Si fem altra paral.lela aquí* [paralela a CA que pasa por L].
66. Anna: *=Aquestes dues paral.leles* [CA y LM]=
67. Rosa: *=Aquest tros, aquest d'aquí* [LME]= *Sí, les tres són paral.leles* [CA, LM y DE, lo apunta en la Figura 8.2.26]. *Aquest d'aquí* [LME] *torna a ser igual que*

aquests altres [DBE, LEG y FLC], *per tant, la relació que hi ha... aquest així...* [no sabe cuál es el triángulo FDE].

68. Anna: *Aquest és el problema, mira, aquest* [indica el triángulo FDE].
69. Rosa: *Aquest* [FDE] *i l'altre és aquest* [DBE], *doncs és que aquest* [FDE] *és el doble que aquest* [DBE] *perquè si agafem aquest d'aquí* [MEP] *i aquest d'aquí...* [FMP]
70. Anna: *==Formen un.*
71. Rosa: *Formen un i aquest d'aquí...*
72. Anna: *I aquest* [MDE] *és un altre, és el doble.*
73. Rosa: *És el doble* <pausa(5)>
74. Anna: *Ja està, no?* <pausa(10)>
    Què?, és el doble.
75. Rosa: *És el doble, aquest* [MDE] *i aquest* [indica MEP y FMP].
76. Anna: *És el doble, mira.*
77. Rosa: *I aquest* [FMP] *és aquest d'aquí* [LEP].
78. Anna: *Aquest* [FMP] *i aquest* [MEP] *és el mateix, aquestes són paral.leles, tant aquestes com aquestes* [se refiere a las paralelas que aparecen en la Figura 8.2.27], *o sigui, tots els segments són paral.lels, per tant, si aquest* [FMP] *i aquest* [MEP] *són iguals, tenim que aquest* [FMP] *i aquest* [MEP] *formen només un.*
79. Rosa: *Clar.*
80. Anna: *Aquest i aquest* [repite] *ja formen un d'aquests* [DBE] *i aquest* [MDL] *era igual que aquest* [DBE].
81. Rosa: *Perquè això* [FMEL] *és un paral.lelogram, aquestes* [LM y FE] *són les diagonals, els triangles són els mateixos* [se refiere a los 4 triángulos determinados por las diagonales].
82. Anna: *I aquest* [MDE] *és igual que aquest* [DBE] *perquè...*
83. Rosa: *== Perquè totes són paral.leles. Bueno, aquest tros d'aquí* [FA] *és paral.lel a aquest d'aquí* [DE] *i aquest d'aquí...* [FA] <pausa(15)> *Però no, aquest d'aquí* [FDE] *és el mateix, aquest d'aquí* [FDE] *és el mateix que aquest d'aquí* [FEC] *perquè és un paral.lelogram i ser la diagonal* [se refiere a FE]. *Éste* [FLC] *és el mateix que aquest* [DBE] *i aquests dos* [FPL y LPE] *són els mateixos que aquests dos* [FMP y PME], *per tant, també és el mateix.*

8.2.3.2. *Microanálisis del proceso de resolución*

A) Episodio de lectura

El episodio de lectura está comprendido entre las intervenciones 1 y 9. En él resaltamos dos aspectos: el que se refiere a la interpretación que las alumnas dan de la proporción de los segmentos, y el que tiene que ver con el tipo de interacción que se produce.

En el primer caso, hemos de destacar la casi nula reflexión de las alumnas sobre el significado de la proporción de los segmentos que aparece en el enunciado. La intervención 4, en la que Anna hace una división de los segmentos AC y CB en tres partes iguales (Figura 8.2.26), y la intervención 5, en la que Rosa interpreta correctamente el enunciado para los segmentos AD y DB (Figura 8.2.25), no son coherentes entre sí, y esta incoherencia se transmite a lo largo de todo el proceso.

La interpretación deficiente que hace Anna se consuma con el trazado de la paralela a AB por F, que corta al segmento AC en un punto que corresponde con la tercera parte del segmento AC (Figura 8.2.25). No obstante, al comienzo del episodio de evaluación local (intervenciones 46 y 47), las alumnas vuelven sobre el tema, aunque sin éxito en la interpretación. La incorrección de la interpretación que dan a la proporción de los lados del triángulo está en consonancia con los conocimientos de ambas alumnas sobre la aplicación del teorema de Tales, como hemos tenido oportunidad de ver en la prueba inicial (apartado 7.2).

Por lo que se refiere a los tipos de intercambios que se producen en el episodio, hemos de decir que las alumnas trabajan en paralelo tanto al principio (intervenciones 2, 3 y 4) como al final (intervenciones 8 y 9) del mismo. En la fase inicial, como consecuencia de la copia de la figura que acompaña al enunciado, y en la final, tratando de comprender todos los componentes del enunciado. Este trabajo en paralelo es interrumpido por un contraste de pareceres cooperativo sobre la interpretación de la proporción que aparece en el enunciado.

B) Episodio de análisis/exploración

El episodio de análisis/exploración se inicia con la identificación de la igualdad de los triángulos FDE y FEC (intervenciones 10 a 12). En el resto, hemos podido observar un modelo de actuación de las alumnas que se repite tres veces consecutivas (entre las intervenciones 13 a 25', 26 a 38 y 39 a 44), con ligeras modificaciones.

Ese modelo de actuación —como mostramos en la Figura 8.2.28— tiene cuatro fases: la identificación del objetivo del problema —llegar a relacionar las áreas de los triángulos FDE y DBE (intervención 13)—; el trabajo en paralelo con referencias gestuales a los elementos de las figuras o con pausas; el trazado de paralelas a los lados de los triángulos —Rosa traza la paralela a AB por E (intervención 15), Anna traza la paralela a AB por F (intervención 28) y Rosa vuelve a trazar el segmento LM, paralelo a AC por M (intervenciones 41 y 43)—; y la búsqueda exploratoria de relaciones entre los triángulos obtenidos con la división de la figura original y entre los elementos lineales de dicha figura.

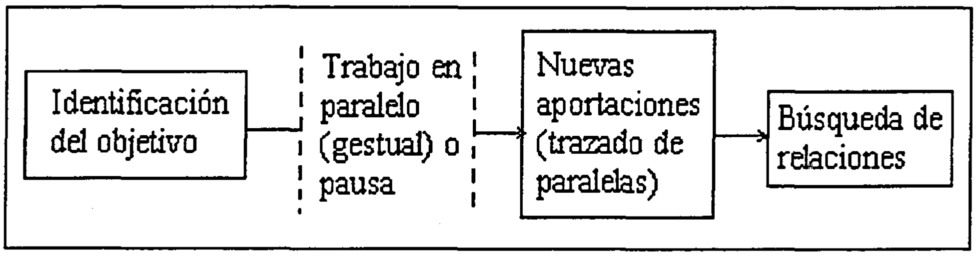


Figura 8.2.28

Interpretamos que las alumnas, cuando no saben seguir, explicitan el objetivo del problema con la finalidad de tener presente dónde quieren llegar. Da la impresión de que la referencia al objetivo marca el punto alto de una situación de bloqueo que se resuelve con el trabajo individual de cada una de ellas. Tras este trabajo por separado, que resulta ser fructífero, las alumnas hacen aportaciones, todas de la misma naturaleza —trazado de paralelas a los lados del triángulo, emulando la aplicación del mismo tipo de procedimiento de la resolución de los dos problemas anteriores—, que les abre, cada vez más, la perspectiva de la búsqueda de relaciones entre los elementos del triángulo.

El episodio profundiza en la deficiente interpretación que las alumnas han hecho, en la lectura, sobre la división de los segmentos AC y CB en tres partes iguales, ya que el trazado de paralelas confirma dicha división, incluso cuando Rosa traza las paralelas sobre la figura en la que ha escrito, de forma correcta, la relación de 3 a 1 entre los segmentos AD y DB (Figura 8.2.25). Esta información es ignorada por completo durante el resto del episodio.

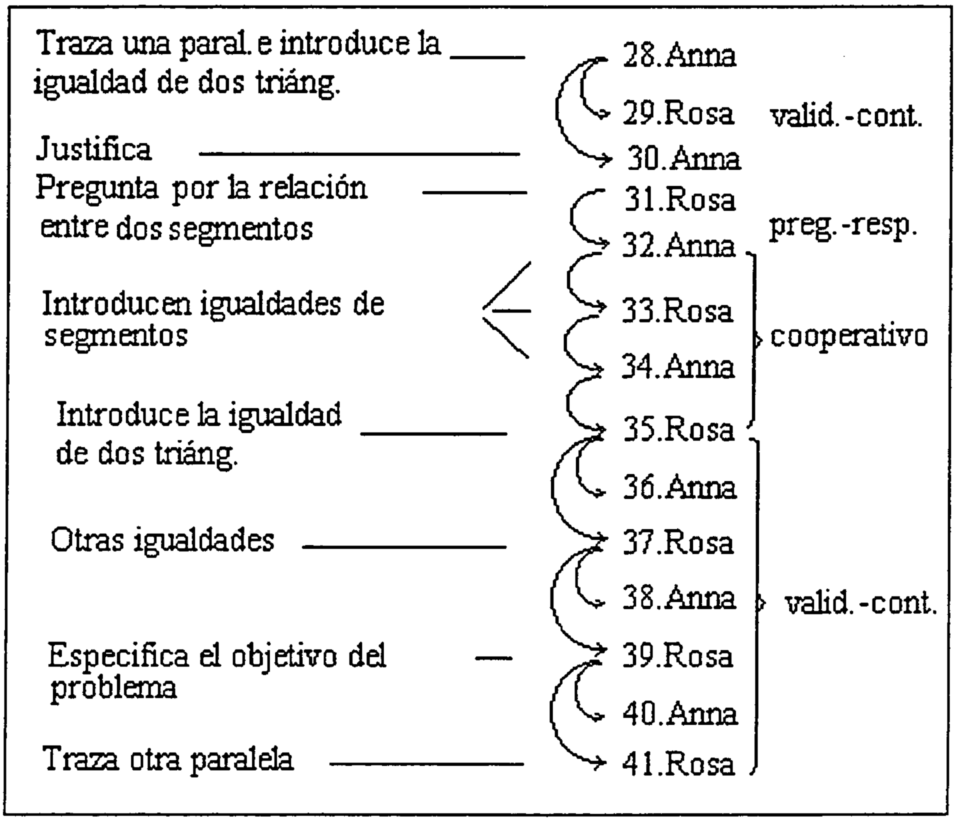


Figura 8.2.29

En la sucesión de intercambios (Figura 8.2.29), lo más destacado es el papel comunicativo diferente que asumen las alumnas en cada una de las fases de búsqueda de relaciones del modelo de actuación que hemos identificado.

En la primera parte, el trazado de la paralela por parte de Rosa (intervención 15) capta la atención de Anna, pero Rosa sigue con su idea inicial de prolongar FE por E y AB por B (Figura 8.2.25), produciéndose una breve continuación del trabajo en paralelo que se había iniciado en la intervención 13.

La vuelta de Rosa (intervención 19) a la consideración de la paralela, que ella misma ha introducido, marca el inicio de una serie de intercambios que producen aportaciones importantes para el desarrollo posterior del proceso —división del triángulo FDE en el MDE y en el FME (intervenciones 21 y 23) e igualdad de los triángulos FME y DBE (intervención 24)— y que se caracterizan por la realización de una serie de preguntas que tienen la finalidad de pedir información y de introducir informaciones nuevas.

21. Rosa: *Per què això?* [se refiere a la igualdad de los triángulos DBE y MDE], *no sé* [ríen]. *Aquesta d'aquí* [MDE] *és igual que aquesta d'aquí?* [DBE].
23. Rosa: *I aquest tros d'aquí* [FME], *què? Això que queda aquí...* [recalca el triángulo FME].
24. Anna: *És segur que és igual?* [indica los dos triángulos FME y DBE].

En la segunda parte, la introducción por parte de Anna de la paralela a AB por F (intervención 28) empieza con un intercambio de validación-continuación, iniciado por ella misma, al que sigue un diálogo cooperativo, que comienza con una pregunta de Rosa y que tiene como finalidad la búsqueda de relaciones entre los lados de los diferentes triángulos. Ese diálogo cooperativo degenera en una sucesión de intercambios en los que Rosa lleva la iniciativa y Anna se limita simplemente a validar las afirmaciones de su compañera (Figura 8.2.29).

C) Episodio de evaluación local

El intento de Anna de volver a reconsiderar la interpretación de la proporción "3 a 1" del enunciado (intervención 46') y la sugerencia de Rosa de volver a realizar una nueva representación, ante la cantidad de líneas que tiene la figura con la que están trabajando, originan el inicio de un nuevo episodio en el que las alumnas hacen un repaso de todo lo que han conseguido hasta ahora para relanzar de nuevo el proceso.

Por lo que se refiere a la proporción de los segmentos AD y DB, la gestión de Anna (intervención 46') de volverla a proponer no tiene éxito, si consideramos que Rosa sólo le dedica parte de la intervención 47, en la que simplemente repite el contenido de las intervenciones 4 y 5. No hay, pues, una reconsideración a fondo de la interpretación de la proporción, lo que repercute negativamente en el proceso de resolución del problema, manteniéndose el error de episodios anteriores.

La realización de una nueva representación de la figura presenta una novedad, que aunque no se da en el resto de procesos de estas alumnas ni en el de otros de los que aquí analizamos, es bastante frecuente en las resoluciones que hacen los alumnos de estas edades. Nos referimos al hecho de que la representación de la nueva figura se haga calcando la figura del enunciado. Esta representación, lo más fidedigna posible de acuerdo con los útiles de que disponen las alumnas, nos da una idea de la importancia que tiene la visualización en los procesos de razonamiento de las alumnas de estas edades, incapaces de desvincular la figura concreta de las relaciones que hay entre sus elementos. La abstracción de dicha figura, para hacerla independiente de las proporciones concretas que se manejan, corresponde a un nivel de conocimiento superior que ellas no han alcanzado.

Hay otro aspecto importante en este episodio. Nos referimos a las características del diálogo que se produce entre las alumnas. Después de superada la sorpresa inicial de Anna sobre la forma de representar la nueva figura, ambas alumnas mantienen un diálogo cooperativo, en el que repasan los logros alcanzados en el episodio anterior (Figura 8.2.30). Este repaso lo hacen con la finalidad de relanzar el proceso de resolución. Para hacer esta interpretación nos basamos en que, en un momento determinado (intervención 61), las alumnas conectan este proceso con la generación de nuevas relaciones.

