ANÁLISIS DE LOS PROCESOS COGNITIVOS Y DE LAS INTERACCIONES SOCIALES ENTRE ALUMNOS (16-17) EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE COMPARAN ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS. UN ESTUDIO DE CASOS

Tesis doctoral de Pedro Cobo Lozano
Dirigida por el Dr. Josep M. Fortuny

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals de la **Universitat Autònoma de Barcelona**

Enero de 1998

CAPÍTULO 9

EVOLUCIÓN DE CONOCIMIENTOS

> No podemos decir, sin más, que esto o aquello es verdad; lo que sí podemos decir es que, basándonos en los acontecimientos educativos observados, el tipo de datos reunidos y nuestras transformaciones de los datos, nuestras afirmaciones sobre conocimientos son válidas, (...)
>
> J. D. Novak y D. B. Gowin (1988)

9.1. Introducción

En este capítulo resaltamos y analizamos, de las respuestas de cada alumno a los ítems de la prueba final, aquéllas que supongan algún cambio en su estructura cognitiva, y tratamos de buscar las justificaciones de tales cambios en los procesos de resolución conjunta que hemos analizado en el Capítulo 8. Además, mostramos de forma gráfica los niveles de conocimiento comparativos de cada alumno según sus respuestas a los ítems de las pruebas inicial y final.

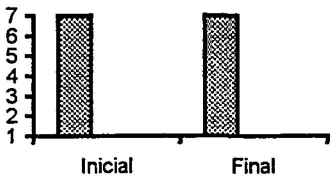
9.2. Análisis de las respuestas de Rosa y Anna a la prueba final y evolución de sus conocimientos

9.2.1. Diferencias entre las respuestas de Rosa a las pruebas inicial y final

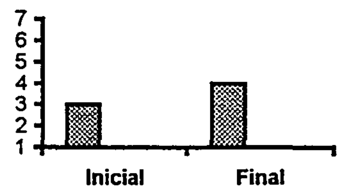
En la Tabla 9.2.1 comparamos los niveles de conocimiento de Rosa respecto a los conceptos y técnicas que evaluamos en las pruebas inicial y final (ítems 1 a 7). En los párrafos que siguen a esta tabla explicamos brevemente las diferencias más significativas que hemos observado en las respuestas de Rosa a ambas pruebas.

Tabla 9.2.1. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Rosa según sus respuestas a las pruebas inicial y final

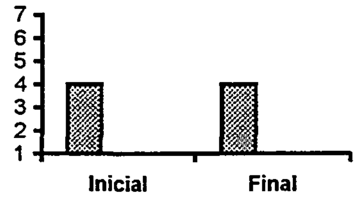
"Congruencia"(Ítem-1)



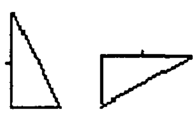
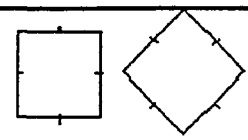
"Equivalencia" (ítem-1)



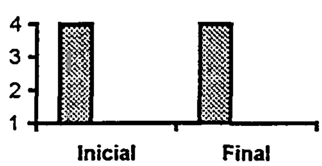
"Semejanza" (ítem-1)



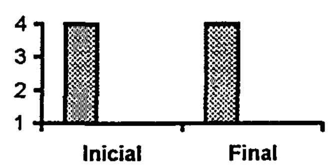
"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

		
Inicial	congr./equiv.	congr./equiv.
Final	congr./equiv.	congr./equiv.

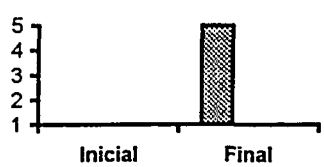
"Número Alturas" (ítem-2)



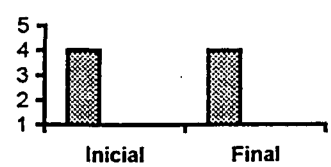
"Representación Alturas" (ítem-2)



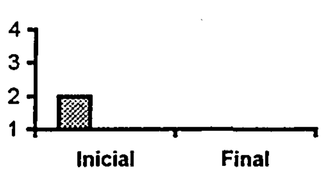
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



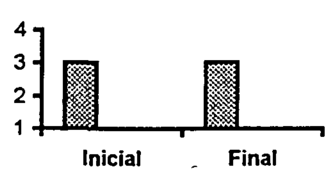
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)

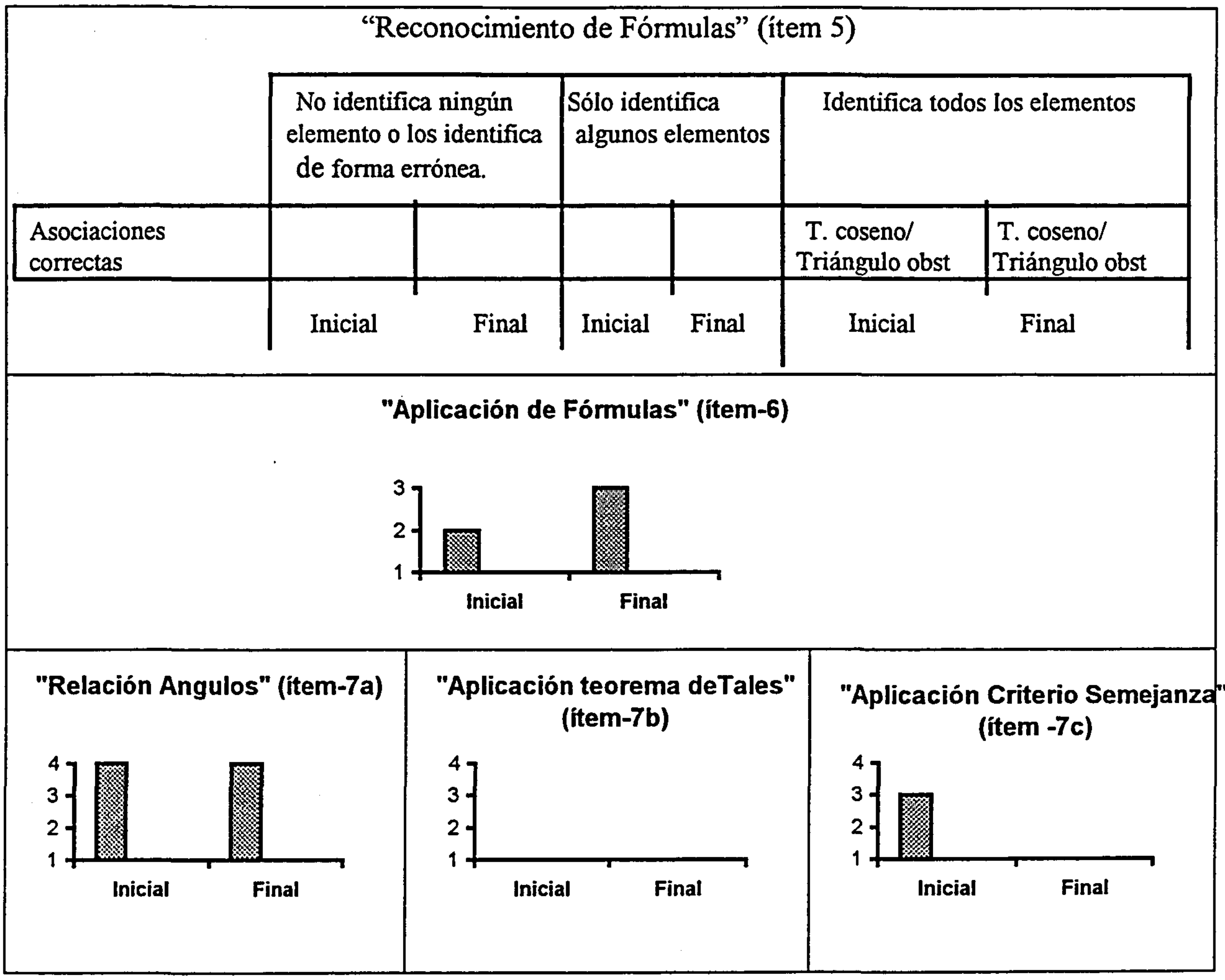


"Aplicación de Fórmulas" (ítem-4)



"Equidescomposición" (ítem-4)





Las respuestas de Rosa a los ítems 2, 3b, 4, 5, 7a y 7b son iguales en ambas pruebas, es decir, se mantiene la misma estructura cognitiva respecto a los contenidos matemáticos que abarcan dichos ítems, con los aciertos y las deficiencias que mostrábamos en el apartado 7.2.

Las diferencias que hay en las respuestas de Rosa a los ítems de las pruebas inicial y final son las siguientes:

- Ha corregido la asociación incorrecta que unía el triángulo equilátero (ítem 1), inmerso en una malla triangular, de dos unidades de lado, con el rectángulo, inmerso en una malla cuadrada, de dos unidades de base por una de altura, manteniendo las otras asociaciones exactamente igual que en la primera prueba. Pasa, así, de un nivel de conocimiento III en la equivalencia, a un nivel VI. La resolución continuada de los cuatro problemas la ha hecho reflexionar a nivel individual y comprender las diferentes características de las medidas de ambas figuras.
- Ha identificado correctamente el criterio de igualdad de triángulos que en la prueba inicial no identificó (ítem 3a). Durante las resoluciones conjuntas de los cuatro problemas ha aparecido con bastante frecuencia la necesidad de justificar la

igualdad de diferentes triángulos, pero en ningún momento las alumnas han hecho una utilización rigurosa de los criterios de igualdad, más bien, como hemos ido diciendo en los análisis (Capítulo 8), han basado las justificaciones en la visualización de las figuras. Por tanto, el cambio que se ha producido en Rosa sólo es explicable en la medida en que ella haya reflexionado de forma individual con posterioridad a la realización de la primera prueba o a las resoluciones conjuntas de los cuatro problemas.

- No volvemos a detectar en Rosa una nueva variación en sus respuestas a los ítems hasta el 6. La opción elegida en la prueba inicial fue: "No hi ha dades suficients per comparar les àrees dels dos triangles". Ahora, la respuesta es la correcta —"Els triangles tenen la mateixa àrea (són equivalents)"—, pero Rosa llega a ella después de aplicar el procedimiento de trazar paralelas para dividir la figura original en otras. Este procedimiento lo han utilizado las alumnas continuamente en las tres primeras resoluciones conjuntas que han hecho, pero Rosa ya lo hacía también en la prueba inicial, por tanto, para ella, no es una novedad su aplicación.

  Rosa no justifica la igualdad de las áreas, como sería lógico, diciendo que los triángulos tienen igual base e igual altura, sino que, después de hacer muchas pruebas, traza por C una paralela a AB y por B una paralela a CD, formándose dos paralelogramos, como vemos en la Figura 9.2.1, y después justifica la igualdad de los triángulos diciendo textualmente: "Perquè les àrees dels paral.lelograms són iguals i tots dos tenen la mateixa base i mateixa altura i com que l'àrea del triangle és $\frac{b.h}{2}$, doncs tots dos tenen la mateixa àrea".

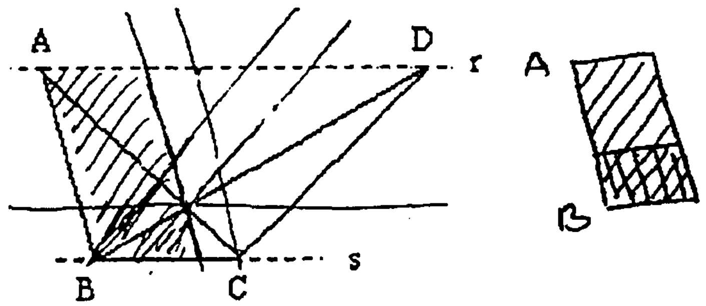


Figura 9.2.1

- En el ítem 7c se produce una situación curiosa. Rosa, midiendo el segmento AF con el bolígrafo, traslada dicha medida dos veces sobre el segmento FA, obteniendo una figura como la 9.2.2 y señalando la respuesta: "No hay datos suficientes" (nivel I), que argumenta textualmente de la siguiente forma: "No és ni 9 ni 12 ni 4 vegades més gran. Si s'allarga el triangle per baix ens dóna 9 vegades més gran però no podem saber-ho exactament". Está claro que Rosa ha reproducido el esquema de calcar la figura, que ya utilizó en algún momento de las resoluciones, pero ahora midiendo los segmentos de la figura.

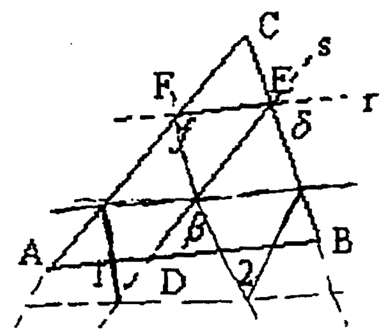


Figura 9.2.2

Hay, por tanto, un descenso en el nivel de conocimiento de Rosa respecto de la prueba inicial que puede justificarse, bien por el desconocimiento tanto del teorema de Tales como de otras propiedades de la semejanza, o bien porque Rosa, igual que Anna (así lo analizamos durante los procesos de resolución), confunde el objeto genérico con el símbolo que lo representa (como señalábamos en el Capítulo 2), que tiene una medidas concretas.

- Rosa hace la resolución del problema 8B trazando paralelas a los lados del trapecio para descomponerlo de la forma que se muestra en la Figura 9.2.3 y contando los triángulos que hay en cada trapecio —5 en el pequeño y 7 en el grande—. En la explicación que da, hace referencia a la relación entre las dos bases de los trapecios —una el doble de la otra— y a la condición de equiláteros de los triángulos obtenidos al trazar las paralelas, pero en ningún momento la argumenta (grado de desarrollo IV).

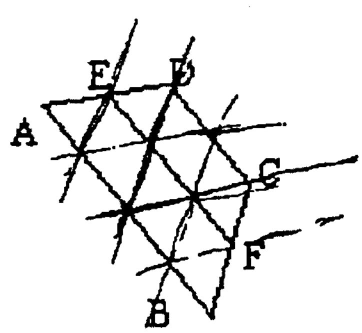


Figura 9.2.3

- En la resolución del problema 9B, Rosa, después de tratar de hacer varias descomposiciones de la figura del enunciado, se centra en la Figura 9.2.4 y da los argumentos siguientes para llegar a justificar la igualdad de las áreas que pide el problema: "Tots els triangles (ADF, DBE i els dos del quadrilàter) tenen la mateixa altura. El segment AB és el doble del segment FE, d'això ens n'adonem ja que si tracem paral.leles (fem paral.lelograms) és fàcil de veure-ho. Per tant, els dos triangles del quadrilàter tenen la mateixa base i altura i per tant són iguals i els altres dos, un té menys base que els dels quadrilàter, però l'altre en té més i com que la suma de les bases dóna el doble de la base FE, les àrees també són iguals".

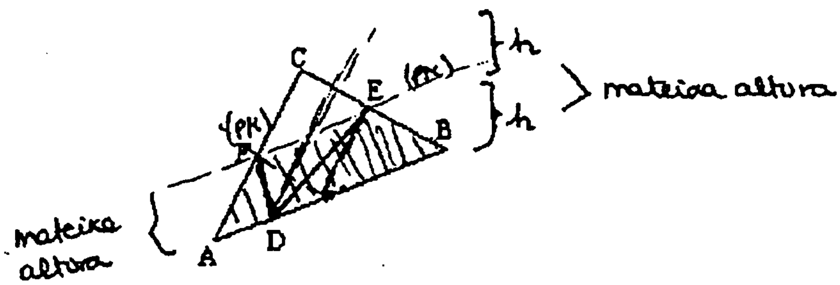


Figura 9.2.4

Este razonamiento de Rosa denota una gran capacidad de visualizar las relaciones entre las figuras obtenidas después de una descomposición, ya que no recurre en ningún momento a la utilización de expresiones algebraicas. Como en la resolución hay razonamientos basados en la visualización, podemos asignar un grado de desarrollo IV, correspondiente a un enfoque consistente en "dividir la figura en otras" y aplicar después otras técnicas para encontrar y justificar la relación pedida.

- En la resolución que Rosa hace del problema 10, no notamos ninguna diferencia respecto a la respuesta de la prueba inicial, salvo su insistencia en descomponer la figura y la identificación no adecuada de los elementos de los cuadrados (grado de desarrollo I), como se observa en la Figura 9.2.5.

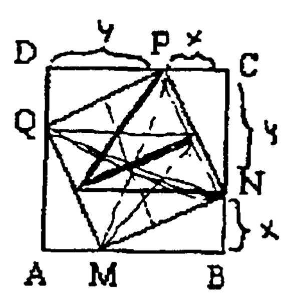


Figura 9.2.5

A modo de conclusión diremos que en Rosa no se ha producido una reorganización importante de sus estructuras cognitivas en cuanto a los procedimientos que utiliza ahora, puesto que ya los utilizaba antes de la resolución conjunta de los problemas. Si acaso, la mejora en las respuestas de los ítems 1 y 6 nos indican que hay una profundización en la utilización de tales procedimientos.

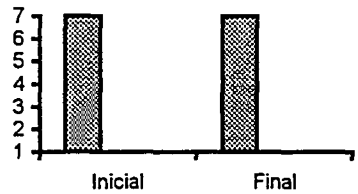
También hemos observado en Rosa una persistencia en el desconocimiento de algunos conceptos —sobre todo del teorema de Tales y de las consecuencias que de él se derivan— y una tendencia a asociar la justificación de las propiedades genéricas de las figuras a la figura concreta que las representa. Esto se pone de manifiesto cuando Rosa utiliza el procedimiento de calcar durante las resoluciones conjuntas o cuando mide los segmentos de la figura del ítem 7.

9.2.2. Diferencias entre las respuestas de Anna a las pruebas inicial y final

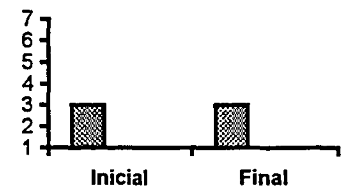
En la Tabla 9.2.2 comparamos los niveles de conocimiento de Anna respecto a los conceptos y técnicas que evaluamos en las pruebas inicial y final (ítems 1 a 7). En los párrafos que siguen a esta tabla explicamos brevemente las diferencias más significativas que hemos observado en las respuestas de Anna a ambas pruebas.

Tabla 9.2.2. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Anna según sus respuestas a las pruebas inicial y final

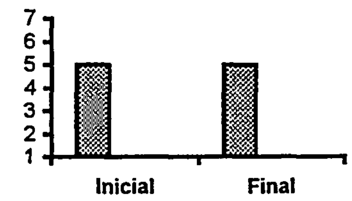
"Congruencia"(ítem-1)



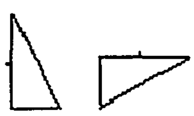
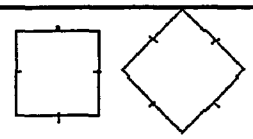
"Equivalencia" (ítem-1)



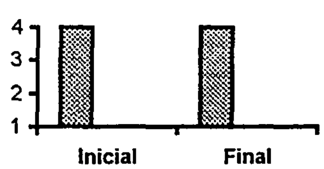
"Semejanza" (ítem-1)



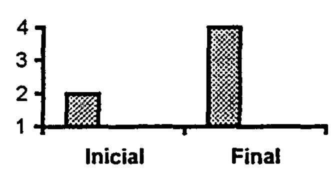
"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

		
Inicial	congr./equiv.	congr./equiv.
Final	congr./equiv.	congr./equiv.

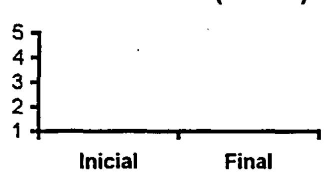
"Número Alturas" (ítem-2)



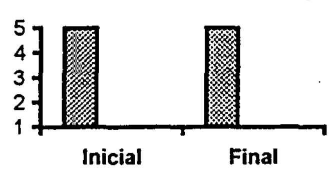
"Representación Alturas" (ítem-2)



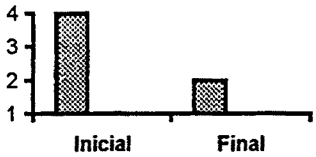
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



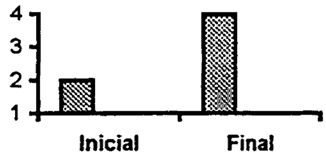
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)



"Aplicación de Fórmulas" (ítem-4)



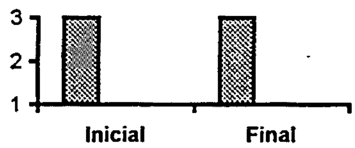
"Equidescomposición" (ítem-4)



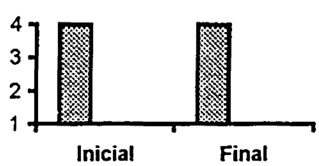
"Reconocimiento de Fórmulas" (ítem 5)

	No identifica ningún elemento (o de forma errónea)		Sólo identifica algunos elementos		Identifica todos los elementos	
Asociaciones correctas			Área pol. reg/ Pentágono	Área pol. reg/ Pentágono	T. coseno/ Triángulo obst Área triángulo/ Triángulo obst. Área Trapecio/ Trapecio	T. coseno/ Triángulo obst Área triángulo/ Triángulo obst. Área Trapecio/ Trapecio
	Inicial	Final	Inicial	Final	Inicial	Final

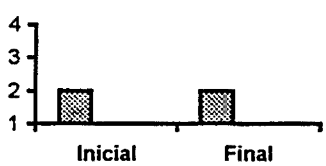
"Aplicación de Fórmulas" (ítem-6)



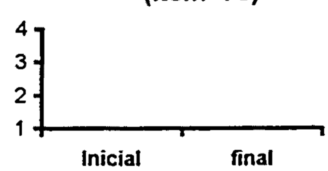
"Relación Angulos" (ítem-7a)



"Aplicación teorema deTales" (ítem-7b)



"Aplicación Criterio Semejanza" (ítem -7c)



Las respuestas de Anna a los ítems 1, 3a, 3b, 5, 6, 7a, 7b y 7c son iguales en ambas pruebas, es decir, se mantiene la misma estructura cognitiva respecto a los contenidos matemáticos que abarcan dichos ítems, con los aciertos y las deficiencias que mostrábamos en el apartado 7.2. Las diferencias que hay en las respuestas de Rosa a los ítems de las pruebas inicial y final son las siguientes:

- Anna representa correctamente las tres alturas en el ítem 2 de la prueba final (nivel IV), a pesar de que el triángulo lo habíamos cambiado de posición (manteniendo una posición no estándar). Durante la resolución de los cuatro problemas, las alumnas no trazan alturas de triángulos. En otros ítems de la prueba inicial, Anna representa correctamente las alturas de un triángulo que no van a parar al interior del lado cuando el triángulo está situado en forma estándar, ese puede ser el motivo que haya provocado el cambio que se ha producido.

