UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

GEOMETRIA DE PUNTO, RECTA Y PLANO.

POSICIONES RELATIVAS DE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS.

Introducción.

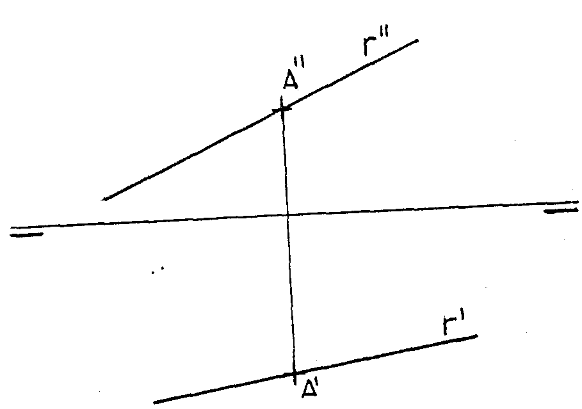
Vamos a entrar en la enumeración de los procesos de la que podriamos llamar Algebra Geomètrica, que es la parte de la Geometria que estudia la definición de elementos, su pertenencia a otros elementos, los problemas de intersección y reunión, etc. Debemos a Hipòcrates de Chios (1), como hemos visto en el apartado històrico, la notación alfanumèrica de los elementos gràficos, lo que nos permite aumentar aun màs si cabe las similitudes con el Algebra. Como ya hemos comentado anteriormente esta posibilidad de usar elementos "coloquiales" de Algebra, es una de las grandes opciones que motivan nuestro interès de linkar la Geometria con la Microinformàtica a travès de la linea de diàlogo que en muchas ocasiones, como veremos en este capitulo y en los posteriores, sustituye con ventaja al cursor accionado desde teclado, ratón o tableta.

Punto sobre recta.

En el capitulo anterior hemos estudiado las condiciones de definición de elementos geomètricos, en èste nuestro estudio va dirigido a las de pertenencia. Los problemas de pertenencia, son extremadamente sèncillos desde un punto de vista analitico: un elemento pertenece a otro si cumple la ecuación que determina a ese otro. En nuestro caso sólo existirá el problema, ya comentado anteriormente, de la precisión con que podamos elegir los elementos en cuestión.

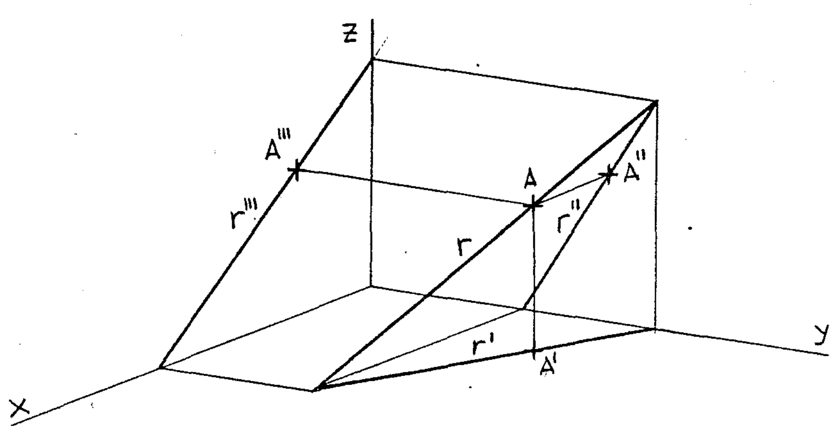
Dada la sencillez con que resolvemos la cuestión de la pertenencia con la ayuda del bagaje informático, optaremos por hacer un uso exhaustivo de la linea de diálogo con el ordenador. Sin embargo, será útil ver a que sustituye esta opción en el tratamiento geométrico clásico; dándonos la opción de programar ciertas respuestas gráficas que guarden relación con éste. Una vez más hemos de distinguir entre tratamiento de la información y presentación de dicha información: la consulta de si un punto está sobre una recta, por ejemplo, será inmediato por parte del procesamiento de la información, otra cosa será como devolvemos esa información al usuario. Hagamos pues un recorrido por los procedimientos de estudio de los problemas de pertenencia desde varios puntos de vista distintos.

Para realizar el estudio de la pertenencia de un punto a una recta, situémonos, una vez más, en el Sistema Diédrico, sean A y r, el punto y la recta en cuestión.



A pertenecerà a r si **todas** las proyecciones de A se encuentran sobre **todas** las proyecciones de la recta. Esta es de hecho, la traducciòn inmediata al comentario hecho anteriormente sobre que A deberà cumplir la ecuaciòn de la recta sobre la que queremos que se encuentre.

Veamos cuàl seria el proceso a seguir en nuestro programa HYPATIA. Recordemos que trabajamos directamente en Axonomètrico. Supongamos, en un primer momento, que lo ùnico que pretendemos es hacer una comprobaciòn gràfica de que si A se encuentra sobre la proyecciòn directa de r, se encontrarà sobre cada una de las proyecciones previas de esta recta.

