UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

GEOMETRIA DE PUNTO, RECTA Y PLANO.

DEFINICION DE ELEMENTOS BASICOS.

Introducción.

Vamos a proceder a un recorrido, que podriamos llamar tradicional de la exposición de la Geometria, para de este modo ir reflexionando, a la luz de lo expuesto en los capitulos anteriores, sobre la validez u obsolescencia de las ayudas geométricas o analiticas que han sido, y son, necesarias para que se cumplan los conceptos matemáticos en que se basan.

Es muy frecuente atribuir a la Geometria una componente artística muy exagerada, que por otra parte suele tener, frente a su componente de estudio intelectualizado del espácio. Sin llegar a los conceptos filosóficos de Platón, pero más cerca del tambien filósofo Pascal, la Geometria se apoya en verdades matemáticas tan puras como, por ejemplo, la Fisica o el Cálculo de Estructuras; la intersección de una cónica y una recta, pongamos por caso, es doble, por que se puede calcular matemáticamente y hallar las coordenadas de los dos puntos comunes a ambas lineas.

Vamos, pues a seguir una hilación tradicional de la exposición de las partes de la Geometria, y en cada caso vamos a introducir los conceptos analiticos que nos permitan su informatización.

ALFABETO DE PUNTO, RECTA Y PLANO.

Capitulo 3.

Previo.

Es normal encontrar en los libros de texto un apartado dedicado a las posiciones de los puntos, y rectas como uniòn de dos puntos, respecto de los distintos cuadrantes.

De hecho, ya en un estudio tradicional de la Geometria es discutible el espacio reservado a esta casuistica, pero en nuestro caso aun màs, ya que escogemos los planos de referencia segùn nuestra conveniencia, de forma que siempre nos encontremos en el primer cuadrante, en caso de que nos surgan casos particulares, no serà muy complejo entender que es lo que està pasando, ademàs de que siempre nos serà posible variar la referencia; de hecho, siempre se trabaja con coordenadas relativas y la posiciòn del origen es discrecional.

Punto.

Existen dos formas bàsicas de definir un punto: señalàndolo u obtenièndolo mediante una operaciòn geomètrica. En el primer caso la forma de señalarlo puede ser puramente fisica o màs analiticamente dando sus coordenadas respecto de unos ejes cartesianos. Dar las coordenadas de un punto es lo màs lògico, y serà lo que almacenemos de èl aunque lo definamos de las màs variadas formas, esto es: la informaciòn que almacenaremos en memoria, mediante una matriz, serà, entre otras cosas, las tres coordenadas de cada punto.

Otra informaciòn, nada innovadora desde el punto de vista de la Geometria Descriptiva, es el nombre, caracter alfanumèrico, que le asociaremos a dicho punto. Quizàs sea este el momento de introducir unas consideraciones, que pueden estar en el ànimo del lector desde el principio: ¿lo que estamos definiendo es idèntico a un sistema de CAD?. La respuesta no es sencilla, muchas de las cosas que resolveremos estàn resueltas en los paquetes comerciales de CAD, pero no con el mismo enfoque. Los paquetes de CAD se quedan en un resultado que responda de alguna forma al binomio croquis-diseño, esto es poder hacer un dibujo en **borrador** en el que se van añadiendo conceptos a medida que se van resolviendo problemas ajenos al propio dibujo, y que cuando se da por bueno el croquis **ya es** el dibujo definitivo. No importa en este caso de donde han salido los vèrtices de un cuerpo sòlido ni las inclinaciones de las rectas, ademàs del hecho de trabajar, bàsicamente, en 2D y 2 1/2 D.

En nuestro caso pretendemos operar con el espacio y almacenar **toda** la informaciòn de **todos** los elementos que definen nuestro trabajo, pues todos son, o pueden ser, motivo de manipulaciòn. Dicho de otra forma, nuestra unidad no es el cuerpo a diseñar sino todas y cada una de las entidades, desde puntos hasta planos, que lo definen. Nos interesa màs **como** construimos que lo que construimos. Como nuestro objetivo es geomètrico, prima nuestro interès el camino a seguir en la construcciòn de la figura, no las condiciones mecànicas, por ejemplo, que nos impongan una determinada funciòn posterior de la pieza. No tenemos tanto en la cabeza la forma definitiva del objeto a diseñar, como las condiciones que vamos introduciendo en su diseño. En resumen, nuestro objetivo no es tanto el final del camino como el camino en si mismo.