- Empezamos a notar un cambio significativo en la actuación de Anna con la respuesta que da al ítem 4. La respuesta en la prueba inicial había sido sólo algebraica (aritmética, diríamos); ahora, Anna hace una descomposición como la que se muestra en la Figura 9.2.6.

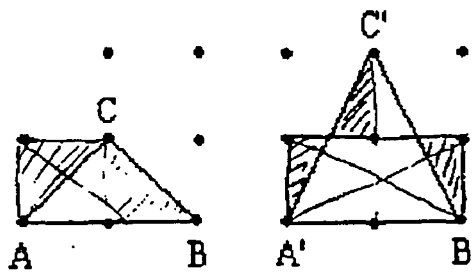
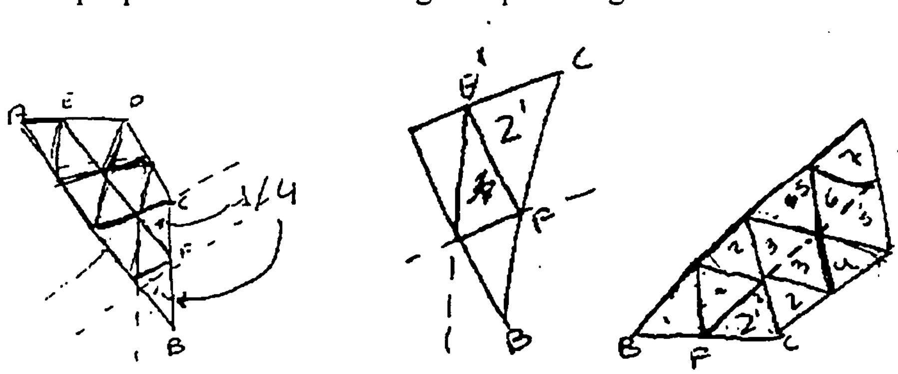


Figura 9.2.6

No se produce ninguna otra variación en las respuestas de Anna hasta la resolución de los problemas 8B y 9B.

Hemos notado en Anna una diferencia significativa, respecto a la prueba inicial, en la forma de enfocar los problemas 8B y 9B, sobre todo por el uso que ahora hace del procedimiento de trazado de paralelas para descomponer las figuras.

- En la resolución del problema 8B no apreciamos ningún intento de ejecución algebraica. Anna, desde el primer momento, construye el hexágono en el que está inmerso el trapecio y empieza a trazar diagonales y rectas paralelas a los lados hasta conseguir la descomposición de la Figura 9.2.7a y c. Para obtener dicha descomposición, Anna sigue un proceso por el que, primero, descompone el trapecio, como se observa en la Figura 9.2.7a, y después de una serie de representaciones, como las de la Figura 9.2.7b, llega a la definitiva (Figura 9.2.7c), en la que parece asociar los triángulos que son iguales.



(a) (b) (c)

Figura 9.2.7

El razonamiento sobre la igualdad de los triángulos que obtiene en la descomposición se basa en la visualización (grado de desarrollo IV). Ahora, Anna ha cambiado el enfoque algebraico de la prueba inicial por el de trazado de paralelas con la finalidad de dividir el trapecio en triángulos.

- Todavía es más interesante y original la resolución que Anna hace del problema 9B. En dicha resolución, Anna aplica mejor que en ninguna otra situación el procedimiento de trazado de paralelas con la finalidad de descomponer la figura en otras. Anna explica cómo traza las rectas de la forma siguiente: “Traço paral.lela al costat AB pels punts F i E. Paral.lela al costat FD que passi pels punts C i E. D’aquesta manera puc anar relacionant totes les figures que tinc a dins del quadrilàter amb les del triangle”. A parte de ésta, no da ninguna explicación de las igualdades de los triángulos que obtiene (grado de desarrollo IV), pero identifica los que son iguales, de la forma simbólica que se indica en la Figura 9.2.8 (y especialmente en la 9.2.8d), lo cual evidencia la relación de igualdad de áreas que establece como respuesta a la pregunta del problema.

Anna llega a esa respuesta después de hacer una serie de representaciones del triángulo ABC y de trazar sobre él diferentes paralelas, como mostramos en la sucesión de figuras realizadas por ella durante la resolución (Figura 9.2.8).

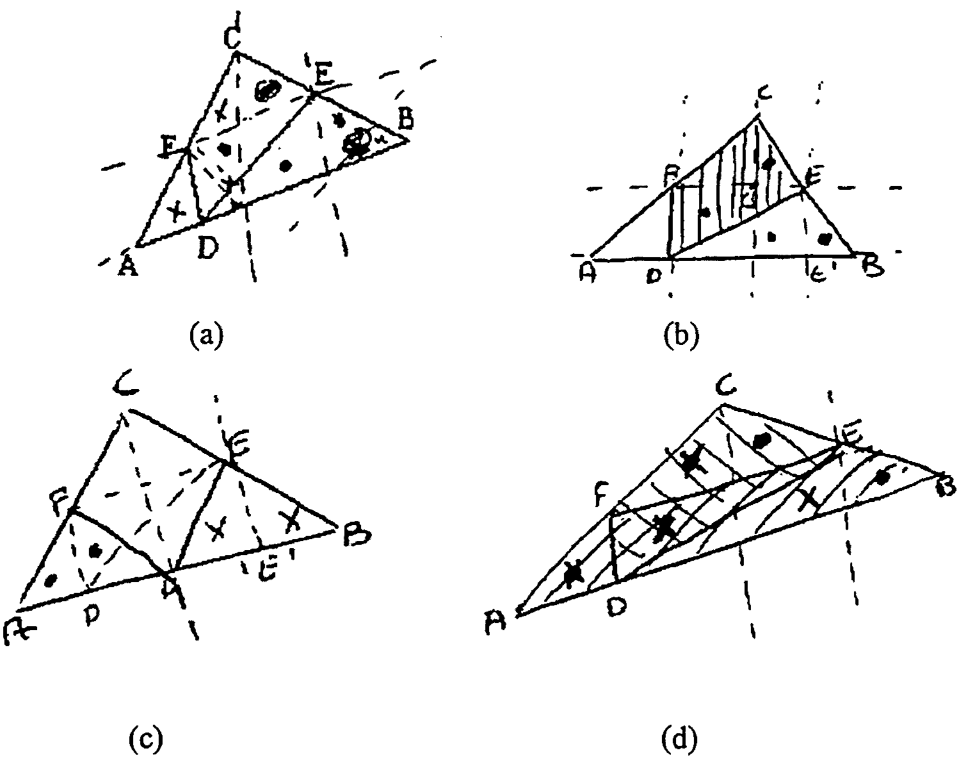


Figura 9.2.8

- No hay ningún cambio en el enfoque del problema 10 por parte de Anna.

Como conclusión podemos decir que Anna no ha modificado su estructura cognitiva por lo que se refiere a los conceptos que aparecen en ambas pruebas, cosa explicable si tenemos en cuenta que durante las resoluciones ha habido muy pocas referencias a ellos, pero sí que es evidente que se ha producido una adquisición de conocimientos relacionada con la forma de enfocar los tipos de problemas que estamos considerando; es decir, la tendencia algebraica se ha cambiado por una tendencia geométrica consistente en buscar diferentes descomposiciones de las figuras y comparar los triángulos obtenidos.

Hay, pues, una transferencia de conocimientos procedimentales de Rosa a Anna que se ha visto favorecida por el éxito que la aplicación de tales procedimientos ha tenido en las resoluciones conjuntas que ambas alumnas han efectuado. Además, esa transferencia de procedimientos no se ha concretado en oportunidades de aprendizaje que hayamos podido detectar, sino que ha sido consecuencia de la inclinación continuada de las alumnas —en tres de los cuatro problemas que resuelven conjuntamente— por un enfoque geométrico.

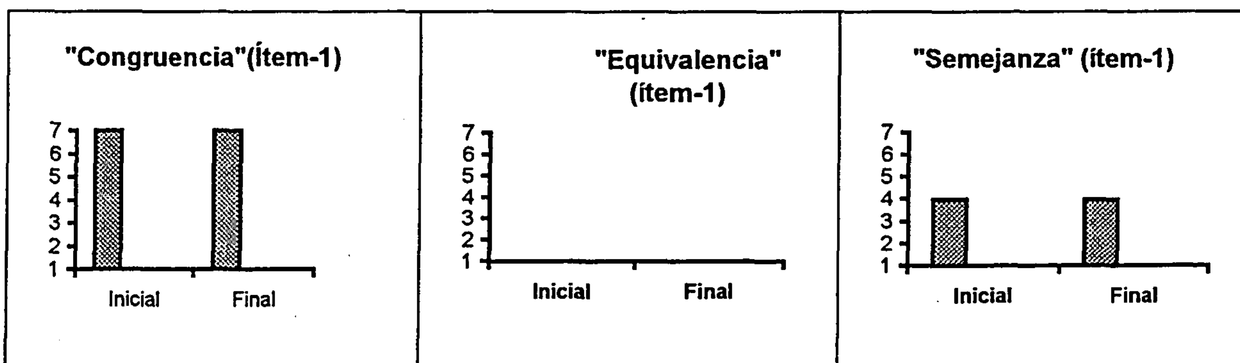
Por último, hemos decir que los cambios en las estructuras de conocimiento sólo se han producido respecto del procedimiento que hemos reseñado en el párrafo anterior, pero no respecto de otros. Nos referimos en concreto a las argumentaciones que las alumnas dan, basadas, antes y después, en las visualizaciones de las figuras, sin explicitar en ningún momento razonamiento lógico alguno. Los alumnos y alumnas de estas edades no sienten la necesidad de justificar las igualdades de las figuras de otra forma que no sea mediante la apreciación visual de las relaciones entre sus elementos.

9.3. Análisis de las respuestas de Laia y Jaume a la prueba final y evolución de sus conocimientos

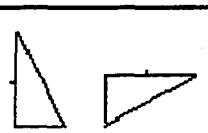
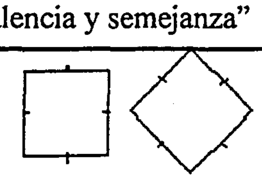
9.3.1. Diferencias entre las respuestas de Laia a las pruebas inicial y final

En la Tabla 9.3.1 comparamos los niveles de conocimiento de Laia respecto a los conceptos y técnicas que evaluamos en las pruebas inicial y final (ítems 1 a 7). En los párrafos que siguen a esta tabla explicamos brevemente las diferencias más significativas que hemos observado en las respuestas de Laia a ambas pruebas.

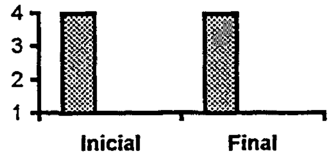
Tabla 9.3.1. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Laia según sus respuestas a las pruebas inicial y final



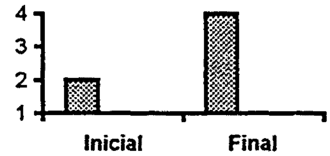
"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

		
Inicial	congr./equiv./sem.	congr./equiv./sem.
Final	congr./equiv./sem.	congr./equiv./sem.

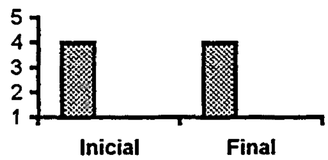
"Número Alturas" (ítem-2)



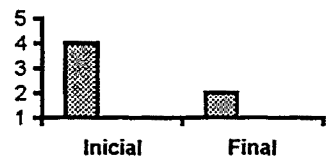
"Representación Alturas" (ítem-2)



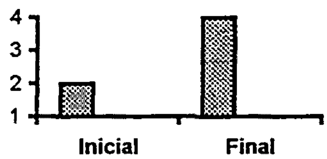
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



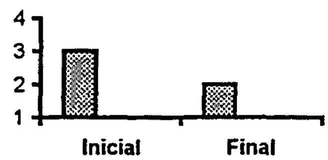
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)



"Aplicación de Fórmulas" (ítem-4)



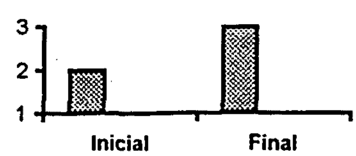
"Equidescomposición" (ítem-4)

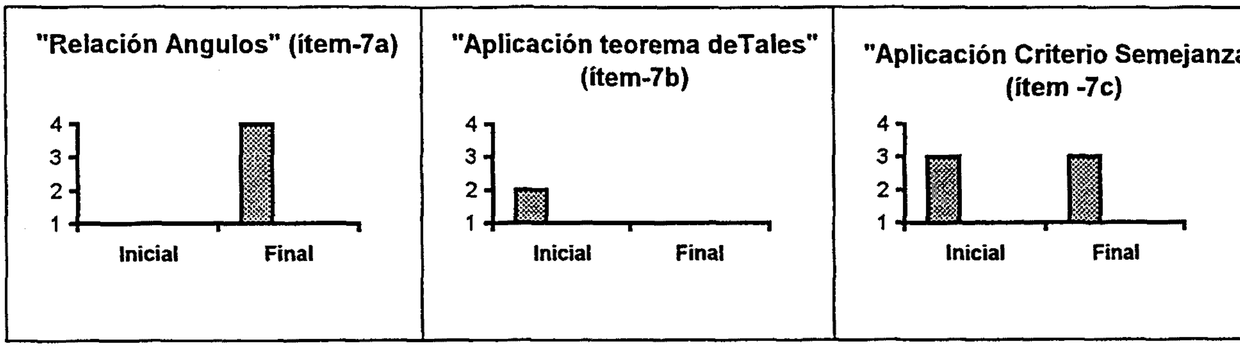


"Reconocimiento de Fórmulas" (ítem 5)

	No identifica ningún elemento		Sólo identifica algunos elementos		Identifica todos los elementos	
Asociaciones correctas			Fórm. áng. int/ Pentágono		Área trapecio/ Trapecio T. coseno/ Triángulo obst	Área trapecio/ Trapecio T. coseno/ Triángulo obst Área pentágono/ Pentágono
	Inicial	Final	Inicial	Final	Inicial	Final

"Aplicación de Fórmulas" (ítem-6)





Sólo las respuestas de Laia a los ítems 1 y 7c son iguales en ambas pruebas. Las diferencias que hay en las respuestas de Laia a los demás ítems de las pruebas inicial y final son las siguientes:

- Como en la respuesta al ítem 2 de la prueba inicial, Laia asocia tres alturas a un triángulo, pero en la prueba final las representa de forma correcta (nivel IV).
- Elige la opción correcta en su respuesta al ítem 3a, pero también considera congruentes los triángulos que tienen dos pares de lados homólogos y un ángulo cualquiera iguales. De acuerdo con los criterios de valoración de conocimientos que hemos establecido, Laia mantiene su nivel de conocimiento (nivel IV), pero ha reducido las cuatro opciones que elegía en la prueba inicial a las dos de ahora. Relaciona las bases y las alturas de los triángulos rayados del ítem 3b para aplicar la fórmula del área del triángulo, confundiendo la congruencia con la equivalencia (nivel II).
- Laia elige en el ítem 4 la opción correcta. Para justificarla expresa y compara las fórmulas de las áreas de cada triángulo, identificando la igualdad de sus bases y la relación entre sus alturas —una doble de la otra—, lo que corresponde a un nivel de conocimiento IV. No reconoce ninguna otra forma de justificar la respuesta.
- La única diferencia en las respuestas al ítem 5 es que Laia asocia al pentágono regular la fórmula de su área, en lugar de la que expresa el ángulo interior. Además, reconoce en la figura el perímetro y la apotema.
- La apreciación visual de que los dos triángulos del ítem 6 tenían la misma área, se ha convertido ahora en el reconocimiento de que ambos tienen la base común y la misma altura —"Perquè els dos estan compresos entre dos rectes paral.leles"—, lo que corresponde a un nivel de conocimiento III.
- Laia hace referencia al paralelismo de los lados para justificar la opción correcta que elige en el ítem 7a —que los ángulos β y f sean suplementarios—, lo que corresponde a un nivel de conocimiento IV. En la prueba inicial, Laia elegía dos opciones, pero la justificación que daba era similar a la que da en la prueba final, por esa razón, a pesar de la diferencia de niveles —del nivel I pasa al IV—, entendemos que no se ha producido un cambio significativo en las respuestas a ambos ítems.
- La proliferación de letras para identificar los diferentes segmentos que aparecen en los trapecios es la característica más sobresaliente de la resolución del problema 8B. Como en el 8A, tras el intento fallido de desarrollo algebraico, Laia trata de

descomponer los trapecios, uno de ellos en 4 cuadrados, el otro en 6, sin dar ningún tipo de explicación de tal justificación (grado de desarrollo II).

•Resulta curiosa la resolución que Laia hace del problema 9B, por eso reproducimos textualmente lo que escribe: “Si ho faig a vista, doblego, uneixo C i D i dibuixo l’àrea del triangle BED dins del quadrilàter i el mateix faig amb ADF. Veig que se’m sobreposen les àrees dels dos triangles que he de sumar les seves àrees i que em queda un tros d’àrea del quadrilàter sense ser ocupada. Veig (suposo) que el tros que se’m sobreposa i el tros que em falta per ocupar és el mateix, per tant, veig que si sumen l’àrea dels dos triangles BED i ADF és igual a l’àrea del quadrilàter”. Este texto acompaña a la descomposición que mostramos en la Figura 9.3.1.

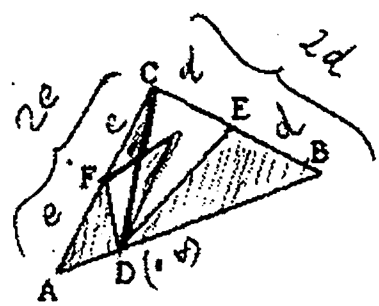


Figura 9.3.1

Observamos que Laia se deja influir por el enunciado del problema del cuadrado, en el que se proponía doblar sus cuatro esquinas; además, la apreciación visual —“Ho faig a vista”— no va acompañada de ningún tipo de argumentación (grado de desarrollo II).

•Laia vuelve a hacer una resolución del problema 10 muy parecida a la que hacía en la prueba inicial. Como en aquella ocasión, ahora asigna al área de un cuadrado el valor de 5 y a la otra el valor 8. Estas asignaciones son consecuencia de la interpretación que hace de que la razón entre ambas áreas sea $\frac{5}{8}$. La resolución está enfocada al planteamiento y resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas — “m” y “n”—, que son los segmentos que pretende relacionar. Esta identificación simbólica inicial parece acertada, pero la incorporación de nuevos símbolos —”x”, “y” y “p”— para designar a otros elementos de la figura, complica el desarrollo del enfoque algebraico, que se ve entorpecido, además, por un planteamiento deficiente del sistema de ecuaciones.

Identificamos en las respuestas de Laia los mismos defectos que en la prueba inicial, a pesar de que ahora acompaña al desarrollo algebraico una descomposición del cuadrado (Figura 9.3.2) en la que se observa una cierta influencia del problema del cuadrado (grado de desarrollo II).

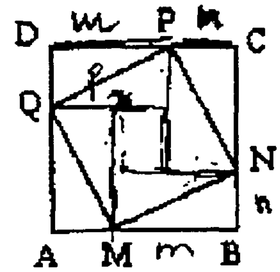


Figura 9.3.2

Como resumen de la evolución de los conocimientos de Laia, podemos decir que las identificaciones simbólicas de los elementos de las figuras y los desarrollos algebraicos obtenidos de la aplicación de las fórmulas de las áreas siguen siendo sus recursos principales para enfocar la resolución de los problemas de la prueba final. Igualmente, la visualización sigue desempeñando un papel muy importante en su actuación matemática, como se pone de manifiesto en la forma de resolver el problema 9B. A pesar de ello, hemos observado muchas variaciones en las respuestas de Laia a la segunda prueba respecto a las de la primera. Estas variaciones son consecuencia de la utilización continua de enfoques algebraicos en los procesos de resolución conjunta, basados casi exclusivamente en la aplicación de las fórmulas de las áreas de las figuras que intervienen y en la búsqueda de relaciones entre los elementos de dichas figuras.

La aplicación de fórmulas incide de formas diferentes en las respuestas de Laia a los ítems de la prueba final: negativamente, en la justificación de la congruencia de los triángulos del ítem 3b, que pone en evidencia su confusión sobre los conceptos de equivalencia y congruencia; y, positivamente, en la justificación de la relación entre las áreas de los triángulos de los ítems 4 y 6.

La asociación que Laia hace de las alturas de un triángulo con rectas perpendiculares le permite una rápida evolución hacia la identificación correcta de dichas alturas. Esta evolución tiene su inicio en el proceso de resolución del problema del paralelogramo, en el que Laia representa correctamente una altura que va a parar a la prolongación de un lado.

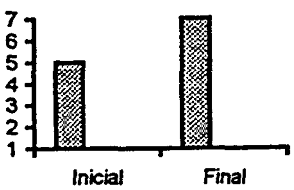
Igualmente, las continuas referencias a la apotema en la resolución que Laia y Jaume hacen del problema del hexágono y la expresión que Laia introduce de la fórmula del área del hexágono en la intervención 9 de dicho proceso la llevan a identificar ambos conceptos en el pentágono regular del ítem 5 de la prueba final.