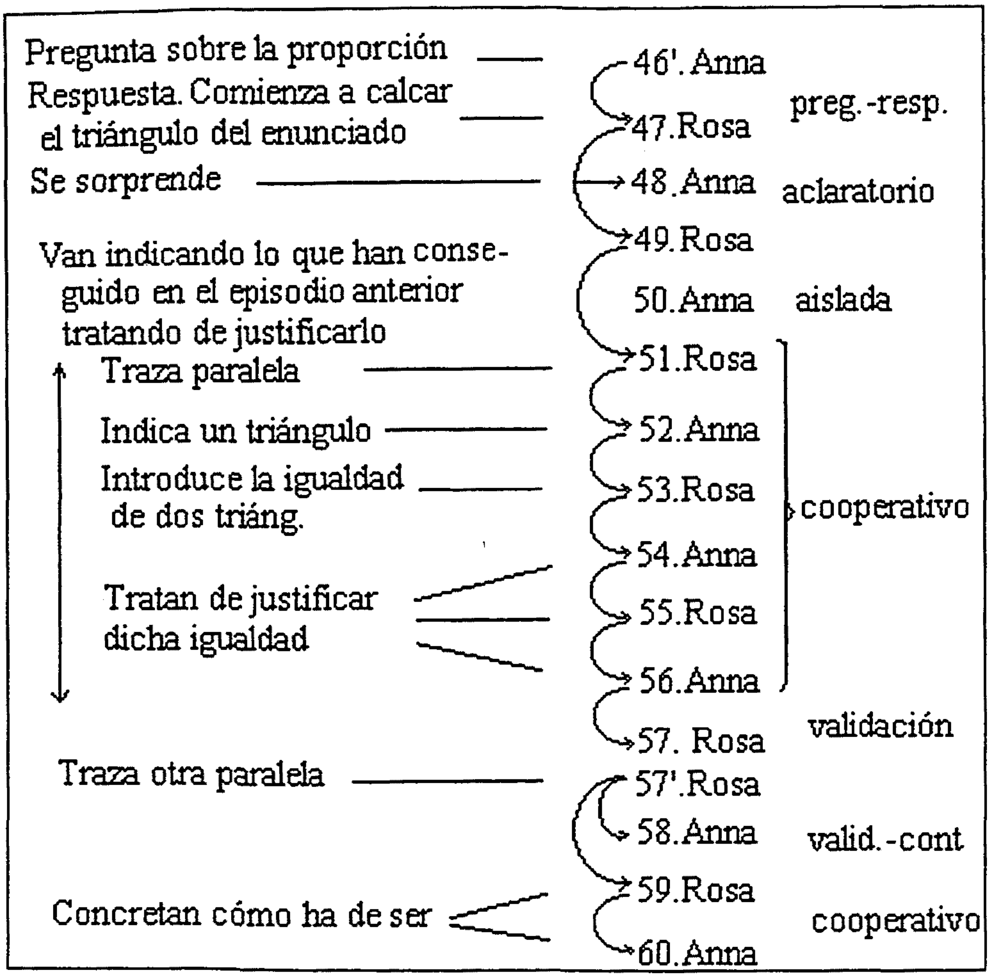


Figura 8.2.30

D) Episodio de ejecución

Pensamos que los episodios anteriores han definido una forma de enfocar el problema, es decir, hay un plan implícito de actuación consistente en ir comparando triángulos hasta conseguir la relación pedida.

A pesar de que la interacción es cooperativa en la mayor parte de este episodio (Figura 8.2.31), la alumna que realmente lleva el peso de la ejecución es Rosa, si nos fijamos en que, en la intervención 61, es ella la que va generando nuevas relaciones y justificaciones, mientras Anna se limita a introducir, en forma de pregunta, el triángulo FLC. La respuesta de Rosa vuelve a ser amplia, haciendo referencia a lados paralelos e igualdad de ángulos. Las validaciones posteriores de Anna, en sendos intercambios progresivos generados por Rosa (intervenciones 63 a la 67), y la cooperación de aquélla para especificar los triángulos que quieren comparar (intervención 68), contribuyen a que Rosa encuentre la relación entre FDE y DBE, que es el objetivo del problema. Los intercambios posteriores, también cooperativos, son, en cierta forma, una confirmación del razonamiento seguido por Rosa.

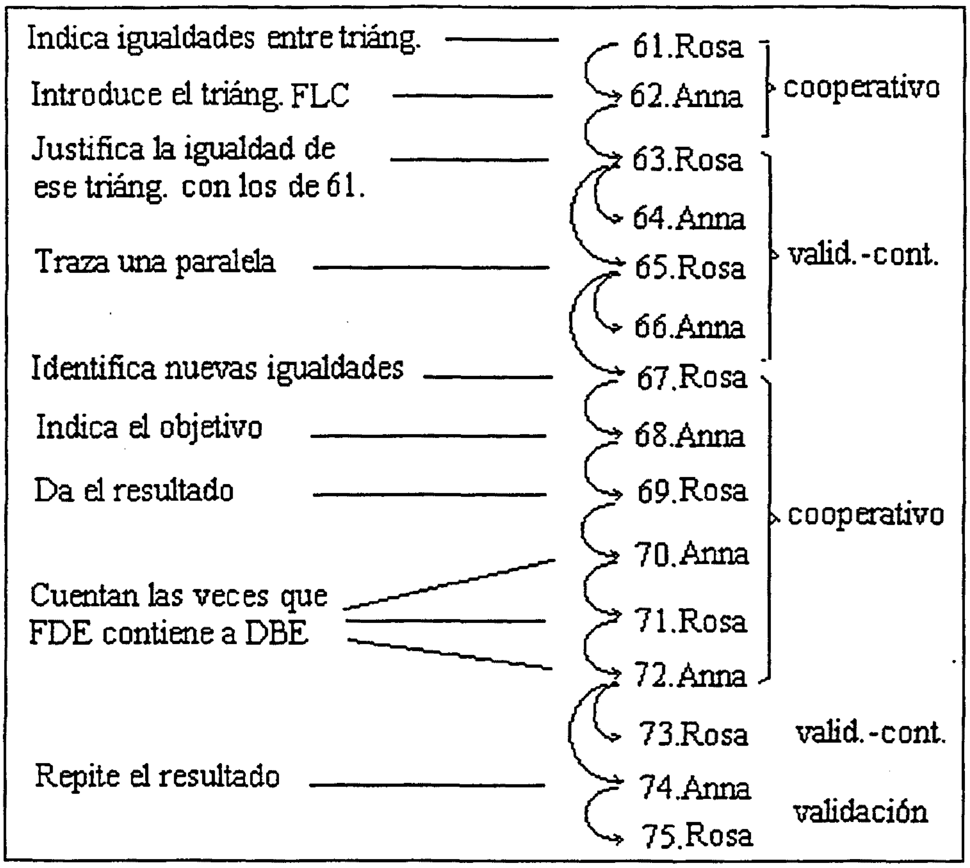


Figura 8.2.31

Podemos entrar aquí en la discusión de cuál de los tres apartados de la definición de intercambio cooperativo contribuye de forma más generosa —o más activa— a la construcción cooperativa del diálogo. El análisis de algunas de las intervenciones de este episodio nos conduce a considerar como más pasivo aquél en que una de las alumnas se limita a introducir algún elemento nuevo en forma de pregunta sin afirmar nada sobre el contenido de la información introducida.

E) Episodio de verificación

Este episodio de verificación abarca desde la intervención 76 a la 85.

La poca seguridad que tienen las alumnas en la relación que han encontrado, puesta de manifiesto con la reiterada repetición de dicha relación al final del episodio anterior, hace que repasen, de nuevo, las relaciones de igualdad de los triángulos que han generado. Observamos una verificación muy superficial de la solución. Los alumnos no hacen una verificación del proceso de resolución, lo que hubiera supuesto una reconsideración de la proporcionalidad de los lados de los triángulos.

La interacción que se produce es mayoritariamente cooperativa. Las alumnas generan un diálogo de estas características cuando ambas pretenden autoconvencerse de que la relación que han encontrado es la correcta.

8.2.3.3. *Características generales del proceso de resolución*

a) Papeles comunicativos de las alumnas

Observamos que en este protocolo hay un alto grado de cooperación entre las alumnas, pues 31 intercambios (Tabla 8.2.5), de un total de 52 (37 de dos intervenciones y 15 de tres), son cooperativos, aunque las aportaciones que se producen en la mitad de ellos tienen como referencia el enunciado del problema o aportaciones efectuadas anteriormente. Estos tipos de intercambios cooperativos tienen lugar, en su mayor parte, en los episodios de lectura y de evaluación local.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Anna-Rosa	16(8)*	2	1(0)	19(8)
Rosa-Anna	15(7)	1	2(2)	18(9)
TOTAL	31(15)	3	3(2)	37(17)

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.2.5. Intercambios de dos intervenciones

Por el contrario, el diálogo cooperativo cuyas intervenciones son mayoritariamente novedosas en el contexto global del proceso se produce en la ejecución debido al carácter argumentativo de la misma.

Si a los 31 intercambios cooperativos unimos los 9 progresivos de tres intervenciones (Tabla 8.2.6), podemos afirmar que el proceso de resolución se ha desarrollado de una forma bastante dinámica.

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		INTERRUPCIÓN		ACLARATORIO		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Rosa-Anna-Rosa	6(5)*	2	0	0	1(1)	1	7(6)	3
Anna-Rosa-Anna	2(0)	3	0	0	0	0	2(0)	3
TOTAL	8(5)	5	0	0	1(1)	1	9(6)	6

* Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.2.6. Intercambios de tres intervenciones

No hay diferencia en la actuación de las alumnas en cuanto al número de intercambios cooperativos, pero sí que observamos bastante diferencia respecto a los intercambios de tres intervenciones en cuanto a su número (Tabla 8.2.6) —10 del tipo Rosa-Anna-Rosa, de los que 7 son progresivos, por 6 del tipo Anna-Rosa-Anna, de los que 4 son progresivos—. Esa diferencia se pone aún más de manifiesto en la disposición que tienen dichos intercambios en el diálogo. En efecto, hay agrupaciones de intercambios cooperativos que van seguidas de cuatro intercambios del tipo validación-continuación —tres de ellos progresivos— dirigidos por Rosa, como ocurre entre las intervenciones 32 a 43, o diálogos cooperativos interrumpidos por intercambios del mismo tipo, como entre las intervenciones 60 a 72. Rosa asume, pues, la responsabilidad de la continuación de los diálogos cooperativos con intervenciones que aportan nuevas informaciones.

Por el contrario, las continuaciones del diálogo cooperativo por parte de Anna se producen con intercambios aislados de tres intervenciones y generalmente repetitivos, como ocurre entre 72 y 76.

Las situaciones de trabajo en paralelo ocurren sólo en los episodios de lectura y análisis/exploración. En el primer caso, las alumnas tratan de comprender el enunciado por separado, con la excepción de un breve diálogo cooperativo intermedio en el que hacen referencia a la proporción “3 a 1”.

En el episodio de análisis/exploración, los trabajos en paralelo de las alumnas son breves y siempre productivos, ya que tras ellos introducen elementos procedimentales nuevos, relacionados con el trazado de paralelas a los lados del triángulo ABC (véase apartado 10.7).

b) Esquema de la sucesión de episodios

El diálogo cooperativo, que hemos evidenciado en el apartado anterior, no ha contribuido a que se produzca un verdadero control sobre el proceso de resolución, ya que las alumnas no interpretan de forma correcta la proporción 3 a 1, o mejor, no traducen correctamente su significado en los segmentos de la figura, a pesar de que hay una referencia explícita a esa proporción en dos ocasiones (intervenciones 4 y 5 y 46’) a lo largo del proceso, originando, en la segunda, una nueva representación de la figura que da paso a una evaluación local y que sirve para relanzar la ejecución argumentativa.

Esa interpretación deficiente se consuma con el trazado de la paralela a AB por F, que corta al segmento AC en un punto que lo divide en tres partes. Pensamos que el proceso que asocia el trazado de la paralela con el mantenimiento de la proporción, tanto entre los segmentos AD y DB como entre FA y CF, tiene su origen en el desconocimiento que ambas alumnas tienen del teorema de Tales, como se pone de manifiesto en la prueba inicial.

En el esquema gráfico de la sucesión de episodios podemos observar que el enfoque que ejecutan las alumnas, igual que en los procesos anteriores, es geométrico y se basa en el desarrollo del plan implícito consistente en ir trazando rectas y buscando relaciones entre los elementos que salen de la división de la figura. Las aportaciones relacionadas con el trazado de rectas surgen como consecuencia de breves trabajos en paralelo o después de pausas. Las justificaciones que se producen después son fruto del trabajo cooperativo.

Las referencias conceptuales son escasas porque las justificaciones se basan en la visualización de las figuras —no olvidemos la nueva representación que hacen— y no en referencias a los elementos iguales de los triángulos que comparan, aunque hay una rica aportación de contenidos procedimentales relacionados con la división de la figura en triángulos mediante el trazado de rectas paralelas.

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS

ROSA	EPISODIO	ANNA
	LECTURA (1-9)	
3. Comienza la representación.	Se abandona el trabajo en paralelo inicial para interpretar cooperativamente la proporción del enunciado.	4. Comienza la representación. Divide AC y CB en tres segmentos iguales.
5. Escribe "3" en AD y "1" en DB.		
	Acaban de identificar, por separado, los segmentos paralelos del gráfico.	
	↓ T_1	
	ANÁLISIS/EXPLORACIÓN. (10-44)	10 y 12. Identifica y justifica la igualdad de FDE y FEC.
13. Expresa el objetivo a conseguir.		
	Breve trabajo en paralelo con expresiones gestuales.	
15. Traza por E una paralela a AB y señala los triángulos MDE y DBE.		
	Búsqueda de relaciones entre triángulos. Consiguen la igualdad de MDE y DBE e introducen FME	18. Introduce la igualdad de los triángulos MDE y DBE.
23. Pregunta por el triángulo FME (ha dividido FDE en FME y MDE).		24. Introduce la igualdad de FME y DBE.

27. Expresa el objetivo que quiere conseguir.	<pausa (15)>	28. Traza por F una paralela a AB.
31. Pregunta por la relación entre DB y DE.		28. Introduce la igualdad de FLC y DBE.
33. Propone la igualdad de DB y FL.	Búsqueda cooperativa de relaciones entre elementos lineales y entre triángulos, que degenera en intercambios del tipo validación-continuación dirigidos por Rosa.	32. Propone la igualdad de AN y DE.
35. Introduce la igualdad de FME y FLE.		
37. Concluye con la igualdad de FLC, MDE y DBE.		
39. Expresa el objetivo que quiere conseguir.	<Pausa (5)>	
41. Traza el segmento LM (paralelo a DE).		
41. Propone la igualdad de MEL y MDE.	Búsqueda breve de relaciones entre triángulos.	

T_2 (45-46)

	EVALUACIÓN LOCAL (46'-60)	
		46'. Saca a relucir la proporción 3 a 1.
47. "Anem a dibuixar-ho". Comienza a calcar el triángulo del enunciado.	La acumulación de líneas en las figuras con las que han trabajado origina este episodio.	
51. Vuelve a trazar la paralela por E a AB.		
53. Vuelve a expresar la igualdad de DBE y MDE.	Tratan de justificar cooperativamente la igualdad de DBE y MDE.	54. Para lo cual expresa la igualdad entre NA y DE.
55. Y la de los ángulos NAD y EDB.		56. Y la de los segmentos BE y DM.

57'. Vuelve a trazar por F una paralela a AB.

EJECUCIÓN
(61-75)

Hay un plan implícito de ir comparando triángulos hasta obtener la relación pedida.

61. Introduce la igualdad de los triángulos FME y FEL. Así como la de DBE, MDE y LEG.

62. Y añade a los anteriores la del triángulo FLC.

63. Trata de justificar la igualdad de FLC y LEG.

65. Traza la paralela a AC por L.

67. Identifica la igualdad de LME y la de DBE, LEG y FLC.

69. Identifica la relación entre FDE y DBE.

VERIFICACIÓN
(76-85)

77. Expresa la igualdad de FMP y LEP.

78 y 80. Expresa la idea de que FMP y MEP forman uno de los DBE, MDE, etc. y repite la igualdad de DBE y MDL.