El dar nombres a los puntos, es ya motivo de diferenciazión entre la Geometria Descriptiva y el Dibujo Lineal, podriamos decir, sin casi probabilidad de error, que el CAD se corresponde bastante bien con el Dibujo Lineal, pero, y siguiendo con la comparación, en el Dibujo Lineal se resuelven los problemas mediante conceptos de Geometria Descriptiva. En nuestro caso, el hecho de dar nombres (de hecho son letras) a los elementos que vamos creando nos facilitará el trabajo interactivo de dos formas: el poder indicar operaciones mediante un lenguaje bastante coloquial como:

RECTA UNION DEL PUNTO __ CON EL PUNTO __

o, aunque usemos otra forma de indicar un punto, para almacenar información, es más sencillo almacenar que la recta s está definida por los puntos A y Z, que no que lo está por el punto entrado en primer lugar y el decimo, pongamos por caso.

Si queremos definir un punto de una forma arbitrària, cuando estamos trabajando con lápiz y papel, y como siempre suponiendo que estamos trabajando en Diédrico, vemos que hemos de indicar las dos proyecciones de dicho punto para que nos quede determinado. En nuestro caso el instrumento de definición será el cursor que se desplazará por la pantalla, en forma de cruz, para que se parezca más al criterio de definir puntos manualmente, pero como trabajaremos sobre unos ejes axonométricos nos será dificil tener el concepto de profundidad que nos daba la proyección horizontal en Diédrico, no asi la altura que nos daba la proyección vertical. Será, pues, necesario introducir alguna ayuda para que podamos situar un punto en un sistema axonométrico de forma que sepamos con certeza su posición "real".

La solución estriba en que cuando estemos en la opción de introducir un punto, el cursor se desdoble en dos cruces de tamaños distintos, ya que representarán conceptos distintos. Una, de mayor tamaño, nos representará la posición "real" del punto en el espacio, lo que se conoce como proyección directa de un punto, (x,y,z), y la otra de más pequeño tamaño, que represente una de las proyecciones previas del punto. Parece lógico, a tenor de lo dicho en el párrafo anterior, que la previa a representar sea la que se proyecta sobre el planpo xy, horizontal, (x,y,0), asi, en cualquier momento, podremos saber donde se encuentra el punto que estamos tanteando, y cuando hallemos la posición deseada, damos la orden de aceptación. En este momento se nos pedirá que nombre recibe el punto definido y se almacenará la información de coordenadas, nombre y forma de definición.

Dado que el desplazamiento del cursor sobre el cuadrante definido por los ejes axonométricos, que habremos definido previamente, viene medido continuamente por las variaciones de la terna de valores (x,y,z), que vamos representando gráficamente en la pantalla, podemos obtener una ayuda suplementaria en el proceso de definición de puntos, que es que en una parte de la pantalla, la dedicada a texto y comunicación o en otra definida a tal efecto, como una ventana por ejemplo, vayan aparecienco esos valores, con lo que la precisiòn de la elecciòn aumenta. La ùnica dificultad puede ser debida a la definiciòn de la pantalla del ordenador con el que estemos trabajando.

Continuamente existe una malla, para ayuda gràfica en la identificaciòn de coordenadas. En los programas de 2D, esta malla puede ser activada de forma que el usuario la vè fisicamente, e incluso puede ser redefinida a conveniencia. El cursor-ratòn puede tambien activarse para que siga la estructura de la malla, movièndose de una forma discreta de tal manera que siempre se encuentre sobre un de los nudos de la malla. La informaciòn propuesta en 3D de las sucesivas coordenadas definidas por el cursor, pretende tener la misma utilidad que las mallas comentadas, en 2D. Algunos programas que trabajan con modelos de alambre, como CADKEY, aun que estemos trabajando en 3D, hacen que el cursor continuamente se desplace en un plano. Dando los valores correspondientes, en cada caso, a la profundidad de este plano vamos obteniendo, o señalando, las distintas entidades que configuran nuestro dibujo. La ventaja de este sistema de cursor radica en que, dado que su movimiento es puramente de 2D, se puede dirigir mediante ratòn, tableta o teclado, sin ninguna modificaciòn a los procedimientos normales de Dibujo Informàtico; mientras que si pretendemos que el cursor se desplace paralelo a las proyecciones de los ejes, el usuario deberà decir, en cada momento, a que eje es paralelo el movimiento, pulsando, por ejemplo, las teclas x, y y z correspondientes. A pesar de esta nueva dificultad, considero el mètodo de que el cursor se mueva paralelamente a las proyecciones de los ejes, el sistema idòneo.