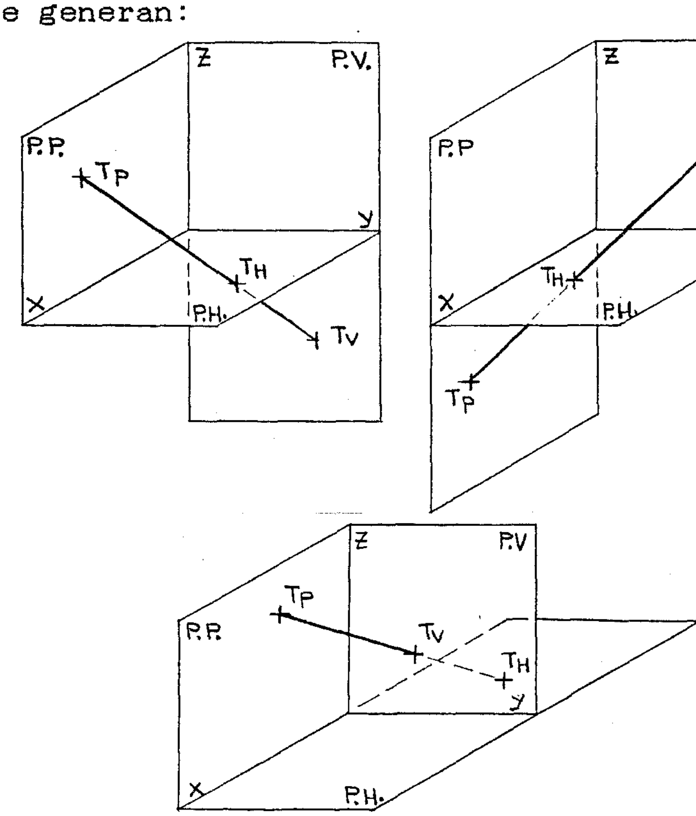


Deberemos dar la orden de que vamos a consultar la pertenencia o no de un punto a una recta. El programa nos pedirà seleccionar primero la recta, tendremos, como siempre, las opciones de hacerlo gràficamente o llamàndola por su nombre. A continuaciòn haremos lo mismo con el punto, del que tendremos tambièn las dos opciones. Inmediatamente, y sin que gràficamente ocurra nada, el programa comprobarà si efectivamente o no las coordenadas del punto cumplen la ecuaciòn de la recta. En caso afirmativo pasarà a dar la informaciòn gràfica que previamente hallamos previsto para este caso. Veamos cual puede ser èsta.

Cuando en Geometria Descriptiva trabajamos este caso en Axonomètrico, nos encontramos con una dificultad adicional al caso del Dièdrico, en este ùltimo nos basta comprobar que se cumpla la condiciòn de pertenencia en las dos proyecciones habituales de trabajo ,(quizàs a efectos de realizar un ejercicio, pueda ser interesante comprobar que se cumple tambièn con la proyecciòn de perfil), mientras que en Axonomètrico no es usual tener dibujadas todas las proyecciones previas de todos los elementos que conforman nuestro dibujo. Debemos pues hallarlas; lo que se puede hacer buscando los puntos traza de la recta y unièndolos convenientemente de forma que obtengamos las proyecciones previas de èsta, o haciendo uso de los planos proyectantes, que son planos que contienen a la recta y son perpendiculares a los de proyecciòn. La intersecciòn de los planos proyectantes con dichos planos de proyecciòn nos dan las proyecciones previas de la recta que buscàbamos. A continuaciòn lo ùnico que hay que comprobar es que todas las proyecciones del punto reposen sobre las proyecciones previas halladas.

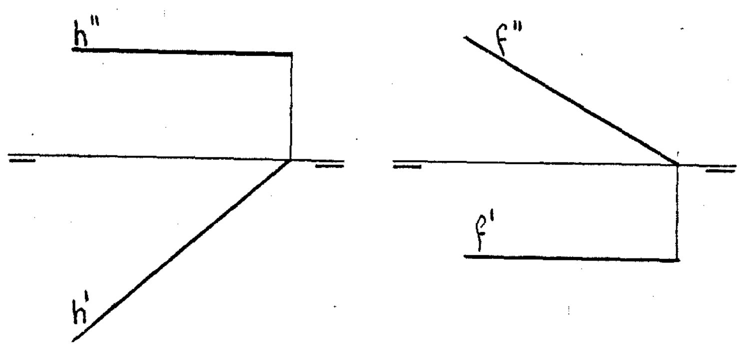
¿Cuàl de los procesos anteriormente descritos podriamos usar para programar la respuesta gràfica a la pregunta de si un punto se encuentra sobre una recta?. La respuesta serà ninguno, dado que la extrema dificultad de programar cualquiera de los dos no compensa el posible efecto gràfico-espacial deseado. Veamos porquè.

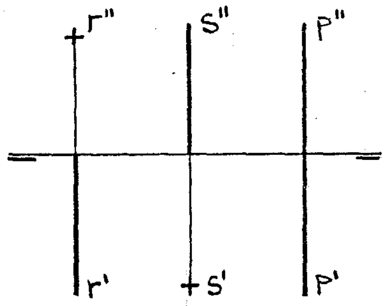
Encontrar las proyecciones previas de una recta implica como hemos visto anteriormente, usar uno o los dos mètodos vistos màs arriba. Empecemos por el de hallar los puntos traza. No representa ningùn problema nuevo a los vistos hasta ahora encontrar dicho puntos, el problema radica en unirlos convenientemente para obtener la proyecciòn directa en cada caso. En la figura podemos ver alguno de los casos de rectas distintas y las proyecciones previas que generan:



habria que preveer un estudio del orden de preferencia al unir entre si los tres puntos de intersección con los planos de referéncia, según la recta con la que estemos trabajando.

El caso es distinto cuando la recta en cuestión es una de las rectas singulares que veremos más adelante, a saber:





estas rectas requeriran un estudio pormenorizado pues sus intersecciones con los planos de proyección son peculiares.

En el caso de una recta cualquiera, el problema radica en saber el orden por el cual va intersecando a los distintos planos. Vemos en la figura correspondiente a los tres casos posibles que siempre uno de los tres puntos traza tiene alguna coordenada negativa, será ésta la que no usaremos. En el primer caso de la figura vemos que uniendo directamente el punto traza de perfil y el punto traza horizontal, nos queda perfectamente definida la proyección directa de la recta, y el punto traza vertical corta a dicho plano de proyección en la zona de las z negativas. Los otros dos casos se resuelven mediante razonamientos parecidos.

Si optamos por obtener las proyecciones previas de la recta mediante el uso de planos proyectantes, aparece el concepto de hallar un plano que contenga a una recta y sea perpendicular a otro plano (plano proyectante). Esta forma de definir un plano es la 5 de las previstas en el Capitulo 2. A continuación es necesario hallar la intersección de dicho plano con el de referencia al que es perpendicular. Las rectas obtenidas como intersección deben ser acotadas de forma que aparezcan como segmentos que tienen como limite las proyecciones de los ejes que definen el plano de proyección.

En cualquier caso, posteriormente es menester dibujar sobre cada proyección previa de la recta la proyección previa correspondiente del punto.

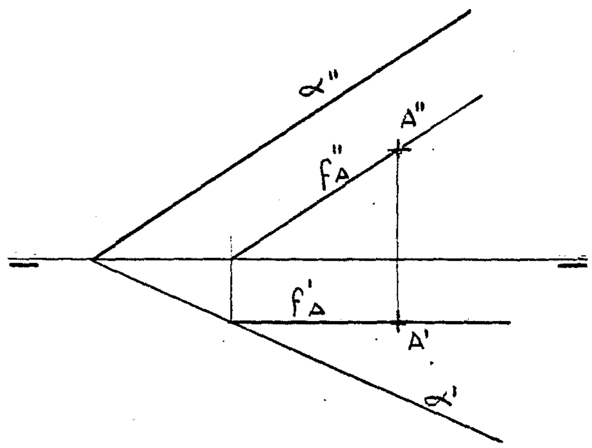
Puede asaltarnos la duda sobre la necesidad de consultar la pertenencia o no de un punto a una recta, y confundirlo con el caso de señalar una recta para diferenciarla del resto de las posibles que se encuentran en pantalla. La duda no existirá si recordamos que nuestro interés radica en ir construyendo cuerpos poliédricos paso a paso, sin la ayuda de tener el problema previamente resuelto y con todas las coordenadas de los vèrtices establecidas, donde nos encontraremos con rectas (segmentos) que deben tener una longitud superior o inferior a la que previamente habiamos hallado; o con vèrtices de arista de un prisma que deban apoyarse sobre otra arista a una distancia determinada de un punto de esta arista, etc.

