



Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

**TESI DOCTORAL**

**Estratègies de millora per a la resolució de  
problemes amb alumnes de segon d'ESO:  
ús de la matemàtica recreativa a les fases  
d'abordatge i de revisió**

**Albert Mallart Solaz**

**Director: Jordi Deulofeu Piquet**

Bellaterra, maig de 2008



A la Consuelo,  
al Joan,  
a l'Eduard,  
a la Cris

*“... les matemàtiques recreatives, els jocs matemàtics, proporcionen el millor camí per captar l'interès dels joves durant l'ensenyament de la matemàtica elemental; un bon trencaclosques matemàtic, una paradoxa o un truc d'aparença màgica poden excitar molt més la imaginació dels nens que les aplicacions pràctiques, sobretot quan aquestes aplicacions es troben lluny de les experiències viscudes per ells.”*  
(Martin Gardner, 1995)

*“En comptes d'encoratjar els alumnes dient-los aquí teniu un problema, busqueu-hi la solució, més aviat caldria dir-los sovint: aquí teniu una situació, penseu-hi.”*  
(A.Z. Krygowska, 1980)



## Agraïments

Fer una tesi doctoral requereix temps i esforç. Al llarg de tot aquest temps moltes vivències s'han desenvolupat. Diverses persones són les que m'han ajudat directament i indirecta. Ara és el moment d'expressar el meu agraïment més profund i sincer.

D'una manera molt especial agraeixo a Jordi Deulofeu que accedís a dirigir-me i a guiar-me aquesta recerca. Vaig demanar-li a ell precisament perquè totes les fonts que consultava sobre el tema m'hi conduïen, cosa que implicà que em canviés d'universitat i que prèviament no em conegués. Li agraeixo sincerament aquest vot de confiança. També li agraeixo les directrius, recomanacions i rectificacions que m'ha suggerit i que m'han recordat sempre el motiu pel qual li vaig demanar que em dirigís.

En aquest trajecte d'alts i baixos on apareixen dubtes de caire professional i on em falta perspectiva la Dra. Pilar Bayer del Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona m'ajuda moltíssim amb la seva predisposició, la seva enorme experiència i saviesa. Amb els seus consells com amiga i la seva experiència professional i universitària, la Dra. Meritxell Obiols m'ha anat animant i encoratjant.

També vull agrair als professors Luis Tapia, Jesús Rodríguez i Xavier Orteu del Departament de Matemàtiques del col·legi on treballa la seva ajuda i col·laboració. Les seves valuoses aportacions com a jutges externs validant instruments de recerca i ajudant-me a la pràctica amb la seva extensa experiència de vint-i-cinc anys o més com a docents en matemàtiques en aquesta edat. Vull mostrar el meu profund agraïment al meu amic i company de feina Francesc Ferrer (també és professor universitari d'informàtica a la Universitat Oberta de Catalunya) pel seu suport tècnic que gairebé sempre ha estat demanat amb urgència.

Naturalment estic molt agraït als trenta-tres alumnes que m'han ajudat en aquest estudi. Especialment, vull agrair als protagonistes de les entrevistes la seva col·laboració (9A, 25A, 27A, 9B, 14B, 15B).

Vull fer esment d'aquells amics i amigues que m'han ajudat a distreure'm de la feina i de la tesi, sense els quals segur que hauria acabat malalt: el Sergio, l'Àlex, l'Amadeu, el Pep, el Jaume, el Roc, l'Albert, el Jordi, el Robert, l'Enric, el Víctor, el Jordi, el Ferran, el Ricard, el Xavi, el Nico, la Mònica, el Carles i el Quimet.

Una atenció especial i merescuda m'agradaria dedicar-li a la meva família sense la qual dubto que hagués aconseguit dur a terme aquesta recerca: la Consuelo, la Cristina, el Joan i l'Eduard. Tots ells m'han alliberat de tasques i responsabilitats familiars, compromisos socials i m'han comprès en els moments de tensió provocats per l'acumulació de feina. Aquest camí tan llarg ha estat marcat per diversos temes de salut, alguns s'han pogut arreglar i d'altres s'han après a superar. I és en aquesta línia de superació i esforç que agraeixo l'ajut de la Consuelo en inundar-me de llibres vinculats a la meva recerca, l'ajut de la Cristina en aplanar-me el camí a la recta final i el suport de l'Eduard amb la seva visió pragmàtica de l'esforç. Al Joan, doctor i professor en didàctica a la Universitat de Barcelona li agraeixo les hores dedicades no com a pare només, sinó com a "company investigador": ha validat instruments de recerca, ha validat aspectes del marc metodològic, ha ajudat en el procés de triangulació, ha llegit i rellegit els capítols per tal de fer-me recomanacions sobre la coherència i el rigor de les idees... La Consuelo i en Joan, amb el seu exemple docent de més de quaranta anys cadascun de treball a l'ensenyament, han despertat en mi aquesta vocació i les ganes de fer aquest projecte.



## Índex

<b>Introducció .....</b>	<b>13</b>
<b>Primera Part: Marc teòric. Formulació del problema i definició dels objectius de la recerca .....</b>	<b>15</b>
<b>Capítol 1: Situació de l'àrea problemàtica .....</b>	<b>17</b>
1.1 Idees principals .....	17
1.1.1 Les matemàtiques a la societat .....	17
1.1.2 La motivació dels alumnes .....	17
1.1.3 Problemes de motivació i matemàtica recreativa .....	19
1.2 Fer matemàtiques.....	20
1.2.1 Competències bàsiques i matemàtiques .....	20
1.2.1.1 Currículum de matemàtiques a secundària en relació a les finalitats i intencions educatives.....	21
1.2.1.2 Currículum de matemàtiques a secundària en relació a la selecció de continguts: els eixos temàtics .....	22
1.2.1.3 Currículum de matemàtiques a secundària en relació a la seqüència de continguts: processos i capacitats .....	22
1.2.2 Matematitzar la realitat.....	23
1.2.3 Treballar les matemàtiques creativament .....	24
1.3 Línies de recerca en resolució de problemes .....	24
<b>Capítol 2: Ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques .27</b>	
2.1 Un marc per a l'aprenentatge: el constructivisme .....	27
2.1.1 Aprenentatge significatiu.....	27
2.1.1.1 Diferents models previs .....	27
2.1.1.1.1 Model de Gagné: idees, utilitat i crítiques.....	27
2.1.1.1.2 Model de Piaget: idees, utilitat i crítiques .....	29
2.1.1.1.3 Model d'Ausubel: idees, utilitat i crítiques .....	33
2.1.1.2 Tipus d'aprenentatges significatius .....	36
2.1.1.3 Condicions de l'aprenentatge significatiu .....	37
2.1.1.4 Resolució de problemes i creativitat.....	37
2.1.1.5 Més característiques de l'aprenentatge significatiu.....	38
2.1.2 Implicació i interacció amb el professor.....	40
2.1.3 La memorització .....	41
2.2. Pensament crític.....	41
2.2.1 Naturalesa del pensament crític.....	41
2.2.2 Problemes tancats i oberts .....	43
2.3. Pedagogia, instrucció i cognició matemàtica .....	44
2.3.1 Les eines matemàtiques .....	44
2.3.2 Epistemologia, ontologia i pedagogia .....	45
2.3.3 Objectius per a la instrucció matemàtica.....	46
2.3.4 Exploració de la cognició matemàtica.....	47
2.3.4.1 Culturització i cognició .....	48
2.3.4.2 El coneixement base .....	48
2.3.4.3 Estratègies de resolució de problemes (heurístics).....	49
2.3.4.4 Regulació, control i direcció.....	51
2.3.4.5 Creences i afectes .....	52
2.4. Les matemàtiques a la secundària obligatòria .....	53

2.4.1 Dificultats d'ensenyament .....	53
2.4.2 Pensar matemàticament .....	54
2.4.2.1 Què són les matemàtiques .....	54
2.4.2.2 Les matemàtiques són per pensar .....	54
2.4.2.3 El fet de pensar a la classe de matemàtiques costa.....	56
2.5. Currículum de matemàtiques.....	57
2.5.1 Breu recordatori en tendències curriculars del darrer segle .....	57
2.5.2 Concepte de currículum des de l'educació matemàtica.....	57
2.5.2.1 Antecedents d'estudis curriculars en educació matemàtica .....	58
2.5.2.2 Estudis especialitzats .....	58
2.5.2.3 Estudis curriculars en Espanya .....	59
2.5.2.4 Dimensions del currículum.....	59
2.5.2.5 Els objectius de les matemàtiques per a tots.....	60
2.5.2.5.1 Demandes plantejades a les matemàtiques escolars .....	60
2.5.2.5.2 Relacionar el contingut amb els processos cognitius de l'educand .....	61
2.5.2.6 El currículum de matemàtiques per als inicis del segle XXI.....	61
<b>Capítol 3: La resolució de problemes .....</b>	<b>63</b>
3.1 Sobre la idea de problema .....	63
3.1.1 Tres perspectives diferents .....	63
3.1.2 El problema en educació matemàtica .....	64
3.1.2.1 Revisió de les definicions més importants .....	64
3.1.2.2 Ambient d'aprenentatge .....	65
3.1.3 Classificacions dels problemes.....	66
3.1.3.1 Classificacions relacionant els coneixements i les experiències prèvies .....	66
3.1.3.2 Classificacions centrades en la diferència entre problemes i exercicis ..	67
3.1.3.3 Classificacions centrades en la finalitat.....	68
3.2. Estratègies i propostes per a resoldre problemes.....	70
3.2.1 Definició de resolució de problemes .....	70
3.2.1.1 La resolució de problemes com a generador d'una situació problemàtica .....	70
3.2.1.2 La resolució de problemes: un context, una habilitat i un art.....	71
3.2.1.3 La resolució de problemes segons es consideri el resultat o no .....	72
3.2.1.4 La resolució de problemes enfocat com a processament de la informació .....	73
3.2.2 Estratègies de resolució de problemes.....	73
3.2.3 Propostes sobre la resolució de problemes .....	74
3.2.3.1 Característiques dels problemes adequats .....	75
3.2.3.2 Organització de la tasca .....	75
3.2.3.3 Paper del professorat .....	76
3.2.3.4 Perill de reduir el paper de la Resolució de Problemes a l'aula a aspectes .....	76
3.2.3.5 La Resolució de Problemes en el currículum com objecte i com eina .....	77
3.2.3.5.1 Aprendre a resoldre problemes.....	78
3.2.3.5.2 Aprendre a pensar matemàticament .....	79
3.2.3.5.3 La resolució de problemes com activitat d'investigació .....	79
3.2.3.5.4 Es pot aprendre resolent problemes. Introducció de conceptes.....	80
3.2.4 Etapes temporals de les estratègies de la resolució de problemes.....	81
3.3. Fases de la resolució de problemes.....	81
3.3.1 Revisió històrica .....	82
3.3.2 Abordatge .....	83
3.3.3 Disseny d'un pla .....	84



3.3.3.1 Fent conjectures.....	84
3.3.3.2 Recerca d'estratègies diverses.....	85
3.3.4 Execució del pla.....	86
3.3.4.1 Dur a terme la pròpia estratègia.....	86
3.3.4.2 Justificació i convenciment.....	87
3.3.5 Revisió.....	87
3.4. Metacognició.....	88
3.4.1 Resolució de problemes a l'escola.....	88
3.4.1.1 Característiques d'un bon resolutor.....	88
3.4.1.2 Anàlisi didàctica.....	90
3.4.1.3 Comunicació habitual versus qüestions matemàtiques.....	91
3.4.2 Estudi de la resolució de problemes des del pla cognitiu, afectiu i del context.....	92
3.4.2.1 Resolucions incorrectes.....	93
3.4.2.2 Intel·ligència emocional en matemàtiques.....	93
3.4.2.3 Context sociocultural.....	94
3.4.2.4 L'activitat subconscient en la resolució de problemes.....	95
3.4.2.5 Paper de l'estructura cognitiva en resolució de problemes.....	96
3.4.3 El coneixement del camp específic.....	96
3.4.3.1 El paper del coneixement en la resolució de problemes.....	96
3.4.3.2 L'estructuració del coneixement.....	98
3.4.3.3 Esquemes mentals eficaços.....	98
3.5. Actituds, bloquejos i emocions.....	99
3.5.1 L'actitud adequada.....	99
3.5.2 Bloquejos d'origen afectiu.....	101
3.5.2.1 Apatia, abúlia, peresa davant del començament.....	101
3.5.2.2 Pors.....	101
3.5.2.3 Ansietats.....	102
3.5.2.4 Repugnàncies.....	102
3.5.3 Bloquejos de tipus cognoscitiu.....	102
3.5.4 Bloquejos culturals i ambientals.....	103
3.5.5 Recolzaments sistemàtics per desbloquejar.....	104
3.5.6 Emocions.....	105
<b>Capítol 4: Els jocs i les recreacions matemàtiques a l'aula .107</b>	
4.1 Consideracions generals sobre els jocs i les recreacions matemàtiques.....	107
4.1.1 Definició de joc.....	107
4.1.2 Breu història de les recreacions matemàtiques.....	108
4.2 Recerques relacionades amb l'ús de jocs a l'ensenyament de les matemàtiques.....	109
4.3 Jocs matemàtics i classificacions.....	110
4.3.1 Els jocs de coneixement per ensenyar matemàtiques.....	111
4.3.2 Els jocs d'estratègia per ensenyar matemàtiques.....	112
4.4 Les matemàtiques recreatives.....	114
4.4.1 Les matemàtiques recreatives: una activitat matemàtica.....	114
4.4.2 Les matemàtiques recreatives: eina metodològica i objectius.....	117
4.5 Avantatges de la utilització dels jocs.....	118
<b>Capítol 5: Formulació del problema i definició dels objectius de la recerca ..... 121</b>	
5.1 Determinació del problema i qüestions estudiades.....	121
5.2 Perspectives en la recerca.....	123
5.3 Context de la recerca.....	124
5.4 Objectius específics de la recerca.....	126

<b>Segona Part: Metodologia de la recerca .....</b>	<b>127</b>
<b>Capítol 6: Metodologia seguida a la investigació .....</b>	<b>129</b>
6.1 Investigació en didàctica .....	129
6.1.1 Consideracions metodològiques generals.....	129
6.1.2 Paradigma d'investigació positivista versus fenomenològic.....	132
6.1.2.1 Investigació quantitativa.....	133
6.1.2.2 Investigació qualitativa.....	134
6.1.2.3 Enfocament etnogràfic.....	135
6.1.2.4 Tècniques d'investigació etnogràfica .....	136
6.1.2.5 Validesa .....	140
6.1.2.6 Tècniques de credibilitat.....	142
6.1.3 Característiques metodològiques dels antecedents d'investigació .....	146
6.1.4 Investigació descriptiva .....	147
6.1.5 Investigació acció .....	147
6.2 Enfocament metodològic de la investigació.....	149
6.3 Opcions de plantejament general preses en el treball.....	151
6.4 Participants, espais i temporització .....	152
6.5 Disseny del pla de treball.....	156
6.5.1 Disseny del quadern.....	156
6.5.2 Disseny del qüestionari.....	158
6.5.3 Disseny de les entrevistes .....	159
6.5.4 Utilització dels instruments de recollida de dades per a l'estudi de la comprensió de l'enunciat.....	160
6.5.5 Utilització dels instruments de recollida de dades per a l'estudi de la revisió de la solució .....	162
<b>Tercera Part: Resultats i anàlisi de dades .....</b>	<b>165</b>
<b>Capítol 7: Anàlisi de les dades obtingudes segons l'instrument .....</b>	<b>167</b>
7.1 Test inicial de la fase de comprensió de l'enunciat.....	167
7.1.1 Estudi de l'activitat 1 .....	167
7.1.2 Estudi de l'activitat 2.....	169
7.1.3 Estudi de l'activitat 3 .....	170
7.1.4 Estudi de l'activitat 4.....	171
7.1.5 Estudi de l'activitat 5.....	172
7.1.6 Síntesi del test inicial.....	173
7.2 Test final de la fase de comprensió de l'enunciat.....	174
7.2.1 Estudi de l'activitat 1 .....	174
7.2.2 Estudi de l'activitat 2.....	175
7.2.3 Estudi de l'activitat 3 .....	176
7.2.4 Estudi de l'activitat 4.....	177
7.2.5 Estudi de l'activitat 5.....	179
7.2.6 Síntesi del test final.....	180
7.3 Test inicial de la fase de revisió de la solució .....	180
7.3.1 Estudi de l'activitat 1 .....	180
7.3.2 Estudi de l'activitat 2 .....	181
7.3.3 Estudi de l'activitat 3 .....	182
7.3.4 Estudi de l'activitat 4.....	183
7.3.5 Estudi de l'activitat 5.....	183
7.3.6 Estudi de l'activitat 6.....	184
7.3.7 Síntesi del test inicial.....	185
7.4 Test final de la fase de revisió de la solució .....	185

7.4.1 Estudi de l'activitat 1 .....	186
7.4.2 Estudi de l'activitat 2 .....	189
7.4.3 Estudi de l'activitat 3 .....	192
7.4.4 Estudi de l'activitat 4 .....	195
7.4.5 Estudi de l'activitat 5 .....	198
7.4.6 Estudi de l'activitat 6 .....	202
7.4.7 Síntesi del test final .....	205
7.5 Qüestionari .....	206
7.5.1 Qüestions matemàtiques de caire general .....	206
7.5.2 Qüestions matemàtiques sobre la comprensió de l'enunciat .....	211
7.5.3 Qüestions matemàtiques sobre la revisió de solucions .....	212
7.5.4 Síntesi del qüestionari .....	212
7.6 Entrevistes .....	216
7.6.1 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb elevada capacitat intel·lectual però poc flexible (27A) .....	216
7.6.2 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb elevada capacitat intel·lectual i flexible (14B) .....	218
7.6.3 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb una mitjana capacitat intel·lectual i poc flexible (25A) .....	221
7.6.4 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb una mitjana capacitat intel·lectual i flexible (15B) .....	223
7.6.5 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb una baixa capacitat intel·lectual i poc flexible (9B) .....	226
7.6.6 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb una baixa capacitat intel·lectual i flexible (9A) .....	228
7.6.7 Síntesi de les entrevistes .....	231
<b>Capítol 8: Anàlisi dels indicadors determinats .....</b>	<b>237</b>
8.1 Anàlisi de la comprensió de les situacions plantejades .....	238
8.1.1 Rigor a la fase de comprensió de l'enunciat .....	239
8.1.2 Ordre i captació de totes les dades .....	240
8.1.3 Comprensió del que es pregunta .....	241
8.1.4 Pèrdua d'atenció inicial .....	241
8.1.5 Grau de comprensió amb què treballen els problemes .....	243
8.1.6 Comprensió de les hipòtesis inicials de la situació .....	244
8.2 Anàlisi de la consciència sobre la importància que té comprendre bé un enunciat .....	246
8.2.1 Voluntat i perseverança en comprendre .....	246
8.2.2 Manca d'esforç per comprendre motivada per la comoditat que algú li expliqui .....	247
8.2.3 Pressa per fer el problema en detriment de la seva comprensió .....	247
8.2.4 Preocupació per entendre inicialment el problema abans de començar a resoldre'l .....	248
8.3 Anàlisi de la revisió de la solució trobada i la seva explicació .....	250
8.3.1 Costum de revisar al final la solució .....	250
8.3.2 Observació de la variació de la solució quan es canvien les dades o les condicions .....	252
8.3.3 Pressió per la pressa per trobar una solució i acabar el problema .....	252
8.3.4 Disconformitat amb la pròpia solució obtinguda mirant d'entendre-la fent comprovacions o resolucions diferents .....	253
8.3.5 Generalització de la solució per aplicar-la en altres ocasions .....	254
8.3.6 Convenciment de la correcció de la pròpia solució trobada .....	254
8.4 Anàlisi de la consciència sobre la revisió de la solució i la seva explicació .....	256

8.4.1 Revisió i conscienciació dels propis errors.....	256
8.4.2 Preocupació per una resolució correcta.....	257
8.4.3 Integració de la revisió de solucions com a part important de la resolució de problemes.....	258
8.4.4 Costum de revisar el problema per detectar i aprendre dels errors .....	259
8.4.5 Pressió per la pressa en revisar la solució d'un problema .....	260
8.4.6 Creença que fer matemàtiques és resoldre molts problemes relativitzant el que la solució estigui bé.....	260
8.5 Anàlisi de les actituds quan resolen problemes estàndard o no estàndard .....	262
8.5.1 Gust per les matemàtiques.....	263
8.5.2 Capacitat per fer volar la imaginació.....	263
8.5.3 Capacitat de treball individual.....	264
8.5.4 Actitud receptiva davant solucions o opinions dels altres.....	265
8.5.5 Voluntat per resoldre el problema ràpid .....	266
8.5.6 Actitud receptiva i atenta amb les dades .....	267
8.5.7 Voluntat d'entendre la situació fins al darrer detall .....	268
8.5.8 Gust pels reptes.....	269
8.5.9 Resistència a l'abandó en front una dificultat demanant pistes o ajuts .....	269
8.5.10 Caràcters reflexius .....	270
8.5.11 Actitud receptiva per aprendre dels propis errors.....	272
8.5.12 Aspectes que consideren més importants .....	272
8.5.13 La importància del sentit comú, de la intuïció o de la sort en la resolució de problemes.....	274
8.5.14 La influència de l'estat anímic, paciència, perseverança o autoconfiança en la resolució de problemes .....	275

## **Quarta Part: Conclusions, implicacions didàctiques de l'estudi i suggeriments..... 277**

### **Capítol 9: Conclusions i implicacions didàctiques de l'estudi..... 279**

9.1 Conclusions .....	279
9.1.1 Conclusions sobre la comprensió de les situacions plantejades.....	280
9.1.2 Conclusions sobre la consciència que tenen els alumnes de la importància de comprendre bé les situacions plantejades.....	280
9.1.3 Conclusions sobre la revisió de la solució trobada i la seva explicació .....	281
9.1.4 Conclusions sobre la consciència dels alumnes de la revisió i l'explicació de la solució.....	282
9.1.5 Conclusions sobre les actituds que tenen els estudiants quan resolen problemes.....	283
9.2 Implicacions de l'estudi i suggeriments .....	284
9.2.1 Implicacions didàctiques .....	285
9.2.2 Implicacions personals .....	286
9.2.3 Suggeriments per a possibles línies de recerca.....	286

### **Bibliografia..... 287**

## Introducció

Santaló (1994). expressà una idea interessant manifestant que ensenyar matemàtiques ha de ser equivalent a ensenyar a resoldre problemes. Estudiar matemàtiques no ha de ser una altra cosa que pensar en la solució de problemes.

La resolució de problemes és important no només per a l'aprenentatge de les matemàtiques, sinó sobretot, per resoldre els problemes de la vida. Ha de constituir el nucli fonamental de l'aprenentatge matemàtic i del bagatge que les matemàtiques han d'aportar a la visió del món i a la manera d'afrontar les situacions conflictives.

Les relacions socials que sorgeixen a l'escola són analitzables segons els grups que interactuen en ella, les mateixes persones que no semblen posseir una determinada habilitat en un context poden ser perfectament capaces de demostrar-la en un altre. Així ho expressa Waller (1932) quan diu que la influència social de l'escola és el resultat de l'acció que tals grups exerceixen sobre l'individu i de l'organització de les vides individuals a partir de les influències proporcionades per aquests grups.

D'una forma planificada i efectiva s'ha de tractar l'aprenentatge de les grans estratègies de resolució de problemes, doncs l'assumpció de les diferents estratègies no és ràpida ni s'aprèn veient, sinó actuant. En el codi genètic sembla que només es tenen gravades l'estratègia d'assaig i error, primera forma en la qual tothom intenta resoldre els problemes que no se saben atacar. El que no es pot permetre és que després de deu cursos de matemàtiques segueixi essent l'única estratègia.

S'ha d'actuar de forma planificada i recurrent (amb la utilització de contextos diferents) en la realització de problemes veritables, atacables amb diferents estratègies per poder arribar a algun resultat significatiu. És convenient treballar activitats que tinguin com escenari situacions no estrictament matemàtiques, perquè abans de l'aplicació de les estratègies de resolució de problemes s'ha d'atacar un problema previ: la matematització de les situacions, el pas de la realitat al model abordable amb tècniques matemàtiques.

Les matemàtiques recreatives no tenen bona fama en l'ensenyament per l'accepció quelcom divertit, alegre de la paraula recreatiu, i l'oblit de l'etimologia de la paraula recrear, tornar a crear. Ambdues accepcions han d'estar unides en la pràctica diària de l'aprenentatge de les matemàtiques, amb la recerca del plaer com a principi generalitzat. Recerca i pràctica del plaer com a camí principal, per la necessitat que els alumnes facin matemàtiques, les recreïn, no que vegin i repeteixin les que altres facin o van fer, plaer que deixa una empremta més duradora.

Claudi Alsina (1991) afirma que ensenyar i aprendre matemàtiques pot i ha de ser una experiència feliç. Diu que només es pot parlar d'una tasca docent ben feta quan tots aconseguen un grau de felicitat satisfactori.

Miguel de Guzmán (1993) també parla en favor de la matemàtica recreativa quan afirma que les matemàtiques són, en gran part, joc, i el joc pot, en moltes ocasions, analitzar-se mitjançant instruments matemàtics.

Quant a l'aplicació dels jocs a l'ensenyament, és de fàcil comprovació que són molt ben rebuts pels alumnes i són de gran utilitat per a l'aprenentatge de les grans estratègies de resolució de problemes.

Es sol objectar que l'aprenentatge per descobriment és més lent però la intensitat amb la qual es tracta i l'interès que desperta (sobretot perquè el joc suscita la voluntat de guanyar) fa que a la llarga sigui més rendible. (Cockcroft, 1985)

Aquesta tesi és un treball dins l'àmbit de la didàctica de les matemàtiques i procura treballar-les atractivament amb una part recreativa. La part divertida actua directament sobre el perfeccionament de la tècnica de resolució de problemes. Més concretament, si es té en compte la distinció de les quatre fases que esmenta G. Polya en el seu llibre titulat *How to solve it* (Polya, 1945), aquesta tesi se centra en la primera fase (abordatge) i en la quarta fase (revisió de la solució).

La tesi s'estructura en quatre parts i un total de nou capítols seguits d'una bibliografia i de sis annexos. La primera part es compon de cinc capítols. Els quatre primers conformen el marc teòric i són: situació de l'àrea problemàtica, ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques, la resolució de problemes, els jocs i les recreacions matemàtiques a l'aula. El capítol cinquè és la formulació del problema i definició dels objectius de la recerca. La segona part explica la metodologia de la recerca i està organitzada en un capítol, el sisè. La tercera part exposa els resultats i els analitza segons l'instrument utilitzat (capítol 7) i segons els indicadors determinats (capítol 8). La quarta part planteja les conclusions de la recerca i les implicacions didàctiques (capítol 9). Després s'exposa la bibliografia. A part, es presenten els annexos classificats en sis grups: l'historial acadèmic recent de la població estudiada a l'ANNEX A, el quadern dissenyat d'activitats a l'ANNEX B, els exemplars dels instruments utilitzats per recollir les dades (test inicial de les Fases I i IV de Polya, i al cap d'un any un test final per a la Fase I i Fase IV, qüestionari i guió de l'entrevista) a l'ANNEX C, les respostes dels alumnes a l'ANNEX D, les taules de dades recollides i sintetitzades segons els grups d'indicadors a l'ANNEX E i la relació de quadres que apareixen a tot el treball a l'annex F.

Degut a la seva extensió, tots aquests ANNEXOS es troben incorporats en un CD que acompanya aquest volum.

**Primera Part: Marc teòric. Formulació del problema i  
definició dels objectius de la recerca**





## Capítol 1: Situació de l'àrea problemàtica

En aquest primer capítol es tractarà d'ubicar el problema d'estudi. En primer lloc es mostraran unes idees principals concretant una possible aplicació de la matemàtica recreativa. En segon lloc, es parla de com es treballen les matemàtiques intentant assolir les competències bàsiques i contemplant els currículums, matematitzant la realitat. En tercer lloc, s'exposaran les principals línies de recerca en resolució de problemes.

### 1.1 Idees principals

A continuació es tractaran unes idees principals que es contemplaran des d'un punt de vista general de les matemàtiques a la societat fins a un punt de vista més concret de la motivació, particularitzant finalment en l'anomenada matemàtica recreativa.

#### 1.1.1 Les matemàtiques a la societat

El fet que s'ensenyin matemàtiques a l'escola respon a una necessitat individual i social simultàniament: tothom ha de saber matemàtiques per poder resoldre o, com a mínim, reconèixer els problemes amb què es troba mentre conviu amb els altres.

Les necessitats matemàtiques que sorgeixen a l'escola haurien d'estar subordinades a les necessitats matemàtiques de la vida en societat. Però quan es creu que les úniques necessitats socials matemàtiques són les que es deriven de l'escola aleshores apareix la malaltia didàctica, que significa que l'única raó aparent per la qual s'han d'aprendre les matemàtiques és perquè s'ensenyen a l'escola. Així s'està reduint l'interès social per una cultura matemàtica bàsica.

Els processos d'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques són aspectes particulars del procés d'estudi de les matemàtiques, entenent la paraula estudi per quelcom que engloba tant el treball matemàtic de l'alumne com el d'un matemàtic professional.

Allò didàctic s'identifica amb tot el que té relació amb l'estudi i amb l'ajut a l'estudi de les matemàtiques. I com a fenòmens didàctics s'entenen els fenòmens apareguts quan s'estudien matemàtiques, ja sigui quan s'utilitzen, quan s'aprenen, s'ensenyen o es creen.

#### 1.1.2 La motivació dels alumnes

El domini afectiu i social dels factors que influeixen en l'aprenentatge que es desenvolupa a les classes requereix una atenció especial. Aquests factors exerceixen un efecte menys decisiu en l'aprenentatge de matèries d'estudi que les pròpies variables de l'estructura cognoscitiva de la disposició de desenvolupament, de la capacitat intel·lectual, de la pràctica i dels materials didàctics (coses a ensenyar).

Les característiques engrescadores, de personalitat, del grup, socials i del professorat són molt importants en la motivació de l'aprenentatge escolar.

Els protocols han d'utilitzar un marc contextual proper a l'alumne per tal de tenir en compte al màxim la cultura de l'individu (Vigotski, 1962). Reeuwijk (1997) defensa una matemàtica de "baix a dalt", en la qual els alumnes poden redescobrir els resultats. És una matemàtica on els contextos destaquen en la fase de presentació i exploració. En la mateixa línia constructivista es troba Martínez, A. (1999, 23-24) quan parla a favor d'una matemàtica inductiva i afirma que mai s'ha de partir d'una fórmula i posar

exemples, sinó que s'ha de partir de coses concretes i pràctiques per arribar finalment a la fórmula. Donada la importància atribuïda al context o a l'entorn per Reeuwijk i per Martínez, es busquen contextos que funcionin trobant-ne cinc requisits d'aquesta manera. El primer consisteix en el fet que puguin motivar els alumnes. El segon resulta ser per aconseguir que els alumnes aprenguin a utilitzar les matemàtiques en societat. El tercer requisit pretén ajudar els alumnes a poder conèixer la història de les matemàtiques, incrementant-ne l'interès. El quart vol despertar la creativitat, l'anàlisi i l'organització de la informació. I el darrer requisit demana que facin de mediadors entre allò que és concret i allò que és abstracte, entre el problema i el model.

La motivació és una condició necessària per fer que l'aprenentatge sigui significatiu, però no és suficient. Abrantes i Serrazina (1996) subratllen la importància de la motivació com a eix fonamental per tirar endavant un bon aprenentatge de les matemàtiques. Per a ells, la motivació és essencial per aprendre, però la naturalesa d'aquesta motivació influencia la manera com els alumnes es manegen en les tasques que fan en l'aprenentatge. Si un alumne vol acabar la feina només per tenir una bona nota, és probable que adopti una actitud defensiva, procurant només obtenir el resultat correcte i no fer errades. Però si està intrínsecament motivat per realitzar la tasca, si realment la valora, correrà riscos per millorar el seu treball i probablement s'implicarà en una exploració de la situació més profunda i tindrà en compte tot el que l'envolta.

L'alumne no té perquè estar motivat inicialment. Però es pot aconseguir motivar-lo amb un determinat material i amb certes intervencions del professorat (desafiament sa, treball en equips...). Tal com observen Chamoso i Rawson (2001, 36), els estudiants realment resolen dubtes i aprenen quan construeixen, experimenten, divergeixen, pregunten, dedueixen, corregeixen, comproven, expliquen, suposen i generalitzen. En relació amb la motivació, destaquen com a variables importants el paper del professor, el fet de treballar cooperativament i l'ús de material manipulatiu.

El constructivisme a l'aula no significa que l'alumne aprèn sol. El professor hi juga un paper rellevant doncs supervisa, reconduïx i pauta els assoliments dels objectius de l'aprenentatge. Com diu Miguel de Guzmán (1992a), no es pot esperar que els alumnes descobreixin en un parell de setmanes allò que la humanitat va elaborar potser al llarg de diversos segles de treball intens de ments molt brillants. Però és cert que la recerca amb guia, sense anihilar el plaer de descobrir, és un objectiu assolible en l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques, i en la detecció de tècniques concretes. Ell mateix afegeix que la teoria concebuda així, resulta plena de sentit, plenament motivada i molt més fàcilment assimilable.

Corbalán i Deulofeu (1996) posen de manifest que el fet de recórrer a materials manipulatius i d'introduir jocs recreatius a l'aula augmenta la motivació de l'alumnat, i permet fer millor els processos inductius, és a dir, una matemàtica "de baix a dalt".

Claudi Alsina diu "s'ha de recordar que educar, en matemàtiques, no és transmetre fórmules i receptes... I el darrer repte de les matemàtiques seria el de l'emotivitat, que la gent se senti feliç fent matemàtiques, que li faci il·lusió anar a classe, que se sàpiga transmetre la il·lusió pel descobriment, per compartir allò que s'està fent." (Alsina, 2000, 8)

Blanco (1993) afirma que la meitat dels alumnes senten més seguretat i confiança al treballar en equip. Per això manifesta que l'aprenentatge requereix implicar els alumnes en activitats significatives. Les explicacions del professor, en un moment adient i de

manera apropiada, són certament elements fonamentals. Tanmateix, no és adient ensenyar coses noves de manera expositiva, cal donar a la canalla l'oportunitat de viure experiències concretes a les quals aquestes explicacions poden donar sentit. Ell contempla l'aprenentatge com una qüestió d'establiment de relacions, veure les mateixes coses des d'altres angles o altres contextos.

Aspectes rellevants a considerar són la participació i el diàleg, la deducció de fórmules o de fets sense la intervenció directa del professor, l'ús de material manipulatiu, el fet de treballar en grup i el fet de dur a terme un procés inductiu cap a l'abstracció i l'anticipació amb activitats lúdiques de raonament lògic per exemple.

### **1.1.3 Problemes de motivació i matemàtica recreativa**

La matemàtica recreativa té com a objecte fonamental atorgar a l'alumne un criteri matemàtic. Amb aquest punt de vista crític cobrirà moltes de les competències bàsiques en matemàtiques establertes per l'informe OCDE/PISA de l'any 2003.

De fet, per aconseguir que l'alumne aprengui matemàtiques se l'ha de convèncer que és una activitat agradable. Això es pot aconseguir fàcilment jugant. Normalment l'alumnat de secundària arriba a classe de matemàtiques amb molts prejudicis, encara més, amb una gran desmotivació. Això fa que no aprenguin i a més a més, degut al caràcter obligatori, acaben "odiant" les matemàtiques. Els alumnes arriben a creure que les úniques necessitats socials matemàtiques són aquelles que es deriven de l'escola. L'única raó d'aprendre-les és perquè s'ensenyen i s'avaluen a l'escola. Trobem una desmesurada atribució de responsabilitat al professor de matemàtiques sobre el procés d'aprenentatge de l'alumne. Antigament l'ensenyament de les matemàtiques es pensava com un art. En funció del domini del professor sobre aquest art, es pensava que els alumnes aprenien millor o pitjor. Aquesta creença, encara que en menor grau, encara persisteix a l'actualitat. Del que es tracta és d'aconseguir que l'alumne s'impliqui activament i no passivament en el seu propi procés d'aprenentatge. Un mitjà que pot propiciar-ho pot ser utilitzar la matemàtica recreativa a classe.

El professor no pot estudiar en lloc de l'alumne, com tampoc pot estar atent a les explicacions ni fer els exercicis proposats per a una millor assimilació. El professor només pot i ha d'intentar desenvolupar una actitud positiva i una motivació adequada i favorable de cara a aprendre matemàtiques.

Alguns propòsits d'utilitzar els jocs matemàtics consisteixen en desenvolupar conceptes, reforçar habilitats, desenvolupar habilitats formatives i potenciar el raonament lògic. Els jocs aconsegueixen un fort nivell d'implicació, i així s'elimina el passotisme. Permeten aprendre a partir dels propis errors o dels errors dels altres. Un ambient lúdic redunda en una actitud oberta cap al coneixement i al plaer per aprendre, descobrir i també crear.

Els alumnes amb una actitud oberta a les dificultats abandonen més tard davant d'intents resolutius frustrats. Mitjançant les recreacions matemàtiques es combaten moltes de les dificultats amb què l'alumne es troba quan es tracta de resoldre problemes. Per exemple autorestriccions, interpretacions abusives o implícites del llenguatge verbal que es troben als enunciats, falses intuïcions, paradoxes, particularitzacions i generalitzacions. En matemàtiques, la intuïció és molt important, i es treballa amb l'anticipació i l'experimentació que es practiquen amb la matemàtica recreativa. De fet, s'ha d'anar amb compte en com s'incentiva i fomenta la intuïció, doncs en un grup els individus poden trobar-se cohibits. Els motius poden ser diversos, però no interessa que

els alumnes que hagin presentat dificultats a l'assignatura de matemàtiques optin per mantenir-se al marge de noves activitats proposades que busquen precisament integrar-los. Per això, no s'ha d'oblidar una altra característica important que desenvolupa la integració dels jocs a classe: l'atenció a la diversitat. A més a més de poder jugar tots, degut al fet que hi ha un component d'atzar i un altre de coneixements aliens a l'assignatura provinents de les pròpies experiències personals, els que normalment van malament a la classe de matemàtiques creuen competir en igualtat de condicions que la resta de la classe. Aquest fet ajuda a una implicació total, i fins i tot podria ser que destaqués positivament algun alumne que dins del grup classe passés desapercbut.

## 1.2 Fer matemàtiques

A continuació s'exposarà la manera de treballar les competències bàsiques a l'àrea de matemàtiques contemplant el currículum a secundària en relació a les finalitats, en relació a la selecció i en relació amb la seqüència. Després es considerarà el model de matematització de la realitat i per últim es considerarà la creativitat que sorgeix en fer matemàtiques.

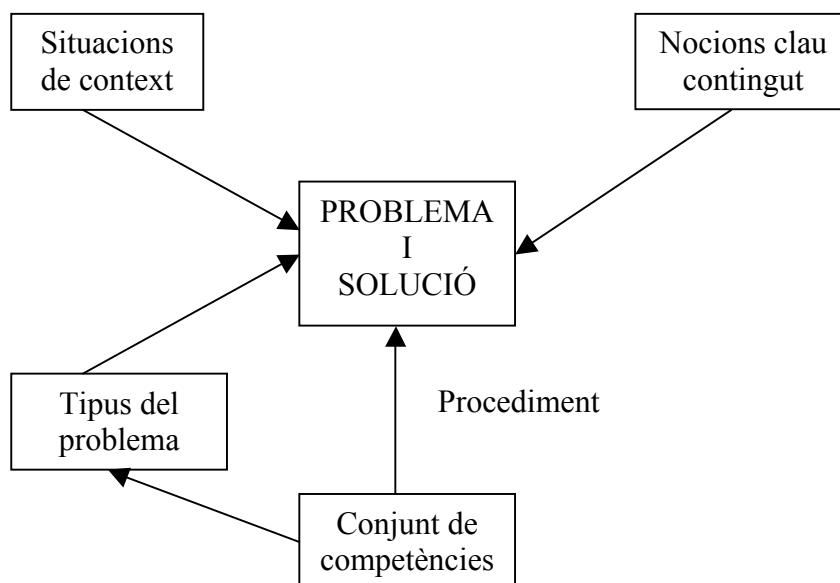
### 1.2.1 Competències bàsiques i matemàtiques

L'informe de l'any 2003 de OCDE/PISA és un informe redactat sobre el Programa Internacional d'Avaluació d'Estudiants auspiciat per la UNESCO i la Organització per a la Cooperació i el Desenvolupament Econòmic. Aquest informe reflecteix la següent definició de competència matemàtica: "La competència matemàtica és la capacitat d'un individu per identificar i entendre el rol que juguen les matemàtiques en el món, emetre judicis ben fonamentats i utilitzar les matemàtiques en formes que li permetin satisfer les seves necessitats com a ciutadà constructiu, compromès i reflexiu" ([www.pisa.oecd.org](http://www.pisa.oecd.org)).

El marc teòric de l'esquema matemàtic de l'OCDE/PISA situa la definició de competència o "alfabetisme" matemàtic. Es fonamenta en els elements generals de la teoria de l'estructura i en l'ús del llenguatge que sorgeix dels més recents estudis socioculturals. La capacitat de llegir, escoltar, escriure i parlar un llenguatge són les eines més importants de la societat humana. Les matemàtiques poden considerar-se com un llenguatge, s'han de conèixer els elements fonamentals del discurs matemàtic (termes, símbols, signes, procediments...) i saber aplicar-los a la resolució de problemes sorgits de diverses situacions reals.

El domini de competència matemàtica de l'OCDE/PISA comprèn tres eixos principals:

- Les situacions o contextos on s'ubiquen els problemes.
- El contingut matemàtic requerit per resoldre els problemes organitzat d'acord amb certes nocions clau.
- Les competències que han de ser aplicades per connectar el món real, en què es generen els problemes, amb les matemàtiques, per resoldre així els problemes.



Quadre 1.1: Els elements de l'àmbit de coneixement de matemàtiques. (www.pisa.oecd.org)

Els processos matemàtics que els estudiants apliquen quan intenten resoldre un problema es denominen competències matemàtiques. Per avaluar el nivell de competència matemàtica dels alumnes, l'informe d'OCDE/PISA es basa en les vuit competències matemàtiques específiques identificades per Niss (1999) i els seus col·legues danesos: 1) Pensar i raonar; 2) Argumentar; 3) Comunicar; 4) Modelar (traduir la realitat a una estructura matemàtica); 5) Plantejar i resoldre problemes; 6) Representar; 7) Utilitzar el llenguatge i operacions simbòliques, formals i tècniques; 8) Utilitzar ajudes i eines.

La formació matemàtica en els termes en què ho fa el Projecte OCDE/PISA (2000, 71) s'entén com la capacitat de l'individu a l'hora de moure's pel món per identificar, comprendre, establir i emetre judicis amb fonament sobre el paper que juguen les matemàtiques com element necessari per a la vida actual i futura d'aquell individu com a ciutadà constructiu, compromès i capaç de raonar.

Bergasa i altres (1996) estructuren unes intencions educatives per a la Secundària Obligatòria entorn de tres tipus d'aprenentatge:

- Els relatius al mètode matemàtic (competència numèrica i geomètrica, i desenvolupament i utilització del llenguatge matemàtic).
- Els relatius a actituds i hàbits de treball.
- Els relatius a valoració i apreciació del coneixement matemàtic.

Per la seva banda, el Projecte OCDE/PISA enuncia aquestes finalitats en forma de competències matemàtiques i grans idees matemàtiques.

### 1.2.1.1 Currículum de matemàtiques a secundària en relació a les finalitats i intencions educatives

Perrenoud (2000) defineix la competència com una capacitat d'actuar eficaçment en un tipus definit de situacions, capacitat que es recolza en els coneixements però que no s'esgota en ells.

Per Girono i Dalmau (2001), el concepte de competència inclou tant els sabers (coneixements teòrics) com les habilitats (coneixements pràctics o aplicatius) i les actituds (compromisos personals).

El projecte OCDE/PISA (2000) s'organitza entorn a les grans idees matemàtiques, i destaca les següents: l'atzar, el canvi i el creixement, l'espai i la forma, el raonament quantitatiu, el dubte, la dependència i les relacions.

El NCTM en les seves observacions *Los Principios y estándares para la matemática escolar* (2000) enumera i descriu cinc grans blocs de contingut: números i operacions, àlgebra, geometria, mesura, anàlisi de dades i probabilitat.

### **1.2.1.2 Currículum de matemàtiques a secundària en relació a la selecció de continguts: els eixos temàtics**

Els temes curriculars que considera el Projecte PISA que poden ajudar a assegurar un equilibri en el desenvolupament del currículum són: el número, la mesura, l'estimació, l'àlgebra, les funcions, la geometria, la probabilitat, l'estadística i les matemàtiques discretes.

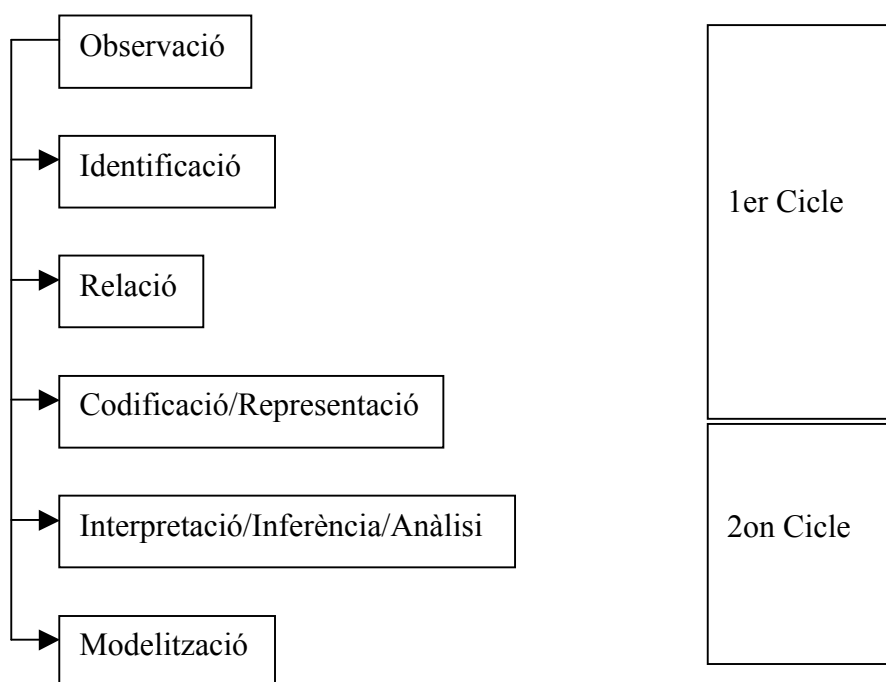
Hi ha una altra proposta no discordant amb l'anterior, que planteja per una banda una relació del que s'ha denominat camps temàtics, i paral·lelament es pot estructurar aquest eix per un conjunt de procediments clau propis de cada camp temàtic:

- En el camp dels nombres, les magnituds i els recomptes: traducció, ampliació del camp numèric, càlcul i estimació, comparacions i mesures, recomptes.
- En el camp del llenguatge algebraic: traducció, sintaxi.
- En el camp de la geometria: visualització, construcció i representació, relacions mètriques, transformacions.
- En el camp del llenguatge gràfic i les funcions: traducció, anàlisi de dependències funcionals.
- En el camp de l'estadística i la probabilitat: anàlisi a posteriori, anàlisi a priori de les situacions.

### **1.2.1.3 Currículum de matemàtiques a secundària en relació a la seqüència de continguts: processos i capacitats**

L'educació matemàtica persegueix transmetre una manera de pensar matemàticament, un procés de construcció del saber matemàtic que es recolza en capacitats de tipus cognitiu. El Projecte PISA distingeix els següents tipus de competències: reproduccions, definicions i càlculs; connexions i integració per a la resolució de problemes; pensament matemàtic, generalització i comprensió.

Es pot suggerir la relació de processos i capacitats següent: observació, identificació, relació, codificació i representació, interpretació, inferència i anàlisi, modelització. No obstant, es creu també convenient assumir dos aspectes importants: la necessitat de provocar permanentment la reflexió explícita sobre aquestes capacitats, afavorint una aprehensió implícita, i considerar aquestes capacitats com a no estàtiques.

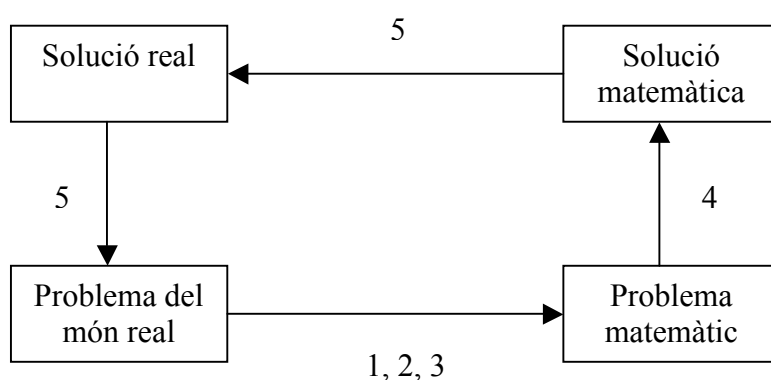


Quadre 1.2: Processos/capacitats que conformaran l'eix ascendent de seqüenciació dels continguts.

### 1.2.2 Matematitzar la realitat

Un aspecte essencial de l'activitat matemàtica consisteix a construir un model matemàtic de la realitat que es vol estudiar, treballar amb aquest model i interpretar els resultats obtinguts per respondre les qüestions inicials. Com a curiositat, a l'institut de batxillerat Jules Michelet de Marsella (França) funciona des de 1989 una *Boutique de Mathématiques*. S'encarreguen d'aquesta botiga un petit nombre de professors de matemàtiques de l'institut que construeixen models matemàtics de les situacions proposades transformant així l'encàrrec del client en un problema matemàtic que han de resoldre.

Es podria dir que els problemes socials es poden resoldre amb una estratègia general: la matematització del problema. A continuació es mostra aquesta estratègia en un diagrama enumerant uns passos que tot seguit s'expliquen.



Quadre 1.3: El cicle de la matematització (Freudental, 1983)

Aquesta estratègia es pot desglossar en cinc aspectes:

1. Es parteix d'un problema del món real.

2. Es formula el problema en termes de conceptes matemàtics.
3. Gradualment s'abstrau de la realitat a través de processos tals com fer supòsits sobre quins aspectes del problema són importants, la generalització del problema i la seva formalització.
4. Es resol el problema matemàtic.
5. Es pren consciència de la solució matemàtica en termes de la situació real.

En el present estudi, desenvolupat amb alumnes de segon d'ESO, s'han plantejat recreacions matemàtiques que representen problemes reals. Aquests problemes reals es resolen matematitzant-los, és a dir, trobant una solució matemàtica que després s'ha d'interpretar a la realitat.

### **1.2.3 Treballar les matemàtiques creativament**

Troblem tres aspectes de l'activitat matemàtica. El primer gran tipus d'activitat matemàtica consisteix en resoldre problemes a partir de les eines matemàtiques que un ja coneix i sap com utilitzar. El segon aspecte del treball matemàtic consisteix en aprendre (i ensenyar) matemàtiques. Pot fer-se mitjançant instruments matemàtics que ja existeixen, però que són desconeguts pel qui desenvolupa l'activitat. Així és com sorgeix la necessitat d'aprendre matemàtiques per poder respondre qüestions concretes. En conseqüència, apareix la necessitat d'ensenyar matemàtiques. El tercer tipus de treball matemàtic, la creació de matemàtiques noves, es presenta com una activitat reservada als investigadors en matemàtiques. S'han de crear nous models per estudiar les matemàtiques o bé imaginar noves utilitzacions d'antics models.

Així, es treballin les matemàtiques de qualsevol de les tres maneres, pot dir-se que qui fa matemàtiques participa d'alguna manera en un treball creatiu. Aquell qui utilitza matemàtiques conegudes per resoldre un problema matemàtic clàssic, sovint haurà de modificar lleugerament el model matemàtic que manipula per adaptar-lo a les peculiaritats del seu problema, cosa que comporta la possibilitat d'enunciar i abordar problemes nous. Qui ensenya matemàtiques ha de reformular els coneixements matemàtics que ensenya en funció dels tipus de problemes que els seus alumnes han d'aprendre a resoldre. El darrer cas, òbviament crea, doncs està descobrint.

### **1.3 Línies de recerca en resolució de problemes**

Per enfrontar-se amb un problema intel·lectual es disposa de la pròpia ment amb un funcionament on intervé tota una complexa personalitat amb els seus condicionaments, amb els seus hàbits, les seves fòbies, elements permanents que juntament amb les circumstàncies variables determinen la seva actitud en un moment donat.

A la primera meitat del segle XX, en un marc educatiu amb uns currícula estables i avorrits, on es valorava la memorització dels fets, conceptes i procediments, els problemes quedaven reduïts a una activitat mecànica. A la dècada dels 60, després d'una renovació centrada en l'abstracció i en un marc estructuralista, el fracàs és evident i s'observa com els alumnes no entenen les abstraccions i perden habilitats bàsiques. Aleshores es tornà a la realització d'execucions rutinàries i algorísmiques. Kilpatrick (1978) manifesta que s'havia produït un important canvi i en fa una revisió. Distingeix quatre perspectives diferents sota les quals s'havia abordat fins aleshores el paper que juga el problema i els seus processos de resolució en la literatura de recerca en educació matemàtica:

- a) Des de la perspectiva psicològica: el problema és una activitat lligada al subjecte, normalment motivat.



- b) Des de la perspectiva socioantropològica: el problema és una tasca pròpia d'una situació de transacció, entenent l'aula de matemàtiques com una situació social construïda en comú per tots els participants, on l'alumnat i el professorat interpreta cadascú accions i intencions.
- c) Des de la perspectiva matemàtica: el problema és una construcció, es pensa que la matemàtica és creada en un procés de formulació i resolució de problemes.
- d) Des de la perspectiva pedagògica: el problema és vehicle; curricularment pel paper que juguen els problemes en l'educació matemàtica, i didàcticament per ajudar a com ensenyar a resoldre problemes.

Gil i altres (1988) consideren que la literatura sobre la resolució de problemes de llapis i paper mostra dues orientacions teòriques: l'associada a l'observació de com resolen els experts els problemes i l'algorísmica, intentant transformar els problemes en situacions estàndards que es puguin resoldre mitjançant operacions rutinàries.

Anys més tard, Lester (1994), utilitzant com a indicadors els articles publicats al *Journal for Research in Mathematics Education* es recolza en Kilpatrick (1969) qui caracteritzava la literatura sobre resolució de problemes en matemàtiques en aquell moment com a atèrica, no sistemàtica i descoordinada, interessada en els problemes verbals estandarditzats dels llibres de text i restringida a la quantificació de les conductes en resolució de problemes. Lester (1994) planteja les 4 àrees sobre les quals s'ha produït un major progrés en la recerca formulant-les com a preguntes:

- a) Què fa que un problema sigui difícil per als estudiants? Goldin (1982) i McClintock (1979) van fer un treball en aquesta línia de recerca la qual es va reconduir vers l'estudi de les interaccions entre les variables de la tasca i les característiques dels resolutors.
- b) En què es diferencien els bons i dolents resolutors? Schoenfeld inicia una sèrie de treballs en aquesta línia (1985a, 1987a). Lester recolzant-se en Lesh (1982), fa constar que determinant amb precisió les maneres en les quals els experts resolen els problemes i instruint d'aquestes maneres als novells en curts espais de temps pot no tenir com a resultat les conseqüències desitjades.
- c) Què se sap sobre l'ensenyament de la resolució de problemes? Callejo (1991), basant-se en Burkhardt i Schoenfeld, considera que els projectes d'aprenentatge en resolució de problemes giren al voltant de tres elements: la pràctica, l'adquisició de coneixements de mètodes generals de resolució de problemes o d'heurístics particulars i la reflexió sobre les tasques (pròpies i alienes).
- d) És la metacognició la força directiva en resolució de problemes? Es consideren les accions metacognitives com una força directiva en la resolució de problemes, i amb influències sobre les conductes cognitives en totes les fases del procés de resolució.

Schoenfeld (1992) expressa la necessitat de major claredat en el significat dels termes, del perfeccionament dels mètodes de recerca. Fa notar la importància de la comprensió de les interaccions entre els aspectes de l'activitat de resolució de problemes, i la necessitat de millorar els instruments de la seva avaluació. També considera el paper de les creences i afectes en la resolució de problemes, i la necessitat de major atenció als aspectes relacionats amb la instrucció. A l'estat espanyol, sobre recerca en resolució de problemes en els darrers anys, a banda dels treballs de Callejo (1994, 1999), Carrillo (1996) i Puig (1988, 1996), es destaquen els treballs de Fayos (1996), Zorroza (1994) i Cobo (1998), en el marc dels processos cognitius. També els treballs de Gascón (1989), en el marc de l'heurística, i de Corbalán (1997) sobre els jocs d'estratègia a l'aula; els

treballs que estudien la relació entre els processos de resolució de problemes dels alumnes i diferents aspectes de la instrucció (Plata, 1998; Hernández, 1996). Sobre aspectes de creences Antoni Vila (2001) hi ha dedicat considerables esforços.

No hi ha unanimitat, fins recentment, en la forma d'abordar la idea de problema i de resolució de problemes. Callejo (1999) fa una crítica sobre la distància investigació-aula dient que un punt que diferencia a docents i investigadors és la seva motivació quan realitzen una investigació; en el primer cas acostuma a ser la millora de la seva pràctica i així té una vessant d'aplicació directa; els investigadors busquen el prestigi acadèmic, tenint com a principal preocupació el plantejament metodològic donant-li importància en detriment de la significativitat del problema; no sempre es dona la preocupació per la utilitat dels resultats. Schoenfeld (1992) fa una revisió sobre les idees de problema i de resolució de problemes dient que és difícil d'interpretar-les ja que mai s'han distingit clarament. La diversitat de significats adquireix una importància afegida: la seva transferència a l'aula. Callejo (1994) apunta que el terme problema ha esdevingut una mena de calaix de sastre que reuneix activitats que es proposen als estudiants seguint diferents finalitats i la resolució de les quals exigeix aplicar diferents coneixements, habilitats i capacitats que formen part de la programació de matemàtiques.

## **Capítol 2: Ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques**

En aquest capítol s'exposarà en primer lloc models d'aprenentatge existents a matemàtiques i en particular el constructivisme. En segon lloc s'exposaran les característiques i les condicions del pensament crític. En tercer lloc s'explorarà la pedagogia, la instrucció i la cognició matemàtiques exposant característiques, objectius i estratègies ensenyades. En quart lloc es tractaran les matemàtiques a la secundària obligatòria contemplant les dificultats d'ensenyament i de fer pensar a la classe de matemàtiques. En cinquè lloc es comentarà el currículum de matemàtiques començant per les darreres tendències curriculars i acabant pel seu concepte, antecedents, dimensions i objectius.

### **2.1 Un marc per a l'aprenentatge: el constructivisme**

L'aprenentatge s'explicarà com una construcció de coneixements tots entrelligats i per això en aquest apartat el paper de l'aprenentatge significatiu és important. Després s'explicarà la implicació del professor en el procés d'aprenentatge i la interacció entre ell i l'alumne. Al final es parlarà del rol que juga la memorització en l'aprenentatge.

#### **2.1.1 Aprenentatge significatiu**

Primer s'explicaran tres models previs importants, després els tipus d'aprenentatges significatius i les condicions necessàries perquè es donin. També es contemplarà la resolució de problemes (i la creativitat com a característica implícita) com una forma d'aprenentatge significatiu i per últim, es recullen les característiques i idees sobre l'aprenentatge significatiu per part d'autors importants.

##### **2.1.1.1 Diferents models previs**

En aquest punt es tractaran les idees, la utilitat i les crítiques dels principals models d'aprenentatge de Gagné, de Piaget i d'Ausubel.

###### **2.1.1.1.1 Model de Gagné: idees, utilitat i crítiques**

El model de Gagné vol proporcionar una visió de què és aprendre per establir les condicions adients perquè es pugui produir un determinat aprenentatge. Segons Gagné (1965), l'aprenentatge consisteix en un canvi en la disposició o capacitat humana, amb caràcter de relativa permanència, que no és atribuïble simplement al procés de desenvolupament. El canvi al qual es refereix es manifesta com una modificació de la conducta i es pot inferir de la comparació del tipus de conducta observada per l'individu abans i després de ser col·locat en la situació d'aprenentatge. Per a Gagné (1965), una persona que està aprenent experimenta que els fets que s'esdevenen al voltant seu li impressionen els sentits i donen lloc a cadenes d'impulsos nerviosos organitzats pel seu sistema nerviós central, i especialment pel cervell. Aquesta activitat nerviosa arriba a alterar el mateix procés organitzador i aleshores diu que el subjecte aprèn.

Perquè es pugui produir l'aprenentatge hi ha dos tipus de condicions: internes a l'individu i externes a ell. Dintre de les primeres es troben les capacitats que prèviament poseeix, les que el professor haurà de descobrir en cada cas. Dintre de les segones es té la situació estimulants externa que el professor haurà de proporcionar per fer possible l'aprenentatge.

Els aprenentatges del model de Gagné són vuit de complexitat creixent i de caràcter jerarquitzat diferent:

1. Reacció davant d'un senyal. Es tracta d'una resposta ampla i difusa.
2. Estímul - resposta. Resposta precisa davant d'un estímul.
3. Encadenament. Dues o més connexions estímul - resposta encadenades.
4. Associació verbal. Encadenament, però ara es tracta de cadenes verbals.
5. Discriminació múltiple. Resposta diferent a estímuls diferents que tenen certes característiques comunes.
6. Aprenentatge de conceptes. Resposta comuna a una classe d'estímuls que poden arribar a ser molt diferents.
7. Aprenentatge de principis. Encadenament de dos o més conceptes.
8. Resolució de problemes. Utilització combinada de dos o més principis, que produeixen una nova capacitat.

Perquè es produeixi un aprenentatge d'un tipus determinat, es necessiten certs requisits previs que són els aprenentatges de categories inferiors anteriorment descrits. La manera com estableix les vuit jerarquies porta a la determinació de prerequisits de tipus lògic, que poden ser determinants per als experts en la disciplina, però no necessàriament importants per a l'estudiant. S'ha de recórrer a la distinció entre estructuració lògica i estructuració psicològica d'un concepte. L'estructuració psicològica, com que té més en compte el pensament de l'alumne i les raons que pot entendre i valorar, tindrà més possibilitats de convèncer-lo que no pas la simple lògica, per molt contundent que pugui semblar. La teoria de Gagné tindria un valor merament axiomàtic, internament consistent, però no necessàriament connectada amb el món real (Gutiérrez, 1987). Tractant-se de prerequisits lògics, no hi ha res a validar, ja que per ells mateixos són necessaris.

Per altra banda, no queda clar si les jerarquies s'han de buscar per anàlisi lògica (no hi ha res a validar) o per recerca empírica (la lògica no hi juga cap paper determinant). A més a més, la validació estadística té un valor probabilístic i no s'adapta a les individualitats; com que proposa la mateixa jerarquia per a tothom, el model de Gagné no descriu la manera com s'esdevé l'aprenentatge individual.

La insistència en els objectius de conducta posa més l'accent en el fet de saber fer coses que no pas en el d'entendre-les. A la pràctica, la utilització d'aquest model d'aprenentatge no demana coneixements psicològics, sinó tan sols els propis de la disciplina que s'ha d'ensenyar. Per exemple, un alumne pot saber calcular la tangent però pot no tenir cap significat per a ell. Potser el mèrit del model gagnetian és el fet de desplaçar l'interès des dels objectius terminals a les habilitats que en constitueixen els prerequisits (Jones i Russell, 1979).

El model de Gagné és útil per a l'aprenentatge d'habilitats pràctiques, però no per a aprenentatges significatius (Driver, 1982) els quals en el present treball es consideren fonamentals; és útil per a l'aprenentatge d'algunes habilitats intel·lectuals, però no per al d'actituds o estratègies cognoscitives (Jones i Russell, 1979). Aquest model es pot aplicar a camps de poca complexitat conceptual, però no es pot utilitzar en l'ensenyament dels grans conceptes de la ciència, que demanen importants reorganitzacions mentals. Els prerequisits gagnetians s'han de tenir en compte però no queda prou ben definit en el model quin caràcter han de tenir les condicions perquè l'aprenentatge resulti amb significat.

### 2.1.1.1.2 Model de Piaget: idees, utilitat i crítiques

Piaget defineix la intel·ligència com un cas particular d'adaptació de l'organisme al medi. Aquest es produeix a partir de dos mecanismes: l'assimilació i l'acomodació (o reajustament). El coneixement obtingut serà sempre el resultat de la nostra pròpia acció, ja que ella és l'única que modifica els esquemes inicials i possibilita la formació de nous sistemes d'interpretació de la realitat. La possibilitat de pensar no està preformada. Davant un mateix fenomen, es donen distintes interpretacions en funció de l'edat. Es produeix una evolució en l'individu que permet anar construint un sistema lògic capaç d'explicar la realitat observada. La constitució final d'una estructura pressuposa un equilibri mental entre els sistemes de comprensió del subjecte i les exigències del medi. Són aquests diferents nivells d'equilibri els que Piaget defineix com estadis evolutius del pensament. L'epistemologia genètica de Jean Piaget estableix que primerament es presenta el període sensoriomotor (de 0 a 2 anys), després el simbòlic (de 3 a 7 anys quan la intel·ligència és intuïtiva), les operacions concretes (de 8 a 11 anys quan la intel·ligència és lògica però depèn de referències concretes) i finalment les operacions formals (de 12 a 15 anys quan el pensament inclou abstracció). Aquest ordre és una constant universal degut al fet que la seva relació és d'inclusió: cada etapa engloba l'anterior. (Piaget, 1986)

Si es pren com a punt de partida una teoria constructivista del coneixement en la qual l'individu és un ser actiu que, a partir de la seva activitat sobre la realitat i de les contradiccions que aquesta planteja a les seves pròpies explicacions dels fenòmens, modifica els seus sistemes interpretatius, el medi escolar cobra un paper central en el desencadenament del procés. L'assimilació de qualsevol contingut escolar depèn del sistema interpretatiu de l'individu, és a dir, de la seva estructura mental; si els verbalismes o les expressions que el nen rep en el medi escolar no actuen com elements que estimulen i regulen la seva activitat intel·lectual, restaran com dades superposades a la seva ment les quals intentarà memoritzar enlloc de comprendre. (Piaget, García; 1982)

Piaget pensa que els premis de la instrucció es presenten massa aviat o massa tard, o d'una manera que evita l'assimilació perquè no s'ajusta a les construccions espontànies del nen. Creu que la manera com s'ensenyen els procediments formals tendeixen a evitar que el nen construeixi la seva pròpia comprensió dels fets. Així els nens retenen poc coneixement podent retrocedir fins i tot. Insisteix que una de les raons per les quals no s'utilitzen els desenvolupaments espontanis dels nens és la importància que se li dona a l'ensenyament per associació enlloc de per assimilació. La història del desenvolupament intel·lectual tracta amb el sorgiment de mecanismes poderosos mitjançant els quals un individu augmenta la seva habilitat per entendre situacions complexes. Aquests mecanismes inclouen l'abstracció reflexiva, les dicotomies assimilació/acomodació i desequilibració/reequilibració i la tricotomia intra, inter i trans (es veurà més endavant). El desenvolupament d'aquests mecanismes succeeix de manera espontània com a resultat de la maduració, però només en presència d'experiències apropiades i en moltes ocasions, sota la influència de la interacció social. (Piaget, 1986)

Per a Piaget, el paper de la pedagogia és el de cooperar amb els mecanismes d'aprenentatge i el d'ajudar l'estudiant a desenvolupar, i adonar-se'n d'ells i invocar-los de manera conscient. El professor ha de començar amb les estructures que l'estudiant ja ha construït espontàniament i ajudar el nen a relacionar-les amb les estructures matemàtiques tal com el mateix professor les entén. Hi ha dues possibles maneres per al professor. Una és participar amb els matemàtics i treballar conjuntament per a trobar un

mètode modern per ensenyar matemàtiques. L'altra és escoltar el que diuen i com raonen els nens. (Dubinsky, 1996)

La principal estratègia consisteix a plantejar que el professorat creï situacions que facilitin el descobriment o invenció per part de l'alumne de les idees matemàtiques i que presenti exemples desequilibrants de tal manera que l'estudiant desenvolupi idees noves amb objecte de reequilibrar. Piaget suggerí algunes recomanacions pedagògiques que es recolliren a l'Oficina Internacional d'Educació i a la UNESCO: (UNESCO, 1996)

- Guieu l'estudiant perquè construeixi les seves pròpies idees i descobreixi relacions i propietats matemàtiques per sí mateix, enlloc d'imposar-li el pensament d'adult ja elaborat.
- Assegureu-vos que ha adquirit els processos i les idees operacionals abans d'introduir-lo al formalisme.
- No confieu a l'automatisme cap operació que no s'hagi assimilat.
- Assegureu-vos que l'estudiant adquireixi primer experiència amb les entitats i relacions matemàtiques per després iniciar-lo en el raonament deductiu.
- Esteneu la construcció deductiva de les matemàtiques de manera progressiva.
- Ensenyeu a l'estudiant a plantejar els problemes, establir dades, explotar-les i sopesar els resultats.
- Doneu preferència a la investigació heurística de problemes, enlloc de l'exposició doctrinària de teoremes.
- Estudieu els errors que cometen els estudiants i veieu-los com un mitjà per entendre el seu pensament matemàtic.
- Entreneu els estudiants en la pràctica de la verificació personal i l'autocorrecció.
- Infoneu gradualment als estudiants el sentit d'aproximació.
- Doneu prioritat a la reflexió i al raonament.

Conforme el nivell matemàtic dels conceptes augmenta, és necessari, segons Piaget, construir objectes nous, no tant físics com mentals, i manipular-los amb objecte de construir les idees matemàtiques.

Dubinsky (1996) confeccionà un llistat d'idees de Piaget sobre educació implementant-les a la seva investigació on es destaquen les directrius següents:

- Concentreu-vos en els mecanismes mitjançant els quals es canalitza el desenvolupament intel·lectual. Aquests inclouen l'abstracció reflexiva i la dicotomia desequilibració/reequilibració.
- Ajudeu els estudiants a construir accions, a interioritzar-les en processos i a aquests a encapsular-los en objectes.
- Ajudeu els estudiants a prendre consciència de les estructures que han construït, a connectar-les amb els conceptes matemàtics i a fer construccions addicionals per tractar amb situacions noves.
- Canvieu el paper del mestre de disseminador d'informació a guia assistent.
- Presteu atenció a les veus dels estudiants, als seus errors i als seus èxits i tracteu d'entendre el seu pensament.
- Creeu situacions favorables per fer construccions mentals per tractar amb les situacions dels problemes matemàtics.
- Permeteu que els estudiants construeixin bases sobre l'experiència per als conceptes abans d'enfrontar el formalisme que estructura els conceptes.
- Doneu als estudiants una oportunitat de descobrir els conceptes matemàtics abans que els siguin explicats, ja sigui per altres estudiants o pel mestre.

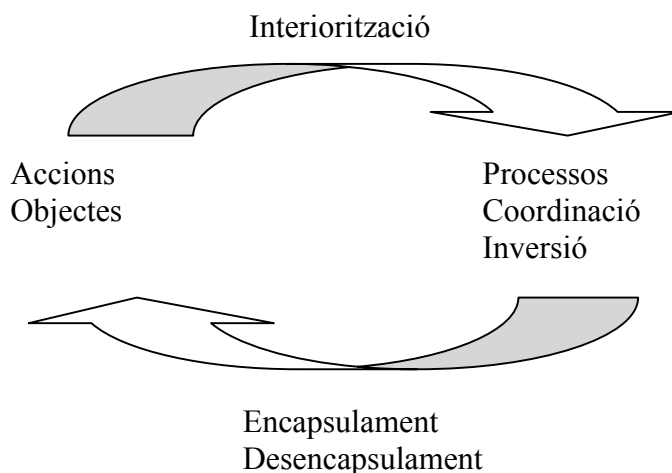
- Establiu un ambient en el qual els estudiants tinguin l'oportunitat d'interaccions socials riques, tant amb altres estudiants com amb el mestre.

A partir d'aquestes directrius es dedueix que la comprensió d'un individu dels conceptes matemàtics resulta de la construcció o reconstrucció d'accions matemàtiques, processos i objectes que els organitza en esquemes a fi d'usar-los en situacions de resolució de problemes.

El constructivisme té implicacions per a l'ensenyament i l'aprenentatge. Amb freqüència, la instrucció comença presentant una situació que crearà un desequilibri en les estructures que l'estudiant té ja construïdes. Les recreacions matemàtiques, en particular, poden conduir a la desequilibració i dona l'oportunitat de construir una base d'experiències per als conceptes matemàtics i per descobrir idees matemàtiques específiques. Aquestes activitats estan dissenyades per tal que l'estudiant faci abstraccions reflexives mitjançant les quals s'efectuïn les construccions mentals d'accions, processos i objectes apropiats.

L'abstracció reflexiva és un concepte introduït per Piaget per descriure la construcció de les estructures logicomatemàtiques per un individu durant el curs del desenvolupament cognitiu. L'abstracció reflexiva prové de dos mecanismes que estan necessàriament associats. Són projeccions cap a un nivell superior derivats d'un nivell inferior, i en segon lloc, reflexió que reconstrueix i reorganitza dins d'un sistema més gran que és transferit/traslladat per projecció. Exemples d'abstracció reflexiva podrien ser:

1. Interiorització d'una acció: la construcció mental d'un procés intern (una totalitat coherent) relativa a una sèrie d'accions sobre objectes cognitius que poden ser realitzades o imaginar que es realitzen en la ment sense que sigui necessari realitzar tots els passos concrets. En aquest cas es diu que l'acció ha estat interioritzada en un procés.
2. Encapsulament: és la transformació mental d'un procés (que és la interiorització d'alguna acció) en un objecte cognitiu. Aquest objecte pot ser vist com una entitat total (o totalitat coherent) i pot ser afectat/transformat (mentalment) per accions o processos. En aquest cas es diu que un procés ha estat encapsulat en un objecte.



Quadre 2.1: Construcció d'accions, processos i objectes.

Acció: una acció és una transformació d'objectes que l'individu percep com quelcom que és extern. La transformació es fa per reacció a una indicació externa que dona

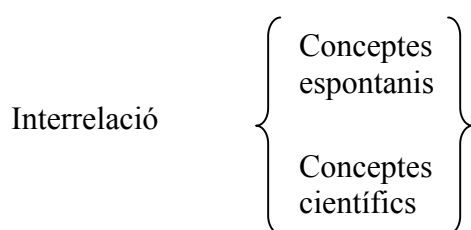
precisos detalls sobre les passes a fer. Per exemple: hom realitza una acció quan donada una fórmula per a una funció i un punt, calcula el valor de la funció en aquest punt.

Procés: quan una acció es repeteix i l'individu reflexiona sobre ella, pot interioritzar-se en un procés. Una construcció interna es fa i realitza la mateixa acció, però ara no necessàriament dirigida per un estímul extern. Un individu que ha construït un procés pot descriure'l, o invertir els passos sense fer-los. En contrast amb una acció, l'individu percep el procés com quelcom intern, i sota el seu control, enlloc de res que es fa com a resposta a senyals externs.

Objecte: Els individus poden construir objectes cognitius de dues formes. Quan un individu reflexiona sobre les operacions aplicades a un procés en particular, pren consciència del procés com un tot, realitza aquelles transformacions (ja siguin accions o processos) que poden actuar sobre ell; aleshores està pensant en aquest procés com un objecte. En aquest cas es diu que el procés ha estat encapsulat en un objecte.

La feina de solució de problemes té com a objectiu obtenir consciència de les estructures que estan construint. Per altra banda, les discussions a classe generalment són guiades utilitzant tècniques d'aprenentatge cooperatiu per facilitar l'assimilació i l'acomodació. En aquest sistema pedagògic el paper del professor comença a desplaçar-se; deixa de jugar un rol central per ser un component de l'ambient total d'aprenentatge. Té un paper de guia, facilitador, creador de situacions i assessor, però li toca a l'estudiant la responsabilitat bàsica d'aprendre i fer les construccions mentals requerides. És per aquest motiu que per a Piaget, inventar és comprendre.

Vigotski (1989), a diferència de Piaget que opinava que tot allò que s'ensenyava a un nen li impedeix descobrir-ho per ell mateix, distingia entre conceptes espontanis i conceptes científics. Entre ells troba interrelacions significatives, on situa com a eix de correspondències el factor de la instrucció escolar:



Quadre 2.2: Instrucció escolar en el desenvolupament mental del nen

Per a Vigotski (1989), interrelació no és el mateix que interdependència. Aquesta posició seria la de Piaget, ja que en restringir el desenvolupament a un procés de maduració subjecte a lleis naturals, no li quedaria a la instrucció cap altre paper que el d'una utilització de les oportunitats creades pel desenvolupament. Per això Vigotski (1989) discrepa amb aquesta teoria de Piaget donat que les etapes es presenten sense tenir en compte la instrucció. Vigotski prefereix adherir-se al criteri de Koffka (1927), qui sosté que la maduració d'un òrgan depèn del seu funcionament, el qual es perfecciona per l'aprenentatge. Els conceptes científics, en conseqüència, cobren particular significació en el desenvolupament intel·lectual total perquè cobreixen un creixement potencial, que no es compliria mai per la sola adquisició dels conceptes espontanis.



Sorgeix així una concepció que serà àmpliament aprofitada pels corrents de la psicologia cognitiva més actuals. Es tracta de la zona de desenvolupament potencial o pròxim que per a Vigotski no és una altra cosa que la distància entre el nivell de desenvolupament actual, determinat per la capacitat de resoldre independentment un problema i el nivell de desenvolupament potencial, determinat a través de la resolució del mateix problema sota la guia d'un adult o en col·laboració amb un altre company més capaç.

Piaget comenta que Vigotski li retreu el considerar l'aprenentatge escolar com no relacionat essencialment amb el desenvolupament espontani del nen. Creu que ha de culpar-se a l'escola per ser ignorant de l'ús que podria fer del desenvolupament espontani del nen, reforçant-lo mitjançant mètodes adequats, enlloc d'inhibir-los, com fa freqüentment. Piaget no creu, a diferència de Vigotski, que els nous conceptes, encara en el nivell escolar, s'adquireixin sempre a través de la intervenció didàctica de l'adult.

Piaget creu que a partir de situacions que, encara que no siguin espontànies en sí mateixes, incitin a una elaboració espontània per part del nen, sempre que es dirigeixin de forma que despertin el seu interès i presentin el problema d'un mode tal que correspongui a les estructures que ja hagi format ell mateix. En definitiva, la posició de Piaget es resumeix en la creença que els conceptes científics i els espontanis comencen en punts de partida diferents però poden trobar-se.

Per altra banda, Piaget pensa que la instrucció només es pot concebre com una extensió de les construccions espontànies, per tant, l'ensenyament només pot seguir les distintes etapes del desenvolupament. En alguns casos, el que es transmet a través de la instrucció és ben assimilat pel nen, diu Piaget. En tals casos el desenvolupament s'accelera. Però, en altres casos, els objectes que subministra la instrucció es presenten massa aviat o massa tard, o d'una manera que impedeix l'assimilació perquè no concorda amb les seves construccions espontànies, com succeeix sovint en l'ensenyament de les ciències exactes. Vigotski, en canvi, opina com Mead (1934) qui sostingué que la instrucció de determinades matèries desenvolupa les facultats mentals en general, a més a més, d'impartir coneixements sobre el tema i desenvolupar destreses específiques.

### **2.1.1.1.3 Model d'Ausubel: idees, utilitat i crítiques**

A diferència de Piaget, Ausubel (1990) no es proposa una tasca epistemològica, sinó destinada a l'aplicació directa a l'aula; és una teoria de l'aprenentatge receptiu específica i no un model psicològic general.

Ausubel, també des d'una perspectiva constructivista, postula que una persona s'organitza en el cervell en forma de conceptes interrelacionats tot el coneixement; així, forma el que anomena "estructura cognoscitiva" d'una persona. La pertinença d'un concepte a l'estructura cognoscitiva d'un individu és el que fa que, per a ell, tingui algun significat; si el lligam és feble, el significat serà escàs. L'experiència irrepètible de cadascú conforma la pròpia estructura cognoscitiva de manera també única.

Ausubel proposa dos models extrems d'aprenentatge de conceptes, tot i que els aprenentatges reals solen ser casos intermedis: el que es produeix quan el nou material s'ha pogut relacionar substancialment –no arbitràriament– i de manera intencionada amb una part de l'estructura cognoscitiva de qui aprèn ("aprenentatge significatiu"), i el que no ho ha aconseguit ("aprenentatge repetitiu o memorístic"). Tots dos tipus d'aprenentatge tenen la seva utilitat, i per això, no es poden rebutjar d'entrada els

aprenentatges memorístics: recordar un número de telèfon, o una valència d'un element químic són exemples útils. Naturalment, aquests aprenentatges en l'ensenyament de ciències no són els més importants: costa molt la interconnexió de conceptes, fer aconseguir un aprenentatge significatiu.

L'assoliment d'un aprenentatge significatiu depèn de dos factors: la naturalesa del material (que no resultés arbitrari o incomprensible) i, de l'estructura significativa particular de l'individu (que contingui idees pertinents, relacionables substancialment amb el nou coneixement). La principal condició que determina la disposició d'una persona concreta per a un aprenentatge significatiu determinat no depèn tant de l'edat com de la seva experiència particular reflectida en l'estructura cognoscitiva que n'ha resultat. Novak (1987) afegeix arguments biològics afirmant que no creu probable que apareguin nous mecanismes neurals en l'infant a mesura que va madurant. Els mecanismes biològics per a la codificació, emmagatzematge i processament de la informació són els mateixos des del naixement fins a l'edat senil o la mort; el que canvia és la quantitat i les relacions entre neurones funcionals i això suposa un desenvolupament quantitatiu amb el temps, no un canvi qualitatiu.

Els ausubelians puntualitzen la distinció entre aprenentatge per descobriment i aprenentatge significatiu. Diuen que pot donar-se un aprenentatge per descobriment que resulti significatiu (cas de la investigació científica i el contemplat pels partidaris del mètode del descobriment) o memorístic (seria el cas d'aprenentatges per assaig i error). Però també podria ser receptiu i memorístic (normalment criticable, però també útil en casos com el de la taula de multiplicar o dels símbols dels elements) o significatiu (per exemple, l'aclariment de relacions entre conceptes). Cadascuna d'aquestes quatre combinacions respon a certs tipus específics d'aprenentatges; ben utilitzades, totes fan servei. No obstant, Ausubel es preocupa més de l'aprenentatge receptiu significatiu. L'adjectiu "receptiu" de l'aprenentatge requereix un esforç actiu –comú a tots els constructivismes- de l'aprenent per establir lligams conscients amb la part adequada de l'estructura cognoscitiva i arribar a convertir-lo en significatiu. En aquest sentit, Ausubel suggereix la utilitat del mètode socràtic (procés interactiu d'aclariment dels dubtes dels alumnes als quals, en comptes de donar respostes es formulen preguntes a partir de les quals ells mateixos aniran elaborant progressivament el nou coneixement). Quan una idea s'ha après significativament, i per tant, connecta amb la part implicada de l'estructura cognoscitiva, no es produeix un simple emmagatzematge sinó que la integració del nou coneixement modifica una part de l'estructura receptora. Aquest procés, que Ausubel anomena "assimilació", estabilitza el material après, cosa que no pot passar amb l'aprenentatge memorístic.

Després d'haver-se produït l'aprenentatge significatiu és fàcil dissociar el nou coneixement del vell, però amb el temps es van confonent; es diu que s'ha oblidat ("assimilació obliterated"). El més interessant d'això és que les idees pertinents de l'estructura cognoscitiva continuen modificades, i el reaprenentatge resulta fàcil. Un aprenentatge memorístic oblidat, contràriament, sembla dificultar el reaprenentatge però té l'avantatge sobre el significatiu de no patir assimilació i el contingut, encara que fàcil d'oblidar, no resulta deformat, com passa en l'altre cas.

Segons Ausubel (1990) hi ha tres tipus d'aprenentatge significatiu que vénen a constituir unes jerarquies conceptuales. L'aprenentatge de representacions (el més bàsic) consisteix en obtenir significat de símbols aïllats i té més importància en nens petits. L'aprenentatge de proposicions (de paraules, per exemple) s'ocupa del significat de grups de paraules que formen oracions. El tercer tipus, el més important per a nosaltres,

és el de conceptes: a partir de proposicions o de símbols, s'obté un significat genèric però unitari, i que es pot representar per un símbol aïllat.

Cawthron i Rowell (1978) fan notar el caràcter clarament inductivista de l'aprenentatge de representacions, tal com l'explica Ausubel. Per altra banda, Gilbert i Watts (1983) adverteixen sobre el caràcter massa tradicional de la idea ausubeliana de concepte: el coneixement individual es podria fragmentar en parts separades que formen un sistema acumulatiu, lògic i estàtic, i organitzat jeràrquicament, que en cada persona adquireix una fesomia paral·lela a la que mostra el coneixement científic oficial i públic. Com que falta dinamisme entre els conceptes, les idees preconcebudes dels estudiants es consideren deterioraments de l'estructura de conjunt, que cal eliminar, més que no pas la base de significació de la qual s'ha de partir per construir el nou coneixement que s'ha d'aprendre. Una situació així pot portar a la coexistència en un individu de dos coneixements sovint contradictoris: el preexistent, desitjat i ben cregut, i el nou, memoritzat com a mecanisme de supervivència acadèmica, però que no podrà arribar a ser autènticament significatiu. Malgrat que Ausubel parla de l'organització psicològica del coneixement, ell ha caigut en una estructuració lògica, el mateix que li ha passat a Gagné (1965).

La teoria d'Ausubel de l'aprenentatge significatiu és similar a l'habitual punt de vista conductista segons el qual els conceptes existeixen en el món extern separadament del subjecte i per tant, li arriben des de fora (Albert, 1979). Les dificultats de la teoria d'Ausubel neixen sobretot de l'adscripció a una epistemologia tradicional, en el context de la qual els grans canvis de perspectiva (molt importants a l'ensenyament de les ciències) són difícils de conceptualitzar.

Si el model ausubelià considera el coneixement com a estàtic i acumulatiu, és normal que sigui útil per organitzar aprenentatges que no entrin en conflicte amb els anteriors. És útil a la pràctica didàctica quan es tracta d'organitzar els continguts. Les idees d'estructura cognoscitiva individual i d'aprenentatge significatiu són especialment interessants. Però deixa sense explicació els canvis conceptuals a gran escala.

Una altra contribució que cal reconèixer al model ausubelià és l'interès que ha desvetllat dins la didàctica de les ciències respecte dels coneixements previs (es considerin o no correctes) que els alumnes ja posseeixen sobre els temes que han d'estudiar. Un aprenentatge que no els tingui en compte no podrà ser mai significatiu per falta d'ancoratge adequat.

Les teories de Piaget i Ausubel tenen objectes epistemològics diferents (Coll, 1986), i per tant, difícilment són comparables (Toulmin, 1972). Piaget parla de desenvolupament, concepte molt més general que el d'aprenentatge i que cal no confondre: el desenvolupament és més que una suma d'aprenentatges. Aquesta distinció contribueix a situar millor cada teoria al seu lloc, en una perspectiva de compatibilitat.

La distinció entre coneixement declaratiu i coneixement processual consisteix en el fet que un coneixement declaratiu sense el corresponent coneixement processual condueix al dogmatisme; saber "què" però no "com", impedeix la verificació de les afirmacions. Per altra banda, perquè una tasca piagetiana es pugui resoldre amb èxit, tan necessària és la familiaritat amb el context en el qual es presenta com el domini de l'operació corresponent. Per tant, cap dels dos coneixements no seria suficient. Si Piaget descriu el processual i Ausubel el declaratiu, les dues teories són complementàries.

### 2.1.1.2 Tipus d'aprenentatges significatius

Les condicions en les que succeeix l'aprenentatge significatiu són per recepció o per descobriment. L'aprenentatge significatiu per recepció involucra l'adquisició de significats nous. Requereix tant d'una actitud d'aprenentatge significatiu com de la presentació a l'alumne de material potencialment significatiu. L'aprenentatge significatiu per descobriment pressuposa que el material d'aprenentatge en sí pot estar relacionat no arbitràriament i de manera substancial (no al peu de la lletra) amb qualsevol estructura cognoscitiva apropiada (amb significat lògic). També pressuposa que l'estructura cognoscitiva de l'alumne particular conté idees d'afiançament rellevants amb les quals el nou material pot guardar relació.

Poden distingir-se tres tipus d'aprenentatge significatiu per recepció: 1. L'aprenentatge de representacions; 2. L'aprenentatge de conceptes; 3. L'aprenentatge de proposicions.

L'aprenentatge de representacions és el més proper a l'aprenentatge per repetició. Aquest tipus d'aprenentatge s'ocupa dels significats de paraules o símbols unitaris, aprendre el significat de les paraules aïllades denota aprendre el que aquestes representen (Lenneberg, 1967). Significa aprendre que els símbols particulars representen o són significativament equivalents als referents específics. L'aprenentatge de proposicions pot ser subordinat, superordinari o combinatori.

Part de l'aprenentatge escolar, denominat "aprenentatge per repetició" en realitat pretén ser una forma simple d'aprenentatge significatiu de proposicions; per exemple, certs aspectes de l'aprenentatge de la suma i de la multiplicació. Certa quantitat d'aquest aprenentatge es pot justificar com a mitjà d'augmentar la velocitat de resposta i de càlcul, però en la majoria de les escoles, la taula de multiplicar s'aprèn després d'entendre certes idees i relacions numèriques. Així, hi ha una relació intencionada i substancial amb conceptes existents de relacions numèriques que es troben en l'estructura cognoscitiva. Per consegüent, no ha de ser un acte purament mecànic o purament significatiu. Els alumnes poden preferir, simultàniament o successiva, aprendre significativament o repetitiva.

Les varietats de recepció i de descobriment de l'aprenentatge de proposicions apareixen successivament en diferents etapes del procés de resolució de problemes. Les proposicions de resolució de problemes són generades de nou, transformades (amb una reestructuració, reorganització, síntesi i integració) en, o bé proposicions de plantejament de problemes (que defineixen la naturalesa i les condicions de la situació problema que preval) o bé proposicions antecedents que consisteixen en els aspectes pertinents del coneixement adquirit (informació, principis) que es refereixen al problema.

La internalització significativa de les proposicions de plantejament de problemes posa en marxa un procés d'aprenentatge per descobriment. Es genera aleshores una nova proposició de resolució de problemes, que incorpora relacions de mitjans a fins potencialment significatives mitjançant transformacions en les proposicions de plantejament de problemes i antecedents internalitzades. El pas final d'aquesta seqüència d'aprenentatge significatiu, o sigui, aprendre i retenir el significat de la nova proposició generada de resolució de problemes és també matèria de l'aprenentatge per recepció significativa. De fet, l'únic descobriment consisteix en transformar les proposicions en proposició de resolució de problemes significatius.

Un cop que els símbols parlats i escrits es troben amb freqüència i es tornen significatius, en ocasions ulteriors seran presos significativament a l'instant i sense esforç. El nivell d'abstracció més elevat de l'adquisició de conceptes s'aconsegueix durant l'etapa de les operacions lògiques abstractes. Els atributs de criteri de conceptes secundaris complexos i d'ordre superior poden relacionar-se directament amb l'estructura cognoscitiva, sense necessitat de cap classe de recolzament empíric concret, i els productes incipients de la conceptualització són perfeccionats per mitjà d'un procés de verbalització perquè produeixin idees genèriques precises, explícites i genuïnament abstractes.

### **2.1.1.3 Condicions de l'aprenentatge significatiu**

L'essència del procés de l'aprenentatge significatiu resideix en el fet que idees expressades simbòlicament són relacionades de manera no arbitrària i substancial amb allò que l'alumne ja sap. Per relació substancial i no arbitrària s'expressa que les idees es relacionen amb algun aspecte existent específicament rellevant de l'estructura cognoscitiva de l'alumne.

L'aprenentatge significatiu o adquisició de significats requereix d'un material potencialment significatiu i d'una actitud d'aprenentatge significatiu. Independentment de quant significat potencial sigui inherent al material significatiu en particular, si la intenció de l'alumne consisteix en memoritzar arbitràriament i literal tant el procés d'aprenentatge com els resultats del mateix seran mecànics i sense significat. I a la inversa, ni el procés ni el resultat de l'aprenentatge seran significatius si no és relacionable amb la seva estructura cognoscitiva. Això ho prova la memorització mecànica de definicions de conceptes o proposicions sense el reconeixement del significat de les paraules de la definició.

Una raó per la que es desenvolupa una proposició cap a l'aprenentatge repetitiu en els alumnes ve provocada per la culpa d'un nivell elevat d'ansietat, o per fracassos (que reflecteixen escassa aptitud o ensenyança deficient). Els alumnes no tenen prou confiança en les seves capacitats per aprendre significativament i degut a això, apart de l'aprenentatge per repetició, no troben una altra alternativa que el pànic. Aquest fenomen els hi és molt familiar als professors de matemàtiques a causa del difós predomini de l'impacte del número o de l'ansietat del número. El que fan els alumnes és amagar, enlloc d'admetre i posar remei gradualment a la seva manca original de comprensió genuïna. Es crea la falsa impressió d'haver entès amb senzillesa (per haver-ho après de memòria) enlloc de tractar de comprendre el significat.

### **2.1.1.4 Resolució de problemes i creativitat**

Tant la resolució de problemes com la creativitat són formes d'aprenentatge significatiu per descobriment. La resolució significativa de problemes, en contrast amb l'aprenentatge d'assaig i error, constitueix un aprenentatge per descobriment orientat cap a la hipòtesi que exigeix la transformació i la reintegració de coneixement existent per adaptar-se a les demandes d'una meta o d'una relació mitjans - fins.

L'aprenentatge significatiu per recepció té lloc amb la comprensió de les condicions del problema i l'assimilació de la seva solució. Conseqüentment, variables importants que influeixen en la resolució de problemes són: a) la disponibilitat de conceptes i principis en l'estructura cognoscitiva pertinents per als problemes concrets; b) característiques cognoscitives i de personalitat com l'agudesia, la capacitat d'integració, l'estil cognoscitiu, la sensibilitat al problema, la flexibilitat, la capacitat d'improvisar,

l'audàcia, la curiositat intel·lectual i la tolerància a la frustració. El llenguatge pot facilitar la resolució de problemes i l'adquisició de conceptes.

La creativitat és l'expressió suprema de la resolució de problemes, que involucra transformacions noves o originals de les idees i la generació de nous principis integradors i explicatius. Parlar de resolució de problemes és parlar de qualsevol activitat en la qual, tant la representació cognoscitiva de l'experiència prèvia com les components d'una situació problemàtica present són reorganitzades per aconseguir un objectiu predeterminat. Aquesta activitat pot consistir en més o menys variacions d'assaig i error de les opcions existents o en un intent per formular en principi o descobrir un sistema de relacions que fonamentin la solució d'un problema (discerniment). La manera de solucionar un problema depèn de diversos factors. Depèn del tipus de problema en particular, de l'edat de l'individu, de la seva experiència prèvia i de la seva intel·ligència. Es pot solucionar recorrent a l'aprenentatge per discerniment, o per assaig i error.

En la resolució de problemes hi ha aprenentatge per descobriment que és significatiu quan l'alumne relaciona intencionadament i substancial una proposició significativa del plantejament d'un problema a la seva estructura cognoscitiva, per obtenir una solució que sigui significativa (susceptible de ser relacionada amb la seva estructura cognoscitiva). Així implica la coexistència de tots els elements essencials que intervenen en un procés d'aprenentatge significatiu: disposició, tasca d'aprenentatge significativa i idees establertes i pertinents en l'estructura cognoscitiva de l'alumne. L'aprenentatge significatiu per descobriment difereix de l'aprenentatge significatiu per recepció en el fet que el contingut principal del que serà après ho ha de descobrir per sí mateix abans que pugui incorporar-lo a la seva estructura cognoscitiva i aleshores fer-ho significatiu.

#### **2.1.1.5 Més característiques de l'aprenentatge significatiu**

L'aprenentatge humà va més enllà d'un simple canvi de conducta, condueix a un canvi en el significat de l'experiència. Per entendre la labor educativa, és necessari tenir en consideració tres elements del procés educatiu: a) els professors i la seva manera d'ensenyar; b) l'estructura dels coneixements que conformen el currículum; c) la manera com aquest es produeix i l'entorn social en el qual es desenvolupa el procés educatiu.

La intel·ligència no és una, és múltiple (Gardner, 1983) per això és suggereix un canvi en la pedagogia a l'aula i es proposen noves estratègies per millorar els aprenentatges dels alumnes. Per exemple, la utilització de mapes conceptuals per superar aquests dèficits, els quals, segons Novak i Gowin (1988), tenen per objecte representar relacions significatives entre conceptes en forma de proposicions. Segons Cèsar Coll (1987), comentant els treballs d'Ausubel i col·laboradors, en relació a la seva proposta d'anàlisi de contingut, sosté que aquesta consisteix a establir jerarquies conceptuals que prescriuen una seqüència descendent: partint dels conceptes més generals i inclusivament fins arribar als més específics, passant pels conceptes intermedis.

Segons la teoria de l'aprenentatge significatiu, és necessari conèixer la situació dels alumnes abans de començar qualsevol programació, per a partir d'allò que ja se sap connectar i relacionar-ho amb els nous aprenentatges. És la programació d'aula la qual s'ha d'adaptar al coneixement inicial de l'alumnat en cada tema a treballar. Si no és així, l'aprenentatge és bàsicament per repetició i es veu sotmès ràpidament a l'oblit. És necessari un diagnòstic inicial de l'alumnat i, a partir d'aquí, respectant els diferents

ritmes d'aprenentatge, adaptar els programes i les unitats didàctiques a la situació real de l'alumnat més avançat i més endarrerit, a partir del coneixement de la situació en què estan, per a comprendre i aprendre de manera significativa.

Per a Ausubel (1990), un aprenentatge és significatiu quan els continguts són relacionats de manera no arbitrària i substancial (no al peu de la lletra) amb allò que l'alumne ja sap. En el procés educatiu és important considerar el que l'individu ja sap de tal manera que estableixi una relació amb allò que ha d'aprendre. Aquest procés té lloc si l'alumne té en la seva estructura cognitiva conceptes (idees, proposicions estables i definides) amb els quals la nova informació pot interactuar. Per contra, Ontoria (1996), citant Novak sosté que en l'aprenentatge memorístic, la informació nova no s'associa amb els conceptes existents en l'estructura cognitiva, i per tant, es produeix una interacció mínima o nul·la entre la informació recentment adquirida i la informació ja emmagatzemada.

Segons el mateix Ontoria (1996), les característiques que defineixen l'aprenentatge significatiu són les següents:

- La nova informació s'incorpora de forma substantiva, no arbitrària, en l'estructura cognitiva de l'alumne.
- Hi ha una intencionalitat per relacionar els nous coneixements amb els de nivell superior, ja existents en l'alumne.
- Es relaciona amb l'experiència, amb fets o objectes.
- Hi ha una implicació afectiva en establir aquesta relació, ja que mostra una disposició positiva davant l'aprenentatge.

L'aprenentatge significatiu es dona quan una nova informació "es connecta" amb un concepte rellevant preexistent en l'estructura cognitiva. L'aprenentatge mecànic, contràriament a l'aprenentatge significatiu, es produeix quan no es troben canals adequats, de tal forma que la nova informació és emmagatzemada arbitràriament, sense interactuar amb coneixements preexistents, Ausubel (1990). L'aprenentatge mecànic no es dona en una "buidor cognitiva" ja que deu existir algun tipus d'associació, però no en el sentit d'una interacció com en l'aprenentatge significatiu.

Ausubel no estableix una distinció entre aprenentatge significatiu i mecànic com una dicotomia, sinó com un "continuum", és més, ambdós tipus d'aprenentatge poden ocórrer concomitantment en la mateixa tasca d'aprenentatge. Seguint Ausubel (1990), per exemple, la simple memorització de fórmules se situaria en un dels extrems d'aquest continu (aprenentatge mecànic) i l'aprenentatge de relacions entre conceptes podria situar-se en l'altre extrem (aprenentatge significatiu). Els mapes conceptuals van iniciar el seu desenvolupament al Departament d'Educació de la Universitat de Cornell, EUA, durant la dècada dels setanta com una resposta a la teoria de l'aprenentatge significatiu d'Ausubel. Tenen per objecte representar relacions significatives entre conceptes en forma de proposicions (Novak i Gowin, 1988). Una proposició es refereix a dos o més termes conceptuals (conceptes) units per paraules i que en conjunt formen una unitat amb un significat específic.

Els aprenentatges significatius es produeixen més fàcilment quan els conceptes nous s'engloben sota altres conceptes més amplis, més inclusius, els mapes conceptuals han de ser jeràrquics. Els conceptes més generals i inclusius s'han de situar a la part superior del mapa i els més específics i menys inclusius a la part inferior. La funció dels mapes conceptuals consisteix a ajudar a la comprensió dels coneixements que l'alumne ha d'aprendre i a relacionar-los entre ells o amb uns altres que ja posseeix (Ontoria, 1996).