Puede quedar, tambien, como opciòn el encontrar las proyecciones previas del punto en cualquiera de los planos de referència. El trabajar con estas trazas nos acerca a los procedimientos clàsicos, si asi lo queremos. En ocasiones nos puede servir de ayuda.

La otra forma de definir un punto, es como consecuencia de una operaciòn geomètrica, como puede ser la intersecciòn de dos rectas o la de tres planos. Nuevamente serà interesante almacenar la informaciòn de como ha sido "creado" el punto, deberà pues establecerse un código numèrico que se añadirà a la matriz en donde estàn las caracteristicas del punto, por ejemplo: 1= definido por cursor, 2= definido por coordenadas, 3= intersecciòn de dos rectas, 4= intersecciòn de tres planos, etc.. Si la matriz en donde nos queda almacenada la informaciòn del punto tiene el nombre de P, hasta el momento tiene la dimensiòn 4, P(4), siendo P(1)=x,P(2)=y,P(3)=z, y P(4) la forma en que ha sido definido, puede quedar la opciòn de que se guarde la informaciòn del punto pero no se dibuje, esta opciòn quizàs suena algo extraña, pero serà usada tanto para puntos como para rectas y planos, como veremos màs adelante.

Otra operaciòn que tiene como resultado un punto, es la prolongaciòn de rectas o la obtenciòn de puntos que encontràndose sobre una recta se hallen a una distancia determinada de otro punto de ella. En este caso y los anteriores de punto resultado de operación matemàtica, no parece tan aconsejable obtener la proyección de dicho punto sobre el plano horizontal de referència, o cualquier otro, pues la condición de definición no tiene por que tener en cuenta dicha posición relativa.

Nos queda el caso de la consulta de la posición de un punto respecto a una recta y a un plano, sencillamente podemos consultar su pertenencia o no a estos elementos y en su caso la distancia a ellos.

Para todo lo que se refiere a las posiciones relàtivas de un punto respecto de rectas y planos, nos queda, nuevamente, por resolver el problema de como definimos dichas rectas y planos, que serà objeto de estudio en los apartados referidos a ellos.

Recta.

Igual que en el caso del punto, existen dos formas de definir una recta: por indicación sobre pantalla o como resultado de una o varias operaciones geomètricas.

Al contrario que en el caso del punto, para definir una recta por simple indicación sobre la pantalla, la recta debe estar previamente definida. En el caso del punto, recordémoslo, existe una malla en la pantalla con lo que tenemos una amplia variedad de puntos por escoger, con el cursor no hacemos màs que seleccionar uno del resto. Para que la operación de escoger una recta sea de la misma naturaleza, haria falta que en la pantalla tuvieramos infinitas rectas **definidas**, cosa que no es cierta. En cambio si hay, ya, algunas rectas definidas, si que podremos escoger una respecto de las demàs, señalando, aproximadamente, un punto sobre ella. El programa de identificaciòn de rectas, lo que hace es encontrar analiticamente la distancia del punto señalado a todas las rectas previamente definidas, y seleccionar como escogida a la que tenga la distancia menor. Si el programa es correcto, siempre dejarà la posibilidad de que el usuario se haya equivocado y pueda empezar de nuevo el proceso, lo que harà preguntando si la recta definida es la que realmente se queria definir. Esta respuesta la puede dar de dos formas: gràfica o mediante diàlogo. Dar la respuesta a la selecciòn gràficamente quiere decir, que en la pantalla y sobre la recta seleccionada aparezca un signo convencional que asi nos lo indique. La otra forma seria que en la linea de diàlogo nos escribiera: RECTA SELECCIONADA r.

La forma de definir rectas que màs se parece a la que hemos estudiado en el caso del punto, es aquella en la que lo que se hace es definir los dos extremos que forman un segmento. Debe quedar claro, que aunque lo que definamos sea un segmento, lo que almacenaremos siempre es la recta, entendiendo como tal un elemento infinito con una direcciòn determinada. En este caso, pues, duplicamos **todas** las operaciones que haciamos para definir un punto, y nos quedarà definida la recta como diferencia de coordenadas.