Otro caso de consulta de la pertenencia o no de un punto a una recta, puede ser debido al hecho de que durante nuestro proceso de formaciòn de una figura hallamos transformado una recta en una semirrecta o segmento, y nos interesa saber si un punto se encuentra sobre la prolongaciòn imaginaria de dicho segmento.

La conclusiòn de todo lo anterior es la de que hay que programar que la consulta de la pertenencia o no de un punto a una recta sea del tipo coloquial, y que solucionados los posibles problemas de falta de precisiòn del cursor, sencillamente a la respuesta afirmativa siga la correspondiente cruz de señalizaciòn del punto en cuestiòn.

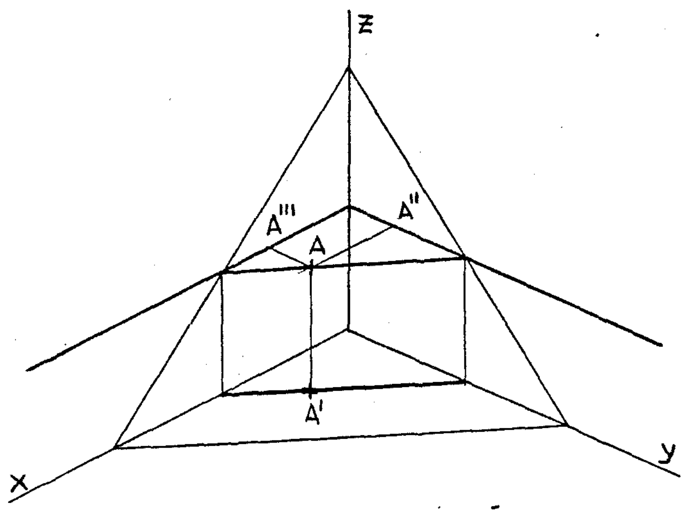
Punto sobre un plano.

Un punto se encuentra sobre un plano si se encuentra en una de las rectas de este plano. Este es un concepto facilmente traducible en el Sistema Dièdrico, ya que no se especifica que recta es sobre la que debe estar el punto.



Normalmente se construye una de las rectas singulares del plano, que veremos màs adelante, y se comprueba si todas las proyecciones del punto se encuentran sobre las proyecciones de dicha recta. En el dibujo de màs arriba, el proceso se ha hecho sobre una recta horizontal.

Si quisieramos hacer lo mismo en Axonomètrico, sòlo se diferencia el proceso en el càlculo de la horizontal que pasa por el punto. En el caso de Dièdrico sabemos que las proyecciones vertical y horizontal de una horizontal de un plano tienen unas direcciones determinadas, paralela a la linea de tierra una y paralela a la traza horizontal del plano la otra, mientras que en Axonomètrico hemos de proceder a la construcciòn de dicha horizontal. Hacemos pasar por la imagen directa del punto en cuestiòn un plano horizontal, (èste es uno de los planos singulares que veremos màs adelante), de altura Z la del punto. Dicho plano cortarà a los de proyecciòn segùn dos rectas reales, una sobre el plano de perfil y otra sobre el vertical.

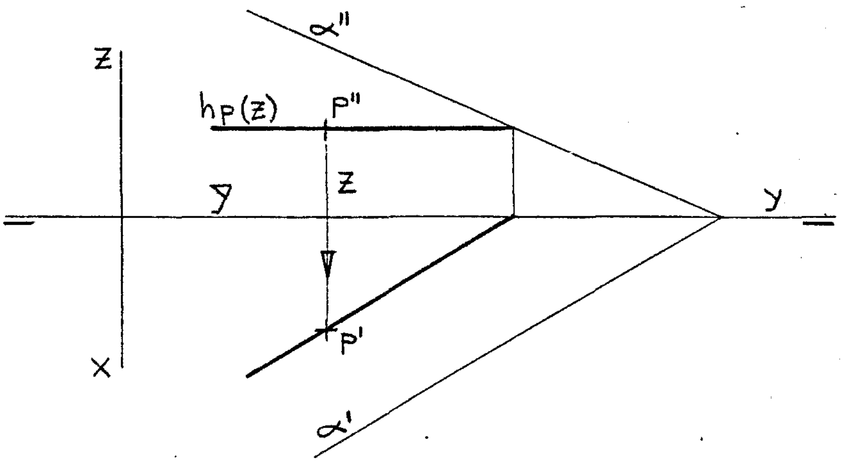


las proyecciones del punto deben recaer sobre estas dos rectas para que el punto se encuentre sobre el plano.

Nuevamente el procedimiento informàtico es màs sencillo, bastàndonos seleccionar el plano en la linea de diàlogo, o mediante la informaciòn tambièn obtenida en esta linea del proceso de generaciòn del plano, seleccionàndolo posteriormente por cursor; y seleccionando el punto ya sea tambièn por la linea de diàlogo, o mediante el cursor. A continuaciòn se comprueba si el punto cumple la ecuaciòn analitica del plano y se nos da la respuesta oportuna. Debo hacer hincapie, otra vez, de que el único problema que puede ensombrecer la sencillez del método es la posible falta de precisión del cursor.