B. Bloom (1996), a la seva clàssica *Taxonomia dels Objectius de l'Educació* va esbossar sis nivells d'objectius educatius: coneixement, comprensió, aplicació, anàlisi, síntesi i avaluació. Encara que resulta senzill comprovar si s'han assolit els objectius del primer nivell (coneixement), resulta difícil dissenyar una prova que determini si els estudiants han analitzat, sintetitzat o avaluat nous aprenentatges. L'elaboració de mapes conceptuals possibilita tal avaluació. Segons J. Beltrán (1993) l'ús de mapes conceptuals en la consecució d'aprenentatges significatius es percep més fàcilment quan els continguts d'aprenentatge estan organitzats, posseeixen una estructura i estan relacionats entre sí.

### **2.1.2 Implicació i interacció amb el professor**

L'assignatura de matemàtiques és difícil d'ensenyar i d'aprendre. Una de les raons d'això és perquè es tracta d'una assignatura jeràrquica. No vol dir que hi hagi un ordre absolut en el qual és necessari estudiar la matèria, però aquesta habilitat de procedir enfront al nou treball depèn sovint d'una suficient comprensió d'una o diverses nocions de treball que s'han vist abans.

Una de les raons per les quals és difícil ensenyar matemàtiques és el fet que la consecució i el grau d'aprenentatge varien molt entre cada alumne. Si el ritme d'ensenyament és molt ràpid, no s'entén, però si és molt lent, els alumnes es poden avorrir. Als alumnes no se'ls deuria permetre experimentar el mateix fracàs. Si això succeeix, és una indicació que s'ha avançat massa en l'error i que ja és necessari arreglar-lo. Com s'acaba de dir, nois i adults aprenen matemàtiques a velocitats molt diferents. Un concepte que per a alguns podria ser comprès en una lliçó podria requerir dies i fins i tot setmanes de treball per a altres, i ser inaccessible, almenys en un moment determinat per a aquells que no tenen els coneixements dels conceptes en els quals es basa. L'assignatura de matemàtiques requereix treball dur i molta pràctica, independentment del nivell en el qual s'està estudiant. Pot ser relativament fàcil entendre la solució a un problema que un altre hagi trobat, però sol ser molt més difícil descobrir la solució per un mateix. De fet, és el començar el que costa en la resolució de problemes, per això no ha de desestimar-se ni la determinació ni la imaginació, per ser qualitats requerides. Per tal que l'alumne comenci a resoldre un problema, el professor pot recórrer a fer-li preguntes. En fer el professor una pregunta o un suggeriment als seus alumnes, pot proposar-se dues finalitats: a) ajudar l'alumne a resoldre el problema; b) desenvolupar l'habilitat de l'alumne de tal manera que pugui resoldre per sí mateix problemes ulteriors. Les preguntes i suggeriments formulats pel professor han de tenir dues característiques comunes: el sentit comú i la generalització. Com que provenen del sentit comú, es presenten d'una manera natural doncs se li podrien acudir al propi alumne. Com que són generals, ajuden sense imposar-se, indicant una direcció general però deixant a l'alumne encara molt camí per recórrer. Si l'alumne aconsegueix resoldre amb èxit el problema en qüestió estarà desenvolupant la seva habilitat en la resolució de problemes. Convé recordar que com aquelles preguntes són generals poden utilitzar-se en nombrosos casos. Si l'alumne empra la mateixa pregunta diverses vegades amb un bon resultat, sens dubte es fixarà en ella i a ella recórrerà en ocasions similars. En formular-se repetits cops acabarà per deduir la idea exacta. Mitjançant l'èxit descobrirà la manera adequada d'utilitzar la pregunta i aleshores l'haurà assimilada. El resoldre problemes és una qüestió d'habilitat pràctica i per tant, s'adquireix amb la imitació i la pràctica. Quan el professor resol un problema davant de la classe ha de fer-se les mateixes preguntes que utilitza per ajudar els seus alumnes. Gràcies a aquests consells l'estudiant descobrirà la manera d'utilitzar les preguntes i suggeriments.



Així, el professor de matemàtiques ha de desenvolupar la tasca de:

- Proveir cada alumne de suficients coneixements matemàtics per estudiar altres matèries.
- Capacitar cada alumne per desenvolupar, dins de les seves capacitats, les habilitats matemàtiques i coneixements suficients per a la vida adulta, per a la feina i per als estudis superiors, mentre estan alerta de les dificultats que alguns alumnes experimentaran.
- Ajudar cada alumne a desenvolupar al màxim el seu aprenentatge i la seva realització personal per la ciència i la tecnologia.
- Sobretot, fer conscients els alumnes que les matemàtiques els proveeixen d'un poderós mitjà de comunicació.

Malgrat adonar-se del fet que hi haurà alguns alumnes que no aconseguiran tots els objectius, entre les necessitats matemàtiques de la vida adulta s'inclouen saber llegir i comptar números, comptar el temps, pagar compres i saber tornar el canvi, pesar i mesurar, entendre gràfiques i horaris i dur a terme qualsevol càlcul referent a aquests temes. També és necessari inculcar el sentiment de l'aproximació i una correcta estimació dels nombres per afavorir una agilitat en el càlcul mental.

### **2.1.3 La memorització**

La memòria a curt temps juga un paper important en el càlcul mental, la resolució de problemes, la comprensió de conceptes complexos i en la construcció o seguiment d'una explicació o argument, és a dir, en la majoria dels aprenentatges. La investigació evidencia que la informació s'emmagatzema millor durant més temps si s'assimila com a part d'una estructura d'ítems interrelacionats.

La memòria a llarg temps millora amb l'edat i desenvolupa una xarxa d'ítems que conté més interconnexions i nova informació pot ser així emmagatzemada. Informació que així s'emmagatzema pot ser fàcilment recordada quan és requerida per algun propòsit doncs l'associació entre el propòsit i la informació que es guarda en la memòria proveeix d'una col·lecció d'idees que es van cridant unes a altres. Certament, hi ha coses en matemàtiques que es necessiten aprendre de memòria però no sempre ha de ser així en l'ensenyament de les matemàtiques. Al mateix temps que es fa referència a coses que s'han après de memòria, es podria buscar quan s'ensenyava, un desenvolupament a partir de coneixements assimilats, que es relacionen amb allò. L'ensenyament de les matemàtiques a tots els nivells hauria d'incloure oportunitats per a:

- L'exposició del professor
- La discussió entre el professor i els alumnes, i entre els alumnes mateixos
- El treball pràctic adequat
- La consolidació i la pràctica de capacitats i rutines fonamentals
- La resolució de problemes, incloent l'aplicació de les matemàtiques en situacions quotidianes, de la vida real
- El treball d'investigació

## **2.2. Pensament crític**

En aquest punt es tractaran les principals característiques del pensament crític i després es parlarà de la conveniència dels problemes oberts en front dels problemes tancats.

### **2.2.1 Naturalesa del pensament crític**

S'ha debatut molt sobre el seu significat. Encara hi ha desacords però s'ha arribat a un acord contemplant el pensament crític com una combinació de capacitats i disposicions. La caracterització més acceptada del pensament crític es deu a Robert Ennis: el

pensament crític és un pensament reflexiu focalitzat en decidir què creure o què fer. Segons aquest autor (Ennis, 1987), el pensament crític comprèn catorze disposicions i dotze capacitats:

Disposicions rellevants:

1. Buscar una tesi o qüestió
2. Buscar les raons
3. Intentar estar ben informat
4. Usar i citar fonts creïbles
5. Considerar la situació total
6. Sostenir el que un pensa que és rellevant al principal punt
7. Mantenir la preocupació original o la més bàsica
8. Buscar alternatives
9. Ser ample de mires
10. Canviar de posició quan hi hagi evidències suficients
11. Buscar tanta precisió com la matèria ho permeti
12. Tractar amb les parts de tot un complex d'una manera ordenada
13. Utilitzar les pròpies habilitats del pensament crític
14. Sensibilitzar-se pels sentiments, nivell de coneixement, i grau de sofisticació d'altres

Capacitats rellevants:

1. Classificació elemental:
  - Focalitzar en una qüestió
  - Analitzar arguments
  - Preguntar i respondre desafiaments que clarifiquen qüestionen
2. Suport bàsic:
  - Jutjar la credibilitat d'una font
  - Fer observacions i emetre judicis
3. Inferència:
  - Fer i jutjar deduccions
  - Fer i jutjar induccions
  - Fer i jutjar judicis de valor
4. Clarificació avançada:
  - Definir termes i jutjar definicions
  - Identificar suposicions
5. Estratègies i tècniques:
  - Decidir sobre una acció
  - Interactuar amb altres

Les explicacions més recents d'Ennis sobre el pensament crític i les disposicions i capacitats són notablement més holístiques. En la versió del 1996 (Ennis, 1996) es diu que els pensadors crítics ideals estan disposats a fer el següent:

1. Prendre precaució que les seves creences són veritables i que les seves decisions estan justificades. Això inclou les disposicions interrelacionades per fer:
  - a. Buscar alternatives (hipòtesis, explicacions, conclusions, plans, fonts) i estar obert a elles.

- b. Aprovar una posició només si està justificada per la informació de què es disposa.
  - c. Estar ben informat.
  - d. Considerar seriosament altres punts de vista diferents dels propis.
2. Representar una posició honestament i clara (tant la seva com la d'altres). Això inclou les disposicions per fer el següent:
- a. Ser clar sobre el significat intencionat del que s'ha dit, escrit o comunicat, buscant tanta precisió com la situació ho requereixi.
  - b. Determinar i mantenir l'atenció en la conclusió o qüestió.
  - c. Buscar i oferir raons.
  - d. Tenir en compte la situació total.
  - e. Ser reflexivament conscient de les pròpies creences bàsiques.
3. Tenir cura de la dignitat i el valor de cada persona, amb les disposicions de:
- a. Descobrir i escoltar altres punts de vista i raons.
  - b. Tenir en compte altres sentiments i nivells de comprensió, evitant els intimidadors o confusos amb la pròpia destresa del pensament crític.
  - c. Preocupar-se pel benestar dels altres.

La versió més recent d'Ennis sobre les capacitats del pensament crític conté dotze capacitats:

Per a la clarificació:

1. Identificar el focus: l'article, la qüestió, o la conclusió
2. Analitzar els arguments
3. Preguntar i respondre preguntes de clarificació i/o desafiament
4. Definir termes, jutjar definicions i tractar de resoldre equivocacions
5. Identificar suposicions no establertes

Per a la decisió:

6. Jutjar la credibilitat d'una font
7. Observar i emetre judicis

Per a la inferència:

8. Deducir i emetre deduccions
9. Induir i emetre induccions
  - a. A generalitzacions, i
  - b. A conclusions explicatives (incloent-hi hipòtesis)
10. Fer i jutjar judicis de valor

Per a la suposició i integració:

11. Considerar i raonar des de les premisses, raons, suposicions, posicions i altres proposicions amb les quals estan en desacord o dubten, sense permetre que el desacord o el dubte interfereixi en el seu pensament ("el pensament suposat").
12. Integrar les altres capacitats i disposicions en fer i defensar una decisió

### 2.2.2 Problemes tancats i oberts

La majoria dels problemes que als estudiants se'ls proposa per a resoldre són problemes tancats: tenen respostes úniques. A més a més, totes les dades necessàries per a la resolució es troben a l'enunciat o en un full adjunt de dades. També el problema es pot

resoldre aplicant regles o procediments habituals amb els quals ja estan familiaritzats. En resoldre aquest tipus de problemes tancats, s'estan educant estudiants que veuen que només hi ha una única resposta per a cada problema i que la ciència és quelcom que ha de ser memoritzat i reproduït en els exàmens. Resolent aquests problemes, es millora molt poc les habilitats crítiques dels alumnes. Tampoc se'ls està preparant per a la vida pràctica professional futura.

S'han de proposar també problemes oberts per a fomentar el pensament crític de l'estudiant demanant-li que clarifiqui el problema i que identifiqui les parts rellevants; que dedueixi les dades necessàries per a resoldre el problema; que avaluï críticament les fonts d'informació; que desenvolupi noves estratègies de resolució de problemes; i en alguns casos, que decideixi quina és la millor resposta en base al seu propi criteri sobre el que ha valorat com a important. Sobre el desenvolupament de problemes oberts, Johnstone (1993) opina que els problemes de llapis i paper tenen tres trets diferents:

- a. objectius del problema: donats o oberts
- b. dades per a resoldre el problema: donades o incompletes
- c. mètode de solució: familiar o no familiar

Si l'objectiu està clarament definit i el problema té una única resposta, parlarem de problema tancat.

Per altra banda, treballar en grups té diversos avantatges: ajuda a reduir la inseguretat que alguns alumnes poden tenir si resolen els problemes sols. A més a més, tal com passa amb molts problemes de la vida real, el fet que un petit grup de persones comparteixi les seves capacitats i coneixements pot produir una millor solució. A més, a cada alumne li toca compartir responsabilitats de lideratge dins del grup i ser conscient del que pensen els altres membres de l'equip. Així, es pot treballar en petits grups donant presentacions orals i escrites de les solucions que han obtingut a certs problemes donats.

Sobre les competències clau de Mayer (1992a, 1992b) s'analitzen els punts següents:

- Recollir, analitzar i organitzar la informació
- Comunicar idees i informació
- Planejar i organitzar activitats
- Treballar en grup
- Usar tècniques i idees matemàtiques
- Resoldre problemes
- Usar tecnologia
- Usar coneixements culturals

### **2.3. Pedagogia, instrucció i cognició matemàtica**

En aquest apartat es començarà descrivint quines són les eines matemàtiques i a continuació s'estudiarà el lligam epistemològic cap al pedagògic, tot examinant una col·lecció d'exercicis. Seguidament es comentaran els objectius per a la instrucció matemàtica i s'acabarà explorant la cognició matemàtica.

#### **2.3.1 Les eines matemàtiques**

Les matemàtiques són una activitat social intrínseca, en la qual una comunitat d'entrenats practicants (científics matemàtics) estan ocupats en la ciència dels patrons i intents sistemàtics, basats en l'observació, l'estudi i l'experimentació per determinar la naturalesa o els principis de les regularitats en sistemes definits axiomàticament o teòrica (matemàtiques pures) o models de sistemes abstractes d'objectes reals

(matemàtiques aplicades). Les eines de les matemàtiques són l'abstracció, la representació simbòlica i la manipulació simbòlica. L'haver estat entrenat en usar aquestes eines no significa que un pensa matemàticament. Aprendre a pensar matemàticament vol dir desenvolupar un punt de vista matemàtic valorant el procés de matematització i abstracció i tenir la predilecció d'aplicar-los. També vol dir desenvolupar competències amb les eines i usar-les al servei del sentit matemàtic.

El llenguatge de les matemàtiques està basat en regles que deuen ser apreses. Els alumnes han de ser capaços d'expressar coses en el llenguatge de les matemàtiques. Aquesta transformació suggereix canvis en el contingut curricular i a l'estil instruccional. Cal buscar solucions (no només memoritzar els procediments), cal explorar patrons (no només memoritzar fórmules), i cal formular conjectures (no només fer exercicis). Tot això es treballa resolent problemes. Per aquest motiu, a la dècada del 1980 començà amb el NCTM posant de manifest en la seva *Agenda for Action* que la resolució de problemes havia de ser el focus de les matemàtiques de l'escola (NCTM, 1980). Es conclouïa amb la publicació de *Everybody Counts* (National Research Council, 1989) i amb el *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (NCTM, 1989).

### 2.3.2 Epistemologia, ontologia i pedagogia

Per a Hoffman (1989) és important entendre què és fer matemàtiques si un espera desenvolupar el correcte punt de vista matemàtic en els seus alumnes amb la pràctica a classe. Es persegueix el lligam epistemològic cap al pedagògic examinant la selecció d'uns exercicis d'aritmètica mental extreta de Milne (1897) (és com una bateria d'exercicis), elaborant les assumpcions que subratlla, i les conseqüències del currículum basat en aquelles. És perfectament raonable i útil dedicar temps instruccional a la tècnica que il·lustra Milne. La tècnica és plausible des d'un punt de vista pràctic. La crítica que segueix no es basa en una objecció al valor potencial o utilitat de les matemàtiques que Milne presenta, però sí en la manera en què el tòpic és tractat.

#### Conseqüència 1: *face validity*

A primera vista, la tècnica il·lustrada per Milne sembla útil, i les solucions als subsegüents problemes apareixen apropiadament. Hom espera que els estudiants guanyin prou agilitat amb els nombres i puguin arribar a fer càlculs mentals àgils. En termes d'economia mental, hi ha altres mètodes igual de bons i ràpids com el proposat per Milne.

#### Conseqüència 2: Els exemples són inventats per il·lustrar la tècnica matemàtica

Els nombres usats en els exercicis de Milne s'han escollit clarament per tal que els estudiants puguin executar exitosament l'algorisme ensenyat a la lliçó. Per una banda, escollir els nombres d'aquesta manera fa fàcil la pràctica de la tècnica. Per l'altra banda, aquesta elecció fa el problema artificial.

#### Conseqüència 3: La postura epistemològica subratllant l'ús del conjunt d'exercicis

En termes col·loquials es dona la creença general que el que se sap és allò que es pot demostrar com a cert; el coneixement és la suma total del que se sap. És a dir, el coneixement matemàtic d'un és el conjunt de fets, procediments que un pot confiadament i correctament usar. Tradicionalment, un defineix el que els estudiants haurien de saber en termes de parts de la matèria i caracteritza el que un estudiant sap en termes de la quantitat de contingut que ha après. Aquest punt de vista sobre el coneixement que consisteix en veure'l com una substància comporta vincles seriosos. Des d'aquesta

perspectiva, aprendre matemàtiques es defineix com, en algun ordre coherent, dominar el conjunt de fets i procediments que comprenen el cos de les matemàtiques.

Les matemàtiques són associades amb la certesa; sabent-ho, amb la possibilitat d'obtenir la resposta correcta, ràpidament (Ball, 1988; Schoenfeld, 1985b; Stodolsky, 1985). Aquestes assumpcions culturals es donen forma amb l'experiència a l'escola, en la qual fer matemàtiques vol dir seguir les regles esmentades pel professor; saber matemàtiques vol dir recordar-se'n i aplicar la regla correcta quan el professor pregunta una qüestió; i la veritat matemàtica és determinada quan la resposta és ratificada pel professor. Les creences sobre com fer les matemàtiques i què significa saber a l'escola són adquirides a través d'anys d'observació, escoltar i practicar (Lampert, 1990, 31).

Conseqüència 4: Els efectes acumulatius d'aquests conjunts d'exercicis (l'listat d'exercicis)

La impressió donada per aquests conjunts d'exercicis que els estudiants treballen a l'escola és que només hi pot haver una manera correcta de resoldre aquests problemes, seguint el mètode donat pel text o l'instructor. Però hi ha nombroses maneres per arribar a la resposta. Trobem nombroses conseqüències en repetir experiències d'aquest tipus. Una conseqüència és que els estudiants aprenen aquestes respostes i mètodes per als problemes que se'ls hi donen; no s'espera que els estudiants esbrinin els mètodes per ells mateixos. La majoria dels estudiants accepten el seu rol passiu i pensen en les matemàtiques com baixades pels experts perquè ells memoritzin (Carpenter, Lindquist, Matthews i Silver, 1983).

### 2.3.3 Objectius per a la instrucció matemàtica

La *Mathematical Association of America's Committee on the Teaching of Undergraduate Mathematics* escrigué el *Source Book for College Mathematic Teaching* (Schoenfeld, 1990). Aquí es comenten alguns objectius i propòsits per a la instrucció de les matemàtiques, tals com:

- 1) La instrucció en matemàtiques hauria de donar als alumnes un sentit de què són les matemàtiques i com es fan, sempre en un nivell apropiat per als estudiants i així poder treballar i entendre. Com a resultat de les seves experiències a classe, els estudiants haurien d'aprendre a valorar les matemàtiques i sentir-se segurs amb la seva capacitat de fer matemàtiques.
- 2) La instrucció en matemàtiques hauria d'atorgar als estudiants l'oportunitat d'explorar un ampli rang de problemes i de situacions problemàtiques classificades des d'exercicis fins a problemes no acotats on més d'una solució és acceptada, o fins i tot situacions on calgui explorar.
- 3) La instrucció en matemàtiques hauria d'ajudar els estudiants a desenvolupar el que es podria anomenar un punt de vista matemàtic (una predilecció per analitzar i entendre, per estar alerta i detectar estructures i relacions entre estructures i veure com les coses es relacionen entre elles). Hauria d'ajudar els alumnes a desenvolupar les seves habilitats analítiques, i la capacitat per raonar en extenses cadenes d'arguments.
- 4) La instrucció en matemàtiques hauria d'ajudar els estudiants a desenvolupar la precisió en l'expressió escrita i oral. Haurien d'aprendre a comunicar-se amb el professorat, i amb la resta d'estudiants utilitzant el llenguatge de les matemàtiques.
- 5) La instrucció en matemàtiques hauria d'ajudar els alumnes a desenvolupar la capacitat de llegir i usar textos i altres materials matemàtics. S'hauria de

preparar-los per a ser en la mesura del possible aprenents, intèrprets i consumidors independents de matemàtiques. (Schoenfeld, 1990, 2)

### 2.3.4 Exploració de la cognició matemàtica

L'estudi de la ment i com funciona no es tornà en una disciplina empírica fins al final del segle XIX. Els orígens d'aquesta disciplina són deguts a Wundt (un psicòleg modern) en un laboratori de Leipzig el 1879. Una de les grans explicacions racionals per a l'ensenyament de les matemàtiques, recordant a Plató, consisteix en la noció de la disciplina mental. La idea és que aquells que són bons en matemàtiques tendeixen a ser bons pensadors; aquells que són entrenats en matemàtiques aprenen a ser bons pensadors. El treball de Thorndike (1901) evidencia aquesta hipòtesis.

El treball de Piaget (1928, 1930, 1971), rebutjat pels seus companys americans per ser poc rigorós, establí les bases del constructivisme, el punt de vista que estableix que els individus no perceben el món directament, però que ells perceben interpretacions d'aquest mitjançant treballs interpretatius que han desenvolupat. Els Gestaltistes, en particular Duncker, Hadamard i Wertheimer, estaven interessats en el pensar d'ordre superior i en la resolució de problemes. Duncker va escriure la monografia *On Problem Solving* (1945), Hadamard va escriure *Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field* (1945) i Wertheimer (1945) escriví *Productive Thinking*. Aquests treballs continuaren l'esperit de Graham Wallas (1926) *The Art of Thought* en el qual codificava els quatre passos del model de Gestalt de resolució de problemes: saturació, incubació, inspiració i verificació. Al final de l'any 1945, Polya escriví "How to Solve It", una obra compatible amb el treball de Gestalt, però més prescriptiva.

A mesura que les eines informàtiques es van desenvolupar, els estudis es mogueren des dels puzzles i jocs (lògics, criptaritmètics i escacs, per exemple) fins a problemes més oberts. El focus d'interès estava en "l'arquitectura de cognició" (i màquines): l'estructura de la memòria, de les representacions del coneixement, dels mecanismes de recuperació del coneixement, i les regles de la resolució de problemes.

Al mateix temps la metacognició estava essent un tòpic de recerca. Flavell caracteritzà el terme de la manera que segueix. Ell digué que la metacognició es referia al coneixement d'un mateix concernint els processos cognitius propis o qualsevol cosa relacionada amb ells (per exemple si un s'adona que presenta més dificultats en aprendre A que en aprendre B). La metacognició, per a ell, es refereix entre altres coses, al control actiu i consegüent regulació i orquestració dels processos relacionats als objectes cognitius o a les dades que hi apareixen, normalment al servei d'algun propòsit concret (resolució de problemes), (Flavell, 1976, 232). Aquesta definició inclou un nombre de categories que han estat separades en més categories funcionals per explorar: 1) el coneixement declaratiu individual sobre els seus processos cognitius; 2) maneres de procedir reguladores pròpies, incloent controlar i prendre decisions en directe; 3) creences i afectes i els seus efectes en la realització.

La recerca en educació matemàtica seguí una progressió similar d'idees i metodologies. A través dels 1960s i 1970s, correlacional, anàlisi de factors, i estudis comparatius estadístics predominaren en l'estudi científic del pensament, aprenentatge i resolució de problemes. A la meitat dels 1970s, els investigadors manifestaren la seva decepció sobre les limitades contribucions que podien fer en relació amb el comportament matemàtic. Silver escriví un volum derivat de la conferència del 1983 en la qual investigadors de moltes disciplines van discutir sobre resultats i direccions en resolució de problemes. Aquest volum el titulà *Teaching and Learning Mathematical Problem*

*Solving: Multiple Research Perspectives* (Silver, 1985). Els capítols reflecteixen una gran diversitat de mètodes i la seva aplicació en la resolució de problemes. Carpenter (1985) presentà detalladament estratègies dels nens per a resoldre problemes de paraules. Heller i Hungate (1985) treballaren amb el paradigma de “expert-principiant” per tal d’identificar el comportament productiu dels resolutors de problemes competents i utilitzar aquest comportament com una guia per als nous. Mayer (1983) discutí sobre l’aplicació de l’esquema teòric, dintre del paradigma de l’expert- principiant. Kaput (1985) discutí importants temes de representació i el seu rol en la comprensió. Shaughnessy (1985) discutí sobre conceptes erronis, i Schoenfeld explicà els rols de la metacognició i les creences. Alba Thompson (1984) estudià les creences del professor i els seus efectes en la instrucció. El volum de Charles i Silver (1988) titulat *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* reflecteix un progrés madurat i continuat en el camp. També observa que el tema de les interaccions socials i la culturització emergent ocupen un lloc destacat.

Lester, Garofalo i Kroll contempen les estratègies de la resolució de problemes sota el coneixement base, mentre mantenen separades les categories per creences i afectes, apareix com general l’acord en la importància dels cinc aspectes de cognició: el coneixement base, estratègies de resolució de problemes, direcció i control, creences i afectes, pràctiques (Lester, Garofalo i Kroll, 1989b).

#### **2.3.4.1 Culturització i cognició**

Pels volts del 1980, la perspectiva constructivista, amb arrels en el treball de Piaget (1954) i en les recerques contemporànies (Brown i Burton, 1978; Novak, 1987) fou àmpliament acceptada en la comunitat de recerca. Romberg i Carpenter establiren el fet de la següent manera: la recerca mostra que l’aprenentatge segueix un camí a través de la construcció, no de l’absorció (Romberg i Carpenter, 1986, 868). Resnick, buscant en treballs contemporanis els antecedents en el treball de George Herbert Mead (1934) i Lev Vigotski (1978), afirma que diverses línies de teoria cognitiva i punts de recerca van cap a la hipòtesi que es desenvolupen hàbits i habilitats d’interpretació i construcció de significat a través d’un procés més útil concebut com a socialització que com a instrucció (Resnick, 1988, 39). Geertz (1994) assenyala que la interpretació sobre els mateixos incidents poden tenir un significat radicalment diferent per a distintes persones. La interpretació de cada persona es deriva de la seva pròpia cultura i sembla sentit comú.

#### **2.3.4.2 El coneixement base**

La recerca en els processos cognitius humans havia estat centrat en l’organització i l’accés d’informació continguda en la memòria. La idea més freqüent és pensar que els humans són processadors d’informació i que a les seves ments construeixen representacions simbòliques del món. Jutjar el valor del coneixement base comporta estudiar una situació de resolució de problemes. Un tema important a tractar en analitzar l’execució de la resolució de problemes és si l’individu sap i com aquest coneixement és utilitzat. És necessari saber quines opcions tenen els resolutors a la seva disposició per jutjar el valor en prendre una decisió durant la resolució d’un problema.

A l’hora d’entendre el comportament de la resolució de problemes per part de l’observador, resulta interessant el coneixement base dels individus que confronten les tasques de resolució de problemes. És important notar que el coneixement base podria contenir coses que no són certes. Els individus tenen concepcions incorrectes i fets mal apresos que recorden davant dels problemes; és essencial entendre que aquestes són les eines amb què treballen. Quan els estudiants han de tenir múltiples idees a la ment



durant la resolució d'un problema resulta un problema tenir limitacions. Ryle (1949) distingeix entre dos tipus de coneixement, el conèixer què i el conèixer com. En una terminologia més moderna utilitzada per Anderson (1976), és coneixement declaratiu i procedimental, respectivament. La noció bàsica és que la gent abstruï i codifica les seves experiències. Les codificacions d'aquelles experiències donen forma al que la gent veu i com ells es comporten quan es troben noves situacions relacionades a aquelles que han abstruï i codificat. Hinsley i altres (1977), Simon (1977) i Hayes (1980) ho estudien. El seu estudi recull els següents punts:

1. La gent pot categoritzar els problemes en diferents tipus.
2. La gent pot categoritzar els problemes sense formular-los completament per a solucionar-los.
3. La gent té informació sobre cada tipus de problemes la qual és potencialment útil en formular problemes amb un cert tipus de solucions... dirigint l'atenció als elements importants de problemes, fent judicis rellevants, recordant informació concernent a equacions rellevants...
4. La gent usa identificacions de les categories per formular problemes quan els resolen.

El fet de ser expert en diversos dominis depèn de tenir accés a molts recursos de coneixement en la memòria. També, moltes situacions que apareixen es poden resoldre molt bé utilitzant un coneixement prèviament adquirit en situacions problemàtiques similars: davant d'una situació reconeguda, s'actua d'una manera determinada. Si no s'entenen els principis que condueixen al procediment, aviat s'obliden i fins i tot poden provocar errors. Així doncs, molts educadors suggeririen cautela quan s'apliquessin troballes de recerca des de l'esquema teòric.

#### **2.3.4.3 Estratègies de resolució de problemes (heurístics)**

Les discussions de les estratègies en resolució de problemes en matemàtiques, o heurístics, començaren amb Polya, amb el llibre *How to Solve It* (1945). Hi ha dos camins recordant a Polya: la recerca explorant la eficàcia d'heurístics, o estratègies de resolució de problemes, i la implementació del món real en la instrucció de resolució de problemes.

En els 1970s hi havia una evidència empírica recordant el sentit que els heurístics podien ser usats per millorar la resolució de problemes. Smith (1973) trobà que els heurístics que s'ensenyaven als alumnes no transferien a nous dominis, en general. Estudis sobre comportaments de resolució de problemes fets per Kantowski (1980), Kilpatrick (1969) i Lucas (1974) indicaren que l'ús dels estudiants de les estratègies heurístiques era positivament correlacionat amb l'execució dels tests de capacitat i especialment en tests de resolució de problemes. Harvey i Romberg (1980) indicaren que l'ensenyament d'estratègies de resolució de problemes prometia però encara havia de tenir èxit.

La crítica de les estratègies llistades en *How to Solve It* és que les seves caracteritzacions eren descriptives més que prescriptives (que donen directrius o regles). Les recomanacions, derivades d'estudis detallats de cognició són: (1) fer tàcits els processos explícits; (2) fer que els alumnes parlin sobre els processos; (3) proveir pràctiques guiades; (4) assegurar-se que els components del procés han estat ben apreses; (5) emfasitzar l'enteniment qualitatiu i els procediments específics. Aquestes recomanacions apareixen en aplicar-les en estratègies heurístiques com també les tècniques més rutinàries com discuteixen Heller i Hungate (1985).

Al *Mathematics Report Card* es troben algunes manifestacions de Dossey, Mullis, Lindquist i Chambers (1988) que s'exposen tot seguit.

La instrucció en les classes de matemàtiques no havia canviat en 8 anys (1978-1986): el professor explica els problemes a la pissarra i els estudiants per la seva pròpia banda els intenten resoldre. Hi ha un predomini en la recerca suggerint que hi ha maneres millor perquè els estudiants aprenguin que escoltant al professor i després practicant el que han sentit (així s'aprèn, a força de repetir-ho). Els estudiants necessiten aprendre a aplicar les noves habilitats matemàtiques adquirides implicant-se en situacions on cal investigar, i les seves reaccions indiquen poques oportunitats en ocupar-se en aquest tipus d'activitats.

D'acord amb la *Mathematics Report Card*, es dona un predomini de llibres de text, fulls de matemàtiques i altre material per a classe on les lliçons són genèricament del tipus anomenat "exposició, exemples, exercicis" mode (Burkhardt i altres, 1988). També succeeix amb la majoria de les lliçons que tracten sobre resolució de problemes. En molts textos principals la resolució de problemes és una activitat separada i subratllada com a tal.

La resolució de problemes normalment s'inclou en els textos en una de les dues maneres següents. La primera, ocasionalment les tasques de resolució de problemes esquitxen els textos matemàtics a manera de recompensa o de recreació. El missatge implícit contingut en aquest format és "tu pots prendre't un respir del treball que de veritat representen les matemàtiques, i divertir-te una estoneta". La segona, molts textos contenen seccions de resolució de problemes en les quals als estudiants se'ls hi donen exercicis i pràctiques en versions senzilles de les estratègies discutides en la secció prèvia. En llibres de text genèrics, als estudiants se'ls hi ensenya una estratègia, se'ls hi dona exercicis de pràctica per usar l'estratègia, se'ls hi dona treball per fer a casa usant l'estratègia i se'ls hi fa un test sobre l'estratègia. Quan les estratègies són ensenyades d'aquesta manera no són heurístics en el sentit de Polya, són merament algorismes. La resolució de problemes, en l'esperit de Polya, és aprendre a comprendre amb tasques noves i gens familiars quan els mètodes importants de resolució es desconeixen o es coneixen parcialment. Quan els estudiants són dirigits en els procediments de solucionar problemes d'aquesta manera, no estan desenvolupant l'ampli conjunt d'habilitats que Polya i altres matemàtics tenen a la ment.

Fins i tot amb un material bo, la feina d'ensenyar heurístics amb el propòsit de desenvolupar els tipus d'habilitats flexibles que Polya descriu resulta àrdua i difícil. Com Burkhardt i altres (1988) apunten, el fet d'ensenyar resolució de problemes és difícil per al professor donat que:

- Matemàticament: els professors haurien de percebre les implicacions de les diferents fites dels estudiants, per si són fructíferes i, si no ho són, què podria ajudar-los.
- Pedagògicament: el professor hauria de decidir quan intervenir, i quins suggeriments ajudarien als estudiants per arribar a la solució, i ajudar-los a nivell individual o de grup.
- Personalment: el professor sovint estarà en la posició poc freqüent pels professors de matemàtiques i incòmode per a molts, de no saber; treballar bé sense saber totes les respostes requereix experiència, seguretat i confiança en un mateix (Burkhardt i altres, 1988, 18).

#### 2.3.4.4 Regulació, control i direcció

En general, a mesura que els estudiants creixen, milloren en planificar les tasques que se'ls demana i són millors en fer judicis correctius vers les seves intencions. Quan els alumnes s'enfronten amb un problema per resoldre, de caire poc familiar i estrany per a ells, el llegeixen i ràpidament escullen una manera d'abordar-lo. Poden estar treballant-hi estona encara que hi hagi evidències de no progressar. És una ràpida i equivocada decisió que ha de ser reconsiderada.

Les habilitats poden ser apreses després d'una instrucció explícita que se centra en aspectes metacognitius del pensament matemàtic. Aquesta instrucció pren la forma d'entrenament, amb intervencions actives quan els estudiants treballen en els problemes. Les classes de Schoenfeld de resolució de problemes inverteixen molt de temps en treballar problemes en petits grups de tres o quatre persones. El professor es va passejant entre els grups i es reserva el dret de formular en qualsevol moment les tres preguntes següents:

- 1) Què esteu fent exactament? (Podeu descriure-ho amb precisió?)
- 2) Per què ho esteu fent? (Com lliga amb la solució?)
- 3) Com us ajuda? (Què fareu amb el resultat quan l'obtingueu?)

Quan es formulen les preguntes els estudiants no saben ben bé com resoldre-les. Es provoca una discussió entre ells defensant cadascú la seva posició enfront les altres. Al final de l'exercici, aquest comportament ha esdevingut habitual.

Lester i altres (1989a) completaren un estudi per observar el rol de la metacognició (el saber i el control de la cognició). L'objectiu de la instrucció fou afavorir el desenvolupament cognitiu dels estudiants. Les maneres d'aconseguir aquest objectiu consistiren en què el professor: a) es posés al servei com un controlador exterior durant la resolució de problemes; b) encoratgés discussions dels comportaments considerats importants per a la interiorització de les habilitats metacognitives; c) tingués un bon model de comportament executor.

Algunes de les conclusions de Lester i altres extretes amb tests escrits, entrevistes clíniques, observacions de les sessions de resolucions de problemes a individus o a parelles, i vídeos de les classes on es donava la instrucció, són les següents:

- Es dona una interacció dinàmica entre els conceptes i els processos matemàtics (incloent els metacognitius) usats per resoldre problemes utilitzant aquests conceptes.
- Per millorar l'execució de la resolució de problemes dels estudiants, ells haurien d'intentar resoldre una varietat de tipus de problemes en una base regular i sobre un prolongat període de temps.
- La instrucció de la metacognició és més efectiva quan pren lloc en un context específic.
- La instrucció de la resolució de problemes, i en particular la instrucció de la metacognició, és més efectiva quan s'imparteix d'una manera organitzada i dirigida pel professor.
- És difícil pel professor desenvolupar el paper de monitor, facilitador i model en front d'una classe real, especialment quan els estudiants tenen problemes amb la base de la matèria.
- La dinàmica de classe de treballar en grups petits no s'entén com un voldria i poden no ser garantides idees com que les interaccions en petits grups sigui el

millor. La configuració d'una classe ideal de resolució de problemes cal ser experimentada i pensada més.

- Les pràctiques assessorades haurien d'encoratjar els tipus de comportament que volem demostrar als estudiants que són convenientes.

#### 2.3.4.5 Creences i afectes

McLeod i Adams (1989) escriviren un llibre titulat *Affect and Mathematical Problem Solving: A New Perspective* marcant uns punts inicials de discussió sobre afectes. Les creences poden ser interpretades com el que entén i sent i per tant el que dona forma als camins que l'individu conceptualitza i implementa en el comportament matemàtic. Aquesta forma es dona mitjançant una discussió que pot considerar-se des de tres angles diferents: creences dels estudiants, creences dels professors, i creences de la societat en general sobre les matemàtiques.

- Creences dels estudiants: Lampert (1990, 31) pensava que les matemàtiques s'associaven amb la certesa; coneixent-ho, amb la capacitat d'arribar a la resposta correcta ràpidament (Ball, 1988; Schoenfeld, 1985b; Stodolsky, 1985). Les creences sobre com es fan les matemàtiques i què significa saber matemàtiques en l'escola s'adquireixen a través dels anys d'observar, escoltar i practicar. Els estudiants amb aquesta creença abandonaran un problema després de pocs minuts d'intents desafortunats, encara que podrien resoldre'l si perseveressin.

- Creences del professor: El sentit que li dona el professor a ensenyar matemàtiques determina l'ambient a la classe. Aquest ambient li dona forma a la vegada a les creences dels alumnes sobre la naturalesa de les matemàtiques. Hi ha dos estudis que aporten clara documentació al respecte. Cooney (1985) discuteix el comportament de la classe impartida per un professor novell que creia en la resolució de problemes. Al final, aquest professor pensà que plantejant als alumnes problemes no estàndards per treballar fou, encara que recreatiu i engrescador, subordinat a l'objectiu que els estudiants sabessin la matèria. Sota les pressions de cobrir tot el contingut, el professor sacrificà els objectius de la resolució de problemes a favor dels objectius immediats que es comptava que havien de dominar.

Thompson (1984) presentà dos estudis de casos demostrant el paper important que juguen les creences del professor en la classe. En el primer s'observà com la professora presentava la lliçó d'una manera planificada, sense apartar-se'n, i sense canvis ineficients. Els seus alumnes experimentaren la rigidesa de la instrucció que els conduïa al desenvolupament de les seves creences. En el segon, les impressions obtingudes van ser diferents:

- Les matemàtiques són més que un conjunt de fets, són un conjunt d'idees i processos mentals.
- Les matemàtiques poden ser millor enteses redescobrint les seves idees.
- El descobriment i la verificació són processos essencials en matemàtiques.
- El principal objectiu de l'estudi de les matemàtiques és desenvolupar habilitats del raonament que són necessàries per a la resolució de problemes.
- El professor ha de crear i mantenir un clima informal i obert a la classe per tal d'afavorir i assegurar la llibertat de cada alumne per preguntar i explorar idees.

- El professor hauria d'encoratjar els estudiants a endevinar i conjeturar i hauria de permetre'ls raonar coses a la seva manera per tal de mostrar-los com arribar a una solució o resposta.
- El professor hauria d'apel·lar a la intuïció dels alumnes i a les seves experiències a l'hora de presentar el material per tal de fer-ho significatiu. (Thompson, 1984, 288-290)

- Creences de la societat: Es donen grans diferències culturals en les creences que sostenen els pares, els professors i els estudiants sobre la naturalesa de l'aprenentatge de les matemàtiques. Aquestes creences poden ser organitzades en tres àmplies categories: creences sobre el que és possible (el que els alumnes són capaços d'aprendre en matemàtiques a cada edat corresponent); creences sobre el que és desitjable (el que els alumnes haurien d'aprendre); i creences sobre quin és el millor mètode per ensenyar matemàtiques (com els alumnes haurien de ser ensenyats). (Thompson, 1984, 196)

## **2.4. Les matemàtiques a la secundària obligatòria**

En aquest punt es tractaran les dificultats d'ensenyar matemàtiques amb un desig de traspassar o almenys compartir la responsabilitat en l'aprenentatge entre professor i alumne. També es tractaran les matemàtiques com una eina per pensar.

### **2.4.1 Dificultats d'ensenyament**

Les diferències en assimilar les matemàtiques existents entre els alumnes de qualsevol edat provoca que a mesura que creixen, aquestes diferències s'incrementen. No pot ser educativament desitjable que un alumne de capacitat mitjana per obtenir el graduat i abandonar l'escola aconseguixi només una tercera part correcta d'un examen de matemàtiques. Tal requeriment, lluny de desenvolupar la confiança pot dirigir-se cap al sentiment de fracàs. Els examinadors tenen la tasca d'elaborar exàmens que cobreixin el màxim temari possible. Però observen que hi ha molts alumnes que tenen moltes mancances, així és que acaben posant algunes preguntes trivials de manera que aquells estudiants puguin contestar bé a algunes qüestions. Els professors se senten obligats a cobrir al màxim el temari que toca en el curs perquè els alumnes puguin respondre bé l'examen, encara que vegin que hi ha nocions molt difícils per a aquells que tenen mancances. Això porta a donar classes d'una manera que només respon a passar exàmens practicant rutines enlloc de desenvolupar la comprensió. Així doncs, s'arriba a un cercle viciós difícil de trencar. Hi ha molts alumnes a secundària que es troben amb continguts els quals no estan capacitats per afrontar. Si s'aconsegueix que l'alumne segueixi un curs apropiat en contingut, s'aconseguirà un grau superior d'aprenentatge, guanyarà més confiança en els seus èxits i contribuirà a un canvi d'actitud. (Cockcroft, 1985)

Es poden considerar finalment, dues qüestions importants independentment de les edats a les que s'imparteixen les classes:

- a) La primera és la necessitat que s'inclouï en l'ensenyament de les matemàtiques un treball oral, discussions i treball pràctic.
- b) La segona és la necessitat que es relacionin les matemàtiques amb les altres àrees del currículum. La manera de pensar en una assignatura pot ajudar l'alumne en altres assignatures.

S'ha fet creure al professor que ell és la peça fonamental del sistema educatiu i que de la seva voluntat i formació depèn el funcionament del sistema i l'èxit de qualsevol reforma educativa. Ell és l'encarregat d'aconseguir que l'alumne tingui una actitud positiva i una

motivació adequada per aprendre matemàtiques, al mateix temps que ambdues són considerades les condicions bàsiques de tot aprenentatge. Però el professor no pot plantejar-se la possibilitat d'incidir sobre el procés d'estudi de l'alumne, perquè és un procés al que no té en absolut accés. Paral·lelament, hi ha una creixent demanda social cap als professors que passen d'ensenyants del saber matemàtic a educadors o formadors dels alumnes. (Cockcroft, 1985)

En resum, l'alumne realitza una feina no considerada matemàtica; es tracta d'un treball auxiliar de l'aprenentatge escolar, concentrat a l'aula i totalment dependent del professor al que se li demana que actuï com a matemàtic només per satisfer les necessitats d'origen didàctic. En aquesta situació resulta difícil pensar en un traspàs als alumnes de part de la responsabilitat matemàtica assignada al professor.

## **2.4.2 Pensar matemàticament**

Primer s'exposarà un punt de vista sobre què poden significar les matemàtiques i després indicacions i recomanacions d'autoritats en didàctica de les matemàtiques per als professors. S'acabarà amb una distinció de dificultats, bloquejos i errors observats als estudiants en resoldre problemes.

### **2.4.2.1 Què són les matemàtiques**

La paraula matemàtiques pot tenir diversos significats depenent de la persona. Lluís Santaló (1993) simplificadament indicava que per a aquells que tenen una escassa formació matemàtica, aquesta ciència està integrada únicament per càlculs aritmètics comuns i pels nombres i propietats d'algunes figures geomètriques; per a ells es tracta de saber calcular i amb l'aparició de les calculadores, ha perdut gran interès, o que per conservar l'interès fa falta evitar l'ús d'elles a l'aula. Fins i tot altres persones amb formació matemàtica redueixen la matèria a l'abstracció i manipulació de números i relacions funcionals, obviant altres camps. Santaló també defineix l'activitat matemàtica com un altre punt de vista diferent, com una tècnica, com un art, com una filosofia i com una ciència. I aquesta dimensió només pot aconseguir-se creant l'esperit d'investigació i de conqueriment, com diu Puig Adam (1960).

### **2.4.2.2 Les matemàtiques són per pensar**

Al 1982 Lakatos entenia les matemàtiques com una activitat humana que amaga una dialèctica de conjectures, refutacions i demostracions, fins arribar a establir una conclusió. Al 1969 Polya digué que les matemàtiques eren una disciplina de descobriment. Però és que per una altra banda, l'activitat matemàtica es justifica amb la finalitat creativa. A l'escola s'han fet esforços per caracteritzar els valors educatius de les matemàtiques tals com: la funcionalitat, el sentit, la comunicació, la perseverança, el plaer... Han contribuït personatges importants com Freudenthal, Guzmán, Polya, Puig Adam. Precisament, al 1958 Puig Adam redactà el famós Decàleg del Professor de Matemàtiques, en el qual recollia les seves opinions sobre l'ensenyament de les matemàtiques en els instituts:

1. No s'ha d'adoptar una didàctica rígida, sinó emmotllar-la en cada cas a l'alumne, observant-lo constantment.
2. No s'ha d'oblidar l'origen concret de la matemàtica, ni els processos històrics de la seva evolució.
3. Cal presentar la matemàtica com una unitat en relació amb la vida natural i social.
4. Cal graduar acuradament els plans d'abstracció.
5. És necessari ensenyar guiant l'activitat creadora i descobridora de l'alumne.

6. Cal estimular l'activitat creadora, despertant l'interès directe i funcional cap a l'objectiu de coneixement.
7. Cal promoure en tot el possible l'autocorrecció.
8. Cal aconseguir cert domini en les solucions abans d'automatitzar-les.
9. Cal tenir cura que l'expressió de l'alumne sigui una traducció fidel del seu pensament.
10. Cal procurar que tothom tingui èxit per evitar el desànim.

Per la seva banda, Polya (1981) considera que un professor de matemàtiques té a les seves mans una gran oportunitat. Si utilitza el seu temps en exercitar els seus alumnes en operacions rutinàries matarà en ells l'interès, impedirà el seu desenvolupament intel·lectual; però si estimula en ells la curiositat podrà despertar-los el gust pel pensament independent.

Un punt d'inflexió es produeix en el document del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) que afirmava en la seva recomanació 1 que la resolució de problemes hauria de ser el focus de les matemàtiques escolars dels anys 80. (NCTM, 1980, 1). Aquesta recomanació general es concretava amb sis accions on s'implicava al professorat, als investigadors i a les administracions educatives:

1. El currículum de matemàtiques hauria d'organitzar-se entorn a la resolució de problemes.
2. La definició i el llenguatge de la resolució de problemes en matemàtiques hauria de desenvolupar-se i ampliar-se per tal d'incloure una àmplia gama d'estratègies, processos i maneres de presentació que abracessin tot el potencial de les aplicacions matemàtiques.
3. El professorat de matemàtiques hauria de crear ambients de classe en els quals pugui sorgir la resolució de problemes.
4. Cal desenvolupar materials curriculars adients per ensenyar a resoldre problemes a tots els nivells.
5. Els programes de matemàtiques dels anys 80 haurien d'implicar l'alumnat en la resolució de problemes presentant aplicacions a tots els nivells.
6. Els investigadors haurien de donar prioritat durant la dècada dels 80 a les investigacions sobre la naturalesa de la resolució de problemes i les vies efectives per aconseguir resolutors de problemes.

En el 1989, el NCTM proposa les següents cinc fites generals per a tot l'alumnat en el document *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*:

- a) Cal aprendre a valorar les matemàtiques
- b) Cal adquirir confiança en la pròpia aptitud
- c) Cal adquirir la capacitat de resoldre problemes matemàtics
- d) Cal aprendre a comunicar-se matemàticament
- e) Cal aprendre a raonar matemàticament

Aquests cinc objectius culminaven en rotundes afirmacions com ara expressar que la resolució de problemes, en el seu sentit més ampli, significa pràcticament el mateix que l'ús de les matemàtiques. (NCTM, 1991, 139). Una altra afirmació rotunda deia que conèixer les matemàtiques significa ser capaç d'usar-les amb propòsits definits. Per aprendre matemàtiques, els estudiants han d'involucrar-se en explorar, conjecturar i raonar, més que en l'aprenentatge memorístic de regles i procediments... per donar sentit a les matemàtiques, les han de veure i emprar-les com una eina de raonament i resolució de problemes (NCTM, 1991, 5).

A Gran Bretanya, l'Informe Cockcroft (1982 i 1985 en versió espanyola) enumera quatre propòsits declarats com a responsabilitat del professorat que es corresponen de forma coherent amb les anteriors.

A.H. Schoenfeld (1991b i 1992), apunta la conveniència d'ensenyar a pensar matemàticament, és a dir, modelitzar, simbolitzar, abstraure i aplicar idees matemàtiques a un ampli rang de situacions. Ho considera més important que no pas l'ensenyament de la resolució de problemes. En aquest marc, els problemes jugarien el paper essencial de punt de partida de les situacions matemàtiques, per sobre de les rutines algorítmiques.

També són importants, entre altres, les aportacions de treballs i propostes de J. de Lange a Holanda, del Shell Centre a Gran Bretanya. Els *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) i el Projecte OCDE/PISA (2000 i 2003) són d'una importància rellevant. Es poden destacar sis principis transmesos quant al NCTM (2000):

- L'equitat: l'excel·lència en educació matemàtica requereix igualtat, altes expectatives i un fort recolzament a tots els estudiants.
- El currículum: un currículum és més que una col·lecció d'activitats; és indispensable que sigui coherent, centrat en allò rellevant i articulat en distints nivells.
- L'ensenyament: un ensenyament efectiu de les matemàtiques requereix la comprensió del que coneixen i necessiten els estudiants, per estimular-los i conduir-los a un bon aprenentatge.
- L'aprenentatge: per aprendre matemàtiques és indispensable la comprensió, activant un nou coneixement des de l'experiència, més que des del coneixement anterior.
- L'avaluació: l'avaluació hauria de recolzar l'aprenentatge, proporcionant informació útil al professorat i a l'alumnat.
- Tecnologia: és essencial en l'ensenyament i en l'aprenentatge de les matemàtiques.

Quant al Projecte OCDE/PISA (2000), sense ser un document comparable als anteriors per la seva finalitat donat que és un projecte de creació d'indicadors per a l'avaluació, incideix en la mateixa idea de plantejar el coneixement matemàtic sobre la base de les competències, confrontant aquestes a la visió tradicional del saber en termes de conceptes, fets, algorismes i tècniques.

#### **2.4.2.3 El fet de pensar a la classe de matemàtiques costa**

La realitat diària mostra una àmplia casuística de dificultats, bloquejos i errors comesos observats en l'alumnat en resoldre problemes de matemàtiques. A continuació s'intentaran agrupar en tres nivells. (Vila, Callejo; 2004)

En un nivell 1, es poden considerar aquelles respostes sense sentit a situacions plantejades a l'entorn escolar amb relació a aspectes quotidians. Per exemple: si tens deu llapis vermells a la teva butxaca esquerra i deu blaus a la teva butxaca dreta, quina edat tens? Resposta: vint anys.

En un nivell 2, es contemplen les dificultats observades en general en el procés de resolució de problemes no estereotipats, contextualitzats de forma més o menys familiar, que no requereixen estratègies de resolució complexes, o més encara, que admeten mètodes, estratègies o processos d'execució informals. Encara tractant-se de



problemes poc complexos, el seu caràcter no estereotipat fa que requereixin d'un abordatge reflexiu, no automàtic, ni associat de forma mimètica a algorismes o sistemes conceptuals.

En el nivell 3 de dificultats i errors s'emmarcaria la següent qüestió: Què és el que fa que alguns bons alumnes resolguin bé alguns problemes no estereotipats i en canvi d'altres es bloquegin, donin respostes ràpides o incoherents, o es conformin amb nivells baixos de solució?

## **2.5. Currículum de matemàtiques**

En aquest apartat primer es recordaran les tendències curriculars del darrer segle i seguidament es definirà el currículum de matemàtiques estudiant antecedents d'estudis curriculars, estudis especialitzats, estudis curriculars a Espanya, dimensions del currículum, objectius i finalment es tractarà el currículum de matemàtiques per als inicis d'aquest segle XXI.

### **2.5.1 Breu recordatori en tendències curriculars del darrer segle**

L'educació americana matemàtica volia fer una revisió promoguda per algunes de les raons següents: a) resultats americans pobres en comparacions sobre les competències dels estudiants a nivell internacional; b) cada vegada els cursos de matemàtiques tenien menys alumnes.

La dècada del 1980 no fou la primera vegada que la matemàtica americana s'havia declarat en crisi. El 4 d'octubre del 1947, amb l'èxit rus del llançament del satèl·lit espacial Sputnik els americans es van plantejar un canvi en el currículum de les matemàtiques i de les ciències. Sobre el 1960 sorgí una nova matemàtica que de seguida es veié com un fracàs. Aquesta nova matemàtica fou reemplaçada per un moviment de retorn a les matemàtiques bàsiques. La idea era simple, Amèrica s'havia d'assegurar que els seus estudiants arribessin a les matemàtiques bàsiques, ja que les nocions teòriques existents a sota de les idees de la matemàtica moderna no s'havien assimilats.

Sobre finals dels 1970s, també es veié que aquestes matemàtiques eren un fracàs. Una dècada de currículum que se centrava en desenvolupar habilitats mecàniques produí una generació d'estudiants que, degut a la falta d'exposició i d'experiència, presentaven mancances a l'hora de pensar i a l'hora de resoldre problemes. Tampoc ells eren millors en les matemàtiques bàsiques que els estudiants que havien estudiat el currículum antic.

El tema dels 1970s fou el retorn a les matemàtiques bàsiques, mentre que el tema dels 1980s fou la resolució de problemes (Krulik i Rudnick, 1980). De fet, la resolució de problemes fou un dels set temes principals del Congrés Internacional (ICME V, Adelaide, Austràlia).

### **2.5.2 Concepte de currículum des de l'educació matemàtica**

“Un currículum és una temptativa per combinar els principis i trets essencials d'un propòsit educatiu, de forma que quedi obert a la discussió i a la crítica i es pugui traslladar efectivament a la pràctica” (Stenhouse, 1984, p.30). El terme currículum denomina tota aquella activitat que organitza i porta a terme un pla de formació. Per currículum de matemàtiques s'entendrà el pla de formació en matemàtiques per als nens, joves i adults d'un país, que té lloc en el sistema educatiu.

L'educació es fonamenta en un sistema de valors, considera les pràctiques socials del medi en el qual s'implanta, se sosté sobre uns fonaments ètics i ve condicionada per un

context polític determinat. Es pot considerar el currículum de matemàtiques com una eina principal per al professor.

### 2.5.2.1 Antecedents d'estudis curriculars en educació matemàtica

Durant la dècada dels seixanta tingueren lloc els primers estudis comparatius a gran escala. Kilpatrick (1992) destaca entre ells estudis longitudinals, amb avaluacions successives dins d'un mateix país i programa, i els estudis internacionals on se seleccionaven alguns nivells per realitzar determinades comparacions, principalment dels seus rendiments, i programes.

Un dels treballs pioners és el realitzat per l'*School Mathematics Study Group* (SMSG) que començà al 1962 als Estats Units, denominat *National Longitudinal Study of Mathematical Abilities* (NLSMA).

En les comparacions entre currículums de diferents països és on es fa explícita la necessitat d'un marc teòric i sorgeix la conveniència d'elaborar determinats conceptes sobre el currículum de matemàtiques i precisar les seves relacions mútues. En 1964, dotze països aplicaren una prova comú de rendiment en matemàtiques (Husén, 1967). Fou la primera comparació del rendiment de l'alumnat en qualsevol disciplina en què participaven diferents països. El llistat de temes variava significativament entre uns països i altres.

En 1976 se celebra en Karlsruhe el tercer Congrés Internacional sobre Educació Matemàtica (ICME) que reuní 76 països diferents. Sobre aquesta trobada la Unesco publicà un extens document: *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática*, Vol. IV (Steiner, H. i Christiansen, B., 1979). El tema central d'aquest estudi fou el currículum de les matemàtiques. Per altra banda, el currículum no ha de ser solament un índex de continguts, sinó que ha de contenir propòsits, continguts, mètodes i procediments d'avaluació. (Howson, 1979). Les quatre dimensions del concepte de currículum que en les actes publicades s'establí eren els objectius, els continguts, la metodologia i l'avaluació. (Steiner, 1980).

### 2.5.2.2 Estudis especialitzats

En 1981 apareix publicat el llibre *Curriculum Development in Mathematics*, amb autors com Howson, Keitel i Kilpatrick. Era un manual sobre els treballs curriculars realitzats des de la dècada de 1960. El llibre es proposa estudiar l'evolució dels canvis curriculars en matemàtiques.

El *Mathematics Counts* (1982) popularment conegut com l'Informe Cockcroft, fou molt important, una versió castellana es titula *Las matemáticas sí cuentan* (1985); es tracta d'una extensa avaluació realitzada a Anglaterra i al País de Gales sobre el currículum de matemàtiques en curs, amb la fi de realitzar propostes per a la seva millora.

L'*School Mathematics in the 1990s. ICMI Study Series* (1986) és un document elaborat per Howson i altres, que serví com a base per a una trobada per la *International Commission on Mathematical Instruction*.

Les *Perspectives on Mathematics Education* (1985) varen ser escrites pel grup d'especialistes BACOMET.

El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) nord-americà té editat com el llibre de l'any: *1985 Yearbook: The Secondary School Mathematics Curriculum*, i

presenta un model de document per recolzar una innovació curricular elaborada dins de la Societat de Professors de Matemàtiques d'Estats Units.

### 2.5.2.3 Estudis curriculars en Espanya

L'equip de la *Investigación Granada Mats* analitzà l'adequació dels continguts matemàtics per a l'Educació General Bàsica marcats en els programes oficials derivats de la Llei General d'Educació de 1970, el programa de la qual implantà les Matemàtiques Modernes (*New Mathematics*) en l'educació obligatòria espanyola.

En el 1975 començà la implantació dels programes de batxillerat derivats de la Llei General d'Educació, i sorgeix a Espanya un altre projecte d'investigació curricular per a aquest nivell educatiu, protagonitzat pel *Grupo Cero* de València, i el Grup Zero de Barcelona.

En el treball *Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural* (Rico, 1990) s'expressa la idea que en tota reflexió curricular s'ha de reconèixer els següents elements:

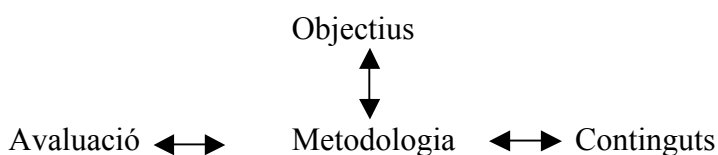
- i) el col·lectiu de persones a formar
- ii) el tipus de formació que es vol proporcionar
- iii) la institució social en la qual es dugui a terme la formació
- iv) les finalitats que es volen aconseguir
- v) els mecanismes de control i valoració

Els elements i) i iii) vénen establerts institucionalment per a cada país mitjançant les lleis generals que regulen el sistema públic per a l'educació.

En qualsevol currículum, el col·lectiu de persones a qui es refereix la seva formació es caracteritza usualment per dues variables importants: l'edat i la formació prèvies.

### 2.5.2.4 Dimensions del currículum

El currículum es presenta com un pla que s'organitza i estructura en especificar les competències professionals dels professors i les funcions dels alumnes, caracteritzar cadascuna de les disciplines escolars, i especificar l'organització i estructura de l'escola. En aquest nivell les components del currículum són el professor, l'alumne, el coneixement i l'escola (Howson, Keitel i Kilpatrick, 1981; Romberg, 1992).



Quadre 2.3: El currículum com a pla operatiu d'actuació per al professor (Steiner, 1980).

La didàctica de la matemàtica tracta de coneixements útils que, encara que necessitin d'una base teòrica sòlida, han d'estar connectats amb la pràctica i amb l'ensenyament de les matemàtiques en el sistema educatiu. No es tracta de coneixements obtinguts per l'acumulació de disciplines ja existents, sinó que tenen l'especificitat derivada dels processos de comunicació, transmissió i aprenentatge del coneixement matemàtic. Per a això, necessita eines conceptuals ben construïdes i al servei de la pràctica. Una d'aquestes eines és el concepte de currículum elaborat des de l'Educació Matemàtica.

### **2.5.2.5 Els objectius de les matemàtiques per a tots**

Hans Freudenthal fou un matemàtic i un dels creadors de la nostra visió moderna de la didàctica de les matemàtiques, nascut a Alemanya al 1905. Una idea molt important és la d'invertir el punt de partida del desenvolupament del currículum. Mentre que uns enfocaments d'alguna reforma del passat s'iniciaren a partir de perspectives sobre com ensenyar les matemàtiques, el punt de partida de Freudenthal és com aprèn el nen les matemàtiques. Aquest punt de vista obra un ampli camp d'observació indeterminat, d'experimentació, evolució provisional dels materials, prova, revisió i avaluació. La idea que l'ensenyament s'organitzi segons les condicions del desenvolupament cognitiu no és nova, és la base de la psicologia cognitiva.

A partir del concepte del raonament matemàtic es desprèn necessàriament que es tracta d'un objectiu i d'un camí al mateix temps: l'activitat dels estudiants és, en sí mateixa, subjecte a l'aprenentatge i forma part de la instrucció adequada. El grau en què l'activitat de l'estudiant pugui ser conduït cap al raonament matemàtic depèn en bona mesura del paper del mestre en el procés docent. En conseqüència, se situa al mestre en el centre mateix d'aquesta concepció de desenvolupament del currículum.

#### **2.5.2.5.1 Demandes plantejades a les matemàtiques escolars**

Sovint s'ha afirmat que el problema més gran de l'ensenyament de les matemàtiques tradicionals és el seu fracàs a l'hora d'ensenyar a transferir capacitats. Això és el resultat de l'ensenyament, que aborda les matemàtiques com un coneixement llest per al seu ús, com un immens magatzem d'instruments capaços de solucionar problemes.

Moltes dificultats sorgeixen quan s'insisteix que els estudiants connectin les pautes amb el context de la realitat o de les matemàtiques, o que efectuïn aplicacions significatives de les pautes a situacions reals. Les pautes d'aplicació representen una transformació a un nivell intermedi en què tant les matemàtiques com la realitat social exigeixen traducció i interpretació.

Aquesta traducció es veu complicada en un doble sentit. L'assimilació d'un procés matemàtic en el procés de solució del problema resulta útil per a la seva aplicació només en la mesura en la qual s'eviti l'aplicació del coneixement matemàtic exigint. Per una altra banda, la comprensió no es veu facilitada degut al fet que la majoria dels instruments per solucionar problemes s'hagin emancipat dels casos que inspiren la seva invenció i que hagin estat modificats i més desenvolupats d'una multitud de maneres. La qüestió es complica encara més donat que aquests instruments han arribat a ser d'un ús tan general que s'han convertit en part de la realitat social (com tècniques culturals) i per tant en les bases de nous problemes per als que es desenvolupen nous processos de solució de problemes i noves pautes d'aplicació (Keitel, 1993).

El dilema aquí procedeix del fet que la selecció de problemes efectuada per les escoles rares vegades es correspon amb els problemes del món real. Ningú ha demostrat com Freudenthal ha fet que aquest malentès o distorsió de les matemàtiques constitueix la font de la majoria dels fracassos que es produeixen en la didàctica de les matemàtiques. Freudenthal ha insistit repetides vegades en el fet que les matemàtiques són una activitat, un comportament, un estat mental..., una actitud, una forma d'atacar els problemes.

L'objectiu de la didàctica de les matemàtiques ha de ser, per sobre de tot, proporcionar eines de percepció: percepció de la naturalesa, de la interferència humana amb ella, de

la manipulació de la naturalesa, de l'organització dels assumptes humans; i percepció per a diferents fins: per i en sí mateixa, pel control, la guia i també, novament, per a la manipulació. Així és que les matemàtiques haurien d'estudiar-se principalment per aportar instruments de comprensió que puguin ser aplicats a la realitat.

#### **2.5.2.5.2 Relacionar el contingut amb els processos cognitius de l'educand**

“Comprendre” l'assignatura constitueix una part essencial del procés d'aprenentatge que es porta a terme a l'escola. Facilitar dita comprensió constitueix el nucli fonamental de la professió de professor. En fer-ho així, el professor no només ha d'anivellar la presentació de l'assignatura amb la lògica del propi contingut, sinó que també ha de posar-se a l'alçada del nivell de comprensió dels alumnes.

Per tal d'adaptar la presentació de l'assignatura al coneixement que ja posseeixen els alumnes, i per tal de poder contrarestar els errors i les males interpretacions d'aquests, el professor ha de trobar una explicació als èxits i fracassos de la comprensió de l'alumne a l'aula. La qüestió a considerar aquí és com expliquen els mestres els èxits i fracassos de la comprensió dels alumnes.

#### **2.5.2.6 El currículum de matemàtiques per als inicis del segle XXI**

La resolució de problemes és important no només per a l'aprenentatge de les matemàtiques, sinó sobretot per resoldre els problemes de la vida. La resolució de problemes ha de constituir el nucli fonamental de l'aprenentatge matemàtic i del bagatge que les matemàtiques han d'aportar a la visió del món i a la manera d'afrontar les situacions conflictives.

D'una forma planificada i recurrent (amb la utilització de contextos diferents) en la realització de problemes veritables, atacables amb diferents estratègies per poder arribar a algun resultat significatiu. És convenient treballar activitats que tinguin com a escenari situacions no estrictament matemàtiques, perquè abans de l'aplicació de les estratègies de la resolució de problemes s'ha d'atacar un problema previ: la matematització de les situacions, el pas de la realitat al model abordable amb tècniques matemàtiques.

Santaló (1994) pensa que ensenyar matemàtiques ha de ser equivalent a ensenyar a resoldre problemes. Estudiar matemàtiques no ha de ser una altra cosa, per a ell, que pensar en la solució de problemes.

La matemàtica recreativa no té una bona fama en l'ensenyament per l'accepció de diversió, alegre de la paraula recreativa. Però hi ha hagut un oblit sobre la seva etimologia: re-crear, tornar a crear. Ambdues accepcions han d'estar unides a la pràctica diària de l'aprenentatge de les matemàtiques, amb la recerca del plaer com a principi generalitzat. Són una recerca i pràctica del plaer com a camí principal per la necessitat que els alumnes facin matemàtiques, les recreïn, no que vegin les que altres fan o feren, plaer que deixa una petjada més duradora. Claudi Alsina (1991) afirma que ensenyar i aprendre matemàtiques pot i ha de ser una experiència feliç... diu que només es pot parlar d'una tasca docent ben feta quan tots aconseguim un grau de felicitat satisfactori. Miguel de Guzmán (1993) expressa que la matemàtica és en gran part joc, i el joc pot en moltes ocasions, analitzar-se mitjançant instruments matemàtics.

En relació amb l'aplicació dels jocs a l'ensenyament, és de fàcil comprovació que són molt ben rebuts pels alumnes i són de gran utilitat per a l'aprenentatge de les grans estratègies de resolució de problemes. Se sol objectar que l'aprenentatge per descobriment és més lent però la intensitat amb què es tracten i l'interès en ells (sobretot

en els jocs per les ganes de guanyar i descobrir) fan que a la llarga siguin més rendibles.  
(Informe Cockcroft, 1985)

## Capítol 3: La resolució de problemes

En aquest capítol es contemplarà la resolució de problemes tractant primer la idea de problema, seguidament les estratègies i propostes per a resoldre'ls, en tercer lloc les fases de la seva resolució, en quart lloc la seva resolució des d'un punt de vista metacognitiu, i per últim, les actituds, bloquejos i emocions que envolten l'individu quan es proposa resoldre'ls.

### 3.1 Sobre la idea de problema

La idea de problema es treballarà a continuació des de tres perspectives diferents: des del paper assignat a la pròpia tasca, des dels destinataris i des del professorat. També s'estudiarà el problema en didàctica de les matemàtiques i finalment es comentaran tres possibles classificacions dels problemes.

#### 3.1.1 Tres perspectives diferents

L'educació matemàtica englobaria tres perspectives de les quals parlava ja Kilpatrick (1985): la curricular (socioantropològica, que se centra en el paper de la resolució de problemes en l'ensenyament de la matemàtica), la de la matemàtica (problema com a construcció de la pròpia matemàtica) i la didàctica (problema com a vehicle). En totes tres poden intervenir els tres elements següents: problema, alumne, professor.

Per altra banda, la paraula problema pot enfocar-se des de tres angles diferents: des del paper que se li assigna de forma inclusiva a la tasca, des dels destinataris i des del professorat. En primer lloc, es podria abordar el fet de plantejar problemes a classe com una simple tasca a realitzar. Sota aquesta perspectiva, sembla que només importaria la seva estructura matemàtica a l'anàlisi o a la selecció de problemes, i per planificar les classes només caldria esforçar-se en efectuar una anàlisi de tasques, en la més pura tradició conductista. El que se li exigeix a l'alumnat consisteix en el fet que la seva resolució identifiqui i desenvolupi l'estructura matemàtica suposadament apresada. Per a la formació matemàtica aquesta consideració sobre la resolució de problemes té poc interès. En segon lloc, si es pensés en els destinataris s'observaria la diferència de dificultats amb què es troben els distints alumnes. Això donaria importància als coneixements previs del resolutor, a les distintes capacitats personals, a les idees d'aplicació significativa i d'aplicació rutinària i, per tant a distingir tipologies de tasques en una escala que es denomina exercici-problema... És a dir, es donaria importància a un gran conjunt d'aspectes cognitius. Malgrat que posar l'èmfasi en els destinataris de la tasca és més ric que centrar-se només en la tasca mateixa, potser s'estigui reduint l'educació a preparació o ensinistrament, cosa que fa que tingui poc interès per a la formació matemàtica. En tercer lloc, si es considera que un mateix problema pot ser proposat a uns mateixos alumnes amb distintes finalitats, i que pot obtenir-se per tant distints objectius, es pot admetre la rellevància d'un tercer personatge, el professorat, algú més que un planificador o prescriptor. Així se li dóna importància tant al paper que el professorat doni a cada problema i a la resolució de problemes, com a la situació o context en el qual aquest es desenvolupi. També hi apareixen aspectes afectius del resolutor tal com es veurà en el punt "3.5 Actituds, bloquejos i emocions". L'existència de dificultats no és una característica intrínseca d'una situació, però les dificultats centren la dependència en els coneixements i experiències del resolutor.

Resulta convenient per al nostre treball centrar-nos en el tercer enfocament doncs en el context escolar, un problema no pot deslligar-se dels alumnes i de la intencionalitat del professor que l'ha seleccionat per a una situació concreta d'ensenyament-aprenentatge.

Aquests tres elements s'interrelacionen i la situació a analitzar pot ser molt complexa en funció de les variables a analitzar. No és el mateix observar el procés de resolució d'un problema per part d'un alumne, que observar a més les interaccions alumne-alumne i professor-alumne que es produeixen a l'aula durant aquest procés. Si ampliem mires, també es pot observar el clima d'una classe on incideixen tant l'estructura formal de l'aula (organització del temps i de l'espai, mobiliari, materials, etc.) com les relacions (qualitat de les relacions interpersonals, paper i model de professor, etc.) i la cultura de la classe (normes, regles, creences, valors, etc.).

### **3.1.2 El problema en educació matemàtica**

A continuació es farà una revisió de les definicions de problema més importants en didàctica de les matemàtiques. Seguidament s'estudiarà l'ambient d'aprenentatge a l'aula al voltant del problema.

#### **3.1.2.1 Revisió de les definicions més importants**

El conegut diccionari Webster's (1979) dona dues definicions sobre el terme problema. La primera definició expressa que en matemàtiques un problema és qualsevol cosa requerida per ser feta, o que requereix de fer quelcom. La segona indica que és una qüestió que sobta o que és difícil.

En la definició de Kantowski (1977) s'expressa que un problema és una situació que difereix d'un exercici en què el resolutor no té un procediment o algorisme que el condueixi amb certesa a una solució. En aquesta mateixa línia es troba una clàssica definició de Lester (1980) que diu que un problema és una situació que un individu o un grup volen resoldre, i per a la qual no disposen d'un camí ràpid i dret que els porti a la solució. S'entén que la resolució ha de ser desitjada, altrament la situació no pot ser considerada com problema. La definició de Krulik i Rudnick (1980) expressa que un problema és una situació quantitativa o no, que demana una solució, per a la qual els individus implicats no coneixen mitjans o camins evidents per a obtenir-la.

Kilpatrick (1985) considera des de la perspectiva psicològica la idea de problema com una activitat lligada al subjecte (normalment motivat); Puig (1996) va més lluny parlant d'un subjecte que té un problema, sense distingir quines situacions o tasques han de considerar-se problemes. No es distingeix la idea de problema de matemàtiques de la idea general de problema en la vida dels subjectes.

Puig (1996) expressa que un problema escolar de matemàtiques és una tasca de contingut matemàtic, l'enunciat de la qual és significativa per a l'alumne, i que aquest desitja abordar-la però encara no ha produït significat. Una caracterització de problema s'entén com a eina per afavorir el pensament matemàtic.

Per a Díaz Rodríguez (1993) un problema de matemàtiques és un projecte personal, una tasca, una situació:

- Que l'alumne desitja resoldre i desenvolupar
- Per a la qual l'alumne no coneix cap procés que li permeti trobar la solució de forma immediata
- Que exigeix la construcció d'aquell procés per part de l'alumne
- En l'activitat de resolució de la qual n'estan involucrats conceptes, procediments o teories matemàtiques

Malgrat les aportacions de Newell i Simon (pensen que la resolució de problemes és una aptitud cognitiva complexa) siguin cabdals des de la perspectiva metodològica



(Schoenfeld, 1992), aquest plantejament teòric limita enormement el camp de problemes considerats i sobre els quals es pot treballar, però és que a la vegada engloba també uns problemes molt complexos però molt estructurats, com els denominats puzles o enigmes, els jocs lògics, els criptogrames o fins i tot problemes d'escacs (Callejo, 1994).

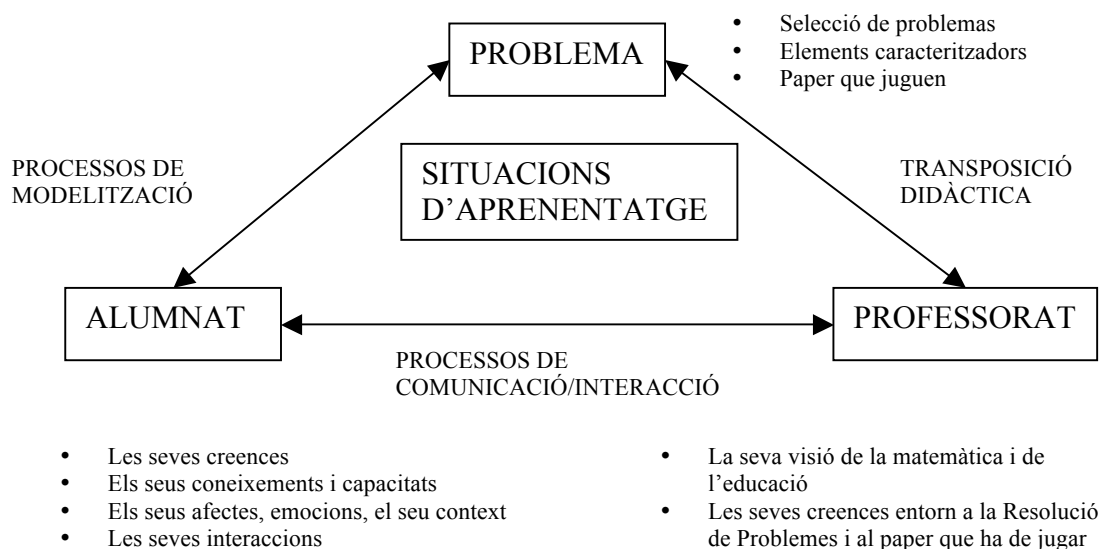
La definició de Callejo (1994) en referència a la idea de problema de matemàtiques i la naturalesa de la seva resolució expressa que el terme problema es reserva per a designar una situació plantejada amb finalitat educativa, que planteja una qüestió matemàtica el mètode de solució de la qual no és immediatament accessible a l'alumne/resolutor que intenta resoldre-la perquè no disposa d'un algorisme que relacioni les dades i la incògnita o les dades i la conclusió, i ha de, per tant, buscar, investigar, establir relacions, implicar els seus afectes, etc... per fer front a una situació nova. Aquesta definició és coherent amb la que dona Puig (1996), i la distinció que fa dels termes resultat, solució i resolució mostrant que el terme resultat indicarà el que contesta la pregunta del problema (sent número o fórmula o expressió algebraica o construcció geomètrica o...), el terme solució s'usarà per a indicar la presentació final del conjunt de passos que condueixen de les dades a la incògnita, o de la hipòtesi a la conclusió, i el terme resolució s'usarà per a indicar el conjunt de les accions del resolutor durant el procés, que poden conduir a obtenir a la solució o no. Per tal d'acabar de precisar el terme, a diferència del que especifica Puig, sí que es consideren problemes de matemàtiques alguns jocs, passatemps o trencaclosques (seguint Callejo i Carrillo que es basen en L. Puig (1996)): aquells en els quals el procés de resolució s'hi impliquen processos generals rellevants per a l'aprenentatge de les matemàtiques, malgrat els coneixements matemàtics implicats siguin escassos o fins i tot nuls o amagats.

### **3.1.2.2 Ambient d'aprenentatge**

El terme problema pot reservar-se per designar una situació plantejada amb finalitat educativa, que proposa una qüestió matemàtica amb mètode de solució no immediatament accessible a l'alumne resolutor o grup d'alumnes que intenta resoldre'l, perquè no disposa d'un algorisme que relacioni les dades i la incògnita o d'un procés que identifiqui automàticament les dades amb la conclusió, i per tant, haurà de buscar, investigar, establir relacions, implicar els seus afectes, etc., per afrontar una situació nova. Això condueix a la idea de problema entesa com a eina per pensar matemàticament (Schoenfeld,1992) i aleshores és important la creació d'un ambient de resolució de problemes a l'aula com al que Abrantes i Serrazina (1996) es refereixen quan parlen de la resolució de problemes com ambient i com naturalesa d'activitats d'aprenentatge.

Els problemes són un mitjà per posar l'èmfasi en els alumnes, en els seus processos de pensament i en els mètodes inquisitius; una eina per formar subjectes amb capacitat autònoma de resoldre problemes, crítics i reflexius, capaços de preguntar-se pels fets, les seves interpretacions i explicacions, de tenir els seus propis criteris modificant-los si és precís, i de proposar solucions. Això exigeix un clima educatiu que afavoreixi la confiança de cada alumne en les seves pròpies capacitats d'aprenentatge, en el seu propi criteri, on no tenen por d'equivocar-se, canviar raonadament d'opinió o dir que no ho saben; un ambient on es passi bé amb els reptes i amb la pròpia activitat intel·lectual; a on es valorin els processos i els progressos de cada alumne i no només les seves respostes; a on s'examini més d'un punt de vista per abordar o solucionar un problema; a on es formulin preguntes pertinents entorn a les situacions i es tingui cura de les generalitzacions; a on es revisin les pròpies creences. Aquest ambient d'aprenentatge exigeix una determinada formació del professorat, així com de certes actituds i creences.

Es genera seleccionant problemes que siguin accessibles als alumnes, que no els creïn frustració, que almenys admetin un tractament parcial més senzill, però que al mateix temps els suposi un repte; encoratjant l'exposició d'idees, l'argumentació i l'esperit crític; fomentant el treball en grup entre els estudiants, la comunicació d'idees, el contrast i el diàleg; interessant als estudiants en processos generadors de coneixement com definir, fer-se preguntes i preguntar, observar, classificar, particularitzar, generalitzar, conjecturar, demostrar i aplicar.



Quadre 3.1: Elements bàsics que componen l'ambient d'aprenentatge a l'aula. (Antoni Vila i M.L. Callejo, 2004)

### 3.1.3 Classificacions dels problemes

Tot seguit s'explicaran tres classificacions diferents dels problemes. La primera classificació es farà relacionant els coneixements i les experiències prèvies. La segona classificació se centrarà en la diferència entre problemes i exercicis. La tercera classificació es basarà en la finalitat.

#### 3.1.3.1 Classificacions relacionant els coneixements i les experiències prèvies

Polya (1981) va proposar una classificació dels problemes en relació als coneixements i a les experiències prèvies dels alumnes fent referència també a la situació on són proposats:

- els problemes en els quals la regla que cal aplicar acaba de ser presentada o estudiada a classe
- els problemes en els quals cal escollir la regla que es va treballar a classe recentment
- els problemes en els quals cal escollir una combinació de regles prèviament estudiades
- els problemes en els quals cal investigar: es tracta de problemes la resolució dels quals exigeix una combinació original de regles i l'ús del raonament plausible

La insistència a definir la idea de problema enfront a la idea d'exercici, i en particular el paper que juguen els coneixements previs de l'alumnat, té un èmfasi excessiu i poc rellevant si només es considera com a personatges en escena el problema i l'alumne,

malgrat les intencions educatives del professorat hi siguin implícites. És necessari considerar tant el paper del professorat com la situació o context en el qual són proposats els problemes alhora de fer una anàlisi del paper de la resolució de problemes en l'educació matemàtica. Recolzant aquesta idea, Gascón (1992) afirma que es propugnen, dissenyen i realitzen activitats docents molt diferents i contradictòries.

La clàssica classificació de Polya (1981) distingeix entre problemes de provar i de trobar, essent paradigmàtica d'una classificació on només intervenen les característiques del problema, de forma independent al resolutor i al professor que el proposa. La finalitat d'un problema de trobar és construir, produir, obtenir, identificar... un determinat objecte, la incògnita del problema, de forma que satisfaci la condició del problema que relaciona la incògnita amb les dades. La finalitat d'un problema de provar és decidir quan una determinada afirmació és certa o falsa, provar-la o refutar-la; cal eliminar el dubte sobre una afirmació matemàtica que consta d'hipòtesis i de conclusions. Tanmateix, el mateix Polya apunta la relativitat d'aquestes categories de problemes, apuntant que un mateix problema pot transformar-se en un altre tipus en el decurs d'una resolució.

### **3.1.3.2 Classificacions centrades en la diferència entre problemes i exercicis**

Existeix un intent de caracteritzar la idea de problema com a contraposició a la idea d'exercici, associant a la idea d'exercici l'existència de procediment o algorisme que condueix a una solució, pressuposant-ne un caràcter mecànic i immediat, i reservant la idea contrària a la idea de problema. Els exercicis rutinaris s'organitzen per tal de practicar sobre una tècnica matemàtica particular que prèviament ha estat demostrada a l'estudiant. L'estructura general que resideix en la pedagogia bàsica i en l'assumpció epistemològica d'aquests tipus d'exercicis és:

1. Un treball s'usa per tal d'introduir una tècnica
2. La tècnica s'il·lustra
3. Es donen més treballs per tal que l'estudiant practiqui les habilitats i les tècniques il·lustrades

S'assumeix que havent treballat aquests tipus d'exercicis, els estudiants tenen una nova tècnica en el seu bagatge matemàtic. La suma total de les tècniques del currículum reflecteixen el cos de les matemàtiques que l'estudiant s'espera que domini. El conjunt de tècniques que l'estudiant domina comprèn tot el seu coneixement matemàtic.

Goldin (1982) amb la finalitat d'analitzar la diferència entre exercici i problema, va construir una escala on situar els salts d'una idea a l'altra contenint els següents punts de referència:

- 1) es sap la resposta
- 2) es té un procediment per arribar a la resposta, se sap que es té i se sap descriure el procediment abans d'executar-lo
- 3) ídem, però no se sap descriure
- 4) ídem, però no s'està segur que el procediment sigui l'adequat, o de quin dels procediments que es tenen és l'adequat
- 5) no es té cap procediment per al problema

Aquesta idea també es presenta en la següent definició de Kantowski (1980) on diu que un problema és una situació per a la qual l'individu que s'enfronta a ella no té un algorisme que garanteixi una solució; el coneixement rellevant d'aquesta persona ha de ser aplicat d'una nova forma per tal de resoldre el problema. Aquí es fa explícita la idea d'aplicació del coneixement en una forma no mecànica, idea recollida per Carl (1989)

que pensa que la resolució de problemes és el procés d'aplicació dels coneixements prèviament adquirits a situacions noves i no familiars. Carrillo (1996) afirma que el concepte de problema ha d'associar-se a l'aplicació significativa (no mecànica) del coneixement matemàtic a situacions no familiars, la consciència de tal situació, l'existència de la dificultat a l'hora d'enfrontar-se a ella i la possibilitat de ser resolta aplicant l'esmentat coneixement.

Schoenfeld (1985a) afirma que ser un problema no és una propietat inherent d'una tasca matemàtica. És una relació entre l'individu i la tasca el que fa de la tasca un problema per a aquella persona. La paraula problema és una tasca que és difícil per a l'individu que està intentant resoldre-la. Aquesta dificultat ha de ser un embolic intel·lectual més que de càlcul. Si es té accés a un esquema de solució per a una tasca matemàtica, aquesta tasca és un exercici i no un problema.

Gil i altres (1988) consideren la idea del llindar del què és un problema, introduïda per Elshout (1985), diferent per a cada persona i per damunt del qual es pot dir que una situació constitueix un veritable problema per a les persones en qüestió.

Gaulin (1982) distingeix entre problemes rutinaris (exercicis) i problemes no rutinaris expressant que la diferència entre un exercici i un verdader problema és relativa. Allò que per a alguna persona constitueix un problema no rutinari pot molt bé ser un simple exercici per a una altra; tot depèn dels coneixements i experiències anteriors de l'alumnat. La idea de relativitat esmentada per Gaulin (1982) i que tant Polya (1945) com Goldin (1982) presenten en forma d'escala, la precisa més Callejo (1994) quan vol distingir entre les idees de problema rutinari i problema no rutinari atenent a quatre aspectes: el comportament a seguir per l'alumne per arribar a la solució, l'objectiu que persegueix el professor quan els proposa, els temps a utilitzar i la dimensió afectiva.

Contreras (1999) posa l'èmfasi en efectes negatius, conseqüència de considerar els problemes com a vehicle per a aplicar (paper definit com a il·lustratiu) i per a poder provar que es coneix un determinat concepte, fet, mètode o procediment rutinari.

### **3.1.3.3 Classificacions centrades en la finalitat**

El paper del professorat s'incorpora en la classificació de Butts (1980) que distingeix entre: exercicis de reconeixement (el resolutor només ha de buscar en la seva memòria el resultat), exercicis algorísmics (el resolutor ha d'executar un algorisme de forma automàtica), problemes d'aplicació (el resolutor coneix un procediment per a resoldre el problema i ha de justificar que aquest procediment és l'adequat per a obtenir la solució), problemes de recerca (el resolutor ha de crear un procediment de solució), situacions problemàtiques (en l'enunciat de les quals no s'ha precisat què és el que cal fer i aquesta és la primera tasca del resolutor). Borasi (1986) parla d'exercicis, problemes verbals, enigmes, prova d'una conjectura, problemes de la vida real, situacions problemàtiques i situacions, on les diferències entre aquestes categories s'establirien en funció d'aspectes com l'existència de context, el tipus de formulació, les solucions i els mètodes d'abordatge.

Una classificació que també inclou el paper del professorat i fa referència al context és la que efectua Blanco (1993): exercicis de reconeixement; exercicis algorísmics o de repetició (reforçar alguna expressió matemàtica determinada o potenciar habilitats de càlcul); problemes de traducció simple o complexa (en l'enunciat apareix tota la informació necessària per a la seva resolució i indica l'estratègia a seguir); problemes de processos (la forma de càlcul no apareix clarament delimitada, possibilitant la

conjectura de diferents camins per tal de trobar la solució i ajuden a desenvolupar estratègies de comprensió, planificació i de solució de problemes); problemes sobre situacions reals (el mètode d'aproximació a aquests tipus de problemes acostuma a suposar tres passes principals: la creació d'un model matemàtic de la situació, l'aplicació de tècniques matemàtiques al model i la traducció a la situació real per tal d'analitzar la seva validesa); problemes d'investigació matemàtica (suggerixen la recerca d'algun model per trobar la solució); problemes de puzles (pretén mostrar el potencial recreatiu de les matemàtiques, obligant a flexibilitzar la forma d'atacar un problema i a considerar diverses perspectives donat que el context i la formulació acostumen a ser enganyosos i la seva solució no suposa necessàriament processos matemàtics, i sí que poden resoldre's mitjançant una idea feliç).

Per a l'anàlisi dels problemes Vila (2001) distingeix cinc tipus de problemes: exercicis, qüestions pràctiques, problemes no contextualitzats, situacions problema i problemes d'estratègia.

Els exercicis són proposats amb la finalitat de mecanitzar determinats procediments presentats a l'aula o ajudar a la comprensió de determinats conceptes. Algunes característiques a destacar podrien ser: els enunciats contenen indicis prou clars dels procediments que s'espera que s'utilitzin; els enunciats són precisos i concisos; l'enunciat proposa l'obtenció d'un únic nivell de resposta; no són proposats de forma aïllada, sinó dins d'una col·lecció repetitiva o jerarquizada.

Les qüestions pràctiques (o problemes contextualitzats matemàticament) són proposades estretament relacionades amb coneixements matemàtics i tenen com a finalitat fixar aquests coneixements mitjançant una connexió amb la vida real o amb una pseudoaplicació de les matemàtiques. A la pràctica, esdevenen il·lustracions dels procediments matemàtics. Algunes característiques a destacar podrien ser: els enunciats són verbals; els enunciats contenen indicis prou clars dels procediments que s'espera que s'utilitzin; són proposats durant el desenvolupament de la unitat didàctica en la qual han estat presentats els procediments necessaris per a la resolució, i normalment immediatament després d'aquestes presentacions; acostumen a formar part de llistes o relacions.

Els problemes no estàndard són proposats als alumnes amb la finalitat de facilitar un ús significatiu dels coneixements matemàtics presentats a l'aula. Com a característiques podrien destacar-se: acostumen a admetre més d'un procediment de resolució; són proposats fora de la unitat didàctica on són presentats els procediments matemàtics que hi estan implicats, o bé són proposats dins però necessiten més d'un camp de procediments, o bé les estratègies generals necessàries són més transcendents en el procés de resolució que els propis coneixements matemàtics implicats; reclamen una argumentació del procés de resolució seguit; acostumen a ser singulars, i no formen part de relacions o llistes de qüestions, o si en formen part, no hi ha cap tipus de relació entre ells (ni en context ni en contingut); en la seva resolució els processos i estratègies de tipus intel·lectual hi juguen un paper transcendent.

Les situacions problema es proposen perquè els alumnes construeixin (Gil i altres, 1988) els coneixements o els processos (Schoenfeld, 1991a) matemàtics necessaris per a resoldre el problema. No es busca tant la funcionalitat sinó la construcció del saber. Algunes característiques que podrien destacar-se: són proposades abans de les presentacions o formulacions o sintetitzacions o construccions dels coneixements

matemàtics implicats en la resolució; mai formen part d'una llista, la singularitat és essencial; els enunciats acostumen a ser imprecisos, oberts...

Els problemes d'estratègia es proposen amb la finalitat del treball en l'elaboració d'estratègies intel·lectuals que puguin ser útils en un ampli rang de situacions. No és tant important la construcció d'un saber com l'elaboració i explicació de l'estratègia seguida. Com a característiques podrien destacar-se les següents: els continguts matemàtics necessaris per resoldre'ls són a l'abast de gran part de l'alumnat; la riquesa de la solució recau en l'explicitació i argumentació del procediment de resolució; acostumen a ser singulars; en els enunciats hi ha una certa proposta de repte per al resolutor (Lester, 1980; Deulofeu, 1999). En aquest sentit, Deulofeu (1999, p.93) aposta per una component lúdica en els següents termes: les recreacions emfasitzen la idea de repte que s'amaga en la resolució de qualsevol problema i permeten incidir sobre aspectes relacionats amb la resolució de problemes, com les autorestriccions, les interpretacions abusives o els implícits dels llenguatge verbal que estan darrera dels enunciats, les falses intuïcions i les paradoxes, les particularitzacions i generalitzacions i també la reflexió sobre els conceptes matemàtics presents en el currículum i la pràctica de procediments, tant tècniques com estratègies.

### **3.2. Estratègies i propostes per a resoldre problemes**

En aquest punt s'estudiarà primer una definició de la resolució de problemes i després les estratègies de la seva resolució. Seguidament, tindrà lloc l'exposició de propostes sobre la resolució de problemes i s'acabarà amb les etapes temporals de les estratègies de resolució dels mateixos.

#### **3.2.1 Definició de resolució de problemes**

A continuació es definirà la resolució de problemes des de diferents perspectives: la primera contemplada com a generador de situacions; la segona contemplada com un context, una habilitat i un art; la tercera segons es consideri el resolutor o no; la quarta enfocada com a processament d'informació.

##### **3.2.1.1 La resolució de problemes com a generador d'una situació problemàtica**

Recordant la dicotomia exercici-problema, Abrantes i Serrazina (1996) plantegen una ampliació de perspectives on es comença a relacionar la resolució de problemes amb activitats com exploració de contextos, formulació-reformulació de problemes, interpretació-clarificació... sorgint així la idea de situació problemàtica (Borasi, 1986).

Abrantes i Serrazina (1996) es refereixen a la creació d'un ambient de resolució de problemes a l'aula i a allò que ells anomenen resolució de problemes com a ambient i com a naturalesa de les activitats d'aprenentatge. En aquest model de treball a l'aula la resolució de problemes ha d'esdevenir un context, i la classe de matemàtiques un lloc on totes les propostes de treball constitueixen situacions problemàtiques on cal explorar i fer despertar diverses formes de raonament i processos com experimentar, discutir, conjecturar, justificar... Abrantes i Serrazina parlen de la resolució de problemes com a organitzadora de l'aula, a la vegada com a objectiu, metodologia i contingut. En aquesta mateixa línia, Deulofeu (2000) afirma que s'ha d'intentar que les activitats matemàtiques proposades als alumnes siguin potencialment generadores d'un autèntic treball matemàtic, que potenciïn la interacció en l'alumne, que el predisposin a voler fer allò que se li proposa, que afavoreixin la discussió i el treball conjunt, per això totes les activitats proposades haurien de tenir dos components complementaris: l'acció i la reflexió.

### 3.2.1.2 La resolució de problemes: un context, una habilitat i un art

Stanic i Kilpatrick (1988) en una revisió històrica expressen que els problemes han ocupat un lloc central en les matemàtiques de l'escola des de l'antiguitat, però que la resolució de problemes no. El terme resolució de problemes havia englobat diferents punts de vista sobre què era l'educació, què eren les matemàtiques, i el perquè s'havien d'ensenyar les matemàtiques en general i la resolució de problemes en particular.

Stanic i Kilpatrick (1988) identifiquen tres temes principals recordant l'ús de la resolució de problemes com a tasques requerides de ser fetes. El primer tema es pot englobar sota la idea de resolució de problemes com un context. És on els problemes s'empren com vehicles al servei d'altres propòsits curriculars. Ells identifiquen cinc rols que els problemes juguen.

1. Com una justificació per ensenyar matemàtiques

Problemes relacionats amb experiències del món real incloses en el currículum per tal de convèncer els estudiants i als professors del valor de les matemàtiques.

2. Per donar una motivació específica

Els problemes són utilitzats sovint per introduir tòpics amb la idea que una vegada s'hagi après la lliçó que segueix, es podran resoldre tots els problemes d'aquell estil.

3. Com una recreació

Problemes recreatius que intenten ser engrescadors. Demostren que les matemàtiques poden ser divertides i que es poden trobar usos entretinguts.

4. Com una manera de desenvolupar noves habilitats

Els problemes seqüencials amb cura poden introduir a l'alumne en noves matèries i atorgar-li un context per discussions sobre tècniques de la matèria.

5. Com una pràctica

Els estudiants són ensenyats en una tècnica i després se'ls hi donen problemes per practicar fins que dominin la tècnica.

D'aquesta manera la resolució de problemes no se sol contemplar com un propòsit per sí mateix, però sí com a eina facilitadora per aconseguir altres propòsits.

El segon tema identificat per Stanic i Kilpatrick (1988) consisteix en contemplar la resolució de problemes com una habilitat. Aquest punt de vista té les seves arrels en el treball de Thorndike (Thorndike & Woodworth, 1901). Thorndike desacreditava la noció d'exercici mental, en el qual era assumit que les habilitats d'aprenentatge i raonament en les matemàtiques resultaria millorat raonant en altres disciplines. Si la resolució de problemes matemàtics era important no era perquè li feia a un millor resolutor de problemes, sinó perquè resoldre problemes de matemàtiques era valuós per sí mateix. Tal com indicaven Stanic i Kilpatrick (1988, 15) hi havia distincions entre resoldre problemes rutinaris i no rutinaris. Resoldre problemes no rutinaris era una habilitat de nivell superior per a ser adquirida després d'haver assolit l'habilitat per resoldre problemes rutinaris (la qual a la seva vegada era aconseguida pels estudiants després d'haver après conceptes i habilitats matemàtiques bàsiques). Típicament, les tècniques de resolució de problemes són ensenyades com una matèria amb problemes pràctics assignats per tal de dominar-les. Després d'haver rebut aquesta instrucció en resolució de problemes (sovint ensenyada a part del currículum), el bagatge matemàtic

dels estudiants conté tant les habilitats de resolució de problemes com els procediments i fets que ells han estudiat.

El tercer tema identificat per Stanic i Kilpatrick (1988) és la resolució de problemes com un art. Aquest punt de vista manifesta que la resolució de problemes és el cor de les matemàtiques, són les matemàtiques mateixes (Halmos, 1980).

### 3.2.1.3 La resolució de problemes segons es consideri el resolutor o no

Un dels focus més importants sobre la instrucció matemàtica i la resolució de problemes se centra en Polya. La comunitat matemàtica d'educació es familiaritza amb el treball de Polya (1945) en el seu volum introductori de *How to Solve It*, en el qual introdueix el terme d'heurística moderna per tal de descriure l'art de resoldre problemes, i a través de les seves consegüents elaboracions sobre el tema en els dos volums *Mathematics and Plausible Reasoning* (Polya, 1954) i *Mathematical Discovery* (Polya, 1981). Polya discuteix que les matemàtiques són semblants a les ciències físiques en la seva dependència en endevinar, ser perspicaç i descobrir. Per a un matemàtic actiu en la recerca i investigació, les matemàtiques podrien aparèixer a vegades com un joc on s'ha d'endevinar. S'ha d'endevinar quin teorema matemàtic és abans de demostrar-lo, s'ha d'endevinar la idea de la demostració abans de portar-la a terme amb tots els detalls. Per Polya, l'epistemologia matemàtica i la pedagogia matemàtica estan profundament lligades. Els estudiants desenvolupen el seu sentit matemàtic amb les seves experiències en matemàtiques (majoritàriament a la classe). D'aquí se segueix que la classe de matemàtiques ha de reflectir aquest sentit matemàtic com una activitat amb sentit, els estudiants han d'entendre i usar les matemàtiques en camins significatius.

Els cursos sobre resolució de problemes pretenen:

- Entrenar els estudiants per pensar creativament i desenvolupar la seva habilitat de resolució de problemes (usualment centrant-se en estratègies heurístiques).
- Preparar estudiants per competicions de problemes com els exàmens de Putnam, olimpíades nacionals o internacionals.
- Aprendre tècniques estàndard en dominis particulars.
- Intentar induir al pensament crític o al raonament analític.