9.3.2. **Diferencias entre las respuestas de Jaume a las pruebas inicial y final**

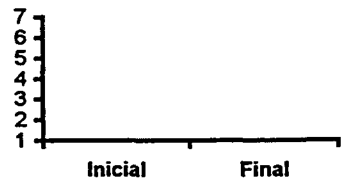
En la Tabla 9.3.2 comparamos los niveles de conocimiento de Jaume respecto a los conceptos y técnicas que evaluamos en las pruebas inicial y final (ítems 1 a 7). En los párrafos que siguen a esta tabla explicamos brevemente las diferencias más significativas que hemos observado en las respuestas de Jaume a ambas pruebas.

Tabla 9.3.2. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Jaume según sus respuestas a las pruebas inicial y final

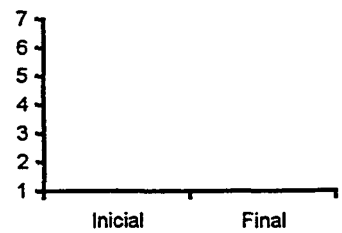
"Congruencia"(Ítem-1)



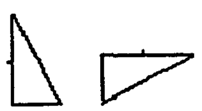
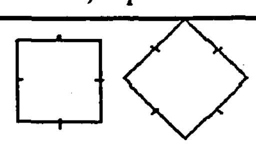
"Equivalencia" (ítem-1)



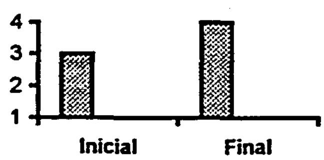
"Semejanza" (ítem-1)



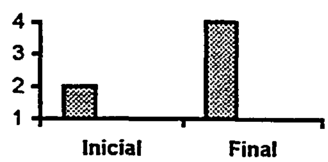
"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

			
Inicial	congr./equiv.	congr./equiv.	congr./equiv.
Final	congr./equiv.	congr.	equiv./sem.

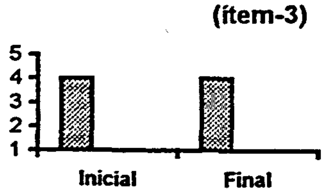
"Número Alturas" (ítem-2)



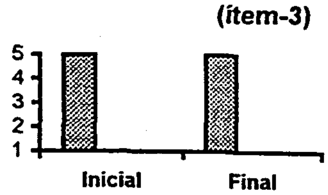
"Representación Alturas" (ítem-2)



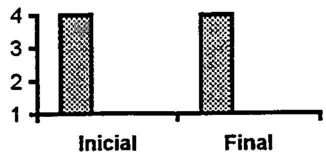
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



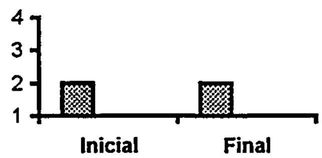
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)



"Aplicación de Fórmulas" (ítem-4)



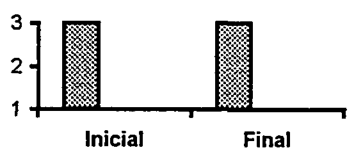
"Equidescomposición" (ítem-4)



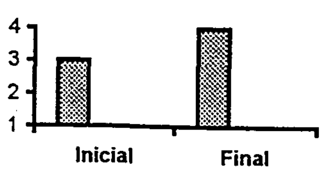
“Reconocimiento de Fórmulas” (ítem 5)

	No identifica ningún elemento	Sólo identifica algunos elementos		Identifica todos los elementos	
Asociaciones correctas		Área pentágono/ Pentágono		T. coseno/ Triángulo obst. Área trapecio/ Trapecio	T. coseno/ Triángulo obst. Área trapecio/ Trapecio Área pentágono/ Pentágono
		Inicial	Final	Inicial	Final

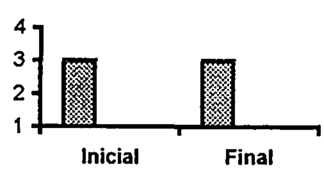
"Aplicación de Fórmulas" (ítem-6)



"Relación Angulos" (ítem-7a)



"Aplicación teorema deTales" (ítem-7b)

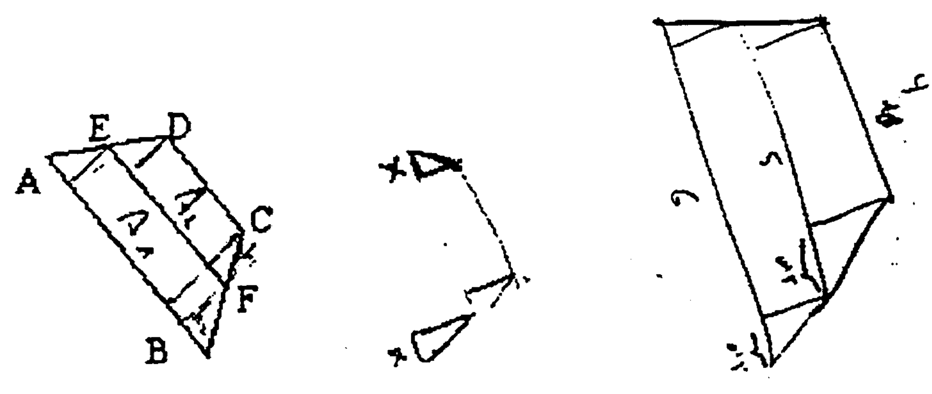


"Aplicación Criterio Semejanza" (ítem -7c)

Las respuestas de Jaume a los ítems 3a, 3b, 4, 6 y 7b son iguales en ambas pruebas, es decir, se mantiene la misma estructura cognitiva respecto a los contenidos matemáticos que abarcan dichos ítems, con los aciertos y las deficiencias que mostrábamos en el apartado 7.3. También son iguales los niveles de conocimiento que hemos asignado a las respuestas a los ítems 7c de ambas pruebas, a pesar de que Jaume ha pasado de elegir la opción “no hay datos suficientes”, en la prueba inicial, a establecer en la prueba final que el área del triángulo ABC es cuatro veces la del AEF. De esta afirmación incorrecta, Jaume hace una justificación similar a la que hacía en la prueba inicial, pero, en este caso, extendiendo la proporcionalidad de las bases a las alturas —"Perquè tant la base com l'altura es dupliquen, la base passa a ser 1 a ser 2, igual que l'altura"—.

Las diferencias que hay en las respuestas de Jaume a los ítems de las pruebas inicial y final son las siguientes:

- Identifica las figuras congruentes en el ítem 1 de la prueba final (nivel VII). De las cuatro asociaciones de figuras equivalentes que hace, sólo una es correcta, la que se corresponde con una de las asociaciones entre figuras congruentes (nivel I). De las cuatro asociaciones de figuras semejantes que hace ninguna es correcta (nivel I).
- En el ítem 2 de la prueba final, Jaume asocia tres alturas al triángulo (nivel IV) y las representa correctamente (nivel IV).
- La única diferencia entre las respuestas al ítem 5 de las pruebas inicial y final es que en esta última identifica correctamente la apotema del pentágono regular.
- En el ítem 7a, Jaume vuelve a elegir la opción correcta, como en la prueba inicial, pero ahora la justifica la siguiente forma: "Perquè ABEF forma un paral·lelogram, per tant f és = a f', com que és un pla, $f' + \beta = 180°$", es decir, hace referencia a la condición de paralelogramo de ADEF y alude implícitamente a la igualdad de sus ángulos opuestos (nivel IV). Por tanto, la única diferencia de esta respuesta con respecto a la de la prueba inicial es la utilización de la referencia al paralelogramo ADEF.
- Jaume hace una resolución del problema 8B basada únicamente en la aplicación de las fórmulas de las áreas de los trapecios ABFE y EFCD (Figura 9.3.3) y en la identificación de la igualdad de las alturas de los mismos.



(a) (b) (c)

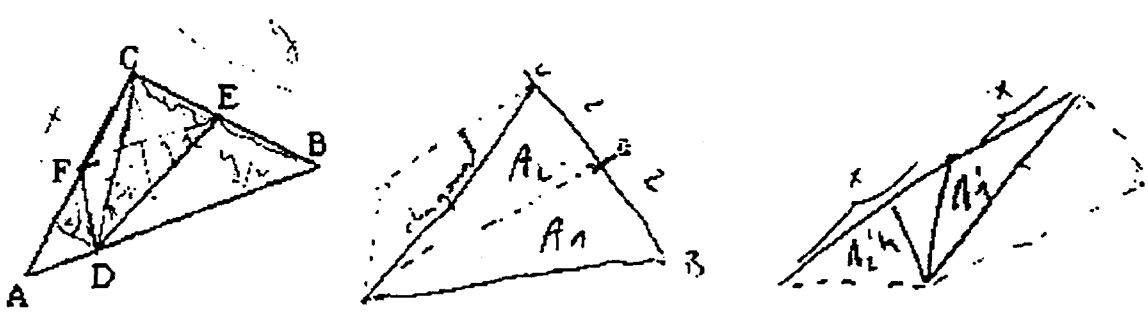
Figura 9.3.3

La puesta en práctica consiste en expresar las áreas de ambos trapecios y despejar de ellas sus alturas para igualarlas, con lo que llega a obtener, después de las simplificaciones oportunas, la siguiente proporción: $\dfrac{A_1}{AB+EF} = \dfrac{A_2}{DC+EF}$. A partir de este momento hay dos relaciones entre las bases de los trapecios cuya identificación es decisiva para la obtención del resultado final:

Por una parte, la relación que hay entre AB y DC —AB es doble de DC, ya que son bases de un trapecio obtenido al dividir por la mitad un hexágono regular—. Jaume identifica esta relación de forma incorrecta. Esto se pone de manifiesto cuando se ve obligado a asignar a DC y AB los valores 4 y 6, respectivamente, para poder proseguir la resolución (Figura 9.3.3c) —según él, porque "ens falten valors per a trobar la relació exacta"—.

Por otra, la relación que hay entre la base EF y la suma de AB y DC (Figura 9.3.3a), al ser E y F los puntos medios de los lados AD y BC, respectivamente. Jaume consigue identificar esa relación expresando las igualdades: DC = EF - 2x; y AB = EF + 2x (Figura 9.3.3b y c). Estas relaciones no aparecen en la resolución que hace Jaume del problema 8A, ni en la del problema del hexágono (grado de desarrollo IV). A pesar de ello, Jaume hace una resolución del problema 8B similar a la del 8A, ya que en ambas expresa las fórmulas de las áreas de las figuras que quiere relacionar para obtener su razón. En las dos resoluciones desarrolla la puesta en práctica hasta que se encuentra con dificultades para identificar las relaciones que hay entre los elementos de las figuras que intervienen.

- En la resolución del problema 9B, Jaume empieza trazando las dos diagonales —DC y EF— del cuadrilátero DECF (Figura 9.3.4a), aunque en el razonamiento que hace sólo utiliza la DC. Con esta diagonal divide al cuadrilátero en dos triángulos: el DEC, que justifica que es equivalente al DBE argumentando que ambos tienen la misma base y la misma altura; y el DCF, que justifica su equivalencia con el ADF de la misma forma que en el caso anterior (grado de desarrollo V).



(a) (b) (c)

Figura 9.3.4

Observamos que la resolución que hace Jaume del problema 9B es una reproducción de la del 9A, ya que a la división de la figura sigue la aplicación de las fórmulas para obtener las equivalencias que se piden.

- En la prueba final, Jaume hace una resolución del problema 10 mucho más avanzada que la que hizo en la prueba inicial. Ahora, expresa la proporción $\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{8}$ y obtiene cada uno de los lados de los cuadrados reproduciendo el esquema de actuación de la resolución del problema del cuadrado, es decir, haciendo $A_1 = 5$ y $A_2 = 8$. A partir de ese momento, identifica simbólicamente los lados PC, mediante "y", y DP, mediante "x", y aplica el teorema de Pitágoras para plantear un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Un error en los cálculos le impide obtener el resultado correcto (grado de desarrollo IV).

A modo de conclusión podemos decir que se han producido muy pocos cambios en la estructura cognitiva de Jaume, pues no ha evolucionado sustancialmente su idea de congruencia, equivalencia y semejanza, cosa lógica si observamos que en las resoluciones orales no se hacen referencias explícitas a dichos conceptos, y tampoco ha habido un cambio en la forma de enfocar la resolución de los problemas, ya que en la prueba final sigue basando dicha resolución en la aplicación de las fórmulas de las figuras que intervienen, acompañada, en algún caso, de descomposiciones previas de las mismas. A pesar de ello, hemos observado una evolución significativa en la representación de las alturas de un triángulo, es decir, la oportunidad de aprendizaje que se le presentaba a Jaume en el episodio de evaluación local del proceso de resolución del problema del paralelogramo se ha convertido en aprendizaje efectivo desde el momento en que ha sido capaz de representar correctamente las tres alturas del triángulo del ítem 2 de la prueba final. Igual ha ocurrido con el concepto de apotema.

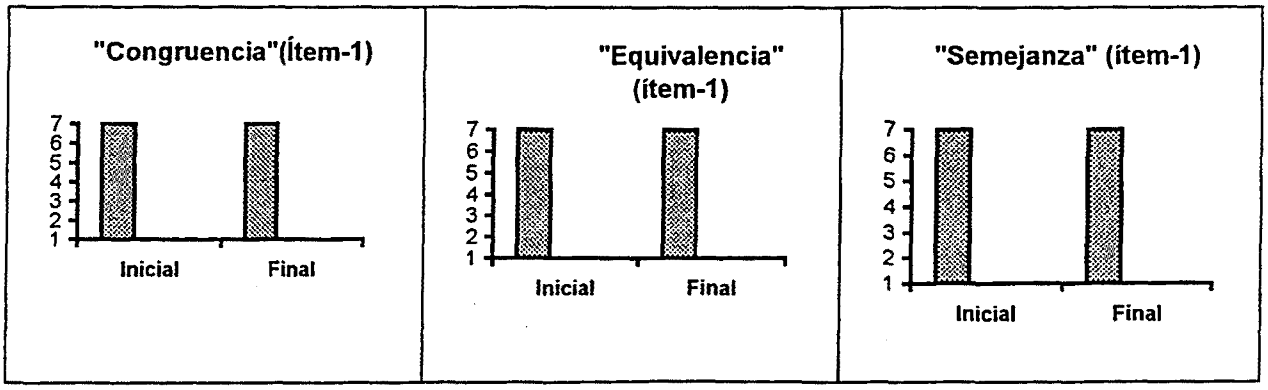
También ha habido una transmisión de conocimientos de Laia a Jaume en relación a la inferencia $\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{8} \Rightarrow A_1 = 5$ y $A_2 = 8$, que Laia aplica en la resolución del problema 10 de la prueba inicial e introduce en la resolución del problema del cuadrado. Esta implicación, incorrecta en general, equivale, en este caso, a introducir una particularización, la cual permite a Jaume hacer un desarrollo muy avanzado del problema 10 de la prueba final.

9.4. Análisis de las respuestas de Pere y Lluís a la prueba final y evolución de sus conocimientos

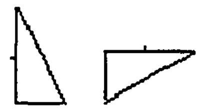
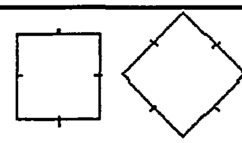
9.4.1. Diferencias entre las respuestas de Pere a las pruebas inicial y final

En la Tabla 9.4.1 comparamos los niveles de conocimiento de Pere respecto a los conceptos y técnicas que evaluamos en las pruebas inicial y final (ítems 1 a 7). En los párrafos que siguen a esta tabla explicamos brevemente las diferencias más significativas que hemos observado en las respuestas de Pere a ambas pruebas.

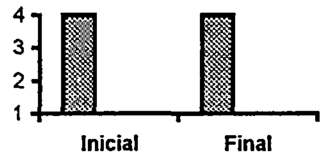
Tabla 9.4.1. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Pere según sus respuestas a las pruebas inicial y final



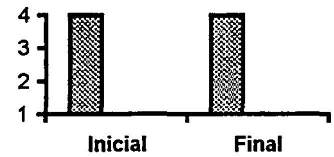
"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

		
Inicial	congr.	congr.
Final	congr.	congr.

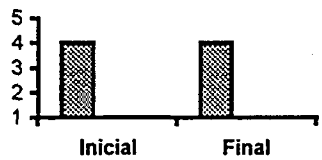
"Número Alturas" (ítem-2)



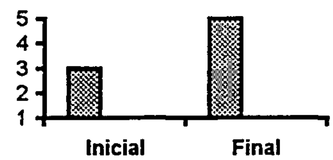
"Representación Alturas" (ítem-2)



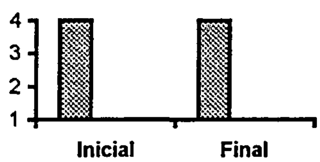
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



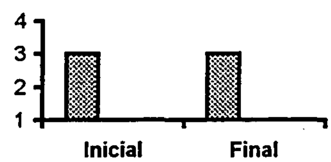
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)



"Aplicación de Fórmulas" (ítem-4)

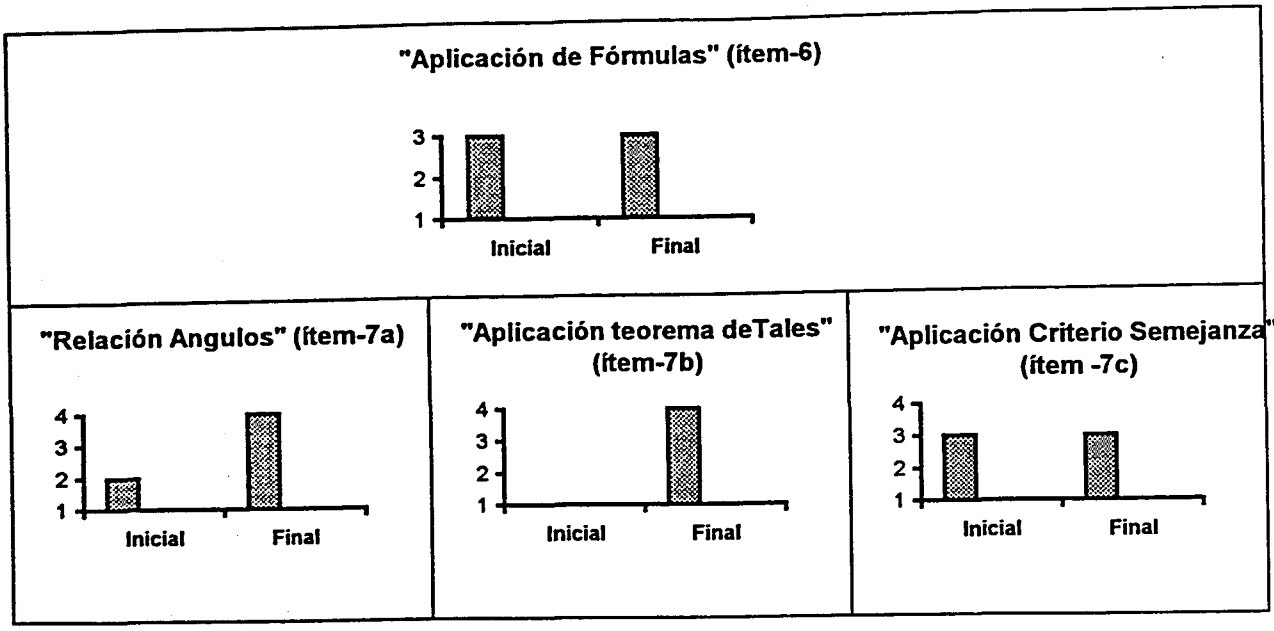


"Equidescomposición" (ítem-4)



"Reconocimiento de Fórmulas" (ítem 5)

	No identifica ningún elemento	Identifica algunos elementos	Identifica todos los elementos	
Asociaciones correctas			Área triáng./Triángulos obst. y rectángulo. Área trapecio/Trapecio Área pentágono/Pentágono	Área triáng./Triáng. obst. y rectángulo Área trapecio/Trapecio Área pentágono/Pentágono Ángulo int./ Pentágono
			Inicial	Final



Las respuestas de Pere a los ítems 1, 2, 3a, 4, 6 y 7c son iguales en ambas pruebas, es decir, se mantiene la misma estructura cognitiva respecto a los contenidos matemáticos que abarcan dichos ítems, con los aciertos y las deficiencias que mostrábamos en el Capítulo 7. Las diferencias que hay en las respuestas de Pere a los ítems de las pruebas inicial y final son las siguientes:

- El razonamiento que Pere hace para justificar la igualdad de los triángulos rayados del ítem 3b en la prueba final es más completo que el que hacía en la inicial. Ahora justifica la igualdad de los ángulos basándose en la condición de que ABC es un triángulo equilátero de la forma siguiente: "Els angles del triangle ABC (equilàter) són tots iguals ⇒ els costats són iguals. Si AD=BF=CE llavors AE=DB=FC. Veiem que els triangles ratllats tenen tots un angle i dos costats en comú ⇒ són iguals" (nivel V). En cualquier caso, pensamos que la diferencia entre ambas respuestas —la de la prueba inicial y ésta— se debe más a la precisión y el detalle de la explicación que a un cambio en la estructura cognitiva de Pere.

- En el ítem 5, Pere añade una asociación nueva a las cuatro que hacía en la prueba inicial e igualmente identifica en las figuras todos los elementos que intervienen en las fórmulas. La asociación que incorpora es la del pentágono con la fórmula que da el ángulo interior de un polígono regular.

  El cambio que se ha producido en Pere sólo es explicable como consecuencia de una reflexión individual posterior a la realización de la primera prueba, ya que ninguno de los conceptos que ahora asocia han aparecido en la resolución conjunta de los cuatro problemas.