¿Cuando consultaremos que un punto esté sobre un plano?. Es conveniente hacerse esta pregunta tal y como nos la hemos hecho en el caso de punto y recta, para preveer la posible respuesta gráfica del programa. Pongamos por ejemplo el caso de dibujar poligonos en verdadera magnitud o el de dibujar una elipse especificando el punto del plano que ha de ser su centro. Esta operación solia resolverse por cambios de plano, en nuestro caso se resuelve por cambio de proyección, en la dirección de la normal al plano, y nuestro problema será otro: conseguir que una vez hecho el cambio de proyección los infinitos puntos del plano que ahora están en pantalla cumplan la ecuación del plano que representan. En los casos comentados anteriormente es dificil separar la consulta de la pertenencia o no de un punto a un plano de la selección de dicho plano para realizar operaciones en él. Hemos de ver, no obstante, que son dos operaciones distintas, complementarias si se quiere, una seleccionar un punto en un plano y caso de estar en él definirlo, (ver opción 6 de definición de punto en el Capitulo 2), y otra, posterior, seleccionar el plano, hacer un cambio de proyección y trabajar en el nuevo plano (el de la pantalla) con la nueva representación del punto escogido. Es, pues, necesario separar claramente ambos conceptos.

Recurramos, nuevamente, al Sistema Diédrico, mientras que es muy habitual seleccionar un punto sobre una recta de una forma inmediata, sencillamente señalando uno de los infinitos que la forman; es usual que cuando se quiere hacer lo mismo con un punto y un plano se den dos coordenadas del punto para fijar aproximadamente el tipo de punto que nos conviene y dejamos a la tercera cumplir el hecho de estar en el plano:



del punto P solo he dado su proyección vertical P(-,Y,Z), posteriormente trazando la horizontal hp(Z) he obtenido la proyección horizontal del punto con lo que he completado sus tres coordenadas. Es este mismo criterio el que adoptaremos en nuestro caso, ya que hemos de pensar que escogeremos el punto en cuestión por motivos determinados, estos motivos quedan restringidos a predeterminar la posición del punto en el espacio solo en función de dos parámetros quedando para el programa el definir el punto correctamente.

Resumamos un poco lo dicho, existen tres tipos posibles de cuestiones a plantearse:

1.- Consulta de si un punto previamente dibujado pertenece a un plano.

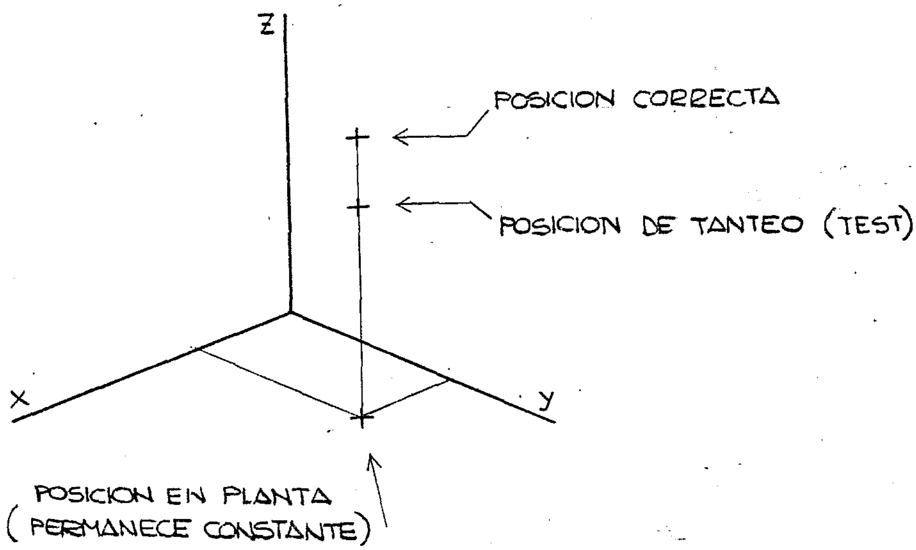
2.- Identificación de un punto sobre un plano del que se da la posición aproximada por dos coordenadas.

3.- Identificación de un plano para hacer un cambio de proyección.

El último caso es discutible que tenga que estar en esa lista, pero dada la forma en que se resuelve la cuestión puede parecer aconsejable su inclusión.

El primer caso es sencillamente contestado desde la linea de diálogo, sin más consideraciones gráficas.

La respuesta al segundo caso es el dibujo de la posición **correcta** del punto. Mediante el cursor situamos un punto, con ayuda en el caso de la figura de la proyección en planta o sea que trabajamos con su X y su Y, y damos la orden de situarlo sobre el plano α ; la respuesta gràfica del programa es dibujar una cruz sobre la proyecciòn directa de un punto que sobre el plano α tenga las coordenadas X e Y predeterminadas.

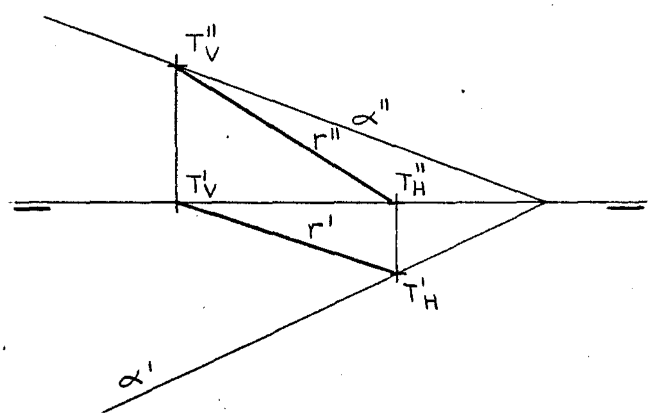


El tercer caso ya ha sido comentado en el Capitulo 2 y se trata de seleccionar un punto del plano que se encuentre aproximadamente sobre la proyecciòn axonomètrica del c.d.g. de la cara sobre la que pretendemos trabajar. Debemos tener previsto las ordenes precisas para anular selecciones erroneas muy frecuentes en estos casos.