Les definicions històriques independents del resolutor són un reflex de la tradició grega i del segle XVII i XVIII (Puig, 1996; Lorenzo, 1996). Per la seva banda, Polya (1945) dona una de les clàssiques definicions de resoldre un problema afirmant que resoldre un problema consisteix a trobar un camí allà on prèviament no es coneixia, trobar una sortida per a una situació difícil per vèncer un obstacle, assolir un objectiu desitjat, que no pot ser immediatament assolit per mitjans adequats. Ens presenta una idea en certa manera absoluta de problema, no dependent del resolutor. Anys després, Polya (1981) incorpora la presència del resolutor dient que un desig pot o no comportar un problema. Si el desig suggereix a la ment de manera immediata, sense dificultat, una acció òbvia que permet aconseguir l'objecte desitjat, no hi ha problema; altrament, es té un problema. En conseqüència, tenir un problema significa buscar de forma conscient alguna acció apropiada per aconseguir una fi clarament concebuda, però que no es pot aconseguir de forma immediata. Resoldre un problema significa trobar aquesta acció.

Una de les definicions més clàssiques és la que dona Brownell l'any 1942 dient que la resolució de problemes es refereix tan sols a tasques conceptuals o perceptives, la naturalesa de les quals el subjecte és capaç de comprendre gràcies a la seva naturalesa original, a un aprenentatge previ, o a l'organització de la tasca, però per a les quals, en aquell moment, desconeix qualsevol camí directe de realització. El subjecte experimenta



perplexitat davant de la situació problemàtica, però no experimenta total confusió. La resolució del problema resulta ser el procés mitjançant el qual el subjecte es desprèn del seu problema. (Brownell, 1942)

Puig i Cerdán (1988) defineixen la resolució d'un problema com l'activitat mental desplegada pel resolutor des del moment en què se li presenta un problema, assumeix que ho és i vol resoldre'l, fins que dona per acabada la tasca. En aquesta definició convé centrar l'èmfasi en els mateixos aspectes: en primer lloc, un problema només es pot considerar com a tal en la manera en la qual l'individu implicat (el resolutor) l'accepti com a problema, i en segon lloc, donar per acabada la tasca no implica necessàriament haver obtingut la solució.

Per a Chi i Glaser (1986) es troben dos factors importants que influeixen en la resolució dels problemes: la naturalesa de la tasca i el tipus de coneixements que aporten al problema les persones. Però continuen estant excloses les consideracions que fan referència al professorat i al context en el qual són proposades les tasques.

Schoenfeld (1992) proposa un pas més enllà, i considera que el principal objectiu de la resolució de problemes és pensar matemàticament. Primerament cal col·locar processos característics de l'activitat matemàtica com formular i provar conjetures, argumentar, usar procediments de naturalesa metacognitiva... Aquest plantejament potencia el terme investigacions sobre el qual Ernest (1991) dona una metàfora: resoldre un problema és trobar un camí cap a una destinació determinada; tanmateix en una investigació, el que constitueix l'objectiu és el viatge, i no la destinació.

El pensar és sovint considerat com un sinònim de solucionar problemes, segons Garret (1988) des d'una perspectiva cognitivista. Però Garret prefereix parlar d'enfrontar-se a problemes enlloc de resoldre problemes perquè ho considera independent de l'acte final que és el trobar la solució. Pensant d'aquesta manera es presenta la identificació de resolució de problemes com pensament creatiu, un pas més enllà del pensament productiu (només trobar la solució).

#### **3.2.1.4 La resolució de problemes enfocat com a processament de la informació**

La resolució de problemes pot tractar-se des de l'enfocament del processament de la informació que considera que la resolució de problemes és una aptitud cognitiva complexa que caracteritza una de les activitats humanes més intel·ligents (Newell i Simon, 1972; Chi i Glaser, 1986). Definicions clàssiques des d'aquesta perspectiva són la de Hayes (1980) que expressa que sempre que hi ha una escletxa entre on un està en aquest moment i on un vol estar, i un no sap com trobar el camí per creuar-la (té un problema); la de Mayer (1983) que diu que qualsevol definició de problema hauria de considerar que una situació està actualment en un cert estat, però que es desitja que estigui en un altre estat, i que no hi ha una manera òbvia i directa de realitzar el canvi.

#### **3.2.2 Estratègies de resolució de problemes**

Un aspecte rellevant en la resolució de problemes són les anomenades estratègies de resolució de problemes, heurístics o, en paraules de Kilpatrick, els procediments de representació i transformació dels problemes. Carrillo (1996) considera que un heurístic és una insinuació o suggeriment general o estratègia, independent de qualsevol tòpic particular o matèria d'estudi, que ajuda al resolutor a aproximar-se i comprendre un problema, i endreçar eficientment els seus recursos per resoldre'l. L. Puig (1996, 45) fa una anàlisi clarificadora sobre els termes eina heurística, suggeriment heurístic i destresa amb potencial heurístic. Per a ell, buscar un problema relacionat és un

suggeriment en la mesura que assenyalava una direcció del treball però no es refereix a cap procediment concret per buscar o produir tal problema relacionat. Considerar un cas, no obstant, sí que es refereix a un procediment determinat que permet, a partir del problema que s'ha de resoldre, formular un problema relacionat. Aleshores és una eina heurística. Fer una taula ho anomena una destresa ja que no té el caràcter de transformació del problema.

Poden distingir-se dos tipus principals de resolució de problemes segons l'enfocament: a) segons l'enfocament d'assaig i error; b) segons l'enfocament de discerniment. El primer consisteix en la variació, aproximació i correcció aleatòries o sistemàtiques de respostes fins que sorgeix una variant encertada. El segon suposa una disposició cap al descobriment d'una relació significativa de mitjans – fins que fonamenta la resolució de problemes. Pot contenir la simple transposició d'un principi i haver après una situació nova però anàloga, o també pot contenir una reestructuració i integració cognoscitiva fonamentals de l'experiència prèvia i la present per ajustar-se a les demandes de la meta prescrita. La resolució de problemes per discerniment és un tipus d'aprenentatge significatiu per descobriment en què les condicions del problema i els objectes desitjats es relacionen intencionadament i substancialment amb l'estructura cognoscitiva existent.

La resolució de problemes a l'aula també constitueix una forma de descobriment però guiat o reglat. Molt del que sembla ser resolució significativa de problemes consisteix en un aprenentatge repetitiu a partir d'un descobriment (els problemes tipus). És correcte solucionar problemes identificant-los amb exemples d'una classe més gran a la que s'apliquen certs principis o operacions per comprendre'ls. Però el perill és que en la majoria dels casos només es memoritza i s'aplica de manera mecànica les fórmules.

### **3.2.3 Propostes sobre la resolució de problemes**

Els objectes sobre els que se centren podrien ser els següents: la resolució d'un problema de forma fins i tot aïllada, la resolució de problemes en el currículum de matemàtiques, considerant-la tant objecte com instrument d'aprenentatge, i la planificació general de l'àrea de matemàtiques en l'etapa de secundària obligatòria.

Els objectes de les creences genèriques sobre les que es poden centrar els esforços de modificació podrien ser:

- Creences entorn a les matemàtiques, en particular en relació al fet que la resolució de problemes és un acte creatiu.
- Creences entorn a les finalitats de la resolució de problemes i els aspectes que incideixen a la seva millora, en particular a les relacionades amb millorar la capacitat de resoldre problemes tenint presents l'esforç i la perseverança.
- Creences entorn al resolutor, com que tothom pot abordar la resolució de problemes.
- Creences entorn al problema i al procés de resolució de problemes, en relació al fet que, a l'hora d'abordar un problema, s'ha d'adoptar una actitud oberta, dedicant el temps necessari a familiaritzar-se i a buscar diverses estratègies. Quan es porta un pla se segueix un procés de recerca, de tantejos guiats per la intuïció, ja que el procés de revisió és molt important.

Hi ha tres aspectes que juguen un paper distingit en el procés de formació de les creences: les característiques dels problemes adequats, l'organització de la tasca i el paper del professorat. A continuació es comentaran. També s'explicarà el perill existent de reduir el paper de la resolució de problemes a l'aula a aspectes mecanicistes i

finalment, s'explicarà la resolució de problemes en el currículum com objecte i com eina d'aprenentatge.

### 3.2.3.1 Característiques dels problemes adequats

El primer nivell de decisió del professorat fa referència a la selecció o disseny dels problemes proposats. Podrien apuntar-se dues observacions:

- La naturalesa del problema no és intrínseca: depèn per suposat dels elements del problema o tasca, però també del resolutor (i del nivell de dificultat i implicació de coneixements, metaconeixements i afectes), del professorat (i del paper que li atorga) i finalment depèn del context en el qual és proposat (del nivell educatiu, del moment, de la situació en relació a l'aprenentatge de conceptes i procediments, del temps disponible, de les característiques de la proposta de treball...).
- Un problema es convertirà en millor problema quant més ampli sigui el rang de finalitats instructives que pugui abraçar i tindrà una riquesa més gran quan pugui ser utilitzat en cadascuna d'elles.

En relació amb l'enunciat i a la situació plantejada, el conjunt de problemes hauria de respondre a tipologies diverses. Per tipologies diverses es fa referència al fet que han de moure's en camps diversos de les matemàtiques, no exclusivament aritmètics. També han d'abraçar distints formats de l'enunciat, verbals, gràfics, icònics, esquemàtics, etc., amb la fi d'evitar l'associació problema de matemàtiques amb qualsevol enunciat verbal.

Es pot incidir en les creences dels resolutors sobre ells mateixos, sobre la seva capacitat per resoldre problemes. En particular, les característiques de les situacions haurien de moure's en el camp de les experiències conegudes per l'alumnat, i així ser accessibles en aquest sentit. Però haurien de ser-ho també en un altre sentit: el bagatge de coneixements i estratègies necessàries per abordar-los hauria d'estar a l'abast de l'alumne. No convé que apareguin totes les dificultats del problema simultàniament: les situacions plantejades no haurien de bloquejar d'entrada.

Des d'una perspectiva tant didàctica com epistemològica, els problemes haurien de ser tasques enriquidores, engrescadores, que captin l'interès dels alumnes i facilitin la seva implicació. Els problemes haurien de representar distintes temptatives que són reptes per a una majoria; són tasques que es presten a crear un ambient d'interrogació i raonament, d'intercanvi i discussió.

### 3.2.3.2 Organització de la tasca

L'organització de la tasca contempla totes les decisions preses pel professorat normalment relacionades amb la gestió de la feina a l'aula, el clima que es genera en ella, les relacions interpersonals que s'estableixen... Quant als aspectes que envolten aquest tipus de decisions, se'n destaquen quatre per ser especials en el procés de formació de les creences i per la seva capacitat per modificar-les: el treball en petits grups, la comunicació en general, el procés de reflexió sobre la resolució del problema i el desenvolupament de la creativitat a través de la resolució de problemes. No es pot admetre que les matemàtiques no es parlen, s'escriuen, i que les matemàtiques no es discuteixen, s'accepten.

Per afavorir aquesta comunicació és necessari anar introduint un vocabulari bàsic que permeti parlar de forma precisa, clara i correcta sobre aspectes no tan sols propis dels coneixements matemàtics sinó també de la feina matemàtica i dels aspectes afectius que

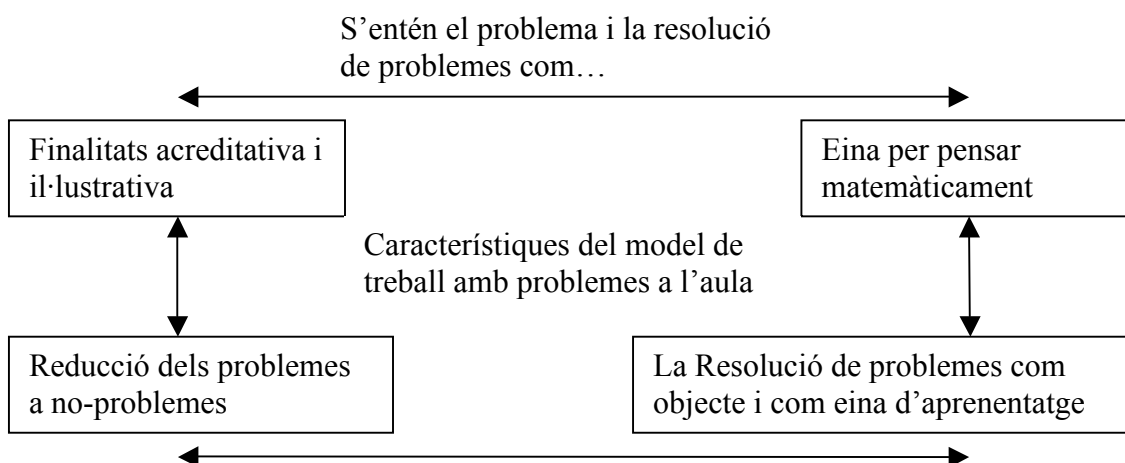
envolta. També és necessari impedir judicis ràpids i evitar que es desestimïn idees, propiciant l'anàlisi de bloquejos, demanant generalització, etc.

### 3.2.3.3 Paper del professorat

El professorat desenvolupa un gran paper en el procés de formació de les creences, i en particular pel paper normatiu com de mediador d'aprenentatge. El professorat hauria d'adoptar un model de conducta metacognitiva: hauria d'orientar i moderar més que guiar per un camí, preguntar, incitar i qüestionar per fer reflexionar més que aportar respostes, animar i afavorir més que exigir, dubtar, reflexionar, explorar, experimentar, conjecturar... més que informar.

El professor hauria de ser capaç de disposar i activar un ampli bagatge de recursos i processos matemàtics propis i de reconèixer i potenciar els valors aliens (un gran matemàtic), capaç de decidir el millor moment de la seva intervenció i la manera de fer-ho (un gran pedagog) i capaç de motivar, donar confiança, i en general de canalitzar la càrrega afectiva que amb relació a l'activitat matemàtica pot implicar a l'alumnat, apart per suposat, de controlar la seva pròpia càrrega emocional. Aquesta seria la definició del professorat que es va creant amb la pròpia experiència, amb l'adquisició de confiança i seguretat en sí mateix i en la seva professió. Sota aquest model de treball en resolució de problemes es pot ajudar l'alumnat a prendre consciència dels seus propis processos i creences i dels processos i alternatives alienes, a reproduir un ambient d'interrogació, de desafiament, de reflexió; a plantejar-se la pròpia formulació de problemes; a considerar la resolució de problemes des de perspectives i interessos múltiples; però en qualsevol cas a plantejar-se-la com una activitat oberta a tothom.

### 3.2.3.4 Perill de reduir el paper de la Resolució de Problemes a l'aula a aspectes mecanicistes



Quadre 3.2: Model de treball amb problemes a l'aula (Vila, Callejo; 2004)

Es plantegen dos eixos, en un es representen els sistemes de creences del professorat entorn a la resolució de problemes, i en l'altre, els models de treball amb problemes del mateix professorat. Més concretament, en un extrem se situen els sistemes de creences del professorat que tendeixen a considerar el problema com subsidiari dels continguts matemàtics, atorgant-li una finalitat acreditativa (eina per controlar el nivell d'aprenentatge de coneixements matemàtics) i una finalitat il·lustrativa (eina per il·lustrar, més que per aplicar, els distints coneixements que es van introduint); aquests sistemes es caracteritzen per tenir en comú el fet d'intentar reduir els problemes a neuroplasmes, i pertanyen a la visió d'ensenyar les matemàtiques interessades en els

continguts matemàtics, emfatitzant la seva aplicació. En l'altre extrem de l'eix se situarien els sistemes de creences del professorat que tendeixen a considerar el problema com una eina didàctica per afavorir el pensament matemàtic, relacionant-los amb models de treball que consideren la resolució de problemes tant un objecte com un instrument d'aprenentatge.

Els estudis sobre els sistemes de creences del professorat coincideixen en relacionar les finalitats acreditativa i il·lustrativa de la resolució de problemes i la seva subrogació a les tècniques matemàtiques, a sistemes de creences rígids i inadequats. Aquest model podria inscriure's en la tradició conductista de l'aprenentatge, segons la qual els alumnes aprenen per imitació de la conducta del professorat a través d'una seqüència de tasques jeràrquicament estructurades. Es considera que l'alumne aprèn per acumulació de conductes a imitar, i que el saber matemàtic consisteix en reproduir una sèrie de coneixements. Els diferents estudis relacionen aquest model de treball amb la formació de creences que consideren l'activitat de resolució de problemes centrada en una dialèctica de reconeixement i abandonament, o com procés d'execució d'uns procediments que prèviament s'han desxifrat de l'enunciat; també amb la creença que els problemes han de resoldre's segons aquells patrons estàndard en els que s'ha anat instruint, que els problemes sempre tenen una sola solució a la que s'arriba per una sola via; es fomenta la creença que amb una bona col·lecció de conceptes clars i de procediments operatius es pot resoldre qualsevol problema. S'estan entenent les matemàtiques com una disciplina exacta, lliure d'ambigüitats i d'interpretacions, amb un contingut estereotipat, amb poques possibilitats pel treball creatiu, predictibles, absolutes, fixes i lliures d'emocions.

S'hauria d'evitar donar la imatge que els problemes poden resoldre's per imitació de l'estil del professor, o que la capacitat resolutòria estigui ben definida de forma innata. No obstant, és conegut que la imitació de la conducta dels experts pot ajudar a millorar els processos de resolució de problemes, sempre que exterioritzin els seus processos metacognitius de presa de decisions i autoregulació (Schoenfeld, 1985a).

### **3.2.3.5 La Resolució de Problemes en el currículum com objecte i com eina d'aprenentatge**

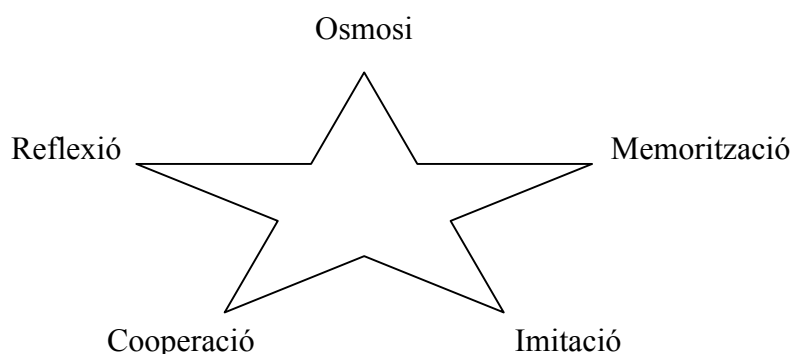
Es poden considerar dos punts de vista. El primer seria observar les influències que s'haurien d'evitar posant l'accent tant en les causes com en les repercussions. El segon seria les propostes que s'haurien de desenvolupar: la resolució de problemes com objecte d'estudi, i l'enfocament complementari, la resolució de problemes com instrument d'aprenentatge, en particular, a la creació d'un ambient de resolució de problemes. Dit d'una altra manera, els problemes es poden proposar als alumnes seguint diversos objectius com desenvolupar estratègies i processos generals o específics del pensament matemàtic, o motivar i fer significativa la introducció d'una noció. En el primer cas, la resolució de problemes és objecte d'aprenentatge i es parla d'aprendre a resoldre problemes o a pensar matemàticament. En el segon cas, la resolució de problemes és instrument o eina d'aprenentatge i es parla d'aprendre resolent problemes. Els objectius també guarden relació amb la seqüència didàctica: activitats d'introducció, de desenvolupament, de recapitulació o d'ampliació. (Vila, Callejo; 2004)

Per exemple, quan els problemes són activitats d'introducció d'una unitat d'aprenentatge, segueixen com a objectiu motivar l'aprenentatge d'un nou concepte a partir d'una situació problemàtica. Els alumnes han de prendre consciència que els

seus coneixements no els permetin donar una resposta completament satisfactòria; això és, l'objectiu és crear-los un conflicte cognitiu per introduir nous coneixements o despertar-los interrogants sobre ells. Seguidament s'exposaran quatre punts ben diferenciats: el primer aprendre a resoldre problemes, el segon aprendre a pensar matemàticament, el tercer la resolució de problemes com activitat d'investigació i el darrer aprendre resolent problemes.

### 3.2.3.5.1 Aprendre a resoldre problemes

L'aprenentatge de les matemàtiques pot focalitzar-se en transmetre als alumnes aquelles idees, estratègies, processos, actituds que s'han mostrat útils i eficaces per resoldre problemes. Les propostes per a aquest tipus d'aprenentatge barregen diferents elements. J. Kilpatrick (1985) ha sintetitzat aquests elements en cinc punts: osmosi, memorització, imitació, cooperació i reflexió.



Quadre 3.3: Elements que intervenen en l'aprenentatge de les matemàtiques (Kilpatrick, 1985)

Sobre l'osmosi es podria dir que els estudiants han d'aprendre a resoldre problemes, i per a això se'ls pot submergir en un ambient adequat perquè practiquin. Sobre la memorització es consideren els models basats en l'enfocament conductista, però no es pot utilitzar amb problemes en els que no s'apliquen els procediments ensenyats. La imitació és una forma d'ensenyar a analitzar les conductes i comportaments de models competents en resoldre problemes, però la resolució d'un problema és molt personal i es barregen preferències, capacitats i limitacions amb el model. Quant a la cooperació, els alumnes no han de ser només capaços d'observar i analitzar conductes competents per intentar imitar-les, sinó també d'observar i analitzar les dels seus propis companys per cooperar amb ells. Per últim, la reflexió s'aprèn practicant-la puntualment i global sobre tot allò que es fa.

Les diferents propostes concretes emfatitzen uns o altres aspectes. La del llibre *Problemas con pautas y números* (Shell Centre, 1993: 13), incideix en allò que s'anomena memorització quan es diu:

“Aquest mòdul posa l'èmfasi en una sèrie d'estratègies específiques que poden ajudar en aquella resolució de problemes, incloent les següents:

- intentar alguns casos senzills
- buscar un diagrama adequat
- organitzar sistemàticament
- fer una taula
- observar pautes
- buscar una regla general
- explicar per què funciona la regla
- comprovar amb regularitat”

Aquestes estratègies són destreses amb potencial heurístic i eines heurístiques que s'han de saber seleccionar, adaptar i combinar adequadament en cada problema. Aquesta proposta inclou també el treball en grup.

En el llibre *Pensar matemàticament* (Mason, Burton i Stacey, 1988, 9) s'insisteix en la reflexió i la pràctica.

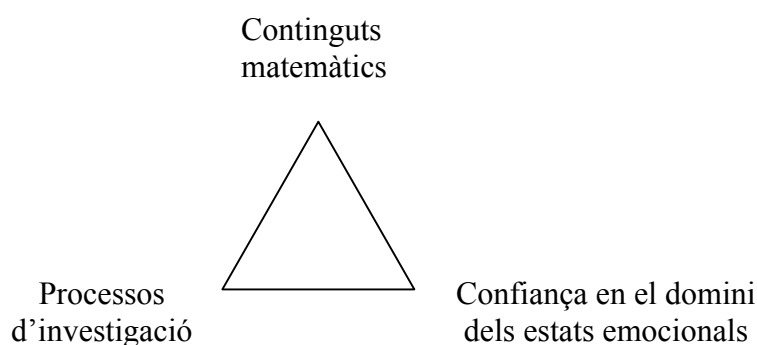
### 3.2.3.5.2 Aprendre a pensar matemàticament

Un autor que apunta la conveniència de parlar no tant d'ensenyar a resoldre problemes sinó més d'ensenyar a pensar matemàticament és A.H. Schoenfeld (1991b). Ho entén com modelitzar, simbolitzar, abstraure i aplicar idees matemàtiques a un ampli rang de situacions, gràcies a la disponibilitat d'eines que permeten abordar-les amb èxit. En aquest marc els problemes jugarien un paper essencial com a punt de partida de discussions matemàtiques. En aquesta línia, R. Douday (1986) afirma que un alumne té coneixements matemàtics quan és capaç d'utilitzar-los per resoldre certs problemes, que tenen o no indicacions en la seva formulació, i també quan és capaç d'interpretar els problemes o per plantejar qüestions a propòsit de les mateixes.

En aquest context, són els problemes els que juguen un paper essencial com a eina didàctica i, en particular, l'enunciat juga un paper destacat ja que a més de ser una correcció de la situació plantejada, és també la porta que permet la immersió. Així, si es pretén que el problema sigui una eina que afavoreixi l'estructuració del pensament matemàtic, aquest enunciat no haurà de jugar el paper de donar la pauta de resolució del problema, ni hauria de moure's en un context estandarditzat.

### 3.2.3.5.3 La resolució de problemes com activitat d'investigació

Mason, Burton i Stacey (1988) assumeixen que els factors que influeixen més donen l'efectivitat del raonament matemàtic. Aquests són per una banda el coneixement dels continguts matemàtics i en els altres dos vèrtexs d'un hipotètic triangle se situarien la competència en l'ús dels processos d'investigació matemàtica i la confiança en el domini dels estats emocionals i psicològics.



Quadre 3.4: Factors que influeixen en l'efectivitat de raonament matemàtic (Mason, Burton i Stacey, 1988).

Les idees més importants que s'han d'assumir per treballar sota aquest model són, respecte al professorat:

- No és tan important que el professorat proposi un problema com el fet que mantingui els alumnes en actitud de resoldre problemes.

- El pensament matemàtic es desenvolupa en una atmosfera d'interrogació, desafiament i reflexió, i per tant a l'aula han d'estar presents la particularització, la generalització, l'emissió de conjectures i una actitud de convèncer.
- El professorat ha de fer el mínim possible d'allò que els alumnes puguin fer sols.

Respecte a l'alumnat:

- Tothom pot començar.
- Els problemes més interessants per a la gent són aquells que hagin participat a la seva formulació o hagin enunciat o bé hagin reconegut com a problemes.

#### 3.2.3.5.4 Es pot aprendre resolent problemes. Introducció de conceptes

Una altra forma en què apareix la resolució de problemes en el currículum és com a mètode d'ensenyament, aprendre resolent problemes. Els problemes s'utilitzen per ajudar els alumnes a prendre consciència que els seus coneixements són insuficients per respondre les qüestions que se'ls plantegen i despertar-los així la motivació per incorporar nous coneixements, reestructurant els que ja tenen.

Les matemàtiques no s'aprenen per transmissió directa del que s'explica a classe o del que es llegeix en els llibres de text, sinó que s'aprenen en interacció amb situacions problemàtiques i amb altres subjectes, que obliguen l'alumne a anar modificant la seva estructura cognitiva mitjançant anar experimentant, fent-se preguntes, particularitzant situacions, generalitzant resultats, trobant contraexemples... Aquests processos requereixen predisposició i intencionalitat per part d'aquell que aprèn. La reflexió sobre l'experiència, sobre la pròpia activitat matemàtica i sobre la d'altres, està també a la base del seu aprenentatge. Com assenyalava el Disseny Curricular Bàsic de matemàtiques de la ESO, la construcció del coneixement matemàtic és inseparable de l'activitat concreta sobre els objectes, de la intuïció i de les aproximacions inductives imposades per la realització de tasques i la resolució de problemes particulars (MEC, 1989).

Fases	Intervenció del professor	Treball dels alumnes
Fase d'acció	Proposa el problema	Els alumnes treballen individualment o en grup
Fase de formulació	El professor anima, estimula, desbloqueja..., però ha d'evitar intervenir sobre el contingut	Els alumnes expliquen oralment o per escrit com han resolt el problema i la solució trobada
Fase de validació	El professor modera les intervencions dels alumnes, però ha d'evitar intervenir sobre el contingut	Els alumnes han de donar arguments que recolzin la validesa de la seva solució tractant de convèncer els seus companys
Fase d'institucionalització	El professor ha d'identificar el nou saber i saber fer i precisar les convencions. Es tracta d'homogeneïtzar els coneixements de la classe i de precisar quins dels sabers construïts s'han de retenir i de quina forma	Els alumnes reestructuren els seus coneixements
Fase d'exercitació seguida d'una avaluació	El professor ajuda als alumnes a familiaritzar-se amb els nous coneixements, a fer-los funcionar en diferents situacions perquè prenguin consciència del seu camp d'aplicació	Resolen nous problemes i apliquen els nous coneixements

Quadre 3.5: Posada en pràctica de la resolució de problemes (Brousseau, 1998).



### 3.2.4 Etapes temporals de les estratègies de la resolució de problemes

Les successives etapes temporals del pensament les plantejà Dewey en el 1910:

1. Un estat de dubte, de frustració o de coneixement de la dificultat.
2. Un intent per identificar el problema, la meta a aconseguir.
3. Relacionar les proposicions de plantejament del problema amb l'estructura cognoscitiva, activant les idees anteriors pertinents i les solucions donades a problemes anteriors que, al mateix temps, són reorganitzades en forma de proposició de resolució de problemes o hipòtesis.
4. Comprovació successiva de les hipòtesis i replantejament del problema si és necessari.
5. Incorporar la solució encertada a l'estructura cognoscitiva (comprendre-la) i després aplicar-la tant al problema present com a altres exemplars del mateix problema.

No tots els casos de resolució de problemes segueixen totes les etapes i aquest ordre. El pensament creatiu pot prendre dreceres i escurçar molts passos. No hi ha cap enfocament per a resoldre problemes que sigui el característic dels alumnes en una fase determinada del desenvolupament intel·lectual, enfocament per assaig i error, i enfocament per discerniment; ambdós es troben en tots els nivells d'edat. L'elecció depèn de la dificultat intrínseca del problema, de l'experiència prèvia i del domini de l'individu sobre l'àrea del problema. Els alumnes més petits aprofiten menys els indicis i són menys capaços de generalitzar o transposar solucions a situacions més abstractes i remotes.

Per a la resolució de problemes, els alumnes es poden entrenar en certes destreses seguint les indicacions generals següents:

1. Formular i delimitar el problema abans de resoldre'l.
2. Evitar la concentració de l'atenció en un sol aspecte del problema.
3. Anar més enllà d'allò que és evident.
4. Adonar-se de la possibilitat que succeeixin, fixació funcional i transferència negativa per a evitar-les.
5. Abandonar les guies infructuoses i explorar altres possibilitats.
6. Dubtar sobre la confiabilitat i representabilitat de les dades.
7. Fer explícites les suposicions de qualsevol conjunt de premisses.
8. Distingir clarament entre dades i inferències.
9. Utilitzar la informació provinent de les hipòtesis descartades.
10. Acceptar amb prudència les conclusions que concorden millor amb les pròpies opinions.

### 3.3. Fases de la resolució de problemes

L'experiència personal de treballar amb estudiants de totes les edats ha posat de manifest que es pot millorar el raonament matemàtic:

1. Atacant els problemes acuradament.
2. Reflexionant sobre l'experiència acumulada.
3. Connectant les impressions rebudes amb l'acció.
4. Estudiant amb molta cura el procés de resolució dels problemes.

Probablement, la lliçó més important que s'ha d'aprendre és que estar travat o bloquejat en un problema és una situació molt digna, que constitueix una part essencial del procés de millora del raonament. No obstant, per treure-li el màxim partit possible a la situació de trobar-se travat, no basta amb pensar uns minuts i després seguir llegint. Al contrari, s'ha de prendre el temps necessari per reflexionar detalladament sobre el problema, i

seguir llegint fins haver-se convençut que s'han provat totes les sortides possibles. El plantejament suggerit es recolza en cinc idees bàsiques:

1. Un mateix tot sol pot pensar matemàticament.
2. El raonament matemàtic pot millorar-se per la pràctica unida a la reflexió.
3. El raonament matemàtic ve motivat per una situació en la qual es barregen contradicció, tensió i sorpresa.
4. El raonament matemàtic es mou en una atmosfera que té per ingredients principals la pregunta, el repte i la reflexió.
5. El raonament de tipus matemàtic ajudarà a entendre's millor a un mateix i al món que l'envolta.

Donada la importància que té doncs treballar els problemes en matemàtiques, cal investigar i estudiar el procés de resolució d'un problema. Es pot dividir en tres fases: abordatge, atac i revisió. El pas d'una fase a una altra fase correspon a un canvi de pensament sobre el problema, i reflecteix el progrés que s'està o no aconseguint. La fase d'atac només pot dur-se a terme si s'ha plantejat satisfactòriament el problema, i si s'ha dedicat el temps necessari a aprendre de l'experiència, revisant els moments clau del raonament. De fet, si es fila més prim, un altre possible model per a treballar la resolució de problemes podria contemplar una fase més, encara que en essència són el mateix. Aquests quatre passos podrien ser els següents:

1. Familiaritzar-se amb el problema tractant d'entendre a fons la situació, amb pau i tranquil·litat, i jugant amb ella, emmarcar-la, tractant de determinar l'aire del problema, perdent-li la por.
2. Fer una recerca d'estratègies començant per allò més fàcil, experimentant, fent un esquema, una figura, un diagrama, escollint un llenguatge adequat, una notació apropiada o buscant un problema semblant per ajudar-se. També és pot fer inducció, o suposar el problema resolt i veure què passa, o suposar el contrari del que es proposa i veure les conclusions.
3. Portar endavant l'estratègia seleccionant les millors idees que s'hagin ocorregut a la fase anterior i actuar amb flexibilitat, no avorrir-se amb facilitat i no entossudir-se amb una idea.
4. Revisar el procés i extraure'n conclusions tot examinant a fons el camí que s'ha seguit, tractant d'entendre el funcionament, mirant si es troba un camí més simple, mirant fins a on arriba el mètode, i reflexionant sobre el propi procés de pensament i extraure conseqüències per al futur.

Durant el segle XX molts autors es plantejaren quantes fases tenia la resolució de problemes. Les versions més importants es recullen en el primer punt que segueix. També segueixen quatre punts més que recullen les quatre fases que proposà Polya (1945) les quals s'han pres com a bàsiques en el present treball: abordatge, disseny d'un pla, execució del pla i revisió. Més concretament, la primera i la quarta són objecte d'estudi en la nostra investigació.

### 3.3.1 Revisió històrica

Dewey (1910) descriu les següents fases en el procés de resolució d'un problema real qualsevol: identificació de la situació problemàtica; definició precisa del problema; anàlisi mitjans-finalitat, pla de resolució; assumpció de les conseqüències; avaluació de la solució, supervisió, generalització.

Més tard, Wallas (1926) descrivia les quatre etapes de l'acte creatiu: familiarització, incubació, inspiració i verificació, igual com feia Poincaré que anomenà il·luminació la

tercera fase. El famós matemàtic francès explicà aquestes fases en una conferència a París el 1903 davant de la Societat Psicològica.

Polya (1945) descriu les següents quatre fases en la resolució d'un problema matemàtic: comprensió del problema, disseny d'un pla, execució del pla, verificació de la solució obtinguda. Aquesta descripció és bàsicament introspectiva, que descriu les accions desenvolupades per un resolutor ideal, o sigui aquell resolutor que sempre avança directament cap a la solució final del problema, sense necessitat d'abandonar o de refer cap camí iniciat.

Mason, Burton i Stacey (1982) descriuen el procés de resolució de problemes donant importància cabdal a allò que se sent: els estats afectius, d'ànim, emocionals... Fa referència a uns processos (particularització, generalització, conjeturació) a unes fases (abordatge, atac, revisió) i a uns estats, i no és tant un model descriptiu o analític sinó un model d'ajuda instruccional (Callejo, 1994).

Schoenfeld (1985a) descriu minuciosament les conductes i accions desenvolupades per subjectes reals. Indica que no es troben fases perfectes, o en altres paraules que les fases no tenen necessàriament un caràcter lineal. Observa les següents distincions: anàlisi i comprensió, disseny-planificació, exploració, execució i verificació.

Carrillo (1996) manifesta la idea que no hi ha fases perfectes i el nucli més important de la qüestió no està tant en l'etiquetatge com en la concepció de la provisionalitat de l'estat en què es troba el resolutor en relació amb les fases del problema. Concep les fases com estats pels quals es passa i als quals es pot tornar al llarg del procés de resolució.

### 3.3.2 Abordatge

Resulta necessari abans de començar a treballar en una direcció determinada familiaritzar-se a fons amb el problema, amb pau. Ningú espera que es resolgui a cop d'ull, i si hi hagués algú, millor que tingui paciència, cadascú té el seu ritme. Els més lents solen ser els més profunds.

L'abordatge comença quan un s'enfronta al problema. Les línies a seguir són molt clares: un ha de fer-se amb el problema de dues maneres distintes; adonant-se de la informació que es dóna, i determinant què és el que es pregunta realment. Així, resulta útil estructurar la feina en la fase d'abordatge responnent a les tres preguntes següents: Què és el que sé? Què és el que vull? Què puc usar?

Mason, Burton i Stacey (1982) entenen la fase d'abordatge com tota aquella activitat encaminada a

- familiaritzar-se, comprendre i assimilar el missatge
- aclarir els propòsits fites i tipus de respostes que s'han de produir
- seleccionar, repassar i reposar idees, coneixements... que de forma immediata vénen al cap a mesura que s'entra en matèria

Segons aquests autors, en aquesta fase es poden desenvolupar algunes de les següents accions: organitzar la informació, ampliar la informació, elaborar i contrastar conjetures, definir termes i relacions, introduir una representació o una notació...

Aquesta fase, en certa manera, equivaldria a les fases d'Identificació, Comprensió, Planificació i Exploració (parcialment doncs només es prenen les primeres decisions)

que descriu amb detall Carrillo (1996). Aquesta part és precisament un dels objectes d'estudi del present treball.

### 3.3.3 Disseny d'un pla

En aquest punt es tractaran de manera distingida les conjectures doncs són bàsiques per a l'elaboració d'un pla. Després s'estudiarà la recerca d'estratègies diverses.

#### 3.3.3.1 Fent conjectures

Una conjectura és una afirmació que sembla raonable, però que la seva veracitat no ha estat demostrada. Un cop s'ha fixat una idea, és difícil canviar-la. Una part de l'art de fer conjectures consisteix a estar obert a noves interpretacions que sorgeixen insospitadament en allò que, d'una altra forma, podria semblar un context ben conegut. Es necessita una gran dosi de confiança i valentia. Si els intents són tímids, sense força de voluntat per posar alguna cosa a prova, refutar-ho o modificar-ho, un no serà capaç de desenvolupar tot el potencial del raonament.

Les conjectures són com papallones. Quan se'n veu una que vola, sol haver-n'hi moltes més al voltant. Segons van apareixent, cadascuna distreu l'atenció de l'anterior i això fa que sigui fàcil perdre el fil. Quan comencen a presentar-se atropelladament, és millor intentar caçar-les en unes poques paraules, de manera que es pugui tornar a elles més tard.

Les conjectures formen la columna vertebral del raonament matemàtic: es pensa que una certa propietat ha de ser certa, i una conjectura sobre ella sol començar com un cert sentiment rondant en l'obscuritat, en el fons de la ment. Gradualment, va sortint a la superfície en intentar exposar-lo de la forma més clara possible perquè pugui sotmetre's a la clara llum de la investigació. Si es descobreix que és falsa, es modifica o s'abandona. En canvi, si es pot justificar convincentment, aleshores passa a ocupar un lloc en el conjunt de conjectures i justificacions que podran anar constituint finalment la resolució.

En un problema més o menys indeterminat, una conjectura és útil per fixar l'atenció: el formular amb claredat una idea intuïda només vagament li dona a la ment quelcom concret per examinar amb esperit crític. Introduir símbols és una tècnica molt potent per augmentar la quantitat d'informació donada per una conjectura, mantenint-la al mateix temps encara llegible. Cada símbol que s'utilitzi ha d'estar clarament especificat, i ha de tenir-se molta cura per evitar ambigüitats. Sempre és bo comprovar cada afirmació simbòlica amb casos numèrics concrets, abans d'utilitzar-la. Això és també un bon costum quan un no se sent a gust amb els símbols: s'ha de referir amb freqüència a exemples numèrics i interpretar els enunciatos en aquells casos.

Sembla que les conjectures es produeixen com a resultat de dues activitats fonamentals. Particularitzar, probablement la font més usual. L'altre mètode és el d'analogia, que és en realitat una forma de generalització (freqüentment la semblança és només parcial, encara així resulta molt útil per suggerir conjectures i enfocaments alternatius del problema). El procés de fer conjectures depèn del fet que sigui capaç de reconèixer una llei o una analogia, o, en altres paraules, de ser capaç de fer una generalització. Trobar una llei pot ser en darrer cas un acte creatiu fora del propi control directe, però, com succeeix amb tots els processos creatius, es pot fer una gran quantitat de feina bàsica per afavorir la intuïció. Un suggeriment obvi és el de fer molts exemples, donat que ofereixen més informació, i una altra oportunitat per fer-se una idea de la situació en introduir-se en ella una vegada més. Una altra eina important és la de reorganitzar la

informació que s'ha obtingut, el que pot significar només un canvi en la forma d'escriure-la, o pot requerir també una reorganització del propi raonament. La generalització requereix concentrar-se en aspectes comuns a molts exemples, i en ignorar, en canvi, altres aspectes. No basta amb fer molts exemples i després esperar i preguntar-se què és el que tenen en comú. Per ser creatiu es requereix trobar-se realment immers i imbuït en els exemples, de forma que quasi li parlin a un. La potència de la generalització en matemàtiques es pot augmentar tant amb la pràctica, com enfrontant-se a problemes oberts. Els dos camins principals són:

- Desenvolupar una espècie d'actitud d'expectativa d'una llei i preparar-se per realitzar la seva recerca activa
- Anar elaborant el coneixement i l'experiència matemàtica

### 3.3.3.2 Recerca d'estratègies diverses

La segona fase del procés d'enfrontament amb un problema consisteix en tractar de determinar unes quantes estratègies concretes per atacar-lo. No es tracta encara de dur a terme aquests plans d'atac, sinó de detectar diferents formes, si és possible, d'abordar la qüestió. Procedint amb interès i sense presses se'n poden trobar diverses. Si un es llança a realitzar la primera que se li acudeix, es podria descobrir que no era la millor que es podia haver seguit. En aquesta etapa s'han de dissenyar unes quantes estratègies possibles, sense dur-les a terme. Després ja s'escollirà la més apropiada.

Unes quantes normes generals que permeten construir diverses estratègies en la resolució de problemes són les que segueixen:

#### A) Començar per allò més fàcil

De vegades un problema resulta difícil per les seves dimensions i per presentar massa elements. Altres vegades el problema, vist en el seu conjunt, resulta complicat i inabordable. Per començar se'n pot escollir una part que sembli més simple. La simplificació d'un problema es pot aconseguir no només per reducció de les seves dimensions, sinó també afegint alguna condició addicional que no estigui a l'enunciat proposat i que el fa més assequible. Fins i tot encara que sembli al principi que la simplificació sigui massa dràstica, es pot comprovar amb freqüència com el seu ajut és molt efectiu.

#### B) Experimentar

Les propietats generals d'un conjunt de nombres, figures, objectes en general, s'esclareixen quan s'observa la presència d'elles en casos particulars. Per això, la forma d'esbrinar si una certa propietat és comuna a molts elements consisteix en experimentar amb molts d'ells. L'experimentació i l'observació són tècniques molt fructíferes per al descobriment i per a la resolució de problemes. De l'observació sorgeix una conjectura. La conjectura permet predir com serà la situació per a un nombre més gran. Se segueix experimentant, és a dir, es contrasta la conjectura. Així es comprova que se segueix verificant, o que s'ha de rebutjar, perquè ja no es compleix. Si aquest contrast resulta favorable a la conjectura, vindrà després la tasca de donar la raó que sempre, és a dir, per a qualsevol número succeirà el que la conjectura afirma.

#### C) Fer un esquema, una figura, un diagrama

És aconsellable a fi de trobar bones idees que li serveixin a un per resoldre el problema que s'esquematitzi i dibuixi els elements que apareixen en la situació que s'estudia.

#### D) Escollir un llenguatge adequat, una notació apropiada

Una mateixa situació pot abordar-se amb diferents eines mentals, però normalment n'hi ha una de més efectiva.

#### E) Buscar un problema semblant

A mesura que s'adquireix experiència amb els problemes, en força casos es poden trobar situacions que s'assemblen a la que es proposen. El fet de recordar situacions semblants pot proporcionar un principi de confiança. En fer-ho, probablement sorgiran procediments d'atac d'aquest tipus de problemes que facilitaran estratègies vàlides pel que es treballa en qüestió.

#### F) Inducció

La inducció matemàtica és un dels mètodes de demostració més freqüents en alguns camps de la matemàtica. Consisteix en observar que es compleix una propietat per al primer cas, i suposar que es compleix per a qualsevol cas, i aleshores comprovar que es compleix per al cas següent. Hi ha dues coses importants que un s'ha d'assegurar: 1) Si  $h$  té la propietat  $P$ , aleshores  $h+1$  té la propietat  $P$ ; 2) El nombre 1 (o pot ser 30) té la propietat  $P$ .

#### G) Suposar el problema resolt

Una tècnica molt comú i fèrtil del pensament matemàtic consisteix en suposar el problema resolt. Les condicions del problema, l'enunciat, donen a conèixer uns quants detalls de la situació però no el quadre en el seu conjunt. En imaginar el problema resolt, de forma pràctica apareixen les dades més properes al que es busca i més fàcilment es trobarà el camí des d'on s'hi és fins a on es vol arribar.

#### H) Suposar que no

És un procés de pensament molt usual en la resolució de problemes. Pot ser a través d'una sèrie d'experiments s'ha arribat a la conjectura que es verifica una certa situació  $P$ . Es vol demostrar que la conjectura  $P$  és certa. Es parteix de  $\text{no-}P$  i s'analitza què es dedueix a partir d'aquesta suposició, tractant d'arribar a una contradicció amb algun fet, principi, teorema o hipòtesi que es dona per certa. Si s'aconsegueix, s'ha acabat.

### 3.3.4 Execució del pla

Quan s'executa el pla cal dur a terme de manera conscient i amb esperança per no abandonar abans d'hora la pròpia estratègia. També és necessària una justificació i un convenciment del que s'està fent. A continuació s'explicaran aquests dos punts.

#### 3.3.4.1 Dur a terme la pròpia estratègia

Després de les fases de familiaritzar-se i de recerca d'estratègies sembla que ha arribat el moment de la realització, de posar a funcionar alguna de les estratègies que s'han pensat. Quan es té un problema de naturalesa senzilla, resultarà força clar que alguna de les estratègies condueixi amb seguretat cap a la solució del problema. Però quan el problema és de naturalesa difícil, encara després d'haver dedicat temps a la preparació del camí a seguir, es pot creure fortament que cap de les estratègies que es tenen pot dur a la solució. Aquest pot ser el moment de la incubació. Tradicionalment tot procés creatiu (i la resolució de problemes ho és) s'ha analitzat en quatre etapes importants que són la preparació, la incubació, la il·luminació, i la verificació. La primera i la última d'aquestes etapes, la preparació i la verificació corresponen al treball conscient que es realitza i que admet una certa estructuració sistemàtica. La incubació, així com la il·luminació o inspiració que s'hi espera al darrera, són el resultat de la intensa activitat subconscient que sempre acompanya.

Les formes possibles de propiciar aquesta comunicació, la incubació i la inspiració, no es deixen estructurar amb regles, molt menys que la resta de l'activitat creativa. Però el que sí s'ha de propiciar activament és el convenciment pràctic que l'activitat subconscient pot ser, i de fet és en tothom un magnífic col·laborador en la resolució de problemes intricats. No és convenient doblegar-se davant qualsevol dificultat imprevista que pugui sorgir i que tal vegada és fàcilment solucionable, però tampoc un ha d'entossudir-se a seguir la mateixa línia que sembla que cada cap s'embolica més. També és important no accontentar-se amb solucions a mitges; tal actitud és un engany que no condueix a res bo.

#### **3.3.4.2 Justificació i convenciment**

En aquesta etapa es tracten dues activitats diferents: buscar el perquè i explicar-ho. Buscar el perquè significa fer-se una idea d'alguna raó subjacent que justifiqui la veracitat de la pròpia conjectura. Explicar el perquè significa convèncer-se a un mateix, i el que és més important, convèncer a altres que es poden justificar els propis arguments; explicar per què està fonamentalment basat en la idea d'estructura matemàtica, una noció important que s'oculta darrera dels intents d'explicar per què quelcom ha de ser cert, i constitueix un desenvolupament del procés de conjecturar.

L'important és recordar que una conjectura consisteix en l'endevinació fonamental d'una possible llei o regularitat, que pot explicar què succeeix en un problema en particular. Un cop formulada, s'investiga la conjectura per veure si ha de ser modificada, o es pot justificar convincentment. Això es fa buscant el perquè. El que un vol va canviant, de l'intent d'expressar el que és cert a l'intent de veure per què la conjectura es pot justificar; és a dir, de buscar el què a buscar el perquè. La resposta al perquè és una estructura que relaciona allò que se sap amb allò que s'ha conjecturat, i la pròpia argumentació ha de ser una explicació d'aquesta relació.

#### **3.3.5 Revisió**

Una vegada que s'ha aconseguit una resolució satisfactòria, o quan hom està a punt de deixar-ho estar, és essencial revisar la feina feta. Aquest és el moment de mirar cap enrere per millorar i ampliar la capacitat de raonament, i per intentar situar la resolució en un context més general. Això implica tornar enrere per comprovar el que s'ha fet i reflexionar en els fets clau i mirar cap endavant amb la intenció de fer una generalització de tot el procés i dels resultats. L'estructura de la fase de revisió es podria considerar constituïda per: comprovar la solució, reflexionar en les idees i moments clau, generalitzar a un context més ampli. Prenent nota dels detalls de la solució i reconstruint com s'ha raonat, un elabora una comprovació a fons.

La reflexió local del procés de resolució seguit pot centrar-se entorn a dues activitats concretes. La primera és examinar el camí triat i la segona és extraure més profit del problema. El fet d'entendre per què els elements de la solució es compenetren de la manera que ho fan per arribar a la solució resulta enriquidor i formatiu de cara a problemes més difícils posteriors. L'altre tipus de reflexió més profunda hauria d'anar capacitant a l'individu, a través d'experiències repetides de resolució de problemes, de fer-li un diagnòstic correcte del propi estil de pensament.

Aquesta part és un dels objectes d'estudi del present treball.

### 3.4. Metacognició

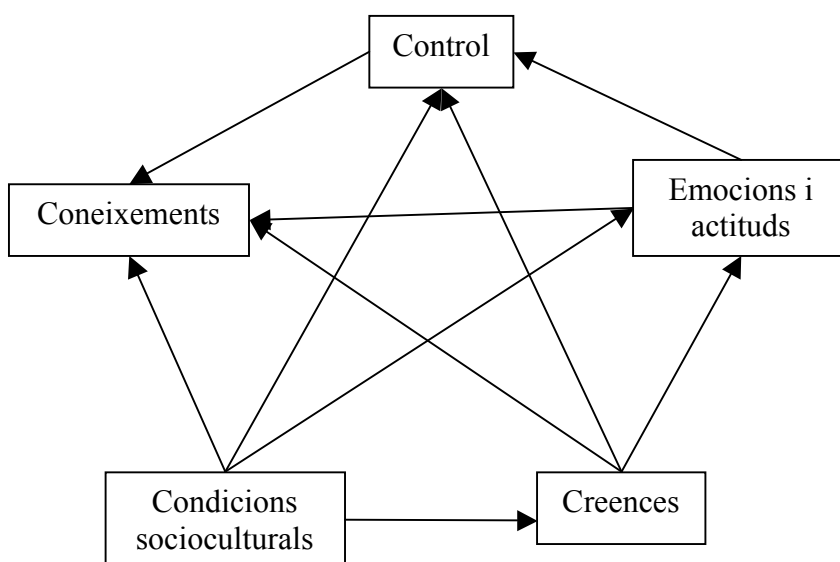
En aquest punt s'estudiarà primerament la resolució de problemes a l'escola, en segon lloc la resolució de problemes des del pla cognitiu, afectiu i del context i en tercer lloc s'estudiarà el coneixement del camp específic.

#### 3.4.1 Resolució de problemes a l'escola

Es distingiran tres punts: les característiques d'un bon resolutor estudiades per importants investigadors, l'anàlisi didàctica en tres plans (cognitiu, afectiu i el context sociocultural) i la comunicació habitual versus qüestions matemàtiques.

##### 3.4.1.1 Característiques d'un bon resolutor

Kilpatrick (1985, 7) considerava que per a ser bon resolutor de problemes era convenient disposar d'un bon bagatge organitzat de coneixements entorn al contingut, d'un bon bagatge de procediments per representar i transformar el problema i d'un sistema que control i guiï la selecció de coneixements i procediments. Aquest autor es referia als coneixements del camp específic, als coneixements de les estratègies de resolució de problemes i a la capacitat de control i autoregulació, amb un clar component cognitiu. No obstant, treballs posteriors consideren importants també els factors no cognitius, concretament de tipus afectiu i contextual (McLeod i Adams, 1989; McLeod, 1992; Mason, Burton, Stacey, 1988; Guzmán, 1991; Gómez-Chacón, 2000). En aquesta línia, el concepte d'intel·ligència emocional (Goleman, 1996) ha cobrat força per adoptar una visió més àmplia que la que ho encasella al domini cognitiu. McLeod (1992, 1993) comenta que la decisió de perseverar en el camí d'una possible solució pot estar influenciada per l'ansietat o la confiança, o també que els processos d'emmagatzematge i recuperació de la informació poden estar afectats per les emocions.



Quadre 3.6: Interpretació de la interdependència entre les cinc categories que segons Lester influencien els resultats de la Resolució de Problemes. (Les fletxes indiquen una influència directa).

Gómez-Chacón (1998b, 2000) posa l'èmfasi en la necessitat d'articular afecte i context, clarificant com els valors i les creences influeixen en la selecció dels coneixements i en les circumstàncies i en les condicions perquè es doni l'aprenentatge.



Per altra banda, el resolutor desenvolupa uns processos immersos en un marc escolar i en un grup. Per aquest motiu, es poden plantejar dos àmbits diferents d'observació dels processos a estudiar: el centrat en els processos de l'individu, tal com estudien autors entre els que destaquen Schoenfeld, Callejo, Carrillo i Puig referint-se al resolutor i als problemes en tant en quant estan immersos en el marc escolar, i el centrat en la necessitat de l'estudi de grups classe sencers posant de manifest la rellevància d'un nou àmbit d'observació com la classe vista com un espai on esdevenen processos que ultrapassen la complexitat d'una suma de  $n$  processos individuals (Lester, 1994).

Aquesta línia és molt complexa a la recerca en ensenyament-aprenentatge (Koehler i Grouws, 1992): l'estudi dels processos a l'aula contempen tant la conducta de l'alumnat com la conducta del professorat, alhora en estreta relació entre ells; i sobre els resultats de la recerca de les quals incideixen fortament aspectes com les seves característiques personals, els coneixements, les interrelacions, les actituds, les creences, les conseqüències de les seves conductes... i també en estretes relacions entre ells. De fet, Puig (1996) descriu tres personatges importants si un se centra en la resolució de problemes a l'aula: el problema, l'alumne i el professor. Callejo i després Carrillo, basant-se en el llibre de L. Puig precisament, troben a faltar-ne un altre: el context en el qual es proposa el problema.

L'enfrontament eficaç dels experts amb un problema comporta una actitud sana inicial, lliure de bloquejos i barreres prèvies. Ells tenen una preparació adequada per afrontar el problema que ha de contemplar múltiples aspectes: afectius, físics (pau, silenci...), cognoscitius (la matèria concreta). Els experts també tenen la disponibilitat d'estratègies variades entre les que es poden escollir aquelles que condueixin al tractament més eficaç del problema. Posseeixen una certa capacitat d'incubació que permet involucrar els mecanismes subconscients de la ment en les tasques de resolució del problema que tenen entre mans. Una persona hàbil en resolució de problemes presta una constant atenció a la possible il·luminació, inspiració o intuïció que poden sorgir en qualsevol moment en el dinamisme mental com a fruit d'aquesta tensió preparatòria. També es caracteritza per una assenyada avaluació de la situació del procés a mesura que es realitza, a fi de distribuir correctament l'esforç que s'ha d'utilitzar en les diferents tasques de la resolució del problema. Aquestes tasques inclouen l'adquisició d'informació, la utilització d'una certa estratègia disponible, la revisió del procés, el perfeccionament i el judici de l'actuació global. Finalment, la persona que sap resoldre problemes es pot afirmar que és perseverant cap a la resolució de l'objectiu proposat, la qual ve a ser el motor que posa en tensió tots els ressorts disponibles de la ment.

De l'observació de la manera de procedir experta en la resolució de problemes de caràcter general es poden certament apuntar algunes característiques comunes referents a l'aparició d'estratègies que poden ajudar a conformar millor els propis procediments. Descartes, en les *Regulae ad directionem ingenii*, redacta un conjunt de consells que constitueixen en l'esperit una magnífica disposició general per a la tasca intel·lectual:

- És convenient estimar la magnitud dels problemes amb els quals un s'enfronta per tal de detectar quan un problema ens sobrepassa i quan no. No obstant, a l'inici cal enfrontar-s'hi amb moltes ganes.
- Davant un problema convé assajar eines pròpies originals, no només limitar-se a seguir camins que altres ja han caminat.
- El mètode és necessari per a la resolució de problemes. Existeixen diferents camins possibles que condueixen amb seguretat, rapidesa i facilitat cap a distints objectius clau des dels quals es facilita el treball intel·lectual.

- Convé reduir al màxim allò complicat a simple. La ment treballa anant d'allò més senzill a allò més difícil, pas a pas.
- Per progressar en la resolució d'un problema convé disposar d'una visió unitària de tot allò que hi fa referència. Com deia Descartes, és important abraçar en un moviment continu i ininterromput del pensament totes i cadascuna de les coses que concerneixen al propi propòsit. D'aquesta manera les dades rellevants poden enllaçar-se a la ment per construir ponts eficaços per a la seva solució.
- Per adquirir una bona destresa en l'art de la resolució de problemes convé exercitar-se en recórrer amb mètode els camins que ja hagin estat descoberts per altres.
- Resulta necessari examinar atentament el propi procés de resolució d'un problema a fi d'entendre millor les possibles deficiències d'un i virtuts i fer així més eficaços els processos de pensament en el futur. Si després d'un intent de resolució d'un problema, fructuós o no, és capaç d'observar i buscar amb la mirada crítica la manera d'actuar, un s'habituarà en el futur a estar pendent, al temps que realitza el treball de resolució de problemes, de la distribució més eficaç dels esforços i de l'aplicació més adequada dels diferents recursos que tingui a l'abast en cada moment.

### 3.4.1.2 Anàlisi didàctica

Des de la perspectiva de la didàctica es parla de resolució de problemes en tres plans amb estretes interrelacions entre ells i alhora no compartimentables: el cognitiu, l'afectiu i el del context sociocultural (Vila, 2001). En el caràcter cognitiu de l'activitat de resolució de problemes s'hi poden destacar dos tipus de coneixements (Callejo, 1994): la base de coneixements i els metaconeixements. Garofalo i Lester (1985) o Schoenfeld (1985a, 1987a, 1992) distingeixen com a principals aspectes de la metacognició els coneixements i les creences entorn als fenòmens cognitius, d'una banda, i la regulació i el control d'aquests actes cognitius de l'altra. McLeod (1989) defensa la idea que els processos cognitius involucrats en la resolució de problemes estan particularment exposats a les influències del domini afectiu: la memòria i processos de representació, el paper de la consciència, el paper de la metacognició i el paper dels automatismes. Lester (1987) critica als qui es conformen a atribuir de forma exclusiva als aspectes cognitius les dificultats en resolució de problemes. Els primers models d'ensenyament que en tenen present la influència del domini afectiu són de Mason, Burton i Stacey, 1982.

Finalment, sobre el context, Gómez-Chacón (1998a) considera el supòsit que indagar la relació afectiva envers la matemàtica i la motivació per a l'aprenentatge demana una base àmplia de comprensió del context sociocultural, dins i fora de l'àmbit escolar, que influeix en els professors i estudiants. Autors com Pehkonen i Törner (1996) interrelacionen un ampli conjunt de factors com motivació, experiències anteriors, coneixements matemàtics, necessitats com a estudiants de matemàtiques que afecten la conducta de resolució de problemes de l'alumnat, interrelacionant entre ells via creences i concepcions de l'alumnat, i en part fruit de creences matemàtiques a la societat. Pehkonen i Törner (1996) concreten la rellevància de l'estudi de les creences afirmant que en el camp dels sistemes de creences sembla que hi ha quatre grans aspectes d'especial interès: 1) identificar i descriure creences en el sistema de creences d'un individu; 2) influències dels sistemes de creences matemàtiques; 3) naixement i desenvolupament de sistemes de creences matemàtiques; 4) condicions per al canvi de sistemes de creences matemàtiques.

### 3.4.1.3 Comunicació habitual versus qüestions matemàtiques

Les diferències que Adda (1985), en el marc de la pragmàtica del qüestionament escolar assenyala entre els pressupòsits de la comunicació habitual i els pressupòsits de les qüestions matemàtiques escolars interfereixen (per tant condicionen) en les respostes dels alumnes. Callejo (1994) les recull expressant les següents idees:

- En el qüestionament escolar la qüestió pot ser absurda.
- En el qüestionament escolar encara que la qüestió sigui difícil té segurament una resposta i qui interroga la coneix.
- En el qüestionament escolar de la resposta depèn una avaluació i la qüestió serveix segurament per avaluar quelcom. Mentre que en una qüestió normal l'interrogador ha de buscar informació sobre el tema de la qüestió, aquí l'interrogador busca una informació sobre l'interrogat.
- En el qüestionament escolar la qüestió es refereix a un nivell escolar, a un programa i en general, d'una banda totes les dades s'han d'utilitzar i d'altra banda les dades són suficients per trobar la solució del problema i freqüentment aquesta solució és única.

Aquests aspectes incideixen de forma clau i directa en les creences de l'alumnat, essent algunes d'elles creences ja en elles mateixes.

Callejo (1994) fa referència als fenòmens paràsits dels quals parla Adda integrant-los com a part de l'explicació de bloquejos i errors:

- associar automàticament a un algorisme qüestions aparentment anàlogues
- associar un problema al context de classe que proposi aplicar els darrers aprenentatges
- suposar una gradació de dificultats amb diferents qüestions successives

Nesher (1980) manifesta que és pràcticament impossible que un problema aritmètic escolar reflecteixi un problema quantitatiu real. Aquests problemes són una versió simplificada dels problemes quantitius reals, es converteixen en un estereotip la realitat dels quals és la de l'aula i no la del món. En particular els enunciats queden estereotipats principalment per dues característiques (Nesher, 1980):

- a) La interpretació semàntica està impregnada del llenguatge de la instrucció i no tant pel món d'experiències del nen.
- b) A diferència dels textos narratius, en l'enunciat del problema no es permeten esdeveniments que no estiguin explícitament presentats en el text.

Gómez-Chacón (1998a) fa una lectura positiva d'aquestes diferències entre les pràctiques de dins i fora de l'escola, i manifesta que el professorat les hauria de tenir en compte. Considera que sense les experiències matemàtiques de la vida quotidiana l'aprenentatge escolar és únicament aprenentatge per aprenentatge. Els estudiants necessiten construir i formalitzar a l'escola els coneixements matemàtics adquirits en situacions quotidianes així com l'ajuda oportuna per a generalitzar els seus esquemes. Deulofeu (2000) afirma que les activitats d'ensenyament-aprenentatge han de tenir una part de treball de l'alumne on aquest construeixi alguna cosa i també, necessàriament, una part de reflexió i discussió sobre allò que s'ha fet i el seu significat.

Reprement l'opinió de Schoenfeld (1991b) entorn a la recerca del sentit, es poden relacionar els aspectes que fan referència a l'estandardització de les situacions on són proposats els problemes. Els rituals de les classes dia a dia, provocant que aquesta recerca de sentit quedi contextualitzada a l'entorn de les pràctiques escolars. Aquesta estandardització pot fer referència d'una banda al caràcter estereotipat dels problemes

(Callejo, 1998) i d'altra banda també de forma complementària al model de pràctica docent anomenat reducció dels problemes a no-problemes (Deulofeu, 2000; Vila, 2000), model inscrit en la tradició conductista. Aquest model explica que l'alumne aprèn per imitació de la conducta del professor a través d'una seqüència de tasques jeràrquicament estructurades. Es relaciona amb la visió del professorat que posa el centre d'atenció en els continguts matemàtics però emfasitzant l'execució (Kuhs i Ball, 1986) i es defineix pel model de treball a l'aula amb els coneixements elaborats- exercicis de consolidació-aplicació a la resolució de problemes. Vila estudià una anàlisi centrada en l'efectivitat en la resolució de problemes que contenien elements que els convertien en no estàndards, o bé proposats en situacions de classe no estàndard. Va establir que si bé hi ha una relació clara del tipus causa-efecte, aquesta relació és altament complexa en tant en quant els elements que conformen la cultura escolar són molt més que la suma de les activitats proposades i les explicacions o indicacions donades pel professorat. Fins i tot alumnes amb un altíssim rendiment acadèmic patien bloquejos insuperables que tenien la seva explicació en aquesta estandardització. En la mateixa línia Schoenfeld (1989) relaciona determinats errors d'incoherència amb la implementació dels famosos quatre passos a seguir en la resolució de problemes. Fa una crítica d'un model de pràctica escolar que és bàsicament la reducció dels problemes a no-problemes. Aquest model consisteix en llegir el problema, seleccionar els nombres i les operacions rellevants, efectuar les operacions, escriure el resultat.

### **3.4.2 Estudi de la resolució de problemes des del pla cognitiu, afectiu i del context**

Lester (1987) estudiava sobre els factors que influencien els resultats de la resolució de problemes i distingia cinc categories interdependents: els coneixements, el control, els afectes, les creences i les condicions socioculturals (quadre 3.6). Lester ressalta el paper cabdal que juguen les creences en la interrelació entre aquestes cinc categories. Lester mostra la idea que el desenvolupament, la comprensió i l'ús de les idees i tècniques matemàtiques es desenvolupen en situacions culturals, i que les influències d'aquestes es deixen sentir en qualsevol de les altres quatre categories. Lester utilitza el terme creences com Schoenfeld (1985a), considerant que aquestes donen forma a les actituds i les emocions i dirigeixen les decisions preses durant l'activitat matemàtica. Ell inclou en la categoria de l'afecte d'una banda actituds com la motivació, l'interès, la confiança, la perseverança, el gust per assumir riscos, la tolerància a l'ambigüitat i la resistència a la finalització prematura i d'altra banda emocions. Així defensa que les emocions i les accions cognitives interactuen i que el rendiment d'un individu desenvolupant tasques matemàtiques està molt influenciat pels factors afectius.

Per control, Lester entén la classificació i subseqüent assignació de recursos disponibles per enfrontar-se amb èxit a situacions matemàtiques (decisions executives entorn a la planificació, avaluació, gestió i regulació). Aquesta categoria està influenciada per les condicions socioculturals, per les emocions i les actituds i per les creences; però a la vegada dirigeix la manera en la qual són utilitzats els coneixements.

Sota el nom de coneixements, Lester inclou els següents recursos que pot utilitzar l'individu: fets i definicions, algorismes, heurístics, i la multitud de rutines (no algorismes, procediments) que concentra l'individu quan es refereix a tasques matemàtiques.

Callejo (1994) opina que per a resoldre un problema és necessari conèixer el camp específic al qual es refereix el problema, regular i controlar els coneixements i enfrontar-s'hi amb les actituds matemàtiques adequades. Aquesta tasca intel·lectual està impregnada d'emocions presents al llarg del procés de resolució i de bloquejos

cognitius, afectius i socioculturals. Però el context en el qual es proposen habitualment els exercicis i els problemes en l'àmbit escolar genera en els estudiants conviccions que no són les més adequades per a resoldre problemes.

A la pregunta de què necessita un individu per a resoldre problemes, Kilpatrick (1985) considera: un bon bagatge organitzat de coneixements entorn al contingut; un bon bagatge de procediments per a representar i transformar el problema; un sistema que controlï i guiï la selecció de coneixements i procediments.

En aquest punt que s'estudia la resolució de problemes des del pla cognitiu, afectiu i del context, es distingiran cinc punts: les resolucions incorrectes, la intel·ligència emocional en matemàtiques, el context sociocultural, l'activitat subconscient en la resolució de problemes i el paper de l'estructura cognitiva en resolució de problemes.

#### **3.4.2.1 Resolucions incorrectes**

Treballs de Schoenfeld (1992) fan referència als aspectes de la cognició (enlloc dels components del coneixement i la conducta). Aquests aspectes són: coneixement de base, estratègies de resolució de problemes, gestió i control, creences i afectes i finalment pràctica. Com diu Puig (1996), Schoenfeld dóna un paper explicatiu a aquests aspectes, manifesta que cada element que introdueix (en el decurs del temps i de les seves investigacions) pot veure's com el resultat d'un intent d'explicar per què els elements anteriors són incapaços de donar compte de com és que els resolutors no tenen èxit en resoldre problemes de vegades. Quan un alumne disposa d'un bon bagatge de coneixements i estratègies i es té un bon control del que es fa, l'única cosa que permet explicar el fracàs és el seu sistema de creences.

Sobre la influència rellevant dels aspectes afectius en l'èxit i en el fracàs en la resolució de problemes en particular i sobre l'aprenentatge de les matemàtiques en general, tant en la literatura sobre educació matemàtica existeix unanimitat (McLeod 1989, 1992; Mason, Burton, Stacey, 1982; Lester, 1987; Lester, Garofalo, Kroll, 1989b; Guzmán, 1991; Gómez-Chacón, 1997a; Callejo, 1994; Adams, 1986). Lester, Garofalo i Kroll (1989b) postulen que el fracàs de l'individu en resoldre un problema tenint els coneixements necessaris es deriva de la presència de factors metacognitius i no cognitius que inhibeixen l'apropiada utilització d'aquest coneixement: afectes i actituds, creences, control i factors contextuais, no incidint tots ells de la mateixa manera ni per la mateixa via en el rendiment. Lester, Garofalo i Kroll creuen que molts professors de matemàtiques estan d'acord que l'èxit o el fracàs de l'alumnat en resolució de problemes sovint és molt un tema d'autoconfiança, motivació, perseverança, i molts altres aspectes no cognitius. Gómez-Chacón (1997b) indica que es desenvolupen les actituds afectives quan es brinda a l'alumnat les adequades experiències d'aprenentatge que incorporen de forma explícita aquesta dimensió. Pel que respecta a programes de matemàtiques, l'expressió d'objectius sobre creences, emocions i actituds encara està per investigar en profunditat.

#### **3.4.2.2 Intel·ligència emocional en matemàtiques**

Goleman (1996) ha desenvolupat el terme d'intel·ligència emocional que adopta una visió més àmplia de la intel·ligència, és una qüestió de la intel·ligència social que involucra habilitats per a manejar els propis sentiments i els sentiments dels altres, discriminant entre ells i usant aquesta informació com a guia del propi pensament i accions. Es pot dir que la persona alfabetitzada emocionalment en matemàtiques és aquella que ha desenvolupat la seva intel·ligència emocional en aquest context i que ha assolit una forma d'interactuar en aquest àmbit, que té molt en compte els sentiments i

les emocions; l'alfabetització emocional engloba habilitats tals com el control d'impulsos i fòbies en relació a l'assignatura, que permet desenvolupar la necessària atenció per què s'assoleixi l'aprenentatge, l'autoconsciència, la motivació, l'entusiasme, la perseverança, l'empatia, l'agilitat mental, etc... (Gómez-Chacón, 1997b). Mason, Burton i Stacey (1982) afirmen que els factors que influeixen en el grau d'efectivitat del raonament matemàtic són el coneixement dels continguts matemàtics, però en els altres dos vèrtexs d'un hipotètic triangle equilàter se situaria també la competència en l'ús dels processos d'investigació matemàtica (conjecturar, particularitzar, generalitzar, comunicar...) i la confiança en el domini dels estats emocionals i psicològics.

En el camp de la psicologia social es troben els primers intents substancials de recerca en el domini afectiu fets per Fishbein i Ajzen (1975) i amb molta força en el camp de la psicologia cognitiva Mandler (1989), i al camp de l'educació matemàtica en general i de la resolució de problemes en particular Reyes, Kulm, Aiken, Adams o Gómez-Chacón. I és McLeod a finals dels 80 i principalment en la dècada dels 90, que pren com a base les idees de Mandler, qui pot ser considerat el precursor d'aquest camp d'estudi en l'educació matemàtica. McLeod (1992) pensa que el domini afectiu és un ampli rang de creences, sentiments i estats d'ànim. Com a descriptors específics d'aquest domini afectiu es poden considerar les creences, les actituds i les emocions. Es troba una estreta relació entre els dominis cognitiu i afectiu, i un acord a no separar-los (McLeod, 1989; Gómez-Chacón, 1997b). McLeod (1992) afirma que no hi ha resposta afectiva en absència d'avaluació cognitiva; o, des de la perspectiva inversa, que la major part de les respostes emocionals s'originen en una interrupció dels plans de resolució de problemes o en una discrepància entre les expectatives i els esdeveniments reals (McLeod, 1993). Destaca un seguit de punts de connexió entre ambdós dominis com la metacognició, la decisió de perseverar en el camí d'una possible solució influenciada per l'ansietat o la confiança, els processos d'emmagatzematge i recuperació d'informació afectats per les emocions.

### 3.4.2.3 Context sociocultural

En el marc del context sociocultural, Callejo (1994) distingeix tres aspectes amb fortes influències sobre el procés i el rendiment en resolució de problemes:

- a) El conjunt d'eines que, sense ser específicament matemàtiques, es relacionen amb l'activitat matemàtica.
- b) Els aspectes relacionats amb el fet que l'educació formal en matemàtiques té lloc a l'escola, com a institució, en la qual el discurs es regeix per unes regles diferents de les del discurs habitual, i on les pràctiques tenen una inèrcia. Hi cabria d'una banda la pragmàtica del qüestionari escolar (Adda, 1985); d'altra banda cabria considerar els darrers estudis de Schoenfeld on introdueix aspectes relacionats amb la pràctica (Schoenfeld 1989, 1992); i és en aquest àmbit d'estudi Gómez-Chacón(1998a) fa referència a estudis que aborden la perspectiva de la cultura escolar i la cultura de l'aula, citant a autors com Lerman, Pintex o Nickson.
- c) La inculturació matemàtica, o valors i actituds matemàtiques compartides per la comunitat matemàtica (Schoenfeld 1992; Bishop, 1999).

Des de la perspectiva sociocultural i des de la perspectiva de l'estudiant com a actor social, Gómez-Chacón (1998a) reclama treballar i integrar les següents tres aproximacions fent referència en cada cas a línies d'investigació en aquest àmbit:

- a) Investigacions que desenvolupen una aproximació sociocultural a la instrucció, considerant les pràctiques culturals tant de les llars dels estudiants com de les aules per tal d'entendre i facilitar el seu aprofitament escolar.

- b) Estudis sobre comunitats d'aula en les quals la matemàtica és construïda socialment. Aquestes comunitats es caracteritzen pel compromís dels estudiants en discussions matemàtiques sobre problemes oberts; la comunicació i la negociació de significats són el centre del que significa fer matemàtiques a classe.
- c) Investigacions que documenten les discontinuïtats de la matemàtica a l'escola i a la vida quotidiana: treballs d'Abreu (1995), de T.N. Carraher, D.W. Carraher i Schliemann (1988)... Aquestes investigacions descriuen com la gent aprèn i usa les matemàtiques en situacions fora del context escolar. Alguns treballs documenten com les persones tenen èxit en la resolució de problemes de la vida quotidiana, inventant-se els seus propis mètodes, les seves estratègies informals, i tanmateix també estableixen el baix nivell d'execució de tasques similars realitzades en el context escolar.

#### **3.4.2.4 L'activitat subconscient en la resolució de problemes**

En el complicat mecanisme mental conflueixen simultàniament i espontània activitats de molts diversos tipus. Els dinamismes del coneixement també són molt variats: sensacions, imatges subjacents, memòries, canals d'inferència, patrons de reconeixement... que es presenten amb un tipus de consciència gradual que va des de la plena atenció conscient a un aspecte determinat fins la percepció difusa que quasi desapareix o que resta en la total penombra, influint en la marxa del pensament.

Una de les claus de l'èxit en la resolució d'un problema radica en la capacitat de concentració. Probablement es pot incidir de dues maneres: a) eliminant els impediments que segons la pròpia experiència, causen una dispersió de la pròpia atenció, de la capacitat per estar atent a allò que es fa; b) mitjançant la motivació, fomentar l'interès intens i profund pels problemes dels que un s'ocupa, que sigui capaç d'embolcallar més i més capes, racional, contemplativa, estètica de la pròpia personalitat.

La col·laboració afectiva de la ment proporciona un profund impacte sobre el pensament i sobre la seva possible eficàcia o ineficàcia. Els desitjos, ansietats, repugnàncies, pors... són intenses forces que també condicionen de manera decisiva la pròpia actuació mental. Així, el tipus de feina a realitzar en la fase de preparació és el de facilitar la interacció entre la informació i les diferents formes de processar-la, aportant un coneixement ben estructurat i evitant distraccions.

L'aspecte que més interessa per tractar de propiciar l'ajut de l'activitat subconscient és el de la incubació de la que s'espera que sorgeixi el que se'n diu la il·luminació. La incubació que afavoreixi la il·luminació pot estimular-se de la manera següent. La preparació conscient ha de capacitar l'individu per reconèixer la solució o els elements que puguin ajudar a la solució. També ha de servir per activar en la ment les estructures senzilles a partir de les quals es pot pressentir que pot sorgir una solució. Aquesta preparació ha d'ajudar a actuar amb una certa llibertat i flexibilitat per iniciar la ment en cercar vies noves, distintes de les que els hàbits propis, els prejudicis, les modes, els paradigmes imperants imposen. Finalment, aquesta incubació es pot treballar per infondre en l'esperit una tensió profunda, un veritable interès pel problema i la seva resolució, juntament amb una confiança en les pròpies forces. També es pot ajudar a la incubació amb un període de relaxació i d'oblit que permeti una més gran llibertat autònoma, és a dir, d'apartament dels camins fets ja per la pròpia activitat conscient i que permeti el moviment de la informació dinamitzada a la fase preparatòria. La possibilitat d'incubació es dona quan un s'allibera de les pressions. Resulta necessari

tenir l'oportunitat per incubar les pròpies idees començant amb temps de sobra la feina. Així s'evita la fixació funcional, la necessitat d'anar per camins ja estudiats i segurs. Aleshores un es pot permetre caminar per camins incerts al llarg dels quals es poden trobar noves idees i valuoses.

#### **3.4.2.5 Paper de l'estructura cognitiva en resolució de problemes**

La solució d'un problema suposa la reorganització del residu de l'experiència prèvia, de manera que s'ajusta als requisits concrets de la situació problema present, per aquest motiu és força important l'estructura cognoscitiva existent. La possessió de coneixements anteriors pertinents com conceptes, principis i termes conjuntius en l'estructura cognoscitiva facilita la resolució de problemes (Murray, 1963; Novak, 1961; Ring i Novak, 1971; Saugstad, 1955). Sense tenir aquests coneixements no és possible resoldre problemes doncs ni s'entendria la naturalesa del problema. Els elements d'estratègia, orientació i disposició que reflecteixen l'experiència prèvia amb problemes relacionats és una altra font de transferència positiva que hi ha en l'estructura cognoscitiva (Ausubel, Novak y Hanesian 1990). El producte substancial o metodològic d'un procés de resolució de problemes s'incorpora a l'estructura cognoscitiva seguint els principis d'aprenentatge per recepció.

Per una altra banda, l'estructura cognoscitiva també representa una font de transferència negativa doncs reflecteix la persistència de disposicions habituals inaplicables. Així, aquesta experiència genera disposicions útils i interferents en funció de factors com la primàcia, la novetat, la freqüència, la intensitat, la flexibilitat i el nivell d'ansietat.

Una altra font negativa és la fixació funcional, és a dir, la incapacitat de concebre que un objecte tingui altres usos o funcions possibles.

#### **3.4.3 El coneixement del camp específic**

Es podria pensar que el domini correcte de les estratègies de pensament pot suplir a l'esforç d'adquirir informació específica del camp en què un intenta fer-se expert en resoldre problemes. Seria un engany. El coneixement del camp específic en què un problema es col·loca pot resultar ser una condició essencial per poder pensar en tenir accés a la resolució de problemes de gran envergadura. En aquest punt s'estudiarà primer el paper del coneixement en la resolució de problemes, després l'estructuració del coneixement i per últim els esquemes mentals eficaços.

##### **3.4.3.1 El paper del coneixement en la resolució de problemes**

Si els puzzles, els enigmes i les recreacions mentals elementals poden resultar estimulants, reptadores i formatives per a un públic ampli és perquè tant el context en el qual es col·loca l'enunciat com el conjunt de coneixements necessaris per resoldre'ls està a disposició de tothom. Però a mesura que un va endinsant-se en problemes propis d'un camp més específic, la conveniència o la necessitat d'una informació més profunda es fa palesa.

El tipus de coneixement útil en la resolució de problemes es compon de fets i circumstàncies importants relacionades amb els elements del problema, i familiarització amb les tècniques específiques del camp en el qual s'enquadra el problema mateix. Els fets i circumstàncies d'interès no han de constituir un munt de dades juxtaposades, sinó que s'ha de tractar d'un coneixement ben estructurat i dinàmic, de tal forma que, un cop proposat el problema, sorgeixen a la ment com un acte reflex. Les tècniques específiques del camp són estratègies particulars, modes de procedir de manera



intel·ligent en ell que han estat consagrades per la tradició i l'exemple dels grans experts en la matèria.

Per altra banda, Callejo (1994) basant-se en diferents autors sintetitza dos tipus de coneixements caracteritzats per haver de recuperar alguns dels coneixements dels que es disposa i de gestionar la manera d'usar-los: la base de coneixements i els metaconeixements. Són el conjunt de coneixements disponibles en la memòria del subjecte per a ser utilitzats. Schoenfeld (1985a) s'hi refereix com recursos i inclou fets, procediments i tècniques. Altres autors (Lester, 1987; Lester, Garofalo i Kroll, 1989b; Callejo, 1994) inclouen aquí les estratègies heurístiques (o heurístics). Segons Lester (1987) és indubtable que moltes deficiències en resolució de problemes es poden atribuir a l'existència de sistemes conceptuals inestables.

Puig (1996) defensa que el que estudia l'heurística són les formes de comportament en resoldre problemes i els mitjans que s'utilitzen en el procés de resoldre'ls. Aquests són independents del contingut i no suposen garantia que s'obtingui solució. Per tant es qualifica d'heurístics aquests modes i mitjans. Carrillo (1996), utilitzant les idees de Schoenfeld, considera que un heurístic és un suggeriment general o estratègia independent de qualsevol matèria d'estudi que ajuda al resolutor a aproximar-se i comprendre un problema i ordenar eficientment els seus recursos per resoldre'l. Les estratègies heurístiques no són prescriptives, sinó descriptives (Schoenfeld, 1985a). Les estratègies només descriuen una manera general de procedir; per tant, aplicar una estratègia suposa prendre un seguit de decisions afegides.

D'acord amb la fase d'abordatge distingida per Carrillo (1996), es disposa a continuació una selecció dels heurístics que aquest autor relaciona de forma exhaustiva, acompanyats d'accions que els són pròpies o pertinents:

- Organitzar la informació: imaginar mentalment la solució, rellegir l'enunciat, seleccionar el material adequat, disposar d'un model manipulador, dibuixar un diagrama.
- Exemplificar: posar exemples, examinar casos especials.
- Expressar en altres maneres: formular amb altres paraules, introduir notació adequada.
- Temptejar.
- Partir del què se sap; aprofundir en les condicions del problema.
- Explorar problemes similars.
- Conjecturar.

L'alumnat ha de saber, o saber fer, o fer, però no es pot oblidar la necessitat i conveniència que també ha de reflexionar sobre què sap, o què sap fer, o què fa. Així, en analitzar les formes de resoldre problemes o en dirigir l'aprenentatge de l'alumnat, s'entra en el terreny de la metacognició. La definició de Flavell (1976) entorn al terme metacognició es refereix al coneixement personal dels propis processos i productes cognitius o qualsevol cosa relacionada amb ells, com les característiques de la informació o les dades rellevants per a l'aprenentatge... La metacognició es refereix, a la supervisió activa i conseqüent regulació i orquestració d'aquests processos en relació amb les dades en les quals es recolzen, usualment al servei d'alguna fita o objectiu concret. Aquesta definició recull dos aspectes que s'hi distingeixen (Garofalo i Lester, 1985): el coneixement i suposicions entorn als fenòmens cognitius; la regulació i control de les accions cognitives. El primer aspecte recolliria tot allò que una persona coneix i creu (creences) entorn a les seves pròpies habilitats i recursos cognitius en

relació a l'execució de tasques específiques (Callejo, 1994). Lester (1985) hi distingeix tres tipus de categories:

- personals o del subjecte (coneixements entorn a un mateix sobre els seus coneixements, capacitats, limitacions...)
- de la tasca (sobre els propòsits i requeriments de les tasques, graus de dificultat)
- de l'estratègia (coneixements d'estratègies cognitives generals o específiques que ajudin a la comprensió, organització, planificació, execució i avaluació)

El segon aspecte, la regulació i el control, es refereix a les decisions que es prenen per a tractar de comprendre la naturalesa d'un problema i resoldre'l. Callejo (1994) desenvolupant idees sintèticament presentades per Lester (1987), inclou entre aquestes decisions: la selecció de continguts, la planificació d'accions, la selecció d'estratègies apropiades per a dur a terme un pla, la presa de decisions per a millorar aquest pla, avaluar la validesa d'aquest pla i en cas necessari, la revisió o abandó dels plans o estratègies inadequades. En resum, Lester afirma que el control dirigeix les maneres en les quals són utilitzats els coneixements. Fent un paral·lelisme amb Lester, Schoenfeld (1987a) estableix tres components metacognitius:

- coneixement dels propis processos de pensament
- control del procés
- creences

La diferència entre la conducta d'un novell i la d'un expert quan resolen problemes se situa habitualment en el pla metacognitiu. És la manera d'usar els coneixements, la forma de dirigir els esforços i la presa de decisions al llarg del procés de resolució que els diferencia (Callejo, 1994; Gil i altres, 1988; Chi i Glaser, 1986). Callejo i Carrillo (basant-se en L. Puig (1996)) sense menysprear els aspectes que intervenen o incideixen en el procés de resolució de problemes, consideren que la metacognició és el que té més possibilitats de perdurar fins i tot després del període escolar; així, desenvolupar estratègies metacognitives és desenvolupar individus reflexius i avançar en nivell de qualitat en la formació intel·lectual.

### **3.4.3.2 L'estructuració del coneixement**

El coneixement del camp específic en el qual un problema s'enquadra pot ser fonamental per a la seva resolució, però ha de tractar-se d'un coneixement amb informació formant una estructura, i a més a més dinàmica que englobi, jerarquitzï i ordeni els elements implicats en el lloc adient. El coneixement ben estructurat ajuda en aspectes com poden ser: a) facilitar l'assimilació del propi coneixement, memorització i integració en el mateix mecanisme mental (amb la memòria o bé amb la forta capacitat de relacionar dades amb estructures mentals ja existents); b) millorar l'accessibilitat (l'accés a un coneixement amb estructura rica és més fàcil que la recuperació d'una informació aïllada); c) la utilització d'un determinat coneixement.

La consecució d'una bona estructuració del coneixement i la seva adequada utilització en la resolució de problemes és un objectiu molt important a l'hora de pensar millor. Per planificar l'aprenentatge i per utilitzar el saber de forma més eficaç pot ajudar la idea dels esquemes operatius proposada en el següent punt.

### **3.4.3.3 Esquemes mentals eficaços**

Quan es proposa un problema de qualsevol tipus, es comença l'apropament a ell mitjançant una representació inicial dels elements que intervenen en la situació. Tal representació inicial està condicionada pels coneixements que l'individu posseeix de tals elements. No tant pels coneixements sinó més per les estructures en què aquests es presenten, pels esquemes mentals en els quals es configuren.

Un esquema és un conjunt de coneixements que s'agrupen a través de repetides experiències per raó de les seves relacions i la seva efectivitat conjunta per aclarir diverses situacions-problema amb un aire comú. L'esquema conté molta més informació que la juxtaposició de les parts, donat que probablement va conjuntament amb la memòria difusa de moltes experiències prèvies. Aquest esquema és actiu, capaç d'atraure nous elements i d'engranar-se amb altres esquemes per formar conjunts més amplis i rics.

El gran repte de la instrucció consisteix en proporcionar al principiant un camí fàcil i clar cap a l'aprenentatge. Per aconseguir-ho, en cada camp específic resulta necessari: a) una identificació amb claredat dels paradigmes, dels esquemes operatius que constitueixen models de procediment en el camp en qüestió; b) una presentació d'aquests paradigmes en acció, mostrant la seva eficàcia en diverses circumstàncies interessants; c) la implantació natural d'aquests paradigmes en el dinamisme mental del subjecte mitjançant l'oportunitat de practicar la seva utilitat de manera autònoma.

Com diu G. Polya: "El que el professor diu a classe no manca d'importància, però el que els alumnes pensen és mil vegades més important. Les idees han de néixer a la ment dels alumnes i el professor ha d'actuar només com una llevadora." (Polya, 1981, 104)

### **3.5. Actituds, bloquejos i emocions**

Les actituds, els bloquejos i les emocions no es poden desvincular del resolutor quan està resolent un problema. Per aquest motiu s'han estudiat i s'han englobat sota aquest punt aspectes com l'actitud adequada que s'ha de tenir per resoldre un problema, els possibles bloquejos d'origen afectiu, els bloquejos de tipus cognoscitiu, els bloquejos culturals i ambientals, els recolzaments sistemàtics per desbloquejar i finalment les emocions.

#### **3.5.1 L'actitud adequada**

Troblem diferents actituds negatives que poden obstaculitzar l'avenç: por a allò que és desconegut i la consegüent reacció de fugir del problema, o almenys, de posposar-lo; nerviosisme per voler començar amb presses i acabar aviat; neguit davant de la prova com si es tractés d'un examen importantíssim. En qualsevol tasca mental, convé no deixar-se endur per les presses. Cal estar entrenat per a quan això resulti inevitable, i les preses de decisió hagin de ser ràpides. Tota aquesta varietat d'actituds negatives pot condicionar negativament la pròpia intervenció de les maneres següents:

- Impedint la utilització de la capacitat al màxim
- Impulsant a considerar correcte qualsevol indicatiu de solució
- Eliminant el plaer que l'exercici suggereix
- Creant un hàbit intern de por i un complex d'inutilitat cada vegada més acusat

La diferència entre el virtuós en una activitat qualsevol i el que no destaca es deu molt més a la intensitat de la seva pràctica que a una veritable diferència en el seu potencial inicial. Qui regularment es preocupa de pensar al seu ritme, amb tranquil·litat, en problemes semblants a aquells que tals situacions proposen, serà capaç d'enfrontar-se a elles amb més serenitat.

Cal tenir en compte que s'aprèn en tots els ordres gràcies a l'enfrontament amb situacions noves. No s'ha de tractar amb un problema com si fos un examinador sever que busca mesurar les pròpies capacitats, sinó com si fos una gran ocasió per aprendre. L'ocupació amb un problema mental és intensament satisfactòria si s'ha concebut amb

aquest esperit esportiu, estètic, d'exercitació de la pròpia capacitat, d'observació de la mateixa activitat i dels propis resultats.

Per altra banda, els hàbits mentals són extraordinàriament valuosos, doncs gràcies a ells, gràcies a les pròpies rutines, un queda lliure de la necessitat contínua de preguntar-se i decidir sobre la forma de dur a terme certes tasques. Però en moltes ocasions, és veritat que els propis hàbits i rutines mentals poden suposar un pes per resoldre un problema correctament si es resisteix a encaixar en els propis motlles. Si en processos aparentment tan externs i superficials de la pròpia estructura mental apareixen condicions que suggereixen fortament la pròpia activitat cognoscitiva, sembla raonable pensar que en les zones més profundes del propi mecanisme mental existiran rutines i hàbits que determinen a priori les capacitats d'enfrontament amb problemes, constituint en molts casos veritables bloquejos. D'aquestes condicions generals es desplega la convicció del molt que convé sortir ocasionalment dels propis hàbits, de les formes rutinàries de veure les coses, per col·locar-se en un lloc d'observació gens usual. La resolució d'un problema és un acte creatiu, on s'avança i es torna enrere, es proven noves estratègies, s'intenta trobar més d'una via de solució, es proven casos concrets, s'intenta generalitzar...

Un context adequat seria aquell on el plantejament i la resolució de problemes provoquin una dinàmica d'utilització i aprenentatge de coneixements matemàtics (Cañigüeral i Pol, 1998). El tipus d'activitat que es proposa als alumnes provocarà una manera de treballar i una manera d'entendre les matemàtiques. Una característica de l'activitat matemàtica és la de fer preguntes i buscar respostes. I és intentant buscar aquestes respostes quan sovint es fan descobriments, s'estableixen relacions i s'adquireixen nous coneixements. La resolució d'un problema hauria de donar a l'alumne l'oportunitat de reflexionar sobre els seus coneixements matemàtics, sobre com posar-los en joc, així com d'establir i descobrir relacions entre ells. En aquest sentit, és important proposar problemes que puguin abordar-se des de diferents punts de vista, seguint diferents estratègies.

Amb la resolució de problemes s'hauria de mostrar als alumnes que la matemàtica és una activitat oberta al raonament, a la discussió i a la recerca. Per a Montaigne l'infant no és una ampolla que s'ha d'omplir sinó un foc que cal encendre. El professor hauria d'esperonar els alumnes per tal que seguissin els seus propis raonaments, els quals els portaran a resoldre el problema plantejat, o a situacions sense sortida, o a resultats aparentment contradictoris, o a situacions de bloqueig. Raonaments que per altra part poden ser incorrectes o que poden partir d'errors conceptuals. Tractar aquestes situacions i convertir-les en font d'aprenentatge significatiu és el gran repte del professorat, especialment en el context de la resolució de problemes.

Treballar el tempteig, la comprovació de casos particulars, la recerca d'un model o les estimacions mostra a l'alumne un tipus de raonament molt diferent del raonament lògic deductiu que sovint es pren com a paradigma de raonament matemàtic. Aquesta associació sovint és tan forta que hi ha alumnes que consideren que si han trobat la solució d'un problema per tempteig - comprovació, no han resolt el problema.

La resolució de problemes pot realitzar-se en petits grups. Amb el treball en grup s'afavoreix la discussió, la col·laboració, la posada en comú de coneixements, i, per tant, també s'afavoreix la reflexió, la revisió, la comprovació de conjectures... El treball en grup dona l'oportunitat als alumnes de compartir en comptes de competir i de

treballar en confiança, seguint el propi ritme de treball en comptes de treballar pressionat.

### **3.5.2 Bloquejos d'origen afectiu**

Dins dels bloquejos d'origen afectiu s'han distingit els grups següents: un primer grup caracteritzat per l'apatia, l'abúlia, la peresa davant del començament; un segon grup caracteritzat per les pors; un tercer grup caracteritzat per les ansietats; i un quart grup caracteritzat per les repugnàncies.

#### **3.5.2.1 Apatia, abúlia, peresa davant del començament**

Davant una tasca intel·lectual carregosa i no urgent costa extraordinàriament posar-se en marxa. Començar exigeix un gran esforç de voluntat, decisió, no girar-se enrere sense haver-li donat una oportunitat a aquell començament la seva possible vàlua. Entraran dubtes que l'atac escollit no sigui l'adequat per a l'ocasió, però s'ha de deixar que es desenvolupi, no permetre que s'asfixii en el desànim. És millor seguir endavant, i si cal, adreçar el camí amb una mica més de perspectiva. El començament té la seva importància perquè influeix decisivament en la resta.

Per altra banda, convé tenir present que pràcticament tota la feina que es realitza és aprofitable, d'una forma o d'una altra. Almenys, si després es decideix que no val la pena per a la finalitat que es pretén, s'aprèn quins són els defectes que convé evitar en una tasca semblant.

Es podrien considerar les indicacions següents:

- Pensar en les distintes maneres possibles de començar la tasca
- Escollir-ne una i començar donant-li una bona oportunitat de demostrar el que val, sense examinar-la gaire en aquest estat inicial
- Conservar la consciència que l'inici escollit pot tenir caràcter provisional, però sense deixar-se dur per un perfeccionament paralitzant

#### **3.5.2.2 Pors**

L'activitat intel·lectual no és una vida sense riscos. De l'actuació mental depèn en gran part l'èxit i el fracàs. És natural que s'originin diversos temors interns relacionats amb les múltiples tasques intel·lectuals que la pròpia vida proposa: por al fracàs, a l'equivocació, por al ridícul, por a l'examen. La por és una actitud natural davant de la percepció del perill. La por és sana si desemboca en prudència, un talant del propi esperit que, mesurant el risc enfront als beneficis que l'ocasió ofereix, porta a adoptar una cura proporcionada en la realització de la tasca. La por no és sana si se la permet que s'apoderi d'un fins al punt de paralyzar-lo o de portar-lo a una acció sense control o actituds perilloses que duen al fracàs segur.

El fet d'experimentar el fracàs i l'equivocació en algunes de les tasques tenen aspectes positius. Encara que no sigui atractiu per resultar un patiment, a la llarga, es manifesten de gran vàlua:

- En viure de prop el fracàs, hom és capaç d'apreciar-lo en les seves justes mesures. És un aprenentatge per valorar millor les pròpies pors al fracàs en el futur. S'ha de tenir present que un s'afronta als problemes d'un en un, no com un sol imaginar-s'ho, tots de cop.
- Del fracàs s'aprèn també com fer les coses millor. Henry Ford, personatge important en el segle XX en el món de la indústria, afirmava que el nombre dels que fracassen és relativament petit, la majoria simplement abandona. Si es té una

veritable intenció en aconseguir un objectiu, un fracàs, una equivocació, pot servir de lliçó i pont cap a ell.

- El món pedagògic i acadèmic que ha arrelat a la nostra civilització atén poc al valor global de les realitzacions de les persones, premiant amb desmesura l'absència d'equivocacions. És més just i raonable avaluar a una persona pel conjunt de valors de la seva obra que pel poc que s'equivoca. És relativament fàcil no equivocar-se. És suficient amb no fer ni dir res del que no s'estigui absolutament segur, és a dir, no fer ni dir quasi res. Però si el conjunt global de realitzacions és el que compta, es podrà admetre un cert percentatge d'errors en la pròpia forma habitual de treballar.
- Aquell que accepti incórrer en una proporció més gran d'equivocacions s'atrevirà a realitzar molts més plans innovadors que presentin riscos més grans, però amb beneficis superiors en cas de resultar encertats. En Thomas J. Watson que fundà IBM opinava que el camí per a l'èxit consisteix en duplicar la proporció d'errors.

### **3.5.2.3 Ansietats**

L'ansietat és un estat d'ànim complex caracteritzat per certa tensió interna, preocupació, nerviosisme i agitació on intervenen causes cognitives i emocionals simultàniament. Hi ha dos tipus diferents d'ansietat que influeixen d'una manera negativa en la persona. El primer és l'ansia per triomfar. El segon és l'ansia per acabar, les presses.

Un cert grau de tensió cap a l'objectiu que un es proposa és un tret favorable i necessari. Amb freqüència tal tensió fa sorgir en un mateix forces insospitades. Però l'ansietat excessiva per triomfar condueix a una manca de quietud i de pau que impossibilita la contemplació serena dels problemes a considerar. L'ansia per acabar aviat li porta a un tancar els ulls a moltes possibilitats que només apareixen després d'una visió pausada i reposada de les circumstàncies.

### **3.5.2.4 Repugnàncies**

El sentiment de repugnància és característic cap a tasques que es troben avorrides, rutinàries, opaques, tal vegada perquè un se sent menys capacitat per a elles, perquè mai s'ha fet l'esforç inicial seriós per fer-les fàcils o perquè no s'ha estat capaç de llegir en elles amb la profunditat que altres aconseguixen.

Altres tipus d'activitats intel·lectuals resulten antipàtiques no perquè li avorreixin a un, sinó perquè un les troba estranyes, no familiars, no connaturals amb la pròpia forma espontània de procedir. Alguns experimenten certa aversió al desordre, al caos en el qual altres se submergeixen molt a gust com en un entorn propici per realitzar la seva feina. Hi ha gent a qui avorreix el domini de la lògica i l'ordre, que els sembla fred. Altres detesten la fantasia, el pensament ambigu, la imaginació ardent que, segons opinen, està totalment fora de lloc a la seva feina.

De vegades, s'experimenta una repugnància forta en introduir-se en certs temes perquè se'ls associa amb personatges que resulten profundament antipàtics. D'altres, l'antipatia, l'enveja o la inferioritat amb algú del propi entorn amb qui es pensa estar en competència accentuen el rebuig.

### **3.5.3 Bloquejos de tipus cognoscitiu**

Els bloquejos d'aquest tipus es poden trobar en totes les fases de la resolució de problemes. Des de la seva aparició en la fase de la percepció de les dades fins la seva aparició en la fase de revisió de la solució.

Resulta convenient mesurar acuradament l'esforç dedicat a la informació prèvia, començar ben informat, però al mateix temps s'ha d'afitar l'ansia de seguretat recolzant-se en tot allò que altres han fet i estar atent a la possible tendència a retardar la pròpia immersió en el problema escudant-se en la necessitat d'una informació exhaustiva prèvia. La intuïció no s'ha de contemplar com un regal de Déu; es pot conrear activament.