- Como en la prueba inicial, Pere elige la opción correcta en el ítem 7a. La explicación que da ahora es más detallada —"ADFE forma un paral.lelogram, on els angles són iguals de dos en dos. Sumant-ne dos de oposats fan un angle de 180º"— y va acompañada de la identificación del ángulo *f* en la Figura 9.4.1. Si utilizamos conjuntamente la información escrita y la gráfica (Figura 9.4.1), podemos afirmar que Pere llama opuestos a los ángulos contiguos, con esta salvedad, la respuesta corresponde a un nivel de conocimiento IV. Si trasladamos esa apreciación a la respuesta del ítem 7a de la prueba inicial, podemos concluir que el motivo de la diferencia de niveles de conocimiento en los ítems 7a de ambas pruebas es debido a un defecto de expresión.

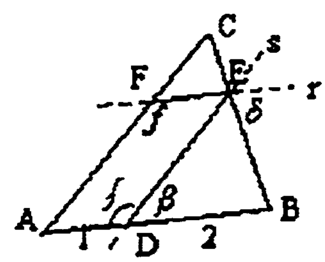


Figura 9.4.1

•En la respuesta al ítem 7b, Pere elige la opción correcta. En la justificación de tal elección, hace referencia explícita a la semejanza de los triángulos ABC y FEC, lo que corresponde a un nivel de conocimiento IV.

La proporcionalidad de segmentos y la semejanza de triángulos fue el tema de diálogo del episodio de análisis del proceso de resolución del problema del triángulo. Pensamos que la interacción que se produjo en dicho episodio ha podido ser lo que ha originado el cambio de respuesta en el ítem 7b respecto a la de la prueba inicial.

• Pere enfoca la resolución del problema 8B descomponiendo el trapecio ABCD en doce triángulos equiláteros (Figura 9.4.2). Para encontrar la relación entre los trapecios ABFE y EFCD cuenta el número de triángulos que contiene cada uno de ellos. A esta resolución corresponde un grado de desarrollo IV.

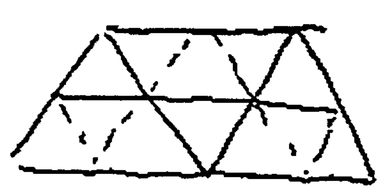


Figura 9.4.2

•Pere vuelve a hacer una resolución del problema 9B similar a la que hacía en el 9A. La resolución está basada, por una parte, en la división del cuadrilátero DECF en dos triángulos mediante el segmento FE (Figura 9.4.3), y, por otra, en la identificación de relaciones entre segmentos —la de FE con AB (2FE = AB) y la de las alturas de los cuatro triángulos obtenidos— para conseguir el objetivo que persigue mediante la aplicación de la fórmula del área del triángulo. Pere da los argumentos suficientes para que podamos asignar a esta resolución un grado de desarrollo V.

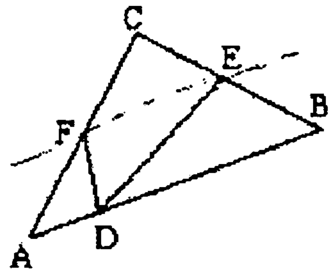


Figura 9.4.3

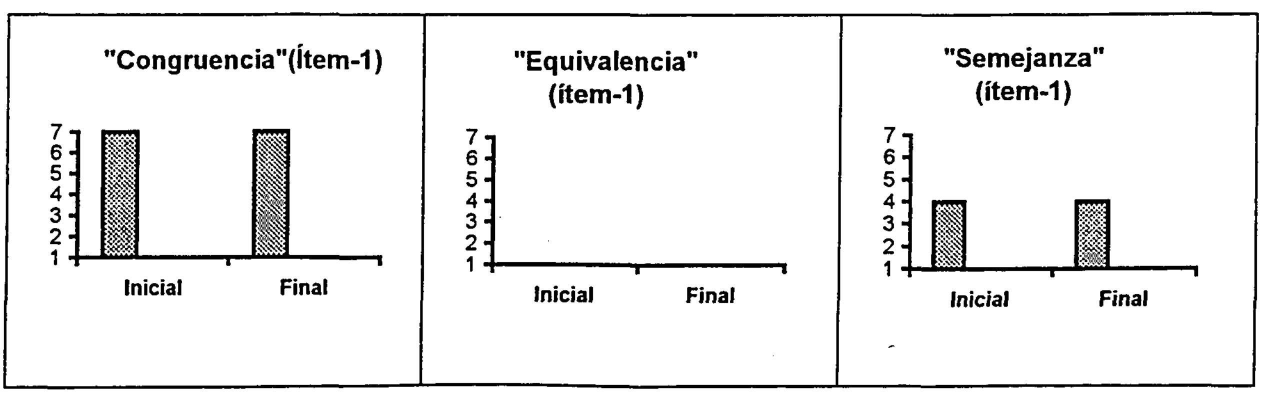
- En la resolución del problema 10, Pere obtiene una ecuación similar a la que obtenía en la prueba inicial, es decir, una ecuación de segundo grado —$3DP^2 - 10DP.PC + 3PC^2 = 0$— en función de DP y PC. En aquella ocasión no supo resolverla, ahora Pere toma uno de los segmentos como unidad —DP=1— y obtiene PC resolviendo la ecuación que resulta (grado de desarrollo V). Pere hace lo que él mismo propuso en la resolución del problema del cuadrado. La aplicación de este procedimiento no ha sido consecuencia de la resolución conjunta del problema del cuadrado, sino de una reflexión individual posterior a la resolución del problema 10 de la prueba inicial.

En resumen, hemos observado en Pere modificaciones poco significativas en su estructura conceptual y procedimental, si exceptuamos dos aspectos concretos: las referencias a la semejanza de triángulos y a la proporcionalidad de sus lados, que son consecuencia de las interacciones que se producen en momentos determinados de los procesos de resolución; y la utilización del procedimiento de asignar a una de las incógnitas un valor numérico para calcular la otra, que es fruto de la reflexión individual de Pere después de la realización de la prueba inicial.

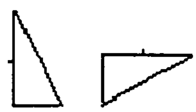
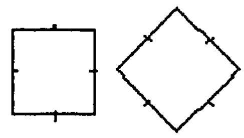
9.4.2. **Diferencias entre las respuestas de Lluís a las pruebas inicial y final**

En la Tabla 9.4.2 comparamos los niveles de conocimiento de Lluís respecto a los conceptos y técnicas que evaluamos en las pruebas inicial y final (ítems 1 a 7). En los párrafos que siguen a esta tabla explicamos brevemente las diferencias más significativas que hemos observado en las respuestas de Lluís a ambas pruebas.

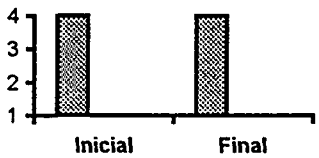
Tabla 9.4.2. Esquema gráfico comparativo de los niveles de conocimiento de Lluís según sus respuestas a las pruebas inicial y final



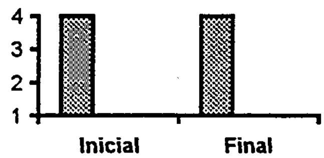
"Relación entre congruencia, equivalencia y semejanza"

		
Inicial	congr./equiv.	congr./equiv.
Final	congr./equiv.	congr./equiv.

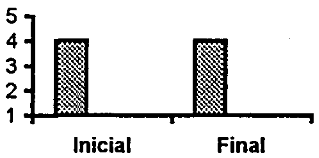
"Número Alturas" (ítem-2)



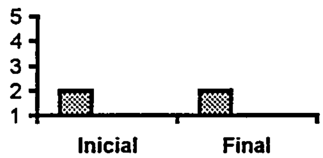
"Representación Alturas" (ítem-2)



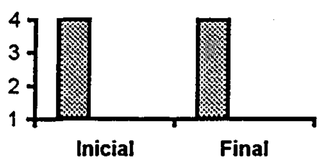
"Criterio igualdad Triángulos" (ítem-3)



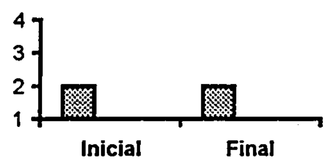
"Aplicación Criterio igualdad" (ítem-3)



"Aplicación de Fórmulas" (ítem-4)



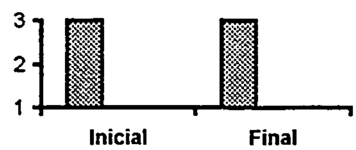
"Equidescomposición" (ítem-4)



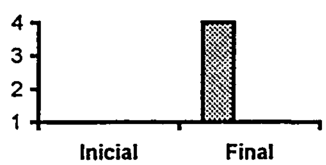
"Reconocimiento de Fórmulas" (ítem 5)

	No identifica ningún elemento		Sólo identifica algunos elementos	Identifica todos los elementos
Asociaciones correctas	Área pentágono/Pentágono T. coseno/Triángulo rect. Área trapecio/Trapecio	Área pentágono/Pentágono T. coseno/Triángulo rect. Área trapecio/Trapecio		
Asociaciones incorrectas	Ángulo int. /Triángulo obst. Área triángulo/Rombo	Ángulo int. /Triángulo obst. Área triángulo/Rombo		
	Inicial	Final		

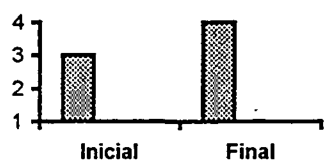
"Aplicación de Fórmulas" (ítem-6)



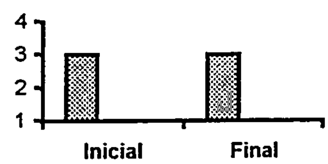
"Relación Angulos" (ítem-7a)



"Aplicación teorema deTales" (ítem-7b)



"Aplicación Criterio Semejanza" (ítem -7c)



Las respuestas de Lluís a los ítems 1, 2, 3a, 4, 5, 6 y 7c son iguales en ambas pruebas, es decir, se mantiene la misma estructura cognitiva respecto a los contenidos matemáticos que abarcan dichos ítems, con los aciertos y las deficiencias que mostrábamos en el apartado 7.4. También las respuestas a los ítems 3b de las dos pruebas son similares, pues en ambas Lluís recurre a la aplicación de la fórmula del área del triángulo para justificar la congruencia de los triángulos rayados. Este recurso es coherente con la identificación que hace de los conceptos de congruencia y equivalencia en el ítem 1, en el que asocia las dos figuras que son congruentes y equivalentes, pero no identifica las figuras que sólo son equivalentes.

Las diferencias que hay en las respuestas de Lluís a los ítems de las pruebas inicial y final son las siguientes:

- En el ítem 7a Lluís elige ahora la opción correcta y la justifica utilizando el paralelismo para identificar la igualdad de los ángulos f y D (Figura 9.4.4), y concluir que la suma de los ángulos β y f es 180° (nivel IV). Recurre a la semejanza de los triángulos DBE y FCE (Figura 9.4.4) —ítem 7b— para justificar que las proporciones se mantienen y, por tanto, que los segmentos AF y FC también están en proporción 2 a 1 (nivel IV). La proporcionalidad de bases y alturas, a la que alude Lluís en su respuesta al ítem 7c, no va acompañada de ninguna justificación que haga referencia a la semejanza de los triángulos. Por ese motivo decidimos mantener el nivel de conocimiento III que asignábamos a la respuesta de este ítem en la prueba inicial.

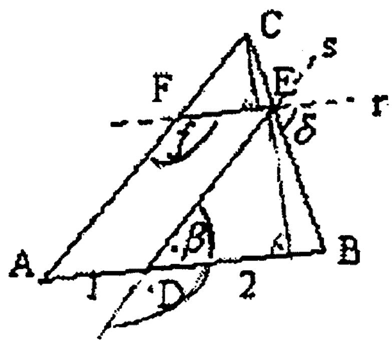
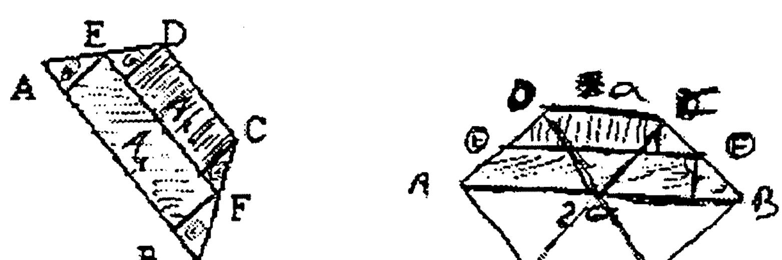


Figura 9.4.4

- Inicia la resolución del problema 8B con la descomposición del trapecio en dos rectángulos y cuatro triángulos, como se muestra en la Figura 9.4.5a. Lluís continúa la resolución con el establecimiento de relaciones entre los lados. Una de las relaciones que identifica es la del lado DC del hexágono con la diagonal grande —AB— del mismo hexágono. De esta forma, Lluís está recordando y aplicando la relación de igualdad entre el lado de un hexágono y el radio de su circunferencia circunscrita, que era tema de debate en el proceso de resolución del problema del hexágono. Después del desarrollo algebraico, Lluís no consigue obtener ningún resultado, ya que no identifica la relación entre las bases de los triángulos que obtiene y el lado del hexágono (grado de desarrollo IV).



(a) (b)

Figura 9.4.5

- Hay errores graves en la resolución que Lluís hace del problema 9B. Algunos de los que más destacan son los siguientes: la identificación del triángulo ABC como rectángulo (Figura 9.4.6); la expresión del área de un cuadrilátero como producto de dos de sus lados, o como producto de su base por su altura; la afirmación de que son iguales las alturas de los triángulos DBE y ADF sobre los lados EB y AF, respectivamente; etc. A esta resolución corresponde un grado de desarrollo I.

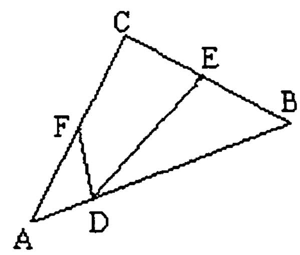


Figura 9.4.6

Estas deficiencias de Lluís no son consecuencia de las interacciones que se han producido en los procesos de resolución conjunta (apartado 8.4). Dos son las razones en las que nos basamos para hacer tal afirmación: en primer lugar, porque en ningún momento de dichos procesos de resolución los alumnos hacen referencia al área de un cuadrilátero ni a las alturas de un triángulo, por lo menos de la forma en que Lluís lo hace aquí; y, en segundo lugar, porque una observación detallada de la figura que Lluís realizó en la resolución del problema 9A (véase Figura 7.4.5, p. 180) nos muestra que, en aquel momento, ya trazó la altura del cuadrilátero, aunque después no la utilizó.

•La resolución que Lluís vuelve a hacer del problema 10 resulta bastante curiosa por varios motivos: porque vuelve a confundir el segmento PC con el lado del cuadrado MNPQ; porque compara erróneamente las áreas de los cuadrados, reproduciendo otra vez el error de compensación que cometía en el episodio de evaluación local del proceso de resolución del problema del cuadrado —multiplica por 8 el área del cuadrado grande y por 5 el área del pequeño—; y porque aplica correctamente el procedimiento de hacer DP = 1 para resolver la ecuación $8DP^2 + 16DP.PC + 3PC^2 = 0$, reproduciendo, de esta forma, la sugerencia que introducía Pere en el proceso de resolución del problema del cuadrado. Asignamos a esta resolución un grado de desarrollo IV.

No hemos observado en Lluís un cambio en la forma de enfocar la resolución de los problemas, ya que sigue utilizando la técnica de aplicar las fórmulas de las áreas de las figuras que intervienen, acompañada de la búsqueda de relaciones entre sus elementos. La aplicación de esa técnica va precedida, en determinados casos (problema 8B), de alguna forma de descomposición de las figuras.

Es lógico que Lluís no haya cambiado su forma de enfocar la resolución de los problemas, puesto que ambos alumnos recurren continuamente y casi de manera exclusiva —sólo en determinados momentos del proceso de resolución del problema del hexágono proponen algún enfoque geométrico que rápidamente es abandonado— a la aplicación de fórmulas en los procesos de resolución orales que efectúan.

Hemos notado en Lluís un cambio en su estructura cognitiva en cuanto a la utilización en la prueba final de conceptos y procedimientos muy concretos que aparecen explícitamente en los procesos de resolución orales. Nos referimos a la incorporación que hace de la semejanza de triángulos como argumento para justificar la respuesta que da al ítem 7b, que tiene su origen en la resolución del problema del triángulo; a la utilización de la igualdad del radio y el lado de un hexágono regular, que aparece en la resolución del problema del hexágono; y a la aplicación del procedimiento de resolver una ecuación de segundo grado con dos incógnitas asignando a una de ellas un valor numérico, que tiene como referente la resolución del problema del cuadrado. El manejo continuo de rectas paralelas y de paralelogramos en las resoluciones de los problemas del triángulo y del paralelogramo puede haber influido en la evolución de la respuesta de Lluís al ítem 7a.

Nos parece importante también comentar cómo evoluciona, en la actuación de Lluís, la forma de expresar algebraicamente la comparación de cantidades desiguales. La comparación de áreas como punto de partida para obtener otras relaciones aparece en la actuación de Lluís a lo largo de esta investigación en cinco ocasiones: en el problema 10 de la prueba inicial, en los tres apartados del problema del cuadrado, y en el problema 10 de la prueba final.

En la resolución del problema 10 de la prueba inicial, Lluís expresa correctamente la relación entre las áreas de los cuadrados. En la resolución del apartado *a* del problema del cuadrado, se produce un desacuerdo entre Pere y Lluís originado por el error de éste al expresar algebraicamente la comparación de las áreas. Dicho desacuerdo acaba con la rectificación de Lluís. En el microanálisis del Capítulo 8 justificábamos ese error refiriéndonos a su falta de control, ya que en la resolución del apartado *b* del problema del cuadrado, Lluís no comete ningún error, y en la del *c* expresa inicialmente la relación de forma errónea, pero después él mismo rectifica.

La aparición del mismo error de compensación de áreas en la resolución del problema 10 de la prueba final nos hace pensar que la falta de control puede ser la causa de dichos errores, pero detrás de esa falta de control puede haber habido una deficiencia en la comprensión inicial de la traducción algebraica de la comparación de dos cantidades desiguales. La corrección de esa deficiencia no está suficientemente arraigada en la estructura cognitiva de Lluís y se manifiesta cuando no se para a pensar muy detenidamente lo que escribe.

9.5. Comentarios generales sobre la evolución de conocimientos

A modo de resumen de este capítulo, comentamos muy brevemente los cambios cognitivos más significativos que hemos observado en cada alumno.

En Rosa hemos notado una profundización en la utilización de procedimientos relacionados con el trazado de paralelas a los lados de las figuras para descomponerlas en otras más sencillas, y una tendencia a utilizar figuras concretas para justificar propiedades que son válidas para cualquier figura.

Ha habido una trasferencia de conocimientos procedimentales de Rosa a Anna, de tal forma que la inclinación de Anna a enfocar los problemas aplicando la fórmula de las áreas se ha cambiado por una tendencia geométrica, que consiste en buscar diferentes descomposiciones de las figuras y comparar los triángulos que se obtienen.

Laia y Jaume utilizan continuamente el procedimiento de comparar los elementos de las figuras para aplicar las fórmulas de sus áreas en las resoluciones conjuntas de los cuatro problemas. Esa forma de actuar ha influido en Laia, ya que ésta afronta la mayoría de los ítems de la prueba final comparando las bases y las alturas de los triángulos, lo que, en algunos casos —ítems 4 y 6—, contribuye a mejorar las respuestas respecto a las de la prueba inicial, aunque en el ítem 3b Laia trate de justificar la congruencia de dos triángulos comparando las expresiones de sus áreas.

La identificación correcta de las alturas de un triángulo y de la apotema de un polígono regular, así como la transmisión de Laia a Jaume del procedimiento de particularización que supone inferir, a partir de una proporción, la igualdad de sus antecedentes y consecuentes, son los cambios más significativos que hemos observado en Laia y Jaume.

Tres son los cambios cognitivos más significativos que hemos observado en Lluís: la utilización de la semejanza como argumento en la justificación de determinadas propiedades; el reconocimiento de la igualdad del radio y el lado de un hexágono regular; y la aplicación del procedimiento de resolver una ecuación de segundo grado con dos incógnitas, asignando a una de ellas un valor numérico. Esta última forma de actuar ha sido fruto de la reflexión individual de Pere después de la realización de la prueba inicial, ya que no la utilizó en aquella ocasión, pero sí en la resolución conjunta del problema del cuadrado y en la prueba final. Además de ése, en Pere sólo hemos observado un cambio en su actuación matemática, el que está relacionado con la utilización que hace de la semejanza de triángulos y de la proporcionalidad de sus lados.

CAPÍTULO 10

MODELOS INTERACTIVOS DE PARES DE ALUMNOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE COMPARAN ÁREAS

La lucha entre primates, el juego de los niños, el galanteo de los pájaros, la discusión de una pareja, el intercambio de vocalizaciones alegres entre madres e hijos, tienen algo en común: su interacción, que se extiende en el tiempo.

R. Bakerman y J. M. Gottman (1989)

10.1. Introducción

Pretendemos identificar las interacciones más significativas que se producen en los procesos de resolución que hemos analizado en el capítulo anterior. Para reconocer y clasificar dichas interacciones, hacemos hincapié en cuatro de sus características principales: el papel comunicativo que desempeña cada alumno; los contenidos matemáticos de las intervenciones que las forman; los episodios en los que tales interacciones se suelen producir con más frecuencia; y su contribución al progreso de los procesos de resolución de los problemas en los que las hemos identificado.

En la caracterización de las interacciones desempeña un papel importante, en primer lugar, los tipos de intercambios que hemos identificado y definido en el Capítulo 2, los cuales forman parte del modelo teórico de las interacciones en los procesos de resolución de problemas por parejas que presentamos aquí, pero que no volvemos a reproducir para no ser reiterativos; y, en segundo lugar, los matices que hemos incluido en el citado capítulo y otros que han ido apareciendo en el análisis detallado de los procesos de resolución. Nos referimos, por ejemplo, a las diferencias entre las diversas características de los intercambios cooperativos, según si las informaciones introducidas tienen un referente que ya haya aparecido anteriormente —como puede ser el enunciado, o repeticiones de informaciones—, o aporten algún elemento novedoso en el contexto global del proceso de resolución.