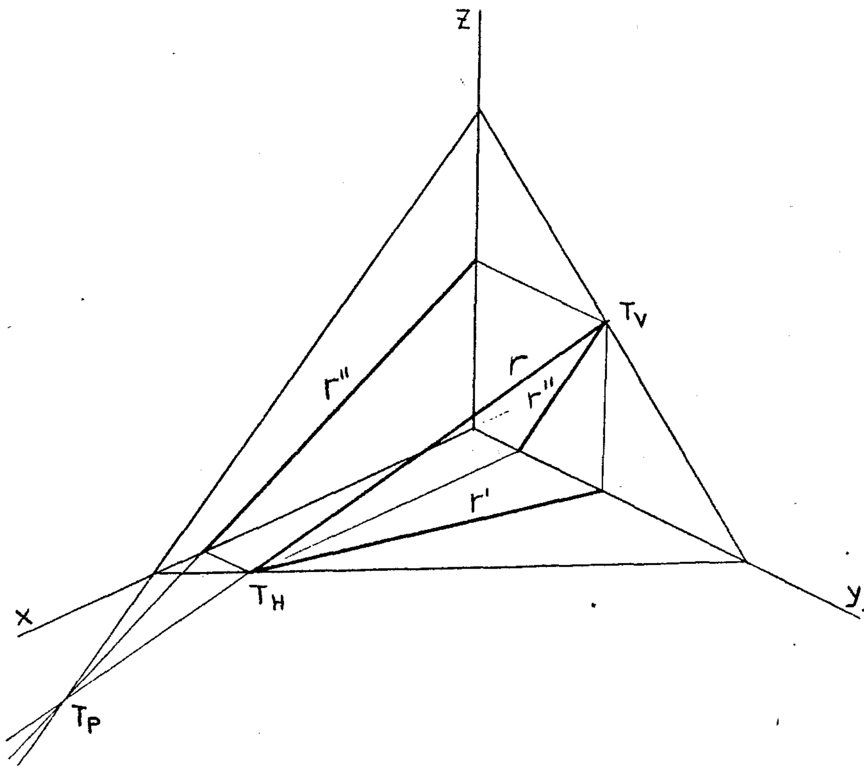
En conclusiòn, la respuesta gràfica informatizada prevista para el caso de pertenencia de un punto a un plano, es el dibujo de una cruz sobre dicho punto, dado lo prolijo de las construcciones geomètricas habituales (2).

Recta contenida en un plano.

Usando el concepto de puntos traza de una recta y de rectas traza de un plano, en el Sistema Diédrico es muy sencillo saber si una recta está contenida en un plano. Como tanto unos como otros son el resultado de cortar recta y plano por los planos de proyección, en este plano en concreto el punto debe encontrarse sobre la recta: los puntos traza de la recta deben estar sobre las rectas traza del plano, (de hecho lo que hacemos es bajar un grado a cada elemento: a la recta la pasamos a punto y al plano a recta).



Su traducción axonométrica es inmediata y claramente análoga al caso diédrico.



De hecho el razonamiento se puede generalizar ya que los puntos traza no son más que unos puntos determinados de la recta: una recta está contenida en un plano si lo están dos puntos cualesquiera de ella.

El hecho de que los puntos puedan ser cualesquiera nos viene muy bien para su implementación informática, ya que una de las formas de definir una recta (segmento) es señalando los dos puntos que la definen y esa información queda almacenada en la matriz correspondiente a dicha recta. Basta consultar los puntos que definen la recta y comprobar analíticamente si dichos puntos cumplen la ecuación del plano dado.

Hemos dicho más arriba, que la implantación del Dibujo Asistido por Ordenador (D.A.O.) puede ser el responsable en un futuro próximo de que sea más lógico imaginar que la definición idónea de segmento es la de un punto de paso y una dirección, frente a la de porción de recta determinada por dos puntos. Independientemente de ello, en la matriz donde almacenemos la información de las rectas, (recordemos que las más de las veces son segmentos), debemos tener como MINIMO la información de dos puntos de paso para efectuar la comprobación que nos ocupa de ver si dicha recta se encuentra en un plano determinado. Dada la facilidad de encontrar los puntos traza de la recta, basta sustituir en su ecuación sucesivamente X=0, Y=0 y Z=0, pueden ser estos los almacenados. Es curioso destacar como se pueden usar conceptos antiguos en proposiciones nuevas, de hecho esta es la justificación del presente repaso de operaciones geométricas básicas.

Nuevamente omitiremos respuesta gráfica a la pregunta de si una recta pertenece a un plano.

RECTAS Y PLANOS SINGULARES.

Introducción.

En mi etapa de confrontación de opiniones para realizar esta tesis hablé con varios programadores de Informática Gráfica, y ninguno vió la necesidad de preveer la existencia de las singularidades de rectas y planos, excepto como fuentes de problemas al originar divisiones por cero no deseables en ningún caso.

En un programa de Geometria no podemos renunciar en modo alguno a trabajar con rectas horizontales, planos de canto, etc. y hemos de preveer la adecuada respuesta gráfica a estas entidades.

Rectas Singulares.

De todas las posibles estudiaremos sólo:

1.- Horizontal. Cualquier recta contenida en un plano paralelo al XY (Z constante).

2.- Frontal. Cualquier recta contenida en un plano paralelo al YZ (X constante).

3.- De perfil. Cualquier recta contenida en un plano paralelo al XZ (Y constante).

4.- De punta. Cualquier recta que sea perpendicular a uno de los planos de proyección, ya sea el XY, YZ o XZ.

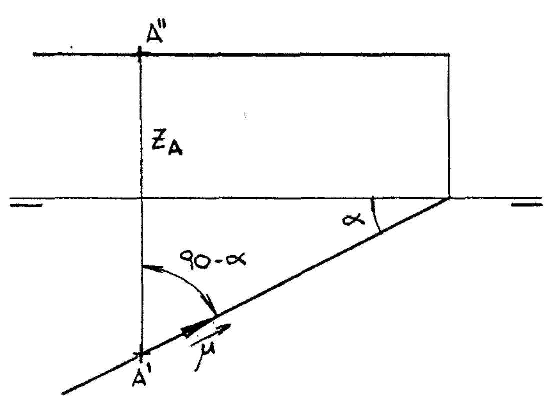
Recta Horizontal.

Es menester distinguir entre definir una recta y que esta resulte ser una horizontal, y que al definir la recta especifiquemos claramente que es una horizontal. En el primer caso, el único contemplado por los informáticos gráficos, si hubieramos programado que se debe crear la recta dando dos puntos de paso A y B por su coordenadas (X_A, Y_A, Z_A) y (X_B, Y_B, Z_B), las coordenadas de un punto cualquiera de la recta deberían cumplir:

$$X-X_A/X_B-X_A = Y-Y_A/Y_B-Y_A = Z-Z_A/Z_B-Z_A$$

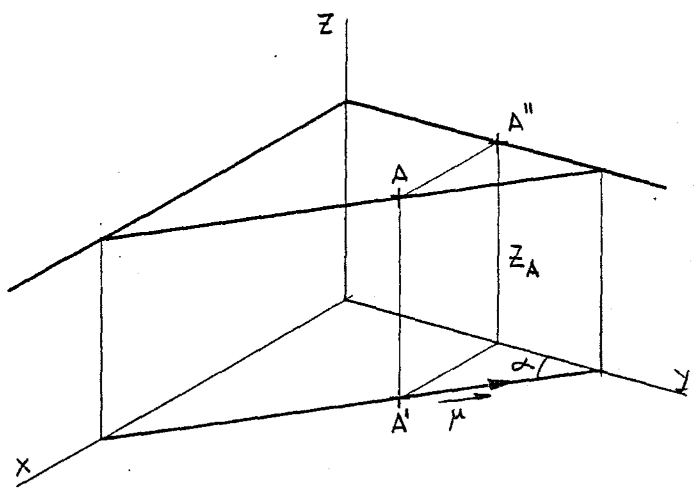
donde vemos que la tercer fracción da lugar a una división por cero de la que hay que huir siempre en informática. Este problema, como ya hemos comentado oportunamente, se resuelve dando un punto de paso y el vector normalizado que nos define la dirección.