81. Justifica la igualdad de DBE y MDL basándose en que se obtienen al dividir un paralelogramo por una de sus diagonales.

8.2.4. **Actuación de Rosa y Anna en la resolución del problema del cuadrado**

8.2.4.1. *Transcripción del proceso de resolución*

1. Rosa: *Doblegant de la mateixa forma les quatre cantonades d'un quadrat, com s'indica en la figura, s'obté en el centre un altre quadrat —quadrat ratllat de la figura—. Busca la relació entre els costats AB i BC dels triangles doblegats de tal forma que la relació entre les àrees del quadrat ratllat i de l'original sigui: a) **1 / 4**; b) **1 / 9**; c) **1 / n*** [el enunciado incorpora una figura como la 8.2.32, pero en ella sólo hemos identificado los vértices A, B y C].

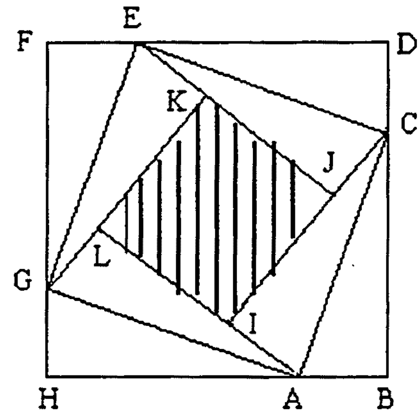


Figura 8.2.32

1'. Rosa: [Empieza a representar la Figura 8.2.33].
2. Anna: [Empieza a representar la Figura 8.2.34, representa el cuadrado BDFH].

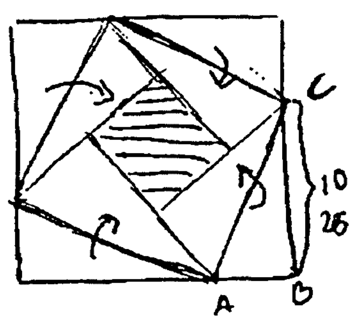


Figura 8.2.33

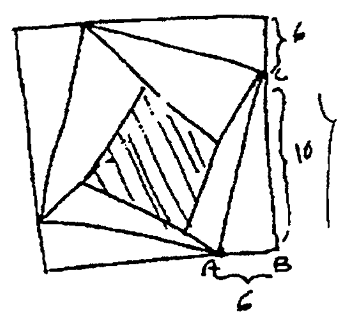
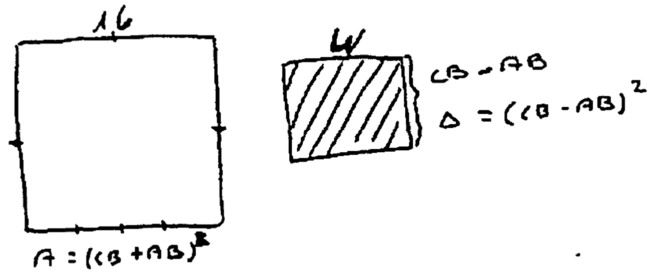


Figura 8.2.34

<2 m 15 s>

3. Rosa: [Acaba la representación rayando el cuadrado IJKL y poniendo letras en los vértices A, B y C. Espera a que Anna acabe].
4. Anna: [Acaba la representación fijándose en la Figura 8.2.32].
5. Rosa: [Lee el enunciado y escribe: $\frac{BC}{AB}$] <pausa(12)>
6. Anna: [Lee el enunciado en voz baja]. *És de **1** a **4**.*
7. Rosa: ***1** a **4** /*

8. Anna: *La raó entre les àrees del quadrat ratllat i de l'original* [lee], *o sigui, aquest quadrat* [indica IJKL] *i aquest* [BDFH], *aquest...* [indica otra vez IJKL]
9. Rosa: = *Quatre vegades més petit que l'altre* [indica BDFH] <pausa(15)>
10. Anna: [Dibuja los cuadrados BDFH y IJKL por separado, Figura 8.2.35a y Figura 8.2.35b].
11. Rosa: [Mientras tanto, Rosa señala los triángulos doblados y hace ademán de dividir el cuadrado BDFH en cuatro partes].



(a) (b)

Figura 8.2.35

<40 s>
12. Anna: *Si aquest, per exemple, és 16, aquest és 4* [escribe 16 y 4 en los lados del cuadrado que ha dibujado].
13. Rosa: [Se fija en Anna y empieza a representar los dos cuadrados. Escribe, igualmente, 16 y 4 en sus lados].
14. Anna: *Perquè aquest 16 l'hem dividit en quatre parts /*
15. Rosa: *Sí.*
16. Anna: [Divide en 4 partes el lado del cuadrado de la Figura 8.2.35a].
17. Rosa: *Com?, en 4 parts, no, seria així* [divide cada lado por la mitad e indica los cuatro cuadrados en que queda dividido], *aquest, aquest i aquest* <pausa(24)>
17'. Rosa: *Aquest d'aquí, aquest costat d'aquí* [indica primero AB y después LI y IJ, en la Figura 8.2.32], *no,* [continúa indicando con el bolígrafo los lados AB y AI] /
18. Anna: *Què?*
19. Rosa: *A veure, aquest costat d'aquí* [JC].
20. Anna: *D'aquest triangle* [EJC].
21. Rosa: *És igual que aquest costat d'aquí* [AI], *no?* [Indica los lados EJ y JC] <pausa(10)>
22. Anna: *Aquests triangles* [indica ABC, ACI, ECD, etc.] *són tots iguals, estan formats..., tenen la mateixa distància d'aquí* [A] *a aquí* [C] *com d'aquí* [C] *a aquí* [E], *no?*
23. Rosa: [Mueve la cabeza afirmando] / *Aquesta d'aquí* [CB] *és igual que aquest d'aquí* [CI], *no?*
24. Anna: *Per...?*
25. Rosa: *Doncs el costat del quadrat* [indica IJ, refiriéndose al cuadrado IJKL] *és CB menys AB / no? El costat d'aquest quadrat* [IJKL] *és CB menys AB* [repite], *no?*
26. Anna: *Sí.*
27. Rosa: *Espera ho apunto* [escribe "CB-AB=lado del cuadrado"].
28. Anna: [Escribe CB-AB en un lado de la Figura 8.2.35b] /
29. Rosa: *CB menys AB* [lo escribe igualmente en su figura] / *Què més?* <pausa(40)>

29'.Rosa: *L'àrea del quadrat* [indica IJKL] *és CB menys AC al quadrat, no?, i l'àrea del quadrat gran* [BDFH] *seria BC més AB al quadrat, perquè aquest* [AB] *és el mateix que aquest* [CD].

30. Anna: *L'àrea d'aquest* [Figura 8.2.35b, lo escribe] *és...*

31. Rosa: *== CB menys AB al quadrat* [escribe: $(CB\text{-}AB)^2$] *i la del gran, l'àrea és igual a BC més AB al quadrat* [escribe: $(BC+AB)^2$].

32. Anna: [Escribe $(BC+AB)^2$ debajo de la Figura 8.2.35a]. *La raó entre les àrees..., però és que ens donen tot això* [indica 1/4, 1/9 y 1/n] *i no estem mirant res d'això* [vuelve a indicar lo mismo].

33. Rosa: *Ja / que sigui 1 a 4...* [indica BC en la Figura del enunciado y simula dividir el segmento BC en tres partes] <pausa(10)>

<1 m 15 s>[Después señala, en la Figura 8.2.33, los segmentos AB y BC].

34. Anna: [Indica el segmento CI] <pausa(20)>

35. Rosa: *Ja està! CB entre BA, bueno, entre AB, ha de donar igual a un costat d'aquests* [indica IJ], *no?, o sigui, com sabem que el costat del quadrat* [IJ] *és CB menys AB / no?, o sigui, aquest d'aquí* [CB] *ho dividim entre aquest d'aquí* [AB], *ens ha de donar un costat del quadrat* [indica BD], *del petit* [indica IJ] *perquè hi càpiguen quatre* [en el grande], *no? /*

36. Anna: *Però encara estem amb això, mai no mirem això nosaltres* [se refiere a 1/4, 1/9 y 1/n].

37. Rosa: *Sí, perquè ha de ser que en un quadrat gran* [indica BDFH] *càpiguen quatre petits* [IJKL].

38. Anna: *Sí.*

39. Rosa: *Després que en un quadrat gran càpiguen quatre petits, la raó entre aquest i aquest* [BC y AB] *ha de ser igual a aquest costat* [IJ], *no?* <pausa(7)>

40. Anna: *Fem-ho amb números.*

41. Rosa: *Eh?*

42. Anna: *Fem-ho amb números. A veure, tenim...*

43. Rosa: *== Jo dic que dividint aquest* [BC] *entre aquest* [AB] *ha de donar aquest costat* [IJ], *no?*

44. Anna: *I després, si ho fas d'1 a 9, què?, és el mateix?*

45. Rosa: *Si ho fas d'1 a 9, no, ha d'haver aquí* [cuadrado BDFH] *3, 3, 3; 3, 3, 3; y 3, 3, 3* [divide imaginariamente el cuadrado grande en 9 cuadrados pequeños iguales], *no? Aquí 3, 3, 3; 3, 3, 3* [vuelve a repetir lo mismo], *no?* <pausa(20)> *Llavors el quadrat ratllat seria més petit, no?* [se refiere al caso en que la razón se a 1/9].

46. Anna: *Ja, sí, si ho fem a partir d'aquí* [indica la Figura 8.2.32] *sempre fem aquesta* [indica el apartado 1/4], *o no?*

47. Rosa: *Sí.*

48. Anna: *Per això si ho fem a partir d'1/9...*

49. Rosa: *== 1/9.*

50. Anna: *Com ho fem?*

51. Rosa: *No ho sé.*

52. Anna: *Aquest d'1 a 4 ha de sortir en algun lloc, o no?*

53. Rosa: *Sí.*

54. Anna: *Si no surt en lloc quan fem 1 a 9 ens quedarà el mateix* <pausa(30)>

54'. Anna: *A veure* [escribe el sistema : CB - AB = 4
CB + AB = 16], *està bé aquest?*

55. Rosa: *CB més AB, CB més AB, com que és igual a 16?*
56. Anna: *Aquest d'aquí* [DC] *no és igual a aquest d'aquí* [AB]*?*
57. Rosa: *Sí.*
58. Anna: *Pues CB més AB és igual a 16.*
59. Rosa: *No, perquè aquest 16 no és el perímetre.*
60. Anna: *No, fem la raó d'1 a 4, no?, és a dir, si aquest* [indica el lado del cuadrado de la Figura 8.2.35a] *és 16, els números ens els inventem, aquest* [repite], *és 16, aquest* [lado de la Figura 8.2.35b] *serà 4, no?, raó d'1 a 4, no?*
61. Rosa: *Sí, sí.*
62. Anna: *Doncs ja està, si aquest* [BD] *és 16, ara posem aquest valor* [BC], *sí o no?*
63. Rosa: *Sí, sí.*
64. Anna: *Segur?, o no?, o m'ho estic inventant? /*
65. Rosa: *Hi ha 4* [refiriéndose a los cuadrados pequeños que caben en el grande].
66. Anna: [Resuelve el sistema que ha planteado en la intervención 54']. *Això* [CB] *ha de donar 10, això* [AB] *serà 6* [lo apunta en la Figura 8.2.34], *per tant, 10/6, quina és la raó?*
67. Rosa: *10 entre 6? / 1'6, espera un moment 10 entre 6* [hace la división], *1'6 periòdic, vale.*
68. Anna: *Què?, i aquesta és la raó?*
69. Rosa: *Aquesta seria la raó.*
70. Anna: *No sé, tu has escrit aquí que hem de buscar BC dividit per AB, no? BC és 10 i per AB.*
71. Rosa: *I com?, així, ja està* [indica 10/6].
72. Anna: *Posem d'altres números a veure si ens dóna igual, però...*
73. Rosa: *Potser 10 i 40. Podem fer, amb 10 i amb 40, 4* [se refiere a la razón, lo escribe en los lados de los cuadrados, Figura 8.2.35a y 8.2.35b].
74. Anna: [Vuelve a hacer dos cuadrados similares a los de las Figura 8.2.35a y 8.2.35b y escribe 40 y 10 en cada uno de sus lados, respectivamente].
75. Rosa: [Empieza a resolver el sistema: CB+AB = 40
< 37 s> CB-AB = 10].
76. Anna: [Se queda pensando antes de iniciar la resolución del sistema]. *Com saps que aquest* [CB] *és igual que aquest?* [CI]. *Aquest* [CB] *és igual que aquest* [CI. Comienza a resolver el mismo sistema que Rosa].
77. Rosa: *Sí, és clar, perquè si aquest* [triángulo ABC] *el doblegues cap aquí* [ACI, indica cómo dobla un triángulo sobre otro], *no?,* [continúa resolviendo] *sí, si dóna el mateix* [ha acabado de resolver le sale CB = 25 y AB = 15 y de dividir BC entre AB].
78. Anna: *Sí?*
79. Rosa: *Sí, 1'6 periòdic.*
80. Anna: *Doncs ja està, aquesta és la raó.*
81. Rosa: *Sí.*
81'.Rosa: *Diu quina relació hi ha... Busca la relació entre els costats AB i BC* [lee] *dels triangles doblegats de forma que la relació entre les àrees del quadrat ratllat i de l'original sigui 1 a 4. Ja hem fet, 1 a 4, aquesta és la raó. Ara hem de fer 1 a 9, o sigui, buscar valors de manera que aquest* [BDFH] *sigui 9 vegades més gran que aquest* [IJKL], *no?*
82. Anna: *Sí.*

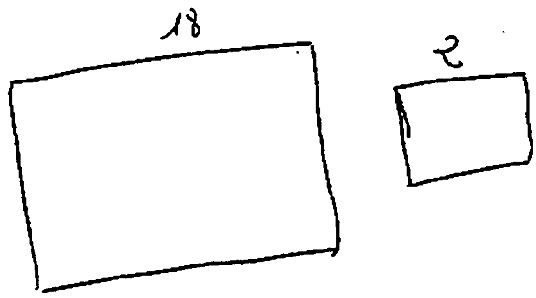


Figura 8.2.36

83. Rosa: [Empieza a representar laFigura 8.2.37].

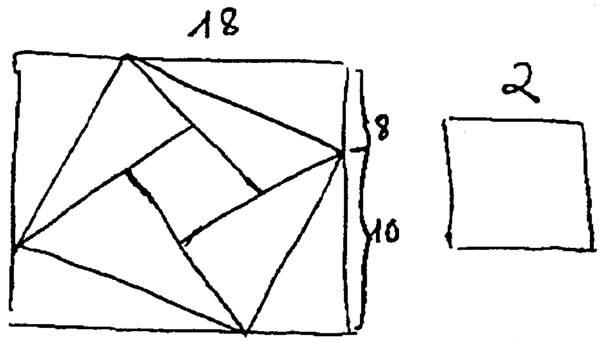


Figura 8.2.37

<10 s>

84. Anna: [Representa laFigura 8.2.36].

85. Rosa: *Aquí hem de posar...*[apunta 1/9], *podiem posar 2 a 18, per posar 1 a 9, no?, 2* [pone 2 sobre el lado superior del cuadrado pequeño,Figura 8.2.37], *i aquí 18* [sobre el lado grande,Figura 8.2.37].