Otro aspecto que tenemos en cuenta es el carácter progresivo o estancado de los intercambios de tres intervenciones (véase Capítulo 2). La progresión de los intercambios caracterizará un tipo de diálogo con aportaciones nuevas, aunque éstas sean hechas sólo por uno de los interlocutores. El papel que desempeñe el otro interlocutor, en la medida en que pregunte por las informaciones introducidas por su compañero o las valide para después analizarlas en cooperación, contribuirá de forma importante al desarrollo del proceso. Por el contrario, el estancamiento en la reanudación de las intervenciones del primer locutor caracterizará un proceso repetitivo y sin avance.

El progreso también se producirá en los intercambios en paralelo de carácter progresivo en la medida en que, con frecuencia, los alumnos abandonen su aislamiento para confrontar sus respectivos avances o para salir de los bloqueos.

Un análisis más detallado de los intercambios de desacuerdo, como el que mostramos en el Capítulo 2, cierra el presente capítulo.

Como hemos podido observar en el microanálisis (véase Capítulo 8), es difícil encontrar episodios en los que las interacciones estén formadas por intercambios de un solo tipo, por tanto, lo normal es que en las interacciones se combinen intercambios de distinta naturaleza. Los modelos interactivos que destacaremos en este capítulo se caracterizan por el predominio de una clase de intercambios o por una determinada forma de actuar de los alumnos.

10.2. Interacciones cooperativas. Características del trabajo cooperativo

Nuestra idea de trabajo cooperativo en la resolución de problemas por parejas[1] se basa en la contribución equitativa de los alumnos al desarrollo del proceso de resolución y en la asunción de papeles comunicativos similares por parte de cada uno de ellos. Así pues, en el trabajo cooperativo, la interacción que se produce tiene como base los intercambios cooperativos que hemos definido en el Capítulo 2.

Ahora bien, los intercambios, por su propia naturaleza, son elementos que nos sirven para abordar el análisis del discurso desde un punto de vista local. Así, en la definición que hemos dado de intercambio cooperativo, la referencia a la introducción de información equivalente, complementaria o de algún elemento nuevo, siempre se hace sobre el contenido de la intervención anterior y no se tiene en cuenta si dicha información ha sido introducida en otros momentos del proceso de resolución del problema. Esta reflexión, unida al análisis global de los procesos de resolución, nos permite identificar tres tipos de interacciones cooperativas:

a) Las interacciones que utilizan el enunciado del problema como referente para construir los intercambios cooperativos, es decir, los alumnos van construyendo el diálogo aportando información que modifica el contenido de la intervención anterior, pero utilizando informaciones que aparecen en el enunciado del problema.

[1] Esta idea del trabajo cooperativo está de acuerdo con la de Forman (1989), en el sentido de dar prioridad a la reciprocidad en lugar de a la complementariedad, pero difiere de la de otros investigadores como, por ejemplo, D. Lambdin (1993), que considera el concepto de cooperación similar al de reparto complementario de funciones. En consonancia con la anterior, E. A. Forman y C. B.Cazden (1984) consideran que: "las interacciones de cooperación exigen que ambos niños controlen el trabajo del otro, jugando papeles coordinados en la realización de los procedimientos de trabajo" (p. 147). Por su parte, C. Coll y R. Colomina (1990) resumen las perspectivas teóricas desde las que se han dado definiciones operativas de la organización cooperativa de las tareas escolares, asociándolas a la consecución de objetivos y a la obtención de recompensas por parte de cada miembro del grupo. Desde una perspectiva teórica y metodológica, C. Lobato (1997) señala, entre otras, las siguientes características que han de tener los miembros de un grupo para que exista aprendizaje o trabajo cooperativo: la interdependencia e interrelación positivas; la heterogeneidad respecto a las características personales, habilidades y competencias; y la responsabilidad compartida en el liderazgo

Un ejemplo ilustrativo de este modelo lo encontramos en el episodio de lectura de la resolución que Rosa y Anna hacen del problema del triángulo. En él, tras la copia en paralelo de la figura del enunciado, ambas alumnas van refiriendo aspectos que aparecen en el enunciado (Figura 10.2.1), interpretándolos —"Estan partits iguals" (intervención 4)—, o citándolos —"3 a 1" (intervención 5), "aquest és paral.lel a aquest" (intervención 6), "diu que DF és paral.lel a BC" (intervención 7)—.

4. Anna:	[Empieza también a representar la Figura 8.2.26, al mismo tiempo que mira el enunciado]. *Estan partits iguals, sí?*, [divide con puntos los lados CA y CB en tres segmentos iguales, mira lo que hace Rosa].
5. Rosa:	*DBE i FED* [identifica esos triángulos y los señala varias veces. Lee en silencio. Escribe un 3 en el segmento AD y un 1 en el DB y divide el segmento AD en tres partes iguales] *potser tens raó, 3 a 1 / eh?*
6. Anna:	*Sí. / Aquest* [DE] *és paral.lel a aquest* [CA. Ha dibujado el triángulo ABC y traza la recta DE, paralela a CA, Figura 8.2.26].
7. Rosa:	[Lee]. *I l'altre..., diu que DF és paral.lel a BC /*
8. Anna:	*I aquest d'aquí* [traza la recta que contiene a DF, traza también FE, Figura 8.2.26].

Figura 10.2.1

Como es lógico, este tipo de diálogos cooperativos se producen en episodios de lectura, y su finalidad es llegar a comprender el enunciado del problema. En este ejemplo, las alumnas no profundizan en la interpretación del significado de la proporción; además, como decíamos en el microanálisis (apartado 8.2.3.2, p. 212), es manifiesta la incoherencia de las intervenciones 4 y 5. En la 4, Anna hace una división de los segmentos CA y CD en tres partes iguales; en la 5, Rosa interpreta correctamente el enunciado para los segmentos AD y DB. Esta incoherencia se transmite a lo largo de todo el proceso de resolución. Por tanto, en este diálogo cooperativo, las alumnas van haciendo referencia a las informaciones del enunciado sin profundizar en ellas.

b) Suele ocurrir también que, en situaciones de evaluación local y de verificación global del proceso o de la solución, los alumnos repiten cooperativamente los resultados obtenidos hasta ese momento. Estamos ante secuencias de intercambios cooperativos en los que las aportaciones que se producen no son novedosas en el contexto global del proceso de resolución.

Los alumnos suelen utilizar este tipo de interacciones en situaciones de bloqueo, en las que recurren a reproducciones de lo que han conseguido hasta ese momento para que les sirvan de trampolines en la generación de ideas nuevas.

Un ejemplo ilustrativo de este modelo lo encontramos en el episodio de evaluación local de la resolución que Rosa y Anna hacen del problema del triángulo. En él, las alumnas se suelen referir a resultados obtenidos anteriormente con frases que comienzan por: "Aquí hem traçat...", "hem arribat a...", etc (Figura 10.2.2). El diálogo que mostramos en la Figura 10.2.2, que acaba con la validación final de Rosa, se caracteriza por la repetición cooperativa que las alumnas hacen de los progresos realizados en el episodio anterior. En este caso, las alumnas conectan este repaso cooperativo con la introducción de informaciones nuevas. Se está contribuyendo, de esta forma, a impulsar el proceso de resolución (véase apartado 10.7).

51. Rosa: [Pone letras en los vértices]. *Aquí hem traçat aquesta paral.lela* [paralela por E a AB], *que passa des d'aquí...*
52. Anna: *Hem arribat a què aquest...* [MDE].
53. Rosa: ═ *Aquest d'aquí* [MDE] *és igual a aquest* [DBE].
54. Anna: *Perquè la mateixa distància que hi ha d'aquí a aquí* [NA], *hi ha d'aquí a aquí* [DE], *no?*
55. Rosa: *Sí, i el mateix angle, aquest* [NAB] *és aquest d'aquí* [EDB], *veus?*
56. Anna: *Perquè són paral.leles, perquè aquestes dues són paral.les* [EN y AD], *aquesta* [BE] *i aquesta* [DM] *són iguals.*
57. Rosa: *Sí /*

Figura 10.2.2

c) Las interacciones local y globalmente cooperativas son las menos frecuentes en los diálogos entre los alumnos que consideramos, pues exigen de ellos profundización en las ideas, capacidad de análisis de las informaciones aportadas y una cierta dosis de creatividad que les permita ir modificando las aportaciones anteriores. Suelen darse en episodios de análisis, exploración, en los que se analiza alguna información introducida, y, en algunos casos, en los de ejecución. Las interacciones cooperativas de esta naturaleza suelen producir avances significativos, pero no siempre en la dirección de la solución que finalmente los alumnos encuentran.

La mayor parte del episodio de ejecución de la resolución que Jaume y Laia hacen del problema del hexágono, del que mostramos algunas intervenciones en la Figura 10.2.3, se desarrolla siguiendo este modelo de cooperación. Éste es un ejemplo en el que el proceso de resolución avanza de forma significativa, pero en el que los alumnos no llegan a obtener el resultado final, entre otras razones, que expresábamos en el microanálisis (apartado 8.3.2.2, p. 269), porque la ejecución se pone en práctica sin una planificación previa y con deficiencias en la gestión, lo que hace que los alumnos no tengan claro el objetivo que persiguen.

A veces, los intercambios cooperativos suelen aparecer, como analizamos en el apartado 10.5, inmersos en interacciones formadas por intercambios de tres intervenciones, como fronteras de separación que marcan la alternancia en los papeles comunicativos de los interlocutores.

98. Jaume: *A veure, l'àrea del petit* [CDE], *posem triangle 1 i 2* [triángulo ACE]. *El de l'1 és la base aquesta...* [CE].
99. Laia: *Que seria b* [representa b en la Figura 8.3.16].
100.Jaume: *No!, és això* [señala el lado del triángulo], *bueno b , sí, aquesta* h_1 [altura de CDE] *i* h_2 [altura de ACE], A_1 *és igual a* $b.h_1/2$ *i la del triangle 2, és la base, igual, per l'altura 2 partit per 2,* A_2 *és igual a* $b.h_2/2$*, i ara..., ara podem aïllar...*
101.Laia: *És clar, i aquesta* [A1] *la multipliques per 3 i sumes això* [área del triángulo ACE] *i et dóna tota l'àrea* [la del hexágono].
102.Jaume: *Ah val!, ja està, ara fem, o sigui, l'àrea del 2, que és... àrea del 2, que és..., no!, l'àrea de tot l'hexàgon és l'àrea d'aquest, el 2...*
103.Laia: *És que tens costats, hem de posar costats, hem de posar costats, eh?, aquests són costats, això és x , això és x, això és x* [pone "x" en los lados del hexágono].

Figura 10.2.3

10.3. Interacciones basadas en intercambios de tres intervenciones. Características del trabajo dirigido

Ocurre a veces que el diálogo está formado mayoritariamente por intercambios de tres intervenciones, de tal manera que uno de los alumnos —B— desempeña el papel comunicativo de realizar validaciones o preguntas sobre el contenido de las intervenciones anteriores, con la intención de incitar a su interlocutor —A— a continuar el diálogo, y A, por contra, asume la responsabilidad de responder a las preguntas de B y de proseguir el diálogo.

El ejemplo de la Figura 10.3.1, que corresponde al episodio de evaluación local de la resolución que Pere y Lluís hacen del problema del hexágono, es especialmente ilustrativo porque la persistencia de Lluís en la comprensión de las aportaciones de Pere hace que los alumnos revisen determinados conceptos que, de otra forma, se les hubieran pasado por alto. Nos referimos, en particular, a los conceptos relacionados con los siguientes elementos del hexágono regular: radio de la circunferencia circunscrita y su relación con el lado del hexágono; igualdad de los lados del hexágono; y condición de equiláteros de los triángulos obtenidos al unir el centro con cada uno de los vértices del hexágono.

En la medida en que Pere sea capaz de responder a las "exigencias" de Lluís, aportando al diálogo nuevas ideas o modificando las ya aportadas, y Lluís persista en su papel, no conformándose con las respuestas dadas por Pere hasta que comprenda plenamente las aportaciones realizadas por éste, el proceso de resolución será más dinámico y progresivo, creándose oportunidades de aprendizaje para Lluís que son similares a las que se suelen producir en cualquier clase cuando un alumno insiste en sus demandas al profesor y no para hasta haber comprendido las explicaciones que éste le da. En cierta forma, Pere está actuando como un "compañero-tutor" de Lluís.

A pesar de que en esta secuencia el papel comunicativo de cada alumno es importante en sí mismo, no podemos obviar que el que lleva el peso del diálogo —el que lleva la iniciativa, el que dirige, en definitiva, el *homo faber*— es Pere, ya que dicho diálogo progresará, o permanecerá estancado, en la medida en que alimente, o no, el discurso con nuevas ideas. En este caso, podemos calificar el diálogo como progresivo porque Pere va introduciendo informaciones nuevas y Lluís insiste en su comprensión.

22. Pere: *Això és el doble d'això* [indica FC y AB sobre el trapecio].
23.Lluís: *Com?, la base aquesta d'aquí és el doble d'aquesta?* [indica lo mismo que Pere].
24. Pere: *Sí.*
25. Lluís: *Sí?, això no ho sabia jo.*
26. Pere: *Ja, si ho partim per la meitat* [se refiere al hexágono y señala la diagonal AC de su figura], *això* [AC] *són dos costats, si aquests* [FEG] *són triangles equilàters, el radi...* [FG], *bueno, per dir-ho així, el radi és un costat.*
27. Lluís: *El radi?*
28. Pere: *Bueno, la distància d'un vèrtex al centre és un radi, no?*
29. Lluís: *Vale.*
30. Pere: *Doncs aquí* [FC] *són dos radis, bueno, dos costats, i aquí* [AB, Figura 7.4.11] *és un.*
31. Lluís: *Sí, sí, ja t'entenc, bueno, però això partint de què... / però vols dir que la base aquesta* [FC del trapecio de la Figura 7.4.12] *és el doble d'aquesta?* [AB], *sí o no?, segur?*
32. Pere: *Sí, si són triangles equilàters, per força.*
33. Lluís: *No et diu que..., ah!, els triangles, sí, els de dintre són equilàters, molt bé.*
34. Pere: *I això* [FC] *són dos costats i això* [AB], *un.*
35. Lluís: *Hosti!, sí, sí, és clar, molt bé.*

Figura 10.3.1

Una situación parecida a la anterior la encontramos en el episodio de evaluación local de la resolución que Jaume y Laia hacen del problema del paralelogramo (Figura 10.3.2). En este caso, el tema del diálogo es la identificación de las alturas de un triángulo. La interacción que se produce tiene su origen en que las aportaciones de Laia están en contradicción con las que Jaume hace en el episodio anterior (de exploración), lo que lleva a Jaume a preguntar para aclarar el contenido de las intervenciones de su compañera. Por tanto, el papel comunicativo de Jaume es el de preguntar y validar las aportaciones de Laia, favoreciendo, de esta forma, la construcción de un diálogo en el que Laia asume el papel de introducir informaciones nuevas (intervenciones 23 y 27) y de justificarlas, por la necesidad que tiene de responder a las preguntas de Jaume.

Las respuestas de Laia a las preguntas concretas de Jaume sobre la altura del triángulo — "Com seria l'altura?", y "l'altura quina és?" (intervenciones 22 y 24)— generan, igual que en el ejemplo de Rosa y Anna, una oportunidad de aprendizaje para Jaume.

La asociación de este tipo de interacciones con la revisión de conocimientos hace que se den en episodios de evaluación local y que vayan unidas a la creación de oportunidades de aprendizaje para uno de los alumnos, en la medida en que el otro sea capaz de responder a sus preguntas.

21. Laia: *La base aquesta, però llavors l'altura....*
22. Jaume: *Quina és l'altura llavors? Com seria l'altura? Cap aquí* [indica el segmento AM en la Figura 8.3.1].
23. Laia: *És aquesta d'aquí* [vértice B], *cap aquí* [sigue el segmento BA], *ah no!, és aquesta* [indica desde B perpendicularmente a MC].
24. Jaume: *Sí, sí, si agafem el triangle aquest de baix* [ABM] *i la base és aquesta* [AM], *l'altura quina és?* [dándole la vuelta al folio y mirándolo con la base horizontal].
25. Laia: *És aquesta* [indica la de antes].
26. Jaume: *D'aquest triangle?* [indica ABM muy extrañado].
27. Laia: *Sí, vols dir que no?, ja, però baixa cap aquí* [segmento MC] *perquè ha d'anar perpendicular, (...)*
28. Jaume: *Ah!, aquesta d'aquí és igual que aquesta d'aquí, vale!*
29. Laia: *Vale!, vale!, doncs encara millor, fas aquest dibuix d'aquí* [representa la altura de ABM, Figura 8.3.3 y la denomina h_1], *això,* h_1 [escribe h_2 sobre la altura del triángulo ADM].
30. Jaume: *La base ...*
31. Laia: *Però és que això* [se refiere a la altura h2] *és com si fos un costat, aquest* [señala DM].

Figura 10.3.2

10.4. Caracterización de las situaciones de trabajo en paralelo

En el trabajo en paralelo los alumnos actúan —simultánea o alternativamente— por separado, es decir, cada uno de ellos no tiene en cuenta lo que dice o hace el otro, por tanto las acciones a que dan lugar no producen reacción en su interlocutor[2].

Ahora bien, a la vista del análisis de los procesos de resolución que hemos hecho en el Capítulo 8, el trabajo en paralelo se puede producir esencialmente de dos formas: que los alumnos se ignoren por completo[3] —indiferente—, o que entre ellos haya una cierta competencia —competitivo—.

[2] De forma diferente a como lo definimos nosotros, E. A. Forman y C. B. Cazden (1984) identifican las interacciones de procedimiento paralelas como aquéllas en las que "los niños comparten materiales e intercambian comentarios acerca de la tarea. Sin embargo, llevan a cabo pocos —o ninguno— intentos de controlar el trabajo del otro o de informar al otro de sus propios pensamientos o acciones" (p. 147).
[3] En 1932 Mildred Parten (cf. R. Bakerman y J. M. Gottman, 1989) introdujo la categoría de "actividad paralela" en sus trabajos acerca de la participación social entre preescolares, y la definió diciendo que el niño "juega al lado de ellos (otros niños), no con ellos, pero con objetos similares a los de los compañeros

10.4.1. Trabajo en paralelo indiferente

El trabajo en paralelo indiferente se nos presenta en diferentes formas según las características — verbales o gestuales— de los intervenciones que se producen.

a) Puede ocurrir que los alumnos trabajen simultáneamente y en silencio, produciendo sólo intervenciones gestuales relacionadas, generalmente, con indicaciones de elementos de las figuras, con representación de las mismas (episodios de lectura), o con resoluciones escritas de ecuaciones (episodios de ejecución).

b) Otras veces ocurre que, en las situaciones planteadas en el párrafo anterior, uno de los alumnos verbaliza lo que hace, sin ser escuchado por su interlocutor, con el único propósito de seguir nuestras instrucciones iniciales de exteriorizar los pensamientos en todas las situaciones.

Un ejemplo ilustrativo lo tenemos en el episodio de transición/ejecución de la resolución que Pere y Lluís hacen del problema del hexágono, en el que observamos (Figura 10.4.1) cómo Pere intenta aplicar la fórmula del área del trapecio, siendo la mayoría de sus intervenciones gestuales, mientras Lluís va verbalizando y escribiendo los resultados que han obtenido en el episodio anterior.

44. Pere: [No ha escuchado nada de lo que ha dicho Lluís]. *Àrea de l'hexàgon és igual, àrea és igual... Fes-ho per l'àrea de...* [indica el trapecio].
45. Lluís: *Poso els punts per saber el que he d'aplicar* [escribe y va diciendo en voz alta: "alçada triangle = alçada trapezi; base trapezi = base triangle; base trapezi' = base triangle"].
46. Pere: [Al mismo tiempo, por separado, empieza a escribir las igualdades siguientes, correspondientes al área del trapecio:
$A = \frac{b+B}{2}h = \frac{b+2b}{2}h = \frac{3b}{2}h$].
47. Lluís: *Hem d'aplicar això* [se refiere a las líneas que ha escrito] *i ha de sortir, eh?*
48. Pere: [Acaba de escribir la tercera igualdad de su intervención anterior].
49. Lluís: *Hem de fer que surtin els tres per anar simplificant, simplificant fins que surti una relació, és l'única manera que veig jo que es pugui fer (...)*
50. Pere: [No atiende]. *O sigui, per trobar això* [señala, sobre su hexágono, Figura 8.4.6, el triángulo rectángulo ACA′, Figura 8.4.4], *l'àrea del...*

Figura 10.4.1

que se hayan en su entorno" (p. 25). La idea de M. Parten de considerar el "juego paralelo como un 'estadio', en su desarrollo, de jugador solitario a jugador en un grupo social" (p. 29) fue contrastada empíricamente, según Bakerman y Gottman (1989), por Smith a finales de los años 70, quien redujo las seis categorías de observación de M. Parten a tres, entre las que siguió considerando el juego paralelo.

En este episodio, los alumnos no aportan ninguna información nueva y el único elemento de control que se produce es el hecho de que Lluís se para a resumir y escribir las relaciones antes mencionadas.

En general, las situaciones de trabajo en paralelo indiferente suelen acabar con la introducción de alguna información nueva por parte de alguno de los alumnos, lo cual centra la atención en las siguientes intervenciones, o bien, si los alumnos están resolviendo algún tipo de ecuación, en un contraste esporádico de resultados intermedios o finales.

El trabajo en paralelo contribuirá al progreso del proceso de resolución en la medida en que lo hagan ambos interlocutores por separado, con el inconveniente de que los logros que se consigan durante el mismo han de ser explicados al compañero y consensuados con él.