Una recta horizontal nos queda determinada por un punto de paso, la coordenada Z a la que se encuentra y el vector normalizado de su dirección, veámoslo en el Sistema Diédrico:



la proyección vertical de la recta nos viene determinada por la proyección de vertical de A y por Z_A, su distancia al plano horizontal de referencia al que es paralela. La proyección horizontal nos viene determinada por A' y la inclinación que nos define el vector de su dirección.

Análogamente en Axonométrico:

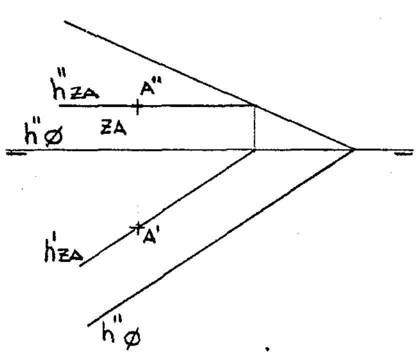


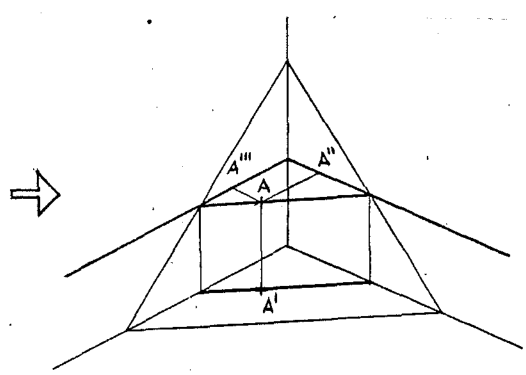
en este caso interviene también la proyección previa de perfil.

Puede parecer que al dar la información de que la recta es horizontal en vez de simplificar el resto de la información necesaria en su definición la complicamos. No es asi ya que basta con la información de que es horizontal, un punto de paso y su altura Z, veámoslo:

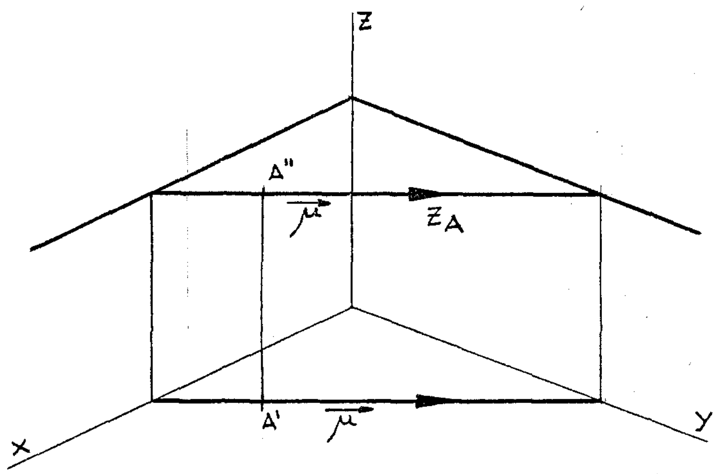
En diédrico, si identificamos el punto sobre el plano α, mediante su cota Z_A y su situación, el caracter de horizontal ya nos permite dibujarla teniendo en cuenta que su proyección horizontal deberá ser paralela a la proyección horizontal de la traza del plano, que es la horizontal de Z =0.

En Axonométrico, si tenemos representado el plano sobre el que queremos dibujar una horizontal, el proceso será indentificar el punto tal y como lo hemos visto en este mismo capitulo, dando dos proyecciones del punto una de las cuales sea Z, y una vez obtenido el punto y sus tres proyecciones previas dibujar por ellas y limitadas por las trazas del plano las proyecciones directa y previas de la recta horizontal, cumpliéndose como en el Sistema Diédrico que la directa y la previa sobre el plano horizontal son paralelas a la traza horizontal del plano.





Si no tenemos el plano sobre el que debe encontrarse el punto, deberemos hacer uso del concepto de que la recta horizontal que pasa por el punto A se encuentra sobre un plano paralelo al horizontal de referencia (plano horizontal como veremos más adelante) a una altura Z_A.



este plano corta a los de referencia en dos rectas própias y una imprópia (la de intersección con el plano horizontal al que es paralelo), las rectas própias coinciden con las proyecciones previas de la horizontal que estamos buscando. Nos queda por determinar la proyección directa y la previa horizontal, para las que inexcusablemente necesitamos la información de su orientación.

Desechando en principio, el representar gráficamente las proyecciones previas de una horizontal, planteémonos el problema de situar la proyección directa sobre un punto, las operaciones previstas deben ser:

- Selección de un punto sobre un plano mediante dos coordenadas, una de las cuales inexcusablemente debe ser la Z de la horizontal.

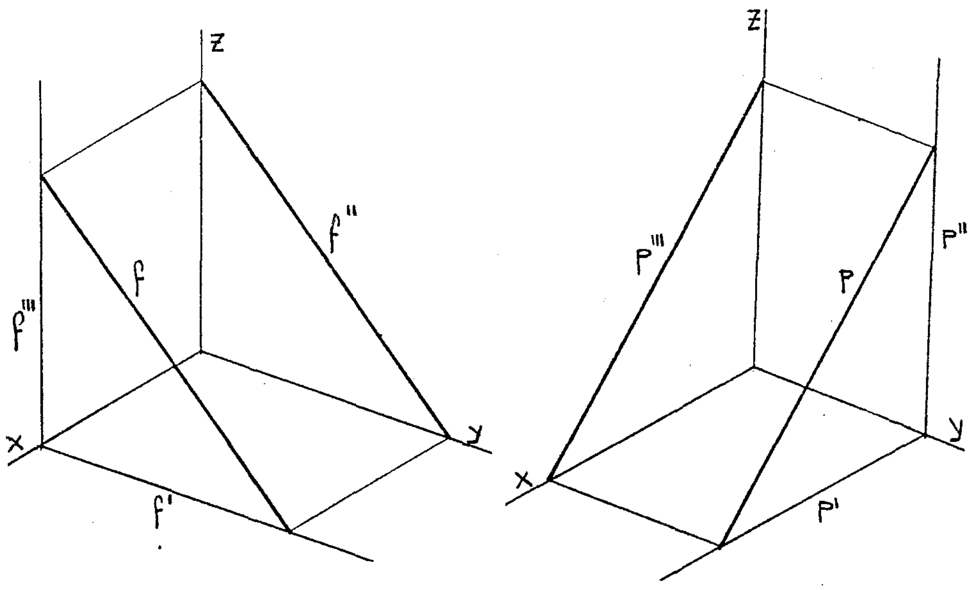
- Obtención de la traza horizontal del plano sobre el que se encuentra el punto. (intersección de dos planos, opcionalmente puede ser visible o no).