Els mecanismes de percepció visual tenen la virtut d'emmagatzemar informació de manera que davant d'un estímul parcial, proporcionen les imatges sensorials que ho complementen. També en la percepció mental es produeix aquest fenomen d'anticipació i de complementació d'estímuls. Un es forma la imatge conceptual que està acostumat a veure davant una situació similar. La conseqüència és que només es veu el que s'espera veure, i així un s'incapacita per obtenir la visió nova, completa de la situació, que amb freqüència és la clau de la resolució del problema. La visió estereotipada consisteix en veure solament el que s'espera veure. Està present en el propi mecanisme mental i constitueix sovint un bloqueig important en el propi tractament dels problemes.

Tal com deia Heràclit d'Èfes, si no s'espera allò inesperat no es trobarà, donada la dificultat de la seva accessibilitat. És necessari romandre obert a allò estrany, a les desviacions aparentment immotivades del que s'espera veure. En moltes ocasions són les que poden conduir a visions noves de la realitat.

Un altre dels possibles defectes en el propi posicionament en front a un problema consisteix en deixar-se portar per la pròpia facilitat per al judici crític. De fet, hi ha molts més crítics d'art que veritables artistes. Hom no ha de deixar-se portar per l'excés d'esperit crític, especialment en l'etapa inicial d'apropament al problema amb el desig d'obtenir formes originals de procedir amb ell. S'ha d'aplaçar el judici i els mecanismes intel·lectuals globals, els subconscients inclosos, estaran més oberts per prestar la seva important contribució.

La rigidesa en la utilització de diversos processos de pensament constitueix un tipus important de bloqueig. En ocasions el llenguatge matemàtic és l'adequat, però també resulta a vegades que consideracions molt més simples del sentit comú resolen el problema sense esforç. En la recerca de vies i mètodes de tractament d'un problema, el problema mateix ha de ser el que mani, no les formes de procedir que a un li resultin més familiars. S'ha de concedir a altres formes de pensar, a altres eines menys usuals, a altres llenguatges distints, l'oportunitat de demostrar la seva eficàcia en cada cas. Es dona una acusada tendència a coincidir una primàcia absoluta als processos i esquemes lògics sobre els intuïtius. La lògica és una bona estructura mental per col·locar adequadament les pròpies idees, l'una a continuació de l'altra, però resulta pobre per al descobriment de nous universos mentals.

### **3.5.4 Bloquejos culturals i ambientals**

La contemplació, l'abstracció, l'especulació, l'ambigüitat... no són activitats mentals de moda, sobretot en certs cercles. No obstant, d'elles han anat depenent els grans avenços del pensament humà. La imaginació s'ha de conrear activament igual que la capacitat de fantasiejar. Si per resoldre un problema cal una idea nova, per definició aquesta no sorgirà examinant només les que hi ha, sinó imaginant les que no n'hi ha. Les situacions reals són complexes, profundes, ambigües i admeten molts punts de vista. S'ha de conrear la contemplació de l'ambigüitat i la profunditat. L'analogia, la metàfora, l'humor són magnífics instruments per a això. El joc i l'esperit lúdic no és només per a

nens. Com Leibniz deia, “mai no són els homes més enginyosos que en la invenció dels seus jocs”. S’ha de conrear en la mesura del possible l’actitud lúdica en la mateixa activitat professional.

Moltes vegades es pressuposa l’existència d’una única resposta correcta i amb freqüència resulta fals. Davant d’un problema convé buscar altres respostes correctes i no quedar-se amb la primera que s’aconsegueixi, igual que convé descartar idees inerts que fan nosa en intentar resoldre un problema. La marca inequívoca per reconèixer una idea inert és la seva incapacitat per posar la ment en acció; es tracta d’una idea que només s’ha rebut sense ser utilitzada, ni contrastada, ni incorporada en combinacions noves. L’antídoto contra les idees inerts consisteix en reconèixer-les i tractar d’experimentar la seva ineficàcia i la convivència de la seva substitució, fent força contra la pròpia tendència espontània a mantenir la seguretat que falsament es pensa que proporcionen. Whitehead (1949) creia que era necessari expulsar les idees inerts de la pròpia educació, aquelles idees que no tenen la capacitat de reaccionar amb altres per constituir sistemes actius, aquelles idees que no es combinen amb d’altres.

En la fase inicial d’enfrontament amb un problema resulta aconsellable que un es prengui el temps adequat per reflexionar, per sobre de plantejaments lògics. Un s’ha de deixar dur per conjeitures imaginatives, per la pròpia fantasia... Més endavant s’examinarà amb rigor i lògica. Les normes ajuden a establir rutines eficaces fins que arriba un moment en el qual es fan ineficaces i perjudicials. No és fàcil determinar aquest moment però s’ha d’estar alerta.

### **3.5.5 Recolzaments sistemàtics per desbloquejar**

La pregunta provocada per una autèntica curiositat és el motor del coneixement. Einstein deia que preguntar sempre era molt important. Quan hom creix s’avergonyeix de preguntar, sembla que implica confessar la pròpia ignorància de l’assumpte, requereix acudir amb modèstia a qui està més assabentat que un mateix. Aquell qui pregunta arriba més lluny, se n’assabenta, adquireix interactivament el coneixement per integrar-lo així en la seva pròpia estructura mental. Aquell que no pregunta, arriba a entendre la meitat, es queda passivament a la penombra i la idea se li escapa. Es podria dir que la pregunta és com l’ham per pescar en el mar de les idees, segons opina Miguel de Guzmán (1991). Fer preguntes implica un cert escepticisme, curiositat, consciència d’un coneixement parcial i el reconeixement de certa ignorància il·lustrada. L’esforç conscient per preguntar-se i preguntar genera aquesta actitud inquisitiva que és la base de tot progrés en el coneixement.

En aquesta línia de fer preguntes es troba el *brainstorming* que té per finalitat ajudar un grup de persones que s’enfronten col·lectivament amb un problema ben definit a produir un bon nombre d’idees valuoses de les que després se n’hauran d’extreure les més adequades. La dificultat específica que ataca és la forta influència negativa que en un grup s’exerceix, a l’hora de proposar idees, quan simultàniament a l’aparició d’aquestes, el grup es permet anar jutjant el seu valor. La possibilitat d’un judici negatiu immediat sobre una idea que sorgeix a la ment d’un dels components del grup és causa evident d’una forta inhibició a presentar-la sense estar molt segur del seu valor. Amb això, idees noves i vàlides no apareixen pel temor que siguin rebutjades. Per contrarestar aquest temor i estimular la producció d’idees, Osborn (1987) proposa que el grup actuï segons les quatre normes següents, sota l’orientació d’un moderador que vigili el seu estricte compliment:

1. Aplaçament del judici: les idees no s’avaluen de moment, no es permet.



2. Espontaneïtat d'idees: el moderador ha d'estimular perquè es proposin tota classe d'idees, fins i tot aquelles que puguin semblar més descabellades. Entre elles, amb o sense modificacions, poden estar les millors solucions al problema.
3. La quantitat condueix a la qualitat.
4. Perfeccionament de les idees que sorgeixen: les idees no són propietat particular de ningú, són del grup. El moderador ha d'estimular el perfeccionament de les idees que van sorgint.

El mètode del *brainstorming* aconsegueix desenvolupar un esperit de cooperació sempre que s'empri adequadament. Les quatre regles del *brainstorming* són també vàlides per al progrés individual de producció d'idees davant d'un problema. També individualment i en solitari es té la tendència a reprimir el flux espontani de les pròpies idees si es deixa actuar massa ràpidament al judici crític.

La sinèctica de Gordon (1963) pretén anar més enllà que el *brainstorming*, afavorint la producció d'assaigs de solució mitjançant la desinhibició de zones més profundes del propi mecanisme cognoscitiu, involucrant l'associació espontània d'idees i percepcions menys conscients, l'analogia, la fantasia.

### 3.5.6 Emocions

D'acord amb McLeod (1992), s'inclouen com a descriptors específics del domini afectiu les creences, les actituds i les emocions. McLeod reserva el terme emocions per a indicar els afectes més viscerals, respostes intenses i de curta durada; la idea d'actitud s'assumirà com una predisposició positiva o negativa que determina les intencions d'una persona i influeix en el seu comportament. Segons Salovey i Mayer (referenciat per Gómez-Chacón, 1997b) les emocions són respostes organitzades més enllà de la frontera dels sistemes psicològics, incloent allò fisiològic, cognitiu, motivacional i el sistema experiencial. Les emocions sorgeixen en resposta a un esdeveniment, intern o extern, que té una càrrega de significat positiva o negativa per a l'individu. Les emocions es poden distingir del concepte d'estat d'ànim, aquestes són més curtes i més intenses.

McLeod (1992) considera que les creences i les actituds són generalment estables, però les emocions poden canviar ràpidament. D'una banda fa referència a les fredes creences entorn a les matemàtiques i a les fresques actituds relacionades amb el gust o rebuig a les matemàtiques i d'altra banda a les calentes reaccions emocionals o les frustracions en la resolució de problemes no estàndard. Una altra característica que les diferencia, és la importància del component cognitiu que els és intrínseca: les creences tenen una component cognitiva important, i per tant es desenvolupen i romanen durant molt de temps; tanmateix les emocions involucren un component cognitiu molt petit (la valoració) i poden aparèixer i desaparèixer molt ràpidament.

Sobre el domini afectiu fan referència a actituds, creences, apreciacions, gustos i preferències, emocions, sentiments i valors. El mateix McLeod (1992) descriu els següents conceptes relacionats amb el domini afectiu: confiança (una de les variables més importants que influeixen en l'aprenentatge), autoconcepte, autoeficàcia, ansietat matemàtica, atribucions causals, atribucions d'esforç i habilitat, incapacitat d'aprendre, motivació.



## Capítol 4: Els jocs i les recreacions matemàtiques a l'aula

Pot resultar estrany per a alguns la proximitat entre el pensament matemàtic i el lúdic, però és un fet profund que una gran part de la matemàtica més seriosa ha estat desenvolupada sota una motivació inicial lúdica i que els puzles i jocs mentals comparteixen amb la matemàtica molts processos de pensament eficaços en un i altre camp. És més, moltes vegades resulta difícil determinar on acaba el joc i on comença l'activitat científica. En aquest capítol s'estudiaran primer unes consideracions generals sobre els jocs i les recreacions matemàtiques i després recerques relacionades amb l'ús de jocs a l'ensenyament de les matemàtiques. També s'estudiaran els jocs matemàtics i classificacions i les matemàtiques recreatives. Per últim es tractaran els avantatges de la utilització dels jocs.

### 4.1 Consideracions generals sobre els jocs i les recreacions matemàtiques

En aquest primer punt es donaran diverses definicions de joc i després es farà una breu història de les recreacions matemàtiques.

#### 4.1.1 Definició de joc

Segons el diccionari de la “*Real Academia Española*” del 1992 el joc es defineix com un exercici recreatiu, sotmès a regles, i en el fet que es guanya o es perd. Marcia Ascher en el seu llibre *Ethnomathematics* diu sobre els jocs el següent:

“En general, les activitats que nosaltres denominem jocs es podrien definir amb més precisió com objectes cap als que tendeixen els jugadors seguint unes regles en les que tots ells estan d'acord. Podem classificar els jocs segons impliquen habilitats físiques, estratègia, sort o una combinació d'elles. Com el que ens interessa són les idees matemàtiques exclouem els jocs que només impliquen habilitats físiques i també els que depenen d'informacions que no siguin exclusivament les regles del joc. Així doncs, els jocs que considerem d'una o una altra manera matemàtics són els que depenen de la sort o aquells en els que les estratègies depenen de la lògica”.(Ascher, 1991, 85)

El joc pot definir-se des de tres perspectives degut al fet que la definició de qualsevol terme depèn de l'àmbit des del qual es conceptualitza, i com es pretén utilitzar com a recurs didàctic s'ha de conèixer què pensen els investigadors, els professors i els alumnes.

Piaget (1982) considera que el joc és una activitat a través de la qual els nens realitzen un procés d'adaptació a la realitat. El psiquiatre Bettelheim (1987) defineix el joc com una activitat de contingut simbòlic que els nens utilitzen per resoldre en un pla inconscient els problemes que no poden resoldre en la realitat. Winnicott (1971) dóna importància al joc per ser intermediador entre la realitat objectiva i la imaginària, permetent portar a terme la realització d'activitats impensables a la realitat. Finalment, Vigotski (1989) observa que aquest espai intermedi que crea el joc és molt important de cara al desenvolupament potencial de l'aprenentatge. Segons Invar i Stoll (1970) i Fletcher (1971) un joc té les següents característiques: 1. En un joc s'hi participa lliurement (en el cas de portar-lo a classe, la majoria vol jugar lliurement); 2. En un joc hi participen dos o més jugadors o s'ha d'enfrontar a una tasca (solitari); 3. En un joc hi ha un conjunt finit de regles; 4. Psicològicament el joc presenta una situació arbitrària clarament delimitada en el temps i a l'espai; 5. Encara que hi hagi un conflicte d'interessos entre els jugadors, la importància social del resultat i situacions del joc són d'una importància mínima; 6. El joc té un nombre finit de jugades i en cada moment els

jugadors tenen plena capacitat per utilitzar la jugada que desitgin, desconegudes a priori per als seus oponents; 7. El joc acaba després d'un nombre finit de jugades. L'antropòleg i historiador Huizinga (1954) defineix el joc com una acció o ocupació voluntària, que es desenvolupa dins de línies temporals i espacials determinades, segons regles absolutament obligatòries, encara que lliurement acceptades; acció que té una fi en sí mateixa i està acompanyada d'un sentiment de tensió i alegria. Segons Bishop (1999) totes les cultures juguen; els jocs són valorats amb freqüència pels matemàtics perquè el comportament segueix unes regles com les matemàtiques. Segons Bishop (1999) podem trobar sis activitats matemàtiques importants i diferents. Les activitats sobre les quals es fonamenten les bases del coneixement matemàtic en les distintes cultures són les següents: 1) comptar; 2) localitzar (trobar la situació pròpia i la d'altres objectes i descriure on està cada cosa en relació a altres); 3) mesurar; 4) dibuixar (en formes són molt importants per a l'estudi de la geometria); 5) jugar; 6) explicar (intentar explicar-se a un mateix i als altres per què les coses passen de la manera que ho fan, per què funcionen els càlculs numèrics i en quines situacions). Bishop (1999) considera que jugar és una activitat matemàtica que inclou les endevinalles, paradoxes, modelització, realitat imaginada, activitats regides per regles, el raonament hipotètic, jocs de cooperació, jocs de competició, jocs en solitari, atzar i predicció. Bishop (1999) afirma que, encara que sembli estrany que "diversió" sigui un constructe important per organitzar un currículum matemàtic, és important per al desenvolupament del joc com a activitat matemàticament significativa. La progressió va des de jocs fins a les matemàtiques com a joc, passant pels jocs matemàtics. Per al desenvolupament cultural del nen, l'estètica dels jocs té tanta importància com el seu significat cognitiu.

Per als professors, els jocs han estat la font de les principals idees matemàtiques que actualment s'accepten com a part central de les matemàtiques. L'activitat matemàtica consisteix en el desenvolupament de certs tipus de models de la realitat i això implica que els jocs imitatius poden ser una base important per a una gran quantitat de l'activitat desenvolupada com educadors en matemàtiques. El joc té també una estreta relació amb el raonament matemàtic i es pot considerar com vàlida l'afirmació que és la base del raonament hipotètic. Des de la perspectiva de la capacitat mental, el joc desenvolupa habilitats concretes de pensament estratègic, endevinació i planificació (Brady, 1978). Segons Huizinga (1954), el pensament hipotètic, l'endevinació, el càlcul aproximat, la demostració i la verificació serien totes elles activitats que entrarien en allò que s'anomena jugar. El procés d'autocomprovació de la generació d'hipòtesis a través de l'examen de les anomalies es relaciona clarament amb el desenvolupament del procés metacognitiu.

Per als estudiants, la idea de joc està associada a diverses accions: entreteniment (divertit), repetició (es pot jugar moltes vegades) i creativitat. El joc, a més a més d'ajudar l'estudiant en el necessari procés de socialització i anar desenvolupant capacitats intel·lectuals com la creativitat, permet divertir-se simultàniament en grup o individualment.

#### **4.1.2 Breu història de les recreacions matemàtiques**

L'anomenada matemàtica recreativa té una llarga història, més aviat lligada a les pròpies matemàtiques que al seu ensenyament. Els jocs es troben en camps com la Teoria de Probabilitat, la Teoria de Jocs i la Teoria de Grafs.

Per començar, el quadrat màgic de nou caselles surt a una llegenda xinesa (segle V a. C.) on es tracta de situar els nombres de l'u al nou sense repetir-se, de manera que les diagonals, columnes i files sumin la mateixa quantitat. En les matemàtiques egípcies i

de Babilònia existeixen problemes de números. Un dels primers és el problema número 29 del papir de Rhind (1650 a. C., Museu Britànic) que planteja el següent: es pensa un número, després se li suma les seves dues terceres parts i a dita suma se li resta la seva tercera part obtenint el número 10. Quin és el número pensat?

Leonardo de Pisa (1175-1250) en participar en un torneig de matemàtiques convidat per Frederic II de Sicília comenta els problemes en el pròleg del *Liber quadratorum*. Més tard Cardano (1501-1576) amb els seus jocs d'atzar en el *Liber de ludo aleae*. Els primers llibres de matemàtica recreativa apareixen en el s. XVII. El primer fou al 1612 escrit per Bachet de Meziac: *Problèmes plaisants qui se font par les nombres*. En aquesta obra es recullen problemes recreatius anteriors entre d'altres. Apareixen problemes sobre transvasaments de líquids, problemes de pesades, pensar un número, travessar un riu, quadrats màgics. També estudien matemàtica recreativa Pascal (1623-62), Fermat (1601-1665) i Leibnitz (1646-1716). En 1624 es registren les obres de Van Etten i en 1694 d'Ozanam. En el 1725 apareixen les obres de Jean E. Montucla. Les matemàtiques es treballaven de manera molt diferent a com molts llibres ho fan avui en dia. Grans matemàtics es plantejaven problemes (moltes vegades per carta) desafiant-se per solucionar-los. I al llarg del segle XVIII grans matemàtics plantejaren problemes de manera aïllada com Euler, Newton, Nicolau Bernouilli, Gauss.

Però l'època més prolífera de la matemàtica recreativa fou en les últimes dècades del s. XIX i les primeres del s. XX: Eduard Lucas (1842-1891) que en quatre volums elabora un compendi amb el títol de *Récréations mathématiques*, Lewis Carroll (1832-1898) tracta continguts matemàtics però també lògics, físics o fins i tot jocs lingüístics (conegut pels seus contes d'Àlicia). S'ha de fer una menció especial a dos autors en aquest camp per ser tant prolífics: Henry E. Dudeney (1857-1930) i Sam Loyd (1841-1911). Dudeney en el 1917 amb la seva obra *Amusements in Mathematics* recopila una gran col·lecció. De Sam Loyd, gràcies al treball del seu fill, es tenen molts problemes i recreacions que havia suggerit en diaris i revistes (*Sam Loyd's Cyclopaedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums*, 1914).

En aquesta breu referència històrica resumida del meu treball més extens (Mallart, 2005) és necessari citar grans autors de la segona meitat del s. XX com Martin Gardner, I. Perelman, P. Berloquin, I. Stewart i B. Bolt. Són autors i recopiladors de problemes, jocs i recreacions matemàtiques.

## **4.2 Recerques relacionades amb l'ús de jocs a l'ensenyament de les matemàtiques**

Krulik (1980) estudia les relacions entre jocs i resolució de problemes, contemplant en quatre etapes els processos matemàtics i fent una correlació amb allò que passa en els jocs. Fa una aplicació en alguns jocs d'estratègia conclouent que els jocs d'estratègia poden ser un vehicle per als professors per introduir les estratègies de resolució de problemes als seus alumnes. Bright i Harvey (1985, 1988) observen que la utilització de jocs pot ajudar a adquirir nivells alts de destreses matemàtiques. Onslow (1990) observa que fins l'aparició del monogràfic *Learning and Mathematics Games* de Bright, Harvey i Wheeler en el 1985, no s'havia realitzat un estudi comprensiu per examinar les condicions en què l'ús d'un joc fos una estratègia beneficiosa d'aprenentatge.

Segons Krulik i Rudnick (1987), en el seu manual *Problem Solving. A handbook for teachers* les habilitats adquirides en condicions divertides es retenen per períodes de temps més llargs que aquelles que s'adquireixen per imposició o en condicions adverses. M.N. Suydam (1987) en un article relaciona els jocs amb els problemes i

comenta l'existència d'alguns estudis indicatius de la millora en la capacitat de resolució de problemes. Williford (1992) relaciona els jocs d'estratègia amb els estàndards curriculars del NCTM (1989) (*National Council of Teachers of Mathematics*). Parla sobre l'enfocament cap a la resolució de problemes i cap a les destreses de raonament, objectius generals d'instrucció matemàtica recomanats pel NCTM. Arriba a la conclusió que poden ser vehicles atractius per augmentar les destreses del raonament matemàtic. El NCTM nord-americà ha realitzat nombroses recopilacions de jocs i activitats lúdiques com *Games and Puzles for Elementary and Middle School Mathematics* (1975) i *Activities for Junior High School and Middle School Mathematics* (1981), i el primer monogràfic de la revista *Journal for Research in Mathematics Education* amb el títol *Learning and Mathematics Games* de Bright, Harvey i Wheeler (1985). En el 1985 l'informe Cockroft recomana l'ús dels jocs. A França l'APMEP (*Association de Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*) mostra diferents jocs aplicables en diversos nivells (1982, 1983, 1985, 1988). S'intenta proporcionar jocs per a una innovació educativa.

A Espanya, el *Grupo Cero* de València (1984-1990) inclou els jocs dins del projecte de currículum en l'etapa que va dels 12 als 16 anys. Miguel de Guzmán va realitzar una intensa tasca de comparació entre jocs i ensenyament, entre jocs i resolució de problemes. Per exemple, va escriure *Juegos matemáticos en la enseñanza* (Guzmán, 1985) i *Wining Strategies for Your Games* (Guzmán, 1992b). També Inés Gómez-Chacón (1989-1992) estudia els jocs i la seva relació amb el currículum de matemàtiques (estudi amb alumnes entre 15 i 16 anys). Ella constata el canvi d'actitud mental davant l'assignatura, i poc a poc davant al plantejament de jocs. Observa que la valoració és positiva doncs no només afavoreix al professor per a l'ensenyament de la resolució de problemes, sinó que ajuda a l'alumne a prendre consciència de les seves capacitats. També Fernando Corbalán (1994) estudia els jocs matemàtics amb alumnes de secundària i batxillerat i Mercè Edo (2002) investiga sobre els jocs, interacció i la construcció de coneixements matemàtics.

### 4.3 Jocs matemàtics i classificacions

Els jocs s'han analitzat de moltes maneres, però és important la descripció de Walter Roth (1902) que distingeix set classes de jocs que trobà a les societats aborígens que ell estudià i segueix considerant-se útil. A més afirmà que aquestes formes es donen en totes les cultures. Els jocs es classifiquen segons si són: imaginatius i impliquen fantasia, humor; realistes (es passa bé usant objectes naturals, orgànics i inorgànics); imitatius (o bé d'aspectes de la natura o bé els nens imiten el comportament adult); discriminadors, fet i amagar, endevinalles; competitius, combats, lluites; propulsius, amb joguines que impliquen moviment (baldufes, llançament d'objectes...); de plaer (música, cançons, danses, etc...).

Per altra banda, també es poden utilitzar els criteris següents per classificar els jocs: per contingut, per materials utilitzats, pel lloc que ocupen en el procés d'aprenentatge, pels jugadors que hi participen... Una manera de classificar els jocs podria ser seguint el currículum, però no s'incidiria en els propis jocs. La classificació dels jocs és molt complicada. J.D. Beasley (1989) en *The mathematics of games* divideix els jocs en quatre classes segons la influència de l'atzar en els mateixos: 1) jocs de pura sort; 2) jocs mixtos d'habilitat i sort; 3) jocs de pura habilitat; 4) jocs automàtics. *L'Enciclopèdia Britànica* (1992) en el seu article *Number Games and Other Mathematical Recreations* els tipifica de la manera següent: diversions aritmètiques i algebriques, diversions geomètriques i topològiques, diversions manipulatives i problemes d'inferència lògica. Fernando Corbalán (1994) tipifica els jocs a secundària i

batxillerat en: a) jocs de procediment conegut; b) jocs de coneixements (si tenen relació amb temes habituals del currículum); c) jocs d'estratègia (si es vol posar a punt procediments per guanyar sempre).

Quant als jocs de procediment conegut, són un tipus de jocs útils a la classe de matemàtiques. Val la pena aprofitar els coneixements de fora de l'aula dels alumnes i no perdre així l'oportunitat de corregir certes concepcions errònies. Entre aquests jocs es compta amb el dominó, tipus de fitxes concrets, el cub Rubik i altres puzles geomètrics a l'espai, l'oca, el joc de vaixells, jocs de raonament lògic... Aquest tipus de jocs contribueixen a inserir l'escola a l'entorn i també a relacionar les matemàtiques amb la vida quotidiana. Quan s'aprofiten jocs de procediment conegut es produeix un element positiu: l'atenció a la diversitat. Quan un alumne no és bo a l'àrea de matemàtiques però és un expert jugador de cartes, pot passar a jugar un paper actiu i protagonista, cosa que en condicions normals mai hauria arribat a passar.

Segons Ana García Azcárate i el mateix Fernando Corbalán (1998) es poden contemplar dos tipus de jocs: els jocs de coneixements (aquells que busquen els tòpics i algorismes habituals en els programes) i els jocs d'estratègia (en els que s'ha de buscar procediments per guanyar sempre o, almenys, per no perdre). Els primers són aquells en què el seu desenvolupament exigeix la utilització de continguts exposats a l'aula. Els segons exigeixen la utilització de tècniques heurístiques per a la resolució de problemes. D'aquests dos tipus se'n parlarà més extensament a continuació.

Per altra banda, d'acord amb Bishop (1996a), l'activitat matemàtica pot agrupar-se dins de l'ensenyament obligatori en tres tipus: a) activitats per al desenvolupament de conceptes clau; b) aplicació de les matemàtiques (treball sobre projectes); c) investigacions per mostrar com es generen, estructuren, desenvolupen i es relacionen les idees matemàtiques. La utilització d'activitats lúdiques es centraria bàsicament en el darrer tipus malgrat podrien complementar el primer tipus i també el segon.

Per últim, hi ha una altra classificació dels jocs que incideix en el lloc que ocupa en el procés d'ensenyament-aprenentatge de les matemàtiques (Bright, Harvey, Wheeler, 1985). Els que es juguen per intentar induir un concepte abans de formalitzar-lo (jocs preinstruccionals). Els que es juguen paral·lelament a la presentació d'un concepte (jocs coinstruccionals). Els que es juguen utilitzant coneixements o procediments ja tractats amb anterioritat (jocs postinstruccionals). Si es tracta d'un joc preinstruccional no pot ocórrer que no siguin adequats per culpa de pressuposar coneixements previs que encara no posseeixen els alumnes. I en el cas d'un joc postinstruccional, no pot succeir que no s'hagin complert els objectius marcats en el treball anterior.

Seguint la classificació anteriorment esmentada d'Azcárate i Corbalán (1998), a continuació es distingiran dos punts: els jocs de coneixement per ensenyar matemàtiques i els jocs d'estratègia per ensenyar matemàtiques.

#### **4.3.1 Els jocs de coneixement per ensenyar matemàtiques**

Un bon joc de coneixements ha de complir una sèrie de condicions que es comenten a continuació. Primer han de tenir una presentació engrescadora perquè vingui de gust jugar amb ells (un suport digne i cuidat). En segon lloc han de tenir unes regles senzilles i conegudes per tothom. En tercer lloc, els continguts matemàtics implicats en el joc han de ser adequats per als estudiants. En quart lloc la duració ha de ser aproximadament d'una sessió de classe; no es poden acabar a casa ni el dia després. A més a més no té perquè durar molt, provocaria avorriment i cansament. En cinquè lloc, ha de treballar

destreses numèriques, algebraïques... (en condicions normals, només s'aconsegueix mitjançant la repetició avorrida d'exercicis). En sisè lloc, ha de treballar conceptes bé introduint-los, bé reforçant-los en el cas d'haver-los vist anteriorment. En setè lloc, ha de treballar estratègies de com fer conjectures, com observar regularitats, etc.

Així doncs, els jocs de coneixements permeten no només motivar, interessar als estudiants i fer-los passar unes estones agradables que els descobreixin les matemàtiques com amenes, sinó també treballar aspectes matemàtics, tant conceptuals com procedimentals. S'aconsegueix un ensenyament més actiu, que implica més a l'estudiant, i s'aconsegueixen modificar les actituds negatives. És una nova metodologia. Pels alumnes, els jocs de coneixement ofereixen la possibilitat de la intervenció de l'atzar en el desenvolupament del joc, intervenció que serveix per a la igualació de tots.

Els jocs de cartes són representatius d'aquest tipus i ofereixen el càlcul de probabilitats (pòquer), el recompte de casos, les classificacions, les ordenacions, les operacions aritmètiques. Hi ha aspectes de resolució de problemes que s'apliquen com per exemple el suposar el problema resolt (començar pel final) o resoldre problemes parcials. Exemples: l'escombra (retirar cartes que sumen 15 punts)...

Els jocs de coneixement serveixen per adquirir i/o finançar d'una manera més lúdica conceptes i/o algorismes matemàtics. La seva utilització pot fer-se tant al principi per introduir quelcom nou com per recordar-ho, si es juga més tard. Són el tipus de jocs majorment acceptats doncs sembla que no es desviïn gaire del programa estàndard de matemàtiques.

### **4.3.2 Els jocs d'estratègia per ensenyar matemàtiques**

Veiem el concepte d'estratègia. L'origen de la paraula estratègia (i tàctica) prové del vocabulari militar des dels antics grecs. En el Diccionari de matemàtiques de Bouvier-George (1979) es registra el que segueix: Estratègia d'un jugador. Descripció completa de la manera com s'hauria de comportar el jugador davant qualsevol circumstància possible, en cada jugada. En un joc finit, si es coneixen les estratègies dels jugadors, es pot saber el desenvolupament i el resultat del joc.

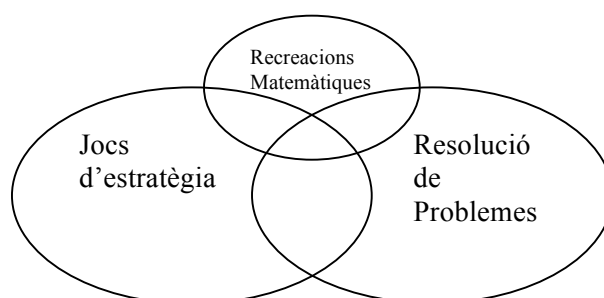
Es defineix estratègia guanyadora com una estratègia que porta al jugador a un èxit prescindint del que fan els seus adversaris (Guzmán, 1992a). En el camí cap a una estratègia guanyadora juguen un paper important les idees que produeixen o proporcionen reflexions apropiades. En aquest sentit es distingeixen les idees clau i les idees afavoridores. Les idees clau són aquelles que desencadenen una estratègia guanyadora total o una estratègia parcial (per guanyar una determinada posició) per a un joc. Les idees afavoridores són les que faciliten l'anàlisi del joc i permeten, a vegades, desencadenar una estratègia. Totes les idees clau són afavoridores, però no totes les idees afavoridores són clau. Segons Schoenfeld (1985b) l'ús amb èxit d'una estratègia no depèn només del coneixement de l'estratègia, sinó d'una bona presa de decisions i d'un extens repertori de les seves destreses. No es pot esperar, diu Schoenfeld, que el domini en heurístiques reemplaci un coneixement menys profund de la matèria, l'èxit en qualsevol domini depèn dels ciments. Per al mateix autor Schoenfeld (1979), en un article anterior, trobar una heurística apropiada és condició necessària però no suficient per resoldre un problema. L'Estratègia Guanyadora d'un joc pot trobar-se utilitzant tres importants estratègies de resolució de problemes:

- Començar pel final
- Estudi sistemàtic de tots els casos



- Utilització de la simetria

Per altra banda, des del meu punt de vista existeix una relació molt propera entre descobrir una estratègia guanyadora en un joc i trobar un pla d'atac exitós que permeti resoldre un enigma matemàtic. És per aquest motiu que malgrat reconegui que hi ha diferències entre jocs matemàtics i recreacions matemàtiques, contemplo les recreacions matemàtiques com un subgrup dels jocs d'estratègia. Si són diferents els enigmes dels jocs doncs els objectius no són iguals. Mentre que en els jocs l'objectiu és guanyar sempre, en les recreacions matemàtiques l'objectiu sempre és trobar una solució. Però si s'interpreta el fet de trobar una solució com l'haver vençut una sèrie de dificultats utilitzant unes normes prèviament conegudes, significa que s'ha trobat una estratègia adequada i correcta. Aquí es troba el paral·lisme entre l'estratègia guanyadora anteriorment definida i l'estratègia adequada i correcta acabada d'esmentar. Es podria considerar el següent diagrama, tenint en compte que a la intersecció dels dos conjunts hi ha més subgrups a més de l'indicat:



Quadre 4.1: Diagrama que relaciona les recreacions matemàtiques amb els jocs d'estratègia i la resolució de problemes.

Els jocs d'estratègia requereixen d'unes explicacions prèvies sobre els objectius a aconseguir per evitar rebutjos per part dels pares sobretot. Tendeixen a pensar que el que no és seriós no serveix i no són matemàtiques. Els jocs d'estratègia són un cas particular de problemes, estan immersos en el gran corrent de la resolució de problemes. Amb els jocs, en la recerca d'estratègies guanyadores es posen en funcionament algunes de les estratègies de resolució de problemes que certs estudiants no només fan de forma intuïtiva, sinó amb gran destresa, ductilitat i adequació. Així doncs, els jocs serveixen per utilitzar estratègies i també poden usar-se com una forma d'instruir a l'alumnat en les estratègies de resolució de problemes.

Els jocs d'estratègia tracten d'iniciar o desenvolupar les destreses específiques per a la resolució de problemes i els modes típics de pensar matemàticament a partir de la realització d'exemples pràctics (no de la repetició de procediments fets per altres) i atractius. Els jocs d'estratègia poden servir de manera significativa per treballar alguns aspectes difícilment abordables des d'un altre tipus d'activitats. Concretament, les autorestriccions, les falses intuïcions, els canvis d'enunciat i/o llenguatge i/o de context i les generalitzacions. Sobre els jocs petits d'estratègia es poden distingir els jocs bipersonals d'informació completa (sense intervenció de l'atzar). Per exemple: tres en ratlla, jocs amb tauler... Aquests jocs es caracteritzen per tractar-se de partides de curta durada amb una finalitat i unes regles on és possible determinar una estratègia guanyadora. En tots aquests jocs que s'obtenen a partir de coneguts amb alguna variant matemàtica es treballa l'establiment d'analogies amb el joc inicial, atenent a les seves semblances i diferències, amb la finalitat de trobar l'estratègia particular de cada joc, i al mateix temps relacionar les diferents estratègies trobades. A més a més, l'estudi de les diferents formes de jugar i de les aproximacions que fan els alumnes per la resolució

d'un joc com els anteriors pot revelar possibles dificultats com la diferenciació entre joc d'atzar i estratègia, determinació d'estratègies parcials i/o incorrectes, la falta de generalització i d'aplicació d'estratègies particulars obtingudes en casos semblants, i la poca relació i/o utilització de conceptes i procediments de les matemàtiques. En l'aprenentatge de les matemàtiques resulta necessari saber fer conjectures o descobriments de lleis (generalitzacions) i pot treballar-se amb aquests jocs d'estratègia.

Els jocs matemàtics s'han de contemplar com un tipus de problemes o com una font generadora de problemes dins de la resolució de problemes, que comença en el 1945 amb la publicació del llibre de Polya *Cómo plantear y resolver problemas*. Fou l'origen del moviment de resolució de problemes. Els jocs, i en particular els d'estratègia, poden desencadenar la recerca de determinades estratègies en resolució de problemes. L'informe del *National Council of Supervisors of Mathematics* nord-americà en el qual es comentava que “aprendre a resoldre problemes és el principal objectiu a l'hora d'estudiar matemàtiques”. L'*Agenda for Action* de 1980 del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) registra la recomanació que la resolució de problemes sigui el principal objectiu de l'ensenyament de les matemàtiques a les escoles dels vuitanta.

Falta encara estudiar com transferir les estratègies que l'alumnat coneix i aplica als jocs (o que desconeixia i la situació del joc li ha induït a utilitzar) a altres branques de la seva activitat intel·lectual i concretament a l'aprenentatge de les matemàtiques. També falta la posada a punt de mètodes per simplificar i que sigui duradora la transferència, reforçant l'adquisició de les estratègies que s'han usat jugant. Encara segueix sense conèixer-se perquè uns estudiants apliquen determinades estratègies i en quina mesura estan influenciats per la seva pràctica matemàtica anterior. Tampoc es coneixen els motius de desànim que fan que uns estudiants abandonin el seu esforç abans que uns altres en la recerca de les estratègies.

#### **4.4 Les matemàtiques recreatives**

En aquest punt les matemàtiques recreatives s'estudiaran des de dos punts de vista diferents. Un primer punt de vista les contempla com una activitat matemàtica. Un segon punt de vista les contempla com una eina metodològica.

##### **4.4.1 Les matemàtiques recreatives: una activitat matemàtica**

Hi ha dues grans fonts per a la construcció d'activitats d'aprenentatge de les matemàtiques. La primera és la utilització de situacions de l'entorn real i la segona són les situacions i problemes que genera la pròpia matemàtica, dins de la qual els aspectes lúdics poden ocupar un lloc significatiu (Deulofeu, 1999). Habitualment s'entén que el joc es pot utilitzar a l'ensenyament de les matemàtiques en els primers cursos, no obstant, també es pot utilitzar a l'ensenyament de les matemàtiques en les diferents etapes de l'educació, tant a l'obligatòria com a la postobligatòria. Sembla existir la creença que allò que és divertit manca de profunditat i de significació des del punt de vista de les matemàtiques. També s'admet que els jocs i en particular les recreacions matemàtiques són quelcom engrescador per a un gran nombre d'alumnes. Encara que pot ser que algunes recreacions poden ser simples tonteries, també molts dels problemes seriosos (per no anomenar-los avorrits i sense sentit) apareguts als textos són allunyats del que realment són les matemàtiques.

El tema dels jocs es contempla com a poc important pel sentiment utilitarista de la necessitat d'aprendre algorismes i de seguir un programa massa extens marcat pel lloc i

el nivell. H. Heine afirma que aquells que es prenen el joc com un simple joc i la feina amb excessiva seriositat no han comprès molt ni una cosa ni l'altra.

El joc aconsegueix apropar la realitat de l'estudiant a l'escola i li permet veure la necessitat i utilitat d'aprendre matemàtiques. Les activitats lúdiques són enormement engrescadores: el nivell d'implicació és notable. Amb els jocs es tracten diferents tipus de continguts matemàtics, tant de conceptes com de procediments i valors. A més a més, els alumnes poden afrontar continguts matemàtics nous sense por al fracàs inicial. El joc permet aprendre a partir del propi error i de l'error dels altres. També respecta la diversitat de l'alumnat doncs tots poden jugar en funció de les seves pròpies capacitats.

El joc afavoreix el desenvolupament de processos psicològics bàsics necessaris per a l'aprenentatge matemàtic (l'atenció, la concentració, la percepció, la memòria, la resolució de problemes i la recerca d'estratègies...). Aprendre a través del joc és un dret de tots els nens donat que, com indica Bettelheim (1987), el món lúdic dels infants és tan real i important per a ells com per a l'adult ho és el món del treball, i com a conseqüència, s'hi hauria de concedir la mateixa dignitat.

La introducció d'elements lúdics com a motivació és un aspecte molt important. També ho és la matemàtica recreativa com a recurs per a la pràctica de rutines i la feina sobre conceptes. La resolució de recreacions matemàtiques pot servir com un repte individual, i juntament amb els jocs es pot practicar els procediments propis de la resolució de problemes. Per últim, la resolució de jocs matemàtics i la cooperació són aspectes a tenir presents en front a la pràctica dels jocs i la competició. En l'actualitat s'ha perdut o oblidat el sabor del repte intel·lectual i el desafiament d'aconseguir un objectiu difícil, que quan es desemmascara genera plaer. Això ha caracteritzat les matemàtiques durant molt temps, i la institucionalització i l'obligatorietat en tots els nivells de l'ensenyament de les matemàtiques l'ha fet mal. Aquest fet queda manifestat quan es presenten acabats un conjunt d'algorismes i tècniques que es descobriren pas a pas, de forma constructivista. Així s'ha perdut el plaer del descobriment, de vèncer les dificultats generals per superar diverses tasques. Per això no és d'estranyar que els jocs estiguin allunyats de les classes de matemàtiques i que estiguin desapareguts en les programacions oficials. Però les noves teories constructivistes condueixen una altra vegada cap a la necessitat de generar nous coneixements a partir del que ja és sabut, avançant per ampliació. En les matemàtiques recreatives es traduiria en incloure el plaer intrínsec al descobriment de quelcom nou. En aquest entorn és on apareixen els jocs.

En les matemàtiques recreatives interessa destacar el caràcter d'acció, els jocs en què hi hagi quelcom a manipular (encara que sigui paper i llapis) i en els que hi hagi algun objectiu ben definit que aconseguir, essent la o les persones que ho aconsegueixen aquells que guanyen. També es consideren com jocs solitaris, que malgrat tenir aspecte de problemes de passatemps matemàtics, també tenen un enemic a vèncer: les pròpies regles. Les recreacions matemàtiques tenen un aspecte lúdic i són individuals en tant que l'adversari està constituït per les regles del joc i no és una altra persona, per això s'apropen als habituals problemes de matemàtiques. Les recreacions emfatitzen la idea de repte amagada a la resolució d'un problema i al mateix temps, incideixen sobre aspectes importants com són les dificultats per resoldre problemes al trobar-se amb autorestriccions, interpretacions abusives o les implícites del llenguatge verbal que es troben als enunciats, les falses intuïcions, les paradoxes, les particularitzacions i les generalitzacions. Gràcies a les recreacions matemàtiques el resolutor pot combatre certes autorestriccions que li dificulten la resolució de problemes en autoimposar-se condicions que creu implícites a l'enunciat, encara que no existeixen. També es poden

combatre les falses intuïcions amb certes recreacions matemàtiques. A matemàtiques la intuïció és molt important, i per això cal subratllar les oportunitats que ofereixen les recreacions per fomentar-la a través de l'anticipació i l'experimentació. Però és precis reflexionar sobre les pròpies intuïcions a manera de prevenció doncs en ocasions no són certes. Per tractar aquest aspecte es fan canvis en els enunciats, de llenguatge o de context, plantejant qüestions semàntiques i lògiques diferents però també importants.

Aquell que es disposa a jugar s'enfronta amb l'activitat amb una actitud positiva, on no hi tenen cabuda preconceptes respecte a la pròpia capacitat contra el que succeeix enfront a les activitats clàssiques de matemàtiques. Miguel de Guzmán (1985) assenyala que és un fet freqüent que moltes persones declarades incapaces de tota la vida per a la matemàtica gaudeixen intensament amb puzles i jocs amb estructura molt poc distant a les matemàtiques. S'hi troben en elles clars bloquejos psicològics. Les expectatives de qui s'enfronta a activitats lúdiques són de plaer i divertiment. Si es pot transformar l'aula en un lloc on impera l'ambient lúdic, donat l'interès i la curiositat generats per aquest tipus d'activitats, poden sorgir actituds fonamentals per carregar de sentit el procés d'aprenentatge. Un ambient lúdic redunda en una actitud oberta cap al coneixement, i el plaer per aprendre i descobrir, retroalimenta aquest tipus de tasques. Martin Gardner (1987) diu en l'obra *Carnaval Matemático* que amb seguretat el millor camí per despertar a un estudiant consisteix en oferir-li un intrigant joc, puzle, truc de màgia o acudit o paradoxa de naturalesa matemàtica. La matemàtica mateixa pot ser presentada a l'alumne com un gran desafiament que admet regles particulars, promovent l'apropiació de tècniques i la gestació d'estratègies personals que poden donar lloc a nous camins o formes innovadores de jugar. Hi ha jocs a la vida diària que són incorporables a l'ensenyament de la matemàtica ja que amaguen coneixements o procediments propis d'aquesta disciplina o poden ser adaptats per a tal fi. Per exemple els jocs de procediment coneguts (poden ser enriquits i variats per aprofundir en els continguts matemàtics: dominó, escombra, bingo, oca...), els jocs que impliquen la creació d'estratègies (jocs de tauler), els trencaclosques geomètrics (el cub Rubik...) que aguditzen les percepcions espacials a la vegada que promouen el descobriment de propietats geomètriques, els daus i ruletes que desperten l'interès en les probabilitats, els números encreuats, els quadrats màgics, els jocs d'enginy apareguts en llibres, diaris i revistes...

Hi ha una gran diferència entre la perspectiva de les matemàtiques d'un professor i la dels alumnes. El treball matemàtic ha de ser un procés de descobriment per entendre el perquè de moltes coses però els alumnes no ho veuen així. Ells ho contemplen com un cúmul de resultats que han d'aprendre doncs no se'ls dona opció a descobrir per ells mateixos, sinó que se'ls mostra com un fil argumental i coherent. Però això provoca situacions com pensar que si s'aprenen tots els resultats ensenyats ja se saben totes les matemàtiques. Això anul·la la capacitat i les ganes de descobrir. Així s'està acabant amb les matemàtiques, se les està anihilant. Es provoca la creença que les matemàtiques són una matèria tancada i incapaç de propagar-se sobre la qual ja s'ha descobert tot. Per això és necessari despertar l'interès per descobrir o crear matemàtiques, per fer construir unes matemàtiques a l'alumne. I aquí és on juguen un paper molt important els jocs i les recreacions matemàtiques doncs aporten l'espurna d'interès i motivació. En anglès, la paraula "*recreation*" (recreo, entreteniment) significa una forma de joc i al mateix temps una re-creació.

Per combatre l'avorriment es pot recórrer a una doble via: la diversió i el plaer. Així doncs, està més a prop de la matemàtica recreativa la recerca del plaer que la de la diversió. I en aquesta recerca i pràctica del plaer està l'assumpció com a camí principal

de la necessitat d'aconseguir que els alumnes facin matemàtiques, les recreïn. Són les matemàtiques recreatives, i en particular els jocs que com elements manipulatius aconseguen fer les matemàtiques atractives.

El terror o el disgust per la matemàtica té com a creença que la matèria sigui avorrida, difícil i reservada per a uns pocs. El gust per aquesta activitat apareix amb la possibilitat de fer, crear, entendre, solucionar, aplicar, saber qui fou l'inventor i perquè tingué la necessitat d'inventar-ho. El raonament matemàtic és una forta eina en el desenvolupament de la capacitat de pensar, reflexionar i resoldre problemes. El món que ens toca viure requereix de cadascú estar preparat per resoldre problemes permanentment, i resoldre'ls el millor i el més ràpidament possible.

La situació del joc és de tipus social i en ella hi ha diverses regles tant explícites com tàcites que han de ser negociades i complides. Aplicar els jocs a classe pot beneficiar a l'hora d'aprendre un concepte, o adquirir vocabulari nou, o aprendre a treballar en equip, o competir. Els jocs s'emmarquen en un context emocional i afectiu en què Huizinga (1954) considera els jocs en l'educació matemàtica com a voluntaris, lliures; ni habituals ni reals; distesos quant als objectius, encara que la seva pràctica sigui seriosa; aliena a les satisfaccions immediates, però part integral de vida i una necessitat; repetitiva; estretament relacionats amb la bellesa; creen ordre i són ordre, amb regles, ritme i harmonia. Estan relacionats amb l'enginy i l'humor, però no són sinònims d'ells. Tenen elements de tensió, risc i dubte. I cal afegir que no tenen funció moral.

És cert que poden presentar-se dificultats en la posada en pràctica de jocs (poc espai, molts alumnes, manca de materials...). Les classes on els nens fan i juguen són classes desendreçades, sorolloses i amb molt moviment. S'ha d'adoptar una actitud oberta davant aquesta forma de treballar a l'aula. Un ambient de treball distès no té perquè significar menys aprenentatge, com tampoc garanteix l'èxit del procés d'ensenyament-aprenentatge una aula silenciosa i endreçada.

El docent ha de ser conscient que la seva experiència, creences i actituds cap a la matemàtica i en especial cap a la resolució de problemes, encara que no ho expliciti, queden transmeses en la seva actuació i d'elles depèn molt que els alumnes s'engresquin, s'interessin i siguin capaços de treballar aquesta disciplina.

#### **4.4.2 Les matemàtiques recreatives: eina metodològica i objectius**

L'ús del joc com a recurs d'aprenentatge genera un conflicte cognitiu en el professor: quines necessitats tenen els alumnes? És una metodologia adequada? Com garantir que el alumnes interioritzin els continguts matemàtics? El joc té un valor notable com recurs a l'aprenentatge. Es juga perquè el joc és un plaer en sí mateix, però és que permet resoldre problemes simbòlicament i a més es posen en pràctica diferents processos mentals.

No pot deixar d'associar-se la paraula joc al divertiment, alegria i temps lliure. Com és que es pensa en el joc com a eina metodològica? Les següents característiques dels jocs apuntats per Corbalán (1994) ho expliquen: és una ocupació voluntària a la que dedicar-se lliurement; és un desafiament contra una tasca o oponent; ve controlat per un conjunt definit de regles que abracen totes les maneres de jugar-lo; representa una situació arbitrària clarament delimitada en el temps i a l'espai, des de l'activitat de la vida real. Socialment són situacions que es consideren d'importància mínima. Té una clara delimitació a l'espai i al temps desconeixent-se a priori l'estat exacte aconseguit durant el joc. Acaba després d'un número finit de moviments a l'espai-temps.

El joc com una eina metodològica a l'aula ha de ser enfocat correctament. Segons Martínez Recio i Rivaya (1989), el joc per sí mateix no ho és tot. Produeix una motivació inicial, origina situacions didàcticament aprofitables, però posterior a la fase del joc cal que hi hagi una altra fase d'aprenentatge, una fase de reflexió teòrica induïda pel joc. Ha d'estar orientat pels objectius d'aprenentatge. És necessari planificar algun instrument de reflexió teòrica, per a donar una continuïtat a aquests jocs. També és possible que un joc proposat amb objectius particulars derivi en situacions interessants més enllà del que s'espera o es planifica. El docent ha d'estar atent i explorar al màxim el potencial del material.

Els jocs han d'utilitzar-se tenint en compte que han de complir amb els seus objectius educatius i han d'enquadrar-se en l'adequat nivell instruccional: preinstruccional, coinstruccional, postinstruccional. En el primer nivell el joc serveix per provocar en l'alumne l'aparició d'un concepte o algorisme. En el segon nivell, el joc forma part de la programació d'un tema. I en el tercer nivell, el joc servirà per fixar un concepte o practicar habilitats que ja són conegudes per l'alumne. Els jocs han d'utilitzar-se per una fi prevista, de manera que l'alumne és conscient que el que està fent li ajuda en el seu aprenentatge. Els jocs han d'utilitzar-se perquè puguin participar i aprendre tots, amb unes regles molt clares que evitin situacions confuses. El professor és l'encarregat de fer que el joc serveixi per als fins desitjats; ha de planificar-lo i contemplar els possibles obstacles altres aplicacions que poden plantejar-se. S'haurien de planificar les sessions de joc: seleccionar els jocs, determinar els objectius a aconseguir i concretar l'avaluació de les activitats lúdiques. Més importants que les regles i els objectes dels jocs, el professor ha de pensar en els alumnes que té a l'aula, i ha d'adaptar els jocs a les capacitats dels seus estudiants. És per això que per a la introducció de la matemàtica lúdica en el currículum existeixen dues vies. La primera podria ser l'elaboració d'una unitat de programació centrada en els jocs i les recreacions. La segona podria consistir en introduir al llarg d'un tema concret activitats de matemàtica recreativa, tant individuals com col·lectives, per treballar els conceptes i els procediments programats del tema.

#### **4.5 Avantatges de la utilització dels jocs**

Antigament es tenia la creença que un dels principis bàsics era "instruir delectant" i en aquest cas podria traduir-se en la utilització de jocs matemàtics.

Els avantatges de la utilització dels jocs en l'ensenyament són moltes. El principal avantatge és que es tracta d'activitats fàcilment acceptades per ser atractives. El professor no ha de lluitar per motivar els alumnes donat que aquests ja ho estan i a més predisposats molt positivament i el seu interès s'ha despertat.

Si la vida corrent subministra tants models i situacions aptes per a l'ensenyament de les matemàtiques, és natural que es busquin models matemàtics en les joguines que a la vida del nen són essencials, promovent la seva activitat més espontània. Aquest apropament entre matemàtiques i joguines subministrarà, sens dubte, amplis suggeriments per aconseguir la meta ideal de l'ensenyament, que és la de convertir-la recíprocament en un joc per al nen (P. Puig Adam, 1960). La introducció de jocs i passatemps en les classes pot servir per eliminar aquest bloqueig inicial, sortejar el rebuig cap a tot allò que és matemàtic i fer que aquests alumnes arribin a experimentar un cert plaer en una activitat que per a ells és un joc.

En H. Camous (1995) comenta que gràcies a alguns estudis lúdics s'han originat teories matemàtiques fonamentals. Però que a nivell pedagògic el valor dels jocs matemàtics és notable doncs constitueixen un material de vàlua excepcional per a la seva ensenyança. L'atracció i l'interès despertats pel joc garanteixen l'esforç que requereix la investigació matemàtica segons Camous. En l'actualitat, els grans docents científics saben aprofitar a les seves classes la motivació excepcional que susciten les activitats recreatives. Aquestes són generadores de plaer espontani i per aquesta via la matemàtica deixa de semblar una disciplina trista i els matemàtics gent sense sentit de l'humor.

Els especials avantatges dels jocs a l'ensenyament podrien concentrar-se en tres aspectes:

1. Els jocs són activitats acceptades amb facilitat doncs a més a més de venir de gust jugar, sembla no tenir continguts matemàtics.
2. El joc és una activitat atractiva. Com assenyala Suydam (1987), els professors que tenien èxit en la resolució de problemes preguntaven amb freqüència i usaven problemes diferents dels que apareixien en els llibres de text.
3. Es revisa el procés que s'ha seguit per arribar a la solució.

Quan l'alumne juga als jocs d'estratègia (i en particular amb recreacions matemàtiques) li sembla que no està fent en absolut matemàtiques, doncs no necessita grans coneixements matemàtics per jugar. S'ha d'acabar de fiançar els coneixements apresos abans d'aprendre nous resultats o tècniques. Seria un error per a Krulik i Rudnik (1987) ensenyar la resolució de problemes amb noves matemàtiques. Per als mestres, si el joc s'utilitza de forma programada i sistemàtica, es pot ajudar molts alumnes a interioritzar continguts matemàtics que amb una metodologia magistral passarien per alt.

Tots els sectors socials estan d'acord que els alumnes adquireixin i retinguin la màxima quantitat possible de coneixements i habilitats matemàtiques. També s'aposta perquè els estudiants s'engresquin amb les matemàtiques que aprenen i que estiguin motivats per a l'aprenentatge. Segons Johnson i Rising (1967), el desenvolupament d'activitats positives cap a les matemàtiques és la tasca fonamental del professor de matemàtiques. Per això es pensa que el joc és un dels recursos que poden utilitzar-se en l'ensenyament de les matemàtiques. Els jocs s'utilitzen perquè és una activitat pròpia de l'home que ajuda al nen per preparar la seva vida adulta i li serveix per desenvolupar la seva personalitat. Com expliquen Decroly i Boon (1965), el joc és un instint i és sabut que si se satisfan els instints es produeix una sensació agradable. El joc té una fi en sí mateix, el nen juga per jugar, sense buscar res diferent. El joc exigeix la participació activa. Els jocs serveixen per promoure actituds positives cap a les matemàtiques, així l'ambient serà més propici per a l'aprenentatge. El joc guarda relacions amb altres activitats: creativitat, perseverança, recerca d'estratègies... Tothom trobarà una estreta relació entre joc i matemàtiques. El joc requereix dels participants utilitzar els coneixements matemàtics, buscar la manera de jugar millor i discernir l'estratègia millor. En definitiva, es pot atribuir als jocs alguns dels següents objectius: desenvolupar conceptes, proporcionar exercicis i reforçar habilitats, desenvolupar habilitats formatives i potenciar el raonament lògic.

En plantejar jocs a la classe s'aconsegueix crear un cert ambient molt positiu per ensenyar i aprendre; hi ha grans expectatives pel que es farà. No obstant, per no defraudar a l'alumnat, les regles del joc han de ser summament clares, la presentació ha de ser suggerent, ja sigui pel seu aspecte físic o per un contingut actual o divertit. També és aconsellable que els jocs siguin de curta durada doncs d'aquesta manera no es

produceix un avorriment. Per altra banda, els jocs d'estratègia permeten practicar l'expressió matemàtica quan s'ha de comentar els resultats o les estratègies guanyadores de manera oral o escrita.

Però moltes persones odien els exercicis mentals que s'anomenen puzles, jocs o recreacions matemàtiques. De fet, es pot passar per diferents fases successives: una certa repugnància veient els jocs com a enemics, una reconciliació gradual a mesura que un aprèn a col·locar-se adequadament al davant d'ells, un convenciment del paper efectiu que el joc pot representar per a una ampliació de recursos i pràctiques que es poden extrapolar a la vida professional, i per últim, una forta afecció.

Durant el temps de la fase de repugnància provocat pel repte que el joc representa, un se sent amenaçat. La situació de col·locar-s'hi davant, se sembla molt a la de fer un examen desagradable amb perill de fracàs. Fins i tot fent-ho en solitari, sense cap observador, hom es considera en l'obligació de resoldre'l, sota la pressió de fer-ho aviat, i el no fer-ho amb agilitat constitueix un fracàs. L'odi als exàmens que la nostra civilització propicia deixa rastre. Com deia Einstein en la seva autobiografia, durant un any després d'haver acabat la carrera no tingué ganes de pensar en problemes científics. Però s'han d'aprendre dues coses rellevants. Primer, que l'enfrontament amb el joc pot servir de preparació valuosa per a d'altres reptes de la pròpia professió. Segon, que si un problema o joc matemàtic d'expressió tan senzilla era un desafiament per als millors matemàtics de tots els segles, un no té perquè sentir-se amenaçat per la por al fracàs. Així, el joc pot convertir-se en una magnífica preparació, pot ensenyar que la pròpia dedicació professional pot ser exercida amb el mateix esperit lúdic amb què s'enfronta al joc, aproximant-se molt més a un exercici agradable. Tot i així, poden sentir-se favoritismes i fòbies respecte de certs tipus de jocs. Uns es resolen amb millor facilitat que d'altres, d'acord amb l'afinitat a les pròpies aptituds (resulten d'ajuda per apreciar-ho).

Per una altra banda, existeix un inconvenient notable que sorgeix quan es posen en pràctica els jocs: un cop finalitza el joc resulta difícil animar els alumnes a continuar amb l'anàlisi del joc, o bé perquè no es troba la solució individualment, o bé perquè es creu que se'n té una (encara que no ho sigui). Però els avantatges són superiors si s'intenta reconduir la situació i aconseguir un raonament guiat cap a la conclusió adequada i correcta. Tot i que la quantitat de matèria ensenyada serà inferior per haver destinat més temps, serà més profitosa per a l'alumne, tant a nivell personal com intel·lectual i perdurarà més a la seva ment.



## **Capítol 5: Formulació del problema i definició dels objectius de la recerca**

En aquest capítol es concretaran el problema i les qüestions que han estat objecte d'estudi. Seguidament s'exposaran les perspectives en la recerca i s'exposarà el context de la mateixa. Per últim, s'enumeraran els objectius específics de la recerca.

### **5.1 Determinació del problema i qüestions estudiades**

Hi ha dos condicionants en situacions d'aprenentatges matemàtics escolars: les teories psicològiques de l'ensenyament i l'aprenentatge, i el currículum de matemàtiques.

Primerament, el marc psicològic de referència sobre el qual es basa la investigació és la concepció constructivista. Es defensa que l'aprenentatge no es centra en una acumulació de dades memoritzades transmeses des de l'exterior. Per aprendre cal construir significats, i aquest procés de construcció només es pot fer activament des de l'interior, mitjançant l'establiment de relacions entre informacions noves i el que ja es coneix, o entre peces d'informació conegudes però aïllades prèviament. Els continguts escolars que els alumnes hauran de construir ja estan elaborats, formen part de la cultura i del coneixement, tanmateix, els alumnes han de construir significats en relació amb aquests continguts, però, en el marc escolar, ho han de fer sobretot gràcies a la interacció amb els professors i amb els companys. La concepció constructivista, segons Coll (1993), considera l'ensenyament com un procés conjunt, compartit, en el qual l'alumne, gràcies a l'ajut que rep del seu professor, pot mostrar-se progressivament més competent i autònom en la resolució de tasques particulars, en la utilització de conceptes, en la posada en pràctica d'actituds, d'hàbits... La interacció és un element clau en el procés d'aprenentatge. Baroody (1988) recorda que quan l'ensenyament passa per alt la manera real d'aprendre les matemàtiques per part dels alumnes, pot impedir l'aprenentatge significatiu, provocar problemes d'aprenentatge i provocar l'aparició de sentiments negatius vers la matèria i vers un mateix. Encara en l'actualitat no existeixen prou models de situacions didàctiques per aprendre continguts matemàtics de manera conjunta amb uns mecanismes necessaris establerts, entre alumnes i professor, i que permetin una construcció personal dels continguts matemàtics rellevants.

En un segon lloc, l'altre condicionant en l'aprenentatge matemàtic escolar és el currículum de matemàtiques. Clements (2000) recorda la diferència entre el currículum intencional i el currículum implementat. El primer seria el conjunt de matemàtiques que es vol ensenyar, i el segon, el conjunt de les matemàtiques que es fan realment a classe. Tots dos currículums són diferents al currículum aconseguit, que és el que realment han après els alumnes. L'essència del coneixement matemàtic és el raonament, no és una recopilació de dades i procediments relatius a l'aritmètica, la mesura i la geometria com s'ha insinuat durant molts anys. La matemàtica és més que el resultat final de l'aritmètica, la mesura i la geometria dels textos escolars. Encara que la matemàtica és, en part, un conjunt de resultats, en el fons és un esforç orientat cap a la recerca, l'especificació i l'aplicació de relacions. El cert és que la matemàtica podria descriure's millor com la ciència de descobrir pautes i definir ordres. La matemàtica s'assembla molt a un procés continu de resolució de problemes; per a Davis i Hersh (1981) és informació acumulada i esforç continuat per a crear nous coneixements. D'aquesta manera, el domini de la matemàtica requereix comprensió i capacitat per resoldre problemes i retenció de dades concretes (Baroody, 1988).

Partint de la base que fer matemàtica és més que memoritzar i aplicar un conjunt de resultats, hom es podria preguntar si es realitzen prou activitats a les aules que condueixen a l'aprenentatge de les veritables matemàtiques, i si se li dóna la merecida importància a la resolució de problemes. L'*Instituto Nacional de Calidad y Evaluación* (1997), un organisme que depèn del Ministeri d'Educació i Cultura, manifesta que les tècniques d'ensenyament que estaven sorgint buscaven habitar a l'alumne al treball en grup, una manera de millorar la capacitat d'escoltar i de comunicar-se. La resolució de problemes en grup pot ajudar a aconseguir aquests objectius. Pel que fa a la resolució de problemes en grup, l'*Instituto Nacional de Calidad y Evaluación* (1997) comenta que es fomenta el diàleg i la participació activa i passiva i de saber expressar-se i saber escoltar com a factors contribuents a la millora del rendiment en matemàtiques, a l'igual que la socialització de l'individu. A la vista dels fets i de les dades exposades es creu de cabdal importància el trobar dissenys d'activitats d'aprenentatge matemàtic que possibilitin el treball en petit grup, que plantegin situacions de resolució de problemes i en què la interacció entre els participants sigui un element fonamental per al procés d'ensenyament i aprenentatge. Aquesta investigació parteix de la hipòtesi general que en el marc escolar les situacions de resolució de problemes matemàtics no estàndard poden generar situacions de treball en grup. En aquestes situacions apareixen oportunitats d'aprenentatge matemàtic de resolució de problemes matemàtics estàndards. Com a professor de matemàtiques de quatre nivells diferents durant set anys seguits constato que el fet de resoldre problemes utilitzant la tècnica del *brainstorming* és beneficiós per a tots els individus del grup, ja sigui sobre problemes matemàtics estàndard o no estàndard. Si el professor guia les idees i fa preguntes adequades per a la resolució de problemes es produeix un aprenentatge a nivell individual evident, però això no ha estat matèria de la present investigació. A més, en aquestes situacions el tipus de relacions que s'estableixen entre els alumnes i entre ells i el professor poden apropar-se molt a una situació d'interacció constructiva, segons el marc teòric de la concepció constructivista.

Cal tenir present que falten evidències empíriques que responguin a com uns estudiants concrets construeixen una sèrie de coneixements matemàtics dins una situació didàctica escolar de recreacions i situacions de resolució de problemes matemàtics no estàndard. De totes maneres, és convenient concretar la problemàtica general en qüestions que es puguin investigar. En aquest cas s'han seleccionat les següents qüestions objecte d'estudi:

1. En relació amb els possibles aprenentatges matemàtics en situacions problemàtiques no estàndard:
  - Hi ha evidències que existeixen situacions didàctiques amb problemes no estàndard que ofereixen oportunitats d'aprenentatge matemàtic als alumnes d'ESO?
  - Quins tipus d'activitats matemàtiques es donen en un entorn de recreacions matemàtiques? Quin tipus de coneixement matemàtic aporten els entorns de les recreacions matemàtiques?
2. Atès que la tasca que s'analitza es du a terme en una organització social de grup, és previsible esperar que els alumnes presentin diferències entre sí (capacitats, nivell maduratiu, coneixements previs, etc.). En aquest cas:
  - Quin tipus d'influència educativa exerceix el professor per aconseguir un cert ordre en l'exposició de les diferents idees que ha suggerit la situació problemàtica?
  - Quines estratègies utilitza el professor per aconseguir que les seves actuacions siguin ajustades, al mateix temps, als diferents nivells de coneixement dels alumnes del grup?

- Quines estratègies poden ser adequades per encoratjar i guiar cap a la solució d'una recreació matemàtica sense desvetllar la solució real?

## 5.2 Perspectives en la recerca

Molts professors han cregut durant força temps que l'única manera d'aconseguir bons resolutors de problemes era resoldre molts problemes. Però encara que això sigui cert en part, ja que es millora l'habilitat i la capacitat, cal considerar el fet que resoldre molts problemes similars no ajuda a resoldre problemes de tipus diferents. Darrerament, des dels anys 1980's s'ha passat de resoldre molts problemes semblants, a proposar una àmplia varietat de problemes. Tot i això, alguns problemes continuen essent rutinaris, de resolució poc complicada, utilitzant alguns procediments coneguts i fent operacions. Alguns d'ells mostren un interès per connectar les matemàtiques amb el món real. D'una manera creixent, es proposen problemes no rutinaris en els programes d'estudi, en els quals els estudiants hagin de recórrer a procediments diferents a aquells als quals estan habituats. També ha anat augmentant l'interès per treballar les estratègies heurístiques. La influència de Polya ha estat molt important: s'han modificat les seves idees una mica i també s'han creat estratègies relacionades amb les seves quatre fases.

Diverses investigacions mostren que ensenyar als estudiants diferents estratègies augmenta les seves possibilitats quan resolen problemes. Si una d'elles no els funciona, en coneixen d'altres per aplicar. Altres estratègies de gran interès són les que estimulen les imatges visuals, la imaginació i la memòria, com poden ser fer diagrames, numerar les dades i redactar problemes.

Proudfit (1981) féu un estudi sobre els aspectes claus per millorar les destreses de resolució de problemes i distingí discutir la naturalesa del problema, les estratègies utilitzades i les raons per a usar-les. El fet de conèixer què fer i com fer-ho ajuda a fer transferències a nous problemes. La manera en què s'ensenyava la resolució de problemes conduïa a uns resultats o a uns altres. Si la resolució de problemes s'ensenyava com una aplicació d'un procediment els estudiants intenten seguir les regles quan resolen. Si s'ensenyava com una aproximació en la qual cal pensar i aplicar quelcom que pugui funcionar, els estudiants tendeixen a ser menys rígids i més oberts.

L'origen dels errors que fan els alumnes resolent problemes pot ser degut a moltes causes. Pot ser degut al mateix coeficient intel·lectual de l'alumne; en cas de ser baix, es pot treballar l'èxit matemàtic i l'habilitat lectora. Pot ser degut a la carència d'habilitats en destreses bàsiques i en la utilització d'algorismes; en ocasions la dificultat no es troba tant en efectuar una operació concreta sinó en trobar l'operació adequada a calcular. Pot ser degut a interpretar o comprendre incorrectament la relació entre tots els elements del problema. La comprensió lectora és quelcom més que reconèixer paraules. Cal que l'alumne mostri explícitament com tradueix el llenguatge natural en què està escrit un problema al llenguatge matemàtic. Pot ser degut a una mancança de l'habilitat per visualitzar l'espai; hi ha estudis que demostren que en les noies és més pronunciada que en els nois. Alguns estudis han analitzat aspectes com el format, la sintaxi i el context, veient quins tipus de problemes donen millor resultat en ser resolts. S'ha recollit que la complexitat sintàctica augmenta la dificultat, igual que la grandària dels nombres i el nombre d'incògnites.

Per altra banda, hi ha innumbrables activitats on els participants han de descobrir un procediment que els ajudarà a resoldre millor la situació rellegint totes les dades importants de l'enunciat. Des del punt de vista matemàtic, estan vinculades directament a la resolució de problemes. És per aquest motiu que parlar de recreacions matemàtiques

i resolució de problemes és parlar de l'existència d'un cert paral·lelisme en la manera de procedir per arribar a una solució. Autors com Gairín (1990) o Guzmán (1989) han intentat formalitzar la relació entre jocs i matemàtiques establint els passos habituals en l'un i en l'altra i remarcant el paral·lelisme existent quant als processos a desenvolupar. Hi ha diferents autors com Meirovitz i Jacobs (1983), Bishop (1999), Bell i Cornelius (1988), Ferrero (1991) que defensen que el tipus de raonament del jugador té molt a veure amb el raonament des de la matemàtica. D'aquesta manera, les activitats que s'han escollit són moltes vegades situacions afavoridores pel desenvolupament de certs hàbits que permeten després d'analitzar les dades, establir relacions lògiques significatives pel que fa al desenvolupament del pensament matemàtic.

Les recreacions matemàtiques tenen una característica interessant que les fan atractives als ulls de tots els alumnes de la classe. El tret representatiu consisteix en el fet que la seva resolució no depèn de cap mètode explicat anteriorment, així, el jugar i el guanyar està a la mà de tots. Sembla com si l'atzar tingués alguna cosa a dir. Però hi ha un altre factor decisiu per al desenllaç del joc. Les situacions matemàtiques escollides possibiliten la intervenció d'estratègies afavoridores, és a dir, de tots aquells procediments que en ser aplicats per un participant fan que augmentin les possibilitats de guanyar. Els continguts d'aquestes estratègies varien d'una situació a una altra, però tenen en comú que els jugadors han d'escollir de manera intel·ligent les seves estratègies, basant-se en qualsevol informació de què disposin en el moment de resoldre (Corbalán 1997, 29). Tal com s'ha explicat anteriorment, hi ha una diferència entre estratègies afavoridores i estratègies guanyadores en el sentit que les primeres no són mai suficients per a trobar la manera de guanyar sempre, mentre que les segones sí; aquestes darreres són les pròpies dels anomenats jocs d'estratègia, és a dir, jocs sense la intervenció de l'atzar. El jugador que descobreix i aplica alguna estratègia afavoridora té més possibilitats d'èxit en el joc.

La revisió de part del que s'ha escrit sobre recreacions matemàtiques ha induït a pensar que ben seleccionades i ben presentades als alumnes, poden ajudar-los a construir estratègies i a adoptar hàbits correctes de cara a la resolució de problemes en general. Per una altra banda, el treball d'aquestes activitats desenvolupa moltes capacitats interessants en els alumnes, com són l'atenció, la concentració, l'aprofundiment en el significat d'enunciats de problemes, l'autoconfiança, la voluntat de voler resoldre els reptes per ells mateixos essent perseverants, no quedar-se tranquils amb la resposta donada fins a comprovar-la... També és necessària una certa disciplina en resolució de problemes i uns certs hàbits que es poden treballar i afermar amb l'exercici d'aquestes activitats.

### **5.3 Context de la recerca**

Aquesta secció es destina a presentar l'experiència de treballar amb els alumnes la capacitat de raonar mitjançant exercicis diferents als suggerits pel currículum. Les primeres classes de matemàtiques que vaig impartir com a professor em van mostrar dues característiques ben diferenciades: a) les ganes que tenien els alumnes de descobrir coses noves; b) el cansament i el rebuig que presentaven en front al sistema tradicional de rebre la instrucció matemàtica. Aleshores sorgiren diverses preguntes: és possible transmetre els coneixements aprofitant aquesta predisposició positiva? Com és que passats 10 minuts de classe teòrica alguns alumnes ja estan distrets i han desconnectat havent demostrat molt interès inicialment? Va néixer la necessitat d'investigar què és el que interessa a l'estudiant i què és el que convé que aprengui. I a mesura que passen els anys en la vida escolar de l'alumne, es va detectant una manca d'interès en voler resoldre problemes de matemàtiques, englobada en una manca d'acceptar reptes. Una

possible manera de combatre aquest problema es troba en la inesgotable energia que presenten els estudiants per jugar i descobrir.

Així és que la pregunta inicial que es formulà fou la següent: és possible canalitzar les ganes de jugar i descobrir que tenen els alumnes cap a un desenvolupament d'una actitud matemàtica, és a dir, crítica i voluntariosa de resoldre situacions problemàtiques? Breument, es comenta la metodologia que donà unes pautes a seguir, i una guia per formular els objectius de la recerca. En el sisè capítol s'explicarà més extensament.

Així, una pinzellada de la metodologia que ajudà fou la d'una recerca acció que distingeix els següents punts:

- El focus d'estudi: es vol captar novament l'interès per voler resoldre reptes, problemes matemàtics. La necessitat parteix de la manca d'esforç i de la poca motivació que tenen els alumnes segons la pràctica educativa constata.
- Persona que realitza la recerca: un professor de matemàtiques als primers cursos de la ESO, amb formació específica matemàtica i amb una àmplia visió sobre totes les edats escolars posteriors i anterior doncs imparteix des de fa set anys classe als nivells primer, segon, quart d'ESO i segon de Batxillerat.
- Mètodes d'investigació: se segueixen diverses estratègies per a l'obtenció de dades com ara qüestionaris, tests, entrevistes.
- Motiu de la investigació: s'investiga per a canviar l'actitud negativa, millorar l'interès i la resolució de problemes i la voluntat d'afrontar reptes matemàtics.
- El procés: es fonamenta en una pràctica regular d'activitats organitzades que representen reptes atractius pels estudiants.

D'aquesta manera, el treball s'ha realitzat per satisfer els següents propòsits:

- La millora de l'actitud dels estudiants vers els reptes, en particular, vers els problemes matemàtics.
- El desenvolupament del pensament crític desfer certs bloquejos mentals.
- La millora de l'atenció.
- El desenvolupament de la intuïció matemàtica.
- La inclusió de nous enfocaments en la pràctica educativa.
- La obtenció de dades que puguin generar nous treballs en un futur.

El procés seguit en aquesta recerca pot considerar-se constituït per les següents fases:

- a) Es comença amb la necessitat de millorar els resultats obtinguts en l'assignatura de matemàtiques. Es constata que els estudiants encara estan predisposats positivament a jugar i que la matemàtica recreativa pot oferir un gran servei.
- b) El disseny de les activitats fou concebut al començament com una recopilació d'enigmes matemàtics, bromes i juguesques matemàtiques extretes de fonts diverses: saviesa popular (incloent alumnes), diaris, revistes i finalment llibres. A mesura que es va veure el bon resultat que donaven aquests tipus d'activitats pel gran interès que despertaven, sorgí la necessitat d'agrupar-les i ordenar-les originant un quadern amb algunes d'elles (ANNEX B: Quadern d'activitats).
- c) La planificació del treball fou producte d'una pretensió de voler extreure conclusions sobre una feina que s'estava duent a terme i que semblava ser de gran acceptació. Calia prendre consciència exactament de tot allò que podia influir en la consecució dels objectius marcats que a la seva vegada havien hagut de ser clarament concretats.
- d) La posada en pràctica de la planificació observant i recollint les dades.
- e) L'avaluació de les dades obtingudes a partir de diversos instruments.

- f) La reflexió sobre les anàlisis fetes dels resultats obtinguts.

#### **5.4 Objectius específics de la recerca**

La situació didàctica té com a focus central les recreacions matemàtiques i la resolució de problemes a segon d'ESO. Durant dos anys s'ha estat treballant d'una manera freqüent però poc metòdica, però suficient per poder observar l'èxit i l'acceptació entre els estudiants de la matemàtica recreativa. Durant els cinc anys següents ha estat més metòdica la feina, i el que va començar com un esperit de motivació per aprendre a ensenyar matemàtiques, va acabar especialitzant-se en una recerca de millora de l'ensenyament de la resolució de problemes. Més concretament, els objectius de la recerca han estat dos. En un primer lloc, analitzar el que succeeix en la fase inicial de la comprensió de les dades d'un problema per tal de fer propostes que permetin millorar l'atenció. En un segon lloc, analitzar el que succeeix en la fase de revisió de la solució d'un problema, per tal de mostrar la importància d'aquesta revisió i promoure la seva pràctica.

D'aquesta manera s'han anat definint els diversos objectius més específics de la recerca:

1. Identificar i analitzar indicadors que constatin la comprensió de les situacions plantejades.
2. Identificar indicadors i analitzar el grau de consciència dels alumnes sobre la importància que té comprendre bé l'enunciat de la qüestió.
3. Identificar i analitzar indicadors interpretables que constatin que l'estudiant es preocupa per la solució trobada i la seva explicació.
4. Identificar indicadors interpretables que mostrin el grau de consciència sobre la importància que té revisar la solució i tractar d'explicar-la.
5. Descriure i explicar les actituds dels alumnes quan resolen problemes matemàtics tant de tipus estàndard com no estàndard.

## **Segona Part: Metodologia de la recerca**





## Capítol 6: Metodologia seguida a la investigació

En aquest capítol s'explicarà la metodologia seguida a la investigació. La informació es dividirà en cinc punts diferents. El primer s'ocuparà de la investigació en didàctica. El segon tractarà l'enfocament metodològic de la investigació. El tercer explicarà les opcions de plantejament general preses en el present treball. El quart descriurà els participants, els espais i la temporització. Per últim, es detallarà el disseny del pla de treball.

### 6.1 Investigació en didàctica

“La investigació ha de dir... coses que encara no han estat dites o bé revisar amb una òptica diferent les coses que ja han estat dites.” (Eco, 1982, 49).

Es pot considerar la investigació com la forma de creació de coneixement, ja sigui racionalment o empírica. En aquest sentit, gràcies a la recerca dels científics i investigadors es fa progressar la ciència i cada cop es va sabent més coses que abans ens eren desconegudes. Però en didàctica hi ha dos enfocaments més importants que no pas el fet d'augmentar el pou dels coneixements. Per una banda, una investigació com a contribució a la formació, com a manera de formar-se: el professor mentre ensenya, aprèn. Però també es forma mentre investiga en l'acció, reflexiona i discuteix amb els seus companys. La investigació ja no ha de ser propietat de l'expert tecnocràtic o de l'autoritat acadèmica per dominar els professors imposant-los les fórmules que convenen al poder. Dit d'una altra manera, desapareix el model de piràmide en la investigació. Per altra banda, la investigació contribueix a la innovació i al canvi educatiu. No és pensable promoure reformes sense haver investigat abans els seus possibles efectes. I en aquesta investigació hi han de participar de forma prioritària els seus protagonistes.

En una aula hi tenen lloc molts processos simultàniament i existeix un complex conjunt de variables tant estables com accidentals que interactuen. Ens hem trobat tal com comentà Pérez Gómez (1983), amb una impossibilitat física de recollir totes les activitats, processos i esdeveniments que succeeixen al mateix temps en una aula. És aquesta complexitat dels fenòmens educatius que fa atractiva la seva investigació, però que ha obligat a ser molt selectius a l'hora de fixar-se en determinats aspectes del ventall de possibilitats que ofereix la classe.

#### 6.1.1 Consideracions metodològiques generals

Dues tradicions, considerades genèricament com a quantitativa i qualitativa, han discrepat per mantenir la seva pròpia prevalença i l'estatus científic en el camp de la investigació. Ambdues han configurat el seu propi paradigma d'investigació i elaborat metodologies i tècniques pròpies d'anàlisi (González i Latorre, 1987).

La investigació quantitativa posa l'èmfasi en l'explicació dels fets, la mesura i la quantificació dels fenòmens; utilitza com a instruments majoritàriament l'enquesta, els qüestionaris, les proves objectives, l'observació sistemàtica... i per al tractament de les dades les tècniques estadístiques. La intenció és generalitzar a tota la població els resultats que s'ha descobert amb mostres de la mateixa. En el present estudi s'han utilitzat com a instruments qüestionaris i proves entre d'altres tal com s'explicarà.

La investigació qualitativa emfasitza la comprensió i la interpretació dels fets des del punt de vista dels propis implicats, idea, hipòtesi i teories explicatives, treballant amb

dades qualitatives. Utilitza majoritàriament instruments com poden ser el diari de camp, les entrevistes, els qüestionaris oberts, l'observador, les dinàmiques de grup i realitza investigacions d'estudi de casos (González i Latorre, 1987). En aquest treball també s'han utilitzat les entrevistes. Abrantes (1994) descriu les característiques essencials associades als abordatges qualitius: són naturalistes, tenen una lògica inductiva, s'involucren en la situació, assumeixen una perspectiva holística, adopten una visió dinàmica, procuren estudiar les situacions en profunditat i detall. Per a Abrantes, a l'obra esmentada, un estudi de casos és una descripció i una anàlisi intenses i holístiques d'un fenomen delimitat, i és especialment indicat quan el propòsit és descriure i interpretar un fenomen contemporani en la seva globalitat, més que establir relacions de causa-efecte o quantificar certes variables en una població. Un cas pot ser perfectament una persona, o tal vegada un programa, o un esdeveniment... L'estudi de casos té un caràcter heurístic, pot il·luminar la comprensió sobre el fenomen estudiat i contribuir d'aquesta manera a la descoberta de nous significats. És en aquest sentit que el present treball podrà considerar-se un estudi de cas donat que la pretensió a grans trets és observar si amb els enigmes matemàtics aquest grup de segon d'ESO millora resolent problemes.

Les opcions preses sobre el disseny metodològic tenen present els elements contextuals que Ferreres (1992) subratlla com importants: a) els objectius proposats, b) les característiques del context en el qual es realitza la investigació, c) les teories implícites de l'investigador sobre la validesa general de la tasca a realitzar, d) l'experiència personal de l'investigador, e) el marc teòric en el qual es pretén emmarcar la recerca, f) la vessant didàctica on està inscrita la investigació, g) els pocs antecedents i la poca bibliografia en general sobre l'objecte d'estudi. Per abordar aquesta recerca en l'àmbit educatiu i didàctic en particular s'han pogut escollir molts mètodes. Especialment, donat que les finalitats del treball tenen com a descriptors genèrics identificar, relacionar i explicar, s'ha adoptat un enfocament qualitativoquantitatiu.

Segons Merton i Kendall (1946), els científics socials han arribat a abandonar l'elecció entre dades qualitatives i dades quantitatives: en el seu lloc estan preocupats amb la combinació de totes dues que fan ús dels trets més valuosos de cadascuna. El problema es converteix en determinar en quins punts convé adoptar una aproximació o una altra. En les últimes dècades hi ha hagut un corrent d'integració de la tradició quantitativa amb la qualitativa (Goetz i Lecompte, 1988). Aquests autors entenen les dimensions en les quals ha de moure's la investigació com: a) la dimensió inductivodeductiva, descobrint teories explicatives o dades que corroborin una teoria; b) la dimensió generativoverificativa, descobrint constructes i proposicions a partir d'una o més bases de dades o fonts d'evidència i verificació de proposicions desenvolupades en un altre lloc; c) la dimensió constructivoenumerativa, descobrint constructes analítics o categories que poden obtenir-se a partir del continuu comportamental, procés d'anàlisi en el qual les unitats d'anàlisi es revelen en el decurs de l'observació i la descripció i el procés en el qual les unitats d'anàlisi prèviament definides són sotmeses a enumeració sistemàtica; d) un continuu subjectiu i objectiu. Segons Zabalza (1987), l'opció d'un model quantitatiu o qualitatiu afecta tant la definició del que s'ha d'analitzar com la intenció i el propòsit del procés investigador. En qualsevol cas, la investigació qualitativa suposa un enfocament holístic de la realitat, i s'assumeix per aquells que creuen que aquesta es troba en un moviment constant, i que el coneixement és comprensió i que les finalitats de la investigació han de referir-se a una anàlisi del procés (Fayos, 1996). La metodologia qualitativa és aquella que aporta unes dades que permeten abastar una problemàtica o situació determinada; són dades extretes de la pròpia realitat immediata, concretant-se en l'anàlisi de conductes, fets, paraules i, en

definitiva, en l'observació. Però són dades obtingudes amb la pròpia subjectivitat de l'investigador. Per aquest motiu resulten necessaris certs instruments per fer creïble i vàlid l'estudi. Per al rigor científic, Ferreres (1997) basant-se en Guba, planteja una taula que exposa els quatre aspectes de credibilitat amb els termes positivistes (termes científics) i els termes naturalistes.

<b>Aspecte</b>	<b>Terme científic</b>	<b>Terme naturalista</b>
<b>Valor de veritat</b>	Validesa interna	Credibilitat
<b>Aplicabilitat</b>	Validesa externa Generalitzabilitat	Transferibilitat
<b>Consistència</b>	Fiabilitat	Dependència
<b>Neutralitat</b>	Objectivitat	Confirmabilitat

Quadre 6.1: Aspectes de credibilitat amb termes positivistes i naturalistes (Ferreres, 1997)

Recolzant-se en Guba i en Goetz i Lecompte, Ferreres (1997) proposa els cinc criteris següents per a la credibilitat de la recerca: a) el treball perllongat en el mateix lloc i l'observació persistent; b) el judici crític dels experts; c) la triangulació, definida com el procés pel qual una varietat de fonts de dades, diferents investigacions, diferents perspectives teòriques i diferents mètodes es confronten per tal de contrastar tant les dades com les interpretacions; d) comprovacions amb els participants; e) recollida de material d'adequació referencial, establiment de l'adequació referencial i coherència estructural. Observi's que en aquesta investigació s'han intentat seguir aquests criteris de credibilitat. Durant un any sencer s'ha treballat amb els alumnes en les mateixes aules amb tres professors experts que han ajudat a validar el que es feia.

Quant a la transferibilitat, Ferreres considera que cal tenir present aquelles amenaces que puguin afeblir la comparabilitat i la traduïbilitat. Segons Abrantes (1994), quan fa referència al camp de la recerca en educació matemàtica, la validesa externa és el que té a veure amb la possibilitat de generalització dels resultats obtinguts; ell manifesta que és un punt feble de la metodologia d'un estudi de casos. Tanmateix, considera necessari revisar la idea de generalització, entenent-la com: a) els resultats són hipòtesis de treball; b) és possible confrontar l'estudi amb altres; c) una generalització deixa a càrrec del lector que sigui posada a la llum de la seva pròpia experiència. En aquest aspecte, el treball ha intentat fer cas a Ferreres que planteja tres elements fonamentals: i) la recollida d'abundants dades descriptives que donin peu a poder comparar aquests contextos amb altres; ii) desenvolupar descripcions minucioses; iii) fer mostreig teòric.

La dependència o consistència o fiabilitat, respondria a preguntes de com determinar si els descobriments de la investigació es repetiran de manera consistent si es repliqués amb els mateixos o similars subjectes.

Quant a la confirmabilitat, es plantejaria la pregunta de com establir el grau en què els descobriments de la investigació només són funció de les variables considerades. Ferreres proposa dos criteris que són: els processos de triangulació i els exercicis de reflexió.

Schoenfeld (2000) relaciona un seguit d'aspectes com a estàndards per jutjar les teories, els mètodes i els resultats d'una recerca en educació matemàtica, responnent preguntes com: quanta confiança s'hauria de tenir en qualsevol resultat particular, què constitueix una sòlida raó, què constitueix una prova fora de dubte raonable. Els aspectes tractats

són els següents: a) el poder descriptiu que es refereix a la capacitat d'una teoria per captar el que compta fidelment i en concordança al fenomen que descriu (Hi falta res? Els elements teòrics es corresponen amb coses que semblen raonables?); b) el poder explicatiu que es refereix a la capacitat de poder proporcionar explicacions de com i per què funcionen les coses; c) l'amplitud, entesa com el rang de fenòmens coberts per la teoria; d) el poder predictiu entès com la possibilitat d'especificar alguns resultats abans que tinguin lloc; e) el rigor i l'especificitat, entesos com la correcta i suficient definició dels objectes i relacions de la teoria; f) la refutabilitat; g) la replicabilitat; h) les múltiples fonts d'evidència (triangulació).

### 6.1.2 Paradigma d'investigació positivista versus fenomenològic

Una característica de la investigació educativa és que no posseeix tècniques ni enfocaments exclusivament propis; tots els seus mètodes d'investigació són compartits amb altres ciències. Sobretot comparteix mètodes amb les ciències socials, psicologia i sociologia principalment. Ambdues depenen també sovint dels mètodes de les ciències naturals. Molt vinculat al debat epistemològic sobre la ciència i la tecnologia, encara més lligat a l'enfocament etnogràfic i al crític versus positivisme, es troba un enfrontament quasi irreconciliable entre partidaris d'un i altre paradigma d'investigació. Desconèixer-ho és trobar-se d'esquenes a la realitat social i científica. Davant del positivisme que estudia només els fets socials sense tenir en compte les percepcions dels subjectes, la visió fenomenològica persegueix la comprensió de la conducta des del seu mateix interior. "Essencialment, l'investigador orientat fenomenològicament argumenta que la persona creu que és la veritat, i això és més important que qualsevol realitat objectiva. Les persones actuen sobre el que ells veuen i creuen. Aquesta diferència filosòfica bàsica, en unió amb els atributs psicològics i socials de l'investigador individual, marca el to per a la investigació qualitativa" (Cajide, 1992, 358).

<b>Qualitativa</b>	<b>Quantitativa</b>
Ocurrences particulars	Generalitzacions predictives
Prosa personal	Forma numèrica
Enfocament artístic, il·luminatiu	Enfocament científic "dur"
Flexible, emergent	Estructurat
Qualitat	Quantitat
Fenomenologia	Positivisme, empirisme lògic
Naturalista, de camp	Experimental, empíric
Mostra petita, sense atzar	Mostra representativa, atzar
Anàlisi inductiva	Anàlisi deductiva

Quadre 6.2: Comparació entre investigació qualitativa i quantitativa (Adaptat de Cajide, 1992, 358).

<b>Qualitativa</b>	<b>Quantitativa</b>
Mètodes qualitatiu	Mètodes quantitatiu
Fenomenologisme i comprensió de la conducta des del propi marc de referència de qui actua.	Positivisme lògic; busca els fets o causes dels fenòmens socials, desatenent els estats subjectius.
Observació naturalista, sense control	Mesurament penetrant i controlat
Subjectiu	Objectiu
Pròxim a les dades, perspectiva des de dins	Al marge de les dades, perspectiva des de fora
Fonamentat en la realitat, orientat als descobriments, exploratori, expansionista, descriptiu i inductiu	No fonamentat en la realitat, orientat a la comprovació, confirmatori, reduccionista, inferencial i hipoteticodeductiu
Orientat al procés	Orientat al resultat
Vàlid: dades reals, riques i profundes	Fiabla: dades sòlides i repetibles
No generalitzable: estudis de casos aïllats	Generalitzable: estudis de casos múltiples
Particularista	Holista
Assumeix una realitat dinàmica	Assumeix una realitat estable

Quadre 6.3: Comparació qualitativa quantitativa (Adaptat de Cook i Reichardt, 1986, 29)

### 6.1.2.1 Investigació quantitativa

Les característiques principals d'una investigació quantitativa són les que es descriuen a continuació:

a) L'objectivitat en la investigació educativa és el resultat de la fiabilitat i la validesa dels instruments de recollida i anàlisi de les dades. El rigor requerit per aquest concepte d'objectivitat es troba en el mètode hipoteticodeductiu. La verificació experimental de les hipòtesis exigeix el tractament estadístic de les dades; és a dir, la quantificació. L'investigador experimental ha d'atendre a normes estrictes de la metodologia estadística: operativització de les variables, estratificació i aleatorització de les mostres, construcció d'instruments d'observació objectiva amb suficient grau de validesa i fiabilitat, aplicació de dissenys estructurats, correlació de conjunts de dimensions al llarg de diferents i generalment extenses poblacions...

b) S'investiguen els productes o resultats de l'ensenyament. Es mesura la situació inicial de l'alumne (en aquest cas s'han fet onze proves inicials) i, després d'un període raonable de temps, les adquisicions acadèmiques (al cap d'un any es tornen a passar onze proves en essència iguals). El mesurament dels productes requereix l'operativització exhaustiva de les variables i la consideració única dels aspectes observables.

c) És necessari un estricte control de les variables que hi intervenen. El disseny experimental requereix un control rigorós dels factors implicats, neutralitzant-ne uns i manipulant-ne i observant l'efecte d'altres. L'aula ha de simular les condicions del laboratori. La recerca d'informació quantificable a través d'instruments objectius (com en aquest cas qüestionaris o proves), exclou la subjectivitat, tot allò que sigui anecdòtic o impressionístic.

d) S'estudien situacions caracteritzades per una gran estabilitat en el temps per posar remei als efectes secundaris o laterals. S'ha treballat durant tot un curs amb els alumnes.

e) La metodologia quantitativa té com a objectiu primer la comprovació del grau en què s'aconsegueixen uns objectius prefixats a priori. La perspectiva teòrica parteix del model tecnològic de l'educació. S'assumeix la diferència neta entre fets i valors, la determinació externa dels fins i objectius de l'educació i la neutralitat ètica de la investigació.

### **6.1.2.2 Investigació qualitativa**

La investigació qualitativa es caracteritza pels trets següents:

a) La comprensió del fenomen educatiu és una empresa humana intencional i temptativa, subjecta a limitacions que exclouen com a objectiu central la pretesa objectivitat en la ciència i en l'avaluació educatives. La posició de l'investigador no pot ser neutral en una situació en la qual actuen individus amb intencionalitat i significats subjectius, mediatitzats per diferents posicions, opinions i ideologies mitjançant les quals interpreten els fets i reaccionen en la mútua interacció. De fet, en aquesta investigació, l'investigador és precisament el professor, el que experimenta, cosa que dificulta no tenir intencionalitat.

b) L'objectiu de la investigació i avaluació educatives sobrepasa els límits de les conductes manifestades: els efectes secundaris i a llarg termini són tant o més significatius que els planificats o controlats. Té importància ampliar el camp dels productes de l'aprenentatge (processos del pensament, anàlisi i interpretació, capacitats individuals complexes...) enlloc de restringir-se per exigències metodològiques.

c) Les conductes i els resultats de l'aprenentatge només poden comprendre's quan es tenen en compte els processos que els generen –història i successió complexa de fenòmens i esdeveniments-. La investigació centrada en els processos d'ensenyament-aprenentatge tracta de captar la singularitat de les situacions concretes i les característiques particulars que defineixen una situació i que, en darrer cas, poden ser susceptibles d'informar el curs dels esdeveniments i dels productes de la vida de l'aula. Els estudis sobre processos han de registrar els successos en la seva evolució, observar les situacions i indagar els judicis, interpretacions i perspectives dels participants. Per això s'han usat les entrevistes.

d) La metodologia qualitativa ha de ser sensible, doncs, a les diferències, esdeveniments imprevistos, manifestacions observables i significats latents... L'enfocament naturalista exigeix una recerca del significat, del contingut dels signes externs i dels comportaments simbòlics. És fonamental la immersió de l'investigador en el centre d'intercanvi. I en aquest cas, la immersió és evident doncs el mateix investigador és el professor. Amb tot, l'èmfasi que es posa sobre l'estudi dels processos no implica un rebuig de dades quantitatives ni una infravaloració dels resultats.

e) No és possible intentar comprendre molts fenòmens educatius partint d'un disseny d'investigació rígidament estructurat a priori. L'estudi en aquest camp exigeix, al contrari, que es plantegin dissenys flexibles, capaços d'adaptar-se a situacions no previstes i, fins i tot, insospitades prèviament. La investigació centrada en els processos és, en ella mateixa, també un procés que evoluciona en funció dels descobriments successius i de la transformació del context.

f) El propòsit de la investigació qualitativa és comprendre la situació objecte d'estudi mitjançant la consideració de les interpretacions, interessos i aspiracions dels interactuants, per oferir una informació detallada que no va dirigida a un grup institucional determinat, sinó a la totalitat de sectors implicats.

### 6.1.2.3 Enfocament etnogràfic

Dins del paradigma qualitatiu, l'enfocament etnogràfic que s'ha seguit en aquesta investigació procedeix així:

- Va als alumnes. Busca establir el contacte. Realitza una observació, amb participació en les activitats rutinàries i entrevistes.
- Procedeix inductivament a recollir informació de diverses fonts: observacions, entrevistes...
- Es procura desconfirmar les evidències i els casos discrepants.
- Es pensa sobre els informants.
- La investigació es concep com una recerca exploratòria (generació d'hipòtesis) més que confirmatòria (comprovació d'hipòtesis). Confirmar res implica una definició específica del problema, una opció teòrica concreta i fins i tot una determinada metodologia.

El disseny etnogràfic és emergent, sorgeix després d'un procés d'immersió en la realitat estudiada. Els límits de la investigació els marca el problema i la teoria deriva de les dades. Tots els autors coincideixen a subratllar la importància que té el fet de no utilitzar categories predeterminades, evitant els mètodes estandarditzats. Els mètodes qualitatius s'han associat tradicionalment als estudis antropològics (observació participant, entrevista, ús d'informants). Els mètodes qualitatius permeten estudiar temes, casos o esdeveniments en profunditat i amb detall. Es concedeix també importància als documents escrits –històries de vida, arxius, registres de casos- i es presta una atenció especial al llenguatge i a l'anàlisi conversacional.

Per a Spindler (2000), l'etnografia de la investigació sobre l'escolaritat atén als criteris següents:

- Les observacions són contextualitzades.
- Les hipòtesis i preguntes d'investigació van sorgint a mesura que l'estudi es desenvolupa en el context seleccionat.
- L'observació és prolongada i repetitiva.
- La forma en què els participants en un escenari social veuen la realitat és inferida a partir de l'observació i més formes d'investigació etnogràfica.
- El coneixement sociocultural que posseeixen els participants fa que la conducta social i la comunicació adquireixin sentit per a un mateix i per als altres.
- Els instruments, programes, qüestionaris, guions d'entrevistes... són generats en el lloc d'estudi com a resultat de l'observació i la investigació etnogràfica.
- S'ha d'adoptar una perspectiva transcultural, considerant les diferències culturals com una condició humana natural.
- Gran part del coneixement sociocultural que afecta la conducta i la comunicació en qualsevol àmbit estudiat és implícit i conegut ambigüament només per alguns participants. Una tasca fonamental de l'etnografia és precisament fer explícit el que és implícit pels participants en el context social estudiat.
- Els procediments d'investigació han d'interferir el menys possible els processos d'interacció i comunicació.
- Donat que un informant és una persona que té un coneixement cultural des de dins –en diferents graus d'articulació autoconscient-, l'etnògraf no ha de predeterminar les respostes mitjançant el tipus de preguntes realitzades.
- Es pot usar qualsevol tipus de suport tècnic que pot ajudar l'etnògraf a recollir dades més vives –conducta detallada, natural, immediata-.

#### 6.1.2.4 Tècniques d'investigació etnogràfica

La relació pot ser molt extensa. Aquí s'intentarà presentar només les tècniques més destacades, aquelles que en aquesta investigació didàctica s'han usat:

##### A. Observació.

Ja sigui participant o no, l'observació és una tècnica pròpia de la vida quotidiana que podria semblar de poca importància. Però en aquest tipus d'investigació s'utilitza per respondre preguntes, té una finalitat deliberada, és selectiva i sistemàtica. Com que el mateix observador és el primer instrument d'observació, es troba condicionat per les seves pròpies metes, prejudicis, marc de referència i fins i tot per les seves aptituds per a l'observació.