Los alumnos pueden favorecer la comprensión y facilitar los desarrollos algebraicos si interrumpen con frecuencia su trabajo en paralelo para reflexionar cooperativamente sobre lo que han hecho o van a hacer. Esto es lo que ocurre en el episodio de ejecución (del apartado *c*) de la resolución que Pere y Lluís hacen del problema del cuadrado.

10.4.2. **Trabajo en paralelo competitivo**

Con menos frecuencia suelen ocurrir situaciones de trabajo en paralelo en las que los dos alumnos hablan alternativamente sin que las intervenciones de cada uno de ellos produzca reacción en el otro.

Una clase de interacción que se corresponde con situaciones de esta naturaleza es la que tiene lugar cuando cada uno de los alumnos hacen aportaciones sucesivas de ideas, entrando en una especie de "competencia" para, posiblemente, demostrar quién es más capaz.

El grado de control que los alumnos ejerzan de la situación es importante, ya que muchas ideas buenas pueden no ser ni siquiera tenidas en cuenta, pudiéndose imponer la última o simplemente aquélla que haya sido pronunciada con más fuerza. La competencia puede ser, por tanto, positiva en el trabajo en paralelo si los alumnos aprenden a considerar todas las ideas que surjan, de ahí la necesidad de que alguien tome nota de ellas para después valorarlas.

La única situación con un cierto parecido a la que aquí describimos se produce en el episodio de ejecución de la resolución que Jaume y Laia hacen del problema del cuadrado (Figura 10.4.2). Ese episodio, según decíamos en el microanálisis (apartado 8.3.4.2, p. 310), tiene dos particularidades: por un lado, la carrera frenética que los alumnos inician, por separado —ninguno de los dos atiende a lo que dice o hace el otro—, para obtener el resultado final; y, por otro, la falta de control que evidencian cuando no aplican correctamente los logros conseguidos en los episodios anteriores. En este ejemplo, las aportaciones sucesivas de los alumnos están relacionadas con una simple resolución simultánea de un sistema de ecuaciones, por tanto, más que una competencia en la aportación de ideas, lo que se produce es un desafío para ver quien obtiene antes el resultado.

Grosso modo, las actuaciones en paralelo, sobre todo si se gestionan debidamente, pueden ser una fuente importante de ideas que contribuyan a desbloquear el proceso de resolución. No en vano, muchas de las ideas que se aportan en las resoluciones que analizamos tienen su origen en reflexiones individuales en paralelo, o son fruto de pausas en las que los alumnos reflexionan individualmente (véase apartado 10.7).

188.Laia: *És igual a n menys 1, no? Com passa aquí?* [se refiere al 1].
189.Jaume: *Sí* [rectificando].
190.Laia: *n menys 1 partit per 2, llavors z, la z és 1 més n menys 1 partit per 2* [escribe en su folio].
191.Jaume: [Sigue resolviendo por su cuenta].
192.Laia: *La z és 1 més n partit per 2. Fas el mínim que és 2* [por separado].
193.Jaume: *Jo he passat aquest* [no atiende].
194.Laia: *Fas el mínim que és 2; 2 dividit entre 1, 2; 2 entre 2, 1; 2 més n menys 1 que es 1 més n, dividit entre 2.*
195.Jaume: *La y entre la z seria (...) sería:* $\frac{n-1}{1+n}$.
196.Laia: [Calcula la razón $\frac{AB}{BC}$ y escribe el resultado sin mirar lo que hace Jaume].

Figura 10.4.2

10.5. Características del trabajo alternativo

A veces hay una alternancia en la sucesión de los papeles comunicativos de los alumnos a lo largo de un episodio, es decir, durante una serie de intercambios uno de los alumnos valida las aportaciones realizadas por el otro y/o pregunta sobre ellas y, en los siguientes, ocurre al contrario. Esta forma de alternar es, en definitiva, un estilo de interacción en el que cada interlocutor tiene la iniciativa, en periodos cortos de tiempo, en función de los elementos de contenido matemático que va introduciendo. La separación de la alternancia de los alumnos se suele hacer mediante algún o algunos intercambios cooperativos, o de validación, o simplemente mediante una pausa.

La alternancia en los papeles comunicativos cuando pares de alumnos resuelven problemas es una situación que se nos ha presentado en dos ocasiones en las resoluciones de Rosa y Anna —en el episodio de verificación del problema del hexágono y en la primera exploración del problema del paralelogramo—, aunque en ninguna de ellas la contribución de cada alumna al progreso del proceso de resolución es equiparable. También se presenta una ocasión parecida en la resolución del problema del paralelogramo por parte de Laia y Jaume.

a) En el episodio de verificación, parte de cuyas intervenciones reproducimos en la Figura 10.5.1, Anna lleva la iniciativa al principio (intervenciones 13 a 15) con la realización de una nueva figura. Después (intervenciones 16 a 24), Rosa es la que va verificando las relaciones de igualdad entre los triángulos, con alguna demanda de justificación (intervención 19) y tres validaciones de Anna (intervenciones 17, 21 y 23). La cooperación de Anna en la intervención 25 invierte los papeles comunicativos de las alumnas.

18. Rosa: *El costat* [EA] *del triangle* [ACE] *és com si fos la diagonal llarga del rombe* [AOEF] *i després..., per això, són iguals aquest* [triángulo AOE] *i aquest* [AEF], *no?*
19. Anna: *Per què?*
20. Rosa: *El costat* [EA] *del triangle* [ACE] *és com si fos la diagonal llarga del rombe* [AOEF].
21. Anna: *Sí.*
22. Rosa: *N'hi ha tres* [indica los tres rombos AOEF, EOCD y CBAO] *i cadascun dels costats* [señala AE, AC y CE] *del triangle* [ACE] *és la diagonal llarga de cadascun dels rombes, no?*
23. Anna: *Sí, sí, jo ho faria així* <pausa(12)> [Recalca los lados de los rombos y acaba de completar la Figura 7.2.27, trazando las líneas FB, BD y DF] <pausa(7)>
24. Rosa: *I aquest costat* [AO] *i aquest costat* [FA] *i aquest d'aquí* [FO] *són tots iguals, és un triangle regular, i amb aquest d'aquí* [ABO] *són dos triangles equilàters.*
25. Anna: *És igual perquè...* [señala todos los segmentos que unen el centro del hexágono con sus vértices], *aquests...* [se refiere a los triángulos equiláteros en que queda dividido el hexágono al trazar los segmentos OA, OB, etc.]. *A veure, hi ha sis triangles. Són iguals perquè aquest costat d'aquí* [BC] *és igual que aquest d'aquí* [BO]. *Està format per triangles equilàters, l'hexàgon, no?*
26. Rosa: *Sí.*
27. Anna: *Per tant, aquest triangle* [OBM] *que ens queda aquí dintre és el mateix que aquest* [MBC] *i aquest* [OMD] *és igual que aquest* [MCD] *perquè està format pel mateix.*
28. Rosa: *És clar.*
29. Anna: *I tot és el mateix* [se refiere a los otros rombos].

Figura 10.5.1

En realidad, Anna aprovecha los contenidos de las intervenciones 20, 22 y 24 de Rosa para explicitar la descomposición del hexágono en seis triángulos equiláteros (intervención 25) y repetir, en las intervenciones 27 y 29, lo que Rosa ha dicho anteriormente. Por tanto, en este episodio Rosa contribuye de una forma mucho más efectiva que Anna al desarrollo del proceso, ya que ella es la que descompone el hexágono en tres rombos (intervención 16); la que introduce la diagonal larga del rombo, con la intención de significar que lo divide en dos triángulos iguales; y la que justifica (intervención 24) la igualdad de los triángulos en que queda dividido el hexágono. Así pues, en este caso hay alternancia, pero el desequilibrio en las aportaciones de cada alumna es evidente.

b) Rosa y Anna alternan con mayor frecuencia sus papeles comunicativos en la primera exploración del proceso de resolución del problema del paralelogramo (véase Figura 8.2.10 del apartado 8.2.12, pp. 188-189). Esa mayor frecuencia en la alternancia, compensada con una menor persistencia —menor número de intercambios seguidos encabezados por cada alumna—, se debe a la naturaleza del episodio, caracterizado por la búsqueda exploratoria, en el que las alumnas no tienen la misma seguridad a la hora de introducir informaciones que en un episodio de verificación. Precisamente la incertidumbre de la validez de las aportaciones que se hacen contribuye a cambiar el papel continuamente.

En este episodio, Anna y Rosa se distribuyen, de forma bastante equitativa, los papeles de preguntar y de validar las aportaciones realizadas por la otra, pero hay un cierto predominio de Rosa en la aportación de ideas, aunque la contribución de Anna al desarrollo del proceso también es efectiva.

c) Otro ejemplo de alternancia lo tenemos en el episodio de lectura del proceso de resolución del problema del paralelogramo desarrollado por Jaume y Laia. En este caso, la alternancia se combina con el trabajo en paralelo, ya que mientras uno de los alumnos representa la figura del enunciado, el otro lee y observa en silencio, y después se cambian los papeles (Figura 10.5.2). Ambas observaciones, inicialmente silenciosas, finalizan ahora con sendas aportaciones, una por cada alumno. Se produce, pues, un modelo interactivo alternativo o simétrico que es fructífero porque introduce informaciones nuevas, la última de las cuales (intervención 6) es el origen del diálogo exploratorio que sigue al episodio de lectura.

2. Jaume:	[Empieza a representar la Figura 8.3.2].
3. Laia:	[Vuelve a leer en silencio y observa cómo Jaume representa la Figura 8.3.2]. *És base per altura, l'àrea* [del paralelogramo].
4. Jaume:	[Acaba la representación, escribe: A = b.h, y comienza a leer el enunciado en silencio].
5. Laia:	*I ja està, sense dividir, no?* [empieza a representar la Figura 8.3.3].
6. Jaume:	[Mientras tanto Jaume vuelve a leer el enunciado y observa cómo Laia representa la Figura 8.3.3]. *La suma de les dues altures, la d'aquest* [AMD] *i aquest* [ABM] *és la del paral.lelogram total, no?* [señala con el dedo las alturas de los dos triángulos rayados sobre los lados AM y AB, respectivamente, y la del paralelogramo].

Figura 10.5.2

En general, hay en esta forma alternativa de actuar un reparto sucesivo de papeles por parte de los dos alumnos que contribuirá al progreso del proceso de resolución en la medida en que, como ocurre en el apartado *b* de la página anterior, cada alumno vaya introduciendo en el diálogo informaciones nuevas.

10.6. Modelo interactivo de complementariedad de funciones

El modelo interactivo que llamamos de complementariedad de funciones coincide con la idea de cooperación de D. V. Lambdin (1993), en el sentido de que los alumnos asumen papeles comunicativos complementarios en la resolución de problemas y hay, entre ellos, un reparto, implícito o explícito, de responsabilidades en el proceso de resolución.

La idea de complementariedad, que no supone una simple separación de funciones, la interpreta D. V. Lambdin cuando compara las actuaciones de dos futuras profesoras de Enseñanza Primaria en la resolución de problemas, de la forma siguiente: "Ella se sentía libre para pensar, planificar e interpretar porque sabía que Kris era responsable de la mayor parte de la implementación", y continúa su frase diciendo: "Además, cuando los individuos tienen roles complementarios, cada persona puede regular las acciones del otro reflexionando, guiando, reforzando, o etiquetando el trabajo del otro" (pp. 61-62).

En nuestro caso, se nos presenta una situación de complementariedad de funciones en el episodio de ejecución/revisión de la resolución que Rosa y Anna hacen del problema del cuadrado, parte de cuyo diálogo reproducimos en la Figura 10.6.1.

[Anna ha estado observando cómo Rosa plantea y resuelve el sistema].

88. Anna:	[Observa cómo Rosa resuelve el sistema]. *Quants quadrats sortiran aquí dins?* [se refiere a las veces que el cuadrado grande contiene al pequeño].
89. Rosa:	*9* [apunta el 10 y el 8 sobre los segmentos BC y CD respectivamente].
90. Anna:	*9?, o més de 9?*
91. Rosa:	***9**, **1** a **9**, pues dintre ha d'haver **9**, com **18** a **2**, no? CB és igual a **10** i aquest* [DC] *és **8**, ja està fet. BC entre AB, **10** entre **8**, quant és?* [acaba la resolución y hace la división].
92. Anna:	*1 coma...*
93. Rosa:	***= 1** coma **2**, **1'25**.*
94. Anna:	*Més petit que abans.*
95.Rosa:	[Repasa]. *Què he fet? CB menys AB és igual a **2**. Sí, sí, sí.*

[En las intervenciones siguientes, Rosa repasa la resolución del sistema].

Figura 10.6.1

En este episodio, que analizamos en el apartado 8.2.4.2 (p. 235), Rosa plantea y resuelve un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, al mismo tiempo, trata de responder algunas preguntas que hace Anna. Mientras tanto, Anna, desde su situación de observadora de la realización de los cálculos que hace su compañera, introduce en el diálogo diversos elementos de control: la pregunta de la intervención 88; la demanda de validación de la 90; y la afirmación de la intervención 94, que pone en duda el resultado obtenido por Rosa y la obliga a repasar los cálculos.

En este caso las intervenciones de Anna no afectan al desarrollo del proceso porque las respuestas que provocan y las revisiones que originan no profundizan en el tema que tratan (relación entre los lados de los cuadrados y sus áreas).

Un ejemplo similar, pero mucho más breve, lo tenemos en el episodio de ejecución de la resolución que Jaume y Laia hacen del problema del triángulo. En este caso, Laia, desde su perspectiva observadora, provoca la corrección del error que Jaume había cometido.

Como hemos observado, los dos casos en los que se nos presenta la complementariedad de funciones están asociados a episodios de ejecución y siempre uno de los alumnos está realizando cálculos o desarrollando expresiones algebraicas.

D. V. Lambdin (1993) observa en su investigación que la pareja de alumnas con más éxito en la resolución de problemas es en la que se da una mayor diferenciación de funciones entre las alumnas.

10.7. Modelo interactivo de relanzamiento del proceso de resolución

En situaciones de bloqueo, generalmente en episodios de exploración, los alumnos reproducen esquemas de actuación que se basan, esencialmente, en reflexiones individuales, tras las cuales suelen introducir informaciones nuevas que son analizadas conjuntamente y que sirven para relanzar la búsqueda exploratoria de relaciones entre los elementos de las figuras. Éste es el caso del modelo de interacción que Rosa y Anna reproducen por tres veces consecutivas en el episodio de análisis/exploración del proceso de resolución del problema del triángulo (apartado 8.2.3.2). La Figura 10.7.1 es la reproducción que hacíamos (p. 213) para ilustrar el modelo interactivo al que nos referimos.

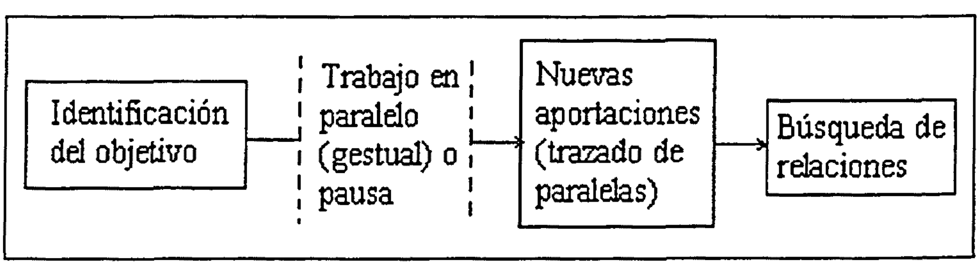


Figura 10.7.1

Como decíamos en el microanálisis de ese episodio, cuando las alumnas no saben cómo seguir, explicitan el objetivo del problema y reflexionan de forma individual. Esa reflexión individual siempre acaba con la introducción de alguna información que abre nuevas perspectivas a la búsqueda de relaciones entre los elementos de las figuras. En la Figura 10.7.2 mostramos una de las tres veces en las que Rosa y Anna recurren a esa forma de actuar en citado episodio de análisis/exploración. En ese episodio, Rosa y Anna contribuyen de forma considerable al progreso del proceso de resolución tanto por lo que se refiere a las aportaciones que realizan, todas ellas relacionadas con el trazado de rectas paralelas y con la identificación de relaciones entre los segmentos y figuras que resultan, como por la evolución de la intencionalidad de las acciones de las alumnas.

Identificación del objetivo	26. Anna: *Relació entre...* [señala FDE y DBE]. 27. Rosa: == *Entre aquest d'aquí* [FDE] *i aquest d'aquí* [DBE] <pausa(25)> [señala los segmentos ME y FM].
Pausa	
Búsqueda de relaciones entre los elementos de la figura	28. Anna: [Traza por F una paralela a AB, Figura 8.2.26]. *Si tracem...* [indica dicha paralela en la Figura 8.2.24]. *Aquest* [FME] *és igual que aquest* [FLE], *no?, seran iguals. Aquest que queda dalt* [FLC], *no és igual que aquest?* [DBE], *no, o sí? Jo diria que sí* [se va a la figura del enunciado y simula trazar la paralela a AB por F], *no.* 29. Rosa: [Hace igual]. *Sí* 30. Anna: *Sí que hauria de ser, perquè si d'aquí* [A] *aquí...* [N, sigue la recta EN]/ 31. Rosa: *El tros d'aquí* [DB] *com seria amb aquest d'aquí?* [DE]. 32. Anna: *Jo diria que aquest tros d'aquí a aquí* [AN] *és igual que aquest tros d'aquí a aquí* [DE], *clar, perquè són paral.leles, una paral.lela...* [indica DE y AC]. 33. Rosa: *Sí, sí, aquest d'aquí* [DE] *seria el mateix que aquest d'aquí* [FL].

Figura 10.7.2

Un ejemplo que se parece al anterior, ya que los alumnos recurren continuamente a reflexiones individuales en situaciones de estancamiento, es el que se da en cinco ocasiones en el episodio de análisis/exploración de la resolución que Laia y Jaume hacen del problema del triángulo. En dicho episodio, ambos alumnos utilizan las frecuentes pausas para pensar, y, tras ellas, introducen informaciones nuevas que son analizadas conjuntamente. En muchos casos tales informaciones son rechazadas, pero en alguno de ellos la información que aportan resulta relevante para el desarrollo del proceso.

10.8. Características de los intercambios de desacuerdo

En este apartado pretendemos analizar las características de los intercambios de desacuerdo que se producen en los procesos de resolución que presentamos en el Capítulo 8, y lo hacemos fijándonos en los papeles comunicativos de los alumnos, en las causas que originan los desacuerdos y en su relación con las oportunidades de aprendizaje.

De los once intercambios de desacuerdo que hemos identificado en los procesos de resolución que hemos analizado, sólo el que se produce en el episodio de verificación de la resolución que Laia y Jaume hacen del problema del paralelogramo (Figura 10.8.1) no acaba con un acuerdo mutuo entre los dos interlocutores.

54. Jaume: *Ah!, pues sí, si l'altura és igual al costat és que és rectangle, el triangle, no?*
55. Laia: *No, no és rectangle* [girando el folio], *o sí?*
56. Jaume: *Ho ha de ser si un dels seus costats és l'altura.*
57. Laia: *Sí, sí, no, no és rectangle* [dudando al mirar la figura del enunciado] *perquè si això* [DM] *continua recte, encara menys, si aquesta és així i fa així* [pone, con las manos, la posición de las rectas AC y DM], *aquest és més gran* [indica el ángulo DMC] <pausa(10)>

Figura 10.8.1

Como decíamos en el microanálisis de dicho episodio (apartado 8.3.1.2, p. 253), no es el mantenimiento de opiniones contrarias, defendidas o no con argumentos, lo que provoca el desacuerdo, sino los cambios de opinión y las dudas de Laia sobre si el triángulo al que se refieren es o no rectángulo. Tras la pausa, los alumnos inician una nueva lectura y el tema objeto de discrepancia no vuelve a aparecer.

Los demás intercambios de desacuerdo se ajustan a la definición que dimos en el Capítulo 2, es decir, acaban cuando los dos interlocutores se ponen de acuerdo sobre el contenido de la intervención que provocó las discrepancias.

a) Analizamos, en primer lugar, el papel comunicativo que asume cada alumno en el desacuerdo, en cuanto a que el mantenimiento de las afirmaciones por parte de cada alumno puede ir acompañado o no de "justificaciones o rectificaciones que restablezcan la verdad de los hechos" (Kerbrat-Orecchioni, 1994, p. 241). En nuestro caso, las correcciones de las posturas iniciales se pueden producir esencialmente de dos formas:

- Si no hay justificación por parte del alumno que reacciona negativamente, y es el alumno que introduce la aserción el que rectifica tras la respuesta negativa de su compañero. Es decir, si un alumno se autocorrige y esa autocorrección no es consecuencia de las explicaciones del interlocutor. Hay un ejemplo ilustrativo de este tipo de desacuerdo en el episodio de exploración de la resolución que Rosa y Anna hacen del problema del paralelogramo (Figura 10.8.2), en el que Rosa rectifica su opinión inicial sin ninguna explicación de su compañera.

38. Rosa:	[Mientras tanto Rosa recalca los segmentos MH y FM en la Figura 8.2.6]. *Aquest costat d'aquí* [MH] *i aquest costat d'aquí* [FM] *és el mateix, no? Aquest costat d'aquí i aquest d'aquí* [repite] *és el mateix, no?* /
39. Anna:	*No.*
40. Rosa:	*Com que no? Aquest és el mateix, aquest és el mateix, aquest és el mateix* [señala los lados AF, FM, AH y HM] *Ah no! Això representa un altre paral.lelogram* [FMHA], *aquest d'aquí* [HM] *és igual que aquest d'aquí* [AF], *i aquest d'aquí* [AH] *és igual que aquest d'aquí* [HM] /

Figura 10.8.2

- Si las reacciones negativas de los alumnos van acompañadas de explicaciones o justificaciones, es decir, si la modificación de la postura inicial por parte de alguno de los alumnos ha sido consecuencia de un diálogo en el que cada alumno defiende su opinión de forma razonada. Un ejemplo ilustrativo de este tipo de desacuerdo se produce en el episodio de ejecución de la resolución que Rosa y Anna hacen del problema del cuadrado (Figura 10.8.3).