La última frase del párrafo anterior suena muy lógica, pero encierra unas dificultades analiticas que veremos en el apartado correspondiente, pero que no estará de más adelantar aqui. Sea una recta definida por dos puntos A y B, de coordenadas (X_A, Y_A, Z_A) y (X_B, Y_B, Z_B), sabemos por la geometria analitica que las coordenadas (X,Y,Z), de un punto cualquiera de la recta definida por dichos puntos deben cumplir las relaciones:

$$X-X_A/X_A-X_B = Y-Y_A/Y_A-Y_B = Z-Z_A/Z_A-Z_B$$

el hecho de que algún denominador pueda valer cero, no tiene mayor problema cuando estamos trabajando analiticamente, sobre el papel, es una pequeña indeterminación que se resuelve sin dificultad, pero en Informàtica NO se puede dividir por cero, luego hay que idearse otra forma de "manipular" la información, sin renunciar a una de las definiciones de recta más lógicas e intuitivas.

La solución lleva implicita otra forma de definir una recta: mediante un punto de paso y una dirección. Sea A el punto y μ la dirección, las coordenadas de un punto cualquiera de la recta nos vendrán dadas por:

$$X = X_A + N\,\mu$$
$$Y = Y_A + N\,\mu$$
$$Z = Z_A + N\,\mu$$

los distintos valores de N nos irán dando todos los puntos de la recta definida, en el caso general μ se obtiene normalizando el vector definido por A y

B. Aunque hayamos solucionado un primer problema, se nos planteará otro de diferente cuando queramos encontrar la intersección de dos rectas, definidas como hemos visto más arriba:

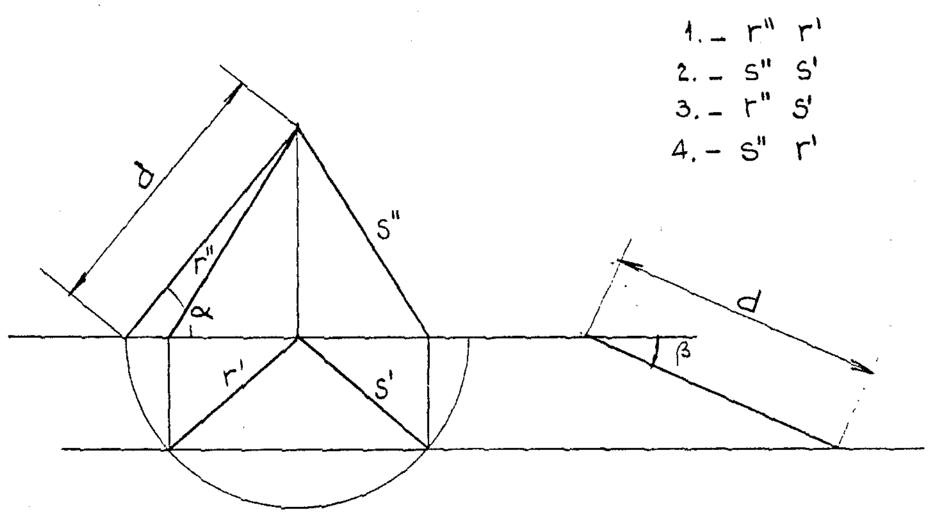
Sean dos rectas r y s, definidas la primera por A y μ, y la segunda por B y σ, encontrar el punto de intersección implica hallar la solución al sistema de ecuaciones:

$$X_A + N\,\mu = X_B + M\,\sigma$$
$$Y_A + N\,\mu = Y_B + M\,\sigma$$
$$Z_A + N\,\mu = Z_B + M\,\sigma$$

que son **tres** ecuaciones con **dos** incognitas, lo que ya no es tan inmediato, pues previamente habrá que probar que exista una solución del sistema.

Es conveniente recalcar, de nuevo, que es independiente la forma en que se maneje o almacene una información, de la forma en que se presenta dicha información al usuario. En el caso particular de definición de una recta, nosotros podremos seguir definiéndola como la unión de dos puntos, el programa ya lo transformará en un punto y una dirección. No obstante, suele ocurrir que las nuevas herramientas crean nuevas formas de diálogo, y puede no resultar extraño que se enseñe a definir una recta de esta forma. Como nuestro estudio va dirigido a la enseñanza de los sistemas de representación, es en este nivel en donde se ha de pensar si seria interesante acostumbrar a los estudiantes a esta nueva forma de definición. Otra ventaja de tratar las rectas mediante vectores normalizados, estriba en el concepto de dirección infinita. El concepto de infinitud no quedará reflejado de una forma explicita, pero si el de dirección ya que coincide con la del versor que la define.

Una forma tradicional de definir una recta es, mediante un punto de paso y la información de los ángulos que forma con los planos de proyección de referencia.