- Traslación (que no paralelismo) de la traza horizontal hasta hacerla pasar por la proyección directa del punto A.

Estas deben ser las operaciones programadas como respuesta a la orden HORIZONTAL POR UN PUNTO. Son casi tan complejas como las que hemos desechando anteriormente en este mismo capitulo, pero su utilidad geométrica hace inexcusable su implementación.

Rectas Frontales y de Perfil.

Dado que sus caracteristicas son las mismas que las de una recta horizontal estudiadas en el apartado anterior, no creo necesario repetir las reflexiones antes expuestas. Es necesario, sin embargo, ver cuales son sus representaciones axonomètricas.

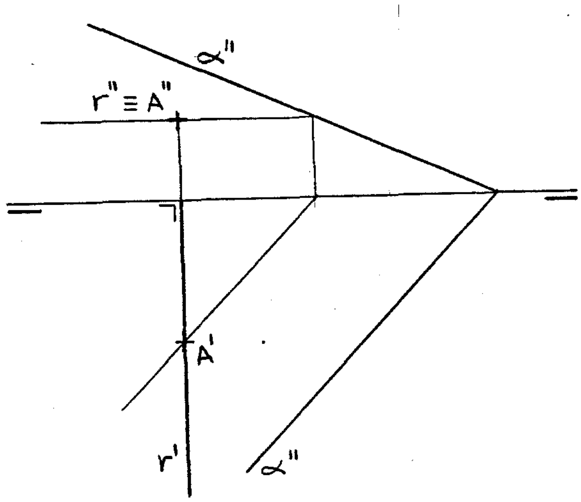


Recta de Punta.

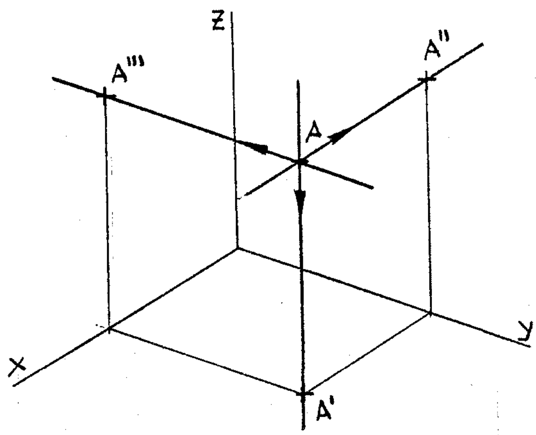
El nombre de recta de punta es algo genèrico, pues, por ejemplo, cuando el plano el que es perpendicular es el horizontal se puede llamar VERTICAL; mantengamos sin embargo el caracter genèrico para este estudio.

El concepto es básicamente distinto a los vistos anteriormente, en aquellos se trataba de rectas paralelas a un plano a una distancia determinada mientras que aqui tratamos con perpendiculares por un punto determinado. Tenemos, sin embargo, una ventaja a nuestro favor: estamos trabajando con unos ejes coordenados trirrectángulos de forma que cada eje es perpendicular al plano formado por los otros dos. Consecuencia de lo anterior es que ya tenemos, de entrada, determinada la dirección que deberá tener la recta perpendicular en cada caso, solo nos hará falta trasladar esa información al punto determinado que nos interese.

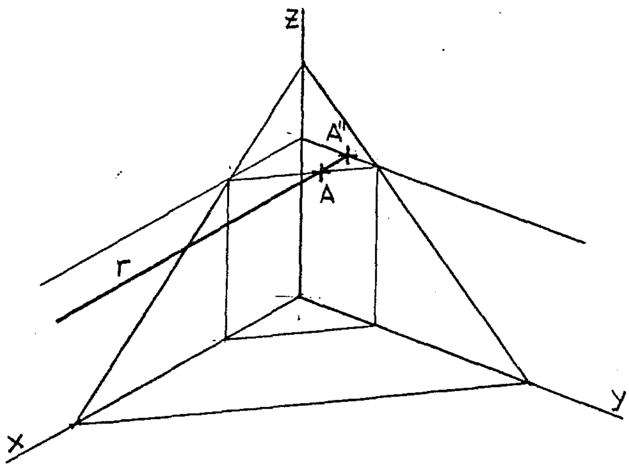
En Diédrico, representar una recta perpendicular, por ejemplo, al plano vertical pasando por un punto A del plano α, no tiene ninguna dificultad.



Veàmoslo ahora en Axonomètrico, en la figura tenemos, pasando por A, las proyecciones directas de las tres rectas de punta perpendiculares a los tres planos de referencia:



En su traducciòn informàtica, una vez identificado el punto y el plano al que debe ser perpendicular la recta de punta, la obtenciòn fìsica de la recta es inmediata, ya que su direcciòn nos la da la recta que una la proyecciòn directa del punto con la previa sobre el plano de referència correspondiente. Sòlo habrà que preveer el alargar algo en el sentido contrario, a efectos del efecto estètico deseado.



Planos Singulares.

Anàlogamente al caso de rectas singulares, sòlo estudiaremos cuatro tipos de planos singulares, que son:

1.- Horizontal. Plano paralelo al xy de referencia. (z constante).

2.- De Perfil. Plano perpendicular a la vez a xy y a yz. (y constante).