86.Anna: [Escribe 18 y 2 sobre sus cuadrados,Figura 8.2.36].

87.Rosa: *CB més AB és igual a 18 i CB menys AB és igual a 2,* [escribe y resuelve el sistema:

$$\begin{array}{l} CB + AB = 18 \\ CB - AB = 2 \\ \hline 2CB \ / \ = 20; \ CB = 10 \end{array}$$

], *10.*

88. Anna: [Observa cómo Rosa resuelve el sistema]. *Quants quadrats sortiran aquí dins?* [se refiere a las veces que el cuadrado grande contiene al pequeño].

89. Rosa: *9* [apunta el 10 y el 8 sobre los segmentos BC y CD respectivamente].

90. Anna: *9?, o més de 9?*

91. Rosa: *9, 1 a 9, pues dintre ha d'haver 9, com 18 a 2, no? CB és igual a 10 i aquest* [DC] *és 8, ja està fet. BC entre AB, 10 entre 8, quant és?* [acaba la resolución y hace la división].

92. Anna: *1 coma...*

93. Rosa: *= 1 coma 2, 1'25.*

94. Anna: *Més petit que abans.*

95.Rosa: [Repasa]. *Què he fet? CB menys AB és igual a 2. Sí, sí, sí.*

96. Anna: *Està bé, no? Això dóna CB igual a 10.*
97. Rosa: *Sí, i BC entre AB, 1'25 /*
98.Anna: *Eh?*
99.Rosa: *Ja està, no?* [Escribe la relación BC/AB=1'25].
99'.Rosa: *I ara fem 1 a n* [representa laFigura 8.2.38]. *Hem de fer que en el quadrat gran càpiguen n petits, 1 a n.*

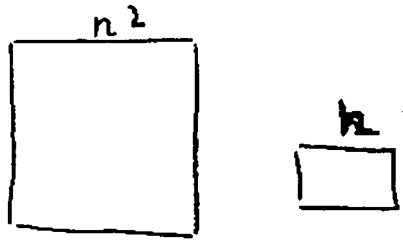


Figura 8.2.38

100.Anna: [Se fija en Rosa y hace una representación similar].
101.Rosa: *Aquest és **n*** [pone "n" en el lado del cuadrado pequeño,Figura 8.2.38] <pausa(10)>
102.Anna: *És com si busquéssim una fórmula.*
103.Rosa: *Una fórmula, sí, **n** i aquí* [cuadrado grande], *quants n'hi hauran? /*
*O sigui, CB menys AB és **n*** [lo escribe].
104.Anna: [También lo escribe] /
105.Rosa: *Si aquest és **n*** [indica el cuadrado pequeño,Figura 8.2.38], *serà* [cuadrado grande] ***n** per **n**, no?, no!, espera, **2*** [se refiere a la anterior relación 2 a 18] ***per 9**, si aquest és **n*** [repite], *serà **n** per **n**, **n²**, no?* [apunta n^2 sobre el lado del grande], *pot ser?, si multipliquem aquest costat d'aquí* [lado pequeño,Figura 8.2.36, que es 2] *per això d'aquí* [se refiere al 9 del 1/9] *és el mateix que això d'aquí* [indica el n sobre laFigura 8.2.38] *per això d'aquí* [indica el n del 1/n], *no?*
106.Anna: *Sí.*
106'.Anna: [Iguala CB+AB a n^2 y empieza a resolver el sistema:

$$\begin{array}{l} CB - AB = n \\ CB + AB = n^2 \\ \hline 2CB \quad = n^2 + n \end{array}$$

].

<15 s>

107.Rosa: [Ecribe la segunda ecuación del sistema y empieza a resolverlo].
108.Anna: [Mira los cálculos que hace Rosa]. *No és sumat?* [se refiere a un error cometido por Rosa en la resolución del sistema por el método de reducción].
109.Rosa: *Ah sí!, seria **2n²**, no?, no?*
110.Anna: *Com que **2n²**?*
111.Rosa: *Ah no!, no, què faig!* [rectifica, poniendo n^2+n].
112.Anna: *n^2 més n* [continúa la resolución iniciada en la intervención 107', escribe:

$$CB = \frac{n^2+n}{2}].$$

113.Rosa: *CB és igual a* $\frac{n^2+n}{2}$ *i ara AB, si CB és això* [se refiere a la expresión anterior] *l'AB què serà?, l'aïllem d'aquí...* [primera ecuación del sistema], *a CB menys* ***n.***
114.Anna: *AB és igual a* $\boldsymbol{n^2}$ *menys CB, no?* [acaba la resolución iniciada en la intervención 110 y escribe:

$$AB = n^2 - CB; \quad AB = n^2 - \frac{n^2+n}{2} = \frac{2n^2-n^2-n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$], *sempre dividim el CB dividit per...*

<1 m>

115.Rosa: [Vuelve a escribir de nuevo el sistema y lo resuelve fijándose en lo que Anna ya ha hecho]. *Ara l'AB, que seria menys* ***n/2*** [se refiere al resultado de la expresión $n^2 - \frac{n^2+n}{2}$].
116.Anna: *No, dóna això* [$\frac{n^2-n}{2}$].
117.Rosa: *No, perquè aquest* $\boldsymbol{n^2}$ *amb aquest* [trata de simplificar los n^2 de la expresión $n^2 - \frac{n^2+n}{2}$], *se'n va.*
118.Anna: *Com que se'n va?*
119.Rosa: *Queda un* [se refiere a un n^2]. *Ah sí!, sí, vale. Queda el mateix?* [se refiere al AB y CB]. *Ah no!* [acaba de copiar el resultado de AB].
120.Anna: *Ara hem de dividir..., dividim sempre, CB dividit per AB* [empieza a calcular la expresión CB/AB y escribe:

<25 s>

$$\frac{CB}{AB} = \frac{\frac{n^2+n}{2}}{\frac{n^2-n}{2}} = \frac{2(n^2+n)}{2(n^2-n)}$$]

121.Rosa: *CB entre AB* [hace igual por su cuenta], *el 2 i el 2 se'n van.*
122.Anna: *Y quedarà...* [escribe: $\frac{1}{n} \rightarrow \frac{n^2+n}{n^2-n}$].
123.Rosa: *A veure, si féssim aquella fórmula, com quedaria?* [se refiere al caso anterior, se va a laFigura 8.2.37], $\boldsymbol{n^2}$ ***seria 18 més 2, seria 20, entre 16, que al dividir-ho seria 10 entre 8, no?, entens?***
124.Anna: *Sí.*
125.Rosa: *Doncs hem de agafar això, ja està.*

[Tiempo total: 24 m 30 s].

8.2.4.2. *Microanálisis del proceso de resolución*

A) Lectura

La actuación de las alumnas en este episodio es bastante característica, pues la lectura inicial da paso a un trabajo en paralelo en el que representan —copian, en este caso— la figura del enunciado, anotando el objetivo que persiguen (intervención 5) y haciendo referencia a las condiciones del problema (intervención 6).

El trabajo en paralelo tiene su inicio en la reacción que produce la lectura del enunciado (Figura 8.2.39) y dura mientras cada alumna, por separado, copia la figura que hemos incluido en el enunciado del problema. Esta actuación, en cierta forma, es inducida por nuestras indicaciones previas relativas a no escribir en el folio en el que presentamos el problema.

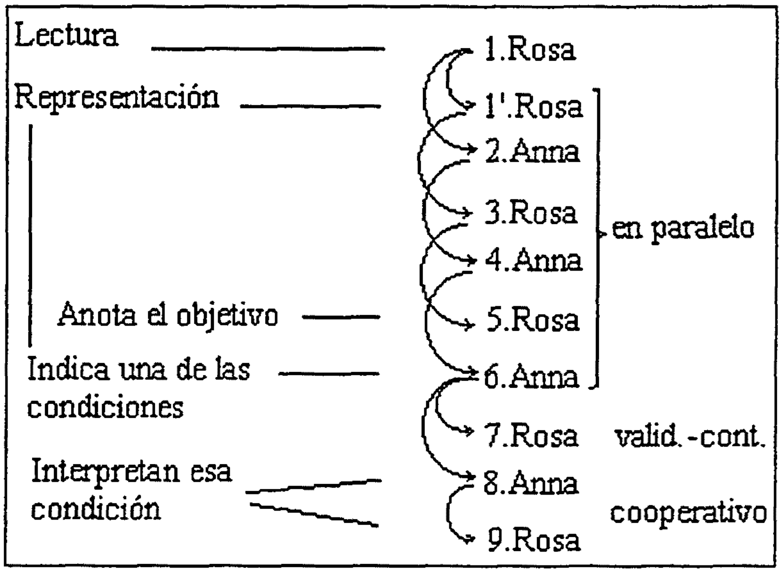


Figura 8.2.39

El trabajo en paralelo inicial no acaba con un contraste de opiniones sobre su contenido, ya que las intervenciones que siguen a la actuación en paralelo tienen la particularidad de que su contenido no se relaciona con la representación gráfica que cada una de las alumnas hace, por ser ésta una copia de la del enunciado, sino con la comprensión de las condiciones del problema (intervenciones 6 a 9) y, en particular, con la relación "1 a 4" que debe haber entre las áreas de los cuadrados.

La interpretación de la razón 1/4 en términos del número de veces que el cuadrado de dentro es más pequeño que el de fuera y la pausa que sigue marcan el final del episodio.

B) Episodio de exploración

La pausa de la intervención 9 la interpretamos como la transición al episodio de exploración, en el que Anna hace una representación separada de los cuadrados ABCD y IJKL (Figura 8.2.35) e introduce un proceso de particularización consistente en dar valores concretos —16 y 4— a los lados de dichos cuadrados (intervención 12).

En las intervenciones 10 y 12 hay dos aspectos relevantes para el desarrollo posterior de la resolución: por una parte, la propuesta, ya citada, de la particularización, y, por otra, la relación errónea que Anna establece entre los lados de los cuadrados y sus áreas, a pesar de que Rosa rectifica dicha relación, precisando que la razón entre las áreas es 1 a 4 (intervenciones 17 y 17') y señalando sobre la figura los cuatro cuadrados pequeños que componen el grande.

A pesar de ello, la razón 4 a 16 entre los lados de los cuadrados queda marcada en la figura. La rectificación de Rosa no ha surtido el efecto deseado, debido, posiblemente, a que no ha explicitado que la razón entre los lados tenga que ser 1 a 2 para que la de las áreas sea 1 a 4.

La gestión que hacen las alumnas en estos momentos del proceso de resolución es deficiente. Esto se confirma en el episodio posterior de ejecución, donde el 16 y el 4 son los números que vuelven a aparecer cuando las alumnas plantean un sistema que relaciona los lados de los cuadrados.

En la mala gestión influyen los intercambios comunicativos que se producen, ya que tras la pausa de la intervención 17 no hay respuesta por parte de Anna ni demanda de validación de la aserción que Rosa acaba de hacer.

La búsqueda exploratoria que se ha iniciado, que tiene como punto de partida la condición del enunciado de que la razón entre las áreas de los cuadrados es un cuarto, degenera, a partir de la intervención 17, en una búsqueda, sin una finalidad concreta, de relaciones entre los segmentos que componen la figura. A pesar de lo cual, esa búsqueda acaba con éxito cuando Rosa expresa la relación entre el lado IJ del cuadrado IJKL y los segmentos AB y BC (intervención 25).

Por lo que se refiere a los papeles comunicativos de cada interlocutora, observamos que, en el inicio del episodio, las alumnas trabajan en paralelo hasta que Anna capta la atención de su compañera al introducir la particularización y las medidas concretas de los lados, tras lo cual no continúa el discurso de forma progresiva, produciendo dos intercambios del tipo validación-continuación que clasificamos como repetitivos. La continuación de Rosa, en la intervención 17, es acertada y precisa, pero la falta de diálogo cooperativo posterior o de alguna demanda de información (o duda), por parte de Anna, sobre el contenido de dicha intervención condiciona, incluso, el resto del proceso de resolución .

A partir de este momento, excepto en la intervención 22, Anna se limita a validar (intervenciones 20 y 26) las aportaciones que va realizando Rosa o a preguntar sobre los contenidos de algunas de ellas (intervenciones 18 y 24). Mientras tanto, Rosa comienza señalando segmentos de la figura con la intención de compararlos, continúa estableciendo entre ellos relaciones de igualdad, y acaba relacionando los lados de cada cuadrado con los segmentos AB y BC.

Notamos, pues, en Rosa un comportamiento relacionado con una construcción progresiva del proceso de resolución que se inicia con la rectificación introducida en la intervención 17.

Por el contrario, las aportaciones que hace Anna son aisladas y esporádicas, es decir, no hay una continuidad progresiva en su discurso. Ella se dedica mucho más a estimular el progreso de las intervenciones de Rosa —validando sus aportaciones y preguntando sobre ellas— que a entrar de lleno en un diálogo cooperativo. Estamos ante una situación similar a la de algunos episodios de las resoluciones anteriores.

C) Episodio de análisis

Hemos calificado este episodio como "análisis" porque consideramos que la identificación de la igualdad "CB-AB=costat del quadrat petit", obtenida en el episodio anterior, origina una búsqueda que tiene la finalidad de relacionar ambos segmentos, ya sea tomando como punto de partida las condiciones del problema o, en algún caso, el objetivo. El episodio lo damos por terminado (intervención 49) cuando las alumnas llegan a una situación de bloqueo (intervenciones 50 a 54) del que sólo salen después de la pausa de la intervención 54.

Hay al principio de este episodio una continuación de las aportaciones producidas por Rosa en la exploración. Ella logra, partiendo de las condiciones del problema, expresar las áreas de los dos cuadrados en función de los segmentos AB y BC, pero Anna interrumpe el proceso creativo de Rosa introduciendo, por primera vez, las razones 1/4, 1/9 y 1/n y manifestando que no las están teniendo en cuenta —"... però és que ens donen tot això i no estem mirant res d'això" (intervención 32)—.

La referencia de Anna a las fracciones del enunciado produce un estancamiento en el proceso que hace que Rosa modifique su forma de enfocar la búsqueda. Ahora (intervención 35) parece tratar de partir del objetivo del problema cuando busca, infructuosamente, relaciones entre la razón CB/AB y los lados de los cuadrados.

Anna vuelve a insistir (intervención 36) sobre la no utilización de toda la información del enunciado y corta definitivamente la búsqueda que realiza Rosa, desviando su atención hacia la justificación de la interpretación de las fracciones.

La incomprensión de Anna sobre la utilización de las fracciones se evidencia en la intervención 46 —"Si ho fem a partir d'aquí [indica la Figura 8.2.32] sempre fem aquesta [indica el apartado 1/4]"—, donde se observa que asocia la figura del enunciado con la razón concreta de 1/4, siendo incapaz de abstraer dicha figura y hacerla válida para cualquier razón, lo que confirma las afirmaciones que hacíamos en el episodio de evaluación local del proceso de resolución del problema del triángulo (p. 215).