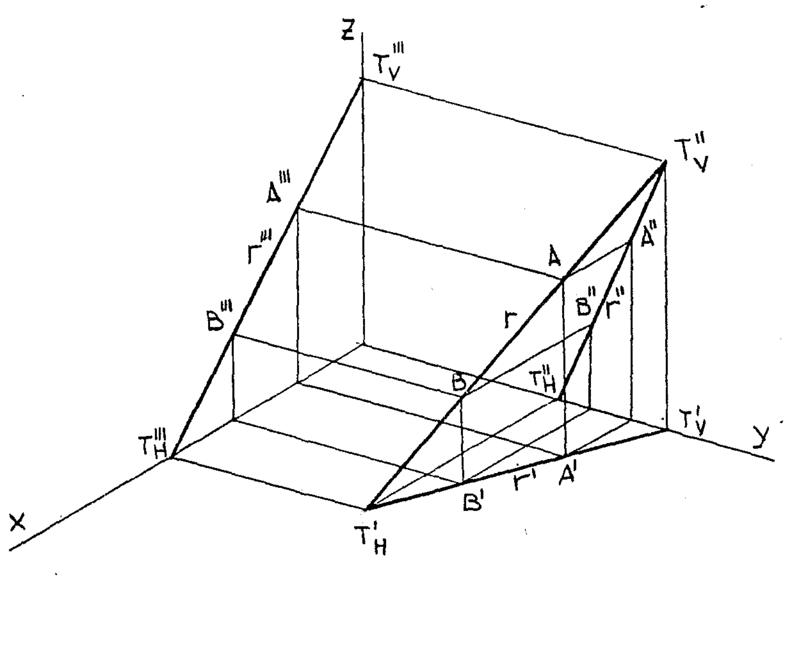


es sencillo ver que si, informàticamente, trabajamos con los versores, son estos los que han de formar los ángulos que nos convengan. Este es un ejemplo de la simplificación en la manipulación de la información, ya que podemos tener resuelto analiticamente el proceso del cálculo del ángulo que forma una dirección con los planos de proyección y aplicarlo en cada caso.

Nuevamente, nos queda la opción de encontrar los puntos traza de la recta, una vez definida, e incluso obtener las rectas-proyección-previa uniéndolos adecuadamente. Sabemos que estas rectas previas son las proyecciones diédricas de la recta, y pedagógicamente, tiene un interés claro el poder ver las relaciones entre la proyección directa y alguna de las previas. Si el interés no es sólo pedagógico sino que nos interesa "ver" alguna de las proyecciones de la recta independientemente de la directa, nos basta con variar el punto de vista, haciendo que la dirección de proyección coincida con los ejes coordenados adecuados. Siendo α y β los ángulos que hemos usado continuamente en este estudio, no es complicado ver que si la dirección de proyección es tal que $\alpha = \beta = 0^{o}$ tendremos el alzado diédrico de nuestro dibujo, y si $\alpha = 0^{o}$ y $\beta = 90^{o}$ estaremos obteniendo la planta.

Esta opción es geométricamente discutible, si no se usa exclusivamente como "operación" no como definición, pues una sola proyección de la recta, no la define. Se podria diseñar una opción que sea dibujar en Diédrico, relacionándolo con lo definido en Axonométrico, pero no seria, ya, bajo el concepto que estamos manteniendo en este estúdio: relacionar todas las opciones mediante cambios en la posición relativa del punto de vista, lo que quiere decir que habria que almacenar toda la información y **redefinir** nuevamente todo el dibujo (ver ejemplo de programas hecho por el que suscribe). Conviene remarcar nuevamente, que el programa ideal que estamos estudiando, que se podria llamar GLINK (resultado de unir la G de Geometria con una de las palabras del nuevo argot informàtico el linkage) (1), por ejemplo, trabaja en 3D, con pasos opcionales a 2D, siendo èstos ùltimos simples ayudas de trabajo, no traducciones de la otra proyecciòn definida.

Si pretendemos visualizar la relaciòn de las proyecciones directas y previas de una recta, serà necesario "alargar" la recta hasta los puntos traza obtenidos. Conjugàndolo con las proyecciones previas del punto nos quedarà la relaciòn de la figura.