Evertson i Green (dins Wittrock, 1986) proposen que s'ha de seleccionar:

- El tema a estudiar
- El lloc on efectuar l'observació
- El fragment de la realitat a observar
- Els procediments per observar, instruments per registrar i emmagatzemar les anotacions
- Els subjectes i el context
- Els procediments d'anàlisi apropiats
- El mètode per comunicar les dades, normalment amb un llenguatge descriptiu o narratiu

##### B. Entrevista

Com a tècnica naturalista és més que una simple conversa. Té com a finalitat la d'obtenir informació, sense ser un interrogatori. Tampoc és una entrevista clínica o terapèutica. En etnografia és freqüent l'ús d'entrevistes exploratòries no estructurades. Les entrevistes poden ser informals, guiades, estandarditzades amb preguntes obertes i en profunditat, però també pot ser que una entrevista presenti barrejades aquestes característiques, com és el cas del model d'entrevista que s'ha escollit en el present treball.

##### C. Estudi de casos

Es recorre a múltiples fonts i tècniques per recollir informació entorn del cas. Es procedeix a una anàlisi intensiva d'un tema al llarg d'un temps (Guba i Lincoln, 1985, 375). Pot seguir les fases següents (Patton, 1987, 149):

- Reunir les dades del cas en brut.
- Organitzar i classificar les dades de manera accessible, construint un document o registre del cas.
- Escriure l'estudi narratiu.

Contràriament a l'experimentador que treballa amb variables per determinar la seva significació causal o de l'enquestador que fa preguntes normalitzades a grans i representatives mostres d'individus, l'investigador d'estudi de casos observa les característiques d'una unitat individual, un infant, un grup, una classe, una escola o una comunitat. En el cas que ens ocupa, el grup de segon d'ESO format per la meitat de la secció A i la meitat de la secció B.

Un ús tan ampli està marcat per una diversa gamma de tècniques emprades en la recollida i anàlisi de dades, tant qualitatives com quantitatives com reflecteix aquest estudi. Sigui quin sigui el problema o la metodologia, en el fons de cada estudi de cas hi ha un mètode d'observació. Hi ha dos tipus principals d'observació: observació



participant i observació no participant. Un observador no participant està separat de les activitats del grup que està investigant i evita ser membre del grup. El millor exemple de paper d'observador no participant és el cas de l'investigador assegut a la part de darrera la classe codificant els intercanvis verbals entre el professor i els alumnes per mitjà d'un joc de categories observacionals. Però l'observador ha participat degut a tractar-se d'una investigació-acció on l'investigador és el mateix professor (jo mateix). Bailey i altres (1999) identifica algun dels avantatges inherents a l'aproximació per observació participant. Primer els estudis per observació són superiors als experiments i enquestes quan les dades s'estan recopilant sobre un comportament no verbal. En segon lloc, l'investigador és capaç de discernir un comportament corrent segons es produeix i és capaç de prendre les notes apropiades sobre els seus trets destacats. Val a dir que el professor que és el mateix investigador no ha incidit en comportaments no corrents i aïllats perquè coneix els seus alumnes i no ha calgut prendre cap nota. En tercer lloc, donat que les observacions de l'estudi de casos tenen lloc en un període llarg de temps (en aquest cas tot un any), l'investigador ha desenvolupat una relació íntima i informal amb aquells a qui ha observat, generalment en ambients més naturals que aquells en els quals es desenvolupen les enquestes i experiments. En quart lloc, les observacions de l'estudi de casos són menys reactives que els altres tipus de mètodes de recollida de dades (experiments en laboratoris...).

Els informes que sorgeixen típicament d'observacions es descriuen sovint com a subjectius, polaritzats, impressionistes, idiosincràtics i mancats de mesures exactes quantificables que són el distintiu de l'experimentació i de la investigació per enquesta. De fet, es plantegen preguntes crítiques sobre dos tipus de validesa en la investigació basada en l'observació. Les observacions sobre la naturalesa subjectiva i idiosincràtica de l'estudi d'observació participant tenen a veure amb la seva validesa externa. Com se sap que els resultats d'un treball d'observació són aplicables a d'altres situacions? Els temors que el judici de l'observador es vegi afectat pel seu íntim compromís amb el grup, es relacionen amb la validesa interna del mètode. Com se sap que els resultats d'un treball d'investigació representen el fet real, el producte autèntic?

Denzin (1970) dissenyà uns passos en l'observació participant:

1. Es formula una definició aproximada del fenomen.
2. Es formula una explicació hipotètica de tal fenomen.
3. S'estudia un cas a la llum de la hipòtesi, amb l'objecte de determinar si la hipòtesi concorda amb els fets en aquest cas.
4. Si la hipòtesi no concorda amb els fets, o es reformula la hipòtesi o es redefineix el fenomen que s'ha d'explicar de manera que s'exclouï el cas.
5. Es pot arribar a la certesa pràctica després que s'hagi examinat un nombre petit de casos, però el descobriment de casos negatius refuta l'explicació i exigeix una reformulació.
6. Aquest procediment d'examinar els casos, redefinir el fenomen i reformular la hipòtesi es continua fins que s'estableixi una relació universal, exigint una redefinició o una reformulació de cada cas negatiu.

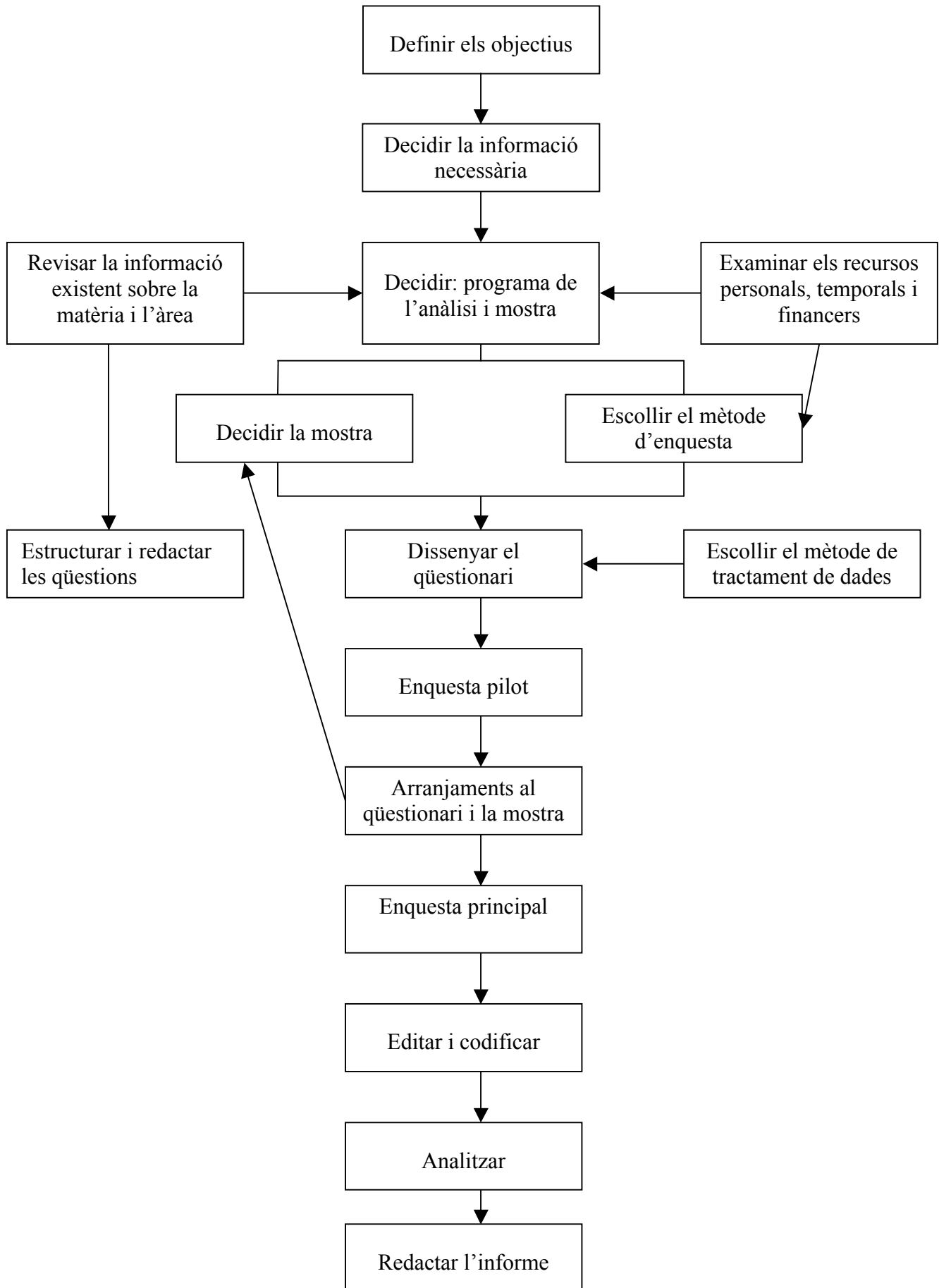
D. Enquestes.

La utilització dels mètodes d'enquesta constitueix l'estratègia d'investigació més difosa entre els investigadors socials, de manera que no pot dir-se que formi part exclusiva del corpus metodològic qualitatiu. Goetz-LeCompte assenyalen (1984, 1352 i ss.) que, en les investigacions etnogràfiques, les enquestes es plantegen després de reunir una informació prèvia amb mètodes més informals i que tenen per objecte plantejar

instruments de confirmació, instruments d'anàlisi dels constructes dels participants i instruments projectius.

Les enquestes de confirmació tracten de verificar l'aplicabilitat de les dades obtingudes a través d'informants clau o altres procediments previs de caràcter menys formalitzat. L'objectiu consisteix a determinar la mesura en la qual els participants sostenen creences similars, comparteixen certs constructes i executen conductes comparables. Les enquestes d'anàlisi dels constructes dels participants se solen emprar per mesurar la consistència de les opinions dels individus sobre determinats fenòmens. Aquestes tècniques exigeixen un treball de camp preliminar amb objecte que l'investigador disposi d'una base inicial per presentar a l'enquestat. Finalment, les enquestes projectives s'utilitzen quan no és possible disposar d'individus que reaccionin als estímuls o contextos reals. Aquestes se substitueixen per fotografies, dibuixos, jocs, etc. que provoquen l'aparició d'opinions i que permetin a l'investigador identificar pautes d'interacció social inobservables en l'escenari natural. En el present treball les enquestes utilitzades vindrien a ser de confirmació i d'anàlisi, no pas projectives.

Hi ha tres requisits per al disseny de qualsevol enquesta: a) la finalitat exacta de la investigació; b) la població sobre la qual es va a centrar; c) els recursos disponibles. La consideració de Hoinville i Jowell (1985) en el *Survey Research Practice* de cadascun d'aquests factors clau en la planificació d'enquestes pot il·lustrar-se en relació amb el disseny d'una investigació educativa com indica el quadre següent:



Quadre 6.4: Disseny d'una investigació educativa

### E. Criteris de credibilitat

Guba (1983) posa de manifest que la investigació naturalista té els seus propis criteris de credibilitat, diferents dels de la investigació racionalista, positivista o quantitativa, i destaca els següents, els quals s'han intentat seguir en aquest estudi:

- Valor de veritat: La veritat dels descobriments s'estableix mitjançant el contrast de les creences i interpretacions de l'investigador amb les fonts d'on s'han obtingut i amb els propis estudiants.
- Aplicabilitat: La transferibilitat dels resultats depèn del grau de similitud entre dos contextos. La tasca de l'investigador no és plantejar generalitzacions immediates, sinó formular hipòtesis de treball que puguin ser susceptibles de transferir-se a altres contextos similars com són estudiants de segon d'ESO en el mateix context escolar (escola i nivell).
- Consistència: La consistència dels resultats no significa estabilitat, sinó dependència o, el que és el mateix, estabilitat i rastrejabilitat (variacions degudes a factors diversos: canvis de la realitat, instruments, error, etc.).
- Neutralitat: Els prejudicis i predisposicions de l'investigador (motivacions, interessos, inclinacions, sentiments, expectatives...) s'han de contrastar amb la neutralitat de les dades, requerint evidència de la confirmabilitat de les dades produïdes.

#### 6.1.2.5 Validesa

El propòsit fonamental del disseny experimental és imposar el control sobre les condicions que confonen els efectes veritables de les variables independents sobre les variables dependents. Els condicionaments de confusió que amenacen de posar en perill la validesa dels experiments s'han identificat per Campbell i Stanley (1963), i per Bracht i Glass (1968). Ells distingeixen entre validesa interna i validesa externa. La validesa interna es refereix a si els tractaments experimentals introdueixen alguna diferència en els experiments específics sota examen. La validesa externa es pregunta a partir dels efectes demostrables a quines poblacions o marcs poden generalitzar-se. Les amenaces per a la validesa interna podrien classificar-se segons les seves característiques constituint els tipus que s'expliquen a continuació.

##### a) Història

Freqüentment en investigació educativa ocorren fets diferents als tractaments experimentals durant el temps entre les observacions test i post-test. S'ha hagut de vigilar per tal que aquests fets no produeixin efectes que puguin atribuir-se erròniament a diferències de tractament.

##### b) Maduració

Entre dues observacions qualssevol, els subjectes canvien en varietat de formes. Aquests canvis poden produir diferències que són independents dels tractaments experimentals. El problema de maduració és més agut en estudis educatius prolongats que en breus experiments de laboratori, i el nostre és un estudi que dura un curs.

##### c) Regressió estadística

Anàlogament als efectes de maduració, els efectes de regressió augmenten sistemàticament amb l'interval de temps entre tests i post-tests. La regressió estadística es produeix en la investigació educativa degut a la manca de fiabilitat dels instruments de mesura i a factors estranys únics per a cada grup experimental. Regressió significa que els subjectes que puntuen més alt en un test tendeixen a puntuar relativament més baix en un post-test, i inversament, aquells que puntuen més baix en un test, tendeixen a puntuar relativament més alt en un post-test. Dit d'una altra manera, en les situacions de

test i post-test hi ha regressió cap a la mitjana. Els efectes de regressió poden dur l'investigador educatiu d'una manera equivocada a atribuir guanys i pèrdues en post-tests.

d) Test

Els tests al principi dels experiments poden produir efectes diferents als deguts als tractaments experimentals. Tals efectes poden incloure subjectes sensibilitzats als propòsits veritables de l'experiment i als efectes pràctics, que produeixen puntuacions més altes en mesures de post-test.

e) Mortalitat experimental

La pèrdua de subjectes a través de baixes es produeix sovint en experiments de llarga durada i pot donar com a resultat confondre els efectes de les variables experimentals, doncs considerant que inicialment s'hagin seleccionat els grups de forma aleatòria, la resta que aguanta és probable que sigui diferent de la mostra sense polaritzar que començà. En el nostre treball sí ha passat però només en casos puntuals. S'ha optat per passar-los les poques proves escrites que els han faltat un altre dia.

Les amenaces a la validesa externa limitaran igualment el grau de generalització que es pugui fer des de les condicions experimentals particulars a les altres poblacions o marcs. A continuació es distingeixen els tipus següents:

a) Fracàs en descriure explícitament les variables independents

Virtualment són impossibles les reproduccions futures de les condicions experimentals, a no ser que l'investigador descrigui adequadament les variables independents. Però tampoc és objecte del present estudi fer generalitzacions doncs en part és un estudi de cas però si calgués s'hauria de tenir molt present el context escolar escollit (mateix centre i mateix nivell).

b) Manca de representativitat de les poblacions disponibles

Podria ser que mentre poden ser representatius d'una població disponible els participants d'un experiment, no ho fossin de la població a la qual l'investigador busqui generalitzar les seves troballes. Però en aquest cas la generalització ateny, si de cas, al mateix centre i la mostra escollida és prou extensa (dos classes de 16 i 17 alumnes).

c) Efecte Hawthorne

Hi ha un cert factor psicològic després únicament de la col·laboració en un experiment. Així es poden contaminar els tractaments experimentals en investigació educativa quan els subjectes realitzen el seu paper. En el cas concret del nostre grup s'ha contrarestat aquest efecte insistint en el fet que les proves comptaran per a la nota final. D'aquesta manera es prenen l'activitat seriosament.

d) Operacionalització inadequada de les variables dependents

Les variables dependents amb les quals opera l'experimentador han de tenir validesa en el marc no experimental al qual desitja generalitzar els seus resultats.

e) Sensibilització a les condicions experimentals

Com en les amenaces anteriors, els tests poden causar canvis en la sensibilitat dels subjectes a les variables experimentals i així confondre els efectes veritables del tractament experimental.

f) Efectes d'interacció de factors estranys i tractaments experimentals

Totes les amenaces anteriors a la validesa externa poden interactuar confonent els tractaments.

### 6.1.2.6 Tècniques de credibilitat

Per tractar la credibilitat d'uns resultats obtinguts mitjançant unes proves determinades trobem diverses tècniques. Principalment se'n practiquen dues: la saturació i la triangulació. A través de la saturació es pretenen reunir proves i evidències suficients que garanteixin la credibilitat de la investigació. Hopkins (1985, 111) posa de manifest que quan s'aplica a una situació d'investigació a l'aula, implica que les hipòtesis o categories generades des de l'observació siguin provades repetides vegades, confrontant-les amb les dades en un intent de modificar-les o falsejar-les. La saturació s'aconsegueix revisant el procés o repetint el nou estudi en condicions anàlogues o similars a la situació original per comprovar si els resultats es mantenen o s'alteren. Quan s'arriba a un punt en el qual aportar més proves o evidències no es considera necessari, ja es pot dir que hi ha saturació i que la hipòtesi queda provada. La triangulació pot ser una tècnica útil quan un investigador aborda l'estudi de casos, per respondre a la multiplicitat de perspectives presents en una situació social. L'estudi de casos necessita representar tots els punts de vista diferents i de vegades conflictius. La definició clàssica de triangulació de Denzin (1988) parteix del fet que la triangulació és la combinació de metodologies en l'estudi d'un mateix fenomen. Kemmis i McTaggart (1988) fa referència al fet que la triangulació suposa un control creuat entre diferents fonts de dades (persones, instruments, materials escrits...) o la combinació d'aquests. Elliott (1989) considera que el principi subjacent en aquesta tècnica és la recollida d'observacions des de distintes perspectives per després comparar-les i contrastar-les. També pot definir-se la triangulació com l'ús de dos o més mètodes de recollida de dades en l'estudi d'algun aspecte del comportament humà. Les tècniques triangulars en les ciències socials intenten traçar o explicar de manera completa la riquesa i complexitat del comportament humà estudiant-lo des de més d'un punt de vista i, així, utilitzant dades quantitatives i qualitatives. Segons actuen els mètodes d'investigació com a filtres, a través dels quals s'experimenta selectivament l'entorn, mai són ni neutrals ni atèorics en representar al món de l'experiència (Smith, 1976). La confiança exclusiva en un mètode pot polaritzar o distorsionar el retrat de l'investigador del tall particular de la realitat que està investigant. Necessita confiar que les dades generades no siguin simplement artilugis del mètode específic de recollida. I aquesta confiança només pot aconseguir-se en allò relatiu a la investigació normativa, quan mètodes diferents de recollida de dades produeixen substancialment els mateixos resultats. Més encara, quant més contrasten els mètodes entre sí, més gran és la confiança dels investigadors. Si per exemple, els resultats d'una enquesta per qüestionari es corresponen amb els d'un estudi per observació dels mateixos fenòmens, més confiarà l'investigador en les seves troballes.

En el context escolar la triangulació s'utilitza sobretot per contrastar els punts de vista del professor, amb els de l'alumne i amb l'observador extern. Elliott (1989) considera que aquesta tècnica té una justificació epistemològica: cada punt del triangle està en una posició privilegiada per accedir a les dades més importants de l'aspecte de l'ensenyament que s'analitza. El professor coneix les intencions i objectius que es proposa amb el seu ensenyament; l'alumne pot explicar com influeixen les accions del professor en les seves respostes, i per últim, l'observador està en la millor de les situacions per recollir dades sobre els trets observats en la interacció professor-alumne.

Santos Guerra (1988, 32-33) troba quatre formes de triangulació, encara que afirma que no es requereix sempre la conjunció de totes elles en cada cas i amb les mateixes dades:

- Triangulació de mètodes: contrastant els resultats mitjançant l'aplicació de diferents mètodes o instruments i estudiant les coincidències i discrepàncies en els resultats obtinguts amb cadascun d'ells.
- Triangulació de subjectes: comparant els punts de vista de diferents participants. Millor si no comparteixen els mateixos punts de vista inicials.
- Triangulació de moments: abans, durant i després del procés.
- Triangulació d'experts: enfrontant els resultats obtinguts per l'equip investigador, amb l'opinió o bé els resultats obtinguts en altres circumstàncies per experts que en aquest cas no hagin participat directament en la investigació. Aquesta visió distanciada, no interessada, representa un bon punt de contrast que pot fer modificar el mateix disseny o alguns aspectes metodològics.

En el present treball s'ha utilitzat la triangulació de moments i la triangulació de tres experts (tres professors del mateix departament amb vint anys d'experiència el que menys en ensenyar matemàtiques a alumnes d'aquesta edat).

Denzin (1988) distingí per la seva banda sis tipus principals de triangulació. El primer és la triangulació en el temps: aquest tipus tracta de prendre en consideració els factors de canvi i procés mitjançant la utilització de dissenys longitudinals i transversals. El segon és la triangulació en l'espai, amb la qual es tracta de superar les estretes mires dels estudis realitzats en el mateix país o dins de la mateixa subcultura. El tercer són els nivells combinats de triangulació, el nivell individual, el nivell interactiu (grups) i el nivell de col·lectivitats (organitzatiu, cultural o social). El quart és la triangulació de teories on s'utilitzen les teories alternativa o competitiva amb preferència, per operar amb un sol punt de vista. El cinquè és la triangulació d'investigadors, on s'inclou més d'un observador. El sisè és la triangulació metodològica que usa el mateix mètode en diferents ocasions o mètodes diferents sobre el mateix objecte d'estudi. S'identifiquen dues categories en aquesta tipologia: la triangulació dins dels mètodes i la triangulació entre els mètodes. La triangulació dins dels mètodes es refereix a la repetició d'un estudi com a comprovació de la fiabilitat i confirmació de la teoria. La triangulació entre els mètodes comprèn l'ús de més d'un mètode en la persecució d'un objectiu donat. Com a comprovació de la validesa, l'aproximació entre els mètodes abraça la noció de convergència entre mesures independents del mateix objectiu.

Resulta tan complex i comprometedor el procés d'ensenyament-aprenentatge en el context de l'escola que la proposta de mètode únic només produeix dades limitades i algunes vegades enganyoses. De les sis categories de triangulació anteriorment comentades, unes quatre s'han usat en educació. Aquestes són la triangulació en el temps, amb els seus estudis longitudinal i transversal; la triangulació en l'espai, com en les ocasions en les quals s'investigaren d'alguna manera en cert nombre d'escoles en una zona o a través del país; la triangulació d'investigadors, com quan un equip d'inspectors visita i informa sobre una escola, i la triangulació metodològica. D'aquestes quatre, la triangulació metodològica és la més usada freqüentment i aquella que possiblement tingui més a oferir.

A la vista de la naturalesa subjectiva de molta de la interpretació qualitativa, s'aconsegueix la validació quan altres, particularment els subjectes de la investigació, reconeixen la seva autenticitat. Una manera de fer-ho, per part de l'investigador, és escriure l'anàlisi dels subjectes de la investigació en termes que puguin entendre'ls i després enregistrar les seves reaccions davant d'ells. Això es coneix com validació de

l'informant. En donar-li importància a la consideració de la validació, l'investigador s'enfronta amb tres àmplies qüestions en contemplar una proposta multimètode per a un problema: Quins mètodes es van a seleccionar? Com es combinaran? Com s'utilitzaran les dades obtingudes?

Quant a la primera qüestió, es pot pensar que qualsevol mètode pot ser eficaç, menys eficaç o ineficaç depenent de la classe d'informació desitjada i del context de la investigació. Quan la intenció sigui generalitzar uns resultats, seria millor treballar amb mètodes que donin dades estadístiques. Quan la intenció sigui obtenir informació que representi una perspectiva personal o fenomenològica o procés més que producte com és en gran part el cas que ens ocupa, serien millors els informes o entrevistes. Si el que es vol és integrar perspectives objectives i subjectives convindria usar mètodes de contrast. Per tant, la primera tasca ha estat decidir quina classe d'informació vol l'investigador i després què es vol fer amb ella. Una possible intenció del present treball és aconseguir una comprensió més completa d'alguna situació. El proper pas és decidir els mètodes més apropiats per proporcionar aquesta informació. De manera general, els primers quatre mètodes presentats en la taula següent proporcionen dades quantificables, i els dos restants dades no quantificables.



Classes d'informació	Tests d'actituds	Observació participant	Entrevistes	Informes	Valoracions dels professors
Destreses acadèmiques			X		XX
Característiques de personalitat		X	X		XX
Destreses socials	X	XX	X		XX
Relacions socials	X	XX	X		XX
Punt de vista individual de l'alumne	XX		X	XX	
Ambient a l'aula		XX			X

XX = mitjans més eficaços i més utilitzats

X = mitjans de suport complementaris

Quadre 6.5: Informació buscada i mètodes per obtenir-la

Però de fet, en aquesta investigació s'ha adoptat una proposta multimètode. La seqüència de procediments per a dur a terme la proposta multimètode al problema estudiat és la que a continuació s'exposa. El primer pas és seleccionar una zona d'interès i aleshores formular un problema d'investigació específic o un conjunt d'objectes d'investigació dins del marc general, per reduir l'àmbit del projecte a proporcions més operables. Aquest primer pas s'ha explicat en el capítol anterior. El segon pas es preocupa d'aspectes més pràctics de la investigació: elecció de l'escola, factors organitzatius, requeriments i problemes procedimentals. Ha estat fàcil doncs s'ha fet en el mateix col·legi on es treballa. El tercer pas comprèn decisions relatives a l'extensió de la informació requerida per complir els objectius d'investigació o resoldre els problemes establerts. El quart pas s'ocupa de l'elecció dels mètodes o fonts necessàries per proporcionar la informació desitjada. Això comprèn relacionar les possibilitats i comparar-les amb les classes d'informació requerides, de manera que s'obtingui una imatge total de quines són eficaces i quines de recolzament. En aquest punt l'investigador ha de decidir l'extensió fins la que buscarà dades quantificables i no quantificables, o usará respostes individuals o de grup. El cinquè pas comprèn portar a terme la investigació, incloent reunir i analitzar les dades. El sisè pas és el que representa el final; és on s'interpreten les dades i s'obtenen les inferències.

### 6.1.3 Característiques metodològiques dels antecedents d'investigació

Abrantes (1994) descriu tres factors essencials que s'han de tenir en compte a l'hora d'escollir la metodologia d'investigació: a) la naturalesa de les principals qüestions; b) la quantitat de control que es pot tenir sobre variables o esdeveniments presents; c) el fet de tractar-se o no d'un fenomen que es desenvolupa en el moment de la investigació. Donant resposta a aquestes tres qüestions, es prenen decisions metodològiques. Les principals preguntes són *com* i *per què* enlloc de *qui*, *quan*, *què* o *quants*; no és possible controlar variables o esdeveniments presents en la situació; el focus de l'estudi fa referència als esdeveniments contemporanis. Abrantes (1994) opta per una metodologia qualitativa, en concret per un estudi de casos, metodologia que subscriu que és especialment indicada quan el propòsit és descriure i interpretar un fenomen contemporani en la seva globalitat, i no és pas establir relacions de causa-efecte o quantificar certes variables en una població. Seguint aquestes indicacions aquesta investigació pot considerar-se un estudi de cas.

Un altre punt de vista és la reflexió de Llinares (1992) que es planteja la dificultat d'accedir als significats. Aquest autor compara diferents metodologies emprades en les recerques sobre creences en els professors. Lester (1994), en una revisió de l'estat de la recerca en resolució de problemes indica un període fructífer en recerques sobre metacognició i la relació entre afectes-creences i la resolució de problemes on la metodologia imperant és l'estudi de casos.

McLeod (1994) precisa que si bé la majoria dels estudis sobre aspectes afectius han estat desenvolupats mitjançant unes tècniques de recollida de dades basades en qüestionaris i mitjançant mètodes tradicionals quantitativs, les influències provinents dels enfocaments antropològics en recerca educativa tenen un gran impacte. Inés Gómez-Chacón (1997a) en la seva investigació sobre les influències afectives en el coneixement de la matemàtica amb poblacions de fracàs escolar en contextos d'exclusió social, utilitza fonamentalment mètodes qualitativs. Així que es defensa la idea de fer un ús intel·ligent de múltiples i variats mètodes de recerca. Per a Carrillo (1996), un cop plantejat i desenvolupat un estudi quantitativ per tal de posar de manifest un estat

general, les anàlisis qualitatives són les que més s'aproximen a l'individu concret. Compartint aquests punts de vista, s'han pres les nostres decisions metodològiques.

Tornant a la dificultat plantejada per Llinares (1992) d'accedir als significats, considera que mai no s'arriben a conèixer les cognicions per elles mateixes, sinó que només es pot accedir a paraules sobre les cognicions.

També, resulta necessari planificar diferents fonts de recollida de dades i diferents naturaleses d'aquestes dades per tal de no caure en l'error que quan hi ha discrepàncies entre les creences expressades i la conducta s'arribi a pensar que és degut al fet que l'instrument o el model han estat escollits erròniament (Vila, 2001).

#### **6.1.4 Investigació descriptiva**

La majoria dels mètodes d'investigació educativa són descriptius; tracten de descriure i interpretar el que és. La investigació descriptiva segons J.W. Best i altres (2003) es preocupa de les condicions o relacions que existeixen; de les pràctiques que prevalen; de les creences, punts de vista o actituds que es mantenen; dels processos en marxa; dels efectes que se senten o de les tendències que es desenvolupen. A vegades, la investigació descriptiva es preocupa de com el que és o el que existeix es relaciona amb algun fet precedent que ha influït o afectat a un esdeveniment o condició presents.

Hi ha tres tipus d'investigació descriptiva: estudis longitudinals, transversals i de tendències o prediccions. El terme longitudinal s'usa per descriure una varietat d'estudis que es realitza durant un període de temps. L'estudi longitudinal recull dades sobre un llarg període de temps; una investigació a curt termini pot portar diverses setmanes o mesos; un estudi a llarg termini pot durar molts anys. Quan s'estudien diferents grups en diferents moments, l'estudi rep el nom de transversal. Si s'estudien alguns factors seleccionats contínuament en el temps, s'empra el terme estudi de tendències. La nostra investigació és descriptiva donat que analitza uns estudis longitudinals (feina feta durant un any). Es passen uns tests inicialment i al cap d'un any es passen uns post-tests.

#### **6.1.5 Investigació acció**

Una possible definició d'investigació acció consistiria en reflectir la idea d'intervenció a petita escala en el funcionament del món real i un examen proper dels efectes de tal intervenció (Halsey, 1972). La investigació en l'acció és situacional doncs es preocupa de la diagnosi d'un problema en un context específic i intenta resoldre'l en aquest context. La investigació acció és normalment col·laboradora donat que els equips d'investigadors i practicants treballen junts en un projecte. Aquest tipus d'investigació també és participativa ja que els mateixos membres de l'equip prenen part directament o indirecta en l'execució de la investigació. De fet, en aquest estudi l'investigador és el professor qui experimenta amb els estudiants. També resulta ser una investigació autoavaluadora donat que s'avaluen contínuament les modificacions dins de la situació en qüestió, essent el seu darrer objectiu la millora de la pràctica d'una manera o d'una altra. D'acord amb Blum (1955) la investigació en l'acció en les ciències socials pot resoldre's amb dos passos: un pas de diagnòstic (on s'analitzen els problemes i es desenvolupen les hipòtesis) i un pas terapèutic (on es proven les hipòtesis mitjançant un experiment de canvi dirigit conscientment, preferiblement en una situació de vida social). En tot allò que es relaciona amb els contextos educatius, Stenhouse (1979) destaca que la investigació en l'acció contribueix no només a la pràctica sinó a una teoria de l'educació i de l'ensenyament que sigui accessible al professorat, i això és

precisament el que s'ha intentat amb aquesta investigació. El marc avaluatiu del mètode de referència roman igual, s'afegeix al coneixement funcional del practicant el dels fenòmens amb els quals tracta. Aquest tipus d'investigació es considera en conjunció amb propostes socials o educatives.

Hi ha diferències importants entre investigació en l'acció i investigació aplicada. Ambdues utilitzen el mètode científic. Donat que la investigació aplicada es preocupa principalment d'establir relacions i provar teories, és força rigorosa en la seva aplicació de les condicions d'aquest mètode. Fins l'extrem que insisteix a estudiar un gran nombre de casos, establir tot el control que sigui possible sobre les variables, i usa tècniques precises de mostreig, tot això presidit per una seriosa preocupació per generalitzar les seves troballes a situacions comparables. La investigació en l'acció, en contrast, interpreta més lliurement el mètode científic donat que el seu focus és un problema molt específic en un escenari molt específic. La importància no rau en obtenir un coneixement a ser generalitzat, sinó en el coneixement precís d'una situació i propòsit particulars. Per tant, les condicions imposades a la investigació aplicada normalment es relaxen amb la investigació en l'acció. Així aquesta investigació no és pas una investigació aplicada de cap de les maneres.

Un cop feta aquesta distinció, un es pot centrar en la investigació acció i preguntar-se quins tipus de programes d'intervenció es destaquen en aquest tipus d'investigació. Hi ha diversos contextos en els quals es pot usar aquest mètode. De fet, s'ha centrat l'interès en un de concret. El primer ha estat un que actua per esperonar l'acció, amb l'objectiu d'obtenir quelcom més expeditivament que si s'utilitzessin mitjans alternatius. Un segon ha estat el que s'autodirigeix cap al funcionament personal, les relacions humanes i la moral i s'ha preocupat així de l'eficàcia de la gent en la feina, les seves motivacions, relacions i benestar general. Un tercer ha estat el que es centra en l'anàlisi de treballs i mira cap a la millora del funcionament professional i l'eficàcia (feina d'un any amb els estudiants observant les respostes als problemes del quadern). Un quart ha estat el que es centra sobre la resolució de problemes en qualsevol context on calgui resoldre un problema específic. Un cinquè ha estat el que proporciona l'oportunitat de desenvolupar coneixement teòric, posant aquí l'èmfasi sobre l'element d'investigació del mètode.

Seguint Benedito (1982, 106) es poden entreveure els elements següents de la investigació activa:

- Un problema educatiu la resolució pràctica del qual interessa.
- Un marc d'acció determinat.
- Definició del problema. Finalitat de la seva resolució.
- Anàlisi del marc en el qual es desenvolupa. Estudi de les variables.
- Plantejament de la hipòtesi i disseny de l'operació a realitzar.
- Resultats definitius en ordre a la resolució del problema.

Segons Elliott (1978), uns altres trets d'una investigació-acció serien:

- Potenciar la col·laboració entre investigadors i docents.
- Investigar situacions que els professors viuen com a problemàtiques, i que admeten una intervenció pràctica.
- Incrementar la comprensió que el professor té de la seva activitat docent.
- Interpretar els esdeveniments de l'aula des de la perspectiva dels seus participants, relacionant-los amb el context particular en el qual es produeixen.

- Utilitzar descripcions i explicacions en llenguatge comprensible pels professors.
- Validar les conclusions de la investigació a través del diàleg amb els participants, utilitzant la tècnica de la triangulació.
- Crear un context de comunicació que permeti el flux d'informació entre l'investigador i els altres implicats en la situació explorada.

Els mètodes més congruents amb aquest tipus d'investigació són més qualitius. I, encara que no s'exclouen els quantitius, aquells predominen clarament. Tant procediments tancats com qüestionaris o l'anomenat "pensar en veu alta" en situacions reals o de laboratori, com procediments més oberts i flexibles: autoinformes, estímulo del record o introspecció basada en la pròpia experiència, observació participant, entrevistes...

La investigació en l'acció és apropiada quan es requereix un coneixement específic per a un problema específic en una situació específica; o quan s'ha d'incorporar un nou mètode en un sistema ja existent. Per exemple el cas del present treball. La seva utilització és recomanable en mètodes d'ensenyament, substituint potser un mètode tradicional per un de descobriment; en estratègies d'aprenentatge, adoptant un mètode integrat a l'aprenentatge amb preferència a un estil de matèria individual per ensenyar i aprendre; en procediments d'avaluació, millorant els mètodes de valoració contínua de cada alumne; en el regne d'actituds i valors, anima a actituds més positives de treball, o modifica el sistema de valors dels alumnes amb respecte a certs aspectes de la vida.

A continuació s'exposen passos i procediments seguits en el nostre programa d'investigació. El primer pas comprèn la identificació, avaluació i formulació del problema percebut com a crític en una situació d'ensenyament diari. El segon pas comprèn un estudi preliminar discutit amb altres persones (professors, investigadors, assessors) que poden culminar en una proposta d'esborrany. El tercer pas comprèn una revisió de la literatura d'investigació per trobar el que es pugui aprendre d'estudis comparables, els seus objectius, procediments i problemes trobats. El quart pas comprèn una modificació o redefinició de la declaració inicial del problema feta en el primer pas. Pot aparèixer en forma d'una hipòtesi que es pugui provar, o d'un conjunt d'objectius-guia. El cinquè pas és relatiu a la selecció dels procediments d'investigació –mostreig, elecció de materials, mètodes d'ensenyament-aprenentatge, dotació de recursos i tasques, desenvolupament del personal ensenyant i altres-. El sisè pas es preocupa de l'elecció dels procediments d'avaluació que s'empren i necessita prendre en consideració que l'avaluació ha de ser contínua en aquest context. El setè pas abraça l'aplicació del projecte en si mateix (sobre períodes de temps variables). Inclou les condicions i mètodes de recollida de dades i la classificació i anàlisi de les dades. El vuitè i darrer pas comprèn la interpretació de les dades, inferències extretes i avaluació general del projecte. Els estudis de les troballes tindran lloc a la llum dels criteris d'avaluació acordats anteriorment. A això pot seguir un procés de recapitulació general en el qual es revisin els resultats del projecte, es facin recomanacions i es decideixin les mesures per a la difusió dels resultats a les parts interessades.

## **6.2 Enfocament metodològic de la investigació**

Durant el procés de disseny, aplicació i reflexió del quadern d'activitats hi hagué una fase important de revisió d'altres reculls d'activitats i de presa de decisions teòriques relacionades amb la qüestió de la resolució de problemes. Com es poden encabir problemes no estàndards en el currículum de segon d'ESO? Què es guanya davant de la

resolució de problemes? Quina part de la resolució de problemes es veu més beneficiada? Quines són les possibles estratègies que els alumnes poden descobrir?

El present treball pot inscriure's en el grup de recerques que investiguen l'estudi del comportament com a resultat de processos constructius desenvolupats en la mateixa situació d'observació. Aquestes investigacions tenen com a finalitat la comprensió dels fenòmens objecte d'estudi en el context en què es produeixen.

Des de la perspectiva de la concepció constructivista hi ha dos trets específics que caracteritzen l'aprenentatge escolar. El primer és que l'aprenentatge s'ha de considerar un procés de construcció de significats i d'atribució de sentits que fa l'alumne. El segon és que aquest procés de construcció que efectua l'alumne necessàriament ha de rebre una orientació o guia externa. En aquest marc d'intervenció i de guiatge del professor, l'ensenyament s'ha de definir com una ajuda al procés constructiu que suposa l'aprenentatge escolar (Coll, 1998). Però la relació entre l'ajuda que ofereix el professor i el resultat de l'aprenentatge de l'alumne no és lineal ni automàtica. Per tal que l'ajuda del professor esdevingui eficaç cal que aquesta s'ajusti al procés constructiu de l'alumne. És sabut que els alumnes només aprenen allò que són capaços de construir per sí mateixos a partir de l'activitat mental constructiva i, al mateix temps, que els aprenentatges dels alumnes depenen essencialment i necessàriament de la influència educativa que exerceixen sobre ells els professors mitjançant la seva intervenció. Basant-se en aquesta manera de pensar és com s'ha treballat durant tot el curs el quadern dissenyat d'activitats per als alumnes. Colomina, Onrubia i Rochera (2001) assenyalen que l'anàlisi de la interactivitat ha permès identificar i descriure dos grans mecanismes d'influència educativa que operen en els processos d'ensenyament-aprenentatge a l'aula, i que són: a) la cessió i el traspàs progressiu del professor als alumnes del control i la responsabilitat de les tasques i els continguts de l'ensenyament-aprenentatge; b) el procés de construcció progressiu de sistemes de significats compartits entre el professor i els alumnes respecte a les tasques i els continguts esmentats. La cessió i el traspàs del control i responsabilitat és la variació dels suports del professor durant el procés d'ensenyament-aprenentatge per tal que aquests es retirin progressivament o se substitueixin per altres que suposen tipus i graus d'ajut qualitativament i quantitativa inferiors per tal que l'alumne assumeixi el control sobre la tasca i continguts d'una manera creixent. En definitiva, que es responsabilitzi del seu procés d'aprenentatge (Coll, 1998).

L'actuació del professor en el traspàs del control als alumnes es caracteritza per:

- Des del començament existeix una actuació conjunta del professor i els alumnes, que permeten als aprenents participar activament encara que els manqui domini del contingut o les habilitats per actuar autònomament.
- El professor ofereix ajuda i suport ajustats als nivells de competència dels alumnes. Aquest guiatge varia al llarg del temps en quantitat i qualitat, de manera que progressivament, el professor disminueix el seu suport a mesura que l'alumne augmenta en competència. Es requereix que el professor estigui atent, observi i analitzi i avaluï regularment l'actuació dels alumnes per tenir elements a l'hora de prendre decisions sobre la seva intervenció.
- El professor retira les ajudes paulatinament fins a anul·lar-les i fa possible l'actuació independent de l'alumne al final del procés.

El segon mecanisme d'influència educativa, la construcció progressiva de sistemes de significats, fa referència a les diverses formes en què professor i alumnes presenten, representen, elaboren i reelaboren durant el curs d'una manera conjunta, representacions de continguts i tasques escolars, i la modificació que degut a aquesta incidència sorgeix en els alumnes respecte als continguts i a la representació de les tasques respecte de les idees inicials (Coll, 1998).

### **6.3 Opcions de plantejament general preses en el treball**

S'ha optat per una combinació de varietat d'enfocaments i d'instruments de recollida de dades i de recerca en general. Es podria dir que aquesta investigació és un estudi de cas que utilitza mètodes quantitatius i qualitatius. Els instruments de recollida de dades han estat qüestionaris i proves de problemes, i el tractament d'aquestes dades ha estat essencialment quantitatiu, encara que aquest tractament ha estat també descriptiu i interpretatiu. Un altre mètode de recollida de dades ha estat la realització d'entrevistes per tal de recollir impressions qualitatives complementàries.

Seguint diversos autors com Del Rincón i Latorre i Sans (1995), Schoenfeld (2000) i Goetz i Lecompte (1988) el treball es pot catalogar com: a) bàsic en tant que es planteja com una finalitat la comprensió de certs aspectes del pensament matemàtic relacionats amb l'ensenyament- aprenentatge; b) inductiu donat que vol descobrir arguments explicatius als resultats poc esperançadors en resolució de problemes; c) generatiu doncs tracta de descobrir els errors procedimentals a partir de l'evidència; d) constructiu per voler modificar aspectes millorables; e) transversal en relació a la dimensió temporal (atenent a entrevistes posteriors formulades a alumnes); f) descriptiu i explicatiu quant a l'objectiu i al seu tractament en profunditat; g) de camp, donat que es desenvolupa en el lloc on es produeix el procés estudiat; h) quantitatiu i qualitatiu pel caràcter de les dades i del seu tractament. Tot el conjunt compon un veritable estudi de cas, en el qual l'investigador i el professor som la mateixa persona. Aquesta és una de les principals característiques de la investigació-acció.

El disseny de Carrillo (1996) ajuda a relacionar els instruments de recerca confeccionant l'estructura següent:

- 1) Els instruments de primer ordre són aquells que serveixen per recollir les dades i han estat: qüestionaris, proves i entrevistes.
- 2) Els instruments de segon ordre que constitueixen els criteris organitzadors de la informació: els indicadors que permetran posteriorment la interpretació de tota la informació recollida. En el cas de la nostra investigació han estat cinc indicadors: l'anàlisi de la comprensió de les situacions plantejades, l'anàlisi de la consciència sobre la importància que té comprendre bé un enunciat, l'anàlisi de la revisió de la solució trobada i la seva explicació, l'anàlisi de la consciència sobre la revisió de la solució i la seva explicació, l'anàlisi de les actituds quan resolen problemes estàndard o no estàndard.
- 3) Els instruments de tercer ordre, que són instruments per sintetitzar i interpretar les dades i per tant són propis de la fase d'anàlisi de les dades. Serveixen per donar sentit a les dades en organitzar-les, sintetitzar-les i compilar-les (González i Latorre, 1987). Aquests instruments s'han analitzat i usat com a característics dels indicadors anteriors. Pel primer indicador es contempen el rigor a la fase de comprensió de l'enunciat,

l'ordre i captació de totes les dades, la comprensió del que es pregunta, la pèrdua d'atenció inicial, el grau de comprensió amb què treballen els problemes, la comprensió de les hipòtesis inicials de la situació. Pel segon indicador es contempen la voluntat i perseverança en comprendre, la manca d'esforç per comprendre motivada per la comoditat que algú explica els dubtes, la pressa per fer el problema en detriment de la seva comprensió, la preocupació per entendre inicialment el problema abans de començar a resoldre'l. Pel tercer indicador es contempen el costum de revisar al final la solució, l'observació de la variació de la solució quan es canvien les dades o les condicions, la pressió per la pressa per trobar una solució i acabar el problema, la disconformitat amb la pròpia solució obtinguda mirant d'entendre-la fent comprovacions o resolucions diferents, la generalització de la solució per aplicar-la en altres ocasions, el convenciment de la correcció de la pròpia solució trobada. Pel quart indicador es contempen la revisió i conscienciació dels propis errors, la preocupació per una resolució correcta, la integració de la revisió de solucions com a part important de la resolució de problemes, el costum de revisar el problema per detectar i aprendre dels errors, el costum de revisar el problema per detectar i aprendre dels errors, la pressió per la pressa en revisar la solució d'un problema, la creença que fer matemàtiques és resoldre molts exercicis relativitzant el que la solució estigui bé. Pel cinquè indicador es contempen el gust per les matemàtiques, la capacitat per fer volar la imaginació, la capacitat de treball individual, l'actitud receptiva davant solucions o opinions dels altres, la voluntat per resoldre el problema ràpid, l'actitud receptiva i atenta amb les dades, la voluntat d'entendre la situació fins al darrer detall, el gust pels reptes, la resistència a l'abandó en front una dificultat demanant pistes, ajut, etc., els caràcters reflexius, l'actitud receptiva per aprendre dels propis errors, els aspectes que consideren més importants, la importància del sentit comú, de la intuïció o de la sort en la resolució de problemes, la influència de l'estat anímic, paciència, perseverança o autoconfiança en la resolució de problemes.

D'acord amb els plantejaments generals i amb les opcions metodològiques preses es presenten unes exigències prèvies. Primer les exigències relacionades amb la representativitat, rellevància i plausibilitat ampliant al màxim el context d'anàlisi per comprendre millor el procés a analitzar. En segon lloc, les exigències en relació a la fonamentació teòrica de la recerca referint-se a la credibilitat, la fiabilitat i la validesa. Per altra banda, evitant el que Ferreres (1997) anomena tipificació prematura s'ha intentat separar la idea dels criteris organitzadors de la informació, de la d'altres aspectes analitzables i analitzats al final de la informació. En tercer lloc, les exigències relacionades amb la dinàmica relacional de la recerca. S'ha tingut cura d'explicitar clarament amb els individus implicats els propòsits de la investigació, els compromisos mutus, els rols de l'investigador... Finalment, en quart lloc s'han considerat les exigències relacionades amb la dinàmica eticosocial de la recerca que condueix a declarar les pròpies pretensions d'intel·ligibilitat, veritat, veracitat, rectitud.

#### **6.4 Participants, espais i temporització**

Aquesta experiència s'ha dut a terme al segon curs de la ESO, participant-hi dues classes de setze i disset alumnes d'una escola concertada de Barcelona, on assisteixen alumnes de nivell socioeconòmic mitjà-alt, durant el curs 2006/2007. Amb l'objectiu de poder extraure resultats el més imparcials possible, s'han escollit alumnes de dues classes diferents amb els quals s'ha treballat en hores i espais diferents (dues aules diferents). D'aquesta manera, tenint tutors diferents tant en el curs present com en l'anterior, i fins i tot tenint professors diferents d'altres assignatures i àrees,



l'objectivitat de l'experiència és més elevada. De fet, ja fa uns set cursos que s'està treballant en la mateixa línia. Les proves pilot i els assajos dels cursos anteriors han permès acabar d'elaborar els instruments definitius.

El moment en el qual s'han recollit les dades ha estat al començament i al final del curs de segon d'ESO. A l'inici del curs es passen unes proves a manera de tests inicials per comparar-los al final, al cap d'un any, amb els resultats obtinguts d'uns tests finals. Durant aquest any l'investigador-professor ha estat treballant amb els alumnes la resolució de problemes amb el quadern dissenyat. D'altra banda, s'ha escollit segon d'ESO també amb la finalitat que el pes i les influències del canvi patit en abandonar l'educació primària i haver iniciat una nova etapa no condicionessin l'experiència en relació amb el funcionament. També s'ha perseguit manifestar les poques ocasions en què els alumnes es diverteixen pensant matemàticament i les repercussions directes que hi ha sobre la resolució de problemes, amb la intenció que es puguin prendre mesures posteriorment.

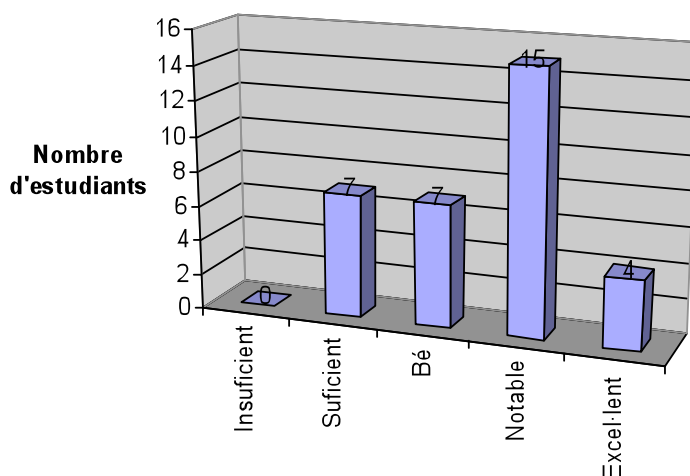
La població estudiada estava formada per 33 alumnes però degut al fet que els dies de les proves alguns alumnes es van posar malalts i algun altre tenia una prova fora del centre (de música) se'ls ha hagut de fer les proves pertinents un altre dia, sempre respectant el mateix temps concedit a la resta del grup. En aquesta població s'han distingit les característiques següents:

- Un primer identificatiu de cada estudiant format per un número (posició que ocupa a la llista de la seva classe) seguit d'una lletra (indica la secció a la qual pertany, A o B)
- Rendiment general en el conjunt de totes les matèries a primer d'ESO
- Rendiment en matemàtiques a primer d'ESO

L'alumnat s'ha estudiat quant al seu rendiment acadèmic, tant a nivell global comptant totes les assignatures de primer d'ESO que han cursat, com a nivell de matemàtiques. Les qualificacions amb les quals s'ha valorat als alumnes globalment en totes les àrees de primer d'ESO ha estat calculada amb una mitjana aritmètica de les qualificacions atorgades per la Junta d'Avaluació de final de curs i posteriorment arrodonida als enters. Les qualificacions proposades de matemàtiques per als alumnes estudiats han estat les atorgades pel professor responsable abans de reunir-se la Junta d'Avaluació de final de curs de primer i segon d'ESO, donat que aquesta es reuneix després del sistema de recuperació convingut en el propi centre.

Aquestes qualificacions de matemàtiques s'han agrupat en tres classes diferents: rendiment baix (del 0 al 4.9), rendiment mig (del 5 al 7.9), rendiment alt (del 8 al 10). La distribució d'aquestes variables es mostra en les gràfiques i taules següents:

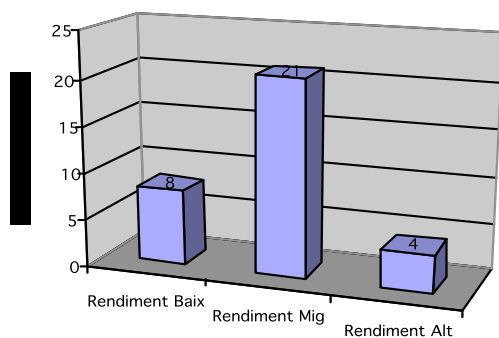
### Qualificacions de Primer d'ESO



	Insuficient	Suficient	Bé	Notable	Excel·lent
■ Serie1	0	7	7	15	4

Quadre 6.6: Gràfica i taula de les qualificacions de Primer d'ESO

### Rendiment Primer d'ESO Matemàtiques



	Rendiment Baix	Rendiment Mig	Rendiment Alt
■ Serie1	8	21	4

Quadre 6.7: Gràfica i taula dels rendiments de Primer d'ESO de matemàtiques

Entre la població estudiada s'ha escollit sis alumnes per tal d'efectuar una entrevista. Els criteris utilitzats per tal de seleccionar aquests sis estudiants han estat els següents:

- El seu rendiment acadèmic en matemàtiques (alt, mig i baix) acompanyat d'una certa flexibilitat (molta i poca) alhora de modificar el raonament en front d'incoherències (segons opinió de dos professors que els coneixen a tots); d'aquesta manera la casuística esdevenia un total de sis casos, un cas de cada.
- La seva predisposició i consentiment concedits a partir d'una primera conversa en un ambient informal amb finalitat informativa

No ha estat considerat criteri d'elecció el sexe i s'ha preocupat que tres casos fossin d'una secció i els altres tres d'una altra. Sota aquestes apreciacions, els alumnes finalment seleccionats varen ser:

- Amb rendiment alt en matemàtiques: 27A (mentalitat flexible) i 14B (mentalitat poc flexible)
- Amb rendiment mig en matemàtiques: 25A (mentalitat flexible) i 15B (mentalitat poc flexible)
- Amb rendiment baix en matemàtiques: 9A (mentalitat flexible) i 9B (mentalitat poc flexible)

Durant tot el curs se segueixen les activitats que hi ha dissenyades en el quadern d'activitats. El professor segueix les directrius suggerides, explicant una o dues activitats segons com es trobin els alumnes. Aquestes activitats setmanals es treballen en l'espai de vint minuts un dia concret a la setmana que es fixa a l'inici de curs amb els estudiants (els dijous). Totes les tasques tenen quatre parts fonamentals: en la primera els alumnes presten atenció a les condicions inicials (escoltant o llegint); en la segona, pensen una solució o almenys, com resoldre la situació, a nivell individual, en silenci i intentant arribar a alguna conclusió; en la tercera expliquen i/o atenen l'explicació d'una possible resolució trobada per algun company seu; en la quarta escolten el punt de vista del professor, el qual intenta que tothom ho hagi entès, procedint a revisar posteriorment la solució entre tots. El temps destinat a cada part de la tasca no és fix. Per a la primera etapa calen uns tres minuts. En principi per a la segona etapa es dediquen uns tres minuts, per a la tercera uns deu minuts i per a la quarta tres minuts més. Però l'última paraula sobre la temporització la tenen els alumnes. En relació amb la segona i tercera part podria ser que tots haguessin trobat la solució senzillament i no calgués orientar-los vers ella ni tampoc estendre's per a la seva comprensió. És important que els alumnes no es cansin, altrament l'interès per aquests tipus d'activitats minvaria.

El temps que es dedica a la recollida de dades depèn de l'instrument que s'utilitzi. Quant a les proves inicials, tant per la part de la comprensió de les dades com per la part de la revisió de les solucions, el temps que s'ha destinat ha estat d'una hora i deu minuts com a màxim (el que dura una classe més el pati), tot i que la majoria van acabar abans que sonés el timbre per anar al pati. Quant a les proves finals (passades al final del curs), el mateix, encara que per ser una mica més llargues, la majoria dels alumnes va necessitar tota l'hora de classe. Quant al qüestionari (passat al final del curs), es va tardar un temps mig de vint minuts. Quant a les entrevistes, l'espai on es va fer ja no va ser la classe. Va ser un espai reservat al costat dels departaments on no hi havia gens de soroll per tal d'afavorir una gravació nítida de l'entrevista. Les entrevistes van tenir lloc a final de curs també, quan els alumnes treballaven en grup tot el dia fent el crèdit de síntesi i se'ls interrompia el mínim possible. Les entrevistes varen durar una mitja de dotze minuts.

És important remarcar que mentre l'alumnat responia als tests amb els seus qüestionaris retrospectius, el qüestionari i les entrevistes l'investigador no facilitava cap informació, encara que sí revisava que la feina estigués degudament complimentada quan entregaven i sí es preocupava que no s'eternitzessin amb les activitats (per això controlava que no es passessin de l'hora i quinze minuts).

## 6.5 Disseny del pla de treball

El conjunt de la recerca es pot emmarcar dins del conjunt de recerques que treballen a partir de dades qualitatives en tant que s'obtenen dades a partir de qüestionaris escrits i entrevistes. Malgrat això, en la recerca s'inclouen qüestionaris tancats que s'analitzen de manera quantitativa. Aquestes investigacions basades en dades qualitatives es caracteritzen per estudiar en profunditat un nombre reduït de casos (una trentena d'alumnes), la representativitat dels quals no es planteja; la qual cosa permet interpretar i comprendre determinats aspectes de la forma de raonar els nois i noies d'una banda, les interaccions entre el professor i ells, i les interaccions entre ells mateixos.

En els guions de les entrevistes s'ha tingut en compte que s'havia d'incidir en la diferència real existent entre allò que l'alumnat manifesta que pensa i allò que realment pensa (no només qüestions de sinceritat), i intentar considerar les recomanacions que Schatzman i Strauss fan entorn a la forma que han de tenir les preguntes (citats per Goetz i Lecompte, 1984): en una entrevista ha d'haver-hi preguntes d'informació, d'advocat del diable, hipotètiques (*role play*), de postulació de l'ideal i proposicionals. Les entrevistes s'han fet a un nombre reduït de sis alumnes ben escollits que es poden considerar informadors clau del col·lectiu, aquells que amb les seves respostes als qüestionaris s'havia observat que presentaven unes contradiccions, reals o aparents, i aquells que havien manifestat aspectes significatius destacables a les classes.

Després de fer els retocs i les rectificacions necessàries en els instruments utilitzats per obtenir la informació, s'ha passat a efectuar l'anàlisi de resultats. Es podran determinar els diferents perfils de l'alumnat segons un cert sistema de valors i en funció d'aquests perfils i en referència a l'ambient de les situacions d'aprenentatge observades a l'aula, s'avaluaran les dificultats amb les quals es troba en el procés d'aprenentatge de les matemàtiques.

Per a Carrillo (1996) les unitats d'informació són aquells enunciats corresponents a una mateixa pregunta base amb un lligam sintàctic o semàntic. D'aquesta manera es troben dins d'una resposta concreta o a través de respostes coordinades. A més a més, un subjecte ofereix dades d'un o més aspectes. Les unitats d'informació utilitzades han procedit d'aïllar i organitzar convenientment dades de naturalesa qualitativa provinents de les preguntes obertes del qüestionari i de les entrevistes.

### 6.5.1 Disseny del quadern

Es va dissenyar un quadern d'activitats partint de la hipòtesi que les recreacions matemàtiques en el marc escolar poden generar una situació didàctica, en grup i individualment, en la qual sorgeixen opcions per aprendre les matemàtiques relacionades amb la resolució de problemes. El tipus de relacions que es desenvolupen entre els alumnes i el professor poden apropar-se molt a una situació d'interacció constructiva.

Per confeccionar el quadern d'activitats es va partir d'una selecció prèvia de cent cinquanta activitats obtingudes de les obres de Lluís Segarra (2000, 2001), de Summers (1988), de revistes de lògica mensuals i part de saviesa popular aportada de vegades pels mateixos alumnes (veure ANNEX B). De fet, encara ara s'està ampliant amb tot allò d'interès que es descobreix com a motivador per a la classe. Els criteris per a la selecció final de les vuitanta dues activitats que conformen el quadern ha estat:

- El contingut adequat a l'edat.
- La durada de l'explicació de la situació: no interessa avorrir els estudiants amb enunciats massa llargs; és convenient que s'acostumin a haver de llegir més d'un cop l'enunciat per prendre consciència de totes les dades i que l'enunciat no els provoqui un rebuig inicial.
- El context procura ser d'interès i de fàcil comprensió.
- La intervenció de recursos propis per perfeccionar la primera fase de resolució de problemes: es valora de forma positiva el fet que la resolució de l'activitat requereixi de l'esforç inicial de capturar totes les dades i comprendre-les.
- La intervenció de recursos propis per perfeccionar la quarta fase de resolució de problemes: es valora d'una forma notable que el problema exigeixi la comprovació del resultat final.

<b>Fase del problema treballat</b>	<b>Bloc d'activitats</b>
Fase I: Comprensió de l'enunciat	Bloc I: Activitats per capturar dades
	Bloc II: Activitats per aprendre a llegir amb atenció
	Bloc III: Activitats per aprendre a organitzar la informació
Fase IV: Revisió de la solució obtinguda	Bloc IV: Activitats per practicar operacions aritmètiques amb nombres enters
	Bloc V: Activitats per practicar operacions aritmètiques amb fraccions
	Bloc VI: Activitats per millorar la intuïció matemàtica i el tempteig
Fase I i IV	Bloc VII: Activitats poca-soltes

Quadre 6.8. Presentació general del quadern d'activitats agrupats per propòsit.

A cada bloc correspon una programació particular on apareixen els objectius concrets, els procediments per a un treball individual i un treball en grup, unes orientacions específiques, una temporalització i uns recursos idonis.

L'índex del quadern d'activitats indica les característiques de les recreacions matemàtiques utilitzades que han donat lloc als següents blocs: per capturar les dades de l'enunciat, per aprendre a llegir amb atenció, per aprendre a organitzar la informació, per practicar operacions aritmètiques amb nombres enters i amb fraccions i per a la millora de la intuïció matemàtica i el tempteig. De fet, aquests blocs estan a la seva vegada separats en tres classes: Fase I, Fase IV i Fase I i IV. Aquestes fases fan referència a la classificació que Polya féu sobre la resolució de problemes. La Fase I subratllava la importància de la comprensió del problema, i la Fase IV, el gran interès de comprovar la solució obtinguda. Algunes activitats amaguen la intencionalitat de practicar tant la primera fase com la quarta.

Totes les activitats estan pensades per a ser corregides i comentades en grup, però cal un temps de reflexió individual per prendre consciència. Es tracta que per mitjà de raonaments lògics després d'haver prestat atenció a la comprensió de l'enunciat arribin a la solució que posteriorment convé que comprovin si és certa. En cas que la seva resolució sigui costosa i infructuosa, serà el professor qui indagarà on hi ha hagut un bloqueig i intentarà i guiarà quin possible camí a seguir sense desvetllar la solució directament.

El tipus de material utilitzat consta del quadern dissenyat per l'experiència, fotocòpies que es lliuren als alumnes o només un full en blanc i un llapis amb una goma. De vegades només han de prestar molta atenció.

La durada de cada activitat convé que sigui més aviat curta, uns vint minuts amb la posada en comú, deixant potser més temps a les primeres activitats on cal rellegir moltes vegades l'enunciat per extreure totes les dades per completar una graella. El que resulta important és que els alumnes no se sentin pressionats pel temps, sinó que es concentrin en resoldre l'activitat. Tampoc seria afortunat provocar l'avorriment entre els estudiants, fent durar massa una activitat. La selecció de les activitats prové de llibres específics d'enigmes i problemes matemàtics, de revistes de jocs de lògica i també de fonts populars (aportats pels mateixos alumnes a vegades).

Les normes que regulen aquestes activitats són clares i poques. En un clima d'absolut respecte es tracta de treballar en un silenci inicial que només es trencarà quan el professor indiqui i d'una manera molt determinada. És convenient deixar que l'activitat la facin tots, i no tots tenen el mateix ritme de pensament. Per altra banda, amb freqüència resulta que el més ràpid ha arribat a una solució errònia. La manera d'interrompre el silenci és responent a una sèrie de preguntes que el professor fa a la classe, per tal que li sigui possible conèixer el grau d'encert dels alumnes sense desvetllar la solució. Òbviament si els estudiants comenten la seva solució quan volen, el que provoquen és la confusió i potser la mala resolució per part dels seus companys. I el respecte és molt important en tant que hi ha situacions problemàtiques que només es poden resoldre deixant volar la imaginació i si se senten cohibits, evitaran sortir-se'n de les solucions estàndards i no es podrà combatre certs tipus de bloquejos.

### **6.5.2 Disseny del qüestionari**

El qüestionari final dissenyat consta de setanta preguntes, amb cinc de tipus obert i la resta de tancades (ANNEX C.5). Les primeres cinquanta-dues preguntes són de tipus general on es pregunta sobre com es troba l'estudiant al col·legi, si li agraden les matemàtiques, si estudia, si és organitzat, si és autosuficient a l'hora d'aprendre i com respon davant diverses dificultats. Les darreres divuit preguntes plantegen quelcom més específic. D'aquestes divuit preguntes, deu preguntes fan referència concretament a la primera fase de resolució de problemes, on es qüestiona sobre la seva dedicació a la comprensió de l'enunciat i al que es pregunta, i les set preguntes últimes es preocupen per la revisió de la solució trobada.

El procés de validació s'ha dut a terme per jutges externs i per l'alumnat. Aquests jutges externs s'escolliren de manera que coneguessin bé el nivell de l'alumnat al qual aniria destinat el qüestionari per una banda, i per una altra, que estiguessin familiaritzats amb la resolució de problemes com a objecte d'estudi específic.

A) La validació pels jutges externs ha estat realitzada per tres professors en actiu de secundària amb una experiència superior a vint anys cadascun. La informació que se'ls ha facilitat en primer lloc ha estat el conjunt d'aspectes que es volien analitzar, en segon lloc el qüestionari, i en tercer lloc, un full per anotar les observacions que poden ajudar a millorar-lo.

Els aspectes que s'han demanat per millorar feien referència a:

- a) Si les preguntes fetes eren indicades per obtenir informació pertinent als punts a analitzar.
- b) Si hi havia alguna influència externa (degut a altres àrees de coneixement, o a altres situacions) que podia distorsionar la resposta a alguna pregunta.
- c) L'adequació del qüestionari a qui va dirigit: preguntes entenedores sintàcticament i semàntica, preguntes suficientment clares quant al mecanisme de resposta, preguntes tendencioses, capcioses o que potser orienten la resposta en algun sentit determinat, preguntes adequades al nivell de reflexió de l'alumnat a qui va dirigit...

Sobre aquestes tasques els jutges generaren un breu informe amb observacions. A partir d'aquest s'ha generat una versió que modificava en part la manera de preguntar algunes qüestions i altres s'eliminaven.

B) La validació per alumnat ha estat realitzada en les mateixes circumstàncies amb les quals estava pensat experimentar-ho de forma definitiva. La finalitat que es pretenia amb aquesta validació era: a) la constatació de l'adequació del qüestionari a l'alumnat a qui va dirigit, comprovant una comprensió semàntica i sintàctica i comprovant una adequació als nivells de reflexió; b) el control del temps necessari per a respondre el qüestionari; c) el control de l'esgotament amb una consegüent pèrdua d'interès en respondre.

Els alumnes que varen validar el qüestionari varen ser un petit grup classe de segon d'ESO del mateix centre escolar. Se'ls explicà que no es tractava d'un examen, sinó d'una investigació entorn a les matemàtiques en la qual prenen part. Concretament se'ls demanà el següent: a) una resposta per cada pregunta del qüestionari; b) una marca a aquelles paraules, termes o frases que poguessin no entendre; c) la participació en una discussió grupal dirigida per l'investigador opinant sobre els aspectes que havien trobat més difícils i sobre la fatiga o pèrdua d'interès que s'hagués produït. Per a la validació del qüestionari es varen tenir en compte totes les respostes i aportacions de la discussió que feren "amb sentit responsable" els alumnes. Arran de la discussió en grup i dels mots assenyalats s'efectuà la darrera i definitiva modificació de la versió del qüestionari.

### **6.5.3 Disseny de les entrevistes**

La finalitat d'utilitzar complementàriament aquest instrument de recollida de dades sobre un nombre reduït d'alumnes (en total 6) ve donada per la riquesa i profunditat de la informació que proporciona, i pretén esbrinar informació sobre aspectes que amb un test no es reflecteix (ANNEX C.6).

El plantejament de les entrevistes ha estat semiestructurat i preseqüencialitzat, segons Patton (1987), per una modalitat d'entrevista dirigida. Aquest plantejament es caracteritza per tenir un esbós general amb els temes a tractar, la seqüència de les preguntes i la redacció de les preguntes mateixes es fa durant l'entrevista mateixa. Respecte l'entrevista informal té l'avantatge que la recollida de dades és més sistematitzada i per tant es poden preveure certs buits, però aspectes rellevants poden ser passats per alt. Amb respecte a l'entrevista de caire estructurat, guanya en flexibilitat quant a l'abordatge de circumstàncies inesperades gràcies a no seguir una rectitud estàndard en les preguntes, però pot esbiaixar els resultats obtinguts degut a

l'entrevistador. Goetz i Lecompte (1988) suggereixen com han de ser les preguntes en una entrevista: hi ha d'haver preguntes d'informació, hipotètiques, de postulació de l'ideal i proposicionals. I així s'ha intentat fer en aquesta entrevista. Brandt recomana que sobre el contingut i la forma de les preguntes han de figurar preguntes comparatives, d'evocació de fets passats, d'evocació de comportaments passats, de reaccions afectives, de causa-efecte i les corresponents argumentacions, condicionals, indagatives...

#### **6.5.4 Utilització dels instruments de recollida de dades per a l'estudi de la comprensió de l'enunciat**

Paral·lelament al disseny teòric dels criteris organitzadors i als aspectes operatius a observar, s'ha efectuat el procés d'elaboració i disseny dels instruments de recollida de dades. Aquests instruments han estat:

- 1) una prova inicial formada per 5 problemes amb preguntes per a cada problema (ANNEX C.1)
- 2) una prova final formada per 5 problemes amb preguntes per a cada problema (ANNEX C.3)
- 3) un qüestionari (ANNEX C.5, des de la pregunta 53 fins a la 62)
- 4) una entrevista (ANNEX C.6, part B)

Cadascun dels problemes respon a unes finalitats molt concretes i té unes característiques com a problemes matemàtics no estàndard que han de respondre en la consecució d'aquestes finalitats. L'alumnat estava acostumat a la confecció de protocols de resolució. No estava acostumat a explicar amb suficient exhaustivitat el procés seguit. Per aquest motiu s'ha fet imprescindible complementar el full de resolució amb alguna tècnica o instrument d'avaluació diferent, reflectint la percepció dels alumnes entorn als seus processos de resolució de problemes i permetent conèixer la seva capacitat per a controlar i avaluar el seu pensament després de la resolució d'un problema, conèixer les seves actituds i creences, així com el grau de coneixement propi. Aquesta tècnica té avantatges i inconvenients. Destaca el fet que el propi alumne proporciona informació que no es podria obtenir d'altra manera. Però com a inconvenient, es destaca que els alumnes poden oblidar aspectes importants. I també poden a més d'oblidar, canviar el sentit.

Els problemes d'aquestes proves són els mateixos i es presenten als annexos C.1 i C.3. Prèviament i per escollir adequadament les preguntes del test amb el petit qüestionari, es va passar el test a una quinzena d'alumnes i es van prendre observacions de totes les respostes incoherents o difícils d'interpretar que van donar. En base a aquestes notes, es modificà el test i part de les preguntes del qüestionari.

Les característiques i finalitats que han decidit l'elecció dels problemes han estat les que segueixen a continuació, i els petits qüestionaris annexats a cada problema tant de la prova inicial com final es comentaran amb profunditat més endavant a la part de l'anàlisi.

Problema 1: "Quina és l'àrea d'un triangle equilàter de 42 cm de perímetre?"

És un problema de geometria que per ser resolt requereix d'una comprensió absoluta de tots els termes que apareixen a l'enunciat. Amb un esquema gràfic l'alumne demostra haver-ho entès, sintetitzant la informació. En pocs casos s'ha resolt sense l'ajut d'aquest



esquema, de totes maneres, de la mateixa resolució es pot observar si l'alumne ha assolit els objectius proposats de comprendre l'enunciat.

Problema 2: “Un rectangle té una longitud de 15 cm i una amplada de 10 cm. Calcula l'àrea del rombe que es forma quan unim els punts del mig dels costats del rectangle.”

Aquest problema de geometria s'ha escollit per requerir el comprendre la situació plantejada. No només cal entendre les mesures de l'enunciat sinó que també cal entendre la descripció de la nova figura que es descriu. Quan l'alumne anota les dades que està comprènent li és de gran ajuda recórrer a una representació gràfica on demostra el seu grau de comprensió.

Problema 3: “Una persona es deixa el permís de conduir a casa. No para en un pas a nivell, no fa cas d'un senyal de direcció prohibida i viatja tres travessies en direcció contrària per un carrer de sentit únic. Tot això ho observa un agent de trànsit, el qual, però, no fa el més petit intent d'impedir-li-ho. Per què?”

L'enunciat escollit és important donat que l'alumne ha de perseguir contínuament la informació donada. No ha de fer cap càlcul aritmètic, ni geomètric ni de cap tipus. Només cal que es llegeixi repetidament l'enunciat i s'examini minuciosament les dades per tal de trobar una resposta convincent i coherent amb la informació llegida. Totes les dades constitueixen un entrellat de pistes que s'han d'ordenar.

Problema 4: “Un tren d'1 km de longitud es desplaça a la velocitat d'1 km/min i travessa un túnel d'1 km de longitud. Quant temps necessitarà per travessar totalment el túnel?”

Aquest problema busca “confondre” l'estudiant utilitzant la mateixa dada numèrica per a diferents condicions. L'esforç que ha de fer el resolutor és analitzar bé les condicions i entendre a què es refereixen concretament per tal d'acabar plantejant-se la situació independentment de la dada numèrica i obtenir una resposta correcta i no respondre amb allò que primer li vingui a la ment.

Problema 5: “Abans d'ahir tenia quinze anys, però l'any que ve podré votar. Com és possible?”

És un problema que requereix prestar molta atenció a cada paraula donat que només en tretze paraules es planteja una situació aparentment contradictòria. Per tal de comprendre l'enunciat cal plantejar-se la situació dada a dada. No es pot passar cap idea per alt.

La part del qüestionari que s'ocupa de l'estudi de la comprensió de l'enunciat contempla des de la pregunta número 53 fins a la 62 (veure ANNEX C.5).

La part de l'entrevista que s'ocupa de l'estudi de la comprensió de l'enunciat correspon a la part que porta aquest nom (veure ANNEX C.6)

### 6.5.5 Utilització dels instruments de recollida de dades per a l'estudi de la revisió de la solució

S'ha efectuat el procés d'elaboració i disseny dels instruments de recollida de dades i aquests instruments han estat:

- 1) una prova inicial formada per 6 problemes amb preguntes per a cada problema (C.2)
- 2) una prova final formada per 6 problemes amb preguntes per a cada problema (ANNEX C.4)
- 3) un qüestionari (ANNEX C.5, des de la pregunta 63 fins a la 70)
- 4) una entrevista (ANNEX C.6, part C)

Els problemes d'aquestes proves són els mateixos i es presenten als annexos C.2 i C.4. Per escollir adequadament les preguntes del test amb el seu qüestionari corresponent, es va passar el test a una quinzena d'alumnes i es van prendre notes de totes les respostes difícils d'interpretar que es donaren. En consonància a les observacions, es modificà el test i part de les preguntes del qüestionari. Les característiques i finalitats que han decidit la seva elecció han estat les que seguidament s'expliquen, i els qüestionaris que acompanyen a cada problema de les proves inicial i final es comenten més endavant a la part de l'anàlisi de dades:

Problema 1: "Troba la longitud de la diagonal d'un rectangle de 6 cm de base i 4 cm d'altura."

És un problema geomètric amb dades petites de manera que la solució obtinguda és mesurable amb instruments de mesura que té l'alumne. D'aquesta manera s'ha comprovat fàcilment la solució i s'ha vist si té sentit la mesura trobada.

Problema 2: "La tercera part i la quarta part d'un nombre sumen 1421. Troba aquest nombre."

Aquest enunciat proposa un plantejament algebraic. No obstant, si es resol de qualsevol altra manera també facilita una senzilla comprovació de la solució trobada degut al fet que les dades no són grans.

Problema 3: "El senyor Rius té 44 anys. La seva filla, 20. D'aquí a quants anys l'edat del pare serà el triple de l'edat de la filla?"

La resolució d'aquest problema es fa a través de l'àlgebra, encara que hi pot haver altres vies per a solucionar-lo. La situació que es planteja pot ser interioritzada perfectament pels alumnes. Aquest fet facilita una comprovació del resultat final al qual han arribat. A més a més, el problema té la característica curiosa que la solució necessita ser interpretada doncs suscita una possible contradicció. Resulta donar un nombre negatiu. La interpretació que l'estudiant ha de donar després de revisar la solució degudament és que no hi ha solució en un futur, sinó que la hi va haver en un passat concret.

Problema 4: "El perímetre d'un triangle és 37 dm. El costat gran fa 8 dm més que el mitjà i aquest últim 4 dm més que el costat petit. Quant fan els 3 costats del triangle?"

Aquest problema es troba a cavall entre la geometria i l'àlgebra. La seva resolució via l'àlgebra és la més senzilla, encara que no l'única. L'enunciat de caire geomètric apropa

la dificultat a l'alumne fent-la més assequible per resoldre. Les dades numèriques grans però, fan que la resolució geomètrica sigui complicada. Es resolgui de la manera que es desitgi, la comprovació és força senzilla en tractar-se de nombres operativament petits.

Problema 5: “Completa l'enunciat següent amb una pregunta perquè tingui la solució indicada.

La teva mare ha comprat en el mercat 2 kg de carn i 3 kg de fruita. Ha gastat 31,50 € en total. La fruita li ha costat 7,50 €. Solució: 12 €.”

El plantejament d'aquest problema obliga l'estudiant a revisar la solució contínuament per tal de donar un sentit a la pregunta suggerida. La situació redactada és fàcilment interpretada pels alumnes doncs és una tasca de la vida quotidiana.

Problema 6: “Taulers matemàtics. Omple els espais en blanc amb una xifra de l'u al nou de manera que verifiquin totes les operacions en vertical i horitzontal.”

L'activitat de completar el tauler proposat requereix una constant comprovació horitzontal i vertical dels nombres escollits. Els nombres que constitueixen la solució són petits i fàcils de manipular, així com les operacions aritmètiques que hi apareixen.

La part del qüestionari que s'ocupa de l'estudi de la revisió de l'enunciat contempla des de la pregunta número 63 fins a la número 70 (ANNEX C.5).

La part de l'entrevista que s'ocupa de l'estudi de la revisió de la solució correspon a la darrera part i que porta aquest nom (ANNEX C.6).



## **Tercera Part: Resultats i anàlisi de dades**

En aquesta part s'analitzen les dades des de dues perspectives. Una primera consisteix en una anàlisi de les dades obtingudes segons l'instrument emprat: test inicial de la fase de comprensió de l'enunciat, test final de la fase de comprensió de l'enunciat, test inicial de la fase de revisió, test final de la fase de revisió, qüestionari, entrevistes. Una segona perspectiva consisteix en una anàlisi dels indicadors determinats després d'haver treballat tot un any amb el quadern: la comprensió de les situacions plantejades, la consciència sobre la importància que té comprendre bé un enunciat abans de resoldre'l, la preocupació per la solució trobada, la consciència sobre la revisió de la solució i la seva explicació i finalment les actituds a l'hora de resoldre problemes estàndard o no estàndard.



## Capítol 7: Anàlisi de les dades obtingudes segons l'instrument

Tal com s'acaba d'indicar, en aquest punt s'analitzen els resultats obtinguts mitjançant els set instruments utilitzats. A l'hora d'analitzar la fase de comprensió s'utilitza un test inicial i un test final passat al cap d'un any. Cada test està constituït per les mateixes cinc activitats que s'han anat tractant. Totes les activitats tenen la mateixa estructura: enunciat, espai en blanc suficient per a resoldre el problema i un petit qüestionari particular. Després de comentar els resultats activitat per activitat es fa una síntesi de tot el test inicial i final.

A l'hora d'analitzar la fase de revisió de la solució s'utilitza un test inicial i un test final passat al final d'un curs. Cada test està constituït per sis activitats essencialment iguals. Totes les activitats tenen la mateixa estructura: enunciat, espai en blanc suficient per a resoldre el problema i un petit qüestionari. Les resolucions s'han classificat en cinc tipus:

- a) Resolucions incompletes o "en blanc"
- b) Resolucions desordenades
- c) Resolucions absurdes o que no responen a l'activitat plantejada
- d) Resolucions ordenades
- e) Resolucions correctes

En la fase de revisió la importància de la resolució escrita de l'activitat és relativa donat que el subjecte d'avaluació és la revisió i no la manera d'abordar o de solucionar la qüestió. Després de comentar els resultats activitat per activitat es fa una síntesi de tot el test inicial i final.

A banda dels tests inicial i final sobre les fases de comprensió i revisió, també s'ha dissenyat un qüestionari amb una vuitantena de preguntes, algunes d'elles obertes amb l'objectiu de conèixer les seves opinions. El temps aproximat per omplir el qüestionari és de vint minuts. L'estructura d'aquest consisteix primer en unes preguntes generals sobre l'àrea de matemàtiques, en segon lloc unes preguntes sobre la comprensió dels enunciats i en tercer lloc unes preguntes sobre la revisió de les solucions.

### 7.1 Test inicial de la fase de comprensió de l'enunciat

En aquest punt es tractaran les cinc proves que s'han utilitzat en el test que es féu a l'inici del curs (en el punt anterior 6.5.4 s'ha explicat ja el perquè de l'elecció d'aquestes activitats i la seva estructuració). S'exposarà l'enunciat de cada activitat i després es comentaran els resultats obtinguts de tots els alumnes pregunta per pregunta del qüestionari que s'adjunta després de l'enunciat del problema. Per últim, es farà una síntesi dels resultats recollits en totes les proves.

#### 7.1.1 Estudi de l'activitat 1

L'activitat 1 es presenta als alumnes de la forma que a continuació s'explica. Primer, es proposa l'enunciat del problema a resoldre en el mateix full. Aquest enunciat és: **"Quina és l'àrea d'un triangle equilàter de 42 cm de perímetre?"**

Després de la resolució per escrit o d'intentar-ho, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per 6 qüestions sobre el grau de comprensió de l'activitat 1.

La primera pregunta es refereix al grau de comprensió de l'enunciat.

	Gens	Poc	Bastant	Tot
Nombre d'alumnes	0	2	10	21

Quadre 7.1: Resultats de la pregunta 1.

La segona pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari de geometria utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	29	4

Quadre 7.2: Resultats de la pregunta 2.

Les paraules escrites que no entenen aquests quatre alumnes són perímetre (dos d'ells) i equilàter (dos d'ells). Un cas que respon que hi ha paraules que no entén, a més de no posar quina, resol correctament el problema.

La tercera pregunta analitza si han comprés totes les dades que els dona l'enunciat. El total de dades és 3 doncs fan referència a la figura geomètrica que és (un triangle), a la mesura dels seus costats (equilàter) i a la suma dels seus costats (perímetre igual a 42 cm).

Dades escrites	0	1	2	3
Nombre d'alumnes	2	9	7	15

Quadre 7.3: Resultats de la pregunta 3.

La quarta pregunta s'interessa sobre si l'alumne sap què ha de trobar (l'àrea del triangle).

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	4	29

Quadre 7.4: Resultats de la pregunta 4.

La cinquena pregunta indaga sobre el coneixement dels alumnes. Es pretén conèixer si l'estudiant sap què és un triangle equilàter. La resposta parcialment correcta es considera incorrecta.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	6	27

Quadre 7.5: Resultats de la pregunta 5.

La sisena pregunta vol esbrinar si l'estudiant coneix el significat de la paraula perímetre.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	6	27

Quadre 7.6: Resultats de la pregunta 6.



A la vista d'aquests resultats, sorprèn veure com vint-i-nou persones diuen no tenir problemes amb el vocabulari utilitzat a l'enunciat però sis diuen no conèixer el significat del mot "perímetre" i sis diuen no conèixer el significat de triangle equilàter.

Resulta ser una activitat en la qual la majoria diu que entén l'enunciat bastant (10) o totalment (21) i que saben què se'ls demana (29). No obstant, menys de la meitat (15) capturen totes les dades.

### 7.1.2 Estudi de l'activitat 2

L'activitat 2 es presenta als alumnes de forma similar que l'activitat 1. Primer, es proposa l'enunciat del problema a resoldre en el mateix full. Aquest enunciat és: **"Un rectangle té una longitud de 15 cm i una amplada de 10 cm. Calcula l'àrea del rombe que es forma quan unim els punts mitgers dels costats del rectangle."**

Tot seguint l'espai reservat per a la resolució per escrit dels alumnes, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per quatre preguntes sobre el grau de comprensió de l'activitat 2.

La primera pregunta es refereix al grau de comprensió de l'enunciat.

	Gens	Poc	Bastant	Tot
Nombre d'alumnes	2	9	11	11

Quadre 7.7: Resultats de la pregunta 1.

La segona pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari de geometria utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	14	19

Quadre 7.8: Resultats de la pregunta 2.

Les respostes donades a la pregunta de quines paraules no s'han entès són majoritàriament les que es refereixen al significat dels punts mitgers (17 casos). Hi ha dos alumnes que han comentat que el significat l'han pogut deduir mentre tractaven de resoldre'l. És precisament per aquest motiu que una altra parella d'alumnes no han marcat l'opció. L'investigador ha parlat amb ells i ha pogut aclarir el sentit de les respostes. Per una altra banda, hi ha dos estudiants que han marcat l'opció que hi ha paraules que no entenen explicant que no saben calcular l'àrea del rombe. De fet aquesta resposta no contesta a la pregunta.

La tercera pregunta analitza si han comprés totes les dades que els dona l'enunciat. El total de dades és 3 doncs fan referència a la figura geomètrica que és un rectangle, a la seva longitud de 15 cm i a la seva amplada de 10 cm.

Dades escrites	0	1	2	3
Nombre d'alumnes	3	0	11	19

Quadre 7.9: Resultats de la pregunta 3.

La quarta pregunta s'interessa sobre si l'alumne sap exactament què ha de trobar. Primer ha de detectar un rombe a partir d'un rectangle, i després, calcular la seva àrea.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	4	29

Quadre 7.10: Resultats de la pregunta 4.

L'enunciat d'aquesta activitat l'entén bastant (11) o totalment (11) les dues terceres parts del grup. L'altra tercera part del grup no l'entén, entre poc (9) i gens (2). Sobta amb el fet que la majoria (29) del grup sap què ha de trobar.

Manifesten tenir problemes amb el vocabulari emprat més de la meitat (19). Només dinou alumnes observen totes les dades de l'enunciat i n'hi ha tres que no en veuen cap.

### 7.1.3 Estudi de l'activitat 3

L'activitat 3 és diferent a les dues anteriors. Aquesta activitat és de caire no estàndard i es titula "L'oblit del carnet". L'enunciat plantejat diu el següent:

**“Una persona es deixa el permís de conduir a casa. No para en un pas a nivell, no fa cas d'un senyal de direcció prohibida i viatja tres travessies en direcció contrària per un carrer de sentit únic. Tot això ho observa un agent de trànsit, el qual, però, no fa el més petit intent d'impedir-li-ho. Per què?”**

La presentació d'aquesta activitat consisteix en l'enunciat anterior i un espai en blanc per fer anotacions i resolucions pertinents. El que és objecte d'estudi no és la resolució, sinó la comprensió. Per a aquest fi, s'ha dissenyat un petit qüestionari format per quatre preguntes.

La primera pregunta es refereix al grau de comprensió de l'enunciat.

	Gens	Poc	Bastant	Tot
Nombre d'alumnes	1	6	7	19

Quadre 7.11: Resultats de la pregunta 1.

La segona pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	25	8

Quadre 7.12: Resultats de la pregunta 2.

Les vuit persones que diuen no haver entès alguna paraula coincideixen en "pas a nivell". A més a més, el mot "travessies" hi ha dues persones que comenten no haver-lo entès.

La tercera pregunta s'interessa per conèixer si l'estudiant ha detectat totes les dades que el problema li dona. Per a la màxima puntuació s'ha d'observar que es deixa el permís de conduir, que no para en un pas a nivell, que no fa cas a un senyal de prohibició, que viatja en direcció contrària i que ho observa un policia i no ho impedeix.

Dades escrites	0	1	2	3	4	5
Nombre d'alumnes	6	9	8	3	3	4

Quadre 7.13: Resultats de la pregunta 3.

La quarta pregunta s'interessa sobre si l'alumne sap exactament què ha de trobar. La resposta es cataloga de correcta si l'estudiant respon perquè l'agent no aturava a la persona. Altrament la resposta es considera incorrecta.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	9	24

Quadre 7.14: Resultats de la pregunta 4.

Hi ha 24 alumnes que manifesten saber què han de trobar tot i que l'enunciat l'entenen bastant 7 i totalment 19.

Només 8 alumnes expressen que tenen dificultats amb el vocabulari utilitzat en l'enunciat.

Hi ha 4 alumnes que han trobat totes les cinc dades, 3 alumnes han trobat quatre dades i 3 alumnes han trobat tres dades (no arriben a la tercera part del grup). Hi ha 8 alumnes que han detectat dues dades, 9 alumnes que han detectat una dada i 6 alumnes que no han detectat cap.

#### 7.1.4 Estudi de l'activitat 4

L'activitat quatre es titula "Càlculs ferroviaris". Aquest problema examina la capacitat d'organització d'informació. L'enunciat és el següent: **"Un tren d'1 km de longitud es desplaça a la velocitat d'1 km/min i travessa un túnel d'1 km de longitud. Quant temps necessitarà per travessar íntegrament el túnel?"**

A l'estudiant se li deixa un espai en blanc per si creu pertinent fer un dibuix o un esquema per tal de trobar la solució. En base a veure què pensen els alumnes, es dissenya un qüestionari constituït per cinc preguntes.

La primera pregunta es refereix al grau de comprensió de l'enunciat.

	Gens	Poc	Bastant	Tot
Nombre d'alumnes	0	0	8	25

Quadre 7.15: Resultats de la pregunta 1.

La segona pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	29	4

Quadre 7.16: Resultats de la pregunta 2.

Els quatre alumnes que han respost que han tingut dificultats amb el vocabulari han coincidit en el mot "íntegrament".

La tercera pregunta s'interessa per conèixer si l'estudiant ha detectat totes les dades que el problema li dona. Les dades que dona el problema són la longitud del tren (1 km), la velocitat del tren (1 km/min) i la longitud del túnel (1 km).

Dades escrites	0	1	2	3
Nombre d'alumnes	0	3	5	25

Quadre 7.17: Resultats de la pregunta 3.

La quarta pregunta s'interessa sobre si l'alumne sap exactament què ha de trobar. La resposta es considera correcta si l'estudiant respon quant de temps tardaria el tren en travessar el túnel. Altrament, es considera incorrecta.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	0	33

Quadre 7.18: Resultats de la pregunta 4.

La cinquena pregunta consisteix en demanar a l'alumne un sinònim de la paraula "íntegrament" per veure la seva coherència amb la segona pregunta i veure el seu grau de consciència sobre el que sí sap i el que no sap. La resposta es dona per correcta si el sinònim era correcte o si la idea sobre el significat de la paraula era la correcta.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	10	23

Quadre 7.19: Resultats de la pregunta 5.

Cal observar que han estat quatre alumnes els que han dit que tenen dificultats amb el vocabulari i no deu. Aquest fet indica que hi ha sis estudiants que no acaben de ser conscients del que sí entenen i del que no entenen.

Aquesta activitat manifesten que l'han entès 25 alumnes i els 8 restants diuen que l'han entès bastant. Tot el grup diu saber què ha de trobar, encara que només vint-i-cinc saben capturar totes les dades; cinc alumnes capturen dues i tres alumnes en capturen una.

Dificultats amb el vocabulari només manifesten tenir-ne 4 alumnes, tot i que quan se'ls demana un sinònim del mot "íntegrament" són deu els que no el troben correctament.

### 7.1.5 Estudi de l'activitat 5

L'activitat número cinc es titula "Quin embolic amb l'edat!" i és un problema de caire no estàndard. L'enunciat del problema diu el següent: "**Abans d'ahir tenia quinze anys, però l'any que ve podré votar. Com és possible?**". A l'estudiant se li presenta l'activitat amb un espai suficient per fer les anotacions, resolucions i càlculs pertinents per a la seva resolució. De totes maneres, a l'igual que amb les activitats anteriors, l'objectiu no és avaluar la resolució del problema, sinó veure el grau de comprensió de l'enunciat. Amb aquesta pretensió es proposa un qüestionari amb cinc preguntes.

La primera pregunta es refereix al grau de comprensió de l'enunciat.

	Gens	Poc	Bastant	Tot
Nombre d'alumnes	0	8	13	12

Quadre 7.20: Resultats de la pregunta 1.

La segona pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	33	0

Quadre 7.21: Resultats de la pregunta 2.

La tercera pregunta s'interessa per conèixer si l'estudiant ha detectat totes les dades que el problema li dóna. Les dades que dóna el problema són: "abans d'ahir tenia quinze anys" i "l'any que ve podrà votar".

Dades escrites	0	1	2
Nombre d'alumnes	3	8	22

Quadre 7.22: Resultats de la pregunta 3.

La quarta pregunta s'interessa sobre si l'alumne sap exactament què ha de trobar. La resposta es considera correcta si l'estudiant respon com és possible que pugui votar. Altrament, és incorrecta.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	10	23

Quadre 7.23: Resultats de la pregunta 4.

La cinquena pregunta consisteix en demanar a l'alumne si realment sap a quina edat es pot votar. Per tal de comprovar que l'enunciat s'ha entès perfectament cal verificar que aquesta resposta és l'adequada, tot i que hagin contestat que han entès el problema en la seva totalitat. La resposta es considera correcta si l'alumne contesta divuit anys.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	3	30

Quadre 7.24: Resultats de la pregunta 5.

Aquesta activitat no presenta dificultats en el grup en relació amb el vocabulari utilitzat. L'enunciat, diuen entendre'l més de dues terceres parts del grup (12 diuen entendre'l totalment i 13 bastant); encara que hi ha vuit que diuen entendre'l poc. A l'hora de saber què han de trobar són vint-i-tres que sí que ho saben, però deu que no. Totes les dades que dóna l'enunciat només les detecten vint-i-dos alumnes, havent-hi vuit que només en detecten una. Finalment s'ha preguntat si sabien a quina edat es pot votar (concepte bàsic per a resoldre el problema lògic en qüestió) i tres persones no ho saben correctament.

### 7.1.6 Síntesi del test inicial

En aquest test inicial quan s'ha preguntat si han entès l'enunciat els alumnes han contestat que bastant o que totalment les dues terceres parts del grup en el pitjor dels casos (activitat 2). Quant a la dificultat del vocabulari usat en el test els alumnes en majoria han manifestat no tenir problemes per comprendre, tot i que a l'activitat dos en concret hi ha hagut més de la meitat que tenien dificultats. A l'hora de capturar totes les dades la majoria dels alumnes ho feien o se'n deixaven una, a excepció de l'activitat número tres que ha presentat moltes dificultats en aquest aspecte. També se'ls ha

preguntat si saben què han de trobar i la majoria ha dit que sí al marge de l'activitat tres i cinc.

## 7.2 Test final de la fase de comprensió de l'enunciat

Després d'un any d'estar treballant amb els alumnes amb el quadern dissenyat s'han tornat a passar unes proves que consisteixen en les mateixes proves que ja es van passar al principi de curs amb algunes petites modificacions (en el punt anterior 6.5.4 s'ha explicat ja el perquè de l'elecció d'aquestes activitats i la seva estructura). Les alteracions fetes als tests consisteixen només en alguna paraula conflictiva en l'enunciat, sense canviar el problema ni el significat de l'activitat i també en l'organització de les preguntes en els qüestionaris de cada activitat. Les preguntes han conservat l'estructura del test inicial consistent en dos tipus de qüestions. Un tipus general per a avaluar la comprensió del problema emmarcat en paràmetres comuns per a totes les activitats i un tipus particular per avaluar l'activitat en concret.

En aquest punt s'exposa l'enunciat de cada activitat i un recull de totes les respostes. A més a més, es fa una síntesi dels resultats recollits en totes les proves.

### 7.2.1 Estudi de l'activitat 1

L'activitat 1 es presenta als alumnes de la forma que a continuació s'explica. Primer, es proposa l'enunciat del problema a resoldre en el mateix full. Aquest enunciat és: **“Quina és l'àrea d'un triangle equilàter de 42 cm de perímetre?”**. Tot deixant espai suficient per tal que l'alumne faci les anotacions que cregui adequades per obtenir la solució, se li proposen 8 preguntes. Les respostes a les tres primeres preguntes s'han anotat en la taula següent:

	Gens	Poc	Bastant	Totalment
1.- He entès el que passava al problema?	0	2	5	26
2.- He entès el que em demanaven?	0	0	2	31
3.- He entès l'enunciat?	0	1	3	29

Quadre 7.25: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari de geometria utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	32	1

Quadre 7.26: Resultats de la pregunta 4.

La persona que ha contestat que hi ha una paraula que no entén es refereix a “equilàter”.

La cinquena qüestió és sobre si s'han detectat totes les dades del problema. Les dades de l'enunciat són tres: la figura geomètrica (un triangle), com són les longituds dels seus costats (igual per ser equilàter) i el seu perímetre (42 cm).

Dades escrites	0	1	2	3
Nombre d'alumnes	2	8	4	19

Quadre 7.27: Resultats de la pregunta 5.

La pregunta número 6, la número 7 i la número 8 s'ha valorat com correctes (si ho són totalment) o com incorrectes (encara que siguin parcialment correctes).

	Incorrecta	Correcta
6.- Què he de trobar?	1	32
7.- Què és un triangle equilàter?	3	30
8.- Què és el perímetre?	7	26

Quadre 7.28: Resultats de les preguntes 6, 7, 8.

A la vista dels resultats el grup manifesta haver entès el que passa en el problema (totalment 26 i bastant 5) i el que es demana (totalment 31 i bastant 2). Tampoc tenen dificultats amb el vocabulari usat, ni amb el vocabulari que han de trobar. La definició de triangle equilàter la tenen clara per la descripció que donen (30 alumnes correcte) però la de perímetre no tants (26 respostes correctes i 7 incorrectes).

Però a l'hora de capturar totes les dades que dona l'enunciat pocs més de la meitat són capaços de fer-ho (19 alumnes). Gairebé una tercera part del grup només captura una dada o cap (8 i 2 respectivament).

### 7.2.2 Estudi de l'activitat 2

L'activitat 2 es presenta als alumnes de forma similar que l'activitat 1 però incorpora una petita modificació a l'enunciat del test inicial. Degut al fet que en el primer test hi hagué alumnes que no entengueren el sentit de la paraula "mitgers", en aquest test s'ha substituït per "del mig". La idea és observar si es comprèn el sentit de l'enunciat, per sobre de l'obstacle que pot ocasionar el propi vocabulari. L'enunciat del problema a resoldre és: **"Un rectangle té una longitud de 15 cm i una amplada de 10 cm. Calcula l'àrea del rombe que es forma quan unim els punts del mig dels costats del rectangle."**

Seguint la resolució per escrit dels alumnes, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per sis preguntes sobre el grau de comprensió de l'activitat 2. La importància de la resolució escrita de l'activitat és relativa donat que el subjecte d'avaluació és la comprensió i no la manera de solucionar la qüestió.

Les tres primeres preguntes s'han contestat de la següent manera:

	Gens	Poc	Bastant	Totalment
1.- He entès el que passava al problema?	2	2	5	24
2.- He entès el que em demanaven?	1	3	4	25
3.- He entès l'enunciat?	2	3	2	26

Quadre 7.29: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	29	4

Quadre 7.30: Resultats de la pregunta 4.

Les quatre persones que han respost que algunes paraules no s'entenen han coincidit en dir que no entenen la construcció que s'ha de fer per obtenir el rombe. De fet, no hi ha cap paraula que no entenguin, sinó és que el conjunt d'elles, el problema en sí, no l'han entès.

La cinquena pregunta analitza si han captat totes les dades que els dona l'enunciat. El total de dades és 3 i fan referència a la figura geomètrica que és (un rectangle), a la seva longitud de 15 cm i a la seva amplada de 10 cm.

Dades escrites	0	1	2	3
Nombre d'alumnes	1	0	8	24

Quadre 7.31: Resultats de la pregunta 5.

La sisena pregunta s'interessa sobre si l'alumne sap exactament què ha de trobar. Primer ha de dir que ha de detectar un rombe a partir d'un rectangle, i després, ha de dir que ha de calcular la seva àrea. Si l'estudiant contesta els dos passos exactament es considera una resposta correcta. Altrament, es considera incorrecta.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	2	31

Quadre 7.32: Resultats de la pregunta 6.