Con la intervención 42, Anna vuelve a introducir la idea de particularización —"Fem-lo amb números"—. Hay un último intento de Rosa (intervención 43) para que su aportación —que relaciona el cociente BC/AB y el lado del cuadrado pequeño— sea considerada, pero una vez más las ideas de Anna se vuelven a imponer.

Tenemos, por tanto, que a lo largo del episodio las tres intervenciones directivas de Anna (32, 36 y 42) tienen respuesta por parte de Rosa, que trata de explicar a su compañera el significado de las razones 1/4, 1/9 y 1/n, pero ninguna de las intervenciones de Rosa sobre los elementos que aporta logran captar la atención de Anna. Como consecuencia de ello, se abandona el inicio de enfoque algebraico que trataba de expresar las áreas de los cuadrados en términos de AB y BC.

Pensamos que el episodio va de más a menos, es decir, se inicia con unas buenas perspectivas de búsqueda de relaciones que permitan establecer o plantear algún sistema u obtener alguna ecuación que contribuya al avance de la resolución —ése parece ser el papel de Rosa—, pero las sucesivas intervenciones de Anna tratando de buscar por qué no tienen en cuenta las razones 1/4, 1/9 y 1/n del enunciado, van haciendo que las aportaciones de Rosa sean paulatinamente obviadas hasta desembocar en una situación de bloqueo. La actividad creadora de Rosa se sustituye por las explicaciones que tiene que dar a Anna, que no parece comprender el significado de las razones de las áreas que se dan en el enunciado.

La falta de regularidad en la sucesión de intercambios hace que las alumnas no tengan otro papel comunicativo que el que hemos analizado en los párrafos anteriores.

D) Episodio de ejecución (del apartado *a*)

La pausa de la intervención 54 marca el fin del bloqueo en el que ha desembocado el episodio anterior.

La existencia del plan implícito, que se puede intuir cuando las alumnas identifican los segmentos AB y BC como incógnitas y tratan de buscar relaciones entre ellas, culmina ahora con la propuesta, por parte de Anna, de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, fruto de la reflexión que se ha producido en la pausa del final de la intervención 54.

El planteamiento de dicho sistema ha surgido cuando Anna ha asociado las expresiones de los lados de los dos cuadrados (BC+AB y BC-AB) con los números que todavía tenía escritos sobre dichos lados (Figura 8.2.35). Podemos observar aquí que la rectificación que introdujo Rosa en la intervención 17 no ha tenido ningún efecto porque, como dijimos, los valores 4 y 16 no fueron borrados.

El diálogo que se produce entre la intervención 54' —propuesta del sistema— y la 66 —comienzo de su resolución— es consecuencia de que el planteamiento propuesto por Anna ha surgido de golpe y no como resultado de una construcción progresiva del mismo. Así, su comprensión y aceptación se ha de hacer *a posteriori*.

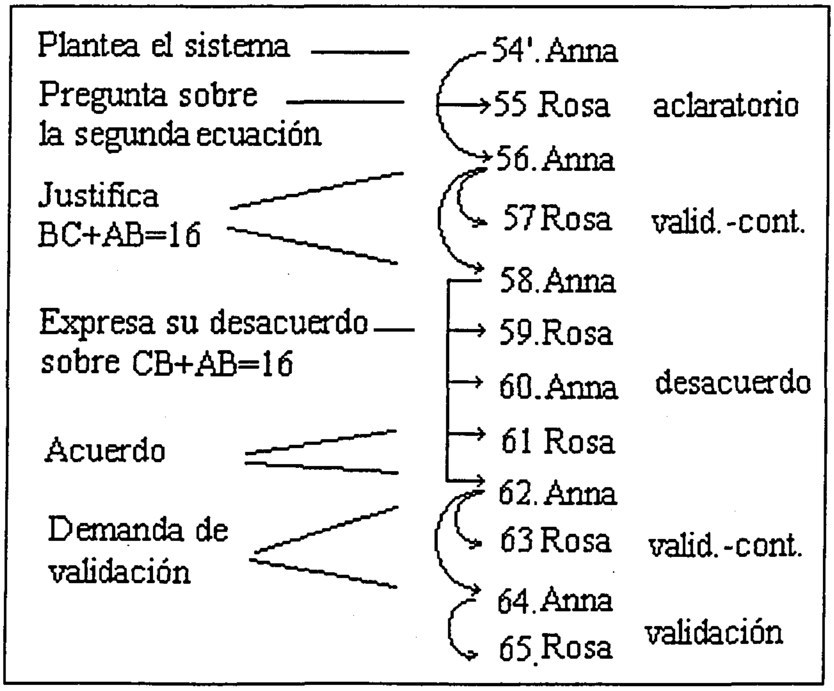


Figura 8.2.40

Los intercambios comunicativos que se producen (Figura 8.2.40) para que el sistema sea aceptado se inician con una pregunta de Rosa (intervención 55) sobre la segunda ecuación (CB+AB=16) e incluyen, además, intervenciones discrepantes (59 a 62) porque

Rosa no acaba de comprender que 16 sea la medida de uno de los lados del cuadrado grande. La explicación que le da Anna (intervención 60) parece convencerla, pero la respuesta de Rosa —en términos de cuadrados pequeños que caben en el grande— a la demanda de validación de la intervención 64 nos deja con la duda de que la comprensión se haya producido.

El desacuerdo acaba (intervención 62) cuando ambas alumnas dan su conformidad al planteamiento de la segunda ecuación, a pesar de que las dudas de Anna continúan hasta que comienza la resolución del sistema.

A pesar de la manifestación del desacuerdo, Rosa se caracteriza, en este diálogo, por no ser demasiado incisiva y conformarse con las breves explicaciones de su compañera. En cambio, Anna insiste, con demandas de validación (intervenciones 62 y 64), como si no estuviera muy segura de su planteamiento.

En el resto del episodio las alumnas resuelven el sistema y encuentran la razón de los segmentos BC y AB.

Entendemos que el acuerdo final, después de la discrepancia, produce en Rosa una oportunidad de aprendizaje, aunque sea sobre la base de una interpretación errónea de las relaciones de las áreas de dos cuadrados y las de sus lados. Además, esta oportunidad se convierte en "aprendizaje" efectivo cuando Rosa aplica una relación similar para resolver el apartado *b* del problema.

E) Episodio de verificación

El proceso de verificación que Anna propone consiste en variar los números 4 y 16, que miden la suma y diferencia de los lados CB y AB, manteniendo la razón de 1 a 4 entre ellos. Este proceso es acertado, salvo por la persistencia en el error, ya comentada, de que la razón de 1/4 entre las áreas supone que la de los lados sea 1/2.

Esa verificación de la solución, que corrobora el resultado que habían obtenido previamente, es interrumpida por la revisión local que supone la pregunta de Anna (intervención 76) sobre el porqué de la igualdad de los segmentos CI y CB. La respuesta de Rosa, basada en la idea de doblar el triángulo y acompañada del gesto correspondiente, es bastante clarificadora.

A pesar de que la introducción de una verificación es un hecho positivo para el desarrollo del proceso de resolución y denota un cierto control del mismo, en este caso echamos de menos un repaso de la resolución llevada a cabo hasta ese momento, que les hubiera permitido reflexionar sobre la razón de las áreas y, posiblemente, realizar una comprobación más general de la solución, como, por ejemplo, la consideración de una proporción genérica $\frac{CB+AB}{CB-AB}=4$ para, a partir de ella, obtener la relación pedida $\frac{CB}{AB}=\frac{5}{3}$. A pesar de ello, la verificación que realizan es coherente con el nivel de particularización con el que han afrontado la ejecución.

El intercambio cooperativo (intervenciones 72 y 73) iniciado por Anna con una intervención de control del proceso —"Posem d'altres números a veure si ens dóna igual"—, encuentra la colaboración de Rosa, que propone los números concretos.

Del comportamiento de las alumnas en este episodio hemos de destacar que, a pesar de que ambas resuelven el sistema que han planteado, notamos en Anna una actitud más reflexiva en cuanto al control del desarrollo del proceso —no olvidemos que de ella parte la idea de resolverlo con "otros números" y de confirmar la igualdad de los segmentos CB y CI (intervención 78)—, y en Rosa, una actuación más directamente relacionada con la consecución inmediata del objetivo intermedio que se han planteado.

F) Episodio de lectura

Con la obtención del resultado correspondiente al primer apartado del problema, Rosa (intervención 81') vuelve a realizar una lectura del enunciado con la intención de empezar la resolución del apartado *b*. Igual que al principio, la lectura genera la representación en paralelo de dos nuevas figuras. Rosa reproduce la figura del enunciado, mientras que Anna representa los dos cuadrados por separado como había hecho en la intervención 10.

G) Episodio de ejecución/revisión (del apartado *b*)

El trabajo en paralelo, iniciado en el episodio anterior, acaba (intervención 85) cuando Rosa trata de desarrollar el mismo proceso de ejecución que han realizado en el apartado *a*. Comienza, de esta forma, el episodio de ejecución/revisión, que abarca las intervenciones comprendidas entre la 85 y la 99.

Podemos considerar que hay un plan implícito que consiste en identificar las incógnitas CB y AB y buscar las relaciones entre ellas para plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La ejecución de dicho plan se inicia cuando Rosa propone, sin motivo aparente, adoptar los valores 2 y 18 como representativos de la razón 1 a 9. Se vuelve a producir un hecho que no acertamos a interpretar de momento: ¿Por qué eligen los números 2 y 18 y no el 1 y 9? Una elección similar tiene lugar en la resolución del primer apartado del problema. Fue allí donde Anna propuso 4 y 16 como representación de la razón 1 a 4 y es ahora Rosa la que lo hace. El análisis de la elección de las medidas de los lados que las alumnas harán en la resolución del tercer apartado del problema nos permitirá interpretar la forma de pensar que subyace a tales elecciones.

La ejecución la hace Rosa (intervención 87) teniendo como observadora de lujo a su compañera, que aprovecha esta posición para introducir dos reflexiones que inciden en el resto del episodio: la primera, por medio de una pregunta (intervención 88) —"Quants quadrats sortiran aquí dins?"—, y la segunda, intervención 94, cuando compara el resultado obtenido por Rosa con el del apartado anterior, provocando que ésta revise la resolución del sistema que acaba de hacer.

La pregunta que Anna hace sobre los cuadrados que cabrán dentro vuelve a introducir un elemento de control clave en este proceso que no se había considerado desde la intervención 17. En aquella ocasión, Rosa respondía de forma correcta, pero su respuesta fue obviada; ahora, en cambio, no sabe aclarar la demanda de Anna, confundiendo la razón de las áreas de los cuadrados con la de sus lados (intervención 91). La respuesta de Rosa nos confirma que sus estructuras mentales se han adaptado al error que se está produciendo, es decir, ha asumido que la relación entre los lados es de 1 a 9, "perquè dintre ha d'haver 9" (se sobreentiende que dentro del cuadrado grande caben 9 pequeños).

Interpretamos que se da esa situación tan curiosa porque Rosa, en la intervención 17, no reflexiona lo suficiente como para relacionar explícitamente la variación del área de un cuadrado con la de sus lados.

Es importante resaltar la actuación de las alumnas en este episodio por lo que se refiere a los papeles comunicativos que desempeñan. Rosa realiza la parte mecánica (Figura 8.2.41), planteando el sistema, de forma similar a como lo habían hecho anteriormente, y resolviéndolo al mismo tiempo que trata de responder (intervenciones 89 y 91) a algunas preguntas que hace Anna. Mientras tanto, Anna, desde la perspectiva que supone la observación de la realización de cálculos por parte de Rosa, introduce dos elementos de control (analizados en el párrafo anterior) que, aunque no afectan al desarrollo del proceso porque la reflexión que se produce sobre ellos no es profunda, ponen de manifiesto un modelo de actuación que puede afectar positivamente a la evolución de la resolución.

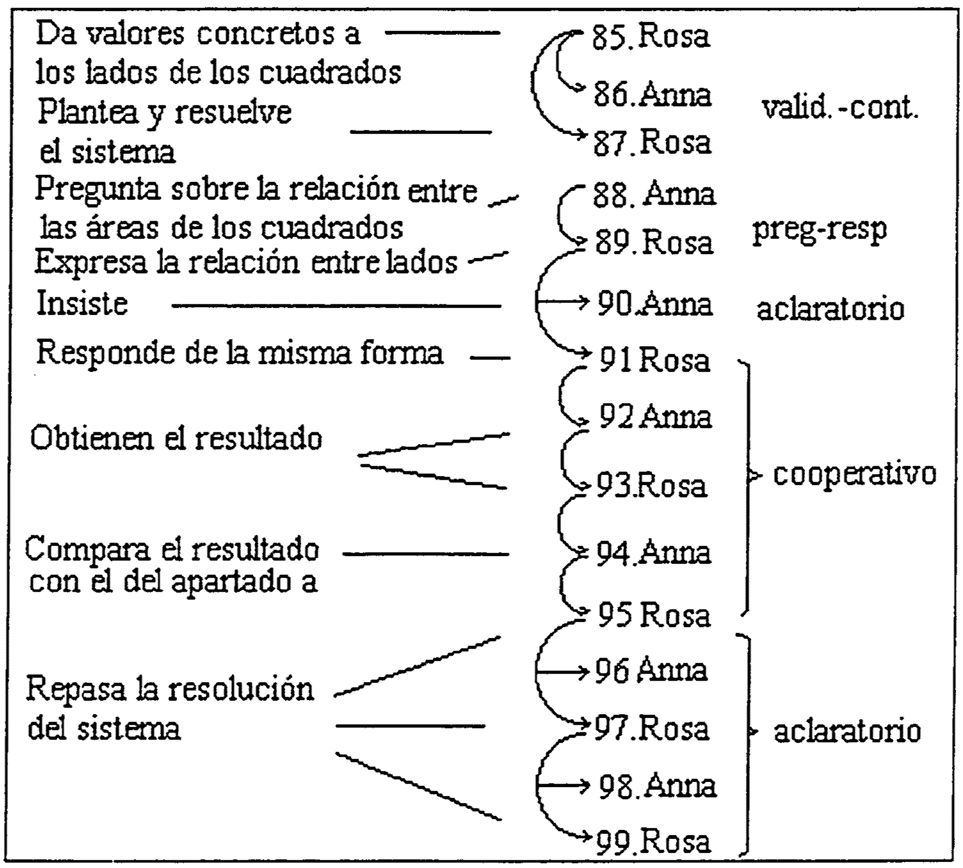


Figura 8.2.41

Ese modelo de actuación, al que llamamos "complementariedad de funciones" (Capítulo 10), consiste en que una de las alumnas realiza una función determinada mientras la otra observa y, al mismo tiempo, hace preguntas o relaciona las informaciones introducidas hasta ese momento.

H) Episodio de ejecución (del apartado *c*)

En el resto del protocolo (intervenciones 99 a 122), las alumnas tratan de encontrar una solución para el tercer apartado del enunciado. La ejecución de un plan implícito, como en los episodios anteriores, dura hasta el final del proceso de resolución y se complementa con una breve evaluación local (intervención 108 a 111), que permite la rectificación de un error, y con una brevísima y curiosa verificación final a partir de la intervención 123.