Igual que en el caso del punto, y quizàs màs claro aqui, es necesario tener la opciòn de visualizar o no, los objetos entrados u obtenidos, para mantener la pantalla lo màs limpia posible, pues el tamaño de dicha pantalla puede ser uno de los inconvenientes en nuestro trabajo. Podemos desplazar nuestro dibujo, variar la escala, etc.(ver, màs adelante, el estudio analitico del uso de las matrices para la manipulaciòn de puntos, asi como la discusiòn sobre el interès de usar coordenadas homogèneas). Supongamos que hemos usado la posibilidad de ver las relaciones de una recta con sus previas, una vez hecho esto, no tiene por que interesarnos toda esa visualizaciòn, el programa debe tener la posibilidad de no visualizar lo que ya no nos convenga.

Queda la posibilidad de definir una recta como intersecciòn de dos planos, en la que nuevamente nos encontramos con la problemàtica de como seleccionamos un plano. Como en el caso de la recta, debe estar previamente definido el plano para poder ser seleccionado, pero, una vez definido, ¿como seleccionarlo?. Seria ideal poder seleccionar un plano mediante la localizaciòn de un punto sobre èl, pero su dificultad, no analitica, es enorme.

Los planos tienen la dificultad de como se definen, ya hemos visto que Monge tuvo la genial idea de representarlos por su secciòn sobre los planos de referència. Con esto se consigue dar una imagen "fisica" de donde se encuentra el plano, pero su operatividad tal como la queremos nosotros, de decir que seleccionamos un plano, no queda resuelta. Seleccionarlo como haciamos con las rectas, analiticamente no representa ninguna dificultad, pues se trata de encontrar la distancia de un punto arbitràrio a todos los planos, (si podemos seleccionar que la entidad que estamos buscando, es un plano, como seria de desear), y considerar seleccionado el que la tenga màs pequeña, ¿pero que critèrios tendrà el usuario, para saber donde pone el cursor?. Incluso con el aditamento de que el cursor vaya dejando constancia de su proyecciòn sobre el plano horizontal, tiene bastante de aventurado "intuir" donde se encuentra el plano. Se puede rebatir que el nùmero de planos no serà muy grande y que si nos equivocamos, lo podemos volver a intentar; es cierto, pero puedo imaginar la faz sonriente de una persona ajena al problema que estamos resolviendo, vièndonos cazar infructruosamente, planos sin caña. Creo que la opciòn de que se escogan los planos en la linea de diàlogo del ordenador no es descabellada, frente a otra de las opciones que seria consultar la forma en que se ha definido y reseguir nuevamente el proceso.

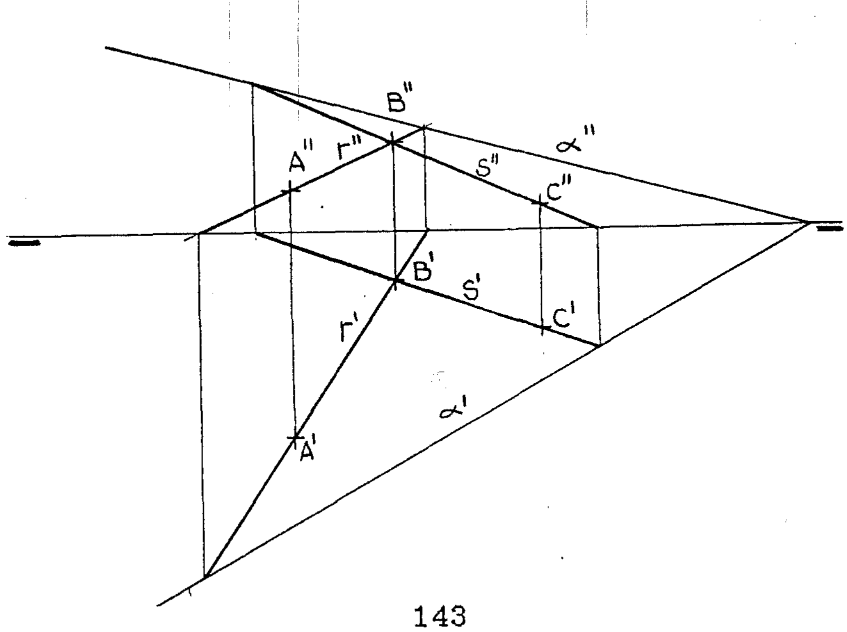
Finalmente, queda la cuestiòn de almacenar la informaciòn del **tipo** de recta que es: recta, semirrecta o segmento. Si suponemos que la matriz en donde se almacena dicha informaciòn es R, basta con definir como 1= recta, 2= semirrecta y 3= segmento.

Plano.