El grup diu que entén el que passa en el problema i el que es demana (29 alumnes entre totalment i bastant). L'enunciat de l'activitat majoritàriament diuen que l'han entès i dificultats amb el vocabulari només quatre persones han manifestat tenir-ne. Les dades s'han capturat per tots (24 alumnes les han descobert totes i 8 se n'han descuidat 1). La idea sobre el que s'ha de trobar la tenen clara. Dues persones declaren no haver entès gens ni l'enunciat ni el problema.

### 7.2.3 Estudi de l'activitat 3

L'activitat número 3 del test final titulada "L'oblit del carnet" té el mateix enunciat que la del test inicial. El qüestionari formulat a continuació constà de sis preguntes. Les tres primeres preguntes recullen els resultats següents:



	Gens	Poc	Bastant	Totalment
1.- He entès el que passava al problema?	0	8	7	18
2.- He entès el que em demanaven?	1	5	6	21
3.- He entès l'enunciat?	0	5	8	20

Quadre 7.33: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	31	2

Quadre 7.34: Resultats de la pregunta 4.

Les dues persones que han contestat que han tingut dificultats per entendre totes les paraules han coincidit en les paraules "pas a nivell".

La cinquena pregunta analitza si han captat totes les dades que els dona l'enunciat. El total de dades és 5 doncs les dades donades són les següents: es deixa el permís de conduir, no para en un pas a nivell, no fa cas a un senyal de prohibició, viatja en direcció contrària i ho observa un policia i no li ho impedeix.

Dades escrites	0	1	2	3	4	5
Nombre d'alumnes	11	6	6	3	3	4

Quadre 7.35: Resultats de la pregunta 5.

La sisena pregunta s'interessa sobre si l'alumne sap exactament què ha de trobar avaluant-li com a correcta la resposta que dona si és perquè l'agent de trànsit no fa res.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	3	30

Quadre 7.36: Resultats de la pregunta 6.

Aquesta activitat té gairebé una quarta part del grup que diu que entén poc el que passa en el problema (8 persones). Gairebé una sisena part del grup diu que entenen poc el que demanen (5 persones) i diuen que entenen poc l'enunciat. El grup no té dificultats amb el vocabulari (només 2 persones) i sap correctament el que ha de trobar (exceptuant a 3 persones). La dificultat la presenta la captura de dades: una tercera part del grup no en captura cap de les cinc dades que es troben a l'enunciat. Només 4 persones aconseguen adonar-se'n de les cinc dades i 3 persones de quatre dades.

#### 7.2.4 Estudi de l'activitat 4

L'activitat número 4 del test final titulada "Càlculs ferroviaris" té un enunciat lleugerament modificat que el del test inicial. Com hi ha hagut alumnes que han manifestat tenir dificultats amb l'adverbi "íntegrament" s'ha decidit substituir per

aquest altre: “totalment”. Així s’acaba amb possibles problemes de vocabulari i es pot analitzar exclusivament la comprensió de l’enunciat. El problema diu: **“Un tren d’1 km de longitud es desplaça a la velocitat d’1 km/min i travessa un túnel d’1 km de longitud. Quant temps necessitarà per travessar totalment el túnel?”**

Al final de l’activitat s’ha dissenyat un qüestionari constituït per sis preguntes. Els resultats recollits de les tres primeres preguntes són:

	Gens	Poc	Bastant	Totalment
1.- He entès el que passava al problema?	0	1	5	27
2.- He entès el que em demanaven?	0	3	2	28
3.- He entès l’enunciat?	0	0	6	27

Quadre 7.37: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari utilitzat.

	No hi ha paraules que no s’entenen	Hi ha paraules que no s’entenen
Nombre d’alumnes	33	0

Quadre 7.38: Resultats de la pregunta 4.

La cinquena pregunta s’interessa per conèixer si l’estudiant ha detectat totes les dades que el problema li dona. Les dades que dona el problema són la longitud del tren (1 km), la velocitat del tren (1 km/min) i la longitud del túnel (1 km).

Dades escrites	0	1	2	3
Nombre d’alumnes	0	1	5	27

Quadre 7.39: Resultats de la pregunta 5.

La sisena pregunta s’interessa sobre si l’alumne sap exactament què ha de trobar i s’avalua la seva resposta com correcta si respon el temps que necessitarà el tren per travessar totalment el túnel.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d’alumnes	1	32

Quadre 7.40: Resultats de la pregunta 6.

Aquesta activitat el grup diu que l’entén (totalment 27 i bastant 5). Gairebé tots diuen que han entès el que l’enunciat demanava (només 3 ho entenien poc). L’enunciat diuen que l’entenen totalment (27) i bastant (6), i tots menys un saben què han de trobar. Cap alumne diu haver tingut dificultats amb el vocabulari. Les cinc dades les han capturat gairebé tots (en la seva totalitat 27 persones i 5 alumnes quatre dades).

### 7.2.5 Estudi de l'activitat 5

L'activitat número 5 titulada “Quin embolic amb l'edat!” del test final es diferencia de la del test inicial passada a l'inici del curs només en una indicació. La indicació que es dona és per evitar que l'estudiant es confongui no encertant amb l'edat mínima exigida per votar a Espanya. L'objectiu no és pas saber quan es pot votar. Així, l'enunciat final de l'activitat és: **“Abans d'ahir tenia quinze anys, però l'any que ve podré votar. Com és possible? Indicació: es pot votar a partir dels divuit anys.”**

Anàlogament que amb les activitats anteriors, després d'un espai en blanc perquè l'alumne pugui solucionar el problema se li proposa un qüestionari amb sis preguntes.

Les tres primeres preguntes del qüestionari s'han contestat de la següent manera:

	Gens	Poc	Bastant	Totalment
1.- He entès el que passava al problema?	2	5	5	21
2.- He entès el que em demanaven?	0	2	5	26
3.- He entès l'enunciat?	3	4	3	23

Quadre 7.41: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta es refereix a la dificultat que suposa el vocabulari utilitzat.

	No hi ha paraules que no s'entenen	Hi ha paraules que no s'entenen
Nombre d'alumnes	33	0

Quadre 7.42: Resultats de la pregunta 4.

La cinquena pregunta s'interessa per conèixer si l'estudiant ha detectat totes les dades que el problema li dona. Les dades que dona el problema són que abans d'ahir tenia quinze anys i que l'any que ve podrà votar. Però a diferència de la cinquena activitat en el test inicial, en aquest test final s'inclou una indicació de manera explícita. Ara es diu que es pot votar a partir dels divuit anys, la qual cosa fa que hi hagi una dada explícita més.

Dades escrites	0	1	2	3
Nombre d'alumnes	3	8	19	3

Quadre 7.43: Resultats de la pregunta 5.

La sisena pregunta s'interessa sobre si l'alumne sap exactament què ha de trobar avaluant-se la seva resposta com a correcta si respon com és possible que pugui votar.

	Incorrecta	Correcta
Nombre d'alumnes	9	24

Quadre 7.44: Resultats de la pregunta 6.

Una cinquena part del grup diu que ha entès poc o gens el que passa al problema i l'enunciat, tot i que manifesten haver entès bastant i totalment el que es demana la gran majoria. Cap alumne diu que hagi tingut dificultats amb el vocabulari. Una tercera part del grup no ha capturat cap dada o només una, cosa que quasi coincideix amb el número d'alumnes que no saben què han de trobar.

### 7.2.6 Síntesi del test final

Els alumnes diuen que han entès les activitats 1, 2 i 4. No passa el mateix amb les activitats número 3 i 5 on diuen que no ho entenen o ho entenen poc 8 i 7 alumnes respectivament. El grup diu que entén el que demanen els enunciats de totes les activitats (l'activitat 3 és la que té més alumnes que diuen que no entenen l'enunciat i són 6).

La pregunta que els demana si han entès l'enunciat recull que diuen que sí en l'activitat 1, en l'activitat 2 (llevat de 5 persones), en l'activitat 3 (llevat de 5 alumnes), en l'activitat 4 i en l'activitat 5 (llevat de 7 alumnes). Dificultats en vocabulari només s'han declarat en l'activitat 2 (4 alumnes) i en l'activitat 3 (2 alumnes).

A l'hora de capturar les dades són les activitats 1, 3 i 5 les que s'han fet pitjor. En l'activitat 1 gairebé una tercera part (10 alumnes) només ha capturat una dada o cap de tres. En l'activitat 3 gairebé una cinquena part (7 persones) ha capturat totes les dades o quatre. En l'activitat 5 una tercera part o no ha capturat cap dada o només una de tres (11 alumnes). La darrera activitat compta amb quasi una quarta part del grup que no sap ben bé què ha de trobar (9 alumnes).

## 7.3 Test inicial de la fase de revisió de la solució

En aquest punt s'exposen les sis proves dissenyades per al test (en el punt anterior 6.5.5 s'ha explicat ja el perquè de l'elecció d'aquestes activitats i com s'estructuren). També es recullen les dades de cada qüestionari activitat a activitat. Per últim es fa una síntesi de totes les dades recollides del test inicial.

### 7.3.1 Estudi de l'activitat 1

L'activitat 1 es presenta als alumnes de la forma que a continuació s'explica. Primer, es proposa l'enunciat del problema en un full on l'han de respondre. Aquest enunciat és: **“Troba la longitud de la diagonal d'un rectangle de 6 cm de base i 4 cm d'altura.”**

Després de la resolució per escrit o d'intentar-ho, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per 4 preguntes per veure si han revisat la seva solució.

Les respostes a les tres primeres preguntes s'exposen al següent quadre:

	Negatiu	Afirmatiu
1.- T'has plantejat al final si la resposta té sentit?	4	29
2.- Has sabut com comprovar la veracitat de la resposta?	8	25
3.- Has dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta?	2	31

Quadre 7.45: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta és de tipus obert i s'interessa per saber per què l'alumne creu que la seva solució és la correcta. A la vista de tots els resultats s'han definit cinc categories. Si la pregunta és "Per què creus que la solució que has trobat és la correcta?", les categories en què s'han resumit les respostes han estat les següents:

- a. Perquè ho he comprovat.
- b. Perquè ho trobo lògic.
- c. No sé què dir/ Ho deixo en blanc.
- d. Ho tinc malament/ No l'he fet.

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	18	9	1	5

Quadre 7.46: Resultats de la pregunta 4.

En aquesta activitat la majoria dels alumnes (29) diuen que s'han plantejat el sentit de la seva resposta, i només 25 diuen haver sabut comprovar si la seva resposta era correcta, tot i que trenta-un estudiants diuen haver dedicat prou temps per veure si la resposta era correcta. Davant de la pregunta de per què creus que la teva solució és correcta, 18 alumnes diuen que perquè ho han comprovat i 9 perquè ho troben lògic. Els 6 alumnes que falten diuen que ho han fet malament, no l'han fet o ho han deixat en blanc.

### 7.3.2 Estudi de l'activitat 2

L'activitat 2 es presenta als alumnes de la forma que a continuació s'explica. Primer, es proposa l'enunciat del problema a resoldre en el mateix full. Aquest enunciat és: "**La tercera part i la quarta part d'un nombre sumen 1421. Troba aquest nombre.**"

Després de la resolució per escrit o d'intentar-ho, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per 4 preguntes per veure si han revisat la seva solució.

El quadre següent exposa les respostes a les tres primeres preguntes:

	Negatiu	Afirmatiu
1.- T'has plantejat al final si la resposta té sentit?	7	26
2.- Has sabut com comprovar la veracitat de la resposta?	20	13
3.- Has dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta?	14	19

Quadre 7.47: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta és de tipus obert i s'interessa per saber per què l'alumne creu que la seva solució és la correcta. A la vista de tots els resultats s'han definit cinc categories. Si la pregunta és "Per què creus que la solució que has trobat és la correcta?", les categories en què s'han resumit les respostes han estat les següents:

- a. Perquè ho he comprovat.
- b. Perquè ho trobo lògic.
- c. No sé què dir/ Ho deixo en blanc.
- d. Ho tinc malament/ No l'he fet.

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	4	7	19	3

Quadre 7.48: Resultats de la pregunta 4.

Una tercera part confessa no haver-se plantejat el sentit de la resposta. Gairebé només una tercera part ha sabut com comprovar la resposta (13 alumnes). Quasi la meitat del grup (14 alumnes) diu no haver dedicat el temps necessari per veure la veracitat de la resposta. Quan se'ls ha preguntat perquè creuen que els seus resultats són els correctes, les respostes recollides han estat les següents: només quatre alumnes diuen haver-ho comprovat, set estudiants diuen trobar-ho lògic, dinou alumnes no ho saben o no ho contesten, tres diuen que ho tenen malament o que no l'han fet.

### 7.3.3 Estudi de l'activitat 3

L'activitat 3 es presenta als alumnes de la forma que a continuació s'explica. Primer, es proposa l'enunciat del problema en un full on l'han de resoldre. Aquest enunciat és: **“El Senyor Rius té 44 anys. La seva filla, 20. D'aquí a quants anys l'edat del pare serà el triple de l'edat de la filla?”**

Després de la resolució per escrit o d'intentar-ho, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per 4 preguntes per veure si han revisat la seva solució.

Els resultats recollits de les tres primeres preguntes es mostren al quadre següent:

	Negatiu	Afirmatiu
1.- T'has plantejat al final si la resposta té sentit?	5	28
2.- Has sabut com comprovar la veracitat de la resposta?	12	21
3.- Has dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta?	1	32

Quadre 7.49: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta és de tipus obert i s'interessa per saber per què l'alumne creu que la seva solució és la correcta. A la vista de tots els resultats s'han definit cinc categories. Si la pregunta és “Per què creus que la solució que has trobat és la correcta?”, les categories en què s'han resumit les respostes han estat les següents:

- a. Perquè ho he comprovat.
- b. Perquè ho trobo lògic.
- c. No sé què dir/ Ho deixo en blanc.
- d. Ho tinc malament/ No l'he fet.

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	3	17	13	0

Quadre 7.50: Resultats de la pregunta 4.

Un total de 28 alumnes (la majoria) diuen que s'han plantejat el sentit de la resposta que donen. Una tercera part del grup no ha sabut comprovar si la resposta era correcta. Tots menys un diuen haver dedicat el temps necessari per veure si la resposta era correcta. Però només tres estudiants diuen haver-ho sabut comprovar. La meitat del grup afirma veure-ho lògic i aproximadament la tercera part no ho sap o no contesta.

### 7.3.4 Estudi de l'activitat 4

L'activitat 4 es presenta als alumnes de la forma que a continuació s'explica. Primer, es proposa l'enunciat del problema en un full on l'han de resoldre. Aquest enunciat és: **“El perímetre d'un triangle és 37 dm. El costat gran fa 8 dm més que el mitjà i aquest últim 4 dm més que el costat petit. Quant fan els 3 costats del triangle?”**

Després de la resolució per escrit o d'intentar-ho, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per 4 preguntes per veure si han revisat la seva solució.

Les respostes recollides a les tres primeres preguntes s'exposen en el següent quadre:

	Negatiu	Afirmatiu
1.- T'has plantejat al final si la resposta té sentit?	14	19
2.- Has sabut com comprovar la veracitat de la resposta?	18	15
3.- Has dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta?	11	22

Quadre 7.51: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta és de tipus obert i s'interessa per saber per què l'alumne creu que la seva solució és la correcta. A la vista de tots els resultats s'han definit cinc categories. Si la pregunta és “Per què creus que la solució que has trobat és la correcta?”, les categories en què s'han resumit les respostes han estat les següents:

- a. Perquè ho he comprovat.
- b. Perquè ho trobo lògic.
- c. No sé què dir/ Ho deixo en blanc.
- d. Ho tinc malament/ No l'he fet.

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	9	6	18	0

Quadre 7.52: Resultats de la pregunta 4.

Aproximadament la meitat del grup no s'ha plantejat el sentit de la resposta que ha trobat, com tampoc diu saber com comprovar la veracitat de la solució. Una tercera part del grup diu no haver dedicat prou temps per veure si la resposta era correcta.

Gairebé una quarta part afirma que com ho ha comprovat, deu tenir la seva solució correcta, sis alumnes diuen trobar-ho lògic, i la meitat no saben o no contesten el perquè creuen que la seva solució és la correcta.

### 7.3.5 Estudi de l'activitat 5

L'activitat 5 es presenta als alumnes de la forma que a continuació s'explica. Primer, es proposa l'enunciat del problema en un full on l'han de resoldre. Aquest enunciat és:

**“Completa l'enunciat següent amb una pregunta perquè tingui la solució indicada.**

**La teva mare ha comprat en el mercat 2 kg de carn i 3 kg de fruita. Ha gastat 31,50€ en total. La fruita li ha costat 7,50€. Solució: 12€.”**

Després de la resolució per escrit o d'intentar-ho, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per 4 preguntes per veure si han revisat la seva solució.

Les respostes recollides a les tres primeres preguntes s'exposen en el següent quadre:

	Negatiu	Afirmatiu
1.- T'has plantejat al final si la resposta té sentit?	2	31
2.- Has sabut com comprovar la veracitat de la resposta?	6	27
3.- Has dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta?	6	27

Quadre 7.53: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta és de tipus obert i s'interessa per saber per què l'alumne creu que la seva solució és la correcta. A la vista de tots els resultats s'han definit cinc categories. Si la pregunta és "Per què creus que la solució que has trobat és la correcta?", les categories en què s'han resumit les respostes han estat les següents:

- a. Perquè ho he comprovat.
- b. Perquè ho trobo lògic.
- c. No sé què dir/ Ho deixo en blanc.
- d. Ho tinc malament/ No l'he fet.

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	14	5	10	4

Quadre 7.54: Resultats de la pregunta 4.

Tots els alumnes menys dos diuen que s'han plantejat el sentit de la seva resposta. Gairebé una sisena part manifesta haver dedicat prou temps a la comprovació. Això es reflecteix quan catorze estudiants afirmen haver comprovat el resultat. Cinc alumnes diuen trobar la seva solució lògica i quatre diuen haver-ho fet malament o no haver-ho sabut fer. La resta no ho sap o no contesta (una tercera part).

### 7.3.6 Estudi de l'activitat 6

L'activitat 6 es presenta als alumnes de la forma que a continuació s'explica. Primer, es proposa l'enunciat següent:

**"Omple els espais en blanc amb una xifra de l'u al nou de manera que verifiquin totes les operacions en vertical i horitzontal."**

$$\begin{array}{r}
 \square : \square - \square = 1 \\
 + \quad + \quad - \\
 \square - 2 : \square = 2 \\
 - \quad + \quad - \\
 \square + \square + \square = 9 \\
 = \quad = \quad = \\
 8 \quad 4 \quad 1
 \end{array}$$



Després de la resolució per escrit o d'intentar-ho, se'ls demana respondre un qüestionari constituït per 4 preguntes per veure si han revisat la seva solució.

Les respostes a les tres primeres preguntes han estat les que s'exposen a la taula següent:

	Negatiu	Afirmatiu
1.- T'has plantejat al final si la resposta té sentit?	15	18
2.- Has sabut com comprovar la veracitat de la resposta?	18	15
3.- Has dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta?	19	14

Quadre 7.55: Resultats de les preguntes 1, 2, 3.

La quarta pregunta és de tipus obert i s'interessa per saber per què l'alumne creu que la seva solució és la correcta. A la vista de tots els resultats s'han definit cinc categories. Si la pregunta és "Per què creus que la solució que has trobat és la correcta?", les categories en què s'han resumit les respostes han estat les següents:

- a. Perquè ho he comprovat.
- b. Perquè ho trobo lògic.
- c. No sé què dir/ Ho deixo en blanc.
- d. Ho tinc malament/ No l'he fet.

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	4	2	17	10

Quadre 7.56: Resultats de la pregunta 4.

Aproximadament la meitat de la classe confessa no haver-se plantejat el sentit de la seva resposta, a l'igual que no han sabut verificar si era correcta o no. Més de la meitat del grup declara no haver-hi dedicat prou temps a comprovar si la solució és correcta.

Només quatre estudiants diuen estar segurs que la seva solució és la correcta perquè diuen haver-ho comprovat, i altres dos diuen trobar-la lògica. Però la meitat del grup no ho saben o no contesten i una tercera part comenta que no ho ha fet bé o que ho té malament.

### 7.3.7 Síntesi del test inicial

En la majoria de les activitats els alumnes diuen que s'han plantejat el sentit de les solucions, llevat de les activitats quatre i sis, on ha estat una mica més de la meitat del grup només. En les activitats 1, 3 i 5 són més els alumnes que diuen que sí han sabut comprovar la veracitat de la resposta que els que no. Els que no han sabut són: una quarta part de l'activitat 1, una tercera part de l'activitat 3 i una sisena part de l'activitat 5. En les activitats 2, 4 i 6 són més els que diuen que no han sabut comprovar-ho: dues terceres parts en la 2 i pocs més de la meitat en la 4 i la 6.

## 7.4 Test final de la fase de revisió de la solució

Les activitats del test final es presenten amb els mateixos enunciats que les del test inicial que es passà al començament del curs (en el punt anterior 6.5.5 s'ha explicat ja el

perquè de l'elecció d'aquestes activitats i de la seva estructura). Però el que les diferencia és el qüestionari. En el test final s'ha elaborat un qüestionari amb unes preguntes que encara que busquin el mateix, ho fan des d'angles diferents. En aquest punt s'exposen els enunciats i es recullen els resultats activitat per activitat. Al final es fa una síntesi de tots els resultats obtinguts en totes les activitats.

#### 7.4.1 Estudi de l'activitat 1

L'activitat 1 diu: “Troba la longitud de la diagonal d'un rectangle de 6 cm de base i 4 cm d'altura.”

Després de solucionar-la, l'alumne ha de contestar un qüestionari format per catorze preguntes.

La primera pregunta és discriminatòria, doncs si l'alumne respon afirmativament que ha sabut resoldre el problema aleshores escull set preguntes diferents a si ha respost negativament. La taula següent recull les respostes:

	Negativa	Afirmativa
Nombre d'alumnes	3	30

Quadre 7.57: Resultats de la pregunta 1.

Els 30 alumnes que han contestat afirmativament han respost a les següents preguntes com mostra la taula següent:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé matemàtiques	0	6	9	15
Tinc molta intuïció	0	4	17	9
He tingut sort	14	8	5	3
Estava tranquil	0	4	10	16
Estava concentrat	1	1	16	12
Era fàcil	1	4	7	18

Quadre 7.58: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

En cas d'haver contestat afirmativament la primera pregunta, també han hagut de respondre una pregunta que vol saber com se sent en haver trobat la seva solució.

	Sorpresa d'un mateix	Indiferent	Satisfet
Nombre d'alumnes	1	15	14

Quadre 7.59: Resultats de la pregunta 8.

En cas d'haver contestat negativament la primera pregunta, els 3 alumnes que així ho han fet, han hagut de respondre set preguntes diferents a les anteriors. La taula següent mostra les sis primeres:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé poques matemàtiques	1	0	2	0
Tinc poca intuïció	1	0	2	0
He tingut mala sort	1	1	0	1
Estava nerviós	0	1	1	1
No estava concentrat	0	2	0	1
Era difícil	1	0	1	1

Quadre 7.60: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A més a més, per haver contestat negativament la primera pregunta, també han hagut d'explicar com s'han sentit en veure que no sabien resoldre el problema. Els resultats es mostren a la següent taula:

	Preocupat	Indiferent	Enfadat
Nombre d'alumnes	3	0	0

Quadre 7.61: Resultats de la pregunta 8.

A partir de la vuitena pregunta, ja no hi ha discriminacions. Tots els alumnes contesten les mateixes preguntes.

La pregunta número nou pretén saber si l'estudiant s'ha plantejat si la resposta té sentit. Els resultats han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	6	27

Quadre 7.62: Resultats de la pregunta 9.

La pregunta número deu fa referència a si creu que ha sabut comprovar la veracitat de la resposta. Els resultats han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	12	21

Quadre 7.63: Resultats de la pregunta 10.

La pregunta número onze vol saber què ha fet l'alumne en haver obtingut la solució. Es dona a escollir entre tres opcions i els resultats s'exposen a la taula següent:

	No s'ha fet res més	S'ha comprovat el resultat	S'han buscat altres maneres de resolució
Nombre d'alumnes	22	9	2

Quadre 7.64: Resultats de la pregunta 11.

La pregunta número dotze és una pregunta oberta que s'interessa per saber per què l'estudiant creu que la seva solució és correcta. Les respostes s'han classificat en quatre categories diferents que s'han creat tenint en compte els comentaris dels enquestats:

- a. Perquè ho he comprovat
- b. Perquè ho trobo lògic
- c. No sé què dir o ho he deixat en blanc o no responc a la pregunta
- d. No ho penso així, o no l'he fet o ho he fet malament

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	9	10	14	0

Quadre 7.65: Resultats de la pregunta 12.

La pregunta número tretze pregunta a l'alumne si creu que els seus companys han sabut resoldre el problema i el perquè. Les respostes poden englobar-se en tres tipus segons si la resposta primera és afirmativa, negativa o qualsevol altra.

La resposta ha estat afirmativa en 30 alumnes, i les impressions s'han resumit en quatre punts:

- a. Perquè és fàcil
- b. Perquè s'ha treballat a classe
- c. Ho he deixat en blanc
- d. Perquè són més llestos que jo

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	14	9	5	2

Quadre 7.66: Resultats de la pregunta 13.

La resposta ha estat negativa en 0 alumnes.

La resposta de tres alumnes ha estat que no ho saben (3 alumnes), o ho han deixat en blanc, o han contestat que alguns (sense aclarir si molts o pocs).

La pregunta número catorze és oberta doncs li demana a l'estudiant que comenti lliurement que li ha semblat l'activitat i la solució que ell ha obtingut. S'han agrupat les respostes en sis categories:

- a. M'ha semblat fàcil
- b. L'he trobat com una activitat més
- c. M'ha semblat difícil
- d. No contesto el que em pregunten o ho deixo en blanc
- e. M'ha semblat agradable, divertit, interessant, entretingut
- f. No m'ha agradat

	a	b	c	d	e	f
Nombre d'alumnes	12	7	3	3	5	3

Quadre 7.67: Resultats de la pregunta 14.

Aquest problema diuen haver-lo sabut resoldre trenta alumnes, la majoria. La meitat diuen que saben matemàtiques i que tenen bastant intuïció, estant en desacord amb l'afirmació que han tingut sort. La majoria manifesta haver estat tranquil·la i concentrada o bastant tranquil·la i concentrada mentre resolva el problema. La majoria ha convingut que era fàcil o bastant fàcil. En acabar el problema exitosament la meitat es troba indiferent i l'altra meitat satisfeta. Els que diuen no haver sabut resoldre el problema diuen estar preocupats en arribar al final.

La gran majoria diu que s'ha plantejat el sentit de la solució, encara que només dues terceres parts del grup diuen que han sabut com verificar la certesa de la solució. En acabar, les dues terceres parts del grup no han fet res més i l'altra tercera part diu que ha

comprovat la solució (i uns pocs diuen que han buscat altres vies de solució). La seva solució creuen que és la correcta perquè diuen que ho han comprovat (una tercera part), perquè ho troben lògic (una altra tercera part). L'altra tercera part no contesta.

Quan s'ha preguntat si creu que els seus companys l'han sabut resoldre, la majoria ha dit que sí perquè és fàcil, encara que la tercera part troba l'explicació en el fet que s'ha treballat a classe. Hi ha dos alumnes que diuen que els altres són més llestos que ells.

Una tercera part manifesta que li ha semblat fàcil, una cinquena part ho ha trobat com una activitat més i una setena part confessa haver-ho trobat interessant, entretingut i agradable.

#### 7.4.2 Estudi de l'activitat 2

L'activitat 2 diu: “**La tercera part i la quarta part d'un nombre sumen 1421. Troba aquest nombre.**”

Després de solucionar-la, l'alumne ha de contestar un qüestionari format per catorze preguntes.

La primera pregunta és discriminatòria, doncs si l'alumne respon afirmativament que ha sabut resoldre el problema escull set preguntes diferents a si ha respost negativament. La taula següent recull les respostes:

	Negativa	Afirmativa
Nombre d'alumnes	8	25

Quadre 7.68: Resultats de la pregunta 1.

Els 25 alumnes que han contestat afirmativament han hagut de respondre les següents preguntes que mostra la taula:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé matemàtiques	0	4	8	13
Tinc molta intuïció	0	5	12	8
He tingut sort	8	9	6	2
Estava tranquil	1	1	11	12
Estava concentrat	2	1	12	10
Era fàcil	1	2	12	10

Quadre 7.69: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

També han hagut de respondre una pregunta que vol saber com se senten en haver trobat la seva solució.

	Sorpresa d'un mateix	Indiferent	Satisfet
Nombre d'alumnes	1	9	15

Quadre 7.70: Resultats de la pregunta 8.

En cas d'haver contestat negativament la primera pregunta, aleshores els 8 alumnes han hagut de respondre set preguntes diferents a les anteriors. La taula següent mostra les respostes de les sis primeres que s'han recollit:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé poques matemàtiques	3	4	1	0
Tinc poca intuïció	3	4	1	0
He tingut mala sort	4	0	1	3
Estava nerviós	3	2	3	0
No estava concentrat	5	1	1	1
Era difícil	1	1	4	2

Quadre 7.71: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A més a més, per haver contestat negativament la primera pregunta, també han hagut d'explicar com s'han sentit en veure que no han sabut resoldre el problema. Els resultats es mostren a la taula següent:

	Preocupat	Indiferent	Enfadat
Nombre d'alumnes	5	2	1

Quadre 7.72: Resultats de la pregunta 8.

A partir de la vuitena pregunta, ja no hi ha hagut discriminacions i tots els alumnes contesten les mateixes preguntes.

La pregunta número nou pretén saber si l'estudiant s'ha plantejat si la resposta té sentit. Els resultats han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	4	29

Quadre 7.73: Resultats de la pregunta 9.

La pregunta número deu fa referència a si creu que ha sabut comprovar la veracitat de la resposta. Els resultats han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	7	26

Quadre 7.74: Resultats de la pregunta 10.

La pregunta número onze vol saber què ha fet l'alumne en haver obtingut la solució. Es dona a escollir tres opcions i els resultats s'exposen a la taula següent:

	No s'ha fet res més	S'ha comprovat el resultat	S'han buscat altres maneres de resolució
Nombre d'alumnes	9	20	4

Quadre 7.75: Resultats de la pregunta 11.

La pregunta número dotze és una pregunta oberta que s'interessa per saber per què l'estudiant creu que la seva solució és correcta. Les respostes s'han classificat en quatre categories diferents que s'han creat tenint en compte els comentaris dels enquestats:

- a. Perquè ho he comprovat
- b. Perquè ho trobo lògic
- c. No sé què dir o ho he deixat en blanc o no responc a la pregunta
- d. No ho penso així, o no l'he fet o ho he fet malament

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	13	5	11	4

Quadre 7.76: Resultats de la pregunta 12.

La pregunta número tretze pregunta a l'alumne si creu que els seus companys han sabut resoldre el problema i el perquè. Les respostes es poden englobar en tres tipus segons si la resposta primera és afirmativa, negativa o qualsevol altra.

Hi ha 24 alumnes que han contestat afirmativament i les impressions s'han resumit en quatre punts:

- a. Perquè és fàcil
- b. Perquè s'ha treballat a classe
- c. Ho he deixat en blanc
- d. Perquè són més llestos que jo

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	10	10	3	1

Quadre 7.77: Resultats de la pregunta 13.

La resposta ha estat negativa en un cas i el motiu que ha dit és perquè és difícil.

Hi ha 8 alumnes que han contestat que no ho saben, o ho han deixat en blanc, o han contestat que alguns (sense aclarir si molts o pocs).

La pregunta número catorze és oberta doncs li demana a l'estudiant que comenti lliurement què li ha semblat l'activitat i la solució que ell ha obtingut. Les respostes s'han agrupat en sis categories:

- a. M'ha semblat fàcil
- b. L'he trobat com una activitat més
- c. M'ha semblat difícil
- d. No contesto el que em pregunten o ho deixo en blanc
- e. M'ha semblat agradable, divertit, interessant, entretingut
- f. No m'ha agradat

	a	b	c	d	e	f
Nombre d'alumnes	4	15	3	5	6	0

Quadre 7.78: Resultats de la pregunta 14.

Tres quartes parts del grup diuen haver sabut resoldre el problema. D'aquests, gairebé tots diuen saber matemàtiques molt o bastant i tenir bastant o molta intuïció. Però no estan d'acord amb haver tingut sort. Diuen haver estat tranquils i concentrats o bastant tranquils i concentrats. L'activitat la troben fàcil o bastant fàcil una majoria, i se senten satisfets una mica més de la meitat; els altres es troben indiferents.

La quarta part del grup que diu no haver sabut resoldre el problema creuen que no saben matemàtiques o que en saben poques, i la meitat diu que ha tingut mala sort i que estava bastant o una mica nerviosa. Tot i que han estat concentrats troben que és un problema difícil. En acabar se senten preocupats, i un d'ells enfadat.

La majoria de tot el grup s'ha plantejat el sentit de la seva solució, i diu haver sabut comprovar-la. En acabar el problema, dues tercers parts diuen haver comprovat la solució i quatre estudiants més han buscat altres vies de solució; la resta no ha fet res més. Una tercera part de la classe creu que ho té bé perquè diu que ho ha comprovat.

Tres quartes parts del grup creu que els seus companys l'han sabut resoldre o bé perquè era fàcil o bé perquè s'ha treballat a classe.

Aquesta activitat li ha semblat a la meitat del grup una activitat més. A una tercera part li ha semblat agradable i a cap li ha desagradat.

### 7.4.3 Estudi de l'activitat 3

L'activitat 3 diu: **“El senyor Rius té 44 anys. La seva filla, 20. D'aquí a quants anys l'edat del pare serà el triple de l'edat de la filla?”**

Després de solucionar-la, l'alumne ha de contestar un qüestionari format per catorze preguntes.

La primera pregunta és discriminatòria, doncs si l'alumne respon afirmativament que ha sabut resoldre el problema escull set preguntes diferents que si ha respost negativament. La taula següent recull les respostes:

	Negativa	Afirmativa
Nombre d'alumnes	12	21

Quadre 7.79: Resultats de la pregunta 1.

Hi ha 21 alumnes que han contestat afirmativament i aleshores han hagut de seleccionar entre les opcions següents que mostra la taula:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé matemàtiques	1	4	8	8
Tinc molta intuïció	0	1	11	9
He tingut sort	5	7	6	3
Estava tranquil	0	2	10	9
Estava concentrat	1	2	9	9
Era fàcil	2	7	5	7

Quadre 7.80: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Aquests 21 alumnes també han hagut de respondre una pregunta que vol saber com se senten en haver trobat la seva solució.

	Sorprès d'un mateix	Indiferent	Satisfet
Nombre d'alumnes	3	12	6

Quadre 7.81: Resultats de la pregunta 8.

En cas d'haver contestat negativament la primera pregunta, aleshores els 12 alumnes han hagut de respondre set preguntes diferents a les anteriors. La taula següent mostra les sis primeres:



	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé poques matemàtiques	3	7	2	0
Tinc poca intuïció	3	6	2	1
He tingut mala sort	3	1	4	4
Estava nerviós	5	1	2	4
No estava concentrat	2	5	2	3
Era difícil	0	2	3	7

Quadre 7.82: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A més a més, per haver contestat negativament la primera pregunta, també han hagut d'explicar com s'han sentit en veure que no saben resoldre el problema:

	Preocupat	Indiferent	Enfadat
Nombre d'alumnes	4	2	6

Quadre 7.83: Resultats de la pregunta 8.

A partir de la vuitena pregunta, ja no hi ha discriminacions, tots els alumnes contesten les mateixes preguntes.

La pregunta número nou pretén saber si l'estudiant s'ha plantejat si la resposta té sentit en acabar. Els resultats han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	9	24

Quadre 7.84: Resultats de la pregunta 9.

La pregunta número deu feia referència a si havia sabut comprovar la veracitat de la resposta. Els resultats del que han dit han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	15	18

Quadre 7.85: Resultats de la pregunta 10.

La pregunta número onze vol saber què ha fet l'alumne en haver obtingut la solució. Es dona a escollir tres opcions i els resultats s'exposen a la taula següent:

	No s'ha fet res més	S'ha comprovat el resultat	S'han buscat altres maneres de resolució
Nombre d'alumnes	9	14	10

Quadre 7.86: Resultats de la pregunta 11.

La pregunta número dotze és una pregunta oberta que s'interessa per saber per què l'estudiant creu que la seva solució és correcta. Les respostes s'han classificat en quatre categories diferents que s'han creat tenint en compte els comentaris dels enquestats:

- a. Perquè ho he comprovat
- b. Perquè ho trobo lògic
- c. No sé què dir o ho he deixat en blanc o no responc a la pregunta
- d. No ho penso així, o no l'he fet o ho he fet malament

	a	b	c	d	e
Nombre d'alumnes	5	10	13	5	1

Quadre 7.87: Resultats de la pregunta 12.

La pregunta número tretze pregunta a l'alumne si creu que els seus companys han sabut resoldre el problema i el perquè. Les respostes es poden englobar en tres tipus segons si la resposta primera és afirmativa, negativa o qualsevol altra.

Les impressions dels 11 alumnes que han contestat afirmativament s'han resumit en quatre punts:

- a. Perquè és fàcil
- b. Perquè s'ha treballat a classe
- c. Ho he deixat en blanc
- d. Perquè són més llestos que jo

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	7	0	3	1

Quadre 7.88: Resultats de la pregunta 13.

La resposta ha estat negativa en set casos i les impressions es poden resumir en una de sola: perquè és difícil.

Hi ha 15 alumnes que han contestat que no ho saben, o ho han deixat en blanc, o han contestat que alguns (sense aclarir si molts o pocs).

La pregunta número catorze és oberta doncs li demana a l'estudiant que comenti lliurement que li ha semblat l'activitat i la solució que ell ha obtingut. Les respostes s'han agrupat en sis categories:

- a. M'ha semblat fàcil
- b. L'he trobat com una activitat més
- c. M'ha semblat difícil
- d. No contesto el que em pregunten o ho deixo en blanc
- e. M'ha semblat agradable, divertit, interessant, entretingut
- f. No m'ha agradat

	a	b	c	d	e	f
Nombre d'alumnes	2	6	8	8	6	3

Quadre 7.89: Resultats de la pregunta 14.

Aquest problema diuen haver-lo sabut resoldre dues tercers parts del grup. Precisament aquests diuen que saben matemàtiques i que tenen entre bastant i molta intuïció. Però quan responen a si han tingut sort, la resposta no ha estat gens unificada ni tampoc agrupada. Per altra banda, la majoria estava tranquil·la i concentrada. Tampoc s'han posat d'acord en dir si era fàcil o no. Quan han acabat se senten indiferent i una tercera part satisfets; els altres sorpresos de sí mateixos.

L'altra tercera part que ha declarat que no ha sabut resoldre el problema, no creu saber poques matemàtiques ni tampoc creu que tenen poca intuïció, encara que la majoria creu que ha tingut mala sort. No comenten que estiguessin nerviosos ni que no estiguessin

concentrats. Manifesten que era difícil i al final la meitat se sent enfadada i els altres preocupats o indiferents.

Tres quartes parts de la classe es planteja el sentit de la seva solució, tot i que aproximadament la meitat diu no haver sabut com comprovar-la. En acabar, aproximadament la meitat diu que ha comprovat la solució i una tercera part ha buscat altres vies per solucionar el problema. La resta no ha fet res més.

Una tercera part dels alumnes creu que la seva solució trobada és la correcta perquè diuen que la troben lògica. Només una setena part contesta que ho ha comprovat. La meitat, però, no contesta a la pregunta. La resta diu que no ho creu així perquè no l'ha sabut fer.

Quan se'ls pregunta si la resta dels seus companys l'ha sabut resoldre, una tercera part diu que sí (i es decanten per dir que perquè és fàcil) i una cinquena part diu que no; els altres no es manifesten clarament.

A una quarta part li ha semblat una activitat difícil i gairebé al mateix nombre d'alumnes li ha semblat entretinguda i agradable. A una altra quarta part del grup li ha semblat com una activitat més.

#### 7.4.4 Estudi de l'activitat 4

L'activitat 4 diu: **“El perímetre d'un triangle és 37 dm. El costat gran fa 8 dm més que el mitjà i aquest últim 4 dm més que el costat petit. Quant fan els 3 costats del triangle?”**

Després de solucionar-la, l'alumne ha de contestar un qüestionari format per catorze preguntes.

La primera pregunta és discriminatòria, doncs si l'alumne respon afirmativament que ha sabut resoldre el problema escull set preguntes diferents a si ha respost negativament. La taula següent recull les respostes:

	Negativa	Afirmativa
Nombre d'alumnes	15	18

Quadre 7.90: Resultats de la pregunta 1.

En cas d'haver contestat afirmativament, els 18 alumnes han hagut de seleccionar entre les opcions següents tal com mostra la taula:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé matemàtiques	2	1	8	7
Tinc molta intuïció	1	1	10	6
He tingut sort	3	5	6	4
Estava tranquil	0	4	4	10
Estava concentrat	0	1	6	11
Era fàcil	0	4	7	7

Quadre 7.91: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

En cas d'haver contestat afirmativament la primera pregunta també han hagut de respondre una pregunta que vol saber com se senten en haver trobat la solució.

	Sorpresa d'un mateix	Indiferent	Satisfet
Nombre d'alumnes	2	8	8

Quadre 7.92: Resultats de la pregunta 8.

En cas d'haver contestat negativament la primera pregunta, aleshores els 15 alumnes han hagut de respondre set preguntes diferents a les anteriors. La taula següent mostra les sis primeres:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé poques matemàtiques	3	8	4	0
Tinc poca intuïció	5	6	4	0
He tingut mala sort	3	7	3	2
Estava nerviós	3	7	2	3
No estava concentrat	3	7	4	1
Era difícil	2	2	4	7

Quadre 7.93: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A més a més, per haver contestat negativament la primera pregunta, també han hagut de respondre sobre com s'han sentit en veure que no saben resoldre el problema. Els resultats es mostren a la taula següent:

	Preocupat	Indiferent	Enfadat
Nombre d'alumnes	3	7	5

Quadre 7.94: Resultats de la pregunta 8.

A partir de la vuitena pregunta, ja no hi ha discriminacions i tots els alumnes contesten les mateixes preguntes.

La pregunta número nou pretén saber si l'estudiant s'ha plantejat si la resposta té sentit en acabar. Els resultats del que han dit han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	12	21

Quadre 7.95: Resultats de la pregunta 9.

La pregunta número deu fa referència a si l'alumne ha sabut comprovar la veracitat de la resposta. Els resultats del que han dit han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	16	17

Quadre 7.96: Resultats de la pregunta 10.

La pregunta número onze vol saber què ha fet l'alumne en haver obtingut la solució. Es dona a escollir tres opcions i els resultats del que han dit s'exposen a la taula següent:

	No s'ha fet	S'ha comprovat el	S'han buscat altres maneres
--	-------------	-------------------	-----------------------------

	res més	resultat	de resolució
Nombre d'alumnes	15	14	4

Quadre 7.97: Resultats de la pregunta 11.

La pregunta número dotze és una pregunta oberta que s'interessa per saber per què l'estudiant creu que la seva solució és correcta. Les respostes s'han classificat en quatre categories diferents que s'han creat tenint en compte els comentaris dels enquestats:

- a. Perquè ho he comprovat
- b. Perquè ho trobo lògic
- c. No sé què dir o ho he deixat en blanc o no responc a la pregunta
- d. No ho penso així, o no l'he fet o ho he fet malament

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	12	3	13	5

Quadre 7.98: Resultats de la pregunta 12.

La pregunta número tretze pregunta a l'alumne si creu que els seus companys han sabut resoldre el problema i el perquè. Les respostes es poden englobar en tres tipus segons si la resposta primera és afirmativa, negativa o qualsevol altra.

Hi ha 16 alumnes que han contestat afirmativament i les impressions s'han resumit en quatre punts:

- a. Perquè és fàcil
- b. Perquè s'ha treballat a classe
- c. Ho he deixat en blanc
- d. Perquè són més llestos que jo

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	5	3	6	2

Quadre 7.99: Resultats de la pregunta 13 en cas afirmatiu.

Hi ha 2 alumnes que han contestat negativament i les impressions s'han resumit en dos casos: un perquè és difícil i l'altre no ha contestat la pregunta.

	a	b
Nombre d'alumnes	1	1

Quadre 7.100: Resultats de la pregunta 13 en cas negatiu.

Hi ha 15 alumnes que han contestat que no ho saben, o ho han deixat en blanc, o han contestat que alguns (sense aclarir si molts o pocs).

La pregunta número catorze és oberta doncs li demana a l'estudiant que comenti lliurement que li ha semblat l'activitat i la solució que ell ha obtingut. Les respostes s'han agrupat en sis categories:

- a. M'ha semblat fàcil
- b. L'he trobat com una activitat més
- c. M'ha semblat difícil
- d. No contesto el que em pregunten o ho deixo en blanc

- e. M'ha semblat agradable, divertit, interessant, entretingut
- f. No m'ha agradat

	a	b	c	d	e	f
Nombre d'alumnes	5	7	3	8	7	3

Quadre 7.101: Resultats de la pregunta 14.

Poc menys de la meitat del grup declara no haver sabut resoldre el problema. Entre els que diuen que sí l'han sabut resoldre es recull la impressió que creuen saber matemàtiques i que creuen tenir molta intuïció. No manifesten una clara opinió sobre si creuen haver tingut sort o no. Diuen que han estat tranquils i concentrats i majoritàriament diuen que era fàcil. En acabar la meitat s'ha sentit satisfeta (2 estudiants s'han sentit sorpresos de sí mateixos) i l'altra meitat indiferent.

Entre els que diuen que no han sabut resoldre el problema no estan d'acord a dir que saben poques matemàtiques ni tampoc que tenen poca intuïció. Més aviat, la majoria diu que ha tingut mala sort. Diuen no haver estat nerviosos ni distrets. Diuen que més aviat era difícil el problema. En acabar, una tercera part declara estar enfadada, la meitat indiferent i la resta preocupada.

Només una tercera part diu que no s'ha plantejat el sentit de la solució. La meitat del grup diu que sabia comprovar la solució, la resta diu que no.

En acabar el problema poc menys de la meitat no ha fet res més; la resta diu que ha comprovat la solució i pocs diuen que han buscat altres vies per solucionar el problema.

Una tercera part del grup està convençuda que la seva resposta és la correcta perquè diu que ho ha comprovat. L'altra tercera part no contesta a la pregunta i la resta no està convençuda o diu que troba lògica la seva resposta.

Mig grup pensa que tots han sabut resoldre el problema (perquè era fàcil, diu una tercera part, una altra tercera part no contesta i la resta respon que perquè s'ha fet a classe o perquè els seus companys són més llestos que ells). Sobre què els ha semblat l'activitat es recullen respostes totalment diferents i variables, sense una tendència marcada: la troben com una altra activitat qualsevol, la troben interessant, la troben fàcil, la troben difícil o simplement no contesten la pregunta o no els ha agradat.

#### 7.4.5 Estudi de l'activitat 5

L'activitat 5 diu: **“Completa l'enunciat següent amb una pregunta perquè tingui la solució indicada.**

**La teva mare ha comprat en el mercat 2 kg de carn i 3 kg de fruita. Ha gastat 31,50€ en total. La fruita li ha costat 7,50€. Solució: 12€.”**

Després de solucionar-la, l'alumne ha de contestar un qüestionari format per catorze preguntes.

La primera pregunta és discriminatòria doncs si l'alumne respon afirmativament que ha sabut resoldre el problema aleshores escull set preguntes diferents a les que ha de respondre si ha contestat negativament. La taula següent recull les respostes:

	Negativa	Afirmativa
Nombre d'alumnes	4	29

Quadre 7.102: Resultats de la pregunta 1.

En cas d'haver contestat afirmativament, els 29 alumnes han hagut de respondre les preguntes següents tal com mostra la taula:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé matemàtiques	1	7	10	11
Tinc molta intuïció	0	3	12	14
He tingut sort	7	11	4	7
Estava tranquil	1	4	7	17
Estava concentrat	1	2	10	16
Era fàcil	0	1	10	18

Quadre 7.103: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

En cas d'haver contestat afirmativament també han hagut de respondre una pregunta que vol saber com se senten en haver trobat la seva solució.

	Sorprès d'un mateix	Indiferent	Satisfet
Nombre d'alumnes	1	15	13

Quadre 7.104: Resultats de la pregunta 8.

En cas d'haver contestat negativament la primera pregunta, aleshores els 4 alumnes han hagut de respondre set preguntes diferents a les anteriors. La taula següent mostra les sis primeres:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé poques matemàtiques	0	2	2	0
Tinc poca intuïció	1	3	0	0
He tingut mala sort	1	2	0	1
Estava nerviós	1	1	1	1
No estava concentrat	1	1	1	1
Era difícil	0	1	1	2

Quadre 7.105: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A més a més, per haver contestat negativament la primera pregunta, també han hagut de respondre sobre com s'han sentit en veure que no saben resoldre el problema. Els resultats es mostren a la taula següent:

	Preocupat	Indiferent	Enfadat
Nombre d'alumnes	2	0	2

Quadre 7.106: Resultats de la pregunta 8.

A partir de la vuitena pregunta, ja no hi ha discriminacions, tots els alumnes contesten les mateixes preguntes.

La pregunta número nou pretén saber si l'estudiant s'ha plantejat en acabar el sentit de la resposta. Els resultats del que han contestat han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	9	24

Quadre 7.107: Resultats de la pregunta 9.

La pregunta número deu fa referència a si ha sabut comprovar la veracitat de la resposta. Els resultats del que han contestat han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	10	23

Quadre 7.108: Resultats de la pregunta 10.

La pregunta número onze vol saber què ha fet l'alumne en haver obtingut la solució. Es dona a escollir tres opcions i els resultats del que han dit s'exposen a la taula següent:

	No s'ha fet res més	S'ha comprovat el resultat	S'han buscat altres maneres de resolució
Nombre d'alumnes	12	18	3

Quadre 7.109: Resultats de la pregunta 11.

La pregunta número dotze és una pregunta oberta que s'interessa per saber per què l'estudiant creu que la seva solució és correcta. Les respostes s'han classificat en quatre categories diferents que s'han creat tenint en compte els comentaris dels enquestats:

- a. Perquè ho he comprovat
- b. Perquè ho trobo lògic
- c. No sé què dir o ho he deixat en blanc o no responc a la pregunta
- d. No ho penso així, o no l'he fet o ho he fet malament

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	16	6	9	2

Quadre 7.110: Resultats de la pregunta 12.

La pregunta número tretze pregunta a l'alumne si creu que els seus companys han sabut resoldre el problema i el perquè. Les respostes es poden englobar en tres tipus segons si la resposta primera és afirmativa, negativa o qualsevol altra.

Hi ha 26 alumnes que han contestat afirmativament i les impressions del que han dit s'han resumit en quatre punts:

- a. Perquè és fàcil
- b. Perquè s'ha treballat a classe
- c. Ho he deixat en blanc
- d. Perquè són més llestos que jo

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	19	0	5	2

Quadre 7.111: Resultats de la pregunta 13 en cas afirmatiu.

Hi ha 7 alumnes que han contestat que no ho saben, o ho han deixat en blanc, o han contestat que alguns (sense aclarir si molts o pocs).



La pregunta número catorze és oberta doncs li demana a l'estudiant que comenti lliurement què li ha semblat l'activitat i la solució que ell ha obtingut. Les respostes s'han agrupat en sis categories:

- a. M'ha semblat fàcil
- b. L'he trobat com una activitat més
- c. M'ha semblat difícil
- d. No contesto el que em pregunten o ho deixo en blanc
- e. M'ha semblat agradable, divertit, interessant, entretingut
- f. No m'ha agradat

	a	b	c	d	e	f
Nombre d'alumnes	10	4	4	6	8	0

Quadre 7.112: Resultats de la pregunta 14.

Només una sisena part declara no haver sabut resoldre el problema. Diuen que saben matemàtiques i que tenen força intuïció. Poc menys de la meitat diu que ha tingut sort. La majoria comenta que estava tranquil·la i concentrada i es pronuncia dient que era fàcil.

Quan han acabat el problema la meitat s'ha trobat satisfeta i l'altra meitat indiferent.

Els que diuen no haver sabut resoldre el problema confessen trobar-se en acabar enfadats o preocupats, però no indiferents.

Una quarta part del grup no s'ha plantejat al final si la seva resposta té sentit.

Dues terceres parts del grup diuen que han sabut comprovar la solució. En acabar, més de la meitat diuen que han comprovat la solució. La resta no ha fet res més, i només tres estudiants diuen que han buscat altres vies per solucionar el problema.

La meitat del grup creu que la seva solució és la correcta perquè diuen que ho han comprovat, una sisena part perquè diu que ho troba lògic, una quarta part no contesta a la pregunta i els pocs que queden no ho creuen així.

La majoria de la classe diu que li ha semblat fàcil i una altra quarta part diu que ha estat divertit i entretingut. A la resta li ha semblat difícil o no ha contestat.

### 7.4.6 Estudi de l'activitat 6

L'activitat 1 deia: "Omple els espais en blanc amb una xifra de l'u al nou de manera que verifiquin totes les operacions en vertical i horitzontal."

$$\begin{array}{r}
 \square : \square - \square = 1 \\
 + \quad + \quad - \\
 \square - 2 : \square = 2 \\
 - \quad + \quad - \\
 \square + \square + \square = 9 \\
 = \quad = \quad = \\
 8 \quad 4 \quad 1
 \end{array}$$

Després de solucionar-la, l'alumne ha de contestar un qüestionari format per catorze preguntes.

La primera pregunta és discriminatòria doncs si l'alumne respon afirmativament que ha sabut resoldre el problema escull set preguntes diferents a les que ha de respondre si ha respost negativament. La taula següent recull les respostes:

	Negativa	Afirmativa
Nombre d'alumnes	25	8

Quadre 7.113: Resultats de la pregunta 1.

En cas d'haver contestat afirmativament, els 8 alumnes han hagut de respondre les preguntes següents que mostra la taula:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé matemàtiques	0	1	4	3
Tinc molta intuïció	0	2	3	3
He tingut sort	3	2	1	2
Estava tranquil	1	0	3	4
Estava concentrat	0	0	3	5
Era fàcil	2	0	3	3

Quadre 7.114: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

En cas d'haver contestat afirmativament la primera pregunta també han hagut de respondre una altra pregunta que vol saber com se senten en haver trobat la solució.

	Sorprès d'un mateix	Indiferent	Satisfet
Nombre d'alumnes	0	3	5

Quadre 7.115: Resultats de la pregunta 8.

En cas d'haver contestat negativament la primera pregunta, aleshores els 25 alumnes han hagut de respondre set preguntes diferents a les anteriors. La taula següent en mostra les sis primeres:

	En desacord	Poc	Bastant	D'acord
Sé poques matemàtiques	12	10	3	0
Tinc poca intuïció	9	14	2	0
He tingut mala sort	5	11	3	6
Estava nerviós	10	7	6	2
No estava concentrat	8	10	6	1
Era difícil	2	1	6	16

Quadre 7.116: Resultats de les preguntes 2, 3, 4, 5, 6, 7.

A més a més, per haver contestat negativament la primera pregunta, també han hagut de respondre sobre com s'han sentit en veure que no saben resoldre el problema. Els resultats es mostren a la taula següent:

	Preocupat	Indiferent	Enfadat
Nombre d'alumnes	4	13	8

Quadre 7.117: Resultats de la pregunta 8.

A partir de la vuitena pregunta, ja no hi ha discriminacions, tots els alumnes contesten les mateixes preguntes.

La pregunta número nou pretén saber si l'estudiant s'ha plantejat si la resposta té sentit en acabar. Els resultats del que han dit han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	9	24

Quadre 7.118: Resultats de la pregunta 9.

La pregunta número deu fa referència a si ha sabut comprovar la veracitat de la resposta. Els resultats del que han dit han estat:

	Negatiu	Afirmatiu
Nombre d'alumnes	14	19

Quadre 7.119: Resultats de la pregunta 10.

La pregunta número onze vol saber què ha fet l'alumne en haver obtingut la solució. Es dona a escollir tres opcions i els resultats del que han dit s'exposen a la taula següent:

	No s'ha fet res més	S'ha comprovat el resultat	S'han buscat altres maneres de resolució
Nombre d'alumnes	22	8	3

Quadre 7.120: Resultats de la pregunta 11.

La pregunta número dotze és una pregunta oberta que s'interessa per saber per què l'estudiant creu que la seva solució és correcta. Les respostes s'han classificat en quatre categories diferents que s'han creat tenint en compte els comentaris dels enquestats:

- a. Perquè ho he comprovat
- b. Perquè ho trobo lògic
- c. No sé què dir o ho he deixat en blanc o no responc a la pregunta
- d. No ho penso així, o no l'he fet o ho he fet malament

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	7	3	15	8

Quadre 7.121: Resultats de la pregunta 12.

La pregunta número tretze pregunta a l'alumne si creu que els seus companys han sabut resoldre el problema i el perquè. Les respostes es poden englobar en tres tipus segons si la resposta primera és afirmativa, negativa o qualsevol altra.

Hi ha tres alumnes que han contestat afirmativament i les impressions s'han resumit en quatre punts:

- a. Perquè és fàcil
- b. Perquè s'ha treballat a classe
- c. Ho he deixat en blanc
- d. Perquè són més llestos que jo

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	1	0	2	0

Quadre 7.122: Resultats de la pregunta 13 en cas afirmatiu.

Hi ha 22 alumnes que han contestat negativament i les impressions s'han resumit en dues classes:

- a. Perquè és difícil
- b. Ho he deixat en blanc o no responc a la pregunta

	a	b
Nombre d'alumnes	17	5

Quadre 7.123: Resultats de la pregunta 13 en cas negatiu.

Hi ha 8 alumnes que han contestat que no ho saben, o ho han deixat en blanc, o han contestat que alguns dels seus companys (sense aclarir si molts o pocs).

La pregunta número catorze és oberta ja que demana a l'estudiant que comenti lliurement què li ha semblat l'activitat i la solució que ell ha obtingut. Les respostes s'han agrupat en sis categories:

- a. M'ha semblat fàcil
- b. L'he trobat com una activitat més
- c. M'ha semblat difícil
- d. No contesto el que em pregunten o ho deixo en blanc
- e. M'ha semblat agradable, divertit, interessant, entretingut
- f. No m'ha agradat

	a	b	c	d	e	f
Nombre d'alumnes	0	1	16	11	5	0

Quadre 7.124: Resultats de la pregunta 14.

Només una quarta part diu haver sabut resoldre el problema. Les tres quartes parts que no han sabut no pensen que saben poques matemàtiques, ni tampoc que tenen poca intuïció ni que hagin tingut mala sort. La majoria diu que no estava nerviosa i no està

d'acord que estigués desconcentrada. La majoria diu que era difícil o bastant difícil. Al final s'ha sentit indiferent la meitat i entre preocupats i enfadats els altres.

Entre la quarta part que diu haver sabut resoldre el problema, tots diuen que saben matemàtiques, que tenen intuïció i diuen no haver tingut sort. Tots estaven tranquils i concentrats i creuen que és fàcil. Al final s'han sentit satisfets alguns i indiferents altres.

Les tres quartes parts del grup s'han plantejat sobre el sentit de la solució, però les altres dues terceres parts no han fet res més. Només una cinquena part del grup creu que la seva solució és la correcta perquè ho ha comprovat i una quarta part diu que creu que ho ha fet malament. La resta no contesta a la pregunta. Només 3 alumnes troben la seva solució lògica.

Dues terceres parts del grup pensen que els seus companys no han estat capaços de resoldre el problema perquè era difícil. Aquesta activitat no l'han trobat fàcil ni com altres activitats. Els ha semblat (a la meitat del grup) difícil i a uns altres interessant, entretinguda i divertida (a una setena part). La resta no ha contestat la pregunta.

#### **7.4.7 Síntesi del test final**

Les activitats número 1 i 5 diuen haver-les sabut resoldre gairebé tots (30 i 29 respectivament). Després, l'activitat número 2 diuen haver-la sabut resoldre unes tres quartes parts del grup (25 alumnes) i l'activitat número 3 les dues terceres parts del grup (21 alumnes). L'activitat número 4 només la meitat diuen haver-la sabut resoldre (18 alumnes) i per últim, l'activitat número 6 només diuen haver-la sabut resoldre una quarta part (8 alumnes).

Els alumnes declaren que saben matemàtiques i que tenen un grau considerable d'intuïció. En general diuen no haver tingut bona sort (quan els ha sortit l'activitat) ni mala sort encara que no els hagi sortit (per exemple l'activitat 6). Consideren que han estat tranquils i força concentrats.

Entre els que han contestat que han sabut resoldre totes les activitats diuen que les han resolt perquè han estat fàcils. Però cal observar que les activitats número 4 i 6 les han sabut resoldre només la meitat (18 alumnes) i una quarta part (8 alumnes) respectivament. Aquests se senten satisfets amb la seva feina o indiferents.

Entre els que no han sabut resoldre les activitats, la majoria creu que eren activitats difícils. Aquests se senten preocupats en les activitats 1, 2, 5 majoritàriament. En l'activitat número 3, 4 i 6 se senten més enfadats que preocupats. I en les activitats 4 i 6 es troben més indiferents que enfadats. Els alumnes s'han plantejat el sentit de la seva solució trobada en les activitats número 1 (27 alumnes), 2 (29 alumnes), 3 (24 alumnes), 5 (24 alumnes), 6 (24 alumnes) i en l'activitat número 4 ha estat més fluix, només dues terceres parts (21 alumnes).

Els alumnes que diuen que han sabut comprovar la solució en l'activitat 1 han estat les dues terceres parts (21 alumnes), en l'activitat 2 han estat les quatre cinques parts (26 alumnes), en l'activitat 3 aproximadament la meitat (18 alumnes) igual que en l'activitat 4 (17 alumnes), en l'activitat 5 les dues terceres parts (23 alumnes) i en l'activitat 6 pocs més de la meitat (19 alumnes).

En acabar l'activitat número 1 i 6 els alumnes majoritàriament no han fet res més (22 en els dos casos). En acabar l'activitat número 2, 3 i 5 els alumnes diuen que han comprovat la solució (20, 14 i 18 respectivament) i alguns han buscat altres vies per trobar la solució (4, 10 i 3 respectivament). Quan han acabat l'activitat número 4 poc menys de la meitat no han fet res més (15 alumnes) i la resta diuen que han comprovat la solució (14 alumnes) i han buscat altres maneres de trobar la solució (4 alumnes).

Els alumnes diuen que la seva solució és la correcta en les activitats 2, 4 i 5 perquè diuen que ho han comprovat (13, 12 i 16 alumnes respectivament). Hi ha 10 alumnes que diuen que tenen la solució correcta de les activitats 1 i 3 per haver obtingut un resultat lògic.

En les activitats 1, 2, 5 se'ls ha preguntat si creuen que els seus companys han sabut resoldre-les i ho han afirmat 30, 24 i 26 alumnes respectivament. Les possibles explicacions que donen són que és fàcil (14, 10 i 19 resp.) i que s'ha treballat a classe (9, 10 i 0 resp.). En canvi a l'activitat 6 són 22 els alumnes els que diuen que els seus companys no han sabut resoldre-les degut a la seva dificultat (17 alumnes).

En l'activitat 3 una tercera part creu que la classe sí ha sabut resoldre el problema (11 alumnes) dient que era fàcil (explicació donada per 7 persones). En l'activitat 4 és gairebé la meitat (16 alumnes) que creu que la classe sí ha sabut resoldre el problema amb 5 persones dient que era fàcil i 3 persones dient que s'havia fet a classe.

Sobre la darrera qüestió que s'interessa per saber què li ha semblat a l'alumne l'activitat plantejada a l'activitat 1 i 5 destaca la seva facilitat (12 i 10 alumnes respectivament). L'activitat 2 destaca per ser com una activitat normal (15 alumnes). L'activitat 3 destaca per ser difícil (8 alumnes) però no d'una manera tan clara com l'activitat 6 amb 16 alumnes. L'activitat 4 no destaca clarament en res: és una activitat més (7 alumnes), és una activitat agradable i interessant (7 alumnes).

## **7.5 Qüestionari**

El qüestionari proposat als alumnes se'ls presenta motivant la seva col·laboració. Es diu que no se'ls avaluarà, no se'ls perseguirà en funció del que responguin, i que ajudarà a fer un estudi. A continuació s'exposen les preguntes i els resultats obtinguts separats segons el tipus: a) qüestions matemàtiques de caire general; b) qüestions matemàtiques sobre la comprensió de l'enunciat; c) qüestions matemàtiques sobre la revisió de la solució. Per últim, es fa una síntesi de tots els resultats del qüestionari recollits.

### **7.5.1 Qüestions matemàtiques de caire general**

La primera qüestió que es planteja a l'alumne és si li agraden les matemàtiques, i se li formula mitjançant deu preguntes. Aquestes preguntes amb les respostes recollides es mostren a la taula que segueix:

	No	Poc d'acord	Bastant d'acord	Sí
1.1 M'han agradat des de sempre	6	6	10	11
1.2 Tinc facilitats i amb poc esforç me'n surto	2	12	15	4
1.3 Tinc dificultats, però si m'esforço i treballo, me'n surto	2	8	11	12
1.4 M'ho passo bé fent matemàtiques	0	8	13	12
1.5 Les matemàtiques són creatives	0	5	17	11
1.6 Les matemàtiques són difícils	4	10	18	1
1.7 En general, les matemàtiques són poc atractives	7	15	10	1
1.8 M'agrada fer volar la imaginació i amb les matemàtiques ho puc fer	6	12	11	4
1.9 Les matemàtiques són imprescindibles en l'organització del món actual	0	3	10	20
1.10 Les matemàtiques són imprescindibles per solucionar problemes de cada dia	0	9	15	9

Quadre 7.125: Resultats de la primera qüestió.

La segona qüestió és de tipus obert i pregunta cinc accions que habitualment realitza l'estudiant fora de l'escola i que estan relacionades amb les matemàtiques. L'acció més anomenada que habitualment realitzen 30 alumnes és calcular i comprovar el canvi que obtenen quan van a comprar, ja sigui l'esmorzar, el pa, el berenar, llaminadures... En segon lloc, comptar diners és l'acció més freqüent que realitzen 17 alumnes ja sigui per mirar els estalvis, o per veure si tenen prou diners per comprar coses. En tercer lloc, 10 alumnes convenen que compten el temps per organitzar-se. En quart lloc, 7 alumnes diuen que contenen persones, objectes. En cinquè lloc, es podrien agrupar les accions sota el nom d'accions en temps de lleure personal doncs cada alumne ha exposat aïlladament finalitats diferents: 5 alumnes quan juguen amb l'ordinador i la vídeo consola, 3 alumnes per calcular els percentatges en rebaixes, 3 alumnes en sumar les xifres de les matrícules, 2 alumnes per comptar carrers, 1 alumne per comptar els tirs de golf, 1 alumne en jugar a escacs, 1 alumne a música, 1 alumne per dibuixar, 1 alumne per ballar, 1 alumne per navegar.

La tercera qüestió també és de tipus obert i pregunta si l'alumne necessita coneixements matemàtics per entendre algunes informacions quan llegeix el diari. En cas afirmatiu se li demana un exemple. Un total de 14 alumnes contesten que no necessiten coneixements matemàtics per entendre el que llegeixen al diari, al contrari que 17 alumnes que manifesten que sí. Després hi ha 2 estudiants que no contesten. Els exemples que han esmentat són variats. Hi ha 9 alumnes que confessen utilitzar les matemàtiques en llegir els percentatges obtinguts per algun partit polític en eleccions, o les rebaixes d'alguns gran magatzems. Hi ha dos alumnes que diuen que utilitzen coneixements matemàtics quan llegeixen l'apartat d'economia, i altres dos quan llegeixen els punts que tenen a la lliga els equips de futbol. Hi ha dos alumnes més que s'interessen pels sous dels jugadors de futbol, pels fitxatges. Finalment hi ha una persona que utilitza les matemàtiques quan llegeix l'apartat d'escacs i un altre per entendre les gràfiques que troba.

La quarta pregunta també és oberta i qüestiona la importància de les matemàtiques per fer altres assignatures. En cas que l'estudiant les cregui importants se li demanen les assignatures. Hi ha cinc alumnes que contesten que les matemàtiques no són importants per fer altres assignatures i un alumne que no ha contestat. Els altres 27 alumnes manifesten el contrari. Els exemples d'assignatures en què sí troben una certa relació amb les matemàtiques són: les ciències naturals i físiques i químiques amb 27 vots, la tecnologia (en aquest centre l'assignatura recull educació visual i plàstica i informàtica) amb 12 vots, les ciències socials amb 3 vots. Hi ha hagut dos alumnes que afirmen utilitzar els seus coneixements matemàtics a totes les assignatures.

La cinquena qüestió s'interessa pel nombre d'hores que dorm al dia.

Nombre d'hores	6.5h	7h	7.5h	8h	8.5h	9h	9.5h	10h
Nombre d'alumnes	1	2	7	5	8	6	2	2

Quadre 7.126: Resultats de la cinquena qüestió.

La sisena pregunta vol saber després de fer matemàtiques com se sent l'alumne. Amb aquest propòsit se li ha demanat que es pronunciï amb els vuit finals de les frases proposats segons la certesa que tinguin per a ells mateixos. Es presenta una escala de poc a molt d'acord i l'estudiant ha d'assenyalar el grau, de 1 fins a 4. El començament de la frase és "Després de fer matemàtiques, em sento satisfet si...".

Grau d'acord	1	2	3	4
6.1 "... he resolt molts exercicis"	0	9	2	22
6.2 "... m'he adonat de quines coses no domino"	2	7	15	9
6.3 "... m'he adonat que tenia idees o conceptes equivocats"	4	13	10	6
6.4 "... he fet els càlculs correctament"	0	0	10	23
6.5 "... no em sortia, però després de pensar-ho i treballar, m'ha sortit"	0	2	4	27
6.6 "... he trobat un camí, a la meua manera, per resoldre el problema"	1	1	12	19
6.7 "... he sabut fer jo sol/a els problemes que s'han resolt a classe"	2	2	6	23
6.8 "... he descobert una regla que, a més de resoldre el problema, em servirà després"	1	4	9	19

Quadre 7.127: Resultats de la sisena qüestió.

Des de la qüestió número set fins a la qüestió número vint-i-sis se li demana a l'alumne que respongui segons el grau amb què estigui d'acord amb l'afirmació que se li suggereix. La taula següent recull els resultats que s'han valorat en una escala creixent d'un fins a quatre segons el grau d'acord amb què s'han manifestat els alumnes.



Grau d'acord	1	2	3	4
7. Porto l'assignatura de matemàtiques al dia.	0	7	10	16
8. Estic organitzat per fer totes les coses degudament.	0	7	20	6
9. M'agrada estudiar	7	15	10	1
10. M'agrada venir al col·legi	1	5	16	11
11. Aprofito les hores de classe sense necessitat de treballar més a casa.	6	7	11	9
12. M'ho passo bé al col·legi.	0	1	16	16
13. Porto els deures fets.	0	4	18	11
14. Porto els deures de matemàtiques fets.	0	2	18	13
15. No és el professor el que fa que m'agradi o no les assignatures.	9	7	10	7
16. M'agraden les matemàtiques independentment del professor.	10	3	8	12
17. Demano ajut al professor de matemàtiques quan no entenc alguna cosa.	2	6	12	13
18. Demano ajut als companys quan no entenc alguna cosa.	3	5	21	4
19. Tinc un professor particular que em resol els dubtes.	21	0	6	6
20. Tinc pares o germans que em resolen els dubtes.	6	10	11	6
21. He trobat diferències entre el professor de matemàtiques de l'ESO i el de Primària.	1	1	6	25
22. El treball en grup em surt millor que el treball individual.	4	11	9	9
23. Durant la classe, considero que és el professor el que ha d'explicar totes les coses i els alumnes han d'estar atents i com a molt prendre apunts.	2	8	14	9
24. Aprofito més les classes si el professor després de donar unes indicacions fa que els alumnes vagin fent la feina i aprenguin per ells mateixos.	3	7	14	9
25. L'aprenentatge basat amb el fet que el professor explica i els alumnes estan atents prenent apunts i després fan la feina aprenent per ells mateixos és el millor.	4	7	15	7
26. A casa, sol, aprenc més que a classe	18	9	3	3

Quadre 7.128: Resultats de la qüestió 7 fins a la 26 classificats segons el grau d'acord que estan amb l'afirmació.

Des de la qüestió vint-i-set fins a la qüestió trenta-cinc el tipus de resposta que dona l'alumne és valorat segons la freqüència que té per a ell el que es proposa.

Grau de freqüència	Mai	Quasi mai	Quasi sempre	Sempre
27. Els meus companys m'expliquen com fer les coses.	1	22	8	2
28. Ajudo els meus companys i companyes.	0	8	23	2
29. Comprovo els meus resultats amb els dels meus companys.	1	8	16	8
30. Copio la feina d'altres companys.	12	19	1	1
31. En els casos en què em copio la feina d'altres companys intento entendre-la.	1	0	15	17
32. Em relaciono amb els meus companys.	0	1	5	27
33. La relació amb els companys é la mateixa a la classe de matemàtiques que a les altres.	1	1	6	25
34. Crec que és important presentar els treballs i les feines d'una manera acurada i entenedora.	0	0	5	28
35. Crec que guanyo temps a l'hora de posar-me a estudiar si tinc tots els apunts i materials de classe clars, nets i ordenats.	0	0	4	29

Quadre 7.129: Resultats de la qüestió 27 fins a la 35 classificats segons el grau de freqüència.

La qüestió número trenta-sis li proposa a l'alumne que assenyali l'opció que cregui més encertada sobre el que té en compte el professor de matemàtiques a l'hora d'avaluar.

Les opcions són:

- a. només els coneixements dels alumnes
- b. els coneixements, la participació i l'actitud a classe
- c. els progressos de l'alumne/a
- d. altres (comportament, llibretes, deures...)

Els resultats obtinguts han estat:

	a	b	c	d
Nombre d'alumnes	0	15	16	2

Quadre 7.130: Resultats de la qüestió 36.

### 7.5.2 Qüestions matemàtiques sobre la comprensió de l'enunciat

Des de la qüestió número trenta-set fins a la número quaranta-sis es demana a l'alumne que respongui segons el grau de freqüència amb què segueix l'afirmació suggerida. Són preguntes sobre la comprensió dels diversos enunciats amb els quals l'alumne s'enfronta.

Grau de freqüència	Mai	Quasi mai	Quasi sempre	Sempre
37. Quan un enunciat és molt llarg el llegeixo ràpidament i sense ganes.	7	22	3	1
38. Quan llegeixo el problema i no entenc a la primera el que em demana, torno a llegir-me'l amb calma fent un llistat de totes les dades.	0	8	14	11
39. Llegeixo amb molta atenció els enunciats dels problemes.	0	2	23	8
40. Abans de solucionar el problema, confecciono una llista amb totes les dades del problema.	1	7	15	10
41. Els més llestos acaben molt ràpidament els problemes de matemàtiques.	0	2	20	11
42. Prefereixo acabar el problema de matemàtiques ràpidament encara que no l'acabi d'entendre més que no pas aconseguir entendre'l perfectament tardant més.	17	12	3	1
43. És important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a solucionar-lo.	0	0	9	24
44. La comprensió de l'enunciat és una tasca que s'ha de fer al final, després de trobar la solució.	23	5	3	2
45. Totes les dades de l'enunciat són sempre importants.	0	1	10	22
46. Per fer un problema ràpidament es tracta de començar a resoldre'l i les dades que faltin es busquen a l'enunciat.	6	7	15	5

Quadre 7.131: Resultats de la qüestió 37 fins a la 46 classificats segons el grau de freqüència.

### 7.5.3 Qüestions matemàtiques sobre la revisió de solucions

A partir de la pregunta quaranta-set es troben qüestions referents a la revisió de solucions. Des de la qüestió número quaranta-set fins la número cinquanta-tres se li demana a l'alumne que respongui segons el grau de freqüència amb què segueix l'afirmació suggerida.

Grau de freqüència	Mai	Quasi mai	Quasi sempre	Sempre
47. Havent solucionat un problema, em pregunto el sentit de la resposta.	1	3	17	12
48. Un cop he solucionat un problema, dedico prou temps a comprovar la solució.	1	9	16	7
49. Si he arribat a la resposta d'un problema, ha d'estar bé, doncs els problemes només tenen una resposta.	1	11	12	9
50. Observo les variacions que experimenta la solució obtinguda quan modifico les dades inicials.	1	7	15	10
51. Per comprovar la resposta, suposo un resultat diferent a la solució trobada i, mirant enrere, persegueixo alguna contradicció o cosa impossible.	2	16	12	3
52. Crec que és important revisar la solució obtinguda.	0	1	11	21
53. No reviso la solució perquè no vull saber si m'he equivocat.	15	13	3	2

Quadre 7.132: Resultats de la qüestió 47 fins a la 53 classificats segons el grau de freqüència.

La pregunta número cinquanta-quatre és oberta donat que vol saber la nota que l'estudiant li posaria a un alumne que després d'haver fet tots els càlculs bé s'equivoqués al final donant una resposta impossible. Els resultats obtinguts són:

Nota	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	9.9	10
Nombre d'alumnes	1	0	2+1	0	2	0	3	4	8	3	5	2	1	1

Quadre 7.133: Resultats de la qüestió 54.

Hi ha hagut un alumne que ha contestat que la nota que li posaria seria un 0.5, però després aclarí haver entès que la puntuació era entre 0 i 1, i no com la resta, que havia entès entre 0 i 10. Per aquest motiu, en la casella de la nota "5" apareix un 2+1.

### 7.5.4 Síntesi del qüestionari

En aquest apartat es comenta una síntesi de les respostes dels tres grups de preguntes per separat: A) les de caire general, B) les de comprensió de l'enunciat, C) les de la revisió de la solució.

### A) Síntesi de les respostes recollides a les preguntes matemàtiques de caire general

Les dues terceres parts del grup afirma que li han agradat les matemàtiques des de sempre. La meitat del grup nega tenir facilitats a l'assignatura i no està d'acord amb l'afirmació que amb poc esforç se'n surt (14 alumnes). Amb esforç i treball diuen que continuen sense sortir-se'n 10 alumnes.

Les tres quartes parts del grup s'ho passen bé fent matemàtiques (25 alumnes). La majoria del grup creu que les matemàtiques són creatives (28 alumnes), i les dues terceres parts creuen que són poc atractives (22 alumnes). Més de la meitat creu que les matemàtiques són difícils (19 alumnes).

Aproximadament la meitat (15 alumnes) troben que amb les matemàtiques es pot fer volar la imaginació. La majoria del grup creu que les matemàtiques són imprescindibles en l'organització del món actual (30 alumnes) i les dues terceres parts creuen que són imprescindibles per solucionar problemes del dia a dia (24 alumnes).

Els estudiants fora de l'escola declaren realitzar habitualment les següents accions: calcular i comprovar el canvi en anar a comprar (30 alumnes), comptar els estalvis (17 alumnes), comptar el temps per organitzar-se (10 alumnes) i comptar persones o objectes (7 alumnes). Aproximadament la meitat del grup afirma que necessita coneixements matemàtics per entendre el que llegeix al diari: percentatges, rebaixes, apartat d'economia, lliga de futbol i classificacions.

La majoria de la classe creu que les matemàtiques són importants per fer altres assignatures, per exemple en ciències naturals, física i química, tecnologia (dibuix i informàtica, depenent del semestre) i ciències socials.

Les tres quartes parts del grup dormen entre 7h 30min i 9h (26 alumnes).

Es senten satisfets les tres quartes parts del grup (24 alumnes) si han fet molts exercicis de matemàtiques o s'han adonat de quines coses no dominen. Només la meitat se sent satisfeta si se n'adona que tenia idees o conceptes equivocats. Tots se senten satisfets si han fet els càlculs correctament i llevat de dos alumnes, se senten satisfets si inicialment no els surt però després de pensar-ho i treballar els acaba sortint. Excepte dues persones se senten satisfets si han trobat un camí propi per resoldre un problema. La majoria dels alumnes se senten satisfets si han sabut fer sols els problemes que s'han resolt a la classe (29). Gairebé tota la classe se sent satisfeta si ha descobert una regla que a més de resoldre el problema li servirà per després (28 alumnes).

En general, la classe la formen alumnes que porten al dia l'assignatura de matemàtiques i que consideren que estan organitzats per fer totes les tasques degudament (26 alumnes). Només a una tercera part li agrada estudiar (11 alumnes) però a la majoria li agrada venir al col·legi (27 alumnes) i s'ho passa bé (32 alumnes).

Les dues terceres parts diuen que aprofiten les hores de classe sense necessitat de treballar més a casa (20 alumnes). Porten els deures de totes les assignatures i de matemàtiques fets (29 i 31 alumnes respectivament).

La meitat del grup creu que no són els professors els que fan que agradin o no les assignatures (17 alumnes), però quan es concreta amb l'assignatura de matemàtiques, són gairebé dues terceres parts les que ho afirmen (20 alumnes). La majoria demana ajut al professor de matemàtiques o als companys quan no entén alguna cosa (25 alumnes). Una tercera part del grup té un professor particular perquè li resolgui els dubtes (12 alumnes) i aproximadament la meitat pregunta als pares o germans perquè els resolguin els dubtes (17 alumnes). Han trobat diferències entre el professorat de primària i el de secundària (31 alumnes). Pocs més de la meitat treballen millor en grup que individualment (18 alumnes).

Les dues terceres parts del grup consideren que durant la classe el professor ha d'explicar i els alumnes han d'estar atents i prendre apunts, i també són les dues terceres parts del grup les que creuen que s'aprofiten més les classes si el professor després de donar indicacions fa que els alumnes practiquin i aprenguin per ells mateixos (23 alumnes).

Així les dues terceres parts convenen que l'aprenentatge basat en el fet que primer el professor explica i després els alumnes estan atents prenent apunts per practicar i aprendre per ells mateixos és el millor (22 alumnes). Una minoria (6 alumnes) creu que a casa sola aprèn més que a classe.

Les dues terceres parts del grup manifesten que quasi mai els seus companys els expliquen com fer les coses (22 alumnes); a la resta quasi sempre o sempre (10 alumnes). Les tres quartes parts ajuden als seus companys i companyes quasi sempre o sempre (25 alumnes). Les tres quartes parts comparen els seus resultats amb els dels seus companys quasi sempre o sempre (24 alumnes).

Copiar-se la feina d'altres companys no ho fan mai (12 alumnes) o quasi mai (19 alumnes). Però aquelles vegades en què excepcionalment es copien la feina d'altres, intenten entendre-la quasi sempre (15 alumnes) o sempre (17 alumnes).

En el grup tots es relacionen amb els companys i a la classe de matemàtiques aquesta relació no varia amb respecte altres assignatures.

Tots creuen que és important presentar els treballs i les feines acuradament i entenedora i tots creuen que guanyen temps si a l'hora de posar-se a estudiar tenen tots els apunts i materials de classe clars, nets i ordenats.

La meitat dels alumnes creu que el professor de matemàtiques a l'hora d'avaluar té en compte els coneixements, la participació i l'actitud a classe (15 alumnes) i gairebé l'altra meitat creu que té en compte els progressos de l'alumne (16 alumnes). Però cap alumne creu que només té en compte els coneixements dels alumnes.

#### B) Síntesi de les respostes recollides sobre la comprensió de l'enunciat

La majoria de la classe quan un enunciat és molt llarg no el llegeix ràpidament i sense ganes mai o quasi mai (7 i 22 respectivament). Les tres quartes parts del grup quan llegeixen el problema i no entenen a primer cop d'ull el que se'ls demana, tornen a llegir-se'l amb calma i fent un llistat de totes les dades quasi sempre o sempre (14 i 11

resp.). El grup llegeix amb molta atenció els enunciats dels problemes quasi sempre o sempre (23 i 8 resp.).

Les tres quartes parts del grup abans de solucionar el problema, confeccionen una llista amb totes les dades del problema quasi sempre o sempre (15 i 10 resp.). El grup creu que els més llestos acaben molt ràpidament els problemes de matemàtiques quasi sempre o sempre (20 i 11 resp.).

Mig grup prefereix dedicar el temps necessari a resoldre un problema per entendre'l que no pas anar ràpidament i no acabar-lo d'entendre (17 alumnes). Una tercera part del grup (12 alumnes) quasi mai li dóna més importància a resoldre el problema ràpidament que a la seva total comprensió. Tots creuen que és important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a solucionar-lo quasi sempre o sempre (9 i 24 respectivament).

No creuen que la comprensió de l'enunciat sigui una tasca que s'hagi de fer al final, després de trobar la solució mai o quasi mai (23 i 5 respectivament).

Creuen que totes les dades de l'enunciat són sempre importants quasi sempre o sempre (10 i 22 resp.).

Per a les dues terceres parts del grup si es volgués resoldre un problema ràpidament caldria començar a resoldre'l i les dades que faltessin s'anirien buscant a l'enunciat (quasi sempre 15 alumnes i sempre 5 alumnes).

### C) Síntesi de les respostes recollides sobre la revisió de la solució

La majoria del grup, un cop ha solucionat un problema, aleshores es pregunta el sentit de la resposta quasi sempre o sempre (17 i 12 respectivament). Les dues terceres parts del grup declara que quasi sempre o sempre que ha solucionat un problema, dedica prou temps a comprovar la solució (16 i 7 alumnes resp.). Les dues terceres parts del grup creuen que si han arribat a la resposta d'un problema és que ha d'estar bé doncs els problemes només tenen una sola resposta (12 alumnes ho creuen quasi sempre i 9 sempre).

Quasi sempre o sempre les tres quartes parts del grup observa les variacions que experimenta la solució obtinguda en modificar les dades inicials (15 i 10 alumnes resp.). Gairebé la meitat del grup, per comprovar la resposta quasi sempre o sempre (12 alumnes i 3 alumnes resp.) suposa un resultat diferent a la solució trobada i, mirant enrere, persegueix alguna contradicció o fet impossible.

El grup creu important revisar la solució obtinguda quasi sempre o sempre (11 o 21). El grup mai o quasi mai deixa de revisar la solució perquè no vol saber si s'ha equivocat (15 o 13).

Els alumnes del grup atorguen les qualificacions següents a un estudiant que, després de fer tots els càlculs bé, s'equivoqués al final i donés una resposta impossible:

- nota compresa en l'interval [0,5) : 1 alumne
- nota compresa en l'interval [5,6) : 3 alumnes
- nota compresa en l'interval [6,7) : 2 alumnes

nota compresa en l'interval [7,8) : 7 alumnes  
nota compresa en l'interval [8,9) : 11 alumnes  
nota compresa en l'interval [9,10] : 9 alumnes

## 7.6 Entrevistes

Totes les entrevistes fetes són a alumnes de segon curs de l'ESO en el curs 2006-2007. Conserven la mateixa estructura: A. Preguntes de caire general; B. Preguntes sobre la comprensió de l'enunciat; C. Preguntes sobre la revisió de la solució. A continuació es farà una síntesi de les respostes recollides tot separant les entrevistes que s'han fet a sis alumnes. Aquests alumnes s'han escollit amb unes característiques determinades tal com s'ha explicat a la metodologia. Finalment es fa una síntesi de totes les entrevistes pregunta per pregunta.

### 7.6.1 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb elevada capacitat intel·lectual però poc flexible (27A)

Seguidament s'exposa una síntesi de les respostes donades per l'alumne 27A separades segons el bloc al qual pertanyen: A, B, C.

A) Les respostes a les preguntes de caire general resumides han estat:

- a) Li agrada venir a l'escola per veure els amics.
- b) Li agraden les matemàtiques pel seu rigor i exactitud.
- c) El que més li agrada de les matemàtiques és l'aritmètica.
- d) El que menys li agrada són les divisions perquè li costen.
- e) Creu que els problemes s'han de plantejar i que els exercicis són només per aplicar una operació.
- f) Creu que és necessari saber resoldre problemes perquè en el futur un se'n troba més que no pas d'operacions.
- g) Li agrada resoldre problemes, especialment aquells que "plantegen un enigma".
- h) El que menys li agrada de resoldre problemes és quan li falta la dada clau.
- i) Els tipus de problemes que no li agraden són aquells que donen dades falses perquè poden embolicar la troca i distreure de la solució correcta.
- j) Les matemàtiques per a ell són un engranatge de procediments, idees i processos de pensament.
- k) Les matemàtiques per a ell són raonament i resolució de problemes.
- l) La feina que es fa a classe de matemàtiques la troba variada perquè quan es repeteix algun exercici se sol fer de manera diferent. I si es repetís igual, sempre va bé com a repàs.



m) Les matemàtiques que es fan a classe no les troba avorrides. Està atent i es fixa en els problemes traient fins i tot les seves pròpies conclusions.

n) La resolució de problemes per a ell té com a finalitat aprendre a explorar i investigar situacions desconegudes.

o) Un bon estudiant de matemàtiques no té perquè resoldre els problemes molt ràpidament de manera habitual. Ell creu que depèn de l'estudiant. Creu que si li agraden els números i està atent a classe les seves possibilitats són altes. Però en canvi, si encara que li agradin li costen molt, no serà tan ràpid, però amb l'esforç ho aconseguirà.

p) Un alumne que estudia poc les matemàtiques, si acaba ràpidament en resoldre un problema, no té perquè tenir-lo malament. Ell creu que no sempre que algú no estudia matemàtiques ha de treure mala nota. Hi ha alumnes que en tenen prou estant atents a classe si els agraden les matemàtiques.

q) Ell creu que un alumne intel·ligent pot tenir dificultats i quedar-se bloquejat en resoldre un problema. Perquè a vegades repassant pot adonar-se'n que s'ha deixat quelcom per plantejar.

r) Ell creu que el fet de resoldre els problemes correctament és més pel sentit comú que a haver estudiat moltes fórmules que a vegades no serveixen per resoldre certs problemes.

s) El fet que se solucioni un problema no és independent de l'estat d'ànim, paciència i perseverança.

t) Els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de solucionar un problema.

B) Les respostes a les preguntes sobre la comprensió de l'enunciat resumides han estat:

a) Les indicacions que donaria als seus alumnes per resoldre un problema si fos professor serien les següents. Primer que no comencessin a operar fins que no haguessin entès l'enunciat. Un cop entès, que seleccionessin les dades oportunes i després que desenvolupessin una fórmula per trobar la resposta.

b) Ell no creu que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema ja l'entengui. Creu que hi ha estudiants bons aplicant les fórmules però que per entendre un problema no són tan ràpids.

c) Ell creu que és positiu abans d'escriure res, que el problema es tingui pensat i elaborat al cap.

d) Una manera de veure clarament el problema és fer una representació de totes les dades que hi intervenen.

e) Ell creu que amb una lectura ràpida de l'enunciat no n'hi ha prou per a començar a solucionar un problema. Cal almenys una lectura per entendre'l i una altra per a seleccionar les dades que es necessiten.

f) L'enunciat d'un problema pot ser en alguns casos que s'entengui independentment de l'estat d'ànim, paciència i perseverança però a l'hora de resoldre'l afectaria.

g) Factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de comprendre l'enunciat quan es veu en la resolució que les coses no estan anant com un es pensa i dona un altre resultat o s'intueix que està malament.

C) Les respostes a les preguntes sobre la revisió de la solució resumides han estat:

a) La indicació que ell donaria quan haguessin arribat a la solució final als seus alumnes si fos professor seria que, en cas d'haver-hi temps, comprovessin la solució amb la fórmula adient.

b) Ell creu que s'hauria de discutir la solució d'un problema. Principalment quan es té una opinió negativa d'aquell resultat i veure si hi ha errors.

c) Per entendre la solució creu que no és només el professor el que s'ha d'esforçar. El professor s'ha d'esforçar en explicar i fer entendre als alumnes. Però l'alumne també ha de fer l'esforç d'escoltar el professor i entendre el que diu.

d) El més important de resoldre un problema no és l'obtenció del resultat final, és la manera com s'ha plantejat i resolt.

e) Dona una resposta incoherent.

f) Ell troba que és necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda.

g) La resolució d'un problema creu que acaba quan es troba la solució i s'ha comprovat perfectament que coincideix amb les dades donades.

h) Ell creu que els problemes no acostumen a tenir una única solució correcta, principalment els de lògica.

i) Ell creu que l'èxit en la resolució de problemes no s'aconsegueix només amb la solució correcta, sinó que cal un plantejament correcte, ja que es poden cometre errors de càlcul lleus encara que s'hagi "fet tot bé".

j) Un bon estudiant de matemàtiques no té perquè arribar a la solució correcta directament i ràpida.

### **7.6.2 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb elevada capacitat intel·lectual i flexible (14B)**

Seguidament s'exposa una síntesi de les respostes donades per l'estudiant 14B separades per blocs A, B, C.

A) Les respostes a les preguntes de caire general resumides han estat:

- a) Li agrada venir a l'escola per estar amb els amics i per aprendre quelcom nou.
- b) Li agraden les matemàtiques perquè així pot resoldre coses que els seus germans grans ja saben.
- c) La part que li agrada més de les matemàtiques són les equacions perquè són noves per a ell.
- d) La part de simplificar fraccions és el que menys li agrada perquè se li dóna molt malament.
- e) La diferència que veu entre problemes i exercicis és que els problemes tenen un enunciat amb paraules i els exercicis només amb nombres.
- f) Creu que és necessari saber resoldre problemes perquè sorgeixen a la vida.
- g) Li agrada resoldre problemes, sobretot aquells que li surten.
- h) El que menys li agrada de resoldre problemes és veure que està malament quan ha acabat.
- i) Els tipus de problemes que no li agraden són aquells que no tenen per resposta un nombre enter.
- j) Per a ell les matemàtiques són un conjunt de regles i tècniques per aplicar.
- k) Les matemàtiques són raonaments i resolució de problemes.
- l) Creu que la feina que es fa a classe és variada però que quan no s'entén es fa repetitiva.
- n) La finalitat que creu que té la resolució de problemes és bàsicament aplicar les tècniques treballades a classe, encara que també considera com a correcte la finalitat d'aprendre a explorar i investigar situacions desconegudes.
- o) Ell creu que si un bon estudiant de matemàtiques ha estat atent a classe habitualment sap resoldre els problemes molt ràpidament .
- p) No creu que un alumne que estudia poc les matemàtiques si acaba ràpidament en resoldre un problema és perquè segurament el tindrà malament.
- q) Ell creu que un alumne intel·ligent pot tenir dificultats i quedar-se bloquejat en resoldre un problema.
- r) Ell creu que el fet de resoldre correctament els problemes és gràcies al sentit comú i a estudiar molt.

s) El fet que se solucioni un problema o no a vegades depèn de l'estat d'ànim, paciència i perseverança d'aquell moment.

t) Factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança poden afectar molt a l'hora de solucionar un problema.

B) Les respostes a les preguntes sobre la comprensió de l'enunciat resumides han estat:

a) A l'hora de resoldre un problema les indicacions que els donaria als seus alumnes per començar si fos professor serien que s'ho llegissin molt bé i després agafessin totes les dades.

b) Un bon estudiant de matemàtiques, a vegades, de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema ja l'entén.

c) Ell creu que abans d'escriure res, el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap.

d) Ell creu que per ajudar a una bona resolució d'un problema és positiu fer una representació clara de totes les dades que hi intervenen.

e) Creu que amb una lectura ràpida de l'enunciat no n'hi ha prou per començar a solucionar un problema perquè no "se't queda gaire".

f) L'enunciat d'un problema s'entén o no independentment de l'estat anímic, paciència i perseverança que es tingui en alguns casos. Ell creu que si no s'entén no és perquè un estigui nerviós, és perquè no se sap la resposta.

g) Ell creu que factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de comprendre l'enunciat doncs en estar nerviós, "sempre es tindrà alguna cosa que no et quedarà".

C) Les respostes a les preguntes sobre la revisió de la solució resumides han estat:

a) Una vegada s'ha arribat a la solució final d'un problema, la indicació que donaria als seus alumnes si fos professor seria que ho comprovessin.

b) Ell creu que només hi ha una solució correcta d'un problema i que per això no cal discutir-la mai.

c) Creu que els alumnes també s'han d'esforçar per entendre la solució i no només el professor.

d) No creu que el més important de resoldre un problema sigui l'obtenció del resultat final perquè sempre s'ha de mirar el procés si és correcte o no.

e) Ell considera que és més important entendre perfectament què vol dir la solució trobada que acabar ràpidament el problema. Aleshores un sabrà com ho ha fet i ho podrà aplicar en una altra ocasió.

- f) No creu oportú buscar el sentit de la resposta obtinguda.
- g) La resolució d'un problema acaba quan s'ha trobat la solució si un no sap com comprovar la veracitat de la resposta. Però si se sap, és millor fer-ho.
- h) Els problemes acostumen a tenir una única solució correcta.
- i) L'èxit en la resolució de problemes no només s'aconsegueix si s'arriba a la solució demanada, també s'ha de mirar més o menys el procés.
- j) No creu que un bon estudiant de matemàtiques de seguida arribi a la solució correcta i de manera directa sempre.

### **7.6.3 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb una mitjana capacitat intel·lectual i poc flexible (25A)**

A continuació se sintetitzen totes les respostes donades per l'alumne 25A distingides en els tres blocs A, B i C.

A) Les respostes a les preguntes de caire general resumides han estat:

- a) Li agrada venir a l'escola perquè alguns dies té ganes d'aprendre i també pot veure als amics.
- b) Li agraden les matemàtiques perquè mai són iguals, però conserven una estructura molt lògica i molt quadrada.
- c) La geometria és la part de les matemàtiques que prefereix perquè li agrada dibuixar.
- d) Les fraccions constitueixen la part de les matemàtiques que menys li agraden perquè per a ella no són mostra de la vida quotidiana.
- e) La diferència que hi ha entre problemes i exercicis és que en els problemes s'ha de raonar perquè plantegen un dubte i en els exercicis, que són mecànics, plantegen quelcom que ja se sap com resoldre.
- f) Sí és necessari saber resoldre problemes de saber pensar i saber raonar perquè aquests apareixen a la vida quotidiana.
- g) Resoldre problemes no és el que més li agradi però els problemes lògics són els que més li agraden.
- h) Les operacions són el que menys li agrada de resoldre problemes perquè ja és la part final per arribar a un resultat concret.
- i) Els problemes que menys li agraden són els que tenen dues incògnites perquè encara no els entén.
- j) Les matemàtiques per a ella són un engranatge de procediments, idees i processos de pensament.

- k) Les matemàtiques són raonaments i resolució de problemes.
- l) La feina que es fa a classe la troba variada dintre del que el temari ho permet.
- m) No troba avorrides les matemàtiques que es fan a classe perquè són molt dinàmiques.
- n) La finalitat que té la resolució de problemes és aprendre a explorar i investigar situacions desconegudes, encara que en segon lloc, considera que també podria ser una finalitat aplicar les tècniques treballades a classe.
- o) No creu que un alumne bo en matemàtiques habitualment resolgui els problemes molt ràpidament .
- p) Creu que és possible que un alumne que estudiï poc les matemàtiques i acabi ràpidament en resoldre un problema és perquè segurament el tindrà malament.
- q) No creu que un alumne intel·ligent gairebé mai tingui dificultats ni bloquejos en resoldre un problema. Perquè els problemes són molt variats i els dubtes també, i sabent molt d'algunes coses, pot ser que d'altres no les sàpiga tant.
- r) Ella creu que resoldre problemes correctament és gràcies al sentit comú (necessari per raonar) i a estudiar molt (per resoldre).
- s) Ella considera que per resoldre un problema s'ha de tenir molta paciència i per això, el que se solucioni o no un problema depèn de l'estat d'ànim, paciència i perseverança que es tingui en aquell moment.
- t) Ella opina que factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de solucionar un problema.

B) Les respostes a les preguntes sobre la comprensió de l'enunciat resumides han estat:

- a) A l'hora de resoldre un problema les indicacions que donaria als seus alumnes si fos professora per a començar serien: llegir l'enunciat, llegir-lo un altre cop i intentar solucionar-lo. Primer posar les dades i "després els problemes" i per últim, raonadament, la solució i tornar a comprovar tot una altra vegada.
- b) No troba que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema ja l'entengui.
- c) Sense dubtar-ho creu que abans d'escriure res, el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap.
- d) Per ajudar a una bona resolució és positiu fer una representació de totes les dades que hi intervenen.

e) No creu que amb una lectura ràpida de l'enunciat n'hi hagi prou per a començar a solucionar el problema. Perquè almenys dues vegades són necessàries; "sinó, no s'entén, t'oblides d'algo" (sic).

f) Creu que depèn de les persones el seu estat anímic, la paciència i la perseverança que tinguin en aquell moment poden entendre l'enunciat d'un problema o no. Cadascuna té un poder de concentració diferent.

g) Els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten poc en comprendre un enunciat. Però els nervis poden afectar en voler anar ràpidament i deixar-se parts de l'enunciat.