Las alumnas se encuentran ahora ante el reto de generalizar el proceso al caso en que la razón de las áreas sea "1 a n". Rosa empieza asignando al lado del cuadrado pequeño el valor n (intervención 101).

Después de algunas dudas y de expresar lo que quieren conseguir —"Hem de fer que en el quadrat gran càpiguen n petits" (intervención 99') o "és com si busquéssim una fórmula" (intervención 102)—, Rosa se atreve a justificar, de alguna forma (intervención 105), la asignación de n^2 que hace al lado del cuadrado grande. Esta justificación responde a la pregunta que dejábamos planteada en el análisis del episodio anterior. Rosa da un argumento parecido al siguiente: si la razón era de 1 a 9 en el apartado anterior, y el lado pequeño es 2, el del grande será 18 (2 por 9); si ahora el lado del cuadrado pequeño es n, como la razón ha de ser 1 a n, el lado del cuadrado grande será n^2 (n por n).

Con este razonamiento Rosa vuelve a caer en el mismo error —arrastrado a lo largo de todo el proceso— de confundir la razón entre las áreas de los cuadrados con la razón entre sus lados, pero no podemos negar que hay una coherencia en su forma de pensar y en el proceso de generalización que sigue.

El trabajo en paralelo en el resto del episodio, que tiene su origen en el planteamiento y resolución del sistema de la intervención 106, es interrumpido en dos ocasiones: la primera (intervención 108), en mitad de la resolución del sistema, donde Anna, fijándose en lo que hace Rosa, consigue que ésta rectifique un error que había cometido, y la segunda (intervención 115), cuando Rosa, perdida en los cálculos que está haciendo, se fija en los que hace Anna y da lugar a un desacuerdo con motivo de una simplificación en la expresión $n^2 - \frac{n^2+n}{2}$, en la que Rosa quiere simplificar las dos n^2.

En un trabajo en colaboración, los desacuerdos siempre acaban en consenso entre los interlocutores y suelen ser, además, diálogos en los que se producen oportunidades de aprendizaje por parte de alguno de los alumnos. En este caso, las deficiencias de Rosa en la utilización de mecanismos algebraicos se han evidenciado, y podemos asegurar que ha tenido la oportunidad de aprender algo sobre la simplificación en fracciones algebraicas. En concreto, que la simplificación de n^2 en la expresión $n^2 - \frac{n^2+n}{2}$, simplemente tachándolas, no es correcta.

Ambas alumnas llegan a obtener, por separado, el resultado $\frac{CB}{AB} = \frac{n^2+n}{n^2-n}$, que consideran correcto.

En la primera parte del episodio (intervenciones 99' a 106), Anna asume el papel de validar las intervenciones de Rosa (Figura 8.2.42), que a su vez desempeña el papel de ir trasladando la interpretación de las condiciones del problema al caso de que la razón entre las áreas sea de 1/n, llegando, incluso, a explicitar (intervención 107) la forma de asignar los valores a los lados de los cuadrados.

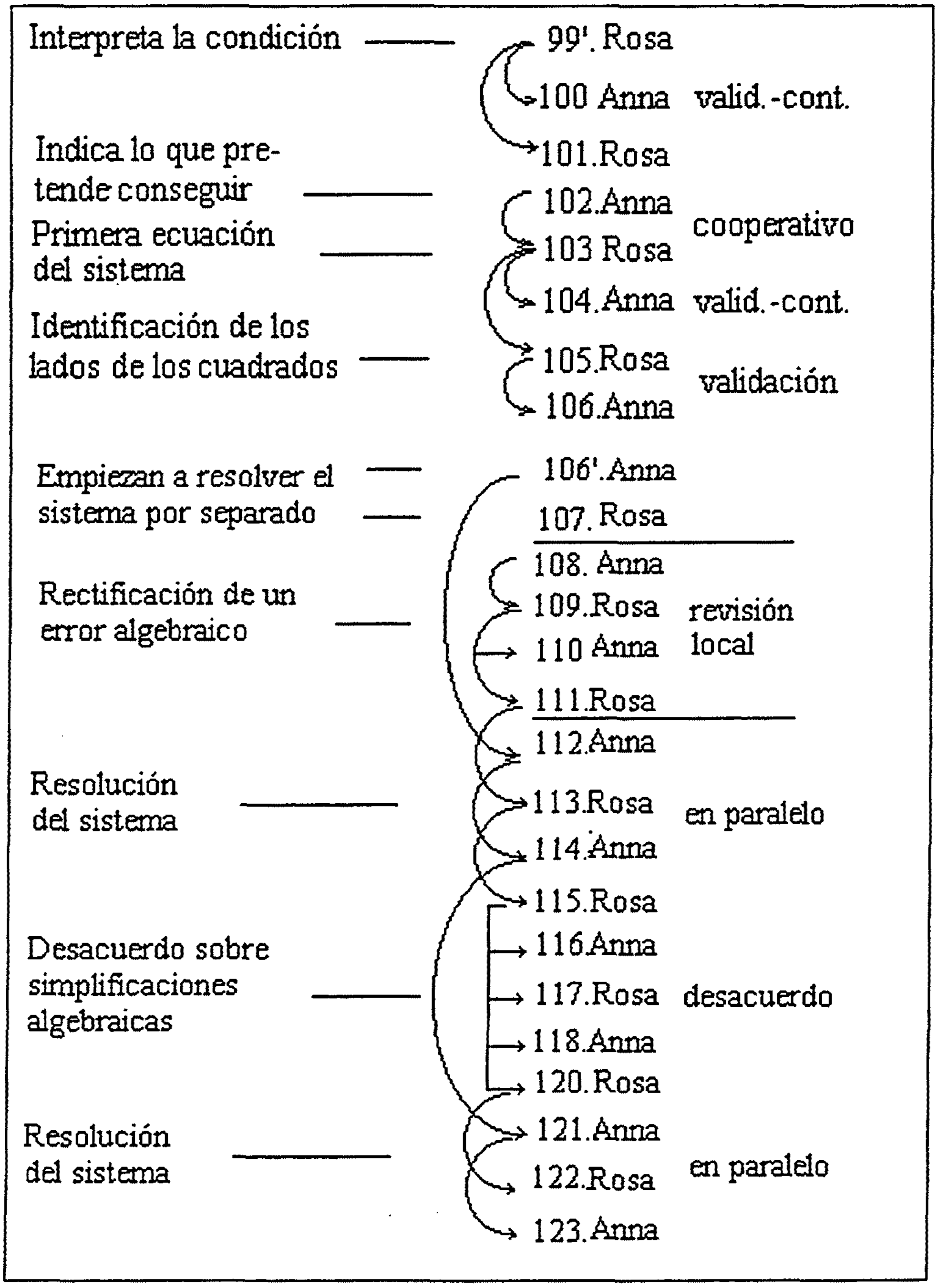


Figura 8.2.42

En la segunda parte del episodio (intervenciones 106 a 122), como se observa en el esquema gráfico de la Figura 8.2.42, la actuación de las alumnas adquiere la forma de trabajo en paralelo, pero con tomas de contacto frecuentes, dos en este caso, en las que ellas confrontan los resultados del proceso que siguen.

Ambas tomas de contacto no tienen el mismo origen, pues mientras la primera es un inciso de Anna para comprobar si va por buen camino, en la segunda, Rosa acude a Anna porque se ha atascado y parece no saber seguir. Ambos incisos producen las correspondientes rectificaciones en la ejecución que desarrolla Rosa.

I) Episodio de verificación

Rosa hace una comprobación, bastante curiosa, del resultado que han ambas han obtenido ($\frac{AB}{BC}=\frac{n^2+n}{n^2-n}$), pues sustituye la n por 2 y la n^2 por 18, obteniendo, evidentemente, el mismo resultado que en el apartado *b* del problema.

La comprobación del resultado es bastante pobre si consideramos el error que han arrastrado a lo largo de todo el proceso. La inhibición de Anna en este episodio, validando simplemente lo que hace Rosa, contribuye a esa deficiencia.

8.2.4.3. *Características generales del proceso de resolución*

a) Papeles comunicativos de las alumnas

Una visión general del protocolo nos permite observar tanto la alta proporción de intercambios cooperativos, 18 de 52 —Tablas 8.2.7 y 8.2.8— (23 de dos intervenciones y 29 de tres), como el componente importante de trabajo en paralelo que se produce, pues 20 de las 129 intervenciones son aisladas, lo que representa aproximadamente 9 minutos (incluidas las pausas) del total de 24 minutos y medio que dura la resolución.

	COOPERATIVO	VALIDACIÓN	PREGUNTA-RESPUESTA	TOTAL
Anna-Rosa	10(6)*	2	2(2)	14(8)
Rosa-Anna	8(5)	1	0	9(5)
TOTAL	18(11)	3	2(2)	23(13)

*** Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.**

Tabla 8.2.7. Intercambios de dos intervenciones

Si a los 11 intercambios cooperativos que producen aportaciones novedosas en el contexto global del proceso, unimos los 8 intercambios progresivos de tres intervenciones de la misma naturaleza, nos da una proporción alta —19 de 52— de intercambios en los que se producen aportaciones nuevas, lo que nos indica que estamos ante un proceso bastante dinámico, si no tenemos en cuenta las largas pausas que se producen, sobre todo en los dos primeros episodios, y el trabajo en paralelo que desarrollan las alumnas, como hemos indicado en el párrafo anterior.

	VALIDACIÓN-CONTINUACIÓN		INTERRUPCIÓN		ACLARATORIO		TOTAL	
	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.	PROG.	REPET.
Rosa-Anna-Rosa	5(3)*	5	0	0	5(3)	5	10(6)	10
Anna-Rosa-Anna	4(1)	3	0	0	1(1)	1	5(2)	4
TOTAL	9(4)	8	0	0	6(4)	6	15(8)	14

*Entre paréntesis indicamos los intercambios que aportan información nueva en el contexto global del proceso de resolución.

Tabla 8.2.8. Intercambios de tres intervenciones

Observamos un reparto bastante equitativo entre ambas alumnas en cuanto a intercambios cooperativos y del tipo validación-continuación, pero donde notamos una diferencia significativa es en la realización de preguntas y demandas de explicaciones por parte de Anna. En 10 intercambios aclaratorios y en 2 del tipo pregunta-respuesta, es Anna la que interviene haciendo algún tipo de pregunta (o demanda de aclaración).

Para ver la incidencia de dichas preguntas en el proceso, analizamos la disposición de dichos intercambios y el tipo de diálogo que tiene lugar después de las preguntas.

Las dos preguntas de Anna (Tabla 8.2.7) son intervenciones problematizadas y, por tanto, generadoras de diálogos en torno a su contenido, sobre todo la 88 —"Quants quadrats sortiran aquí dins?"—, que unida a un intercambio aclaratorio —"9?, o més de 9?" (intervención 90 de Anna)— y a la comparación del resultado del segundo apartado con el primero —"Més petit que abans" (intervención 94 de Anna)—, son los orígenes de un diálogo progresivo en el que Rosa contribuye respondiendo a las preguntas y aportando elementos nuevos, pero Anna es la que dirige el proceso con sus preguntas y sus intervenciones de gestión.

El resto de las preguntas de Anna son demandas de aclaración o de justificaciones de intervenciones producidas por Rosa que contribuyen a estimular el diálogo, como en las intervenciones 18, 24, 30, 44, 50, etc.

Dos de los tres desacuerdos que se producen son incisos en el trabajo en paralelo y uno de ellos se produce como consecuencia de una sugerencia en forma de pregunta de Anna (intervención 108).

b) Esquema de la sucesión de episodios

Por primera vez en los cuatro procesos de resolución las alumnas buscan un enfoque algebraico coincidente con la identificación simbólica de los segmentos AB y BC y la búsqueda de relaciones entre ellos. La deficiencia que se produce en dicha búsqueda es debida a que las alumnas utilizan como relación entre los lados de dos cuadrados la de sus áreas.

El enfoque que ponen en práctica está a medio camino entre lo que sería una aproximación puramente inductiva, lo que supondría ir asignando valores a los segmentos

AB y BC hasta obtener las relaciones entre las áreas, es decir, partiendo del objetivo hasta comprobar que se cumplen las condiciones, y lo que sería una aproximación puramente deductiva, que supondría el tratamiento simbólico tanto de los segmentos AB y BC como de la razón "1 a n" de las áreas de los cuadrados, para después sustituir la n por 4 o por 9.

Hay puntos clave en el proceso de resolución, casi todos ellos relacionados con las intervenciones directivas de Anna no sólo en forma de preguntas, como hemos indicado en el apartado anterior, sino con la introducción de aspectos relacionados, sobre todo, con la utilización de las razones de las áreas. Nos referimos en concreto a las intervenciones siguientes:

- la 32, en la que Anna desvía la atención de Rosa que acaba de expresar las áreas de los cuadrados en función de AB y BC y pretende relacionarlas según indica el enunciado;
- la 36, en la que Anna insiste en su empeño de utilizar las razones antes mencionadas;
- la 42, en la que Anna propone la utilización de números para relacionar AB y BC;
- la 72 —"Posem d'altres números a veure si ens dóna igual"— y a la 94 —"Més petit que abans"—, que provocan evaluaciones locales.

A pesar de que en determinados momentos Rosa interpreta correctamente el significado de la razón entre las áreas, Anna llega a asociar la figura del enunciado con la razón 1 a 4 —como se manifiesta en la intervención 46, "si ho fem a partir d'aquí [indica la Figura del enunciado] sempre fem aquesta [indica 1/4]"—, siendo incapaz de abstraer la figura y asociarla a cualquier razón.

En el esquema gráfico que sigue ponemos de manifiesto tanto la existencia de un plan implícito, relacionado con la identificación de los segmentos AB y BC y la búsqueda de relaciones entre ellos, como el hecho de que en la resolución de los sucesivos apartados del enunciado se van aprovechando los logros obtenidos en los anteriores, reduciendo la sucesión de los episodios necesarios para obtener la solución hasta sólo el de ejecución en el tercer apartado.

ESQUEMA GRÁFICO DE LA SUCESIÓN DE EPISODIOS

ROSA	EPISODIOS	ANNA
	LECTURA (1-9)	
1' y 3. Representa la figura del enunciado.	Trabajan en paralelo mientras copian la figura del enunciado.	2 y 4. Representa la figura del enunciado.
5. Anota el objetivo.	Al final del trabajo en paralelo interpretan la razón 1/4 mediante un intercambio cooperativo.	

	EXPLORACIÓN (10-27)	
	Hay un inicio del episodio de trabajo en paralelo.	10. Representa los cuadrados del gráfico separados.
17. Interpreta correctamente el enunciado rectificando la interpretación de Anna.	No hay continuación del diálogo por parte de Anna como consecuencia de la aportación de Rosa en intervención 17. No queda registrada la corrección	12. Introduce una medida concreta para los lados de los cuadrados.
25. Encuentra la relación del lado IJ del cuadrado IJKL con AB y BC. IJ=BC-AB.	Esta aportación origina una búsqueda que tiene la finalidad de relacionar los segmentos AB y BC con los lados de los cuadrados. Hay un plan implícito desde el momento en que ambas alumnas identifican AB y BC como incógnitas y tratan de relacionarlas.	