58. Anna:	*Pues CB més AB és igual a 16.*
59. Rosa:	*No, perquè aquest 16 no és el perímetre.*
60. Anna:	*No, fem la raó d'1 a 4, no?, és a dir, si aquest* [indica el lado del cuadrado de la Figura 8.2.35a] *és 16, els números ens els inventem, aquest* [repite], *és 16, aquest* [lado de la Figura 8.2.35b] *serà 4, no?, raó d'1 a 4, no?*
61. Rosa:	*Sí, sí.*

Figura 10.8.3

Observamos que la corrección del punto de vista divergente se produce como consecuencia de las explicaciones que las alumnas se dan.

En este tipo de desacuerdos, suele ocurrir con frecuencia que las explicaciones que los alumnos dan tienen su origen en preguntas directas que se hacen tras las discrepancias iniciales. Un ejemplo ilustrativo lo protagonizan Pere y Lluís en el episodio de ejecución del proceso de resolución del problema del hexágono (Figura 10.8.4).

98. Pere: *Un costat i mig* [indica $A_1.1.5$], *vale?*
99. Lluís: *El c no es tatxa.*
100. Pere: *Sí.*
101. Lluís: *No, on es tatxa?*
102. Pere: *Tres costats* [indica $3cA_2$] *i aquí un costat i mig* [indica $A_1.1.5$].
103. Lluís: *Ah!* [pone c en la expresión $3c.A_2= A_1.1.5$, obteniendo, $3c.A_2= A_1.1.5.c$ y tacha], *ja està, ja està, vale!*

Figura 10.8.4

b) En segundo lugar, en cuanto a las causas que provocan los intercambios de desacuerdo, hemos de decir que muchos de los intercambios se producen en episodios de ejecución y de verificación final, y tratan, por tanto, sobre las operaciones propias de los desarrollos algebraicos —simplificaciones, traducciones algebraicas, etc.—; y otros se originan cuando uno de los alumnos interpreta erróneamente lo que quiere decir el otro, o cuando se producen errores accidentales en los cálculos o simples despistes. En el episodio de lectura del proceso de resolución del problema del triángulo, Laia interpreta erróneamente el paralelogramo al que se refiere Jaume (Figura 10.8.5).

15. Jaume: *Aquesta diagonal, sí* [se refiere a EF].
16. Laia: *No, la diagonal és aquesta, aquesta, la d'enmig* [indica el segmento FD].
17. Jaume: *Això* [EF], *no?*
18. Laia: *No, l'altra* [se refiere a FD].
19. Jaume: *No, és aquest paral.lelogram d'aquí* [indicando DECF].
20. Laia: *I aquest...* [ADEF], *ah no!, vale, vale* /

Figura 10.8.5

c) Por último, las discrepancias entre los alumnos evidencian que uno de ellos desconoce (o conoce de forma incorrecta) la información que introduce el otro. Por tanto, en las situaciones que no sean debidas a errores accidentales, a despistes o a malas interpretaciones, la confrontación de puntos de vista divergentes supondrá, de hecho, una oportunidad de aprendizaje para uno de los alumnos. Podemos interpretar que ocurre cuando Rosa trata de hacer una simplificación con la que Anna no está de acuerdo en el episodio de ejecución del proceso de resolución del problema del cuadrado (Figura 10.8.6).

115.Rosa: [Vuelve a escribir de nuevo el sistema y lo resuelve fijándose en lo que Anna ya ha hecho]. *Ara l'AB, que seria menys n/2* [se refiere al resultado de la expresión $n^2 - \frac{n^2+n}{2}$].

116.Anna: *No, dóna això* [$\frac{n^2-n}{2}$].

117.Rosa: *No, perquè aquest* n^2 *amb aquest* [trata de simplificar los n^2 de la expresión $n^2 - \frac{n^2+n}{2}$], *se'n va.*

118.Anna: *Com que se'n va?*

119.Rosa: *Queda un* [se refiere a un n^2]. *Ah sí!, sí, vale. (...)*

Figura 10.8.6

CAPÍTULO 11

CONCLUSIONES, LIMITACIONES, EXPECTATIVAS E IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Los resultados son generalizables en lo que la información dada permite a los lectores decidir si el caso es similar al suyo.

R. Stake (*cf. J. Martínez Bonafé, 1988)*

11.1. Establecimiento de conclusiones

El diseño de esta investigación, basado en la utilización de una metodología observacional para analizar en profundidad determinados casos, condiciona las conclusiones que vamos a extraer, por lo que no podemos hacerlas extensibles a cualquier población, ni a otros tipos de problemas, ni las debemos aplicar en contextos que no sean los que aquí hemos considerado.

Establecemos las conclusiones siguiendo el orden de los objetivos que habíamos propuesto en el Capítulo 3.

a) Sobre la caracterización de las interacciones

En cuanto a la caracterización de las interacciones en los procesos de resolución (objetivo 1), forman parte de las conclusiones de esta investigación los elementos teóricos que hemos elaborado para el estudio de las mismas y los modelos interactivos que hemos identificado en los análisis empíricos de los procesos de resolución. De todos ellos, resaltamos a continuación los siguientes:

- Las definiciones de intercambio e interacción, y la identificación, y posterior definición, de una tipología de intercambios de una, dos, tres, o más de tres intervenciones. En esa clasificación hemos tenido en cuenta las características de los contenidos matemáticos de las intervenciones que forman los intercambios y la dimensión interlocutiva del discurso.

- La clasificación que hemos hecho de dichos intercambios en local y globalmente progresivos y en repetitivos.

- La identificación, en los procesos de resolución que hemos analizado, de las siguientes interacciones (o modelos interactivos): interacciones cooperativas; modelo interactivo de trabajo dirigido; interacciones en paralelo; modelo de trabajo alternativo; modelo interactivo de complementariedad de funciones; modelo interactivo de relanzamiento del proceso de resolución; e intercambios de desacuerdo (véase Capítulo 10).

b) Sobre la metodología del análisis de los procesos de resolución

Por lo que se refiere a la metodología de análisis de los procesos de resolución y a su aplicación concreta a los casos que consideramos (objetivo 2), forman parte de estas conclusiones:

• La propuesta y aplicación de un método de análisis que tiene en cuenta las dimensiones interactiva, cognitiva y metacognitiva de esta investigación, y que consta de cuatro fases: identificación de los tipos de intercambios; división y calificación de los episodios; análisis microscópico de cada episodio; y visión general del proceso de resolución.

• Algunos de los elementos teóricos que hemos introducido o adaptado de otros autores, como la división entre conocimientos conceptuales y procedimentales; la definición de enfoque de un problema; la de oportunidad de aprendizaje, modificando la que sugieren P. Cobb y J. W. Whiteack (1996); y la adaptación del modelo de división del proceso de resolución en episodios de Schoenfeld (1985b), en el que hemos introducido elementos interactivos.

El análisis cualitativo de los procesos de resolución y las características específicas de cada alumno y de cada pareja hacen que las conclusiones se encuentren al final del microanálisis de cada episodio, o de cada proceso de resolución. Trataremos de resumir aquí algunas de las que nos parecen más significativas y que resultan de la aplicación del método de análisis que hemos descrito en los párrafos anteriores.

• Los alumnos tienen tendencia a enfocar la resolución de los problemas de una sola forma —enfoques geométricos basados en descomposiciones de las figuras, por parte de Rosa y Anna, y enfoques algebraicos basados en aplicaciones de fórmulas, por parte de los otros alumnos—.

• En muchos momentos de los procesos de resolución de Rosa y Anna, hemos observado que Rosa asume la responsabilidad de la continuación del diálogo, haciéndolo de forma progresiva, mientras que Anna estimula dicho progreso validando las intervenciones de su compañera y preguntando sobre ellas. Una distribución de papeles comunicativos similar ocurre en los procesos de resolución de Pere y Lluís.

• Las resoluciones de Laia y Jaume se caracterizan por un mayor protagonismo de Laia, que, con sus intervenciones directivas, provoca frecuentes cambios en la orientación de los procesos de resolución, por lo que en general no profundizan en el análisis de las informaciones que introducen. En cambio, en algunos episodios de la resolución del problema del cuadrado, el protagonismo es de Jaume.

• En el caso de los procesos de resolución de Pere y Lluís, hemos observado en Lluís una persistencia en comprender todas las aportaciones que hace su compañero, quien, a pesar de ir adelantado en casi todas las resoluciones, es capaz de esperar a Lluís y de explicarle todo lo que no comprende. En muchos momentos, ambos alumnos reproducen un esquema de actuación que se asemeja al de una tutoría entre alumnos, según D. Kroll, J. Masingila y S. Mau (1992).

- Las oportunidades de aprendizaje que hemos identificado están relacionadas con hechos y conceptos —apotema y radio de un hexágono regular, relación entre el lado y el radio en un hexágono regular— y con determinadas técnicas —representación de las alturas de un triángulo y simplificaciones algebraicas—.

- Los desacuerdos entre los alumnos se producen, en algunos casos, cuando uno de ellos interpreta erróneamente lo que quiere decir su compañero, y, en otros, son discrepancias sobre relaciones entre los elementos de las figuras o sobre simplificaciones algebraicas. En la mayoría de los casos se resuelven cuando, tras las divergencias iniciales, uno de los dos alumnos pide explicaciones al otro.

- Los procesos de visualización desempeñan un papel importante en la resolución de los problemas que proponemos, ya que los alumnos no sienten la necesidad de justificar las informaciones que introducen de otra forma que no sea la simple apreciación visual de las relaciones entre elementos de las figuras.

- Las informaciones nuevas que suelen introducir los alumnos surgen con frecuencia de reflexiones individuales, ya sea después de pausas, o como consecuencia de trabajos en paralelo.

c) Sobre las características de los problemas que comparan áreas

Por lo que se refiere a las características de los tipos de problemas que consideramos y a los contenidos matemáticos que utilizan los alumnos en las resoluciones que hacen (objetivo 3), forman parte de estas conclusiones:

- El método para identificar los contenidos matemáticos involucrados en la resolución de los problemas que comparan áreas de superficies planas (véase Capítulo 5), que está basado, principalmente, en la construcción del espacio básico de cada problema, que definimos en el Capítulo 2.

- La identificación de los contenidos matemáticos de los problemas que comparan áreas de superficies planas, y la clasificación de los mismos en dos tipos: los que están relacionados con aspectos geométricos de la comparación —congruencia, equivalencia por descomposición y por complemento, y utilización de mallas poligonales—, y los que lo están con los aspectos aritméticos, es decir, asociados al carácter numérico y bidimensional del área —aplicación de fórmulas, reducción de la comparación a la de magnitudes longitudinales, aplicación numérica de la semejanza, entre otros—.

- Los contenidos matemáticos que utilizan los alumnos en las resoluciones, que son los siguientes: algunos hechos y conceptos —apotema, radio de un hexágono, fórmulas de las áreas de las figuras, etc.—; el trazado de rectas paralelas; descomposiciones de las figuras en otras; apreciaciones visuales de figuras congruentes; aplicaciones de fórmulas; identificaciones de bases y alturas en los triángulos; algunos tipos de particularizaciones; y aplicaciones del lenguaje algebraico.

d) Sobre la evolución de los conocimientos de los alumnos

En cuanto a la evolución de los conocimientos de los alumnos como consecuencia de las interacciones que se producen en la resolución de problemas (objetivo 4), concluimos:

- Se ha producido en Anna, y sólo en ella, un cambio en la forma de enfocar la resolución de los problemas 8B y 9B, ya que en la prueba inicial aplicaba las fórmulas de las áreas de las figuras que intervenían, y en la final los resuelve descomponiendo las figuras en otras. Ese cambio se debe a la continua utilización de los procedimientos de descomposición en la resolución conjunta de los problemas del paralelogramo, del hexágono y del triángulo.

- No se ha producido en Rosa un cambio relevante en sus estructuras cognitivas. En todo caso, hemos observado en ella una profundización en la utilización de procedimientos geométricos y una persistencia en la utilización de figuras concretas para justificar propiedades que son válidas para cualquier figura.

- La aplicación de fórmulas en los procesos de resolución conjunta incide de formas diferentes en las respuestas de Laia a los ítems de la prueba final: negativamente, en la manera de justificar la congruencia de los triángulos del ítem 3b, lo que pone en evidencia su confusión sobre los conceptos de equivalencia y congruencia; y, de forma positiva, en la justificación de la relación entre las áreas de los triángulos de los ítems 4 y 6, en la identificación de la fórmula del área de un polígono regular y de la apotema del mismo, y en la rápida evolución hacia la identificación correcta de las alturas de un triángulo, a partir de su asociación inicial con el concepto de perpendicularidad.

- Sólo hemos observado en Jaume cambios muy concretos en su estructura cognitiva, en particular, los relacionados con la representación de las alturas de un triángulo y con el concepto de apotema, en ambos casos como consecuencia de sendas oportunidades de aprendizaje que se le presentaban en los procesos de resolución del problema del paralelogramo y del hexágono, respectivamente. También ha habido una transmisión de conocimientos (errónea) de Laia a Jaume en relación a la inferencia $\frac{A_1}{A_2} = \frac{5}{8} \Rightarrow$ $A_1 = 5$ y $A_2 = 8$, que Laia introduce en la resolución del problema del cuadrado, a pesar de que, en este caso, dicha inferencia supone, de hecho, una particularización.

- Hemos notado en Lluís un cambio en su estructura cognitiva en relación a conceptos y procedimientos muy concretos que aparecen explícitamente en los procesos de resolución orales, como son: la incorporación de la semejanza de triángulos como argumento para justificar la respuesta que da al ítem 7b; la utilización de la igualdad del radio y el lado de un hexágono regular; y la aplicación del procedimiento de resolver una ecuación de segundo grado con dos incógnitas asignando a una de ellas un valor numérico. Además, en la traducción algebraica de la comparación de dos áreas desiguales, hemos observado un retroceso de la prueba final respecto a la inicial.

- Hay modificaciones poco significativas en la estructura cognitiva de Pere, si exceptuamos dos aspectos concretos: la utilización de la semejanza de triángulos y de la proporcionalidad de sus lados en las justificaciones de las respuestas a algunos ítems de la prueba final; y la aplicación del procedimiento de resolver una ecuación de segundo grado con dos incógnitas asignando a una de ellas un valor numérico, que es fruto de la reflexión individual de Pere después de la realización de la prueba inicial.

11.2. Limitaciones y expectativas de ampliación de la investigación

No es nuestra intención entrar aquí a analizar exhaustivamente las limitaciones[1] (y las ventajas) que puede tener el estudio de casos en la investigación educativa, sino explicar algunas de las que hemos introducido en el diseño propuesto.

Algunos comentarios retrospectivos —como los que hacemos a continuación— sobre estas limitaciones contribuirán a resituar la investigación, a dar a los resultados y conclusiones el valor y la credibilidad que les corresponde y, al mismo tiempo, a identificar posibles expectativas de ampliación del presente trabajo.

Enfocamos las limitaciones y expectativas de ampliación de forma conjunta y desde tres puntos de vista: el del contexto, el de los alumnos y el de la tarea.

a) Somos conscientes de que en la resolución de problemas, o en cualquier otra actividad educativa, influyen conjuntamente muchos factores y que su consideración por separado puede llevarnos a conclusiones desviadas.

En nuestro caso, la reducción del análisis que hacemos a factores cognitivos —conocimientos conceptuales y procedimentales—, interactivos y a algunos metacognitivos —los relacionados con el control— y, por tanto, la omisión intencionada de los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y otros metacognitivos (conocimientos y creencias sobre fenómenos cognitivos) introduce unas limitaciones que se han de tener en cuenta a la hora de interpretar las conclusiones.

Un estudio más profundo analizaría las repercusiones que tienen los factores antes citados, considerados conjuntamente, en la actuación de los alumnos en situación de resolución de problemas.

b) Es importante hacer referencia a tres decisiones que hemos tomado en el diseño que quizás han tenido una gran influencia en la delimitación de la línea seguida en esta investigación. Nos referimos a la agrupación de los alumnos por parejas, a la no intervención del observador en el proceso de resolución y, sobre todo, a la decisión de haber sacado las observaciones fuera de un contexto —el de la clase— que hubiera aportado, sin duda, otros elementos de análisis posiblemente más enriquecedores por lo que se refiere a nuestra actividad educativa diaria. Ni que decir tiene que la variación de esas limitaciones abriría perspectivas a nuevas investigaciones.

c) Las limitaciones introducidas por la consideración de problemas relacionados con la comparación de áreas de figuras geométricas que tienen un alto contenidos de conceptos matemáticos —coherentes con las características del análisis propuesto—, pueden ser fácilmente modificadas para estudiar la conducta de los alumnos en la resolución de problemas con otras características (con menos contenidos matemáticos, relacionados con otras ramas de las matemáticas, que utilicen otros tipos de procedimientos para su resolución, con enunciados más relacionados con el mundo real, con exceso de datos, etc.), lo que contribuiría a construir un modelo de actuación de los alumnos más global.

---

[1] Limitaciones que producen la intransferibilidad de los resultados a otros alumnos, a otras actividades matemáticas y a otros contextos físicos y temporales (Postic y De Kelete, 1988) o limitaciones que van, como dice J. Martinez Bonafé (1988), desde la representatividad de los resultados hasta la relativa subjetividad en los juicios, pasando, entre otros, por la "dificultad para la obtención de determinadas evidencias documentales" (p. 48).

Como consecuencia de todo lo anterior, podemos decir que cualquier modificación de los elementos que intervienen en la situación de resolución de problemas puede abrir expectativas a investigaciones totalmente diferentes, en particular, a la adaptación y ampliación del modelo de intercambios que proponemos al caso de varios alumnos y de éstos con el profesor.

11.3. Reflexiones sobre las implicaciones didácticas

En este apartado pretendemos reflexionar sobre las implicaciones didácticas que este trabajo nos ha sugerido en relación con la actividad de resolver problemas en nuestra práctica educativa diaria.

Centramos las reflexiones sobre las implicaciones didácticas en el contexto de la Enseñanza Secundaria, y las enfocamos desde dos puntos de vista diferentes: las posibilidades que ofrecen los problemas que comparan áreas de superficies planas (PCASP) para iniciar a los alumnos en el aprendizaje de determinados procesos cognitivos, y el establecimiento de unas pautas de comportamiento en cuanto a la interacción de los alumnos en la resolución de problemas.

a) Independientemente de las posibilidades que ofrecen los PCASP para introducir y relacionar los conceptos de congruencia, equivalencia y semejanza, este tipo de problemas pueden utilizarse para iniciar o desarrollar, según los casos, en los alumnos determinados procesos cognitivos —procesos de visualización, de particularización, de generalización, inductivos, deductivos y establecimiento de conjeturas—, como concretamos en los párrafos siguientes. Además, los PCASP resultan adecuados para precisar el significado del lenguaje matemático en cuanto a la utilización de símbolos gráficos que pueden resultar confusos para los alumnos de estas edades.

- Las características específicas de los PCASP, en el sentido de que sus enunciados llevan incorporados figuras planas o necesitan, como primer paso, la interpretación gráfica de un enunciado verbal, facilitan los procesos de observación y de visualización de relaciones entre los elementos de dichas figuras. No olvidemos que en el caso de Rosa y Anna la realización de figuras "más grandes" favoreció la visualización de determinadas relaciones e influyó positivamente en la evolución del proceso de resolución.

Ahora bien, las apreciaciones visuales de dichas relaciones han de empezar a ser entendidas por los alumnos de estas edades como pasos previos, y muchas veces necesarios, para el establecimiento de conjeturas que han de ser justificadas de otras formas que no sean las puramente observacionales, como, por ejemplo, razonamientos deductivos basados en las aplicaciones de las propiedades de las figuras, en los criterios de congruencia y semejanza, o en las técnicas propias de la equivalencia. En definitiva, la utilización de PCASP puede contribuir a que los alumnos "desarrollen secuencias de proposiciones para deducir una propiedad de otra" (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987, p. 89), facilitando, de esta forma, que los alumnos alcancen el nivel de conocimiento 3 de Van Hiele.

Así pues, incluimos dentro de estas reflexiones la necesidad de desarrollar la percepción visual de los alumnos y, al mismo tiempo, de hacerles ver, mediante la propuesta de actividades que muestren figuras que "engañen a la vista" (ilusiones visuales), que los argumentos basados en las apreciaciones visuales no son suficientes para razonar las propiedades generales de las figuras.

- Muchos PCASP están enunciados en términos de búsqueda o de justificación de propiedades generales de determinadas figuras geométricas. La forma de abordar su resolución nos puede servir para iniciar a los alumnos de 16 años en la consideración de casos particulares, límite y singulares. Esa iniciación se puede conseguir fácilmente puesto que se manejan figuras geométricas sencillas (véase en el Capítulo 5 algunas de las formas de enfocar la resolución de los problemas del paralelogramo, del hexágono o del cuadrado). El estudio de casos favorece el establecimiento de conjeturas y la posibilidad de aplicar al caso general los procedimientos que resuelvan cada caso particular.

Igualmente, problemas como el del cuadrado (Capítulo 5) u otros pueden utilizarse para estimular procesos de generalización numérica o, incluso, como introducción a la inducción matemática para atender la diversidad en alumnos de niveles de conocimientos más avanzados.

- Observamos en el Capítulo 7 que, en varias ocasiones, los alumnos confunden un objeto genérico con el símbolo que lo representa, es decir, identifican la figura que se incorpora al enunciado con el término "cualquiera" al que se refiere el mismo. Alsina, Burgués y Fortuny (1987) reconocen esta situación de la siguiente manera: "El profesor desea que el alumno dibuje en la pizarra o en su cuaderno un triángulo cualquiera. El alumno dibuja un equilátero o un rectángulo. Para él, si 'cualquiera' vale, estos dos casos están bien hechos. El profesor desaprueba la propuesta porque entiende por 'triángulo cualquiera' el que no posea ninguna propiedad especial, el más irregular posible" (p. 51).