C) Les respostes a les preguntes sobre la revisió de la solució resumides han estat:

a) Quan s'ha arribat a la solució final d'un problema, la indicació que donaria als seus alumnes si fos professora seria que la tornessin a revisar.

b) No creu que la solució d'un problema s'hagi de discutir, en tot cas debatre de si és correcta o no i quan haguessin acabat tots els alumnes el problema.

c) Els alumnes, a més a més del professor, s'han d'esforçar en entendre el problema.

d) Ella no creu que el més important de resoldre un problema sigui l'obtenció del resultat final perquè sempre pot haver-hi errors de càlcul. És més important que el procés sigui lògic.

e) No troba més important acabar ràpidament el problema que entendre perfectament què vol dir la solució trobada.

f) Per a ella és necessari trobar el sentit de la resposta obtinguda.

g) No creu que sigui necessari buscar altres camins o variar les condicions del problema un cop s'hagi trobat la solució.

h) Els problemes no sap si acostumen a tenir una única solució correcta, però segur que hi ha moltes maneres de resoldre'l.

i) L'èxit en la resolució de problemes no s'aconsegueix només arribant a la solució demanada. L'èxit és fer un raonament correcte i fer un procés lògic.

j) Un bon estudiant de matemàtiques s no arriba de seguida a la solució correcta ni de manera directa sempre. Hi ha coses que són molt mecàniques i d'altres no.

#### **7.6.4 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb una mitjana capacitat intel·lectual i flexible (15B)**

Seguidament es fa una síntesi de les respostes recollides de l'alumne 15B agrupades pels blocs A, B i C.

A) Les respostes a les preguntes de caire general resumides han estat:

- a) Li agrada venir a l'escola perquè de vegades s'ho passa bé.
- b) De vegades li agraden les matemàtiques, quan es fan coses entretingudes com ara problemes de lògica, o exercicis de resposta oral.
- c) La lògica és la part de les matemàtiques que li agrada més perquè li fa pensar i hi ha certa flexibilitat en la resposta i en la manera d'actuar.
- d) Els problemes són el que li agrada menys de les matemàtiques.
- e) Els problemes expliquen la situació i els exercicis només diuen l'operació.
- f) Ella troba necessari saber resoldre problemes perquè sorgeixen a tot arreu.
- g) Depèn de quins problemes li agrada resoldre: alguns d'equacions i tots els de lògica.
- h) El que menys li agrada de resoldre problemes és fer el plantejament perquè és el que més li costa.
- i) Els problemes que menys li agraden són els que no són ni de lògica ni d'equacions perquè molts són difícils de trobar el plantejament.
- j) Per a ella les matemàtiques són un conjunt de regles i tècniques per aplicar.
- k) Les matemàtiques són mètodes i càlculs.
- l) La feina que es fa a classe de matemàtiques és variada; primer s'explica i després es practica.
- m) No troba avorrides les matemàtiques que es fan a classe.
- n) La finalitat que creu que té la resolució de problemes és aprendre a explorar i investigar situacions desconegudes.
- o) Un bon estudiant de matemàtiques no té perquè habitualment resoldre els problemes molt ràpidament .
- p) No creu que un alumne que estudiï poc les matemàtiques si acaba ràpidament en resoldre un problema sigui perquè el tingui malament.
- q) Un alumne intel·ligent pot tenir dificultats i quedar-se bloquejat en resoldre algun problema.
- r) Creu que el fet de resoldre problemes correctament és gràcies al sentit comú i a estudiar molt. Tot i que és degut més al sentit comú per a ella.
- s) Ella troba que si no es té paciència, perseverança o l'estat anímic adequat, podria ser que no s'intentés resoldre el problema i es deixés.



t) Ella troba que afecten molt els nervis, la por al fracàs i la confiança a l'hora de solucionar un problema.

B) Les respostes a les preguntes sobre la comprensió de l'enunciat resumides han estat:

a) A l'hora de resoldre un problema les indicacions que ella donaria als seus alumnes per a començar si fos professora serien: llegir bé l'enunciat, escollir bé les dades i plantejar-ho bé.

b) No troba que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema ja l'entén.

c) Ella no creu que abans d'escriure res, el problema s'hagi de tenir pensat i elaborat al cap.

d) Ella creu que per ajudar a una bona resolució de problemes és positiu fer una representació clara de totes les dades que hi intervenen.

e) No creu que amb una lectura ràpida de l'enunciat n'hi hagi prou per a començar a solucionar el problema.

f) Ella creu que perquè l'enunciat d'un problema s'entengui cal tenir un estat d'ànim, una paciència i una perseverança adequats.

g) Ella pena que els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de comprendre l'enunciat.

C) Les respostes a les preguntes sobre la revisió de la solució resumides han estat:

a) La indicació que donaria als seus alumnes si fos professora un cop haguessin arribat a la solució final seria que tornessin a fer-ho per veure si obtenien el mateix, que ho repassessin.

b) Troba que la solució d'un problema s'ha de discutir quan no s'estigui d'acord o quan hi pugués haver dues opcions.

c) Ella creu que els alumnes, a més a més del professor, s'han d'esforçar per entendre la solució.

d) No creu que el més important de resoldre un problema sigui l'obtenció del resultat final. Pot ser que hi hagi errors de càlcul i el plantejament sigui correcte.

e) No considera que sigui més important acabar ràpidament el problema que entendre perfectament què vol dir la solució trobada. Perquè en el futur s'entendran les coses millor.

f) Sempre és necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda.

g) La resolució d'un problema no sempre acaba quan s'ha trobat la solució; hi ha problemes que només tenen una solució, però n'hi ha d'altres que no i es poden buscar altres camins.

h) No tots els problemes tenen una única solució correcta.

i) L'èxit en la resolució de problemes no només s'aconsegueix si s'arriba a la solució demanada.

j) Un bon estudiant de matemàtiques no té perquè arribar de seguida a la solució correcta, ni tampoc de manera directa. "Igual no és bo en tot".

### **7.6.5 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb una baixa capacitat intel·lectual i poc flexible (9B)**

A continuació s'exposa una síntesi de totes les respostes donades per l'alumne 9B agrupades per bloc: A, B i C.

A) Les respostes a les preguntes de caire general resumides han estat:

a) Sí li agrada venir a l'escola perquè es troba amb els seus amics i hi ha assignatures que li agraden i està a gust.

b) Sí li agraden les matemàtiques.

c) La part de les matemàtiques que li agraden més és el càlcul mental perquè és ràpid.

d) La part que li agrada menys de les matemàtiques són els problemes, perquè li costen.

e) Els problemes s'han de llegir moltes vegades i els exercicis són mecànics.

f) Ell creu que és necessari saber resoldre problemes perquè pot servir per altres coses.

g) No li agrada massa resoldre problemes. Però els que més li agraden són els de sistemes d'equacions.

h) El que menys li agrada és resoldre problemes de geometria perquè li van molt malament.

i) Els problemes de geometria no li agraden doncs no els entén.

j) Les matemàtiques per a ell són un conjunt de regles i tècniques per aplicar, encara que en segon terme, també les contempla com un engranatge de procediments, idees i processos de pensament.

k) Les matemàtiques per a ell són raonament i resolució de problemes.

- l) La feina que es fa a classe de matemàtiques la troba variada. Tot i que també té aspectes repetitius perquè tothom ho entengui.
- m) Les matemàtiques que es treballen a classe no creu que siguin avorrides perquè li agraden en general (diu que també influeix el professor).
- n) La finalitat que té la resolució de problemes és aplicar les tècniques treballades a classe. Perquè els exercicis que es fan, després s'han d'aplicar als problemes.
- o) Ell creu que depèn del bon estudiant de matemàtiques que habitualment resolguis molt ràpidament els problemes o no. Potser és bo però li costi entendre l'enunciat.
- p) Considera com possible el que un alumne que estudiï poc les matemàtiques si acaba ràpidament en resoldre un problema és degut al fet que el tingui malament.
- q) Creu que un alumne intel·ligent pot tenir dificultats i quedar-se bloquejat en resoldre un problema.
- r) Ell creu que el fet de resoldre els problemes correctament és gràcies al sentit comú i a estudiar molt.
- s) L'estat d'ànim, paciència i perseverança són factors que sí influeixen en la resolució d'un problema.
- t) Els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de solucionar el problema.

B) Les respostes a les preguntes sobre la comprensió de l'enunciat resumides han estat:

- a) A l'hora de resoldre un problema la indicació que donaria als seus alumnes per començar en cas de ser professor seria que llegissin l'enunciat tantes vegades com calgués fins a entendre'l.
- b) Un bon estudiant de matemàtiques també necessita llegir l'enunciat més d'un cop, de seguida que el llegeix no té perquè entendre'l.
- c) Abans d'escriure res, considera convenient tenir el problema pensat i elaborat al cap.
- d) Per ajudar a una bona resolució de problemes és positiu representar clarament totes les dades que hi intervenen.
- e) Amb una lectura ràpida de l'enunciat no n'hi ha prou per a començar a solucionar un problema; un pot saltar-se algun detall important.

f) L'enunciat d'un problema s'entén o no en funció de l'estat anímic, paciència i perseverança que es tingui en aquell moment.

g) Els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de comprendre l'enunciat.

C) Les respostes a les preguntes sobre la revisió de la solució resumides han estat:

a) Quan s'ha arribat a la solució final d'un problema la indicació que donaria als seus alumnes si fos professor seria revisar la resposta fent-ho un altre cop per si hi hagués algun error.

b) Quan s'acaba un problema convé discutir la seva solució.

c) Ell troba que l'alumne també, a més a més del professor, s'ha d'esforçar per entendre la solució del problema.

d) No creu que el més important de resoldre un problema sigui l'obtenció del resultat final.

e) Creu que el problema no s'ha d'intentar acabar ràpidament perquè aleshores surten els errors.

f) Per a ell és necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda tot i que ell no ho faci.

g) Ell no es planteja després d'haver trobat la solució buscar altres camins o variar les condicions del problema.

h) Ell creu que normalment els problemes tenen una única solució.

i) Ell creu que és una satisfacció si s'arriba a la solució demanada, però que l'èxit en la resolució de problemes també està en entendre l'exercici.

j) No troba que un bon estudiant de matemàtiques de seguida arribi a la solució correcta i de manera directa.

#### **7.6.6 Síntesi de l'entrevista feta a un alumne amb una baixa capacitat intel·lectual i flexible (9A)**

Seguidament es fa una síntesi de les respostes donades a l'entrevista per l'alumne 9A diferenciades segons el bloc de preguntes al qual pertany (A, B, C).

A) Les respostes a les preguntes de caire general resumides han estat:

a) Li agrada venir a l'escola perquè es relaciona amb els companys i estudiar li agrada.

b) Li agraden les matemàtiques perquè es considera àgil.

- c) La part que li agrada més de les matemàtiques és el càlcul mental perquè és ràpid.
- d) La part que li agrada menys és la geometria perquè no li “entra”.
- e) Ell creu que un problema ja està plantejat i només s’ha de resoldre i un exercici s’ha de plantejar i resoldre.
- f) Creu que és necessari saber resoldre problemes perquè la vida n’està plena.
- g) Li agrada resoldre problemes, sobretot els d’equacions.
- h) La part que menys li agrada de resoldre problemes és quan toca fer les operacions i els processos per arribar a la resposta.
- i) Els problemes que no li agrada resoldre són els de geometria perquè no els “agafa”.
- j) Per a ell les matemàtiques són un conjunt de regles i tècniques per aplicar.
- k) Les matemàtiques són raonament i resolució de problemes per a ell.
- l) La feina que es fa a classe de matemàtiques és variada però es repeteixen alguns aspectes fins que s’acaba d’entendre.
- m) No troba avorrides les matemàtiques que es fan a classe.
- n) La finalitat que té la resolució de problemes per a ell és aprendre a explorar i investigar situacions desconegudes.
- o) No creu que un bon estudiant de matemàtiques habitualment resolgui els problemes molt ràpidament .
- p) Un alumne que estudiï poc les matemàtiques i acabi ràpidament resolent un problema no té perquè tenir-ho malament. Pot ser que estigui molt atent a classe i ho “agafi” bé.
- q) Un alumne intel·ligent pot tenir dificultats i quedar-se bloquejat resolent un problema. “Tots ens equivoquem”.
- r) El fet de resoldre correctament un problema és gràcies al sentit comú i a estudiar molt.
- s) Solucionar un problema bé no és independent d’aspectes com tenir un bon estat anímic, tenir paciència o perseverança en aquell moment.
- t) Ell creu que afecten bastant els nervis, la por al fracàs i la confiança a l’hora de solucionar un problema.

B) Les respostes a les preguntes sobre la comprensió de l’enunciat resumides han estat:

- a) A l'hora de resoldre un problema les indicacions que donaria als seus alumnes si fos professor per començar serien que llegissin bé l'enunciat i que l'interpretessin correctament.
- b) Un bon estudiant en matemàtiques de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema no té perquè entendre'l a la perfecció.
- c) Abans d'escriure res, el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap. Però escriure pot ajudar.
- d) Per ajudar a una bona resolució de problemes és positiu fer una representació clara de les dades.
- e) Depèn del grau de dificultat del problema, creu que amb una lectura ràpida de l'enunciat n'hi hagi prou per a començar a solucionar-lo.
- f) Depèn de com un es trobi, l'enunciat del problema s'entendrà o no; influeix l'estat d'ànim, la paciència i la perseverança que es tingui en el moment.
- g) Els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten molt a l'hora de comprendre l'enunciat.

C) Les respostes a les preguntes sobre la revisió de la solució resumides han estat:

- a) Quan s'ha arribat a la solució final d'un problema, les indicacions que donaria als seus alumnes (si fos professor) serien que intentessin relacionar l'enunciat amb la solució que ha donat el problema.
- b) Ell creu que la solució d'un problema s'ha de discutir quan no la tenen igual tots els alumnes o, encara que la tinguin igual, per saber el mètode emprat o com cadascú ho ha plantejat.
- c) No creu que el professor sigui l'únic que s'hagi d'esforçar perquè els alumnes entenguin la solució del problema.
- d) Creu que el més important de resoldre un problema no és el resultat final sinó el procés seguit per arribar-hi.
- e) Creu que el problema s'ha de solucionar lent, no intentar acabar ràpidament perquè aleshores apareixen errors.
- f) Per a ell és necessari buscar el sentit de la resposta.
- g) Creu que pot ser bo buscar altres camins si no surt el problema o si s'ha acabat i no s'està molt segur de la resposta.
- h) Considera que els problemes acostumen a tenir una única solució encara que es puguin trobar amb diferents mètodes.

i) L'èxit en la resolució de problemes només s'aconsegueix si s'arriba a la solució demanada.

j) No troba que un bon estudiant de matemàtiques de seguida arriba a la solució correcta i de manera directa. Pot ser que el problema tingui una certa dificultat i "de primeres no ho agafi".

### 7.6.7 Síntesi de les entrevistes

En aquest darrer punt es fa una síntesi de totes les respostes donades pels sis alumnes pregunta a pregunta distingint el bloc al qual pertanyen les preguntes A, B, C.

A) Les respostes a les preguntes de caire general resumides han estat:

a) T'agrada venir a l'escola? Per què?

A tots els agrada venir a l'escola perquè s'ho passen bé i estan amb els amics. Quatre diuen que també els agrada aprendre.

b) T'agraden les matemàtiques? Per què?

Cinc responen que sí i un que de vegades. Entre els que sí n'hi ha dos que afegeixen que perquè tot és molt lògic (són els poc flexibles).

c) Quina part de les matemàtiques t'agrada més? Per què?

Dos han dit el càlcul mental perquè són ràpids, una ha dit la lògica perquè la fa pensar de manera no repetitiva i lliure, una la geometria perquè li agrada també dibuixar, un altre les equacions perquè ho ha après ja que abans era desconegut i l'altre la suma i el producte per la seva estructura.

d) Quina part de les matemàtiques t'agrada menys? Per què?

La meitat d'ells es queixa de les divisions o fraccions o simplificacions, el mateix concepte. Dos d'ells es queixen dels problemes. I un d'ells de la geometria. El motiu és comú: per la seva complicació o la poca agilitat que tenen.

e) Quina diferència creus que hi ha entre problemes i exercicis?

Només una persona ha dit que un problema ja està plantejat i només cal resoldre'l i que un exercici cal plantejar-lo i fer-lo. Tots els altres cinc han convingut que un problema cal plantejar-lo, o raonar-lo, llegir-lo i rellegir-lo perquè es dona amb un enunciat que explica una situació. Els altres cinc també han convingut que els exercicis són operacions que ja se saben resoldre i que són mecànics.

f) És necessari saber resoldre problemes? Per què?

Tots estan d'acord que sí i que en un futur serà útil per a la vida.

g) T'agrada resoldre problemes? De quin tipus?

La meitat ha respost que sí enfront de l'altra meitat que ha respost que no molt. Els problemes de lògica han estat escollits per tres d'ells i les equacions també per tres d'ells, per ser una part nova.

h) Què és el que menys t'agrada de resoldre problemes? Per què?

A dos no els agrada quan tenen dificultats (un amb el plantejament i l'altre amb els enuncis de geometria). Als altres dos no els agrada quan es tracta de fer coses mecàniques i llargues.

i) Quin tipus de problemes no t'agraden? Per què?

Els problemes que no els agraden són aquells que els costen o no entenen en cinc dels sis casos. Per a dos són els de geometria, per a un altre són aquells on apareixen dues incògnites.

j) Escull què són les matemàtiques per a tu:

- a. un engranatge de procediments, idees i processos de pensament
- b. un conjunt de regles i tècniques per aplicar

Només dos d'ells han escollit l'opció a (els dos amb caràcter poc flexible), els altres quatre han escollit l'opció b.

k) Escull què són les matemàtiques per a tu:

- a. raonaments i resolució de problemes
- b. mètodes i càlculs

Tots menys un han escollit l'opció a.

l) Trobes la feina que es fa a classe de matemàtiques variada o repetitiva? Explica la teva resposta.

Tots convenen que la feina que es fa és variada però també repetitiva quan es detecten dificultats. Aleshores es treballen molt uns determinats tipus d'exercicis que es fan repetitius fins que tothom ho entengui.

m) Trobes avorrides les matemàtiques que es fan a classe? Per què?

Tots diuen que no són avorrides per a ells. Els motius són diversos, però parteixen del mateix punt: els agraden.

n) Escull la finalitat que creus que té la resolució de problemes:

- a. aprendre a explorar i investigar situacions desconegudes
- b. aplicar les tècniques treballades a classe.

Quatre d'ells han escollit l'opció a, els altres dos la b.

o) Creus que un bon estudiant de matemàtiques habitualment resol els problemes molt ràpidament?

Tots coincideixen a dir que depèn de l'estudiant, depèn del problema i dos afegixen que també depèn de la seva atenció.

p) Creus que un alumne que estudia poc les matemàtiques si acaba ràpidament en resoldre un problema és perquè segurament el tindrà malament?



Dos entrevistats diuen que és possible, i els altres quatre comenten que no té perquè. Aquests quatre creuen que potser no els cal estudiar i estant atents poden desenvolupar una bona tasca.

q) Un alumne intel·ligent gairebé mai té dificultats ni tampoc es queda bloquejat en resoldre un problema. És cert? Per què?

Tots responen que no. Per molt intel·ligent que sigui un alumne, pot haver-hi alguna part que no domini, ja sigui per l'extensa varietat de problemes que existeixen, o per posar-se nerviós, o per deixar-se algun detall.

r) Penses que el fet de resoldre els problemes correctament és gràcies al sentit comú o a estudiar molt, o a totes dues opcions? Per què?

Cinc dels estudiants opinen que és gràcies a les dues opcions. Encara que n'hi ha un d'ells que opina amb una tendència més propera a l'altre entrevistat que comenta que creu que el sentit comú és més important que l'haver estudiat molt.

s) Normalment, el fet que se solucioni un problema o no és independent de l'estat d'ànim, paciència i perseverança que es tingui en aquell moment. Què opines?

Tots els alumnes creuen que sí depèn de com un es trobi d'estat d'ànim, o de la paciència que tingui o del perseverant que sigui en aquell moment. Aquesta pregunta, però, ha calgut repetir-la doncs ha costat d'entendre.

t) Factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten molt poc a l'hora de solucionar un problema. Què opines?

Tots els alumnes han coincidit en negar aquesta afirmació. Tots creuen que els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten bastant a l'hora de solucionar un problema.

B) Les respostes a les preguntes sobre la comprensió de l'enunciat resumides han estat:

a) A l'hora de resoldre un problema, quines indicacions donaries als teus alumnes per a començar si fossis professor/a?

Tots creuen que s'ha de llegir molt bé l'enunciat i més d'una vegada. Quatre d'ells també insisteixen en la importància d'apuntar les dades del problema. Tres continuen dient que cal fer després un plantejament adequat per arribar a la solució. Però només un d'ells esmenta la necessitat de revisar i comprovar la solució.

b) Trobes que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema ja l'entén?

Cap dels entrevistats està d'acord amb l'afirmació que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema ja l'entén. Dos d'ells insisteixen que cal llegir almenys dues vegades el problema. Uns altres dos creuen que aquest estudiant hipotètic no ha de ser bo en totes les parts i pot ser molt ràpid en alguns àmbits, però no ser-ho en d'altres.

c) Abans d'escriure res, el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap.

Tots menys un cas creuen que sí. Un d'ells però, afegeix que escriure pot ajudar.

d) Per ajudar a una bona resolució de problemes és positiu fer una representació clara de totes les dades que hi intervenen? Per què?

Tots hi estan d'acord amb l'afirmació i en dir que ajuda a veure clar les idees del problema i a estructurar-lo, distingint el que certament interessa.

e) Creus que amb una lectura ràpida de l'enunciat ja n'hi ha prou per a començar a solucionar un problema? Per què?

En un principi tots opinen que no n'hi ha prou perquè amb una lectura ràpida podria ser que es descuidessin alguna dada important. Per això insisteixen que cal llegir dues vegades, una per entendre'l i una altra per seleccionar les dades. Hi ha una persona que planteja el dubte que si el grau de dificultat del problema no és molt elevat, aleshores sí que el problema pot solucionar-se amb una única lectura ràpida.

f) Normalment, que l'enunciat d'un problema s'entengui o no és independentment de l'estat d'ànim, paciència i perseverança que es tingui. Què opines?

La meitat creuen que depèn de com es llegeix s'entendrà o no. Dos d'ells creuen que la comprensió de l'enunciat no depèn de com es trobin, però la seva resolució sí. I un altre comenta que segons la capacitat de concentració de cadascun.

g) Factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten molt poc a l'hora de comprendre l'enunciat. Què opines?

Tots estan d'acord a reconèixer que aquests factors afecten força a l'hora de comprendre l'enunciat.

C) Les respostes a les preguntes sobre la revisió de la solució resumides han estat:

a) Quan s'ha arribat a la solució final d'un problema, quines indicacions donaries als teus alumnes si fossis professor/a?

Tots els entrevistats estan d'acord que indicarien als seus alumnes que revisessin la seva solució.

b) S'ha de discutir la solució d'un problema? Quan?

Cinc alumnes han contestat que sí s'ha de discutir la solució quan tots hagin acabat. I tres afegeixen que degut a una diferent solució.

c) Creus que per entendre la solució és només el professor el que s'ha d'esforçar?

Tots han estat conformes que per entendre la solució els alumnes també s'han d'esforçar.

d) El més important de resoldre un problema és l'obtenció del resultat final?

Absolutament tots opinen el mateix: no. El més important per a ells és el procés degut al fet que poden haver-hi errors de càlcul.

e) És més important acabar ràpidament el problema, trobant una solució, que entendre perfectament què vol dir la solució trobada? Per què?

Tots estan d'acord a dir que no. Afirmen que s'ha d'entendre la solució perfectament o bé per poder-la aplicar en altres ocasions o bé per evitar errors.

f) És necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda?

Cinc alumnes creuen que sí per revisar la resposta i comprovar una coherència amb allò que es demana.

g) Trobes que la resolució d'un problema acaba quan s'ha trobat la solució i que no és necessari buscar altres camins o variar les condicions del problema?

Dues persones afirmen que cal fer una comprovació de la solució. Però la resta creu que no és necessari fer res més.

h) Els problemes acostumen a tenir una única solució correcta? Per què?

Quatre dels entrevistats creuen que depèn dels problemes, que alguns sí i d'altres no. Però hi ha dos alumnes que creuen contràriament que els problemes sí tenen una única solució, encara que existeixin diferents maneres d'arribar-hi.

i) L'èxit en la resolució de problemes només s'aconsegueix si s'arriba a la solució demanada?

Només una persona creu que sí. La resta comparteix la idea que és el raonament correcte el que realment és important, encara que un d'ells assenyala que també és una satisfacció el que s'hagi resolt bé.

j) Trobes que un bon estudiant de matemàtiques de seguida arriba a la solució correcta, i de manera directa?

En principi han contestat cinc persones que no, però una d'elles al final ha dubtat manifestant el mateix punt de vista que la sisena. Aquesta opinió declara que depèn de la persona i del problema.



## Capítol 8: Anàlisi dels indicadors determinats

La manera de procedir en aquest capítol serà tractar els cinc grups d'indicadors independentment començant amb una breu descripció general que inclou una taula detallada sobre l'indicador observat i les preguntes concretes del qüestionari, del test i de l'entrevista que els caracteritzen. A causa de la seva naturalesa, hi ha respostes que apareixen en diversos indicadors.

Les referències numèriques que apareixen a la columna del qüestionari són directament el número de la pregunta.

La notació de les preguntes en el test és la següent:

I.A.i.j:

- I: Fase I, la Comprensió d'un enunciat segons G. Polya
- A/B: Test inicial/Test final al cap d'un any
- i: Número del test (n'hi ha 5)
- j: Número de pregunta (n'hi ha 4)

IV.A.j.1:

- IV: Fase IV, la Revisió de la solució segons G. Polya
- A/B: Test inicial/Test final al cap d'un any
- i: Número del test (n'hi ha 6)
- j: Número de pregunta (n'hi ha 14)

La notació de les preguntes de l'entrevista és la següent:

A.a:

- A: Preguntes de caire general
- a: Lletra de pregunta (n'hi ha des de l'a fins a la t)

B.a:

- B: Preguntes sobre la comprensió de l'enunciat
- a: Lletra de pregunta (n'hi ha des de l'a fins a la g)

C.a:

- C: Preguntes sobre la revisió de la solució
- a: Lletra de pregunta (n'hi ha des de l'a fins a la j)

### 8.1 Anàlisi de la comprensió de les situacions plantejades

La pretensió és detectar identificadors interpretables que constatin la comprensió de les situacions plantejades i de totes les dades inicials. Seguidament s'exposa una taula d'indicadors concrets observats i el lloc específic dels instruments on es troben les referències utilitzades. Després es presenten els resultats classificant-los segons l'indicador i com indica la taula: segons el qüestionari, segons el test i segons l'entrevista.

Indicador observat	Qüestionari	Test	Entrevista
Rigor a la fase de comprensió de l'enunciat	37, 38, 39, 40, 42, 43, 44	I.B.i.1, I.B.i.2, I.B.i.3, Mirar les seves resolucions Dades, Procés, Rpta	B.e
Ordre i captació de totes les dades	38, 40, 43, 45, 46	I.A.i.3, I.A.i.4, I.B.i.5, I.B.i.6, i=1:5	B.d
Comprensió del que es pregunta	37, 38, 39, 42	I.A.i.4, I.B.i.2, I.B.i.6, i=1:5	
Pèrdua d'atenció inicial	1.6, 5, 27, 30, 37, 38, 39, 41, 42, 46	IV.B.i.1.4 IV.B.i.1.5, i=1:6	A.b, A.g A.l, A.m, B.f, B.g
Grau de comprensió amb què treballen els problemes	38, 39, 42, 43, 44, 46	I.A.i.1, I.A.i.3, I.A.i.4, I.B.i.1, I.B.i.2, I.B.i.3, I.B.i.5, I.B.i.6, i=1:5	B.c, B.d, B.e
Comprensió de les hipòtesis inicials de la situació	37, 38, 40, 42, 43, 45, 46	I.A.i.3, I.B.i.5, i=1:5 IV.B.j.1.4, IV.B.j.1.5, j=1:6	B.c, B.d, B.f, B.g

Quadre 8.1: Taula de la localització dels indicadors que fan referència a la comprensió de les situacions plantejades.

### 8.1.1 Rigor a la fase de comprensió de l'enunciat

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Els alumnes manifesten no llegir ràpidament i sense ganes un enunciat quan és llarg. A més a més, molts d'ells quan llegeixen el problema i no entenen a la primera el que se'ls demana, tornen a llegir-se'l amb calma fent un llistat de totes les dades. Diuen llegir amb molta atenció els enunciats dels problemes. Tres quartes parts del grup afirmen que abans de solucionar el problema, confeccionen una llista amb totes les dades del problema. Ells no prefereixen acabar el problema de matemàtiques ràpidament encara que no l'acabin d'entendre. Prefereixen entendre'l perfectament encara que triguin més temps. Tots els alumnes consideren important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a solucionar-lo. Majoritàriament no contempen la comprensió de l'enunciat com una tasca que s'hagi de fer al final, després d'haver trobat la solució.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Al cap d'un any s'ha preguntat als estudiants si han entès el que passa en cinc problemes i les respostes recollides són afirmatives en el primer i quart problema; una resposta afirmativa excepte quatre alumnes en el segon problema; respostes afirmatives per part de les tres quartes parts del grup en els problemes tercer i cinquè. També se'ls ha preguntat si han entès el que es demana i les respostes recollides són afirmatives en els problemes tercer i cinquè. Se'ls ha preguntat si han entès el que es demana i les respostes són afirmatives en els problemes primer, quart i cinquè; en els problemes segon i tercer exceptuant a una sisena part del grup també han estat afirmatives. A la pregunta de si han entès l'enunciat dels problemes les respostes han estat les següents: afirmatives en els problemes primer i quart; tots menys una sisena part ho afirmen en els problemes segon i tercer; en el problema cinc ho afirmen tres quartes parts.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots els entrevistats opinen que no n'hi ha prou amb una lectura ràpida de l'enunciat donat que podrien descuidar alguna dada important. Per aquest motiu insisteixen en una doble lectura, una per entendre-la i una altra per seleccionar les dades. Hi ha una persona que planteja que si el grau de dificultat del problema no és molt elevat, aleshores podria solucionar-se amb una única lectura.

Síntesi:

Els alumnes diuen que llegeixen amb molta atenció els enunciats, encara que siguin llargs. Contempen la comprensió de l'enunciat com una tasca inicial necessària. Prefereixen entendre perfectament el problema abans que acabar-lo ràpidament. Però si no entenen un enunciat en una primera lectura el llegeixen un altre cop fent un llistat de totes les dades que hi intervenen. De fet, el motiu del perquè fan el llistat de dades és degut al fet que consideren important aclarir totes les dades prèviament a resoldre el problema. Opinen que no n'hi ha prou amb una lectura ràpida de l'enunciat donat que podrien descuidar alguna dada; insisteixen en una doble lectura, una per entendre i l'altra per fer un llistat de les dades. Tal com contesta l'alumne 27A en l'entrevista a la pregunta B.e a l'ANNEX D.6.1 *“Jo crec que no, sinó que l'enunciat com a mínim, te l'has de llegir com a mínim dues vegades. Una per entendre'l, i una per seleccionar les dades que necessitis”*. La majoria ha entès l'enunciat, ha entès què passa i el que se'ls

demana en els cinc problemes de la Fase I de la comprensió de l'enunciat. S'ha comprovat que al cap d'un any els resultats d'aquest aspecte milloren.

### **8.1.2 Ordre i captació de totes les dades**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Quan els alumnes s'enfronten amb enunciats que no entenen en la primera lectura el que demanen, tornen a llegir el problema una altra vegada amb calma, anotant totes les dades per captar-les. També abans de solucionar el problema confeccionen una llista amb totes les dades del problema, per no deixar-se cap. I amb el mateix propòsit declaren que és important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans d'intentar resoldre'l. Creuen que totes les dades que dona l'enunciat són sempre importants. Pocs més de la meitat, però, creuen que per fer un problema ràpidament es tracta de començar a resoldre'l i les dades que falten es busquen a l'enunciat.

En els tests les respostes analitzades han estat:

En el test que s'ha passat als alumnes s'ha mirat si són capaços de capturar totes les dades en les cinc activitats i s'ha observat que: en la primera activitat dues terceres parts les han agafat totes tres o com a molt se n'han descuidat una; en la segona activitat com a molt una tercera part se n'ha descuidat una de tres; en l'activitat número tres hi ha un total de cinc dades i quasi la meitat del grup no han dit cap o només una; en l'activitat quatre la majoria ha detectat les tres dades i uns pocs se n'han deixat una; en l'activitat número cinc dues terceres parts han detectat les dues dades.

En el test també se'ls pregunta si saben què han de trobar i les respostes recollides són afirmatives en el cas del primer, del segon i del quart problema, i en el cas dels problemes número tres i cinc una tercera part respon negativament.

Al cap d'un any i amb les mateixes activitats se'ls pregunta quines dades dona l'enunciat i al primer problema les dues terceres parts les detecten totes; en el segon problema les tres quartes parts les detecten totes tres i l'altra quarta part se'n deixa una; en el tercer problema la meitat no captura cap o una de cinc; en el quart problema quatre cinquens parts del grup detecta les tres dades i la resta se'n deixa una; en el cinquè problema dues terceres parts es deixa una de les tres dades. També se'ls demana si saben què han de trobar i les respostes donades són correctes en els quatre primers problemes però en el cinquè una quarta part no ho sap.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots els entrevistats estan d'acord que per ajudar a una bona resolució de problemes és positiu fer una representació clara de totes les dades que hi intervenen, i que ajuda a estructurar-los, distingint el que interessa.

Síntesi:

Seguint un ordre, abans de solucionar el problema els estudiants confeccionen un llistat exhaustiu de les dades. Declaren que primer s'han d'aclarir. Tal com contesta l'alumne 9B en l'entrevista a la pregunta B.d a l'ANNEX D.6.5 "*Jo crec que sí. Per això en els problemes primer es fan les dades i després les operacions. Per això llegeixes i després escrius totes les dades que treus del problema*". Creuen que per ajudar a una bona



resolució de problemes és positiu fer una representació clara del conjunt de totes les dades i que això ajuda a estructurar la informació. Per tal de captar totes les dades els alumnes insisteixen en llegir un altre cop i amb calma els enunciats que en una primera lectura no els ha estat suficient, i les van anotant en una llista.

De totes maneres, la meitat dels alumnes creu que si un problema s'ha de resoldre ràpidament el llistat de les dades es pot saltar i començar a resoldre el problema sense acabar-lo d'entendre i a mesura que es necessiten certes dades, buscar-les en l'enunciat. Però en general, el grup captura totes les dades i sap què ha de trobar. Al cap d'un any també es nota una millora en aquest aspecte.

### **8.1.3 Comprensió del que es pregunta**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en els tests.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Encara que l'enunciat d'un problema sigui llarg, els estudiants no el llegeixen ràpidament i sense ganes. A més, les tres quartes parts del grup quan un enunciat el llegeixen un cop i no l'entenen, per comprendre'l bé, se'l tornen a llegir amb tranquil·litat anotant totes les dades. Afirmen llegir amb molta atenció els enunciats dels problemes. També prefereixen anar més lents si d'aquesta manera entenen perfectament el que pregunta el problema.

En els tests, les respostes analitzades han estat:

Es pregunta a l'alumne si sap què ha de trobar i afirmativament han contestat en els problemes u, dos i quatre, però en els problemes tres i cinc només les dues terceres parts són les que ho han afirmat. Al cap d'un any les respostes a la pregunta si han entès el que es demana en els problemes han estat afirmatives en el problema número u, quatre i cinc, però referent als problemes dos i tres una sisena part ho ha negat. També se'ls pregunta si saben què han de trobar en els problemes i les respostes han estat correctes en els problemes u, dos, tres i quatre però en el problema número cinc una quarta part no ho ha sabut.

Síntesi:

Encara que l'enunciat sigui llarg afirmen que el llegeixen amb ganes. La majoria, si no l'ha entès, el torna a llegir amb calma i anotant totes les dades. Declaren que prefereixen anar més lents però entenent perfectament el problema. La majoria dels alumnes contesta correctament el que es demana demostrant que sap què ha de trobar en els problemes i que els entén. Al cap d'un any augmenta el nombre d'alumnes que comprenen millor les demandes del problema.

### **8.1.4 Pèrdua d'atenció inicial**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

La meitat del grup creu que les matemàtiques són difícils.

Una tercera part del grup dorm menys de vuit hores diàries.

Una tercera part del grup reconeix que els seus companys els expliquen com fer les coses. Però no es copien la feina. Si es troben amb un enunciat molt llarg no el llegeixen sense ganes i ràpidament. Si cal tornar a llegir l'enunciat perquè la primera vegada no

han entès el que es demanava, ho fan prenent nota de totes les dades les tres quartes parts del grup. Declaren llegir amb molta atenció els enunciats dels problemes. Creuen que els alumnes més llestos acaben molt ràpidament els problemes de matemàtiques, la qual cosa pot condicionar l'atenció inicial per la pressió de les presses. De totes maneres, prefereixen invertir el temps necessari en entendre perfectament el problema abans que acabar ràpid. A l'hora de fer un problema ràpidament, es tracta de començar a resoldre'l i a buscar les dades que falten mentre se soluciona segons poc més de la meitat del grup.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Al cap d'un any es pregunta als estudiants si en fer els problemes estan tranquils i les respostes en els problemes u, dos, tres i cinc són afirmativament per les dues terceres parts; referent al quart problema afirmen estar tranquils pocs més de la meitat; referent al problema número sis que ha presentat més dificultats que els altres, una quarta part ha reconegut estar nerviosa. També se'ls ha preguntat pel seu estat de concentració i en els problemes u i dos majoritàriament sí que hi estaven concentrats; en el problema tres les tres quartes parts estaven concentrades; en el problema quatre la meitat estava concentrada; en els problemes cinc i sis eren les dues terceres parts les que estaven concentrades.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cinc dels entrevistats responen que sí que els agraden les matemàtiques i un que de vegades; dos de caràcter poc flexible diuen trobar-se còmodes perquè tot és molt lògic. La meitat diu que sí li agrada resoldre problemes. Els problemes de lògica han estat escollits per tres alumnes, i els d'equacions també per tres, per ser una part nova. Tots els entrevistats convenen que la feina que es fa a classe de matemàtiques és variada però repetitiva quan es detecten dificultats, essent aleshores que es treballen molt uns determinats tipus d'exercicis fins que tothom ho entengui. Els entrevistats diuen que per a ells no són avorrides les matemàtiques que es fan a classe; els motius són diversos, però a tots els agraden. La meitat dels entrevistats creu que depèn de com es llegeix (segons l'estat d'ànim, la paciència o la perseverança) s'entendrà o no; dos creuen que la comprensió de l'enunciat no depèn de com es trobin, però la seva resolució sí; un altre argumenta que depèn de la capacitat de concentració de cadascun. Tots els entrevistats estan d'acord que factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten força a l'hora de comprendre l'enunciat.

Síntesi:

Al grup en general li agrada les matemàtiques encara que la meitat creu que són difícils. Tot i que normalment no es copiïn la feina dels altres, una tercera part del grup diu que els seus companys li expliquen les coses. Creuen que els alumnes més llestos acaben molt ràpidament de solucionar els problemes. Però prefereixen anar lents per entendre perfectament el problema i diuen llegir atentament els enunciats llegint-los amb calma un altre cop si cal i prenent bona nota de totes les dades en un llistat. De totes maneres la meitat creu que si un problema vol resoldre's ràpid, cal començar i les dades anar-les buscant a mesura que es necessiten. Creuen que la feina de classe és variada fins que es detecten dificultats que aleshores es fa repetitiva fins que se superen. La majoria dels alumnes estan tranquils i concentrats en resoldre els problemes. Coincideixen a creure que factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten per comprendre un enunciat. Un altre factor que podria influir és el nombre d'hores que dorm una tercera part del grup, ja que no arriba a vuit hores diàries.

### **8.1.5 Grau de comprensió amb què treballen els problemes**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts dels alumnes manifesten llegir un altre cop el problema si en la primera lectura no han entès el que es demana. Ho fan amb calma i anotant en un llistat totes les dades. Els estudiants confessen llegir amb molta atenció els enunciats dels problemes, i miren de resoldre'l de manera que l'entenen perfectament encara que vagin més lents. Creuen important aclarir totes les dades i entendre el problema abans de començar a resoldre el problema. Creuen que la comprensió de l'enunciat no és una tasca que s'hagi de fer després de trobar la solució. Tot i que la meitat convé que per fer un problema amb rapidesa s'ha de començar a resoldre i les dades que falten es van buscant a l'enunciat.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta si han entès l'enunciat i les respostes obtingudes són afirmatives en el problema número u i quatre; en el problema número dos les dues terceres parts contesten afirmativament; en el problema número tres i cinc són les tres quartes parts que responen que sí han entès l'enunciat. També es mira si són capaços de capturar totes les dades observant-se que en el problema u les dues terceres parts del grup les agafen totes tres o com a molt se'n descuiden una; en el problema número dos com a molt una tercera part es deixa una dada de tres; en el problema número tres d'un total de cinc dades quasi la meitat no en diu cap o només una; en el problema número quatre la majoria ha detectat les tres dades i uns pocs se n'han deixat una; referent al problema número cinc dues terceres parts han detectat les dues dades. En el test també se'ls pregunta si saben què han de trobar en els problemes i referent als problemes u, dos i quatre les respostes han estat afirmatives però una tercera part ha confessat que no en els problemes tres i cinc.

Al cap d'un any, també se'ls ha preguntat si han entès el que passa als problemes i les respostes recollides són afirmatives en els problemes u i quatre; en el segon problema ho afirmen tots menys quatre; en el tercer i cinquè problema les tres quartes parts manifesten entendre el que passa. També se'ls pregunta si han entès el que es demana als problemes i tots afirmen que ho han entès en els problemes u, quatre i cinc però en els problemes dos i tres una sisena part confessa que no. A la pregunta si han entès l'enunciat dels problemes la resposta ha estat afirmativa en els problemes números u i quatre; en els problemes dos i tres una sisena part no ho ha entès; el problema número cinc tres quartes parts diuen que sí l'han entès. També al cap d'un any se'ls ha observat si saben capturar totes les dades dels enunciats dels problemes i en la primera activitat han estat capaços de detectar-les totes les dues terceres parts; referent a la segona activitat, tres quartes parts les han capturat totes tres i l'altra quarta part se n'han deixat una; referent al tercer problema la meitat no ha capturat cap o només una de les cinc que hi ha; referents al quart problema les quatre cinquenes parts detecta les tres dades i la resta se'n deixa una dada de tres; en el cinquè problema dues terceres parts es deixen una de les tres dades. També se'ls pregunta si saben què han de trobar en els problemes i les respostes recollides han estat les correctes en les quatre primeres activitats però en la cinquena una quarta part no ho ha sabut.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cinc dels entrevistats creuen que abans d'escriure res, el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap; un d'ells afegeix que escriure pot ajudar. Tots els entrevistats estan d'acord que per ajudar a una bona resolució de problemes és positiu fer una representació clara de totes les dades que hi intervenen; així l'estructuren millor. En un principi, tots opinen que no n'hi ha prou amb una lectura ràpida de l'enunciat doncs podrien descuidar-se d'alguna dada important; per això insisteixen que a part d'una primera lectura per entendre, cal una segona lectura per aprofundir i seleccionar les dades.

Síntesi:

La majoria llegeix dos cops l'enunciat amb calma i anota les dades quan inicialment no entén el que se li demana. Llegeixen molt atentament i no tenen pressa perquè el que volen és entendre el problema perfectament. Volen aclarir totes les dades i entendre el problema abans de començar a resoldre'l. De fet, contempen la comprensió de l'enunciat com una tasca inicial i no final després d'haver trobat la solució.

Però la meitat del grup creu que per solucionar ràpidament un problema cal començar aviat i les dades que calen en la seva resolució s'han de buscar a l'enunciat a mesura que es necessitin. De totes maneres, la majoria entén els enunciats, el què passa i el que se'ls demana. Al cap d'un any encara es milloren els resultats.

La majoria és capaç de capturar totes les dades dels problemes, millorant en nombre d'alumnes que ho fan així un any més tard. La majoria contesta correctament i demostra que sap què ha de trobar augmentant el nombre d'alumnes al cap d'un any. La majoria és partidària que abans d'escriure res, el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap. Creuen que és positiu i ajuda a la correcta resolució d'un problema fer una representació clara de totes les dades. També insisteixen en una doble lectura dels enunciats, una per entendre'ls i l'altra per aprofundir i seleccionar les dades pertinents.

### **8.1.6 Comprensió de les hipòtesis inicials de la situació**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

A l'hora de començar, quan s'enfronten a un enunciat molt llarg no el llegeixen ràpidament ni sense ganes. És més, tres quartes parts si no entenen què es demana el llegeixen un altre cop amb més deteniment i prenent nota de totes les dades. També tres quartes parts dels estudiants abans de solucionar el problema confecciona un llistat amb totes les dades. La majoria prefereix anar més lent resolent el problema per tal d'entendre'l perfectament que acabar-lo ràpidament sense entendre'l en la seva totalitat. Tots convenen que és important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a solucionar-lo. Creuen que totes les dades de l'enunciat són importants sempre. Però la meitat creu que per solucionar un problema amb celeritat hom s'ha de posar a resoldre'l i les dades que falten les va buscant a l'enunciat.

En els tests les respostes analitzades han estat:

En el test es comprova si els alumnes són capaços de capturar totes les dades i a l'activitat número u dues terceres parts les agafen totes tres o com a molt se'n descuiden una; a l'activitat número dos com a molt una tercera part es descuida d'una dada d'un total de tres; quant a la tercera activitat quasi la meitat no ha dit cap de les cinc dades o només una; quant a la quarta activitat la majoria ha detectat les tres dades i uns pocs se

n'han deixat una; quant a la cinquena activitat les dues terceres parts han detectat les dues dades.

Al cap d'un any, se'ls torna a avaluar si capturen totes les dades dels enunciats obtenint que al primer problema dues terceres parts detecten totes les dades; al segon problema tres quartes parts les detecten totes tres i una quarta part se'n descuida una; quant al tercer problema la meitat del grup no ha detectat cap de les cinc o pot ser una; quant al quart problema quatre cinquenes parts detecta les tres dades i la resta se'n deixa una dada; quant al cinquè problema dues terceres parts es deixa una de les tres dades. També se'ls pregunta si estan tranquils en resoldre els problemes i les dues terceres parts responen que sí que ho estan en el cas del primer, del segon, del tercer i del cinquè problema; quant al quart problema poc més de la meitat estan tranquils; quant al sisè problema que ha presentat més dificultats una quarta part ha reconegut estar nerviosa. A més a més se'ls ha preguntat pel seu estat de concentració i majoritàriament diuen haver estat concentrats en resoldre el primer i el segon problema; en resoldre el tercer problema estan concentrats les tres quartes parts; quant al quart problema la meitat esta concentrada i quant al cinquè i sisè problema les dues terceres parts estan concentrades.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cinc dels entrevistats creuen que abans d'escriure res el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap, encara que un d'ells observa que escriure pot ajudar. Tots els entrevistats afirmen que per ajudar a una òptima resolució de problemes cal fer una representació clara de totes les dades. La meitat creu que depèn de l'estat d'ànim, paciència i perseverança s'entendrà o no el problema; encara que dos creuen la comprensió de l'enunciat és independent, i que l'únic que depèn és la seva resolució; un altre comenta que segons la capacitat de concentració de cadascun. Tots convenen que a l'hora de comprendre un enunciat els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten.

Síntesi:

Llegeixen els enunciats amb molta atenció. La majoria, si no entén inicialment el que es demana, se'ls torna a llegir amb més deteniment anotant totes les dades en una llista. De fet, diuen que abans de començar a solucionar un problema confeccionen un llistat amb totes les dades. Prefereixen entendre el problema perfectament abans que resoldre'l ràpidament. És més, tots consideren que és important entendre l'enunciat i aclarir les dades abans de començar a solucionar-lo. Però la meitat del grup és partidària, en cas de voler solucionar un problema ràpidament, d'anar buscant les dades que es necessiten a l'enunciat mentre s'està resolent. La majoria del grup és capaç de capturar totes les dades dels enunciats. Al cap d'un any encara es milloren les xifres dels que ho fan bé i normalment la majoria està tranquil·la i concentrada quan resol problemes. Creuen que abans d'escriure res al paper s'ha de tenir pensat i elaborat al cap. Fer una representació clara de les dades que intervenen creuen que afavoreix una correcta resolució. Afirmen que els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de comprendre un enunciat.

## 8.2 Anàlisi de la consciència sobre la importància que té comprendre bé un enunciat

Consisteix en concretar indicadors interpretables com a mecanismes d'influència educativa per part del professor relacionats amb la conscienciació de comprendre bé l'enunciat de la qüestió.

Indicador observat	Qüestionari	Test	Entrevista
Voluntat i perseverança en comprendre	37, 38, 39, 44, 45	IV.B.i.1.4, IV.B.i.1.5,i=1:6	B.a, B.d, B.e
Manca d'esforç per comprendre motivada per la comoditat que algú li ho expliqui	17, 18, 19, 20, 22, 27, 30		
Pressa per fer el problema en detriment de la seva comprensió	37, 40, 42, 43, 44, 46		B.b, B.e
Preocupació per entendre inicialment el problema abans de començar a resoldre'l	38, 39, 43, 44, 46		B.a, B.c, B.d, B.e

Quadre 8.2: Taula de la localització dels indicadors que fan referència a la consciència sobre la importància que té comprendre bé un enunciat.

### 8.2.1 Voluntat i perseverança en comprendre

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

La voluntat per comprendre es fa palesa en llegir un enunciat llarg i no llegir-lo ràpidament i sense ganes. La perseverança es manifesta en tornar a llegir un enunciat que no s'ha entès a la primera de manera més calmada i prenent nota de totes les dades (tres quartes parts). Tots confessen llegir amb molta atenció els enunciats. La comprensió de l'enunciat no troben que sigui una tasca que es pugui deixar per al final, després de trobar la solució. Creuen que totes les dades que dóna l'enunciat són sempre o quasi sempre importants.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Al cap d'un any se'ls pregunta si en fer uns problemes estan tranquils i quant als problemes primer, segon, tercer i cinquè dues terceres parts hi estan; quant al problema número quatre poc més de la meitat estan tranquils; quant al problema número sis que ha presentat moltes dificultats per ser resolta una quarta part reconeix haver estat nerviosa. També se'ls pregunta sobre el seu estat de concentració i majoritàriament estan concentrats en resoldre el primer i el segon problema; referent al tercer problema tres quartes parts estan concentrats; referent al quart problema la meitat està concentrada; quant al cinquè i sisè problema les dues terceres parts estan concentrades.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots els entrevistats creuen que s'ha de llegir molt bé l'enunciat i més d'un cop; quatre també insisteixen en la importància d'apuntar les dades del problema. Per ajudar a una

bona resolució de problemes tots creuen que és positiu fer una representació clara de totes les dades i que això ajuda a estructurar-lo. Tots opinen que cal fer una primera lectura per entendre el problema i una segona per seleccionar les dades, doncs amb una única lectura ràpida podrien descuidar-se d'alguna dada; una persona diu que si el problema no és difícil, sí que podria solucionar-se amb només una lectura.

Síntesi:

Diuen que llegeixen amb molta atenció els enunciats dels problemes, amb calma i amb ganes, encara que siguin llargs. La perseverança es manifesta quan la majoria diu que torna a llegir l'enunciat quan no l'ha entès a la primera i va anotant les dades. No troben que la comprensió de l'enunciat sigui una tasca a dur a terme després de trobar la solució. La majoria està tranquil·la i concentrada quan resol problemes. Creuen que s'ha de llegir molt bé l'enunciat, almenys dues vegades, una primera per entendre el problema i una segona per seleccionar les dades. Tal com contesta l'alumne 27A en l'entrevista a la pregunta B.a a l'ANNEX D.6.1 *“Doncs el que els hi diria (als meus alumnes, en cas de ser professor) seria és que no comencessin a operar fins que no hagin entès l'enunciat. I un cop entès, seleccionen les dades que ells creuen oportunes, i després a partir d'aquestes dades desenvolupen una fórmula per a poder trobar la resposta”*.

### **8.2.2 Manca d'esforç per comprendre motivada per la comoditat que algú li ho expliqui**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts dels estudiants confessen demanar ajut al professor de matemàtiques quan no entenen alguna cosa. També tres quartes parts dels estudiants demanen ajut als companys quan no entenen alguna cosa. Dues terceres parts del grup no tenen professor particular que els resolgui els dubtes. La meitat del grup manifesta tenir germans o pares que els resolen els dubtes. Poc més de la meitat del grup confessa que el treball en grup li surt millor que el treball individual. Només una tercera part del grup afirma que els seus companys li expliquen com fer les coses. Però no es copien la feina dels altres.

Síntesi:

La majoria demana ajut al professor de matemàtiques o a companys quan no entén alguna cosa, però normalment no es copien la feina. Una tercera part del grup té professor particular que li resol els dubtes i la meitat del grup declara tenir pares o germans que l'ajuden amb possibles dubtes de matemàtiques. Per altra banda, la meitat diu que li surt millor el treball en grup que no pas l'individual.

### **8.2.3 Pressa per fer el problema en detriment de la seva comprensió**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant la distinció.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Diuen que no llegeixen un enunciat llarg amb presses ni sense ganes. Tres quartes parts del grup diu confeccionar una llista amb totes les dades del problema abans de solucionar el problema. El grup prefereix anar més lent en resoldre un problema per entendre'l perfectament que anar més ràpidament i no acabar-ho d'entendre. Tots creuen que és important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a

solucionar-lo. No creuen que la comprensió de l'enunciat sigui una tasca ha fer al final, després d'haver solucionat el problema. Malgrat això, creuen que per fer ràpidament un problema s'ha de començar a resoldre i les dades que vagin veient que falten buscar-les a l'enunciat.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cap dels entrevistats creu que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema ja l'entén; dos insisteixen que cal llegir almenys dues vegades el problema; dos comenten que aquest estudiant hipotètic no ha de ser ràpid i bo en tot. Tots els entrevistats opinen que no n'hi ha prou amb una lectura ràpida per por a deixar-se alguna dada; una lectura per entendre i una altra per anotar totes les dades; un d'ells opina que si el problema no és difícil, podria sobrar amb una lectura ràpida.

Síntesi:

El grup prefereix entendre el problema perfectament abans que resoldre'l ràpidament sense acabar d'entendre'l. Tots creuen que abans de començar-lo a resoldre cal entendre l'enunciat i aclarir totes les dades. Els enunciats llargs no els llegeixen amb presses i la majoria fa un llistat amb les dades que hi intervenen abans de solucionar-lo. No creuen que la comprensió de l'enunciat s'hagi de fer al final. Però la meitat creu que per resoldre un problema ràpidament cal posar-s'hi aviat i les dades que van faltant es van buscant a l'enunciat. No creuen que un bon estudiant de matemàtiques, de seguida que llegeix un enunciat ja l'entén. Opinen que una lectura és insuficient; en calen dues: una per entendre i l'altra per seleccionar les dades.

#### **8.2.4 Preocupació per entendre inicialment el problema abans de començar a resoldre'l**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant la distinció.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Quan llegeixen un enunciat i no l'entenen el primer cop, diuen que el tornen a llegir més pausadament i anotant totes les dades les tres quartes parts del grup. Però tots són els que es llegeixen amb molta atenció els enunciats dels problemes. També creuen que és important abans de començar a resoldre el problema entendre'l i aclarir totes les dades. No estan d'acord que la comprensió de l'enunciat sigui una tasca a desenvolupar en trobar la solució. Però creuen que per poder anar ràpidament en solucionar un problema s'hagi de començar a resoldre i les dades que faltin, buscar-les a l'enunciat.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots els entrevistats estan d'acord que s'ha de llegir molt l'enunciat; quatre insisteixen en la importància d'apuntar els dades del problema. Abans d'escriure cinc entrevistats creuen que el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap; un d'ells afegeix que escriure pot ser de gran ajuda. Tots creuen que és positiu fer una representació clara de totes les dades que hi intervenen per afavorir a l'estructuració de les idees. En un principi, tots creuen que no basta amb una lectura ràpida per poder solucionar un problema; insisteixen en la necessitat d'una primera lectura per entendre i una segona per seleccionar les dades.

Síntesi:



La majoria, quan no entén l'enunciat a la primera, el que fa és tornar a llegir-se'l més calmadament i prenent nota en una llista de totes les dades. Tots es llegeixen molt atentament els enunciats perquè creuen que és important abans de resoldre'l entendre'l i aclarir totes les dades. No creuen que la comprensió de l'enunciat sigui una tasca a desenvolupar al final després de trobar una solució. Però la meitat creu que per solucionar un problema ràpidament s'ha de començar a resoldre aviat i les dades que falten es van buscant a l'enunciat a mesura que calgui. Tots creuen que s'ha de llegir molt bé, i que no és suficient amb una lectura ràpida per poder solucionar el problema; insisteixen en una primera lectura per entendre i una segona per seleccionar les dades. Creuen que, abans d'escriure res, s'ha de tenir pensat el problema i elaborat al cap. Creuen que és positiu fer una representació clara de totes les dades.

### 8.3 Anàlisi de la revisió de la solució trobada i la seva explicació

S'ha d'identificar indicadors que constatin que l'estudiant es preocupa per la solució trobada.

Indicador observat	Qüestionari	Test	Entrevista
Costum de revisar al final la solució	29, 31, 47, 48, 49, 52	IV.A.i.1, IV.A.i.3, IV.B.i.2, IV.B.i.4, i=1:6	A.o, A.q, C.c, C.e, C.f, C.h
Observació de la variació de la solució quan es canvien les dades o les condicions	50, 51		C.g
Pressió per la pressa per trobar una solució i acabar el problema	6.1, 41, 48, 53, 54	IV.A.i.3, i=1:6	C.c, C.d, C.e, C.f, C.i
Disconformitat amb la pròpia solució obtinguda mirant d'entendre-la fent comprovacions o resolucions diferents	47, 48, 49, 50, 51	IV.B.i.4, i=1:6	C.f
Generalització de la solució per aplicar-la en altres ocasions	6.3, 6.8, 47		C.f
Convenciment de la correcció de la pròpia solució trobada	49	IV.A.i.4, IV.B.i.5, i=1:6	C.g, C.h

Quadre 8.3: Taula de la localització dels indicadors que fan referència a la revisió de la solució trobada i la seva explicació.

#### 8.3.1 Costum de revisar al final la solució

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts del grup diuen comprovar els seus resultats amb els dels companys. En el cas de copiar la feina d'altres companys intenten entendre-la (de fet diuen que no es copien la feina, en general). Havent solucionat un problema es pregunten el sentit de la resposta. Dues tercers parts del grup dediquen prou temps a comprovar la solució. A l'igual que dues tercers parts també, creuen que donat que els problemes només tenen una resposta, si l'ha solucionat, segurament ha d'estar bé. Però tots creuen que és important revisar la solució obtinguda. El problema és que sovint entenen per revisar la solució simplement el comprovar si han obtingut el mateix resultat que el dels seus companys.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als alumnes si al final de solucionar els problemes s'han plantejat si la resposta té sentit i la resposta ha estat afirmativa en el cas dels problemes primer, tercer i cinquè; poc més de la meitat s'ho ha plantejat en el cas dels problemes quart i sisè; en el cas del segon problema tres quartes parts són els que s'han plantejat el sentit de la resposta. També es pregunta als alumnes si creuen haver-li dedicat el temps necessari

per veure si la resposta era la correcta i en el primer i tercer problema asseguruen que sí; poc més de la meitat ho asseguruen en el segon problema; referent al quart problema les dues terceres parts han dit que sí han dedicat prou temps; quant al cinquè problema són cinc sisenes parts els que ho afirmen; quant al sisè problema poc menys de la meitat reconeix haver dedicat prou temps.

Al cap d'un any es pregunta als estudiants si s'han plantejat al final si la seva resposta té sentit i cinc sisenes parts diuen que sí en el problema número u; en el problema dos la majoria afirma que s'ho han plantejat; en els problemes tres, cinc i sis són tres quartes parts les que manifesten que sí; en el problema quatre dues terceres parts s'han plantejat el sentit de la seva resposta. També se'ls pregunta que després d'haver obtingut una solució què fan i les respostes en el problema u i sis han estat que res més les dues terceres parts del grup i la resta ha comprovat la solució; referent al problema dos les dues terceres parts han comprovat la solució i la resta s'ha dividit en no fer res més i després uns pocs en buscar altres vies de solució; referent al tercer problema quasi la meitat ha comprovat la solució i una tercera part ha buscat altres camins i els altres nou estudiants no han fet res més; referent al quart problema gairebé la meitat no ha fet res més i l'altra ha comprovat la solució; referent al cinquè problema més de la meitat ha comprovat la solució i els altres no han fet res més i pocs han buscat altres camins.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots coincideixen que no sempre un bon estudiant de matemàtiques habitualment resol els problemes molt ràpid; depèn del problema i, com diuen dos, de la seva atenció prestada. Per molt intel·ligent que sigui un alumne, pot ser que alguna part no la domini o que es quedi bloquejat per posar-se nerviós. Tots estan conformes que per entendre la solució els alumnes també s'han d'esforçar. Tots convenen que no és més important acabar ràpidament el problema trobant una solució que entendre perfectament què vol dir la solució trobada per tal de poder-la aplicar en altres ocasions o per poder evitar errors. Cinc alumnes creuen que sí que és necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda per revisar la resposta i comprovar una coherència amb allò que es demana. Quatre dels entrevistats creuen que depèn dels problemes el que acostumin a tenir una única solució correcta; dos creuen contràriament que sí que en tenen una única encara que existeixin diferents maneres d'arribar-hi.

Síntesi:

Tots creuen important revisar la solució. La majoria comprova els seus resultats amb els dels seus companys i es pregunta el sentit de la resposta trobada. Només les dues terceres parts del grup diuen dedicar prou temps per comprovar la solució i creuen que els problemes només tenen una solució i que si han arribat a la solució del problema segurament estarà bé.

De totes maneres, creuen que no és tan important acabar ràpidament un problema com entendre perfectament què vol dir la solució trobada per aplicar-la en altres ocasions o poder evitar errors i trobar una certa coherència. S'han plantejat si la resposta té sentit la majoria en quatre problemes i un any més tard en tots els sis problemes.

La majoria declara haver dedicat prou temps a la revisió, però al cap d'un any se'ls pregunta què fan després d'haver solucionat un problema i només la meitat revisa la solució. Coincideixen a dir que un bon estudiant de matemàtiques no sempre soluciona ràpidament i bé els problemes de matemàtiques. Tal com contesta l'alumne 14B en

l'entrevista a la pregunta A.q a l'ANNEX D.6.2 "*Crec que no perquè per molt que sigui intel·ligent, si no ho sap, pues segurament ha de tenir dificultats i quedar-se bloquejat també, no ho sé*".

### **8.3.2 Observació de la variació de la solució quan es canvien les dades o les condicions**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts del grup diu observar les variacions que experimenta la solució quan es modifiquen les dades originals. Però la meitat diu que per comprovar la resposta suposa un resultat diferent a la solució trobada i mirant enrere, persegueix alguna contradicció o cosa impossible.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Només dues persones afirmen que cal fer una comprovació de la solució quan s'ha acabat; la resta creu que no cal fer res més, ni buscar altres camins ni variar les condicions del problema.

Síntesi:

La majoria diu que observa les variacions que experimenta la solució quan es modifiquen les dades originals. La meitat del grup diu que per comprovar la resposta suposa un resultat diferent a la solució trobada i mirant enrere persegueix alguna contradicció.

### **8.3.3 Pressió per la pressa per trobar una solució i acabar el problema**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Després de fer matemàtiques, tres quartes parts del grup se senten satisfets si han resolt molts exercicis. En general creuen que els més llestos acaben molt ràpidament en resoldre els problemes de matemàtiques. Dues terceres parts afirma dedicar prou temps a comprovar la solució. No és cert que no revisin la feina per no voler saber si s'han equivocat. La nota que posarien a un alumne que després d'haver fet tots els càlculs bé s'equivoqués al final donant una resposta impossible és majoritàriament un notable, només un cas li posaria un suspens.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als alumnes si han dedicat el temps necessari per veure si la resposta era correcta i en el primer i tercer problema asseguren que sí; referent al segon problema poc més de la meitat; referent al quart problema les dues terceres parts manifesten que sí han dedicat prou temps; quant al cinquè problema cinc sisenes parts diuen que sí; quant al problema número sis poc més de la meitat asseguren haver-hi dedicat prou temps per veure si la resposta és correcta.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots estan d'acord que per entendre la solució d'un problema no només s'ha d'esforçar el professor, sinó que l'alumne també ha de fer-ho. Ningú no creu que el més important

de resoldre un problema sigui l'obtenció del resultat final; el més important per a ells és el procés tot relativitzant els errors de càlcul. Ningú està d'acord tampoc que sigui més important acabar ràpidament el problema, trobant una solució, que entendre perfectament el significat de la solució trobada, o bé per aplicar-la més endavant o bé per evitar errors. Cinc alumnes creuen que sí que és necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda i comprovar una coherència amb allò que es demana. Cinc alumnes comparteixen la idea que és el raonament correcte el que de veritat conta, encara que un afegeixi que és una satisfacció el que el resultat final sigui el correcte.

Síntesi:

Creuen que els més llestos acaben molt ràpidament de resoldre els problemes de matemàtiques. La majoria se sent satisfeta si han resolt molts exercicis quan s'han posat a fer matemàtiques. Les dues terceres parts del grup afirmen dedicar prou temps per comprovar la solució. Creuen que per entendre la solució els alumnes s'han d'esforçar, que no només ha de ser el professor explicant-la. No creuen que el més important de resoldre un problema sigui obtenir la resposta final, sinó que és el procés relativitzant els errors de càlcul. De fet, la nota que li posaria la majoria a un problema amb els càlculs ben resolts però que dóna una resposta impossible i incoherent seria mínim d'un notable. No creuen que acabar ràpidament trobant una solució sigui prioritari a entendre perfectament el significat de la solució trobada. Tal com contesta l'alumne 25A en l'entrevista a la pregunta C.e a l'ANNEX D.6.3: *“No, és més coherent entendre la solució que s'ha trobat. Perquè si una persona acaba ràpidament el problema però no l'entén, és com si no l'hagués fet. És lo que jo penso”*.

### **8.3.4 Disconformitat amb la pròpia solució obtinguda mirant d'entendre-la fent comprovacions o resolucions diferents**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

El sentit de la resposta un cop haver solucionat un problema se la pregunten la majoria. I unes dues terceres parts li dediquen prou temps a la seva comprovació. També dues terceres parts creuen que el fet d'arribar a una solució ja és haver trobat la solució correcta doncs els problemes en tenen només una. Tres quartes parts observen les variacions de la solució obtinguda en modificar les dades inicials. La meitat suposa un resultat diferent a la solució trobada i persegueix alguna contradicció en tirar cap enrere a manera de comprovació.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Al cap d'un any es pregunta als estudiants què fan després d'haver solucionat sis problemes i quant al primer i al sisè problema les dues terceres parts han dit que res més i la resta ha comprovat la solució; quant al segon problema les dues terceres parts han comprovat la solució i la resta s'ha dividit en no fer res més i uns pocs en buscar altres vies de solucionar el problema; quant al tercer problema, quasi la meitat ha comprovat la solució i una tercera part ha buscat altres camins i els altres nou no han fet res més; referent al quart problema gairebé la meitat no ha fet res més i l'altra ha comprovat la solució; referent la cinquè problema més de la meitat ha comprovat la solució i els altres no han fet res més i uns pocs han buscat altres camins.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cinc alumnes creuen que resulta necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda per revisar-la i comprovar-hi una certa coherència amb allò que es demana.

Síntesi:

La majoria es pregunta el sentit de la solució trobada en quasi tots els problemes, i al cap d'un any en tots. Els dos terços del grup declara dedicar prou temps a la comprovació, però els dos terços del grup creu que els problemes tenen una única solució i el fet d'haver-hi arribat ja és garantia de correcció. La majoria observa les variacions de la solució obtinguda en modificar les dades inicials. I la meitat suposa un resultat diferent a la solució trobada i persegueix alguna contradicció en tirar cap enrere a manera de comprovació. Després d'haver trobat una solució, només la meitat dels alumnes la comprova.

### **8.3.5 Generalització de la solució per aplicar-la en altres ocasions**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

La meitat del grup després de fer matemàtiques se sent satisfeta si s'ha adonat que tenia idees o conceptes equivocats. La majoria es troba satisfeta si ha descobert una regla que a més de resoldre el problema, li servirà en un futur. També la majoria diu que després d'haver solucionat un problema es pregunta el sentit de la resposta.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cinc alumnes creuen que resulta necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda per revisar-la i comprovar-hi una certa coherència amb allò que es demana.

Síntesi:

La meitat del grup després de fer matemàtiques se sent satisfeta si s'ha adonat que tenia idees o conceptes equivocats. La majoria se sent satisfeta si ha descobert una regla que, a més de resoldre el problema, li servirà en el futur. La majoria diu que, després d'haver solucionat un problema, es pregunta el sentit de la resposta en quasi tots els problemes, i al cap d'un any és en tots que s'ho plantegen.

### **8.3.6 Convenciment de la correcció de la pròpia solució trobada**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Dues terceres parts del grup estudiat creu que el fet d'arribar a una solució d'un problema ja és garantia que estigui correcta donat que els problemes tenen una única solució.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Als alumnes se'ls pregunta perquè creuen que la solució que han trobat en sis problemes és la correcta i quant al primer problema més de la meitat diuen haver-ho comprovat i una quarta part diu que no perquè ho ha trobat lògic; quant al segon problema dues terceres parts no contesten o no saben si està bé i una cinquena part contesta que no ho

ha comprovat perquè ho veuen lògic; quant al tercer problema la meitat del grup afirma que com troba lògic el resultat no ho ha comprovat; quant al quart problema la meitat no ho sap si ho té bé o no contesta i la quarta part assegura haver-ho comprovat; quant al cinquè problema gairebé la meitat diu haver-ho comprovat i gairebé la tercera part no sap si ho té bé o no contesta; quant al sisè problema la meitat no sap si ho té bé o no contesta i una tercera part contesta que ho té malament o que no l'ha fet.

Al cap d'un any es torna a fer la mateixa pregunta sobre els mateixos sis problemes i quant al primer problema gairebé la meitat no sap si ho té bé o no contesta el perquè creu que la seva solució és correcta, i una quarta part afirma que no ho ha comprovat perquè ho troba lògic; quant al segon problema més de la tercera part ho ha comprovat i una altra tercera part confessa no saber si ho té bé o no contesta; quant al tercer problema una tercera part no sap si ho té bé o no acaba de contestar i una tercera part diu trobar-ho lògic i per això no ho comprova i només una setena part ho comprova; referent al quart problema una tercera part afirma haver comprovat la solució i una tercera part diu no saber si ho té bé o no contesta; referent al cinquè problema la meitat afirma haver-ho comprovat; referent al sisè problema la meitat diu no saber si està bé o no contesta, i una quarta part diu haver-ho fet malament o que no creu tenir-ho bé i l'altra quarta part diu que ho ha comprovat.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Només dues persones afirmen que cal fer una comprovació de la solució quan s'ha acabat de resoldre un problema; la resta considera que no és necessari fer res més. Quatre dels entrevistats creuen que depèn dels problemes el que tinguin una única solució o no; però hi ha dos que creuen de manera diferent creient que el que és diferent és la manera de solucionar el problema.

Síntesi:

Les dues terceres parts del grup creu que el fet d'arribar a una solució en un problema ja és garantia que estigui bé doncs els problemes acostumen a tenir una única solució. Una minoria pensa que la seva solució és correcta perquè l'ha comprovat amb la d'un company. Aquesta minoria supera al nombre d'alumnes que creuen que tenen la seva solució correcta per ser lògica.

## 8.4 Anàlisi de la consciència sobre la revisió de la solució i la seva explicació

S'ha d'identificar indicadors interpretables com a mecanismes d'influència educativa per part del professor relacionats amb la conscienciació de la revisió de la solució i tractin d'explicar-la.

Indicador observat	Qüestionari	Test	Entrevista
Revisió i conscienciació dels propis errors	6.3, 6.4, 6.5, 53	IV.A.i.3, IV.B.i.2,i=1:6	C.a, C.g
Preocupació per una resolució correcta	6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 29, 47, 48, 52, 53, 54	IV.A.i.1, IV.B.i.2,i=1:6	C.a, C.b, C.c
Integració de la revisió de solucions com a part important de la resolució de problemes	48, 52, 53, 54	IV.A.i.1, IV.A.i.3, IV.B.i.4, i=1:6	C.a, C.f, C.h, C.j
Costum de revisar el problema per detectar i aprendre dels errors	6.2, 6.3, 6.5, 48		C.f, C.g
Pressió per la pressa en revisar la solució d'un problema	41, 48	IV.A.i.3, i=1:6	C.e
Creença que fer matemàtiques és resoldre molts problemes relativitzant el que la solució estigui bé	6.1, 54	IV.A.i.1, IV.B.i.4, i=1:6	A.k, C.e

Quadre 8.4: Taula de la localització dels indicadors que fan referència a la consciència sobre la revisió de la solució i la seva explicació.

### 8.4.1 Revisió i conscienciació dels propis errors

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Després de fer matemàtiques, si s'han adonat que tenien idees o conceptes equivocats la meitat del grup se sent satisfeta. Tots ells se senten satisfets si els càlculs fets els tenen correctes. I també se senten satisfets si després que inicialment no sabessin resoldre el problema, després de pensar i treballar, han sabut resoldre'l. Majoritàriament no deixen de revisar-lo per por a veure que s'hagin equivocat.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als estudiants si han dedicat el temps necessari per veure si la resposta és la correcta en sis problemes i en el primer i tercer asseguren que sí; referent al segon problema afirmen pocs més de la meitat que li han dedicat prou temps; referent al quart problema les dues terceres parts han dit que sí han estat el temps necessari; referent al cinquè problema les cinc sisenes parts diuen que li han dedicat el temps necessari; quant al sisè problema pocs menys de la meitat han dit que sí li han dedicat el temps necessari.



Al cap d'un any se'ls pregunta si s'han plantejat al final si la resposta dels mateixos sis problemes té sentit i quant al problema u, cinc sisens diuen que sí; quant al problema dos la majoria afirma que s'ha plantejat el sentit de la seva resposta; quant al problema tres, cinc i sis són tres quartes parts les que s'ho han plantejat; quant al problema quatre dues terceres parts són les que sí s'han plantejat el sentit de la resposta.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots els entrevistats indicarien a un grup d'alumnes seus hipotètics que revisessin la pròpia solució quan haguessin resolt el problema. Però només dues persones afirmen que cal fer una comprovació de la solució en acabar; la resta creu que no és necessari fer res més.

Síntesi:

La meitat se sent satisfeta després d'haver fet matemàtiques si s'han adonat que tenien idees equivocades. Tots se senten satisfets si els càlculs fets estan bé i també si després de pensar, treballar i revisar han sabut resoldre un problema que els presentava dificultats. Declaren dedicar prou temps a la revisió. El sentit de la solució trobada se'l planteja la majoria en quasi tots els problemes proposats i al cap d'un any en tots. Si fossin professors indicarien als alumnes que revisessin la solució en acabar. Tal com contesta l'alumne 15B en l'entrevista a la pregunta C.a a l'ANNEX D.6.4 "*Que ho tornessin a fer i a veure si els hi dóna el mateix, que ho repassessin*". Però la majoria creu que no cal fer res més en acabar de resoldre un problema; això indica que integren la idea de revisar la solució com a part del procés de la resolució de problemes, doncs la majoria declarava dedicar prou temps a la revisió.

#### **8.4.2 Preocupació per una resolució correcta**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

La meitat del grup se sent satisfeta si se n'adona d'idees o conceptes equivocats. Tots se senten satisfets si han sabut fer els càlculs correctament. La majoria se sent complaguda si després que no els sortís el problema, amb cert esforç i treball han aconseguit solucionar-lo. També estan contents si han sabut trobar un camí de resolució del problema. Tres quartes parts del grup comprova els seus resultats amb els dels seus companys. Havent solucionat un problema, la majoria diu que es pregunta el sentit de la resposta. Però només dues terceres parts dediquen prou temps a comprovar la solució. Creuen que és important revisar la solució obtinguda. I no prescindeixen de revisar la solució per no saber si s'han equivocat. La majoria qualifica per sobre del set un problema solucionat que té els càlculs perfectes encara que la solució sigui absurda.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als alumnes si s'han plantejat al final si la resposta té sentit dels sis problemes i quant als problemes número u, tres i cinc ha estat afirmativa; quant al problema dos les tres quartes parts han dit que sí; quant al problema quatre i sis poc més de la meitat ho ha afirmat.

Al cap d'un any es pregunta el mateix sobre els mateixos problemes obtenint que el problema u cinc sisens diuen que sí s'ho han plantejat; referent al problema dos la

majoria diu que s'ha plantejat el sentit de la resposta; referent al problema tres, cinc i sis les tres quartes parts afirmen plantejar-s'ho; referent al problema quatre les dues terceres parts sí s'han preguntat pel sentit de la resposta.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Si fossin professors els entrevistats donarien la mateixa indicació als seus alumnes quan haguessin acabat de solucionar un problema: revisar la solució obtinguda. Cinc dels entrevistats han contestat que sí s'ha de discutir la solució quan tots haguessin acabat; i tres afegeixen que la motivació és una solució diferent. Tots afirmen que per entendre la solució no basta que el professor s'esforci a explicar-la; cal que l'alumne també s'hi esforci.

Síntesi:

Mig grup se sent satisfet si s'adona que té idees mal apreses. Tots se senten bé si han sabut fer bé els càlculs i també si, amb esforç i dedicació, han sabut resoldre un problema que els costava; se senten satisfets si han estat capaços de trobar un camí que els ha portat a la solució. La majoria comprova els seus resultats amb els dels seus companys i es pregunta el sentit de la resposta en acabar. Creuen que els alumnes s'han d'esforçar per entendre la solució tant o més que el professor en explicar-la. Dos terços del grup dedica prou temps a comprovar la solució, encara que són tots els que creuen que és important revisar la solució obtinguda. Si fossin professors indicarien als seus alumnes que revisessin la solució. La majoria qualifica amb un notable o més una resolució perfecta en càlculs que doni com a resposta un resultat absurd. Això indica que no donen prou importància a aquest aspecte.

### **8.4.3 Integració de la revisió de solucions com a part important de la resolució de problemes**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Una tercera part del grup no dedica prou temps a comprovar la solució. Encara que el grup creu que és important revisar la solució obtinguda. No és cert que no revisin la solució per no saber si s'han equivocat. Si els càlculs d'un problema són tots correctes però la solució és absurda, la nota que li posaria la majoria del grup seria de set o més.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta si s'han plantejat en acabar el sentit de la resposta i els resultats són quant al primer, tercer i cinquè problema afirmativa; quant al segon problema tres quartes parts afirmen que sí s'ho han plantejat; quant al problema quatre i sis poc més de la meitat ho ha afirmat. També se'ls pregunta si han dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta i referent al primer i tercer problema asseguren que sí; referent al segon problema poc més de la meitat; referent al quart problema les dues terceres parts han manifestat que sí; referent al cinquè problema els cinc sisens asseguren que han dedicat prou temps; referent al sisè problema pocs menys de la meitat han dit que sí li han dedicat temps.

Al cap d'un any se'ls pregunta què fan en acabar de solucionar els sis problemes i referent al primer i al sisè problema dues terceres parts han confessat que res més i la resta ha comprovat la solució; referent al segon problema dues terceres parts ha

comprovat la solució i la resta s'ha dividit entre no fer res més i altres en buscar altres vies per solucionar el problema; referent al tercer problema quasi la meitat ha comprovat la solució, una tercera part ha buscat altres camins i altres nou no han fet res més; referent al quart problema gairebé la meitat no ha fet res més i l'altra ha comprovat la solució; referent al cinquè problema més de la meitat ha comprovat la solució i els altres no han fet res més i pocs han buscat altres camins.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

La indicació donada per tots en acabar un problema és que es revisi la solució trobada. Cinc alumnes entrevistats creuen que és necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda per revisar-la i comprovar la seva coherència amb allò que es demana. Quatre dels entrevistats creuen que no tots els problemes tenen una única solució, depèn del tipus; però els altres dos creuen que el que és diferent és la manera d'arribar a la solució. Cinc persones també han contestat que no troben que un bon estudiant de matemàtiques de seguida arribi a la solució correcta i de manera directa.

Síntesi:

Encara que el grup creu que és important revisar la solució, una tercera part del grup no li dedica prou temps. La majoria es planteja el sentit de la resposta que ha obtingut en quatre dels sis problemes proposats, però al cap d'un any s'ho plantegen en tots sis problemes. Després d'haver trobat la solució en els problemes, només la meitat, en acabar comprova la solució. No obstant, si fossin professors donarien la indicació següent als alumnes: reviseu la solució per comprovar la coherència i evitar errors. Per altra banda, la majoria qualificaria un problema amb un notable o més si els càlculs estiguessin bé però la resposta fos absurda.

#### **8.4.4 Costum de revisar el problema per detectar i aprendre dels errors**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Dues terceres parts se senten satisfetes si després de fer matemàtiques se n'adonen de quines coses no dominen. La meitat se sent satisfeta si s'ha adonat que tenia idees o conceptes equivocats. En general se senten satisfets si després de pensar i treballar han estat capaços de superar la dificultat de no saber resoldre el problema. Les dues terceres parts del grup confessa dedicar-li prou temps a la comprovació de la solució.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cinc alumnes dels entrevistats creuen que és necessari trobar el sentit de la resposta trobada per revisió i certificació d'una coherència amb l'enunciat inicial. Dues persones creuen que en acabar de resoldre un problema cal fer una comprovació de la solució; però la resta no ho creu necessari, ni tampoc buscar altres camins ni variar les condicions del problema.

Síntesi:

Dos terços del grup se senten satisfets si després de fer matemàtiques s'adonen de quines coses no dominen. La meitat se sent satisfeta si s'ha adonat que tenia idees errònies. La majoria se sent complaguda si amb l'esforç ha aconseguit resoldre un problema que inicialment li costava. No obstant, una tercera part no dedica prou temps a la revisió de la solució.

#### **8.4.5 Pressió per la pressa en revisar la solució d'un problema**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Creuen que els més llestos acaben molt ràpidament amb la resolució dels problemes de matemàtiques. Però una tercera part reconeix que no dedica el temps necessari per comprovar la solució.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als estudiants si han dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta i referent al primer problema i al tercer asseguren que sí; referent al segon problema pocs més de la meitat li dediquen suficient temps; referent al quart problema les dues terceres parts han manifestat que sí li dediquen prou temps; referent al cinquè problema els cinc sisens es preocupen per veure si la resposta és correcta; referent al sisè problema pocs menys de la meitat han dit que sí hi estan prou temps en verificar la seva resposta.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cap dels entrevistats creu que sigui més important acabar ràpidament el problema trobant una solució que entendre perfectament el significat de la solució trobada; o bé per evitar errors o bé per poder aplicar-la en altres ocasions.

Síntesi:

Creuen que els més llestos acaben més ràpidament els problemes de matemàtiques. Però ningú creu que sigui més important acabar ràpidament un problema trobant una solució que entendre perfectament el significat de la solució trobada. Tal com contesta l'alumne 25A en l'entrevista a la pregunta C.e a l'ANNEX D.6.3 *"No, és més coherent entendre la solució que s'ha trobat. Perquè si una persona acaba ràpidament el problema però no l'entén, és com si no l'hagués fet. És lo que jo penso"*. De totes maneres, una tercera part no dedica prou temps a la revisió de la solució.

#### **8.4.6 Creença que fer matemàtiques és resoldre molts problemes relativitzant el que la solució estigui bé**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts del grup se senten satisfetes després de fer matemàtiques si han estat capaces de resoldre molts problemes. Però la majoria qualificaria amb una nota superior o igual al notable un problema que tingués els càlculs perfectes però un resultat impossible.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als alumnes si s'han plantejat al final si la resposta té sentit i quant al problema u, tres i cinc la resposta ha estat afirmativa; quant al problema dos, tres quartes parts s'han plantejat el sentit de la resposta; quant al problema quatre i sis poc més de la meitat ho ha afirmat.

Al cap d'un any se'ls pregunta què fan després d'haver trobat la solució en sis problemes diferents i referent al problema u i sis dues terceres parts han dit que res més i la resta ha comprovat la solució; referent al problema dos dues terceres parts han comprovat la solució i la resta s'ha dividit en no fer res més i uns pocs en buscar altres camins; referent al problema tres quasi la meitat ha comprovat la solució i una tercera part ha buscat altres vies per solucionar el problema i nou no han fet res més; referent al problema quatre gairebé la meitat no ha fet res més i l'altra diu que ha comprovat la solució; referent al cinquè problema més de la meitat ha comprovat la solució i els altres no han fet res més, i uns pocs han buscat altres camins.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Les matemàtiques per a cinc dels entrevistats són raonaments i resolució de problemes abans que mètodes i càlculs. Ningú creu que s'hagin d'acabar ràpidament els problemes de manera que no s'acabin d'entendre encara que es trobin solucions; creuen que és necessari entendre la solució per poder-la aplicar en posteriors ocasions i si més no, a manera de revisió.

Síntesi:

La majoria se sent satisfeta després d'haver fet matemàtiques si ha estat capaç de resoldre molts problemes. La majoria s'ha plantejat si la resposta té sentit en quasi tots els problemes, però un any més tard ja s'ho plantegen en tots. La meitat del grup comprova la solució en acabar de solucionar uns problemes proposats. Ningú creu que s'hagi d'acabar de solucionar un problema ràpidament sense acabar d'entendre'l; creuen que la solució s'ha d'entendre per poder aplicar-la en ocasions posteriors. La majoria donaria la qualificació de notable o més a un problema que estigués ben solucionat quant a càlculs però que donés una resposta absurda i gens coherent.

## 8.5 Anàlisi de les actituds quan resolen problemes estàndard o no estàndard

S'ha de descriure i explicar el que succeeix en l'activitat d'ensenyament i aprenentatge quan es resolen els enigmes o qüestions del quadern elaborat.

Indicador observat	Qüestionari	Test	Entrevista
Gust per les matemàtiques	1.1, 1.4, 1.7, 14, 16		A.a, A.c, A.d, A.g, A.l, A.m
Capacitat per fer volar la imaginació	1.5, 1.8, 6.6	IV.B.i.1.2, i=1:6	A.j, A.k, A.n
Capacitat de treball individual	1.2, 1.3, 6.6, 6.7, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 24, 25, 26, 27	IV.B.i.1.5, i=1:6	C.c
Actitud receptiva davant solucions o opinions dels altres	18, 22, 29, 49		C.b
Voluntat per resoldre el problema ràpid	42, 46	IV.A.i.3, i=1:6	A.o, A.q, B.b, B.e, C.e, C.j
Actitud receptiva i atenta amb les dades	38, 40, 43	I.A.i.3, I.A.i.4, I.B.i.5, I.B.i.6, i=1:5	B.b, B.e
Voluntat d'entendre la situació fins al darrer detall	37, 38, 39, 40, 42, 47, 48, 52, 53	IV.A.i.1, IV.A.i.3, IV.B.i.2, IV.B.i.4, i=1:6	B.e, C.c, C.e, C.f
Gust pels reptes	1.3, 1.4, 6.5, 6.7		A.d, A.h, A.i
Resistència a l'abandó en front una dificultat demanant pistes, ajut...	6.5, 18, 19, 20, 27, 30, 37		A.d, A.h
Caràcters reflexius	6.2, 6.3, 6.8, 42, 46, 47	I.A.i.4, I.B.i.6, i=1:5, IV.A.j.4, IV.B.j.2, IV.B.j.4, j=1:6	B.a, B.b, B.c, B.d, B.e, C.a, C.e, C.f
Actitud receptiva per aprendre dels propis errors	6.2, 6.3, 53	IV.A.i.3, i=1:6	C.b
Aspectes que consideren més importants	6.i, i=1:8, 36, 43, 52, 54		A.f, B.a, C.a, C.d, C.e
La importància del sentit comú, de la intuïció o de la sort en la resolució de problemes		IV.B.i.1.2, IV.B.i.1.3, i=1:6	A.o, A.p, A.r, B.b, C.j
La influència de l'estat anímic, paciència, perseverança o autoconfiança en la resolució de problemes		IV.B.i.1.4, IV.B.i.1.5, i=1:6	A.s, A.t, B.f, B.g

Quadre 8.6: Taula de la localització dels indicadors que fan referència a les actituds que tenen quan resolen problemes de matemàtiques estàndard o no.

### **8.5.1 Gust per les matemàtiques**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Dues terceres parts del grup afirmen que els han agradat des de sempre. Tres quartes parts confessen que s'ho passen bé fent matemàtiques. Dues terceres parts creuen que en general les matemàtiques són atractives. Porten els deures de matemàtiques fets. Dues terceres parts asseguren que les matemàtiques els agraden independentment del professor.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

A tots els agrada anar a l'escola perquè s'ho passen bé i estan amb els amics; a quatre també els agrada anar-hi perquè els agrada aprendre. Sobre la part que els agrada més de les matemàtiques hi ha hagut disparitat d'opinions: dos el càlcul mental per ser ràpids, una la lògica per no ser gens repetitiu i lliure, una la geometria perquè li agrada dibuixar i raonar, i un altre les equacions per ser temari nou i un altre les sumes i les restes. La meitat d'ells es queixa de les fraccions o simplificacions, dos sobre els problemes i un d'ells la geometria tot degut a la poca agilitat que tenen en aquests aspectes. Només la meitat afirma que li agrada resoldre problemes, i tres escullen els de lògica, i altres d'equacions. Tots convenen que la feina que es fa a classe és variada però també repetitiva quan es detecten dificultats, fins que se superen. Ningú troba les matemàtiques que es fan a classe avorrides perquè diuen que els agrada (per motius diversos).

Síntesi:

Els agrada anar a l'escola perquè s'ho passen bé i estan amb els amics. Dues terceres parts afirmen que sempre els han agradat les matemàtiques, i la majoria s'ho passa bé treballant matemàtiques. Dues terceres parts creu que la matèria és atractiva i els agrada independentment del professor. És important remarcar que ningú troba les matemàtiques que es fan a classe avorrides. Coincideixen que la feina que es fa a classe és variada però també repetitiva quan es detecten dificultats, fins que se superen. La majoria porta els deures de matemàtiques fets a classe.

### **8.5.2 Capacitat per fer volar la imaginació**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Creuen que les matemàtiques són creatives. La meitat confessa que li agrada fer volar la imaginació i que amb les matemàtiques ho pot fer. Després de fer matemàtiques afirmen sentir-se satisfets si han trobat un camí, a la seva manera, per resoldre el problema.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Al cap d'un any es pregunta als alumnes si creuen que gràcies a tenir molta intuïció o poca intuïció han sabut resoldre o no el problema i els resultats obtinguts han estat quant al primer problema tres quartes parts estan d'acord; quant al segon problema dues terceres parts estan d'acord i una quarta part no creu que tingui poca intuïció i que degut a això no hagin sabut resoldre'l; quant a la tercera activitat dues terceres parts estan d'acord amb estar agraïts a la seva intuïció i una quarta part que no ha sabut resoldre el

problema no ho atribueix al fet que tingui poca intuïció perquè tampoc estan d'acord que en tinguin poca; quant a la quarta activitat la meitat està d'acord que tenen molta intuïció i que això ha influït en la seva resolució però els que no han sabut solucionar-lo una tercera part de tot el grup han manifestat que no estan conformes amb la idea que tinguin poca intuïció ni que degut a això no hagin sabut resoldre el problema; quant a la cinquena activitat la majoria hi està d'acord (gràcies a tenir molta intuïció han sabut resoldre'l); quant a la sisena activitat dues terceres parts del grup no creu que tinguin poca intuïció ni que degut a això no ho sabessin resoldre, i una sisena part que creu haver-ho sabut resoldre afirma que és també gràcies a la seva intuïció.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Només dos han escollit que les matemàtiques són per a ells un engranatge de procediments, idees i processos de pensament (dos alumnes amb caràcter poc flexible), els altres quatre han escollit que són un conjunt de regles i tècniques per aplicar. Tots menys un han decidit que les matemàtiques són raonaments i resolució de problemes enlloc de mètodes i càlculs. Quatre creuen que la finalitat que té la resolució de problemes és aprendre a explorar i investigar situacions desconegudes, enlloc del que han cregut els altres dos que ha estat aplicar les tècniques treballades a classe.

Síntesi:

Creuen que les matemàtiques són creatives. La meitat confessa que li agrada fer volar la imaginació i que amb les matemàtiques pot fer-ho. Després de fer matemàtiques diuen sentir-se satisfets si han trobat un camí, a la seva manera, per resoldre un problema. La majoria està agraïda a la seva intuïció per haver sabut resoldre la majoria de les activitats proposades. Però en cap problema aquells que no els ha sortit li donen les culpes a la manca d'intuïció. Creuen que les matemàtiques són raonament i resolució de problemes enlloc de mètodes i càlculs.

### **8.5.3 Capacitat de treball individual**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Només la meitat afirma tenir facilitats i amb poc esforç sortir-se'n. La tercera part diu tenir dificultats, però que treballant i amb ganes se'n surten. Després de fer matemàtiques, se senten satisfets si han trobat un camí a la seva manera per resoldre el problema. També se senten satisfets si han sabut fer sols els problemes que s'han resolt a classe. Una cinquena part del grup confessa no portar l'assignatura al dia. També una cinquena part afirma no estar organitzat per totes les coses degudament. Gairebé tots porten els deures fets. En especial, porten els deures de matemàtiques fets. Una tercera part confessa tenir un professor particular que li resol els dubtes. La meitat diu tenir pares o germans que li resolen els dubtes. Dues terceres parts reconeixen aprofitar més les classes si el professor després de donar unes indicacions fa que els alumnes vagin fent la feina i aprenguin per ells mateixos. Dues terceres parts creuen que l'aprenentatge basat en el fet que el professor explica i els alumnes estan atents prenent apunts i després fan la feina aprenent per ells mateixos és el millor. No creuen que a casa sols aprenguin més que a classe. Una tercera part reconeix que els seus companys li expliquen com fer les coses.



En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als alumnes sobre el seu estat de concentració, i els resultats recollits referents en el primer i segon problema majoritàriament sí estaven concentrats; referents al tercer problema tres quartes parts estaven concentrats; referents al quart problema la meitat estava concentrada; referents al cinquè i sisè problema dues terceres parts estaven concentrades.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots han coincidit en creure que a més a més que el professor s'esforci a explicar la solució, els alumnes també s'han d'esforçar per entendre-ho.

Síntesi:

La meitat afirma tenir dificultats i amb poc esforç sortir-se'n. La tercera part diu que té dificultats però que treballant i amb ganes se'n surten. I la majoria se sent satisfeta si ha trobat un camí, a la seva manera, per resoldre el problema. També se senten contents si sols han aconseguit resoldre el problema de classe. La majoria porta els deures de matemàtiques fets però una cinquena part no porta l'assignatura al dia i reconeix no estar degudament organitzada. Dues terceres parts aprofiten més les classes si després de donar unes indicacions el professor fa que els alumnes vagin fent la feina i aprenguin per ells mateixos.

No creuen que aprenguin sols més que anant a classe. Una tercera part reconeix que els seus companys li expliquen com fer les coses. Una tercera part té professor particular i la meitat té pares o germans que els resolen els dubtes. Coincideixen en afirmar que per entendre un problema, a més de l'esforç del professor per explicar-se cal l'esforç de l'alumne per comprendre. La majoria estava tranquil·la i concentrada en resoldre els problemes.

#### **8.5.4 Actitud receptiva davant solucions o opinions dels altres**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Dues terceres parts afirma demanar ajut als companys quan no entenen alguna cosa. La meitat afirma que el treball en grup li surt millor que el treball individual. Dues terceres parts comproven els seus resultats amb els dels seus companys. També dues terceres parts creu que si ha arribat a la resposta d'un problema, ha d'estar bé doncs els problemes només tenen una resposta.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cinc alumnes han contestat que sí s'ha de discutir la solució d'un problema quan tots hagin acabat, afegint tres d'ells el motiu de tenir diferències a la resposta.

Síntesi:

Dues terceres parts del grup demanen ajut als companys quan no entenen alguna cosa. Declaren comprovar els seus resultats amb els dels seus companys. La meitat afirma que el treball en grup li surt millor que el treball individual. Creuen que s'ha de discutir la solució d'un problema quan tots hagin acabat, encara que dues terceres parts creu que arribar a la solució final és garantia d'estar ben fet, ja que els problemes només tenen una resposta.

### 8.5.5 Voluntat per resoldre el problema ràpid

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Prefereixen anar més lents que acabar ràpidament i no entendre perfectament el problema. Dues terceres parts creuen que per fer un problema ràpidament s'ha de començar a resoldre'l i les dades que faltin es busquen a l'enunciat.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als estudiants si han dedicat el temps necessari per veure si la resposta és la correcta i referent al primer i tercer problema asseguren que sí; referent al segon problema pocs més de la meitat asseguren dedicar-hi suficient temps; referent al quart problema les dues terceres parts han dit que sí; referent al cinquè problema els cinc sisens sí que es prenen prou temps en comprovar si la resposta és correcta; referent al sisè problema poc menys de la meitat han dit que sí hi estan el temps adequat.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots coincideixen que un bon estudiant de matemàtiques no té perquè resoldre habitualment els problemes molt ràpidament; depèn del problema i de l'estudiant, i dos d'ells afegeixen que depèn de la seva atenció. També hi hagut coincidència en negar que un bon estudiant de matemàtiques mai té dificultats ni tampoc es queda bloquejat en resoldre un problema; al·leguen que potser una part no la domini donat l'enorme quantitat de varietat de problemes que hi ha o que estigui nerviós. Cap dels entrevistats creu que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix un problema ja l'entén; tots ells insisteixen en la importància de llegir-lo almenys dos cops, i assenyalen que l'estudiant potser no tan bo en altres aspectes i no del que se li pregunta. En un principi tots opinen que no basta amb una lectura ràpida de l'enunciat per començar a solucionar-lo; podrien descuidar-se d'alguna dada important, per això comenten que és necessari una doble lectura (la primera per entendre i la segona per anotar totes les dades). Tots estan d'acord a dir que no és més important acabar ràpidament el problema trobant una solució com entendre-la a la perfecció, o bé per revisar-la o bé per aplicar-la posteriorment. Cinc persones creuen que un bon estudiant de matemàtiques no sempre arriba de manera directa a la solució correcta.

Síntesi:

Prefereixen tardar més resolent un problema que no pas acabar-lo ràpidament sense acabar d'entendre'l. Però dues terceres parts creuen que per resoldre un problema ràpidament cal començar i les dades que van faltant buscar-les a l'enunciat. Ningú està d'acord amb el fet que amb una ràpida lectura n'hi hagi prou per començar a resoldre un problema ni per part d'un bon estudiant de matemàtiques. No creuen que un bon estudiant de matemàtiques mai no tingui dificultats ni tampoc pateixi bloquejos amb un problema. Tal com contesta l'alumne 9B en l'entrevista a la pregunta B.b a l'ANNEX D.6.5: *"No. Perquè jo crec que tothom es té que llegir per lo menys dos cops un exercici per poder entendre'l"*. Ells insisteixen en una doble lectura (la primera per entendre i la segona per captar totes les dades). No creuen que un bon estudiant de matemàtiques arribi sempre directament i ràpidament a la solució correcta. Tal com contesta l'alumne 25A en l'entrevista a la pregunta A.o a l'ANNEX D.6.3 *"No té perquè. No per anar més ràpid ho faràs millor"*. Per una altra banda, la majoria declara haver dedicat prou temps a la revisió.

### 8.5.6 Actitud receptiva i atenta amb les dades

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts del grup quan llegeix el problema i no entén a la primera el que li demanen, tornen a llegir-lo amb calma fent un llistat de totes les dades. També tres quartes parts afirmen que abans de començar a solucionar el problema confecciona un llistat amb totes les dades. Tots creuen que és important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a solucionar-lo.

En els tests les respostes analitzades han estat:

S'avalua als alumnes si són capaços de capturar totes les dades i referent al primer problema dues terceres parts les agafen totes o com a molt se'n descuiden una de tres; referent al segon problema com a molt se'n deixen una dada de tres i això només ho fan una tercera part; referent al tercer problema hi ha un total de cinc dades i quasi la meitat no han dit cap o només una; referent al quart problema la majoria ha detectat les tres dades i uns pocs se n'han deixat una; referent al cinquè problema dues terceres parts han detectat les dues dades. També es pregunta si saben què han de trobar i s'ha recollit una resposta afirmativa en els problemes primer, segon i quart; en el tercer problema i cinquè una tercera part no ho sap.

Al cap d'un any se'ls avalua sobre si capturen totes les dades dels enunciats i referents al primer problema dues terceres parts les han detectat totes; referents al segon problema les tres quartes parts les han captat totes i una quarta part se n'ha deixat una de tres; referents al tercer problema la meitat no ha capturat cap o una de cinc; referent al quart problema quatre cinquenes parts detecta les tres dades i la resta se'n deixa una; referent al cinquè problema dues terceres parts es descuida una de les tres dades. També se'ls pregunta si saben què han de trobar i les respostes han estat correctes en els quatre primers problemes però en el cinquè una quarta part no ho ha sabut.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cap dels entrevistats està d'acord que un bon estudiant de matemàtiques amb una primera lectura del problema ja en té prou per a solucionar-lo donat que ja l'ha entès; dos insisteixen en una doble lectura i dos més subratllen el fet que l'estudiant no ha de ser bo en tots els aspectes. En principi tots coincideixen que una lectura ràpida és insuficient per abordar el problema, donat que podrien descuidar-se alguna dada important; insisteixen en primer llegir per entendre de què va i després tornar a llegir prenent nota de totes les dades que intervenen.