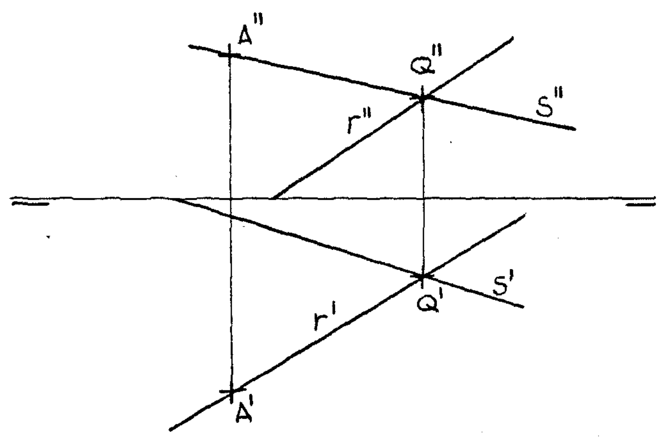
Este caso ya ha sido comentado a partir de su apariciòn en los casos anteriores, dada su dificultad de "señalizaciòn", se puede obtar por hacerlo por su nombre o por las formas de definirlo: por tres puntos no alineados, por un punto y una recta o por la intersecciòn de dos rectas.

De hecho, el primer caso engloba a los otros dos, pues un punto y una recta son tres puntos no alineados, y la intersección de dos rectas también. Geométricamente existen una serie de conceptos a comprobar, que los tres puntos NO se hallen sobre una recta, en el primer supuesto, que el punto no se encuentre sobre la recta, en el segundo, y, finalmente, que las rectas se corten, no que se crucen. Esas tres comprobaciones deben estar previstas en el programa de definición de planos, sea cuál sea la forma de definición de los mismos. Gráficamente, suponemos siempre que trabajamos en Diédrico, el proceso es inverso, se reducen los tres casos al último de ellos: dos rectas que se cortan.

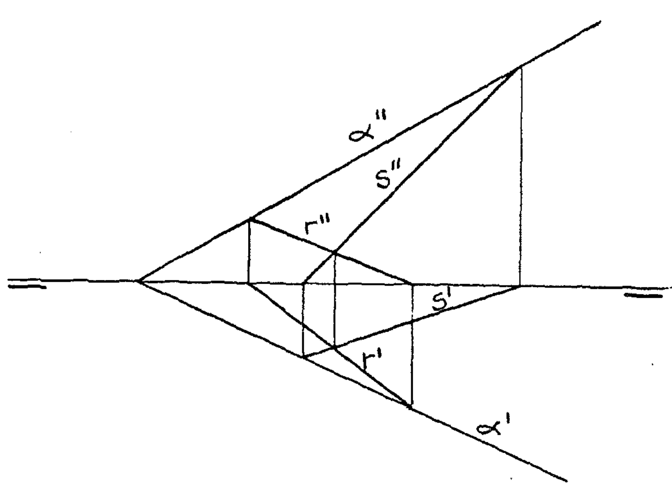
Usando las trazas de las rectas, que son puntos de intersección con los planos de proyección, y sabiendo que las trazas del plano, que son rectas, las han de contener resolvemos el problema. Sean A, B y C tres puntos cualesquiera, podemos pasar al caso de dos rectas r y s, definidos por ellos de forma que se corten, por ejemplo, en el punto B, r la definimos por A y B y s por B y C, y actuamos en consecuencia.



en el siguiente caso, sea el plano definido por A y r, escogemos un punto Q de r, y uniéndolo con A tenemos el caso anterior:



el último caso, no tiene, lógicamente, ninguna dificultad:



La definición analitica del plano, cuando lo tenemos definido por tres puntos A (X_1,Y_1,Z_1), B (X_2,Y_2,Z_2) y C (X_3,Y_3,Z_3), es sencilla sabiendo que un punto cualquiera PL (X,Y,Z) ha de cumplir una ecuación del tipo:

$$M.X + N.Y + P.Z + Q = 0$$

los coeficientes M,N,P y Q, los hallaremos a partir de la matriz de los tres puntos, de la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

cuyo determinante desarrollado nos dará:

$$X\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 & 1 \\ Y_2 & Z_2 & 1 \\ Y_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} -Y\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 & 1 \\ X_2 & Z_2 & 1 \\ X_3 & Z_3 & 1 \end{vmatrix} +Z\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \\ X_3 & Y_3 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} =0$$

sencillamente, identificando, obtendremos los valores de los coeficientes del plano, en función de las coordenadas de los tres puntos que lo definen.