↓ T_1 (27-29)

	ANÁLISIS (29'-49)	
29' y 31. Expresa las áreas de los cuadrados en función de AB y BC.		32. "... no estem mirant res d'això" [1/4, 1/9, 1/n].
35. Busca relaciones entre la razón CB/AB y el lado del cuadrado IJKL.	Las sucesivas intervenciones de Anna pidiendo explicación del porqué no utilizan las razones 1/4, 1/9 y 1/n, acaban cortando el proceso creativo de Rosa, que termina explicando la interpretación de dichas fracciones.	36. "... mai mirem això" [1/4, 1/9, 1/n].
37 y 39. Justifica la utilización de 1/4.		40. " Fem-lo amb números".
43. Insiste en la razón CB/AB.		
45. Acaba explicando el significado de 1/n.		

T_2 (50-54)

EJECUCIÓN
(54'-71)

El planteamiento del sistema culmina la búsqueda de relaciones AB y BC.

La resolución del sistema les permite obtener el resultado.

55. Pide explicación de la segunda ecuación.

59. Inicia el desacuerdo.

54'. Escribe el sistema
CB-AB=4
CB+AB=16 y pide validación.

VERIFICACIÓN
(72-81)

75. Empieza a resolver el sistema.

72. "Posem d'altres números a veure si ens dóna igual"

76. "Com saps si aquest [CB] és igual que aquest [CI]?"

LECTURA
(81'-84)

Se inicia la resolución del apartado *b* con la lectura y posterior representación, en paralelo, de la figura del enunciado.

EJECUCIÓN/REVISIÓN
(85-89)

La introducción de los valores de los lados por parte de Rosa y su respuesta a la pregunta de

85 y 87. Introduce los valores de los lados (2 y 18) y escribe el sistema.

88. "Quants quadrats sortiran

91. Respuesta: “1 a 9, pues dintre ha d’haver 9, com 18 a 2...” Acaba la resolución del sistema.	Anna confirman que Rosa ha asumido, inconscientemente, el error que se está produciendo. La composición que introduce Anna obliga a Rosa a repasar los cálculos.	aquí dins?” 94. “ Més petit que abans”.
103 y 105. Asigna los valores n y n^2 a los lados de los cuadrados. 107. Empieza a resolver el sistema. 111. Rectifica $2n^2$ y pone n^2+n. 115. No sabe seguir y mira lo que hace Anna.	EJECUCIÓN (99’-122) Hay dos interrupciones al trabajo en paralelo que se desarrolla cuando resuelven el sistema. La primera es provocada por Anna, que rectifica un error de despiste de Rosa. La segunda, provocada por Rosa, produce la rectificación de un error después de un intercambio de desacuerdo.	106’. Empieza a resolver el sistema. 116 y 118. Se opone a la simplificación que pretende hacer Rosa.
123. “A veure, si féssim aquella fórmula, com quedaria?”	VERIFICACIÓN (123-125)	

8.3. Análisis de los procesos de resolución de Laia y Jaume

8.3.1. Actuación de Laia y Jaume en la resolución del problema del paralelogramo

8.3.1.1. *Transcripción del proceso de resolución*

1. Laia: [Lectura].

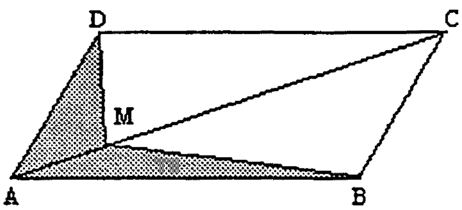


Figura 8.3.1

2. Jaume: [Empieza a representar la Figura 8.3.2].
3. Laia: [Vuelve a leer en silencio y observa cómo Jaume representa la Figura 8.3.2]. *És base per altura, l'àrea* [del paralelogramo].
4. Jaume: [Acaba la representación, escribe: A = b.h, y comienza a leer el enunciado en silencio].
5. Laia: *I ja està, sense dividir, no?* [empieza a representar la Figura 8.3.3].

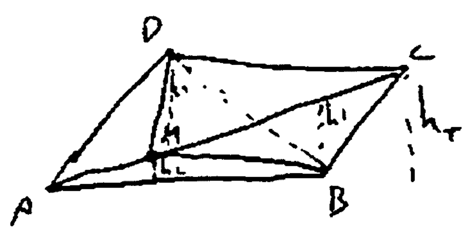


Figura 8.3.2

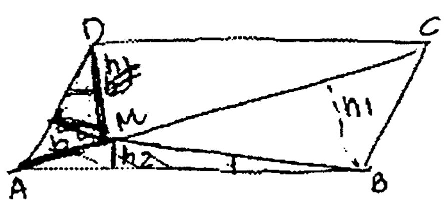


Figura 8.3.3

6. Jaume: [Mientras tanto Jaume vuelve a leer el enunciado y observa cómo Laia representa la Figura 8.3.3]. *La suma de les dues altures, la d'aquest* [AMD] *i aquest* [ABM] *és la del paral.lelogram total, no?* [señala con el dedo las alturas de los dos triángulos rayados sobre los lados AM y AB, respectivamente, y la del paralelogramo].
7. Laia: *Ah sí!, això* [indica la altura del paralelogramo desde el vértice C], *això* [indica la altura del paralelogramo desde el vértice B].
8. Jaume: *L'altura és això* [insiste] *i la d'aquest i la d'aquest* [vuelve a indicar las alturas de los triángulos ADM y AMB, sobre las bases AM y AB, respectivamente].
9. Laia: *Sí,* [escribe: $h = h_1 + h_2$ y representa las h_1 y h_2 en su figura]. *Això és l'altura, no, és que això no és l'altura* [indica DM y se refiere a la altura de ADM], *ah!, és l'altura d'aquest, del que queda blanc* [DMC] /
10. Jaume: [Escribe también la relación $h = h_1 + h_2$]. *A veure, a veure, l'altura d'aquest* [ADM] *és recta, així, cap a baix* [señala con los dedos desde D hasta el interior del segmento AM].

11. Laia: *Ah!, de tot aquest?* [ACD].
12. Jaume: *No, dels dos petits* [rayados], *és igual a l'altura...*
13. Laia: *== Però l'altura d'aquest petit* [AMD] *és cap aquí* [indica la altura desde el vértice M al lado AD], *no?*
14. Jaume: *Ah!, depèn de la base que agafis, si agafes aquesta base* [AM] *va a parar, més o menys, aquí* [desde el vértice D al lado AM], *i després aquí* [desde M al lado AB], *no?*
15. Laia: *Sí* [cogiendo el folio], *però vols dir que necessitaries això?* [poniendo el bolígrafo en la posición de la altura del paralelogramo] /
16. Jaume: *La base aquesta* [AM], *suposant que sigui la base, la tenen igual / amb això ja ho podem fer, les dues incògnites són les altures* [indica la igualdad $h = h_1 + h_2$] *aïllem d'aquí la **h1**, per exemple, i després amb la base que és la mateixa...*
17. Laia: *Segur que és així?*
18. Jaume: *No sé, no sé. Provem-ho!*
19. Laia: *Provem-ho!*
20. Jaume: *L' àrea d'ABM és la base, suposem que sigui aquesta...* [AM].
21. Laia: *La base aquesta, però llavors l'altura....*
22. Jaume: *Quina és l'altura llavors? Com seria l'altura? Cap aquí* [indica el segmento AM en la Figura 8.3.1].
23. Laia: *És aquesta d'aquí* [vértice B], *cap aquí* [sigue el segmento BA], *ah no!, és aquesta* [indica desde B perpendicularmente a MC].
24. Jaume: *Sí, sí, si agafem el triangle aquest de baix* [ABM] *i la base és aquesta* [AM], *l'altura quina és?* [dándole la vuelta al folio y mirándoselo con la base horizontal].
25. Laia: *És aquesta* [indica la de antes].
26. Jaume: *D'aquest triangle?* [indica ABM muy extrañado].
27. Laia: *Sí, vols dir que no?, ja, però baixa cap aquí* [segmento MC] *perquè ha d'anar perpendicular, bueno ha d'anar cap a la base, és igual que aquesta d'aquí!* [señala las alturas de los triángulos rayados sobre el lado AM en la figura del enunciado].
28. Jaume: *Ah!, aquesta d'aquí és igual que aquesta d'aquí, vale!*
29. Laia: *Vale!, vale!, doncs encara millor, fas aquest dibuix d'aquí* [representa la altura de ABM, Figura 8.3.3 y la denomina h_1], *això, h_1* [escribe h_2 sobre la altura del triángulo ADM].
30. Jaume: *La base ...*
31. Laia: *== Però és que això* [se refiere a la altura h2] *és com si fos un costat, aquest* [señala DM].
32. Jaume: *Sí, l'altura vindria així* [la separa del lado DM].
33. Laia: *Ah no!, vale!, vale!, ja està.*
33'. Laia: *Àrea d'ABM* [escribe] *és base, de base posem F ...*
34. Jaume: *Base **b**, que és la mateixa, per l'altura d'aquest, que és...*
35. Laia: *== h_1 partit per 2. De la DMA, és la base* [escribe en su folio].
36. Jaume: *La base és igual, per l'altura* [va escribiendo: Área ABM = $\frac{b.h_1}{2}$; Área DMA = $\frac{b.h_1}{2}$; las dos áreas son iguales].
37. Laia: *== Per h_1 que és la mateixa, eh?* [extrañada], *resulta que són iguals* [sorprendida].

38. Jaume: *A veure* [coge el folio y se lo mira en diferentes posiciones].
39. Laia: *Base per altura, és que això / és que és igual, si que són iguals, o no?*
40. Jaume: *És que l'altura d'aquest...* [ADM], *quina és?*
41. Laia: *És que agafant aquesta base* [AM], *l'altura ja és això* [indica el lado DM], *bueno.*
42. Jaume: = *Una mica més a l'esquerra, no?* [quiere decir sobre MC] /
43. Laia: *No sé, no, és que fa com...* [indicando el lado DM], *és que això deu ser la línia* [DM], *no, de fet no* [coloca las manos indicando las alturas de ABM y ADM sobre AM], *això ha de ser igual, més o menys, no?*
44. Jaume: *L'altura d'aquest* [ABM, la representa sobre MC] *és igual que això* [altura] *d'aquest* [AMD, señala DM], *així doncs, haurien de ser iguals /* [sigue girando el folio]. *Potser ho he dit malament això de què l'altura total* [la del paralelogramo] *és l'altura d'aquest més la d'aquest* [triángulos rayados].
45. Laia: *Com?, com?*
46. Jaume: *Això d'aquí* [señala la igualdad $h = h_1 + h_2$], *potser ho he dit malament...*
47. Laia: *Però és que això no ho hem utilizat per a res perquè no hem calculat de cap manera l'àrea, l'àrea gran* [del paralelogramo], *això tant és.*
48. Jaume: *Ja, ja, però ara per buscar l'altura d'aquest* [AMD], *com ho fem?*
49. Laia: *Ah!, això sí, bueno, és que aquest és el problema, que no... vols dir?, si t'hi fixes no ens afecta.*
50. Jaume: *Sí, bueno, i què?*
51. Laia: *Com acaba...* [poniendo el bolígrafo en D y siguiendo la h_1 hasta DM], *on comença, comença bé, saps?* [tratan de identificar la altura del triángulo AMD sobre el lado AM].
52. Jaume: *Sí, la primera línia, aquesta* [se refiere a DM].
53. Laia: =*Sí, la primera línia /*
54. Jaume: *Ah!, pues sí, si l'altura és igual al costat és que és rectangle, el triangle, no?*
55. Laia: *No, no és rectangle* [girando el folio], *o sí?*
56. Jaume: *Ho ha de ser si un dels seus costats és l'altura.*
57. Laia: *Sí, sí, no, no és rectangle* [dudando al mirar la figura del enunciado] *perquè si això* [DM] *continua recte, encara menys, si aquesta és així i fa així* [pone, con las manos, la posición de las rectas AC y DM], *aquest és més gran* [indica el ángulo DMC] <pausa(10)>
57'. Laia: *Si M és un punt qualsevol...* [lee el enunciado].
58. Jaume: *Si M és un punt qualsevol...* [lee también, en silencio y por separado de Laia].
59. Laia: *Busca la relació entre les àrees* [hace un triángulo como el MCD], *no, sembla que no són iguals / si que són iguals.*
60. Jaume: [Sigue mirando el enunciado]. *Les àrees, de què?*
61. Laia: *D'aquests* [indica los triángulos rayados]. *Si això estigués bé, que no ho sé* [se refiere a la expresión de las áreas que han puesto antes], *diu que les àrees són iguals.*
62. Jaume: *Ja, però no pot ser, l'altura la tenen igual, i si la base, una és més gran que l'altra.*
63. Laia: = *No, és que la base és la mateixa, la hem agafat* [indica el lado AM].
64. Jaume: = *Tenen la mateixa base i la mateixa altura.*
65. Laia: *La mateixa altura per la base.*
66. Jaume: *Sí, o sigui, la mateixa àrea /*

67. Laia: *A veure, aquest trosset* [indica la parte alta del triángulo AMD] *és igual a aquest* [parte derecha del triángulo ABM] / *Una cosa.., sí, ah no!* / *aquest angle és recte* [indica el ángulo AMD], *és que si és recte, no?, és que si això és recte, o sigui...*
68. Jaume: == *Sí, si això és recte, és clar.*
69. Laia: *Aquesta ratlla* [DM] *és recta* [quiere decir que es perpendicular] <pausa(8)>
69'. Laia: *A veure* [vuelve a leer el enunciado].
70. Jaume: [Lee también].
71. Laia: *És clar, és que és un punt qualsevol.*
72. Jaume: *Sí, és així, anem estirant cap aquí* [indica el desplazamiento de M sobre MC] *i la base sempre és la mateixa.*
73. Laia: *La base és la mateixa i a més a més l'altura també és la mateixa* [indicando desde B hasta MC], *l'altura sempre és el mateix, clar, són iguals, és que si agafem com a base això...* [AM].
74. Jaume: *És clar, són iguals, si seguim estirant, anirem arribant cap aquí* [C] *i els costats són iguals* [se refiere a los dos triángulos].
75. Laia: *Si agafes això...* [AM].
76. Jaume: *Imagina't que agafes aquest punt* [M], *el vas estirant cap aquí* [C], *és que..., sí, ho anem omplint tot, sí, jo diria que si fem això* [escribiendo], *l'àrea, que hem dit A, és base per h_1 partit per 2 i les dues àrees són iguals.*

[Duración total: 11m y 31s].

8.3.1.2. *Microanálisis del proceso de resolución*

A) Episodio de lectura

El episodio de lectura abarca las interacciones 1 a 5. Durante la casi totalidad del tiempo que dura —un minuto aproximadamente—, los alumnos trabajan en paralelo, pero lo hacen de forma alternativa, es decir, mientras Jaume representa la figura del enunciado, Laia lee y observa en silencio, y, al acabar, Laia comienza la representación y Jaume es el que lee y observa. Ambas observaciones, inicialmente silenciosas, finalizan con sendas aportaciones: la primera (intervención 3), en la que Laia interrumpe el trabajo en paralelo para introducir la fórmula del área del paralelogramo; y la segunda (intervención 6), en la que Jaume relaciona las alturas de los triángulos rayados del enunciado con la del paralelogramo.