En las situaciones de enseñanza-aprendizaje, se ha de incidir en que los alumnos reconozcan que el simple hecho de dibujar una figura genérica supone una particularización de la misma, por tanto, las justificaciones que se den de las propiedades generales han de ser independientes de las magnitudes de los elementos de la figura dibujada.

- Como hemos tenido ocasión de comprobar en el Capítulo 5, los PCASP son problemas cuya resolución se puede enfocar de varias formas. A pesar de ello, los alumnos sólo identifican un enfoque en la mayoría de las resoluciones conjuntas que realizan (véase Capítulo 8) —geométrico, en el caso de Rosa y Anna, y algebraico en los otros casos—. Esta identificación única impide a los alumnos la posibilidad de elección y hace que se vean abocados a ejecuciones en las que pueden tener dificultades. Por eso, hemos de incidir en la importancia que tiene la diversificación de enfoques en la resolución de problemas.

Favoreceremos la identificación de diferentes enfoques por medio de una enseñanza basada en la utilización de determinadas heurísticas y de procedimientos específicos, relacionados con el tipo de problemas que se proponen, así como, mediante la propuesta de problemas en los que se ponga de manifiesto la dificultad de ejecutar determinados enfoques y la facilidad de poner en práctica otros —compárese lo fácil que resulta resolver geométricamente el problema del hexágono y los inconvenientes de una ejecución basada en la aplicación de fórmulas, con la facilidad que supone aplicar la fórmula del área del triángulo para resolver el problema del paralelogramo—.

b) Por lo que se refiere a la comunicación de los alumnos en la resolución de problemas, no se trata simplemente de darles permiso para conversar (Mercer (1997), como se suele hacer normalmente en las clases de matemáticas, sino que, según Galtón y Wiliamson (cf. Mercer, 1997), "para que la colaboración tenga éxito, hay que enseñarles a los alumnos cómo colaborar para que de este modo tengan una idea clara de lo que se espera de ellos" (p.102). Cuando N. Mercer explica lo que espera que los alumnos consigan cuando trabajan en colaboración, se refiere al hecho de que tengan la oportunidad de utilizar activamente el lenguaje en la resolución de problemas y de que queden liberados de las obligaciones del discurso dirigido por el profesor.

En los párrafos que siguen trataremos de reflexionar sobre los puntos concretos que pueden ser utilizados en la enseñanza de la colaboración entre alumnos, a la que se refieren Galton y Wiliamson, y sobre la manera de facilitarles la utilización activa del lenguaje, a la que hace referencia Mercer, con el propósito de favorecer el desarrollo de los procesos de resolución. Estas reflexiones han surgido de la presencia o ausencia de determinadas conductas en los procesos de resolución que hemos analizado en el Capítulo 8.

- La presentación de las ideas y opiniones por parte de cada alumno ha de ser de forma clara y su evaluación se ha de hacer conjuntamente. Esto es lo contrario de lo que ocurre muchas veces en los procesos de resolución que hemos analizado, en particular, en la resolución que Pere y Lluís hacen del problema del hexágono, en el que no evalúan conjuntamente los enfoques geométricos que se introducen, lo cual dificulta sensiblemente el proceso de resolución.

- La participación de los alumnos se consigue fomentando la realización de preguntas hasta que todos consigan comprender las informaciones que se vayan introduciendo. Éste es el caso de Lluís en los procesos de resolución en los que participa. Además, la realización de preguntas y las manifestaciones explícitas de dudas provocan muchas veces que los alumnos se vean en la obligación de explicar y razonar sus afirmaciones, como ocurre, entre otros casos, cuando Rosa y Anna resuelven el problema del paralelogramo.

- Nos parece importante que la comprensión del enunciado y del objetivo del problema sea correcta y se haga conjuntamente para evitar situaciones como la que se produce en el proceso de resolución del problema del cuadrado, en el que Lluís va a remolque de la resolución que realiza Pere como consecuencia de la deficiente comprensión del enunciado.

- Las reflexiones individuales sirven para ordenar las ideas y favorecen la introducción de informaciones nuevas. El contraste de pareceres después de los trabajos en paralelo evita confusiones y malos entendidos en el desarrollo posterior del proceso, por tanto, hemos de incidir en la discusión cooperativa de las informaciones que sean fruto de tales reflexiones.

- La promoción del modelo interactivo de complementariedad de funciones puede favorecer la identificación de errores, como ocurre cuando Laia y Jaume resuelven el problema del triángulo, y puede ser útil para que no se pierdan las ideas nuevas que se vayan aportando, ya que uno de los alumnos puede asumir el papel de anotarlas al mismo tiempo que supervisa el trabajo que realiza el otro.

- El repaso cooperativo o dirigido de los logros obtenidos con anterioridad es una de las formas que podemos utilizar para relanzar los procesos de resolución.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

ALSINA, C., BURGUÉS, C. y FORTUNY, J. M. (1987). *Invitación a la Didáctica de la Geometría.* Ed. Síntesis, S. A. Madrid.

ANDERSON, D. R. y ARCIDIACONO, M. J. (1989). "Area Ratios of Quadrilaterals". *Mathematics Teacher,* March, pp. 176-184.

ANGUERA, M. T. (1988). *Observació a l'aula.* Ed. Graó. Barcelona.

AZARQUIEL, G. (1991). *Ideas y actividades para enseñar álgebra.* Editorial Síntesis. S. A. Madrid.

AZCÁRATE, C. (1995). "Sistemas de representación". *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* n° 4. Abril, pp. 53-61.

BAKEMAN, R. y GOTTMAN, J. M. (1989). Observación de la interacción: introducción al análisis secuencial. Ed. Morata. Madrid. [Ed. original 1986].

BAKER, E. L. (1990). "Developing Comprehensive Assessments of Higher Order Thinking". En *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics.* Edited by Gerald Kulm. American Association for the Advancement of Science.

BALACHEFF, N. (1990). "Future perspectives for research in the Psychology of Mathematics Education". En *Mathematics and Cognition.* P. Nesher and J. Kilpatrick (ed.). Cambridge University Press.

BAROODY, A. J. y GINSBURG, H. P. (1986). "The Relationship Between Initial Meaningful and Mechanical Knowledge of Arithmetic". En J. Hiebert (ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,* editado por James Hiebert,75-112. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

BELL, A. W. (1976). *The Learning of General Mathematical Strategies.* Shell Center for Mathematical Education. University of Nottingham.

BOLTIANSKI, V. G. (1981). *Figuras equivalentes y equicompuestas.* Ed. Mir. Moscú.

BOYER, C. B. (1986). Historia de la Matemática. Alianza Editorial, S. A. Madrid, 1986 [Ed. or. 1968].

CALLEJO, M. L. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* Narcea, S. A. de Ediciones. Madrid.

CALSAMIGLIA I D'ALTRES. (1997). *La parla com a espectacle: una anàlisi de "La vida en un xip".* Publicacions de la Universitat Autònoma de Barcelona.

CARRILLO, M. E. (1985). "Ensayos para un aprendizaje con objetivos a largo plazo". En *La enseñanza de la matemática a debate.* M.E.C.

CASTELLÀ, J. M. (1992). "De la frase al text. Teories de l'ús lingüístic". De. Empúries. Barcelona.

CAZDEN C. B. (1991). *El discurso en el aula. El lenguaje de la enseñanza y del aprendizaje.* Centro de Publicaciones del MEC y Ediciones Paidós. Barcelona. [Ed. or. 1988].

CHARLES, R., LESTER, F. Y O'DAFFER, P. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving.* National Council of Teachers of Mathematics (Fourth printing, 1992).

COBB, P. y WHITENACK, J. W. (1996). "A Method Conducting Longitudinal Analyses of Classroom Videorecordings and Transcripts". En *Educational Studies in Mathematics* 30: 213-228.

COBO, P. (1995a). Anàlisi comparativa de les actuacions d'alumnes de 3r. de BUP en la resolució de problemes que relacionen àrees de figures geomètriques. Memòria del tercer cicle. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències de la UAB. Inédita.

COBO, P. (1995b). "Efectos de la utilización de gráficos en la traducción algebraica de problemas verbales. Estudio del caso de problemas verbales que combinan estructura semántica de cambio y de comparación". *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas.* nº 4. Abril, pp. 63-75.

COBO, P. (1996). "Análisis de las actuaciones de los alumnos de 3º de BUP en la resolución de problemas que comparan áreas de figuras geométricas". Enseñanza de las Ciencias. Vol. 14/ nº 2, pp. 195-207.

COLL, C. (1984). "Estructura grupal, interacción entre alumnos y aprendizaje escolar". *Infancia y Aprendizaje*, 27/28, pp. 119-138.

COLL, C. y COLOMINA, R. (1990). "Interacción entre alumnos y aprendizaje escolar". En: *Desarrollo Psicológico y Educación* . Tomo II. Capítulo 18 (pp. 335-352). Alianza Psicológía.

COLL, C. y VALLS, E. (1992). "El aprendizaje y la enseñanza de los procedimientos". En *Los contenidos en la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes,* 81-132. Ed. Santillana.

COOK, T. D. y REICHARDT, CH. S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa.* Ediciones Morata, S. A. Madrid. [Ed. original 1982].

DEL OLMO, M. A. , MOREMO, M. F. y GIL, F. (1989). *Superficie. Volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Ed. Síntesis, S. A. Madrid.

DREYFUS, T. (1990). "Advanced Mathematical Thinking", en *Mathematics and Cognition.* Edited by P. Nesher and J. Kilpatrick. Cambridge University Press.

EUCLIDES. (1991). *Elementos.* Tomo I (Libros I-IV). Tomo II (Libros V-IX). Tomo III (Libros X-XIII). Libro Biblioteca Clásica Gredos. Madrid.

FERNANDEZ, M. L., HADAWAY, N. y WILSON J. W. (1994). Problem solving: Managing It All. *Mathematics Teacher*, 87, 3, 195-199.

FIOL, M. L. (1993). *Marco de desarrollo del razonamiento proporcional en alumnos de 12 a 14 años: visualización y computación.* Tesis doctoral inédita. Universitat Autònoma de Barcelona. Bellaterra.

FISCHBEIN, E. (1990). "Introducción". En *Mathematics and Cognition.* P. Nesher and J. Kilpatrick (ed.). Cambridge University Press, pp. 1-13.

FORMAN, E. (1989). "The Role of Peer Interaction in the Social Construction of mathematical Knowledge". International Journal of Education Research, 13, 55-70.

FORMAN E. A. y CAZDEN C. B. (1984). "Perspectivas vygotskianas en la educación: el valor cognitivo de la interacción entre iguales". *Infancia y Aprendizaje*, 27/28, 139-157.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*, D. Riedel, P. C. Dordrecht.

GARCIA ARDURA, M. (1974). *Problemas gráficos y numéricos de Geometría* (16 ª edición). Librería y casa editorial Hernando, S. A. Madrid.

GARDINET, A. (1982). *Infinite processes, background to analysis*. Spriger-Verlag. New York Inc.

GAROFALO, J. Y LESTER, F. K. (1985). Metacognition. Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 163-176.

GOOS, M. GALBRAITH, P. (1996). Do it this way! Metacognitive Strategies in Collaborative Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics* 30: 229-260.

GUMPERZ y HYMES. (1972). "Introduction". En *Directions in Sociolinguistics. The Ethnografhy of Communication*. New York: Basil Blackwell.

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1996). "Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. J. Giménez, S. Llinares, V. Sánchez (editores). Granada. pp. 145-170.

HEARTH, S. T. (1981). *A History of Greek Mathematics* . Tomos I y II. Dover.

HERBERT WILLS III. (1995). *Leonardo's Dessert. No Pi*. National Council of Teachers of Mathematics.

HIEBERT, J. & LEFEVRE, P. (1986). "Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis". En J. Hiebert (ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*, editado por James Hiebert,1-27. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

HILBERT, D. (1991). *Fundamentos de la Geometría*. Editorial: CSIC Col. Textos Universitarios. Madrid. [Traducción de F. Cebrián de la septima edición alemana, 1930].

HUME, DAVID. (1996). Investigaciones sobre el concoimiento humano. Alianza Editorial. Madrid.

KEEDY, M. L. y NELSON, CH. W. (1968). *Geometría. Una moderna introducción*. Compañía Editorial Continental S. A. [Ed. or. 1965].

KERBRAT-ORECCHIONI, C. (1990-1994). *Les interactions verbales*. Tomos I, II y III. Armand Colin. Paris.

KROLL, D. MASINGLIA, J. y MAU, S. (1992). "Grading Cooperative Problem Solving". *Mathematics Teacher*. Vol. 85, nº 8, November. pp. 619-627.

KULM, G. (1990). Assessing Higher Order Mathematical Thinking: What We Need to Know and Be Able to Do. En *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*. Ed. Gerald Kulm. American Association for the Advancement of Science.

LAMBDIN, D. V. (1993). "Monitoring Moves and Roles in Cooperative Mathematical Problem Solving". *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Spring & Summer Editions. Vol. 15, numbers 2 & 3, pp. 48-64.

LESTER, F. K. Jr. (1985). "Methodological Considerations In Research on Mathematical Problem-Solving Instruction". En E. A. Silver (Eds.), *Teaching and Learning Mathematical Problem-Solving: Multiple Research Perspectives,* editat per Edward A. Silver, 41-69. Hillsdale, N. J.:Lawrence Erlbaum Associates.

LESTER, F. K. JR. (1994). "Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994". *Journal for Research in Mathematics Education,* 25, 660-675.

LESTER, F. K. Jr. y D. L. KROLL (1990). "Assessing Student Growth in Mathematical Problem Solving". En *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics.* Edited by Gerald Kulm. American Association for the Advancement of Science.

LITWLLER, B. H. y DUNCAN, D. R. (1989). "Area Formulas on Isometric Dot Paper". *Mathematics Teacher,* May, pp. 366-369.

LOBATO FRAILE, CL. (1997). "Hacia una comprensión del aprendizaje cooperativo". Revista Psicodidáctica, nº 4. pp. 59-76.

LOOMIS, E. S. (1972). *The Pythagorean Proposition.* The National Council of Teachers of Mathematics. [Ed. or. 1940].

MARSHALL, S. P. (1990). "The Assessment of Schema Knowledge for Arithmetic Story Problems: A cognitive Science Perspective". En *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics.* Edited by Gerald Kulm. American Association for the Advancement of Science.

MARTINEZ BONAFE, J. (1988). "El estudio de casos en la investigación educativa". *Investigación en la escuela,* nº 6, pp. 41-49.

MAURI, T. (1997). "¿Qué hace que el alumno y la alumna aprendan los contenidos escolares? La naturaleza activa y constructiva del conocimiento". En: *El constructivismo en el aula.* Ed. Graó. [Primera edición , 1993]. Barcelona.

MAYER, R., (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Ed. Paidós, Barcelona. [Ed. or. 1983].

MAYOR, J., SUENGAS, A. y GONZALEZ MARQUEZ, J. (1993). *Estrategias metacognitivas.* Ed. Síntesis. Madrid.

MEIER, S. L. (1992). "Evaluating problem-solving processes". *Mathematics Teacher,* Vol. 85, No. 8. November 1992. pp. 664-666.

MERCER, N., (1997). *La construcción guiada del conocimiento. El habla de profesores y alumnos.* Ed. Paidós. Barcelona. [Ed. or. 1995].

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1995). *Assessment Standards for School Mathematics.*

NOVAK, J. D., GOWIN, D. B. (1988). *Aprendiendo a aprender.* Ediciones Martinez Roca. S. A. Barcelona. [Ed. or. 1984].

NUSSBAUM, L. y TUSÓN, A. (1995). "El Cercle d'Anàlisi del Discurs i l'estudi dels debats televisius". Universitat Autònoma de Barcelona. *Jornades sobre Llengua i Ensenyament.* Barcelona.

OLSON, M. y WHITE, G. (1989). "Interesting Area Ratios whitin a triangle". *Mathematics Teacher*. November. pp. 630-636.

PANDEY T. (1990). Power Items and the Alignment of Curriculum and Assessment. En *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*. Edited by Gerald Kulm. American Association for the Advancement of Science.

PÉREZ JUSTE, R. (1986). *Evaluación de los logros escolares.* Tomo I. Universidad Nacional de Educación a Distancia.

PERRET-CLERMONT, A. N. (1984). *La construcción de la inteligencia en la interacción social.* Ed. Visor/Aprendizaje. Madrid. [Ed. orig. 1979].

PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Ministerio de Educación y Ciencia-Ed. Morarta. Madrid. [Ed. or. 1987].

POLYA, G. (1975). *Como plantear y resolver problemas.* Ed. Trillas, México. [Ed. or. 1945].

POSAMENTIER, A. S. y SALIND, CH. (1988). *Challenging Problem in Geometry.* Dale. Seymour Publications. Palo Alto.

POSTIC, M. y DE KELETE, J. M. (1992). *Observar las situaciones educativas.* Narcea S. A. Ediciones. Madrid [Ed. or. 1988].

POZO, J. I. (1992). "El aprendizaje y la enseñanza de hechos y conceptos". En *Los contenidos en la Reforma. Enseñanza y aprendizaje de conceptos, procedimientos y actitudes,* 19-80. Ed. Santillana.

PUIG, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Ed. Comares. Granada.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Ed. Síntesis, S. A. Madrid.

PUIG ADAM, P. (1972). *Curso de Geometría métrica*. Tomo I - Fundamentos. Ed. Biblioteca matemática, S. L. Madrid. 10ª edición. [Primera edición, 1947].

RESNICK, L. B. (1987). *Education and Learning to Think.* National Academy Press. Washington, D. C.

RICHARD, J. F. (1984). "La construction de la representation du probleme". *Psichologie française,* nº 29, nov. 3/4. pp. 226-230.

RICHARD, J. F. (1985). "La representation du probleme". *Psichologie française,* nº 30, nov. 3/4. pp. 277-284.

RICHARDS, J. (1991). "Mathematical discussions". E. von Glasersfeld (de.). *Radical Constructivism in Mathematics Education,* 13-51. Kluwer Academic Publishers.

ROGALSKI, J. (1982). "Acquisition de notions relatives a la dimensionalité des mesures spatiales (longueur, surface)". *Recherches en Didactique des Mathematiques,* vol. 3.3. pp. 343-396.

ROGOFF, B. (1993). *Aprendices del pensamiento.* Ed. Paidós.

ROULET, E. et al. (1987). *L'articulation du discours en français contemporain.* Berna: Peter Lang. 2ª edición.

SCHLOEMER, C. G. 1994. "An Assessment example". *Mathematics Teacher*, Vol. 87, No. 1, January, 18-19.

SCHOENFELD, A. H. (1985a). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. En *La Enseñanza de la matemática a debate*. pp. 31-65 Ed. Servicio de Publicaciones del M.E.C. Madrid.

SCHOENFELD, A. H. (1985b). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. Orlando.

SCHOENFELD, A. H. (1986). "On Having and Using Geometric Knowledge". En J. Hiebert (ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,* editado por James Hiebert, 225-264. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

SCHOENFELD, A. H. (1987). "What's all the fuss about metacognition?". En A. H. Scoenfeld (Ed.). *Cognitive science and mathematics education* , Hillsdal, NJ: Lawrence Erlbaum, 189-215.

SCHOENFELD, A. H. (1991). *What's all the fuss about problem solving?*. ZDM 91/1, pp. 4-7.

SCHOENFELD, A. H. (1992). "Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics". En *Handbooks of Research on Mathematics Teaching and Learning* . D. A. in Grouws (Ed.) , McMillan, Nueva York, pp. 334-370.

SEEGER, F. (1991). "Interaction and Knowledge in Mathematics Education". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. II, n°23, pp. 125-166.

SILVER, E. A. (1986). "Using Conceptual and Procedural Knowledge: A Focus on Relationships". En J. Hiebert (ed.). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics,* editado por James Hiebert, 181-198. Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

STACEY, K. (1992). "Mathematical Problem solving in Groups: Are Two Heads Better Than One?". *Journal of Mathematical Behavoir*. 11, pp. 261-275.

TUREGANO MORATALLA, P. (1993). *De la noción de área a su definición*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha. Colección Ciencia y Técnica. Cuenca.

VERGNAUD, G. (1981). "Quelques orientations theoriques et Methodologiques des recherches francaises en didactique des Mathematiques". *Recherches en Didactique des Mathematiques,* vol. 2.2. pp. 215-231.

VERGNAUD, G. (1990). "La théorie des champs conceptuels". *Recherches en Didactique des Mathematiques*, vol. 10/ 2.3. pp. 133-169.

VOIGT, J. (1985). "Paterns and routines in classroom interaction". *Recherches en Didactique des Mathematiques*, vol. 6, n° 1, pp. 69-118.

VYGOTSKI, L. S. (1988). *Pensament i Llenguatge*. Eumo Editorial/ Diputación de Barcelona.

WEBB, N. M. (1984). "Interacción entre estudiantes y aprendizaje en grupos pequeños". *Infancia y Aprendizaje*, 27/28, pp.159-183.

WEBB, N. M. (1989). "Peer Interaction and Learning in Small Groups". *International Journal of Education Research*, 13, 21-39.

WEBB, N. M. (1991). "Task-Related Verbal Interaction and Mathematics Learning in Small Groups". *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, 5, pp. 366-389.

WOOD, T. (1996). "Events in Learning Mathematics: Insights fron Research in Classrooms". *Educational Studies in Mathematics*. 30: 85-105. Kluwer Academic Publishers.

WOODWARD, E. (1982). Heidi's Misconception about Area and Perimeter". *School Science and Mathematics*. 82 (4), pp. 332-334.

WOODWARD, E. y BYRD, F. (1983). "Area: Included Topic, Neglected Concepts". *School Science and Mathematics*, 83 (4), pp. 343-347.

YACKEL, E., COBB, P. y WOOD, T. (1991). "Small-group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, n. 5, pp. 390-408.