Queda por determinar que criterio se habrá de seguir para pasar de los otros dos casos al de tres puntos. Como conocemos "el historial" de la creación de las rectas, cuando éstas hayan sido definidas por dos puntos no tendremos ninguna dificultad, pero, quizás, es más aconsejable usar un criterio general, con lo que se nos simplificará el programa, al eliminar casos particulares.

Sea el caso de definición de un plano por un punto A (X_A, Y_A, Z_A) y una recta r, dado que ésta es infinita podemos escoger un punto cualquiera fijando que tenga una de sus tres coordenadas determinada, con la seguridad de que existe dicho punto, consecuentemente, podemos determinar sobre r, sencillamente, un punto B de coordenadas (X_R, Y_R, Z_A) y otro C de coordenadas (X_R, Y_A, Z_R), A, B y C nos definirán el plano que buscamos.

Nota.- El uso del subíndice R, en el párrafo anterior, quiere significar que las coordenadas han sido halladas imponiendo en la ecuación de la recta el que una de las tres coordenadas sea fija.

Nos queda, finalmente, el caso de definición de un plano por dos rectas que se cortan. Suponiendo que ya hemos comprobado que se cortan, y tambien que hemos obtenido las coordenadas de dicho punto, (cosa que no es inmediata, pues puede darse el caso de que sólo hayamos comprobado que se corten dichas rectas, dada la dificultad apuntada anteriormente del sistema de ecuaciones a que da lugar la intersección de dos rectas), podemos reproducir, apreciablemente igual, el proceso seguido con las definición de plano por recta y punto exterior. Podemos simplificar el proceso indicando que se busquen puntos sobre las dos que tengan las misma coordenada Z, pongamos por caso, que el de intersección.

Nos queda, aun, el caso de los poligonos. Básicamente su definición se hará señalando los lados que lo forman. Nuevamente se nos plantea la disyuntiva de si existe previamente el poligono o si lo hemos de definir. Reflexionemos sobre los casos que se nos plantearàn.

Sea un plano α, que ha sido definido no nos importa como, de ecuaciòn $M.X + N.Y + P.Z + Q = 0$, sobre el que queremos dibujar un poligono de n lados de determinada manera, y con unas magnitudes determinadas. Lo primero que tendremos que hacer es poner el plano α de forma que podamos trabajar sobre èl en verdadera magnitud y forma, es lo que tradicionalmente se llama **abatir** dicho plano. Hemos dicho anteriormente, que esta operaciòn de abatir la substituiriamos por la de un cambio de proyecciòn, de forma que la pantalla sea el plano α, para ello es necesario proyectar el dibujo en la direcciòn (m,n,p) de la normal de dicho plano. (es conveniente que el vector estè normalizado, de mòdulo 1, es por eso que uso las minùsculas para diferenciarlo de las componentes del plano, su relaciòn es: llamando $MOD=\sqrt{(M^2+N^2+P^2)}$; $m = M/MOD$; $n = N/MOD$; $p = P/MOD$). Sobre este plano trabajaremos, y luego almacenaremos la informaciòn en la matriz PO indicando que el nùmero de planos no ha variado, pero si el de poligonos.

Otro caso serà cuando, en un plano, tenemos una serie de rectas y con ellas queremos definir un poligono, bastarà con señalar dichas rectas, dar un nombre al poligono definido, y gràficamente prolongar los lados del poligono hasta que quede formado èste, para ello harà falta encontrar los puntos de intersecciòn, de forma ordenada, segùn el mismo orden en que han sido escogidos por el usuario. Será conveniente que la definición se haga en el sentido contrario a las agujas del reloj, para que el versor normal tenga el sentido "hacia afuera". Este último comentario tendrá importancia cuando hablemos del problemas de las caras vistas y ocultas de un cuerpo, de momento nos conformamos con tener en cuenta que un plano divide el espacio en dos partes: delante y detrás del plano, y normalmente consideramos que nuestro punto de vista está delante del plano que definimos.

Notas y Referencias.

(1) También barajé la idea de darle el nombre de algún ilustre geometra, como puede ser: Descartes, Fermat, Pascal, Desargues o Monge. Finalmente, y siguiendo la tradición de bautizar con nombres femeninos a poder ser griegos, el nombre que sustituyó a GLINK fue el más humilde de HYPATIA, hija de Teón de Alejandria, al que se debe una edición de los ELEMENTOS de Euclides. Hypatia era una joven erudita que escribió comentarios sobre Apolonio, Diofanto y Ptolomeo, su muerte, violenta debido a sus creencias religiosas paganas, en el año 415, es considerada por algunos historiadores como el final de la matemática antigua.