Se produce, pues, un modelo interactivo que podríamos considerar como alternativo o simétrico y que es fructífero porque introduce informaciones nuevas, la última de las cuales es el origen del diálogo exploratorio que sigue al episodio de lectura.

B) Episodio de exploración

La búsqueda de relaciones entre los elementos de la figura empieza con la propuesta de Jaume —intervención 6— sobre la igualdad entre la altura del paralelogramo y la suma de las alturas de los triángulos ADM y ABM sobre los lados AM y AB, respectivamente (Figura 8.3.1), y continúa con algunas intervenciones en las que los alumnos tratan sobre la identificación y reconocimiento de las alturas de los triángulos.

El diálogo que se desarrolla tiene como tema dos propuestas erróneas que hace Jaume: la ya referida de la intervención 6, sobre la que vuelve a insistir en la intervención 8; y la de las intervenciones 9, 10 y 14, en las que identifica incorrectamente la altura del triángulo ADM sobre el lado AM, confundiéndola con la mediana. Este es el error más frecuente que se produce en la representación de las alturas de un triángulo, según A. Gutiérrez y A. Jaime (1996). La confusión de Jaume entre altura y mediana es coherente con la respuesta que él da al ítem 2 de la prueba inicial, en la que una de las dos alturas que representa la confunde precisamente con la mediana.

Laia en ningún momento rectifica las aportaciones erróneas de Jaume y se limita sólo a hacer dos demandas de aclaración: con la primera —intervención 11—, pretende saber a qué triángulo se refiere Jaume en la intervención anterior, y en la segunda —intervención 15—, pregunta sobre la utilidad de la relación entre las alturas de los triángulos y la del paralelogramo. Esta pregunta provoca que Jaume exponga el plan que ha pensado, que analizamos en el episodio siguiente.

Los intercambios comunicativos de este episodio vienen marcados tanto por las propuestas de Jaume y su persistencia en ellas, como por la actitud de aceptación por parte de Laia, sólo modificada al final del episodio cuando pregunta sobre la utilidad de la relación propuesta en la intervención 6.

La interacción que se produce en este episodio (Figura 8.3.4) es una combinación de intercambios de los tipos validación-continuación, cooperativos y aclaratorios, en los que Jaume lleva la iniciativa porque, tras la aportación de la intervención 6, es el primero en tratar de identificar las alturas de los triángulos (intervenciones 8 y 10), mientras que Laia se incorpora a esa dinámica en la intervención 13, habiéndose limitado hasta ese momento a reconocer los triángulos a los que se refiere Jaume. La cooperación, cuando se produce, no profundiza en el reconocimiento de las alturas, más bien en la utilidad de la relación entre ellas.

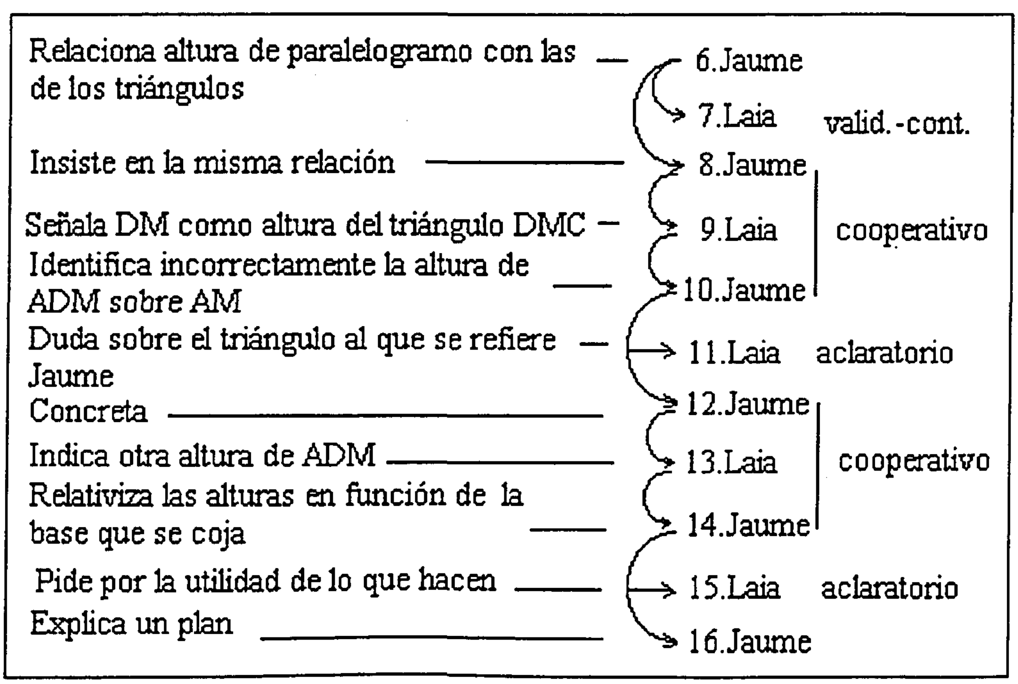


Figura 8.3.4

Además de los aspectos interactivos comentados en el párrafo anterior, en los que ponemos de manifiesto la poca insistencia en la profundización de las propuestas de Jaume, hemos de resaltar de este episodio la tendencia que marcan los alumnos hacia la puesta en práctica de un enfoque algebraico, ya que tratan de identificar desde el principio relaciones entre las alturas de los triángulos, lo que nos sugiere, como así se confirma en episodios posteriores, que utilizarán las fórmulas de las áreas de las figuras.

C) Episodio de planificación

En la intervención 16, Jaume propone un plan de acción que consiste en expresar las fórmulas de las áreas de los triángulos ABM y ADM (Figura 8.3.1) en función de la base común AM —que ellos identifican como b— y de las alturas —h_1 y h_2— sobre los lados AM y AB, respectivamente, para sustituir después una de dichas alturas, por ejemplo, la h_1, por la expresión que resulta de despejarla de la relación propuesta por Jaume en la intervención 6 ($h = h_1 + h_2$, siendo h la altura del paralelogramo).

La planificación que Jaume propone es consecuencia de la elección previa de un enfoque algebraico introducido implícitamente en el episodio anterior, que consiste en considerar las bases y las alturas con el propósito de aplicar las fórmulas de las áreas de los triángulos. El plan surge explícitamente cuando Laia presiona a Jaume sobre la utilidad tanto de la relación entre las alturas de los triángulos y del paralelogramo, como del reconocimiento de las alturas que hacen en el episodio de exploración.

Cuando Jaume propone la planificación hay un acuerdo explícito de ejecutarla (intervenciones 18 y 19), pero no se produce una reflexión sobre ella, en consecuencia no introducen ninguna modificación. Pensamos que con una simple reflexión hubieran podido detectar los dos errores sobre los que la planificación está construida: la igualdad $h = h_1 + h_2$, y el hecho de que h_2 no es la altura del triángulo ABM sobre la base común AM, sino sobre AB.

Estamos, pues, en una situación parecida a la del episodio anterior en el que resaltábamos la superficialidad de las propuestas de Jaume y la poca profundización en su análisis.

Jaume expresa la planificación mediante dos intercambios: uno aclaratorio, en el que Laia pregunta a Jaume si está seguro de su propuesta, y otro del tipo validación-continuación, en el que Jaume propone ejecutarlo con la intención de ver si les conduce a alguna parte.

D) Episodio de evaluación local

El episodio evaluación local abarca las intervenciones 20 a 33.

Los alumnos, que han iniciado cooperativamente la ejecución del plan propuesto por Jaume en las intervenciones 20 y 21, al llegar a la expresión de la altura en la fórmula del área del triángulo se encuentran con el problema de su identificación.

Las preguntas con las que Jaume inicia el episodio —"Quina és l'altura?", y "com seria l'altura?"— dan paso a un diálogo en el que se generan referencias explícitas al reconocimiento de las alturas de los triángulos, de ahí la calificación del episodio. El comienzo de la ejecución —intervenciones 20 y 21— ha provocado, por fin, lo que echábamos de menos en los dos episodios anteriores, es decir, una reflexión sobre las informaciones que se iban introduciendo.

En este episodio de evaluación local diferenciamos tres partes: la primera, entre las intervenciones 22 y 26, en la que los alumnos tratan de identificar la altura del triángulo ABM sobre el lado AM; la segunda, que abarca las intervenciones 27, 28 y 29, en la que Laia reconoce la igualdad de las alturas de los triángulos ABM y AMD sobre el lado AM; y la tercera, entre las intervenciones 30 y 33, en la que los alumnos tratan de reconocer la altura del triángulo ADM sobre el lado AM.

Las aportaciones realizadas por Laia en las dos primeras partes en que hemos dividido el episodio son fundamentales para la modificación del plan que los alumnos habían establecido previamente. En concreto, el reconocimiento de la altura del triángulo ABM sobre el lado AM conduce a los alumnos a considerar la base común —AM— de los triángulos rayados del enunciado y también las alturas sobre esa base. La identificación de la igualdad de las dos alturas, que Laia hace en la intervención 27, resuelve prácticamente el problema.

En cuanto a la identificación de la altura del triángulo ABM sobre el lado AM, podemos decir que las preguntas de Jaume surgen cuando Laia identifica correctamente dicha altura. Esas preguntas tienen su origen en la confusión entre altura y mediana que detectamos en Jaume tanto en el episodio anterior, en el que dirigía la altura del triángulo ADM hacia el interior del lado AM, como en el ítem 2 de la prueba inicial.

Es curioso observar cómo Laia, que representaba incorrectamente las alturas de un triángulo en la prueba inicial (Figura 8.3.5), pero que asociaba la idea de altura con la de perpendicularidad, ahora representa correctamente la altura del triángulo ADM sobre AM. Entendemos que entre las dos situaciones —la del triángulo que proponíamos en el ítem 2 de la prueba inicial y la del triángulo ADM— hay una diferencia significativa, en aquélla no incluimos la prolongación de los lados, en ésta aparece el lado AM prolongado hasta el vértice C del paralelogramo. Esa diferencia puede haber provocado la rectificación de Laia.

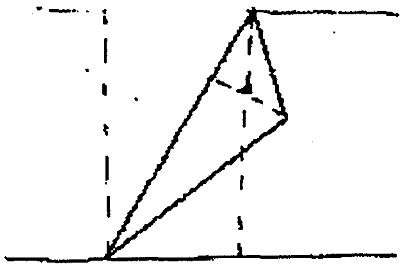


Figura 8.3.5

Se dan las circunstancias (apartado 2.4.3) para poder afirmar que a Jaume se le presenta una oportunidad de aprendizaje relacionada con la representación de las alturas de un triángulo. Esta oportunidad surge como consecuencia de las preguntas concretas que Jaume hace sobre este tema (intervenciones 22 y 24).

Por lo que se refiere a la aportación de Laia sobre la igualdad de las alturas de los triángulos ABM y ADM respecto al lado común AM (intervención 27), podemos decir que los alumnos aceptan sin ningún tipo de argumentación la igualdad de tales alturas —la apreciación visual juega un papel fundamental en dicha aceptación—, además, es una información que cambia por completo el proceso de resolución y, en particular, modifica sensiblemente la planificación que los alumnos habían propuesto, en el sentido de que no necesitan aplicar la relación errónea que habían encontrado entre las alturas de los triángulos y la del paralelogramo.

En la tercera parte del episodio —intervenciones 30 a 33—, el diálogo de los alumnos gira en torno a la similitud del lado DM del triángulo ADM con la altura correspondiente al lado AM.

En este episodio hay una sucesión de intercambios de los tipos aclaratorio, validación-continuación e interrupción (Figura 8.3.6). La interacción que se produce es consecuencia de que las aportaciones que hace Laia están en contradicción con las realizadas por Jaume en el episodio de exploración, lo que lleva a este alumno a hacer preguntas aclaratorias sobre el contenido de las intervenciones de su compañera. Así pues, el papel comunicativo de Jaume es, sobre todo, el de preguntar y en algún caso validar las aportaciones de Laia. De esa forma, está favoreciendo la construcción de un diálogo en el que Laia ha asumido el papel de introducir informaciones nuevas (intervenciones 23 y 27) y de justificarlas, debido a la necesidad que tiene de responder a las preguntas de Jaume.

Las justificaciones de Laia contribuyen en algunos casos a que el diálogo no sea repetitivo. Nos referimos, en concreto, a la intervención 23; a la 27, en la que por primera vez aparece la idea de perpendicularidad asociada a la de altura; a la 29, en la que Laia simboliza las alturas; y a la 31, en la que Laia —animada por la progresión que están consiguiendo— interrumpe la referencia de Jaume a la base de los triángulos para relacionar la altura del triángulo ADM con el lado DM.

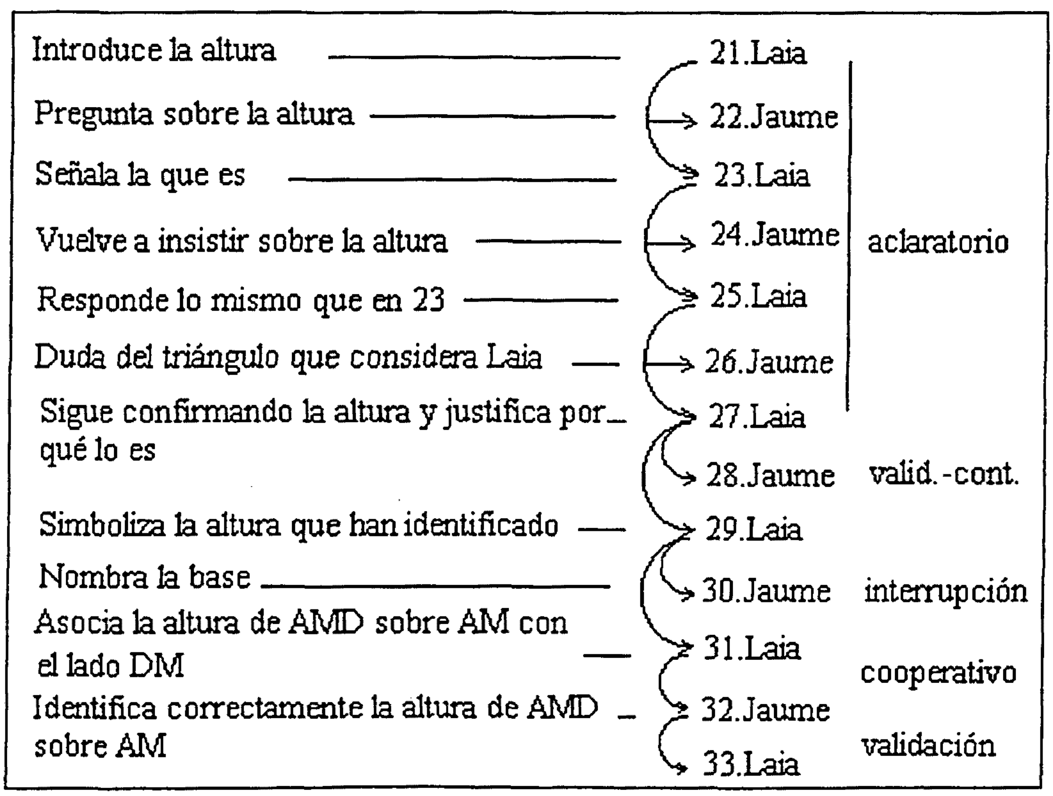


Figura 8.3.6