Síntesi:

Ningú està d'acord amb el fet que una lectura ràpida de l'enunciat sigui suficient per solucionar un problema encara que sigui un bon estudiant de matemàtiques donat que es podria descuidar alguna dada important; insisteixen en una doble lectura, una per entendre i una segona per anotar totes les dades. La majoria afirma que abans de començar a resoldre un problema es fa un llistat amb les dades. Tots creuen que és important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a solucionar-lo. Són capaços de capturar totes les dades la majoria en tots els problemes i al cap d'un any els resultats milloren. La majoria contesta correctament a què han de trobar en els problemes i un any més tard són més alumnes els qui contesten correctament.

### **8.5.7 Voluntat d'entendre la situació fins al darrer detall**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris, les respostes analitzades han estat:

Quan un enunciat és molt llarg no el llegeixen ràpidament ni sense ganes. Dues terceres parts del grup quan llegeixen el problema i no entenen a la primera el que es demana, tornen a llegir-lo amb calma fent un llistat de totes les dades. Afirmen que llegeixen amb molta atenció els enunciats dels problemes. Dues terceres parts abans de començar a solucionar el problema, confeccionen una llista amb totes les dades. No prefereixen acabar ràpidament en detriment de la seva comprensió. Es pregunten el sentit de la resposta un cop han solucionat el problema. Dues terceres parts asseguren que li dediquen prou temps a la comprovació de la solució. Creuen que és important revisar la solució obtinguda. No prescindeixen de revisar la solució per no saber si s'han equivocat.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als estudiants si s'han plantejat al final si la resposta té sentit quant al primer problema, tercer i cinquè i la resposta ha estat afirmativa; quant al problema dos tres quartes parts han dit que sí que s'ho plantegen; quant al problema quatre i sis poc més de la meitat ho ha afirmat. També se'ls pregunta si han dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta i referent al primer i tercer problema asseguren que sí; referent al segon problema poc més de la meitat afirmen haver-hi dedicat prou temps; referent al quart problema les dues terceres parts han dit que sí; referent al cinquè problema cinc sisens diuen que sí; i referent al sisè problema poc menys de la meitat ha dit que sí.

Al cap d'un any es pregunta als alumnes si s'han plantejat al final el sentit de la seva resposta i referent al problema u cinc sisens diuen que sí; referent al problema dos la majoria diu que sí; referent als problemes tres, cinc i sis tres quartes parts sí s'ho plantegen; referent al problema quatre dues terceres parts es plantegen el sentit de la seva resposta. També se'ls pregunta què fan un cop han trobat la solució i al primer i sisè problema dues terceres parts han dit que res més i la resta ha comprovat la solució; referent al segon problema les dues terceres parts ha comprovat la solució i la resta s'ha dividit en no fer res més i uns pocs en buscar altres camins; referent al tercer problema quasi la meitat ha comprovat la solució i una tercera part ha buscat altres camins i nou no han fet res més; referent al quart problema gairebé la meitat no ha fet res més i l'altra ha comprovat la solució; referent al cinquè problema més de la meitat ha comprovat la solució i els altres no han fet res més i pocs han buscat altres camins.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Amb una lectura ràpida de l'enunciat d'un problema no n'hi ha prou per començar a solucionar un problema segons tots els entrevistats; calen almenys dues vegades, una per entendre i una altra per anotar totes les dades. Tots creuen que a més d'esforçar-se el professor en explicar, cal que els alumnes també s'esforcin per entendre la solució. Ningú creu que sigui més important arribar a una solució qualsevol que entendre-la perfectament ja sigui o per evitar errors o per aplicar-la en una altra ocasió. Cinc alumnes creuen que és necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda per revisar i per comprovar una certa coherència amb allò que es demana.

Síntesi:

Ningú creu que un problema s'hagi de resoldre ràpidament sense entendre'l. Ningú està d'acord amb el fet que una lectura ràpida de l'enunciat sigui suficient per solucionar un problema encara que sigui un bon estudiant de matemàtiques donat que es podria descuidar alguna dada important; insisteixen en una doble lectura, una per entendre i una segona per anotar totes les dades. Per molt llarg que sigui l'enunciat el llegeixen lentament i dues terceres parts del grup si no l'entenen el tornen a llegir anotant totes les dades.

Per altra banda, afirmen que llegeixen amb molta atenció els enunciats i dues terceres parts asseguren que abans de començar a solucionar un problema confeccionen un llistat de dades sempre. No prefereixen acabar ràpidament en detriment de la seva comprensió. Es pregunten el sentit de la resposta trobada la majoria (un any més tard encara que hi ha més alumnes); però només dues terceres parts asseguren que li dediquen prou temps a la revisió de la solució encara que tots creguin que sigui important. Després d'haver trobat una solució el que fan en la majoria dels problemes és comprovar la solució, però només la meitat ho fa. Creuen que a més d'esforçar-se el professor en explicar, els alumnes també s'han d'esforçar per entendre el problema.

### **8.5.8 Gust pels reptes**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Dues terceres parts diuen que tenen dificultats però que si s'esforcen i treballen, se'n surten. També dues terceres parts diuen que s'ho passen bé fent matemàtiques. Després de fer matemàtiques comenten que se senten satisfets si al començament no els sortia però en pensar-ho i treballar-ho els ha acabat sortint. També se senten satisfets si han sabut fer sols els problemes que s'han resolt a classe.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

La meitat dels alumnes es queixa de les divisions i les simplificacions, dos d'ells dels problemes i un d'ells de la geometria tot degut a la manca d'agilitat que tenen. A dos no els agrada enfrontar-se amb dificultats quan han de resoldre problemes (un amb problemes de geometria i l'altre quan no sap com plantejar-los); a dos més no els agraden les tasques mecàniques. Sobre quins tipus de problemes no els agrada la resposta ha estat aquells que els costen o que no entenen; per a dos d'ells són els de geometria, i per a un altre aquells on apareixen dues incògnites.

Síntesi:

Les dues terceres parts diuen que tenen dificultats però que si s'esforcen i treballen, se'n surten. Les dues terceres parts diuen passar-s'ho bé fent matemàtiques. Després de fer matemàtiques se senten satisfets si al començament no els sortia un problema però després de pensar i treballar els ha acabat sortint. Se senten satisfets si han sabut fer sols els problemes que s'han resolt a classe després.

### **8.5.9 Resistència a l'abandó en front una dificultat demanant pistes o ajuts**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Es senten satisfets si en un inici no els surt el problema però que després de pensar i treballar els acaba sortint. Tres quartes parts demana ajut als companys quan no entén alguna cosa. Una tercera part té un professor particular que li resol els dubtes. La meitat té pares o germans que li resolen els dubtes. També una tercera part afirma que els seus companys li expliquen com fer les coses. No solen copiar la feina dels altres. Tampoc no solen llegir un enunciat llarg ràpidament ni sense ganes.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Quan han respost a quina part de les matemàtiques els agrada menys, la meitat s'ha decantat per les fraccions, dos es queixen dels problemes, i un d'ells de la geometria; el motiu comú és la seva falta d'agilitat. Quant al que menys els agrada de resoldre problemes dos han respost enfrontar-se a dificultats de plantejament o a enunciats de geometria, i uns altres dos a realitzar tasques mecàniques i llargues.

Síntesi:

Se senten satisfets si en un inici no els surt el problema però després de pensar i treballar els acaba sortint. La majoria demana ajut als companys quan no entén alguna cosa. De fet, una tercera part afirma que els seus companys li expliquen com fer les coses. No solen copiar la feina dels altres. Una tercera part té un professor particular que li resol els dubtes i la meitat té pares o germans que li resolen els dubtes. Per una altra part, no solen llegir els enunciats llargs de manera ràpida i sense ganes.

#### **8.5.10 Caràcters reflexius**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts se senten satisfets si després de fer matemàtiques se n'adonen de quines coses no dominen. La meitat se sent satisfeta si se n'ha adonat que tenia idees o conceptes equivocats. Estan en general satisfets si han descobert una regla que, a més de resoldre el problema, li servirà després. No prefereixen acabar un problema ràpidament si no l'acaben d'entendre; prefereixen anar més lents. Però per fer un problema ràpidament creuen que convé començar sense tenir-ho tot lligat i les dades que falten buscar-les a l'enunciat. Havent acabat de solucionar un problema, es pregunten el sentit de la resposta.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als alumnes si han sabut què trobar i la resposta ha estat afirmativa en l'activitat primera, segona i quarta; en l'activitat tercera i cinquena una tercera part ha contestat que no ha sabut què trobar. També se'ls pregunta per què creuen que la solució que han trobat és la correcta i quant al primer problema més de la meitat diuen que ho han comprovat i una quarta part diu que ho troba lògic; quant al segon problema dues terceres parts no ho saben o no contesten i una cinquena part contesta que ho troba lògic; quant al tercer problema la meitat del grup afirma que com troba lògic el resultat no ho ha comprovat; quant al quart problema la meitat no ho sap o no contesta i la quarta part assegura haver-ho comprovat; quant al cinquè problema gairebé la meitat diu haver-ho comprovat i gairebé la tercera part no ho saben o no contesten; quant al sisè

problema la meitat no ho sap o no contesta i gairebé una tercera part contesta que ho té malament o que no l'ha fet.

Al cap d'un any se'ls pregunta si han sabut què trobar en els mateixos problemes i les respostes donades han estat correctes en els quatre primers problemes, però en el cinquè, una quarta part no ho ha sabut. Es pregunta als estudiants si s'han plantejat al final si la resposta té sentit i referent al problema u les cinc sisenes parts diuen que sí; referent al problema dos la majoria diu que sí s'ho ha plantejat; referent al problema tres, cinc i sis tres quartes parts asseguren que s'han preguntat pel sentit de la solució; referent al problema quatre les dues terceres parts afirmen que s'ho han plantejat. També se'ls pregunta pel que feien un cop havien resolt els problemes i referent al primer i sisè problema, les dues terceres parts han dit que res més i la resta ha comprovat la solució; referent al segon problema les dues terceres parts han comprovat la solució i la resta s'ha dividit en no fer res més i després uns pocs en buscar altres vies de solucionar el problema; referent al tercer problema quasi la meitat ha comprovat la solució i una tercera part ha buscat altres camins i altres nou no han fet res més; referent al quart problema gairebé la meitat no ha fet res més i l'altra meitat ha comprovat la solució i els altres no han fet res més i pocs han buscat altres camins.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Si fossin professors, els entrevistats en començar a resoldre un problema als seus alumnes els indicarien que llegissin molt bé l'enunciat i més d'un cop; quatre d'ells insisteixen en la importància d'apuntar les dades del problema. Cap dels entrevistats està d'acord que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix un enunciat d'un problema ja l'entén; dos afirmen que cal llegir-lo dos cops almenys i altres dos que l'estudiant no té perquè ser bo en tots els aspectes. Tots excepte un cas creuen que abans d'escriure res el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap, afegint-ne un que el fet d'escriure pot ajudar. Tots creuen que fer una representació clara de totes les dades pot ajudar a resoldre el problema estructurant-lo i distingint el que de veritat interessa. Ningú creu que amb una lectura ràpida de l'enunciat del problema n'hi hagi prou per a solucionar-lo, donat que podrien descuidar-se d'alguna dada; per això recomanen una primera lectura per entendre de què va i una segona per anotar totes les dades que hi intervenen. Si fossin professors i els seus alumnes haguessin arribat a la solució final d'un problema, les indicacions que els donarien tots els entrevistats és que revisessin la seva solució. Cap dels entrevistats està conforme que sigui més important acabar ràpidament un problema trobant una solució que entendre la mateixa perfectament ja sigui per evitar errors o per poder-la aplicar en ocasions posteriors. Cinc alumnes creuen que és necessari buscar el sentit de la resposta obtinguda a manera de revisió i per comprovar una coherència amb allò que es demana.

Síntesi:

La majoria se sent satisfeta si després de fer matemàtiques s'adona de quines coses no domina. La meitat se sent satisfeta si se n'ha adonat que tenia idees incorrectes. La majoria se sent satisfeta si ha descobert una regla que a més de resoldre el problema, li servirà després. Prefereixen anar més lents però entendre perfectament el problema, tot i que pensin que per resoldre un problema ràpidament calgui començar sense entendre'l del tot i anar buscant les dades que faltin a l'enunciat. Ningú creu que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix un problema ja l'entén; en tots els casos s'ha de llegir com a mínim dues vegades, una per entendre'l i una altra per fer un llistat de totes les dades.

Creuen que abans d'escriure res, el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap. Creuen que fer una representació clara de les dades pot ajudar a resoldre problemes estructurant-los. La majoria sap què ha de trobar en els problemes per les respostes correctes que donen a tal pregunta. Havent acabat de solucionar un problema declaren que es pregunten pel sentit de la resposta obtinguda la majoria. L'explicació de per què creuen que la seva solució és correcta en sis problemes proposats ha estat perquè l'han comprovat en una minoria que, encara que superi als que diuen que ho han trobat lògic, no arriba ni a la meitat. Al cap d'un any l'argument que ho han comprovat ha augmentat notablement però tampoc arriba a la meitat.

S'han plantejat si la resposta té sentit la majoria en quatre problemes i al cap d'un any ja és la majoria en tots sis problemes (cosa que confirma el que han declarat). Després d'haver trobat una solució el que fa la meitat del grup és comprovar-la. Tots els entrevistats, si fossin professors, indicarien als seus alumnes que llegissin molt bé l'enunciat i més d'un cop i en acabar que revisessin la solució. Ningú creu que s'hagi d'acabar un problema ràpidament sense entendre'l totalment. Creuen que és necessari buscar el sentit de la resposta a manera de revisió i per comprovar una certa coherència amb allò que es demana.

#### **8.5.11 Actitud receptiva per aprendre dels propis errors**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris, en els tests i en les entrevistes conservant les distincions.

En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts se senten satisfets si s'han adonat de quines coses no dominen. La meitat se sent satisfeta si s'han adonat que tenien idees o conceptes equivocats. No deixen de revisar la solució per no saber si s'han equivocat.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Es pregunta als alumnes si han dedicat el temps necessari per veure si la resposta és correcta i referent al primer i tercer problema asseguren que sí; referent al segon problema pocs més de la meitat; referent al quart problema les dues terceres parts han dit que sí li dediquen temps a la revisió del problema; referent al cinquè problema les cinc sisenes parts asseguren dedicar-li el temps suficient; referent al sisè problema poc menys de la meitat han afirmat revisar el problema.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Cinc alumnes creuen que s'ha de discutir la solució d'un problema quan tots hagin acabat, afegint tres que degut a una diferent solució.

Síntesi:

La majoria se sent satisfeta si s'ha adonat de quines coses no domina. La meitat se sent satisfeta si s'ha adonat que tenia idees o conceptes equivocats. La majoria declara haver dedicat prou temps a la revisió. També creuen que s'ha de discutir la solució d'un problema quan tots hagin acabat.

#### **8.5.12 Aspectes que consideren més importants**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els qüestionaris i en les entrevistes conservant la distinció.



En els qüestionaris les respostes analitzades han estat:

Tres quartes parts se senten satisfetes si han resolt molts problemes i s'han adonat de quines coses no dominen. La meitat se sent satisfeta si s'ha adonat que tenia idees o conceptes equivocats.

Després de fer matemàtiques se senten satisfets si han fet els càlculs correctament, si han aconseguit superar les dificultats inicials amb esforç i treball, si han trobat un camí a la seva manera per resoldre el problema, si han sabut fer sols els problemes de classe, i si han descobert una regla que a més de resoldre el problema, els servirà per després.

La meitat dels alumnes creu que el professor a l'hora d'avaluar té en compte els coneixements, la participació i l'actitud a classe. L'altra meitat creu que té en compte els progressos de l'alumne. Tots creuen que és important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a solucionar el problema. Creuen que és important revisar la solució obtinguda. La nota que li posarien a un alumne que hagués desenvolupat tots els càlculs correctament encara que s'hagués equivocat donant una resposta impossible seria de set o més.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots creuen que és necessari saber resoldre problemes perquè en un futur els serà útil a la vida. Si fossin professors la instrucció que li donarien als seus alumnes en començar a resoldre un problema seria que es llegissin molt bé l'enunciat i més d'un cop; quatre d'ells insisteixen en la importància d'anotar les dades inicials. Si fossin professors la indicació que donarien als seus alumnes un cop haguessin acabat de solucionar un problema seria que revisessin la solució. Cap dels entrevistats creu que el més important de resoldre un problema és l'obtenció del resultat final, sinó que per a ells és el procés degut al fet que poden haver-hi errors de càlcul. No estan conformes que sigui més important acabar ràpidament un problema donant una solució que entendre perfectament el significat d'aquesta perfectament; afirmen que s'ha d'entendre per poder-la aplicar en altres ocasions o per evitar errors.

Síntesi:

La majoria se sent satisfeta si han resolt molts problemes, i si s'han adonat de quines coses no dominen. La meitat se sent satisfeta si s'ha adonat que tenia idees equivocades. Després de fer matemàtiques se senten bé si han fet bé els càlculs correctament, si han superat dificultats amb treball i esforç, si han trobat la solució amb un camí trobat per ells sols i si han descobert una regla per aplicar en altres casos. Tots creuen que abans de començar a resoldre un problema cal entendre l'enunciat i aclarir totes les dades. Si els entrevistats fossin professors indicarien als seus alumnes que en començar llegissin més d'un cop i molt bé l'enunciat i en acabar que revisessin la solució. Creuen que és important revisar la solució. Però un notable és la nota mínima que li posarien a un alumne que hagués fet bé tots els càlculs i hagués donat com a solució una resposta impossible.

Creuen que és necessari saber resoldre problemes i entendre'ls per aplicar-ho en un futur. Ningú creu que en la resolució de problemes el més important sigui arribar a una solució, sinó que el més important és el procés. Tal com contesta l'alumne 25A en l'entrevista a la pregunta C.d a l'ANNEX D.6.3: *“No, jo penso que no perquè jo penso que sempre pot haver-hi errors de càlcul i és molt important d'arribar a un procés lògic. I si el procés té lògica, que surti bé o no, té menys importància, dic jo”*. Per altra banda, la meitat de la classe creu que a l'hora d'avaluar el professor té en compte els

coneixements, la participació i l'actitud a classe; l'altra meitat creu que té en compte els progressos dels estudiants.

### **8.5.13 La importància del sentit comú, de la intuïció o de la sort en la resolució de problemes**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els tests i en les entrevistes conservant la distinció.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Al cap d'un any es pregunta als estudiants si creuen que gràcies a tenir molta intuïció o poca intuïció han sabut resoldre o no el problema i quant al primer les tres quartes parts ho afirmen; quant al segon problema les dues terceres parts estan d'acord i una quarta part no creu que tinguin poca intuïció i que degut a això no hagin sabut resoldre'l; quant al tercer problema les dues terceres parts estan d'acord amb l'afirmació i una quarta part que no l'ha sabut resoldre no ho atribueix al fet que tinguin poca intuïció perquè tampoc estan d'acord que en tinguin poca; quant al quart problema la meitat està d'acord a dir que tenen molta intuïció i que això ha influït en la seva resolució però entre els que no han sabut solucionar-ho, una tercera part de tot el grup ha manifestat que no està d'acord amb tenir poca intuïció ni que degut a això no hagin sabut resoldre el problema; quant al cinquè problema la majoria hi està d'acord (gràcies a tenir molta intuïció han sabut resoldre'l); quant al sisè problema dues terceres parts del grup no creu que tinguin poca intuïció ni que degut a això no ho sabessin resoldre i una sisena part que creu haver-ho sabut resoldre afirma que és també gràcies a la seva intuïció.

També se'ls pregunta si creuen que han resolt o no els problemes en funció de la seva bona o mala sort i referent al primer, segon i cinquè problema les dues terceres parts creuen que la sort no ha tingut res a veure; referent al tercer problema la meitat creu que no ha influenciat la sort però una quarta part creu que l'ha resolt gràcies a la bona sort i una altra quarta part creu que no l'ha resolt per mala sort; referent al quart problema la meitat creu que la sort sí ha influenciat; referent al sisè problema que la majoria no ha sabut resoldre, les dues terceres parts creuen que la sort no ha tingut res a veure, però gairebé una tercera part creu que la mala sort ha fet que no el solucionessin.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Un bon estudiant de matemàtiques no té perquè resoldre habitualment els problemes de manera molt ràpida diuen tots els entrevistats, depèn del problema, d'ell mateix i, com afegeixen dos alumnes, de la seva atenció. Dos alumnes creuen que és possible que un alumne que estudiï poc les matemàtiques si acaba ràpidament en resoldre un problema ho té malament, però la resta creu que no té perquè doncs pot haver estat atent i haver tingut prou. Cinc dels estudiants opinen que és gràcies al sentit comú i a estudiar molt que els problemes es resolguin correctament, encara que dos dels entrevistats li donen una preferència al sentit comú. Cap dels entrevistats creu que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix l'enunciat d'un problema ja l'entén; dos insisteixen que cal llegir almenys dues vegades el problema, i altres dos creuen que aquest estudiant hipotètic no ha de ser bo en totes les parts i pot ser molt ràpid en alguns àmbits, però no ser-ho en d'altres. En principi cinc persones han contestat que no troben que un bon estudiant de matemàtiques de seguida arribi a la solució correcta i de manera directa, encara que dos estudiants declaren que depèn de la persona i del problema.

Síntesi:

La majoria està agraïda a la seva intuïció per haver sabut resoldre la majoria de les activitats. En cap problema els que no els han sabut resoldre li donen les culpes a la manca d'intuïció. La majoria no creu que hagi tingut res a veure la sort en el fet d'haver sabut resoldre els problemes, encara que en totes les activitats hi ha una minoria que opina diferent. Coincideixen que un bon estudiant de matemàtiques no té perquè habitualment resoldre problemes ràpidament i de manera directa, ni que tampoc en tingui prou amb una lectura ràpida de l'enunciat per resoldre'l. Creuen que és gràcies al sentit comú i a estudiar molt que els problemes se saben resoldre.

#### **8.5.14 La influència de l'estat anímic, paciència, perseverança o autoconfiança en la resolució de problemes**

A continuació s'exposen les respostes obtingudes en els tests i en les entrevistes conservant la distinció.

En els tests les respostes analitzades han estat:

Al cap d'un any se'ls pregunta si en fer els problemes proposats estan tranquils i referent al primer, segon, tercer i cinquè problema dues terceres parts hi estan; referent al quart problema poc més de la meitat estan tranquils; referent al sisè problema que ha presentat més dificultats que els anteriors per ser resolt, una quarta part ha reconegut estar nerviosa. També se'ls ha preguntat sobre el seu estat de concentració i referent al primer i segon problema majoritàriament sí estan concentrats; referent al tercer problema les tres quartes parts estan concentrats; referent al quart problema la meitat està concentrada; referent al cinquè i sisè problema les dues terceres parts estan concentrades.

En les entrevistes les respostes analitzades han estat:

Tots els alumnes entrevistats creuen que l'estat anímic, la paciència i la perseverança del moment condicionen la possibilitat que se solucioni un problema correctament. També tots coincideixen en afirmar que factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de solucionar un problema. La meitat creu que depèn de com es llegeixi un problema (estat anímic, paciència i perseverança) s'entendrà o no, dos dels alumnes creuen que la comprensió de l'enunciat és independent però que la seva resolució no, i un altra subratlla la importància del grau de concentració de cadascun. Tots estan d'acord que els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de comprendre l'enunciat.

Síntesi:

En resoldre els problemes proposats la majoria estava tranquil·la i concentrada. Els alumnes creuen que l'estat anímic, la paciència i la perseverança condicionen que se solucioni correctament un problema. Afirmen que els nervis, la por al fracàs i la confiança afecten a l'hora de comprendre i solucionar un problema.



## **Quarta Part: Conclusions, implicacions didàctiques de l'estudi i suggeriments**

*“... un professor de matemàtiques té una gran oportunitat. Si dedica el seu temps a exercitar els alumnes en operacions rutinàries, matarà en ells l'interès, impedirà el seu desenvolupament intel·lectual i acabarà desaprofitant la seva oportunitat. Però si, pel contrari, posa a prova la curiositat dels seus alumnes plantejant-los problemes adequats als seus coneixements, i els ajuda a resoldre'ls mitjançant preguntes estimulants, podrà despertar-los el gust pel pensament independent i proporcionar-los certs recursos.”*

(George Polya, 1945)



## Capítol 9: Conclusions i implicacions didàctiques de l'estudi

Aquest capítol es divideix en dues parts. Una primera part de conclusions i una segona part d'implicacions didàctiques de l'estudi i suggeriments. Les conclusions responen als objectius plantejats a l'inici de la recerca. Les implicacions didàctiques contempnen certes recomanacions que s'han després de l'estudi, implicacions personals en fer aquest treball i propostes per a noves línies de recerca.

### 9.1 Conclusions

Més concretament, en aquest primer punt s'exposaran les conclusions del present estudi que responen als objectius específics de la recerca que es proposaren al capítol 5. Així es distingiran cinc punts diferents que corresponen als cinc objectius que tenen en compte les quatre fases de Polya (1981) que tenen lloc quan es resolen problemes matemàtics. La matemàtica, per a Davis i Hersh (1981), és informació acumulada i un esforç continu que crea nous coneixements; la matemàtica s'assembla a un procés de resolució de problemes continu. L'estudi es centra en la primera fase (comprensió de l'enunciat) i en la quarta fase (revisió de la solució). En aquest treball s'ha escollit una combinació de diversos enfocaments i d'instruments de recollida de dades. S'han utilitzat mètodes quantitius (a l'hora del tractament de les dades) i qualitius per tal de poder identificar i analitzar els indicadors proposats com objectius de la tesi. Un primer mètode de recollida de dades utilitzat ha constatat de dos tests inicials amb problemes per avaluar la comprensió de l'enunciat i la revisió de la solució. Al cap d'un any, s'ha seguit el mateix mètode amb dos tests més amb la intenció d'avaluar també la comprensió i la revisió dels problemes. En aquests tests també s'han inclòs qüestionaris per tal d'aprofundir i conèixer a fons les seves respostes. En els post tests les preguntes han estat més concretes i concises per tal d'avaluar una possible evolució. Un segon mètode de recollida de dades ha estat un qüestionari per conèixer el que pensaven i creien els alumnes sobre aspectes generals, sobre aspectes de la comprensió de l'enunciat i sobre aspectes de la revisió de la solució. Per últim, es van escollir sis alumnes del grup per entrevistar-los i aprofundir en la naturalesa de les seves respostes. Aquests sis alumnes escollits responien a uns criteris molt determinats: dos alumnes amb un rendiment alt, dos alumnes amb un rendiment mig i dos alumnes amb un rendiment baix en matemàtiques. Per cadascuna d'aquestes tres parelles d'alumnes hi havia un que manifestava tenir una mentalitat oberta i l'altre una mentalitat tancada. En definitiva, aquests mètodes de recollida de dades han permès analitzar el problema d'estudi des de diferents punts de vista. Aquest creuament de dades ha servit per analitzar els cinc indicadors que es van formular.

El primer objectiu fou identificar i analitzar indicadors que constataessin la comprensió de les situacions plantejades. El segon objectiu fou identificar indicadors i analitzar el grau de consciència dels alumnes sobre la importància que té comprendre bé l'enunciat del problema. El tercer objectiu fou identificar i analitzar indicadors interpretables que constataessin que l'estudiant es preocupava per la solució trobada i la seva explicació. El quart objectiu fou identificar indicadors interpretables que mostressin el grau de consciència sobre la importància que té revisar la solució i la seva explicació. Per últim, el cinquè objectiu fou la descripció i explicació de les actituds dels alumnes quan resolien problemes matemàtics estàndard o no estàndard. A més a més de tractar les conclusions extretes, es donaran orientacions didàctiques relacionats amb cada objectiu.

### **9.1.1 Conclusions sobre la comprensió de les situacions plantejades**

El domini de la matemàtica requereix comprensió i retenció de dades concretes (Baroody, 1988). El grup que ha estat objecte d'estudi (33 alumnes de segon d'ESO) és força rigorós en aquesta fase de comprendre l'enunciat. Creuen que s'ha de fer un llistat amb totes les dades abans de començar a resoldre el problema. Opinen que com a mínim s'ha de fer una doble lectura, una per entendre el problema i l'altra per a fer un llistat de les dades. Al cap d'un any la comprensió dels enunciats millora segons es registra en les proves que s'han passat. Seria agosarat dir que ha estat gràcies al treball de tot un any amb el quadern d'activitats dissenyat (ANNEX B), però segur que alguna cosa hi haurà tingut a veure. En una línia constructivista, Martínez (1999) parla d'una matemàtica inductiva i donada la importància atribuïda al context estableix cinc requisits. Un d'ells és despertar la creativitat, l'anàlisi i l'organització de la informació.

S'ha constatat que llegeixen molt atentament i no tenen pressa perquè el que volen és entendre perfectament el problema, volen aclarir totes les dades i entendre'l abans de començar a resoldre'l. Els estudiants s'han implicat en el procés d'aprenentatge, com observen Chamoso i Rawson (2001), doncs aprenen quan suposen i dedueixen. S'ha constatat que saben què han de trobar i demostren la comprensió del que es pregunta. La majoria contesta correctament què han de trobar als enunciats, i al cap d'un any encara millora el nombre d'alumnes que contesten correctament. Creuen que abans d'escriure res, el problema s'ha de tenir pensat i elaborat al cap, i així actuen. Per aquest motiu, la comprensió de les hipòtesis inicials de la situació és bona.

S'ha constatat que per tal de captar totes les dades els alumnes segueixen un ordre molt marcat: primer seleccionen les dades i després dissenyen una estratègia d'entendre-la a terme. Creuen que ajuda a una bona resolució el fet de tenir una representació clara de totes les dades. Al cap d'un any el grup captura millor totes les dades. Tanmateix, pot sobtar que encara la meitat dels alumnes del grup creu que si un problema s'ha de solucionar amb urgència està justificat el començar ràpidament sense haver comprès bé l'enunciat, saltant-se el requisit de fer el llistat de les dades i a mesura que es necessiten, es busquen.

En el grup s'ha detectat un cert risc de pèrdua d'atenció inicial. Els motius són diversos. Un primer motiu és que la meitat creu que les matemàtiques són difícils, i que els alumnes més llestos són els que resolen molt ràpidament els problemes. Per culpa d'aquesta creença poden abandonar ràpidament. Un segon motiu és que una tercera part diu que els seus companys li expliquen com fer les coses. Un tercer motiu engloba factors com els nervis, la por al fracàs i la confiança en un mateix. Un quart factor podria ser que una tercera part del grup no arriba a dormir vuit hores diàries, una quantitat insuficient per a aquestes edats.

### **9.1.2 Conclusions sobre la consciència que tenen els alumnes de la importància de comprendre bé les situacions plantejades**

En el grup de 33 alumnes de segon d'ESO estudiats existeix una voluntat i una perseverança notable en comprendre bé un enunciat d'un problema ja que s'ha confirmat que si després d'haver llegit amb calma i tranquil·litat (com diuen que ho fan) no entenen el problema, aleshores el tornen a llegir prenent nota de totes les dades. La resolució de problemes la contemplan en una primera part com un procés per desxifrar l'enunciat; és un punt de partida de l'anàlisi global de la situació.



El grup prefereix en general entendre el problema perfectament que resoldre'l ràpidament i sense acabar-lo d'entendre. No creuen que un bon estudiant de matemàtiques de seguida que llegeix un enunciat d'un problema l'entengui.

Però la meitat del grup creu que per solucionar un problema ràpidament han de començar a resoldre'l encara que no el tinguin clar i que les dades que els van faltant, ja les aniran buscant a l'enunciat quan calgui. Aquesta dada és preocupant perquè, tot i que no es pugui concloure res, deixa a alguns alumnes la porta oberta al fet que, si alguna vegada es troben amb presses, no resoldran els problemes com se'ls ha ensenyat.

Hi ha una certa manca d'esforç per comprendre els enunciats, motivada per la comoditat de trobar algú que els aclareixi els dubtes a posteriori. Normalment no es copien la feina, però una tercera part dels alumnes té professor particular i la meitat del grup té pares o germans que els ajuden amb els dubtes de matemàtiques. Per altra banda, la meitat diu que li surt millor el treball en grup que l'individual la qual cosa no permet extreure conclusions del treball en grup en front al treball individual. Com diu Blanco (1993), molts alumnes senten més seguretat i confiança al treballar en equip. També s'ha constatat que demanen ajut al professor de matemàtiques o als companys quan no entenen alguna cosa; així és que podem concloure que el grup té interès i voluntat per entendre i comprendre l'enunciat. El professor juga un paper rellevant en el procés d'aprenentatge de l'alumne, però a aquest no se li pot impedir el plaer de descobrir (Guzmán, 1992a). Dubinsky (1996) confeccionà un llistat a partir de les idees de Piaget on proposava canviar el paper del mestre de disseminador d'informació a guia assistent.

### **9.1.3 Conclusions sobre la revisió de la solució trobada i la seva explicació**

Els alumnes estudiats creuen important revisar la solució i comprovar els seus resultats amb els dels seus companys, preguntant-se pel sentit de la resposta. El grup afirma dedicar prou temps per comprovar la solució. Però la majoria creu que els problemes només tenen una solució, la qual cosa els condueix a pensar que si han aconseguit trobar una solució ja és garantia que aquesta és correcta. La impressió donada per conjunts d'exercicis rutinaris que tracten que l'alumne repeteixi contínuament la mateixa tècnica és que només existeix una manera correcta de resoldre aquests problemes. A més a més una conseqüència en repetir experiències d'aquest estil (no només en l'assignatura de matemàtiques) és que els estudiants aprenen aquestes respostes i mètodes i no s'espera que esbrinin res, acceptant un rol passiu (Carpenter, Lindquist, Matthews i Silver, 1983). Amb aquestes creences, es pot provocar el desinterès per revisar la solució per manca de sentit. Tal com diu Schoenfeld (1990) la instrucció en matemàtiques hauria d'atorgar als estudiants l'oportunitat d'explorar un ampli rang de problemes i de situacions problemàtiques classificades des d'exercicis fins a problemes no acotats on més d'una solució és acceptada, o fins i tot on calgui explorar. Quan troben la solució d'un problema, una minoria creu que la seva solució és correcta perquè diuen que la comproven, però no arriben ni a la meitat. D'aquesta manera, no es podria parlar de costum de revisar al final la solució per part de tot el grup.

S'ha confirmat que una gran majoria creu que abans que acabar ràpidament un problema, és més important entendre perfectament què vol dir la solució trobada per aplicar-la en altres ocasions, evitar errors i trobar certa coherència. Tal com observen Chamoso i Rawson (2001) els estudiants aprenen quan divergeixen, pregunten, corregeixen, comproven, expliquen i generalitzen. La majoria dels alumnes ja es plantejaven el sentit de la resposta en quatre dels sis problemes proposats inicialment,

però al cap d'un any s'ho plantegen en tots sis problemes. No obstant, mentre que la majoria declarà que dedicava prou temps a la revisió, al cap d'un any només la meitat ho feia. El grup diu que observa les variacions que experimenta la solució quan es modifiquen les dades originals. La meitat del grup diu que per comprovar la resposta suposa un resultat diferent a la solució trobada i mirant enrere persegueix alguna contradicció. No es pot concloure que sigui un procediment generalitzat en el grup d'estudi.

S'han constatat diversos pretextos que poden explicar una certa pressa per trobar una solució i acabar el problema. Una creença rellevant és que els més llestos resolen molt ràpidament els problemes, i per això se senten molt satisfets si en poc temps n'han resolt molts. Creuen que per entendre la solució s'han d'esforçar, que no correspon només al professor d'esforçar-se. Donen més importància a entendre el problema i la seva resposta que no pas al resultat final. Estranya que el grup puntuï amb un mínim de notable un problema ben resolt en càlculs però amb una resposta final incoherent i impossible.

La meitat del grup se sent satisfet si s'ha adonat, després de fer matemàtiques, que tenia idees o conceptes equivocats. Però s'ha confirmat pel que diuen que se senten satisfets si han descobert una regla que a més de resoldre el problema els servirà en el futur, cosa que parla en favor de la generalització de la solució trobada. Per això cal que els problemes proposats siguin coherents amb els coneixements propis dels alumnes (Vigotski, 1988) i segueixin un ordre de dificultat creixent, però mai desvinculat de la seva realitat, afavorint el redescobriments de resultats (Reeuwijk, 1997). D'aquesta manera es produeix un aprenentatge significatiu (Ontoria, 1996; Ausubel, 1990).

#### **9.1.4 Conclusions sobre la consciència dels alumnes de la revisió i l'explicació de la solució**

El grup d'alumnes se sent satisfet si els càlculs estan ben fets i si després de pensar, treballar i anar revisant la feina han sabut superar les dificultats que els ha plantejat la resolució d'un problema. Declaren dedicar prou temps a la revisió i comproven els seus resultats amb els dels seus companys i es pregunten el sentit de la resposta en acabar. S'ha constatat que el sentit de la resposta trobada se la plantejaven en quatre dels sis problemes proposats i, al cap d'un any, en tots ells. Però només la meitat en acabar de solucionar els problemes comproven la solució. A la vista dels resultats, donen més valor al sentit de la resposta que a la resposta en concret. Ara, si fossin professors no dubtarien en recomanar als seus alumnes que revisessin la solució per comprovar la coherència i evitar errors. La preocupació per una resolució correcta és evident. Tots són conscients que la revisió de la solució final forma part de la resolució de problemes. I encara que tots pensin que és important revisar la solució, no tots són els que li dediquen prou temps (encara que sí la majoria).

La pressa per revisar la solució d'un problema és relativa doncs ningú creu que sigui més important acabar ràpidament un problema trobant una solució qualsevol que entendre perfectament el significat de la solució trobada. Per altra banda, creuen que els alumnes avantatjats en matemàtiques resolen els problemes molt ràpidament. Les matemàtiques són associades amb allò que és cert, amb la possibilitat d'obtenir ràpidament la resposta correcta (Ball, 1988; Schoenfeld, 1985b; Stodolsky, 1985). Aquestes assumpcions culturals es construeixen a l'escola amb l'experiència, en un ambient en què fer matemàtiques vol dir recordar regles explicades pel professor i saber

aplicar l'adequada amb celeritat. Per aquest motiu, se senten satisfets si en poc temps són capaços de solucionar molts problemes. I això pot provocar que no tots els alumnes dediquin prou temps a la revisió.

Qualifiquen amb un notable o més una resolució perfecta en càlculs que doni una resposta absurda, cosa que qüestiona la importància que donen els alumnes a la revisió de la solució. Però si es recorda la distinció que fa Puig (1996) dels termes resultat, solució i resolució, es podria dir que aquest grup no dóna tanta importància al resultat com a la solució i resolució.

### **9.1.5 Conclusions sobre les actituds que tenen els estudiants quan resolten problemes**

Els agrada anar a l'escola perquè s'ho passen bé i estan amb els amics. La majoria afirma que les matemàtiques sempre els ha agradat, i que s'ho passa bé treballant-les. De fet, creuen que la matèria és atractiva independentment del professor, i asseguren que no troben les matemàtiques treballades a classe avorrides.

Per a ells les matemàtiques són creatives i la meitat confessa que li agrada fer volar la imaginació quan fa matemàtiques. En el decàleg que Puig Adam (1958) redactà inclogué en el punt cinquè la necessitat d'ensenyar guiant l'activitat creadora i descobridora de l'alumne. Els alumnes estan agraïts a la seva intuïció per haver sabut resoldre gran part de les activitats que se'ls han proposat, però en cap cas si no han sabut resoldre un problema culpen la manca d'intuïció. Com assenyala el Disseny Curricular Bàsic de matemàtiques de la ESO, la construcció del coneixement matemàtic és inseparable de la intuïció i de les aproximacions inductives imposades per la realització de tasques i la resolució de problemes particulars (MEC, 1989).

D'altra banda, la meitat del grup afirma tenir dificultats però també que amb poc esforç se'n surten. Una minoria afirma tenir dificultats superables amb treball i ganes. Se senten contents si sols han aconseguit resoldre els problemes de classe i se senten satisfets si han trobat el seu camí per resoldre un problema. S'ha constatat que el grup té resistència a l'abandó en front les dificultats sorgides en resoldre problemes de matemàtiques. La satisfacció del grup obtinguda en resoldre un problema d'estratègia o una recreació matemàtica és anàloga a la satisfacció de superar un repte (Deulofeu, 1999; Lester, 1980), idea present en els problemes proposats al quadern dissenyat (ANNEX B). La majoria porta els deures de matemàtiques fets. No creuen que aprenguin més sols que anant a classe. Una minoria té professor particular, i la meitat rep l'ajut quan cal dels seus pares o germans. Una minoria diu que els seus companys li expliquen com fer les coses. De fet, la majoria quan no entén alguna cosa demana ajut als seus companys. També declaren comparar els seus resultats amb els dels seus companys. Així, es pot afirmar que tenen una actitud receptiva davant solucions o opinions dels altres. La meitat del grup assegura que el treball en grup li surt millor que el treball individual no podent-se extreure cap conclusió. Tot i que creuen que un problema només té una solució, creuen que la solució trobada s'ha de discutir en acabar. Això, condueix a la idea de problema entesa com a eina per pensar (Schoenfeld, 1992) i a la creació d'un ambient de resolució de problemes a l'aula en el sentit expressat per Abrantes i Serrazina (1996).

S'ha constatat que quan el grup es planteja un problema no té la voluntat de resoldre'l ràpidament ; prefereix dedicar-hi estona i entendre'l. Insisteixen en llegir-lo almenys

dos cops, un primer cop per comprendre l'enunciat i un segon cop per anotar les dades. Tenen una actitud receptiva i atenta amb les dades: creuen que és important entendre l'enunciat i aclarir totes les dades abans de començar a resoldre el problema. Per aquest motiu confeccionen un llistat amb totes les dades inicialment. El grup majoritàriament ha estat capaç de trobar totes les dades en gairebé tots els problemes proposats però al cap d'un any ho ha aconseguit en tots. També la majoria contesta correctament que sap què ha de trobar en els problemes i un any més tard són més alumnes els que contesten correctament. No creuen que un bon estudiant de matemàtiques arribi sempre de manera directa i ràpida a la solució correcta, pot tenir dificultats o bloquejos. Asseguren que quan feien els problemes estaven tranquils i concentrats.

El grup té la voluntat per entendre la situació fins al darrer detall; creu que a més de l'esforç del professor per explicar-la, cal que ell mateix s'esforci per entendre-la. Conceben un problema de matemàtiques com una tasca de contingut matemàtic amb un enunciat significatiu per a ells i que desitgen abordar i resoldre, com el defineixen Puig (1996), Díaz Rodríguez (1993) i Puig Cerdán (1988). Tots incideixen en la necessitat de com a mínim una doble lectura. Per molt llarg que trobin l'enunciat el llegeixen lentament i el tornen a llegir anotant les dades. Però només la meitat en acabar comprova la solució. Es pregunten el sentit de les respostes, resultats que milloren un any més tard (s'han tornat més crítics).

Es senten satisfets si després de fer matemàtiques s'adonen de quines coses no dominen i si han descobert una regla que podran aplicar després. La meitat se sent satisfeta si s'ha adonat que tenia idees incorrectes. Així, aquest grup respon als dos components complementaris que han de tenir totes les activitats matemàtiques proposades: l'acció i la reflexió (Deulofeu, 2000). Abans d'escriure res, el problema cal tenir-lo pensat i elaborat al cap. Per a aquests alumnes, les matemàtiques tenen un component rellevant de raonament. En finalitzar, creuen que és necessari buscar el sentit de la resposta a manera de revisió per comprovar que es manté una certa coherència amb allò que es demana, cosa que demostra un caràcter reflexiu del grup. De fet creuen que les matemàtiques són raonament i resolució de problemes enlloc de mètodes i càlculs.

La meitat de la classe creu que a l'hora d'avaluar l'assignatura, el professor té en compte els coneixements, la participació i l'actitud a classe; l'altra meitat creu que es té en compte el seu progrés.

Els alumnes creuen que és gràcies al sentit comú i a estudiar molt que els problemes se saben resoldre. S'ha constatat que creuen que la sort no té res a veure, encara que en totes les activitats hi ha una minoria que opina diferent. Creuen que l'estat anímic, la paciència i la perseverança condicionen que se solucioni correctament un problema. Afirmen que els nervis, la por al fracàs i la confiança en un mateix afecten a l'hora de comprendre i solucionar un problema.

## **9.2 Implicacions de l'estudi i suggeriments**

A partir de les conclusions del punt anterior relacionades amb els objectius fixats, a continuació es plantejaran possibles conseqüències de la recerca. Les conseqüències que s'exposaran s'agrupen en tres punts: implicacions didàctiques, implicacions personals i suggeriments per a possibles línies de recerca.

### 9.2.1 Implicacions didàctiques

Un aspecte rellevant de les matemàtiques és la resolució de problemes. Ja en el 1945 Polya distingí quatre fases que succeïen en la resolució de problemes i a mesura que han passat els anys diversos investigadors han anat ampliant o detallant les fases, però el cas és que aquestes s'han acceptat universalment. Els resultats de la recerca han permès apropar-se a com uns alumnes concrets resolen problemes de matemàtiques. Concretament, com aquests alumnes treballen la Fase I d'abordatge i la Fase IV de revisió de la solució.

La pretensió del professor de matemàtiques ha estat dissenyar un conjunt de problemes de matemàtiques no estàndard i recreacions matemàtiques per intentar que els seus alumnes millorin en la resolució de problemes (ANNEX B). L'investigador amb aquesta recerca aporta que és possible dissenyar-lo i dur-lo a la pràctica originant situacions didàctiques d'aprenentatge en resolució de problemes, en particular sobre les Fases I i IV. La metodologia a seguir depèn del propòsit de cada activitat: hi ha activitats que promouen la concentració individual, altres es treballen en grup amb la tècnica del *brainstorming* (intercanvi d'idees i opinions) o amb unes preguntes del professor (acció) per provocar la reflexió, cedint progressivament el control i la responsabilitat de la tasca (resoldre el problema). Com a resultat d'aquesta pràctica es poden obtenir diversos aprenentatges dels alumnes: adquisició o millora de l'hàbit de fer un llistat exhaustiu i complet de totes les dades abans de començar a resoldre el problema, augment en la comprensió del que es pregunta induït per una lectura més atenta, adquisició o millora de la revisió de la solució (entesa com Puig, 1996), una capacitat per contemplar diverses solucions d'un mateix problema, una voluntat per entendre el sentit de la solució.

L'estudi realitzat i els seus resultats obtinguts condueixen a fer les següents recomanacions:

- És convenient dedicar part del temps a crear un ambient de treball per discutir problemes matemàtics no estàndard o resoldre enigmes matemàtics afavorint una mentalitat oberta i crítica en front dels problemes però sempre amb actitud respectuosa vers els companys (tenint cura de diversos aspectes emotius i afectius que poden aparèixer), malgrat tenir un temari extens.
- Enfocar l'aprenentatge dels estudiants a la comprensió de les situacions problemàtiques prestant atenció al conjunt de dades i al què es demana propiciant un instrument important funcional de les matemàtiques per a la millora de la resolució de problemes
- Enfocar l'aprenentatge dels estudiants a la revisió de la solució dels problemes essent crítics amb la pròpia solució i mostrant una mentalitat oberta per discutir altres solucions o vies de resolució
- Deixar prou temps als alumnes per a la reflexió lligada a l'acció de manera que puguin assimilar els resultats finals obtinguts o bé d'una discussió grupal o bé d'una exposició oral o escrita
- Recolzar explícitament l'aprenentatge basat en la interacció i la cooperació entre els alumnes
- Estar atent i ser suficientment flexible per contemplar variants de les situacions problemàtiques inicialment plantejades ajudant a un aprenentatge significatiu en seguir el procés natural de construcció dels estudiants
- Contemplar els dubtes i els errors com intrínsecs a l'aprenentatge de les matemàtiques i ajudar a construir una solució conjuntament amb la classe

- Seguir la perspectiva constructivista de l'aprenentatge i ensenyament: afavorint l'activitat mental constructiva dels estudiants, fent de guia entre ells i els coneixements matemàtics, procurant cedir i traspasar el control i la responsabilitat de l'aprenentatge en la mesura del possible

### 9.2.2 Implicacions personals

Un treball d'aquestes dimensions li ha aportat a l'investigador coneixements de l'àrea de didàctica de les matemàtiques que no tenia. L'autor com a més d'investigador és professor de matemàtiques de secundària i batxillerat amb certa experiència ha gaudit de l'oportunitat de posar en pràctica certs coneixements que anava adquirint, a més de justificar les tècniques que ja utilitzava amb arguments teòrics. Realment era un motiu de satisfacció cada cop que es trobava una metodologia recomanada per algun autor important que recolzava una tècnica que s'estava utilitzant amb els alumnes. També servia per millorar canviant d'enfocament altres aspectes, ja fos provocada per la pròpia ignorància o per haver entrat en un equip amb una dinàmica molt concreta i particular. Però cal dir que gràcies a l'extensa experiència d'aquest equip (entre 25 i 40 anys) i a la seva mentalitat oberta l'investigador ha pogut aprendre d'ells com a professor i experimentar noves tècniques apreses com a investigador.

### 9.2.3 Suggeriments per a possibles línies de recerca

En aquesta recerca s'ha estudiat una situació didàctica sorgida entre la resolució de problemes i la matemàtica recreativa centrada en dos grups de segon de secundària. S'ha constatat que la matemàtica recreativa és un instrument per a la pràctica (i en alguns aspectes, millora) de la resolució de problemes, en particular de la fase d'abordatge i de la fase de la revisió de la solució.

Dins el mateix marc teòric i metodològic de la present investigació, possibles línies de recerca:

- Realitzar un estudi similar però amb grups de segon de secundària amb contextos socioculturals diferents als dels grups escollits per tal de tenir altres referències
- Realitzar un estudi similar però a grups de nivells educatius superiors i inferiors
- Realitzar el mateix estudi emfatitzant la part quantitativa i oblidant la part qualitativa per tal de generalitzar els resultats, augmentant notablement la mostra d'alumnes

Dins el mateix marc teòric, però variant la metodologia, unes altres línies de recerca serien:

- Realitzar una investigació per estudiar si la matemàtica recreativa pot ajudar a millorar que un alumne resolgui els problemes a l'hora de dissenyar un pla d'atac, fer conjectures i cercant estratègies de resolució (Fase II de Polya)
- Realitzar una investigació per estudiar si la matemàtica recreativa pot ajudar un alumne a executar millor l'estratègia de resolució d'un problema (Fase III de Polya)

## **Bibliografia**





- Abelson, R.P. (1979). Differences between Belief and Knowledge Systems. *Cognitive Science*, 3, p. 355-366.
- Abrantes, P. (1994). *O Trabalho de Projecto e a Relação dos Alunos com a Matemática*. Lisboa: APM.
- Abrantes, P. i Serrazina, L. (1996). Matemática para todos (cap.2). Como se aprende. Dins Abrantes, Paulo i Serrazina, Lurdes: *A matemática na Educação Básica*. Lisboa: Ministério da Educação / Departamento de Educação Básica.
- Abreu, G. (1995). A Matemática na vida versus na Escola: Uma questão de cognição ou de Identidades Sociais? *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 11
- Adams, J.L. (1986). *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*. Barcelona: Gedisa.
- Adda, J. (1985). *Pragmatique et questionnements scolaires en mathématiques*. Dins M. Spoeldes, F. Van Beisen, F. Lowenthal i F. Vandamme [eds.]: *Discours, Essays in Educational Pragmatics-I*. Louvain: Acco, p. 223-320.
- Albert, E. (1979). Can Ausubel's theory of meaningful learning become an alternative piagetian psychology? *Science Education*, 63 (1), p. 135-138.
- Aliberas, J. (1989). *Didáctica de les Ciències. Perspectives Actuals*. Vic: Eumo, 1a ed.
- Alonso, J. (1991). Motivar para aprender (cap. 1). Dins Alonso, Jesús: *Motivación y aprendizaje en el aula*. Madrid: Santillana, Colección Aula XXI, p. 17-60.
- Alsina, C. (1991). *Los 90 son nuestros*. Memorias del I CIBEM. París: UNESCO.
- Alsina, C. (2000). *Estimar les matemàtiques*. Barcelona: Columna.
- Alsina, C. [et al.] (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.
- Alsina, C. [et al.] (1998). *8º Congreso Internacional de Educación Matemática: Selección de Conferencias*. Sevilla 14-21 de julio 1996.
- Anderson, J.R. (1976). *Language, memory, and thought*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- André, T. (1986). *Problem solving and education*. Dins G.D. Phye i T. André [eds.]: *Cognitive classroom learning. Understanding, thinking, and problem solving*. New York: Academic Press.
- Ascher, M. (1991). *Ethnomathematics: A multicultural View of Mathematical Ideas*. New York: Chapman & Hall.
- Ausubel, D.P. (1976). *Educational Psychology: A cognitive view*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Ausubel, D.P. (2002). *Adquisición y retención del conocimiento: una perspectiva cognitiva*. Barcelona: Paidós.
- Ausubel, D.P. i Robinson, F.G. (1969). *School Learning*. New York: Holt. Rinehart & Winston.
- Ausubel, D.P.; Novak, J.D. i Hanesian, H. (1978). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas, 2a ed., 1990.
- BACOMET Group (1985). *Perspectives on Mathematics Education*. Papers Submitted by Members of the Bacomet Group. Dordrecht: Kluwer Academic.
- Baker, B.; Cooley, L. i Trigueros, M. (2000). A Calculus Graphing Schema. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (5), p. 557-578.
- Bailey, C; White, C. i Pain, R. (1999). Evaluating qualitative research: dealing with the tension between 'science' and 'creativity'. *Area*, 31 (2), p. 169-178.
- Ball, S. (1988). *La motivación educativa: actitudes, intereses, rendimiento, control*. Madrid: Narcea.
- Baroody, A. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Visor Aprendizaje/MEC.
- Beasley, J.D. (1989). *The Mathematics of Games*. Oxford: Oxford University Press.
- Bell, A. (1996). ¿Aprender a aprender? *UNO*, 9 (juliol), p. 77-83.

- Bell, R. i Cornelius, M. (1988). *Juegos con tablero y fichas: Estímulos a la investigación matemática*. Barcelona: Labor, 1990.
- Beltrán, J.A. (1993). *Procesos, estrategias y técnicas de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.
- Benedito, V. (1982). *La investigación en el ICE de la Universidad de Barcelona*. Barcelona: ICE, Universitat de Barcelona.
- Bergasa, J. [et al.] (1996). *Matemáticas: materiales didácticos: Primer Ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria*. Gobierno de Navarra, Departamento de Educación, Cultura, Deporte y Juventud.
- Best, J.W. i Kahn, J.V. (2003). *Research in education*. Boston: Allyn & Bacon, 9a ed.
- Bettelheim, B. (1987). *Concepciones psicoanalíticas de la psicosis infantil*. Buenos Aires: Paidós.
- Bettelheim, B. (1994). *No hay padres perfectos*. Barcelona: Crítica.
- Bishop, A.J. (1991). *Mathematical Enculturation: a Cultural perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer. (Traducció espanyola: *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós, 1999).
- Bishop, A.J. (1996a). *International handbook of mathematics education*. Dordrecht: Kluwer.
- Bishop, A.J. (1996b). How should mathematics teaching in modern societies relate to cultural values - Some preliminary questions. Dins D.T. Nguyen, T.L. Pham, C. Comiti, D.R. Green, E. Southwell, i J. Izard [eds.]: *Proceedings of the seventh South East Asian Conference on Mathematics Education (SEACME 7)*, p. 19-24. Hanoi: Vietnamese Mathematical Society.
- Blanco, L.J. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. *Epsilon*, 25, p. 49-60.
- Bloom, B. (1996). *Taxonomy of Education Objectives: The Classification of educational goals*. New York: David McKay. Versió castellana: *Taxonomía de los objetivos de la educación. La clasificación de las metas educacionales*. Buenos Aires: El Ateneo, 1971.
- Blum, F. (1955). Action research. A scientific approach?, *Philosophy of Science*, 22 (1), p. 1-7.
- Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies in Mathematics*, 2 (17), p. 125-141.
- Bouvier, A. i George, M. (1979). *Diccionario de matemáticas*. Madrid: Akal, 2a ed., 2000.
- Bracht, G.H. i Glass, G.V. (1968). The External Validity of Experiments. *American Educational Research Journal*, 5, p. 437-474.
- Brady, J.M. (1978). An experiment in teaching strategic thinking. *Creative Computing*, 4 (6), p. 106-109.
- Bright, G.W. i Harvey, J.G. (1988). Games, Geometry and Teaching. *Mathematics Teacher*, abril 1988.
- Bright, G.W.; Harvey, J.G. i Wheeler, M.M. (1985). Learning and Mathematics Games. *Journal for Research in Mathematics Education*. Monograph number 1, NCTM, Reston.
- Bromme, R. i Juhl, K. (1998). Cómo construyen los maestros la comprensión del alumno sobre las tareas en matemáticas: relacionar el contenido con los procesos cognitivos del educando. *Revista de Estudios del Currículum*, 1 (4), p. 162-174.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2 (7), p. 33-115.
- Brousseau, G. (1989). Utilidad e interés de la didáctica para un profesor (1a part). *SUMA*, 4, p. 5-12.

- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (didactique des mathématiques 1970-1990)*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brown, J.S. i Burton, R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science*, 2, p. 155-192.
- Brownell, W.A. (1942). Problem Solving. Dins Henry, [ed.] *The Psychology of Learning*. Chicago: University of Chicago Press.
- Bruera, R. (2000). *La didáctica como ciencia cognitiva*. Rosario: CEDIE.
- Bunge, M. (1980). *Epistemología: curso de actualización*. Barcelona: Ariel.
- Burkhardt, H.; Groves, S.; Schoenfeld, A. i Stacey, K. (1988). *Problem solving- A world view (Proceedings of the problem solving theme group, ICME 5)*. Nottingham, England: Shell Centre.
- Butts, T. (1980). Posing Problems Properly. Dins S. Krulik [ed.]: *Problem Solving in School Mathematics*. Yearbook NCTM, Reston, p. 23-33.
- Cajide, J. (1992). La investigación cualitativa: Tradiciones y perspectivas contemporáneas. *Bordón*, 44 (4), p. 357-374.
- Callejo, M.L. (1991). *Les Représentations Graphiques dans la Résolution de Problèmes de type Olympiades*. Tesi Doctoral. Universitat Paris VII.
- Callejo, M.L. (1994). *Un Club Matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea, 2ª ed., 1998.
- Callejo, M.L. (1999). *Investigar sobre la propia práctica, un medio de desarrollo profesional*. Ponència presentada a les IX JAEM, Lugo. *Boletín seiem*, 5, Granada.
- Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies. Procediments, recursos i estratègies*. Tesi Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Callís, J. (2003). El joc i la formació matemàtica a primària: jocs per aprendre i fer pensar. *Perspectiva Escolar*, 273, p. 23-34.
- Callís, J. (2004). De debò no saben matemàtiques? O, en realitat, qui en sap més? *Perspectiva Escolar*, 284, p. 2-14.
- Callís, J. i Callís, C. (2007). Competències matemàtiques: necessitats i perspectives. *Escola Catalana*, 42 (445), p. 9-13.
- Camous, H. (1995). *Problemas y juegos con la matemática*. Barcelona: Gedisa.
- Campbell, D.T. i Stanley, J.C. (1963). Experimental and Quasi Experimental Designs for Research on Teaching. Dins N.L. Gage *Handbook of Research on Teaching*. Chicago, Ill.: Rand McNally, p. 171-246.
- Cañigüeral, M. i Pol, A. (1998). Estratègies al voltant de la resolució de problemes. *III Jornades de didàctica de la matemàtica*. Girona: 29 i 30 maig.
- Carl, I.M. (1989). Essential Mathematics for the Twenty-first Century: The Position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Mathematics Teacher*, 82 (6), p. 470-474.
- Carpenter, T.P. (1985). Learning to add and subtract. An exercise in problem solving. Dins E.A. Silver [ed.]: *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, p. 17-40. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Carpenter, T.P.; Lindquist, M.M.; Matthews, W. i Silver, E.A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher*, 76, p. 652-659.
- Carpenter, T.P.; Moser, J. i Romberg, T. (1982). *Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.
- Carr, W. i Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza: La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

- Carraher, T.N.; Carraher, D.W. i Schliemann, A.D. (1988). *Na vida, Dez; Na Escola Zero. Os contextos Culturais da Aprendizagem da Matematica*. Sao Paulo: Cortez.
- Carrillo, J. (1996). *Creencias Sobre la Resolución de Problemas. Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral. Universitat de Sevilla.
- Casals Pons, J. (1986). *La filosofía de Montaigne*. Barcelona: Edicions 62.
- Cawthron, E.R. i Rowell, J.A. (1978). Epistemology and science education. *Studies in Science Education*, 5, p. 31-59.
- Chamoso, J.M. i Rawson, W. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de matemáticas. *Suma*, 36 (febrer), p. 33-41.
- Charles, I.E. i Silver, E.A. (1988). *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics.
- Chevallard, Y.; Bosch, M. i Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.
- Chi, M.T.H. i Glaser, R. (1986). Capacidad de resolución de problemas. Dins Sternberg, R.J. [ed.]: *Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información*. Barcelona: Labor Universitaria, p. 294-325.
- Clements, S.K. (2000). Linking Curriculum and Instruction to Performance Standards. Dins Roger Pankratz and Joe Petrosko, [eds.]: *All Children Can Learn*. San Francisco: Jossey-Bass, p. 98-115.
- Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos*. Tesis Doctoral, Universitat Autònoma Barcelona.
- Cockcroft, W.H. [dir.] (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: MEC.
- Coll, C. (1986a). Comunicació personal. *Marc Curricular per a l'Ensejament Obligatori*. Barcelona: Generalitat de Catalunya.
- Coll, C. (1987). *Psicología y Currículum: una aproximación psicopedagógica a la elaboración del currículum escolar*. Cap. 3, Barcelona: Paidós.
- Coll, C. (1993). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Buenos Aires: Paidós Educador.
- Coll, C. (1996). Constructivismo y educación escolar: ni hablamos siempre de lo mismo ni lo hacemos siempre desde la misma perspectiva epistemológica. *Anuario de Psicología*, 69, p. 153-178.
- Coll, C. (1998). *La psicología de la instrucció i les pràctiques educatives escolars*. Dins C. Coll [coord.]: *Psicología de la instrucció*, p. 21-98. Barcelona: Universitat Oberta de Catalunya.
- Colomina, R.; Onrubia, J. i Rochera i M.J. (2001). Interactividad, mecanismos de influencia educativa y construcción del conocimiento en el aula. Dins Cèsar Coll, Alvaro Marchesi i J. Palacios [comps.]: *Desarrollo Psicológico y Educación 2. Psicología de la Educación Escolar*, p.437-458. Madrid: Alianza.
- Contreras, L.C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la Resolución de Problemas*. Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Cook, T.D. i Reichardt, Ch.S. (1986). *Métodos cualitativos y cuantitativos en investigación evaluativa*. Madrid: Morata.

- Cooney, T.J. (1985). A beginning teacher's view of problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (5), p. 324-336.
- Cooney, T.J.; Shealy, B.E. i Arvold, B. (1998). Conceptualizing Belief Structures of Preservice Secondary Mathematics Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29 (3), p. 306-333.
- Corbalán, F. (1994). *Juegos matemáticos para Secundaria y Bachillerato*. Madrid: Síntesis.
- Corbalán, F. (1997). *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y tipología de jugadores en el alumnado de secundaria*. Tesis Doctoral, Universitat Autònoma Barcelona.
- Corbalán, F. i Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *UNO*, 7 (gener), p. 71-80.
- Corbalán, F. i Deulofeu, J. (1998). Los juegos, las matemáticas y su enseñanza. *UNO*, 18, p. 5-8.
- Cubillo, C. i Ortega, T. (2002). Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las matemáticas. *UNO*, 31 (juliol), p. 57-72.
- Davis, Ph. J. i Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience*. London: Penguin Books.
- Décroly, O. i Boon, G. (1965). *Iniciación general al método de Décroly*. Buenos Aires: Losada.
- Denzin, N.K. (1970). *The research act: A theoretical introduction to sociological methods*. Chicago: Aldine.
- Denzin, N.K. (1988). Triangulation. Dins J.P. Keeves [ed.]: *Educational Research, Methodology and Measurement: An International Handbook*. Oxford: Pergamon.
- Departament d'Educació (2007a). Decret 142/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Primària a Catalunya (DOGC 4915, de 29-06-2007).
- Departament d'Educació (2007b). Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'Educació Secundària Obligatòria a Catalunya (DOGC 4915, de 29-06-2007).
- Deulofeu, J. (1999). Recreaciones, juegos y actividades matemáticas. *UNO*, 20, p. 89-101.
- Deulofeu, J. (2000). Pensant en el 2001: resolució de problemes, activitat matemàtica i raonament. *Perspectiva escolar*, 242, p. 36-43.
- Dewey, J. (1910). *How We Think*. Boston: Heath, 1910. Nova edició de 1991 a Prometheus Books.
- Díaz Rodríguez, J.J. (1993). *Guía para elaboración de unidades didácticas. Enseñanza Secundaria*. Jaén: Andalucía. Consejería de Educación y Ciencia. Delegación Provincial de Jaén.
- Dijkstra, E. W. (1991). Instructional design models and the representation of knowledge and skills. *Educational Technology*, 31 (6), p. 19-26.
- Dossey, J.; Mullis, I.; Lindquist, M. i Chambers, D. (1988). *The mathematics report card: Are we measuring up? Trends and achievement based on the 1986 National Assessment*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
- Douday, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), p. 5-31.
- Driver, R. (1982). Children's learning in science. *Educational Analysis*, 4, (2), p. 69-79.
- Dubinsky, Ed. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, 8 (3), p. 24-41.

- Duncker, K. (1945). On Problem Solving. *Psychological Monographs*, 58 (5), Tot el núm. 270). American Psychological Association, APA.
- Eco, U. (1982). *Cómo se hace una tesis. Técnicas y procedimientos de investigación, estudio y escritura*. Barcelona: Gedisa.
- Edo, M. (1998). Juegos y matemáticas. Una experiencia en el ciclo inicial de primaria. Dins *UNO, Revista de Didáctica de las matemáticas*, 18, octubre 1998.
- Edo, M. (2002). *Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics*. Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Edo, M i Deulofeu, J. (2006). Investigación sobre juegos, interacciones y construcciones de conocimientos matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias*, 2006, 24 (II), p. 257-268.
- Elliott, J. (1978). What is Action Research in Schools. *Journal of Curriculum Studies*, 10 (4), p. 355-357.
- Elliott, J. (1989). *Pràctica, recerca i teoria en educació*. Vic: Eumo.
- Elshout, J.J (1985). *Problem solving and education*. Early conference. Lewen. Juny de 1985.
- Encyclopedia Britannica (1974). Number Games and Other Mathematical Recreations. Dins *Encyclopedia Britannica*, 1974, v. 13, p. 345-357.
- Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, 5, p. 23-34.
- Enfedaque, J. (2005). L'Informe PISA sobre les matemàtiques. *Guix*, 312, p. 41-46.
- Enfedaque, J. (2005). *La resolución de ecuaciones de los alumnos de 12 a 16 años. Un estudio longitudinal (1990-91 y 2004-05)*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.
- Ennis, R.H. (1987). *A Taxonomy of Critical Thinking Dispositions and Abilities*. Dins J. Baron i R. Sternberg [eds.]: *Teaching Thinking Skills: Theory and Practice*. New York: Freeman.
- Ennis, R.H. (1996). *Critical Thinking*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: Farmer.
- Evertson, C.M. i Green, J.L. (1986). Observation as inquiry and method. Dins M.C. Wittrock [ed.]: *Handbook of Research on Teaching*, p. 162-213, New York: Macmillan, 3a ed.
- Evertson, C.M. i Green, J.L. (1989). La índole de la observación y de los instrumentos observacionales. Dins M.C. Wittrock [ed.]: *La investigación de la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación*. Barcelona, MEC/Paidós, p. 306-310.
- Fayos, P. (1996). *Resolución de Problemas de matemáticas: un análisis cualitativo de la realidad en alumnos de segunda etapa de EGB desde un punto de vista cognitivo y del procesamiento de la información. Propuesta de innovación*. Tesis doctoral. Tarragona: Universitat Rovira i Virgili.
- Ferreres, V. (1992). *La cultura profesional de los docentes: desarrollo profesional y cultura colaborativa*. Dins Actas II CIOE, p. 3-40. Sevilla.
- Ferreres, V. [Coordinador] (1997). *El desarrollo profesional del docente: evaluación de los planes provinciales de formación*. Barcelona: Oikos-Tau.
- Ferrero, L. (1991). *El juego y la matemática*. Madrid: La Muralla.
- Fishbein, M. i Ajzen, I. (1975). *Belief, Attitude, Intention and Behavior: An Introduction to Theory and Research*. Reading: Addison Wesley.
- Flavell, J.H. (1976). *Metacognitive aspects o problem solving*. Dins L. Resnick [ed.]: *The nature of intelligence*, p. 231-236. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Fletcher, J.L. (1971). The effectiveness of simulation games as learning environments. *Simulation and Games*, 2 (4), p. 425-454.

- Fortuny, J.M. (1990). *Información y control en la educación matemática*. Dins Llinares, S. i Sánchez, V. [eds.]: *Teoría y Práctica de la Educación matemática*. Sevilla: Alfar.
- Frank, M.L. (1988). Problem Solving and Mathematical Beliefs. *Arithmetic Teacher*, 35 (5), p. 32-34.
- Freudental, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.
- Gagné, R.M. (1965). *Las condiciones del aprendizaje*. Madrid: Aguilar, 1971.
- Gairín, J. (1987). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre la educación matemática*. Barcelona: PPU.
- Gairín, J. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las Matemáticas. *Educación*, 17, p. 105-118.
- García Azcárate, A. i Corbalán, F. (1998). Los juegos de conocimientos. Un recurso para enseñar matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 18, p. 47-57.
- Gardner, H. (1995). *Inteligencias múltiples: La teoría en la práctica*. Buenos Aires: Paidós.
- Gardner, M. (1983). *¡Ajá! Paradojas: Paradojas que hacen pensar*. Barcelona: Labor.
- Gardner, M. (1987). *Carnaval Matemático*. Madrid: Alianza.
- Gardner, M. (1995). *Circo Matemático*. Madrid: Alianza.
- Garofalo, J. (1989). Beliefs and Their Influence on Mathematical Performance. *Mathematical Teacher*, 82 (7), p. 502-505.
- Garofalo, J. i Lester, F.K. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, p. 163-176.
- Garret, R.M. (1988). Resolución de problemas y creatividad: Implicaciones para el currículum de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, 6 (3), p. 224-230.
- Gascón, J. (1989). *El aprendizaje de métodos de resolución de problemas de matemáticas*. Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona.
- Gascón, J. (1992). Què s'entén per Resolució de Problemes de Matemàtiques? *BIAIX*, 2, p. 10-17.
- Gaulin, C. (1982). La resolution de problèmes: le mot d'ordre pour les années 1980-90. Quoi en penser? Dins *La didactique mathématique au primaire. Actes du Colloque Mathématique*. Département des Sciences de l'Éducation. Université du Québec au Chicoutimi.
- Geertz, C. (1983). *Local knowledge*. New York: Basic Books. (Traducció espanyola: Barcelona: Paidós, 1994).
- Gil, D. [et al.] (1988). La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. *Investigación en la escuela*, 6. Sevilla.
- Gilbert, J.K. i Watts, D.M. (1983). Concepts, misconceptions and alternative conceptions: changing perspectives in science education. *Studies in Science Education*, 10, p. 61-98.
- Girondo, L. (1998). Factors a considerar en treballar els problemes a primària. *Perspectiva Escolar*, 223, p. 12-21.
- Girondo, L. i Dalmau Casademont, S. (2001). *Prisma, matemàtiques, 6, Educació Primària. Proposta didàctica*. Barcelona: Casals.
- Goetz, J. i Le Compte, M.D. (1984). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. London: Academy Press. Traducció castellana, *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*, Madrid: Morata, 1988.

- Goldin, G.A. (1982). The Measure of Problem Solving Outcome. Dins F.K. Lester i J. Garofalo [eds.]: *Mathematical problem Solving. Issues in Research*. The Franklin Institute Press, Philadelphia, p. 87-101.
- Goleman, D. (1996). *Inteligencia emocional*. Barcelona: Kairós.
- Gómez-Chacón, I.M. (1997a). *Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas*. Tesis Doctoral. Universitat Complutense, Madrid.
- Gómez-Chacón, I.M. (1997b). La alfabetización emocional en educación matemática: actitudes, emociones y creencias. *UNO*, 13, p. 7-22.
- Gómez-Chacón, I.M. (1998a). *Matemáticas y contexto*. Apuntes IEPS, núm. 64. Madrid: Narcea.
- Gómez-Chacón, I.M. (1998b). Creencias y contexto social en matemáticas. *UNO*, 17, p. 83-104.
- Gómez-Chacón, I.M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea. Mates para aprender a pensar mejor, p. 7.
- González, R. i Latorre, A. (1987). *El maestro investigador. La investigación en el aula*. Barcelona: Graó.
- Goñi, J.M.; C. Alsina; D. Ávila; C. Burgués; J. Comellas; F. Corbalán; M.A. García Delgado; C. Hahn i J. Serra *El currículum de matemáticas en los inicios del s. XXI*. Barcelona: Graó. Biblioteca de UNO, 152.
- Gordon, W.J.J. (1963). *Sinéctica: el desarrollo de la capacidad creadora*. México: Herrero Hnos.
- Guba, E.G. (1983). Criterios de credibilidad en la investigación naturalista. Dins J. Gimeno Sacristán i A. Pérez Gómez, *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Madrid: Akal.
- Guba, E.G. i Lincoln, Y.S. (1985). *Naturalistic Inquiry*. London: Sage.
- Gutiérrez, R. (1987). Modelo gagnetiano. Psicología y aprendizaje de las ciencias. El modelo de Gagné. *Enseñanza de las Ciencias*, 7 (2), p. 147-157, 1989.
- Guzmán, M. de (1985). Juegos matemáticos en la enseñanza. Dins *Actas de las IV Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática*, IV JAEM 1984, Sociedad Canaria de Profesores de Matemática "Isaac Newton", p.49-85.
- Guzmán, M. de (1989). Juegos y matemáticas. *Suma*, 4, p. 61-64.
- Guzmán, M. de (1991). *Para pensar mejor*. Barcelona: Labor.
- Guzmán, M. de (1992a). Tendències innovadores en educació matemàtica. *BIAIX*, 7, setembre, p. 7-33.
- Guzmán, M. de (1992b). Wining Strategies for Your Games. *Mathematics in Education*, University of La Verne. California, USA: La Verne.
- Guzmán, M. de (1993). Enseñanza de las matemáticas. Dins K. Gil i M. de Guzmán: *Enseñanza de las ciencias y las matemáticas*. Madrid: Popular.
- Hadamard, J. (1945). Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field. *The Journal of Philosophy*, 42 (12), p. 333-334.
- Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, p. 519-524.
- Halsey, A.H. (1972). *Educational Priority Volume 1: EPA problems and policies*. London: HMSO.
- Harvey, J.G. i Romberg, T.A. (1980). *Problem-solving studies in mathematics*. Madison, WI: Wisconsin Research and Development Center Monograph Series.



- Hayes, J.R. (1980). *Teaching Problem Solving Mechanisms*. Dins D.T. Tuma i F. Reif [eds.]: *Problem Solving and Education: Issues in Teaching and Research*. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, p. 141-147.
- Heller, J. i Hungate, H. (1985). Implications for mathematics instruction of research on scientific problem solving. Dins E.A. Silver [ed.]: *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, p. 83-112. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hernández, J. (1996). *Sobre habilidades en la resolución de problemas aritméticos verbales, mediante el uso de dos sistemas de representación yuxtapuestos*. Tesis Doctoral, Universitat de La Laguna.
- Hinsley, D.A.; Hayes, J.R. i Simon, H.A. (1977). *From words to equations: meaning and representation in algebra word problems*. Dins M. Just i P. Carpenter [eds.]: *Cognitive processes in comprehension*, p. 89-106, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Hoffman, K. (1989). *The science of patterns. A practical philosophy of mathematics education*. Paper presented to the Special Interest Group for Research in Mathematics Education at the 1989 Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco.
- Hoinville, G. i Jowell, R. (1985). *Survey research practice*. London: Gower.
- Hopkins, D. (1985). *A teacher's Guide to Classroom Research*. Milton Keynes, Filadelfia: Open University Press.
- Howson, A.G. (1979). *Análisis Crítico del Desarrollo Curricular en Educación Matemática*. Dins H. Steiner i B. Christiansen. [eds.]: *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática*, v. IV. París: Unesco.
- Howson, A.G.; Kahane, J.-P. i Lauginie, P. (1986). *School Mathematics in the 1990s. ICMI Study Series*. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- Howson, A.G. i Wilson, B. (1987). *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90, ICMI, Kuwait 1986*. València: Mestral.
- Howson, A.G.; Keitel, C. i Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum Development in Mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Huizinga, J. (1954). *Homo ludens. El juego como elemento de la historia*. Madrid: Alianza, 2002.
- Husén, T. (1967). *International study of achievement in mathematics: a comparison of twelve countries*. New York: John Wiley & Sons.
- Inbar, M. i Stoll, C.S. (1970). Games and learning. *Interchange*, 1 (2), p. 53-61.
- Johnson, D.A. i Rising, G.R. (1967). *Guidelines for teaching mathematics*. Belmont: Wadsworth.
- Johnstone A.H. (1993). Introduction. Dins C. Wood i R. Sleet [eds.]: *Creative problem solving chemistry*. London: The Royal Society of Chemistry.
- Jones, H.L. i Russell, J.M. (1979). Hierarchical learning paradigm. *Journal of Research in Science Teaching*, 16 (6), p. 489-499.
- Kantowski, M.G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8 (3), p. 163-180.
- Kantowski, M.G. (1980). Some Thoughts on Teaching for Problem Solving. Dins Krulik, S. i Reys, R.E. [eds.]: *Problem Solving in School Mathematics*. Reston, Va: NCTM.
- Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: issues related to modeling. Dins E.A. Silver [ed.]: *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, p. 381-398. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Keitel, Ch. (1993). *Implicit mathematical models in social practice and explicit mathematical teaching by applications*. Jan de Lange [et al.] [eds.].
- Kemmis, S. i McTaggart, R. [eds.] (1988). *The Action Research Reader*. Geelong: Deakin University Press, 3a ed.
- Kilpatrick, J. (1969). Problem solving and creative behavior in mathematics. Dins J.W. Wilson i L.R. Carry [eds.]: *Studies in Mathematics*, 195. Reviews of recent research in mathematics education, 195. Standford, CA: School Mathematics Study Group.
- Kilpatrick, J. (1978). *Variables and Methodologies in Research on Problem Solving*. Dins Hatfield, L.L. i Bradbard, D.A. [eds.]: *Mathematical problem solving: papers from a research workshop*. Columbus: ERIC Clearinghouse for Science.
- Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. Dins E.A. Silver [eds.]: *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, p. 1-15. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.
- Kilpatrick, J. (1992). The History on Research on Mathematics Education. Dins Grouws, D.A. [ed.]: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.
- Koehler, A.S. i Grouws, D.A. (1992). Mathematics Teaching Practices and Their Effects. Dins D.A. Grouws [ed.]: *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, p. 115-126. New York: MacMillan.
- Koffka, K. (1927). Introspection and the Method of Psychology. Dins Wolfgang Schirmacher i Sven Nebelung [eds.]: *German Essays on Psychology*. New York: 2001.
- Krygowska, A.Z. (1980). El proceso de matematización en la enseñanza. Dins J. Piaget i altres: *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Madrid: Alianza, p.187-195.
- Krulik, S. [ed.] (1980). *Problem solving in school mathematics*. (1980 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). Reston, VA: NCTM.
- Krulik, S. i Rudnick, J.A. (1987). *Problem Solving: a Handbook for Teachers*. Boston: Allyn & Bacon.
- Kuhs, T.M. i Ball, D.L. (1986). *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions* (Research Memo). East Lansing, MI: Michigan State University, Center on Teacher Education.
- Lakatos, I. (1982). *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza.
- Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solution Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal*, 27 (1), p. 29-63.
- Lenneberg, Eric H. (1967). *Fundamentos biológicos del lenguaje*. Madrid: Alianza.
- Lesh, R. (1982). *Modeling students' modeling behaviours*. Proceedings of PME-NA, 4, Athens, Georgia.
- Lester, F.K. (1980). Research on Mathematical problem solving. Dins R.J. Shumway [ed.]: *Research in Mathematics Education*. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lester, F.K. (1985). Methodological Considerations in research on Mathematical Problem-Solving Instruction. Dins E. Silver [ed.]: *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, p. 41-69. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

- Lester, F.K. (1987). *Why is problem solving such a problem? Reactions to a Set of Research Papers*. Montreal: PME, 1987.
- Lester, F.K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), p. 660-675.
- Lester, F.K.; Garofalo, J. i Kroll, D.L. (1989a). *The role of metacognition in mathematical problem solving: A study of two grade seven classes*. Final report to the National Science Foundation of NSF project MDR 85-50346.
- Lester, F.K.; Garofalo, J. i Kroll, D.L. (1989b). Self-Confidence, Interest, Beliefs and Metacognition: Key Influences on Problem Solving Behavior. Dins McLeod i Adams [eds.]: *Affect and Mathematical Problem Solving*. New York: Springer-Verlag.
- Lladó, C. i Jorba, J. (1998). L'activitat matemàtica i les habilitats cognitivolingüístiques. Dins J. Jorba i Bisbal; I. Gómez i Alemany i Àngels Prat i Pla [eds.]: *Parlar i escriure per aprendre. Ús de la llengua en situació d'ensenyament-aprenentatge des de les àrees curriculars*. Bellaterra: ICE de la UAB.
- Llinares, S. (1992). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias epistemológicas de los profesores. Dins Marcelo, Carlos [ed.]: *La investigación sobre la formación del profesorado: métodos de investigación y análisis de datos*, p. 57-95. Buenos Aires: Cincel.
- Lorenzo, J. (1996). La resolución de problemas. Una revisión teórica. *Suma*, 21, p. 11-20.
- Lucas, J. (1974). The teaching of heuristic problem-solving strategies in elementary calculus. *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, p. 36-46.
- Mallart, A. (2005). *Investigaciones históricas en el campo de la educación científica y matemática*. Treball inèdit. Departament de Didàctica de les Ciències Experimentals i la Matemàtica. Universitat de Barcelona.
- Mandler, G. (1989). Affect and Learning: Causes and Consequences of Emotional Interactions. Dins D.B. McLeod i V.M. Adams [eds.]: *Affect and Mathematical Problem Solving*, p. 3-19. New York: Springer-Verlag.
- Martínez, A. (1999). Estudio sobre la implicación lógica: modelos prácticos, modelos teóricos y claridad de las situaciones modélicas. *Suma*, 32 (novembre), p. 23-24.
- Martínez Recio, A. i Rivaya, F.J. (1989). *Una metodología activa y lúdica de enseñanza de la Geometría elemental*. Colección Matemáticas. Cultura y Aprendizaje, 16. Madrid: Síntesis.
- Mason, J.; Burton, L. i Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. Addison-Wesley. London. Consultada la versió castellana de 1988: *Pensar matemáticamente*. Madrid: Labor-MEC, 1988.
- Mayer, R.E. (1983). *Thinking, Problem Solving, Cognition*. New York: Freeman. Traducció castellana: Barcelona: Paidós, 1986.
- Mayer Committee (1992a). *Employment Related Key Competencies: A Proposal for Consultation*. Melbourne: The Mayer Committee.
- Mayer Committee (1992b). *Key Competencies. Report of the Committee to advise the Australian Education Council and Postcompulsory Education and Training*. Canberra: AEC and MOVEET.
- McClintock, M.K. (1979). Innate behavior is not innate. *Signs*, 4, p. 703-710.
- McLeod, D.B. (1989). The Role of Affect in Mathematical Problem Solving. Dins McLeod, D.B. i Adams, V.M. [eds.]: *Affect and Mathematical Problem Solving*, p. 20-36. New York: Springer-Verlag.

- McLeod, D.B. (1992). *Research on Affect in Mathematics Education: A reconceptualization*. Dins Grouws, D.A. [ed.]: *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, p. 575-596. New York: MacMillan. MEC, 1989: 481.
- McLeod, D.B. (1993). Affective Responses to Problem Solving. *The Mathematics Teacher*, 86 (9), p. 761-763.
- McLeod, D.B. (1994). Research on Affect and mathematics learning in the JRME:1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), p. 637-647.
- McLeod, D.B. i Adams, V.M. [eds.] (1989). *Affect and Mathematical Problem Solving*. New York: Springer-Verlag.
- Mead, G.H. (1934). *Mind, self and society*. Chicago: University of Chicago Press.
- Meirovitz, M. i Jacobs, P. (1983). *Desafie a su inteligencia*. Barcelona: Martínez Roca, 1985.
- Merton, R.K. i Kendall, P.L. (1946). The Focused Interview. *The American Journal of Sociology*, 51, (6) (maig, 1946), p. 541-557.
- Milne, W.J. (1897). *A mental arithmetic*. New York: American Book.
- Ministerio de Educación (2007a). *REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria* (BO del E núm. 5 de 5-01-2007).
- Ministerio de Educación (2007b). *ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria* (BO del E núm. 174 de 21-07-2007).
- NCTM. (1975). *Mathematics learning in early Childhood*. Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (1980). *An Agenda for Action*. NCTM, Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (1981). *Report on the Second National Assessment of the Educational Progress*. NCTM. Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM. (1985). *The Secondary School Mathematics Curriculum. 1985 Yearbook*. Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM (1989). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*. Versió castellana de la SAEM *Thales* (1991). Sevilla.
- NCTM. (1991). *Professional Standards for Mathematics Teachers*. Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics.
- NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics.
- Nesher, P. (1980). The Stereotyped Nature of School Word Problems. *Learning of Mathematics*, 1, p. 41-48.
- Newell, A. i Simon, H.A. (1972). *Human problem solving*. New Jersey: Prentice Hall.
- Niss, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, p. 21-29.
- Novak, J.D. (1961). An approach to the interpretation and measurement of problem solving ability. *Science Education*, 45 (2), p. 122-131.
- Novak, J.D. (1987). Human constructivism: Toward a unity of psychological and epistemological meaning making. Dins J. D. Novak [ed.]: *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics Education*. Ithaca, NY: Department of Education, Cornell University.
- Novak, J.D. i Gowin, D.(1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.
- Onslow, B. (1990). Overcoming the conceptual obstacles: the qualified use of a game. *School Science and Mathematics*, 90 (7), p. 581-592.

- Ontoria, A. (1996). *Mapas conceptuales en el aula: una técnica para aprender*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.
- Osborn, A.F. i Milbank, J.E. (1987). *The effects of early education: a report from the Child Health and Education Study*. Oxford: Clarendon.
- Patton, M.Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Beverly Hills: Sage.
- Pehkonen, E. i Törner, G. (1996). Mathematical beliefs and different aspects of their meaning. *ZDM*, 96 (4), p. 101-108.
- Pérez Gómez, A.I. i Gimeno, J. (1983). *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Madrid: Akal.
- Perrenoud, P. (2000). *Pédagogie différenciée: des intentions à l'action*. Paris: ESF, 2a ed.
- Perspectiva Escolar (1981). Número monogràfic sobre Jean Piaget, núm. 54. Barcelona: Rosa Sensat.
- Perspectiva Escolar (2003). Número monogràfic sobre jocs matemàtics, núm. 273. Barcelona: Rosa Sensat.
- Piaget, J. (1928). *The language and thought of the child*. New York: Harcourt Brace.
- Piaget, J. (1930). *The child's conception of physical causality*. New York: Harcourt Brace.
- Piaget, J. (1954). *The construction of reality in the child*. New York: Ballantine Books.
- Piaget, J. (1971). *The child's conception of time*. New York: Ballantine Books.
- Piaget, J. (1982). *Juego y desarrollo*. Barcelona: Grijalbo.
- Piaget, J. (1986). *La epistemología genética*. Madrid: Debate.
- Piaget, Jean i García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.
- Plata, M.A. (1998). *A aprendizaxe das matematicas dense os modelos de mediacion cognitiva: a practica avaliativa dos profesores e as suas concepcions sobre a area e o seu ensino como contexto de interaccion*. Tesi doctoral. Universitat de Santiago de Compostela.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press. (*Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1970).
- Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.
- Polya, G. (1969). *The goals of mathematical education*. Mathematically Sane. Stanford University.
- Polya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*, vol. 2, New York: Wiley.
- Proudfit, L.A. (1981). The examination of problem-solving processes by fifth-grade children and its effect on problem-solving performance. *Disertation Abstracts International*, 41, 3932A.
- Puig Adam, P. (1958, 1972). *Curso de geometría métrica*. Biblioteca Matemática.
- Puig Adam, P. (1960). *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid: MEC.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- Puig, L. i Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.
- Reeuwijk, M. van (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO*, 12 (abril), p. 9-16.
- Resnick, L.B. (1988). Treating mathematics as an ill-structured discipline. Dins R. Charles i E. Silver [eds.]: *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, p. 32-60. Reston, VA: NCTM.
- Resnick, L.B. i Collins, A. (1996). Cognición y aprendizaje. *Anuario de Psicología*, 69.

- Resnick, L.B. i Ford, W.W. (1981). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Madrid: Paidós.
- Rico Romero, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico Romero, L. (1998). Concepto de currículum desde la educación matemática. *Revista de Estudios del Currículum*, 1 (4), p. 7-42.
- Rincón, D. del; Arnal, J.; Latorre, A. i Sans, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson.
- Ring, D.G. i Novak, J.D. (1971). The effects of cognitive structure variables on achievement in college chemistry. *Journal of Research in Science Teaching*, 8 (4), p. 325-333.
- Rokeach, M. (1968). *Beliefs, Attitudes and Values*. San Francisco: Jossey-Bass.
- Romberg, T. (1992). Perspectives on Scholarship and Research Methods. Dins D. Grouws [ed.]: *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, p. 49-64.
- Romberg, T. i Carpenter, T. (1986). Research in teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. Dins Merlin C. Wittrock [ed.]: *Handbook of research on teaching*, p. 850-873. New York: Macmillan, 3a ed.
- Roth, Walter E. (1902). Games and amusements. *North Queensland Ethnographic Bulletin*, 4, p. 7-24.
- Ryle, G. (1949). *The concept of mind*. London: Hutchinson.
- Santaló, L.A. (1975). *L'educació matemàtica, avui*. Barcelona: Teide.
- Santaló, L.A. (1993). *La matemàtica: una filosofia i una tècnica*. Vic: Eumo.
- Santaló, L.A. (1994). *La enseñanza de la matemática en la educación intermedia*. Madrid: Rialp.
- Santos Guerra, M.A. (1988). La evaluación cualitativa de planes y centros de perfeccionamiento de profesorado: una forma de mejorar la profesionalidad docente. *Investigación en la Escuela*, 6, p. 21-39.
- Santos Guerra, M.A. (1990). *Hacer visible: lo cotidiano. Teoría y práctica de la evaluación cualitativa de centros escolares*. Madrid: Akal.
- Schoenfeld, A.H. (1979). Can Heuristics be Taught? Dins J.Lockhead [ed.]: *Cognitive process instruction. Research in Teaching Thinking Skills*. Filadelfia: Franklin Institute Press.
- Schoenfeld, A.H. (1985a). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- Schoenfeld, A.H. (1985b). Ideas y tendencias en la resolución de problemas. Dins *La Enseñanza de las Matemáticas a debate*. Madrid: MEC, p. 25-30.
- Schoenfeld, A.H. (1987a). What's all the fuss about Metacognition? Dins A.H. Schoenfeld [ed.]: *Cognitive Science and Mathematics Education*, p. 189-215. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Schoenfeld, A.H. (1987b). Confessions of an accidental theorist. *Learning of Mathematics*, 7 (1), p. 30-38.
- Schoenfeld, A.H. (1989). Problem solving in context(s). Dins Charles, R. i E. Silver [eds.]: *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. LEA i NCTM, Reston, p. 82-92.
- Schoenfeld, A.H. (1990). *A Source Book for College Mathematics Teaching*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Schoenfeld, A.H. (1991a). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. Dins J.F. Voss, D.N. Perkins i J.W. Segal [eds.]: *Informal reasoning and education*, p. 311-343. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Schoenfeld, A.H. (1991b). What's all the fuss about Problem Solving? *ZDM*, 9, 91.
- Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. Dins D.A. Grouws [ed.]: *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*, p. 334-389. New York: MacMillan.
- Schoenfeld, A.H. (2000). Purposes and Methods of Research in Mathematics Education. *Notices of the AMS*, 47 (6), juny/juliol 2000. Traducció espanyola de Juan Godino.
- Secada, W.G. [et al.] (1997). *Equidad y enseñanza de las matemáticas: nuevas tendencias*. Madrid: Morata.
- Segarra, L. (2000). *Problemates. Recull de problemes matemàtics per a totes les edats*. Barcelona: Graó.
- Segarra, L. (2001). *Enigmes i jocs matemàtics*. Barcelona: Proa.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections... *Educational Studies in Mathematics*, 22, p. 1-36.
- Shaughnessy, M. (1985). *Problem-solving derailers: The influence of misconceptions on problem solving performance*. Dins Silver, E.A. [ed.]: *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, p. 399-416. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Shell Centre for Mathematics Education (1993). *Problemas con pautas y números*. Bilbao: Universitat del País Basc.
- Silver, E.A. (1985). Research on Teaching Mathematical Problem Solving: Some underrepresented Themes and Directions. Dins E.A. Silver [ed.]: *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*, p. 247-266. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Simon, H.A. (1977). *Models of Discovery and other topics in the methods of science*. Dordrecht: Reidel.
- Simon, H.A. (1980). Problem solving and education. Dins D. Tuma i F. Reif [eds.]: *Problem solving and education: Issues in teaching and research*, p. 81-96. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Skemp, R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata.
- Skemp, R. (1985). *La enseñanza de la Matemática a debate*. Madrid: MEC.
- Smith, A. (1973). *Four uses of heuristics*. Rochdale, England: Panparameter.
- Smith, J.E. (1976). Analysis of qualitative data. *Annual Review of Psychology*, 27, p. 487-499.
- Smith, J.K. (1983). Quantitative versus qualitative research: an attempt to clarify the issue. *Educational Research*, 15 (1), p. 4-12.
- Spindler, G.D. (2000). *Fifty years of anthropology and education: 1950-2000: a Spindler anthology*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Stanic, G. i Kilpatrick, J. (1988). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. Dins R. Charles i E. Silver [eds.]: *The teaching and assessing of mathematical problem solving*, p. 1-22. Reston, VA: NCTM.
- Steiner, H.G. (1980). *Comparative Studies of Mathematics Curricula. Change and Stability 1960-1980*. Bielefeld: Universitat de Bielefeld.
- Steiner, H.G. i Christiansen, B. (1979). *Nuevas Tendencias en la Enseñanza de las Matemáticas*, v. I, París, Unesco.
- Steiner, H.G. [et al.] (1984). *Theory of Mathematics Education (TME)*, Occasional Paper 54, ICME 5.
- Stenhouse, L. (1979). A case study in comparative education. Particularity and generation. *Comparative Education*, 15, p. 5-10.

- Stenhouse, L. (1984). *Investigación y Desarrollo del Currículo*. Madrid: Morata.
- Stipek, D.J. i Weisz, J.R. (1981). Perceived personal control and academic achievement. *Review of Educational Research*, 51 (1), p. 101-137.
- Stodolsky, S.S. (1985). Telling math: Origins of math aversion and anxiety. *Educational Psychologist*, 20, p. 125-133.
- Summers, George, J. (1988). *Juegos de ingenio 2. Los mejores enigmas y juegos de inteligencia*. Barcelona: Martínez Roca.
- Suydam, M.N. (1987). Indications from Research on Problem Solving. Dins F.R. Curcio [ed.]: *Teaching and Learning. A problem solving focus*. Reston (Va.): National Council of Teachers of Mathematics.
- Thompson, A.G. (1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, p. 105-127.
- Thorndike, E.L. i Woodworth, R.S. (1901). The influence of improvement in one mental function upon the efficiency of other functions (I). *Psychological Review*, 8, p. 247-261.
- Tomàs, M. (1990). *Els problemes aritmètics a l'ensenyament primari. Estudi de dificultats i proposta didàctica*. Tesi doctoral. Universitat de Barcelona.
- Toulmin, S. (1972). *La comprensión humana: I. El uso colectivo y la evolución de los conceptos*. Madrid: Alianza Universidad, 1977.
- UNESCO (1996). *Recomendaciones de la 45ª Conferencia Internacional de Educación de la UNESCO*. 30 de septiembre a 5 de octubre de 1996, Ginebra: UNESCO.
- Vigotski, L.S. (1933). *Thought and Language*. Cambridge, MA: MIT Press, 1989 nova edició; traducció catalana: *Pensament I llenguatge*. Vic: Eumo, 1988).
- Vigotski, L.S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.
- Vigotski, L.S. (1979). *El desarrollo de los procesos cognitivos*. Barcelona: Crítica.
- Vigotski, L.S. (1989). *El desarrollo de los procesos biológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.
- Vila, A. (2000). Respon l'educació matemàtica a les necessitats de la societat? *BIAIX*, 16, p. 60-63.
- Vila, A. (2001). *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes*. Tesi doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona. <[www.tdcat.cesca.es](http://www.tdcat.cesca.es)>.
- Vila, A. i Callejo, M.L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas*. Madrid: Narcea.
- Wallas, G. (1926). *The Art of Thought*. New York: Harcourt Brace.
- Waller, W. (1932). *The sociology of Teaching*. New York: John Wiley & Sons, 1965.
- Webb, N.M. (1984). Interacción entre estudiantes y aprendizaje en grupos pequeños, *Infancia y Aprendizaje*, 27-28, p. 159-183.
- Webster's (1979). *New universal unabridged dictionary*. New York: Simon & Schuster, 2a edició.
- Wertheimer, M. (1945). *Productive Thinking*. New York: Harper & Row.
- Whimbey, A. i Lockhead, J. (1993). *Comprender y resolver problemas*. Madrid: Visor.
- Whitehead, A.N. (1949). *The Aims of Education and Other Essays*. Nova York: New American Library.
- Williford, H. (1992). Games for Developing Mathematical Strategy. *The Mathematics Teacher*, 85 (2), p. 140-141.
- Winnicott, D.W. (1971). *Realidad y juego*. Barcelona: Gedisa, 1993.



- Wittrock, M.C. [ed.] (1986). *Handbook of Research on Teaching*. New York: Macmillan; traducció castellana: *La investigación de la enseñanza*, 3 v., Barcelona: Paidós, 1989.
- Zabalza, M.Á. (1987). *Diseño y desarrollo curricular*. Madrid: Narcea.
- Zabalza, M.Á. (1991). *Los diarios de clase. Documento para estudiar cualitativamente los dilemas prácticos de los profesores*. Barcelona: PPU.
- Zorroza, J. (1994). *Resolución de problemas matemáticos: estudio experimental de los procesos cognitivos*. Tesis Doctoral, Universitat de València.

### Webgrafia

- Arxiu Jean Piaget (Suïssa): <[www.unige.ch/piaget](http://www.unige.ch/piaget)>
- Jean Piaget Society: Societat per a l'Estudi del Coneixement i el Desenvolupament (USA): <[www.piaget.org](http://www.piaget.org)>
- Glossari ACE original anglès: <[www.cs.gsu.edu/~rumece/Papers/glossary.html](http://www.cs.gsu.edu/~rumece/Papers/glossary.html)>
- Glossari ACE traduït al castellà: <[www.personal.us.es/gavilan/alicante/glosario.htm](http://www.personal.us.es/gavilan/alicante/glosario.htm)>
- Constructivisme: <[www.carbon.cudenver.edu/~mryder/itc\\_data/constructivism.html](http://www.carbon.cudenver.edu/~mryder/itc_data/constructivism.html)>
- <[www.tamuc.edu/wiki/SusanSwan/PortfolioThree](http://www.tamuc.edu/wiki/SusanSwan/PortfolioThree)>
- <[www.emtech.net/construc.htm](http://www.emtech.net/construc.htm)>
- <[www.ace.ac.nz/doclibrary/acepapers/ACE\\_Paper\\_2\\_Issue\\_6.doc](http://www.ace.ac.nz/doclibrary/acepapers/ACE_Paper_2_Issue_6.doc)>
- <[www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm982r2.pdf](http://www.fiz-karlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdm982r2.pdf)>
- Traducció realitzada per EDUTEKA de la secció corresponent a “Competencias en Matemáticas” del document *The PISA 2003 Assessment Framework* publicat per OCDE/PISA. <<http://www.pisa.oecd.org/>>