3.- De Canto. Plano perpendicular al

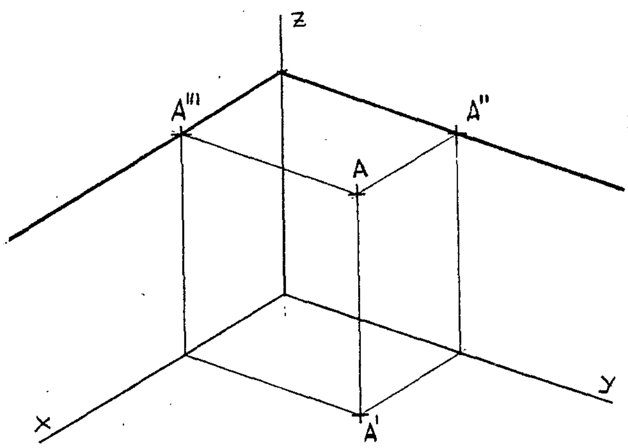
plano yz de referencia. También recibe el nombre de plano proyectante vertical.

4.- Vertical. Plano perpendicular al plano xy. También recibe el nombre de plano proyectante horizontal.

El uso de planos singulares es inexcusable para nuestro propósito, siempre puede resultar interesante realizar una sección de un cuerpo por un plano horizontal, o es necesario encontrar un plano proyectante vertical que contenga a una recta para, tal y como indica su nombre, obtener la proyección de ésta sobre el plano vertical, etc. Tenemos ya, en el capitulo 2, resuelto el problema de como se definen estos planos, nuestro interés aqui es como se representan.

Plano Horizontal.

En Diédrico, un plano horizontal no es más que una recta paralela a la linea de tierra, en la proyección vertical, y a la distancia Z prefijada. En Axonométrico, nos vendrá determinado por sus intersecciones sobre los planos de proyección que tienen sección propia con él: el plano vertical y el de perfil. Consecuentemente, en nuestro caso, nos bastará dar un punto de paso y programar el dibujo de segmentos paralelos a los ejes en proyección X e Y, pasando por las proyecciones previas de perfil y vertical de dicho punto.

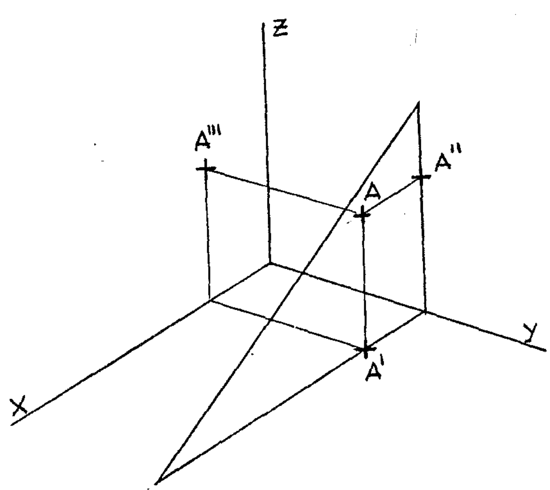


En cuanto a almacenar información de dicho plano horizontal, es sumamente sencillo ya que sólo es necesario conocer el valor de su coordenada Z.

Si se trata de trazar el plano horizontal que contenga a una recta (segmento), como ésta previamente debe ser horizontal para que sea posible la operación, cosa que no ocurrirá el los restantes casos de planos singulares excepto en el de Perfil, no hay ninguna dificultad en implementar el comentario anterior dibujando el plano horizontal por cualquiera de sus puntos. Recordemos que tenemos almacenado de cada recta sus tres puntos trazas, por lo cual no tendremos ninguna dificultad en realizar la operación comentada.

Plano De Perfil.

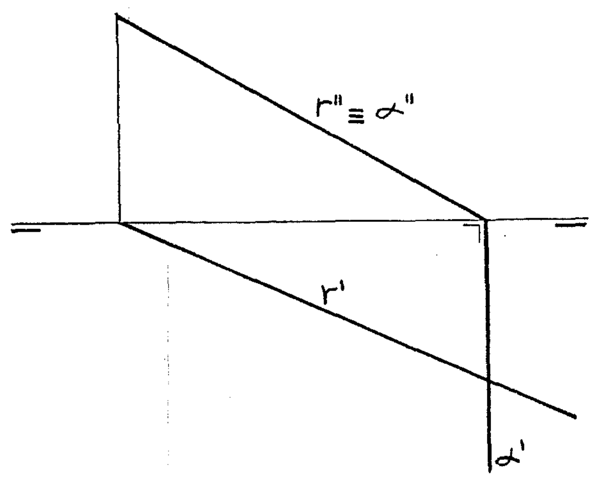
Como se ha dicho anteriormente, el caso del plano de perfil es en todo análogo al del plano horizontal, ya que si queremos que contenga a una recta ésta previamente deberá tener el mismo carácter que el plano. Podemos, pues, generalizar los comentarios hechos para el caso anterior.



Sólo es de destacar el hecho de que en Diédrico, para tener la completa información de lo que se encuentra contenido en un plano de perfil, es necesario recurrir a la tercera proyección, consiguiendo asi eliminar ambiguedades.

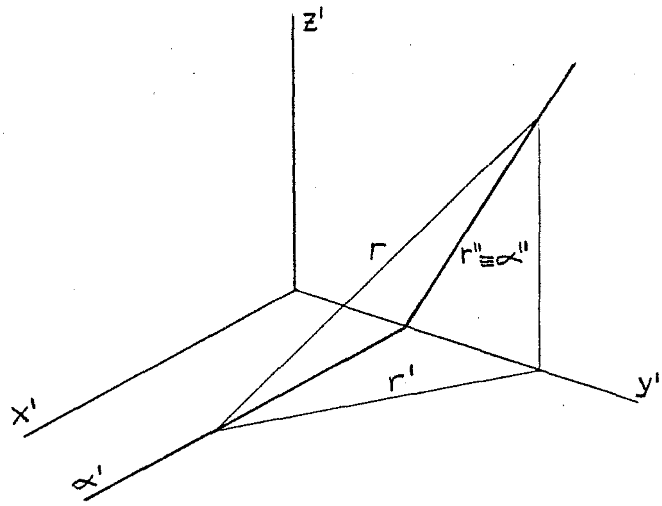
Plano De Canto.

Este caso ya no es tan trivial como los anteriores. Veámoslo primeramente en Diédrico:



el plano α cumple las condiciones de contener a r y ser perpendicular al plano vertical de referéncia. Vemos que las proyecciones verticales de α y r se confunden, mientras que las horizontales no guardan ninguna relación gráfica especial, sólo encontramos en α' la peculiaridad de que por ser perpendicular al plano vertical de referencia, dicho ángulo lo vemos en verdadera magnitud en la proyección horizontal del plano.

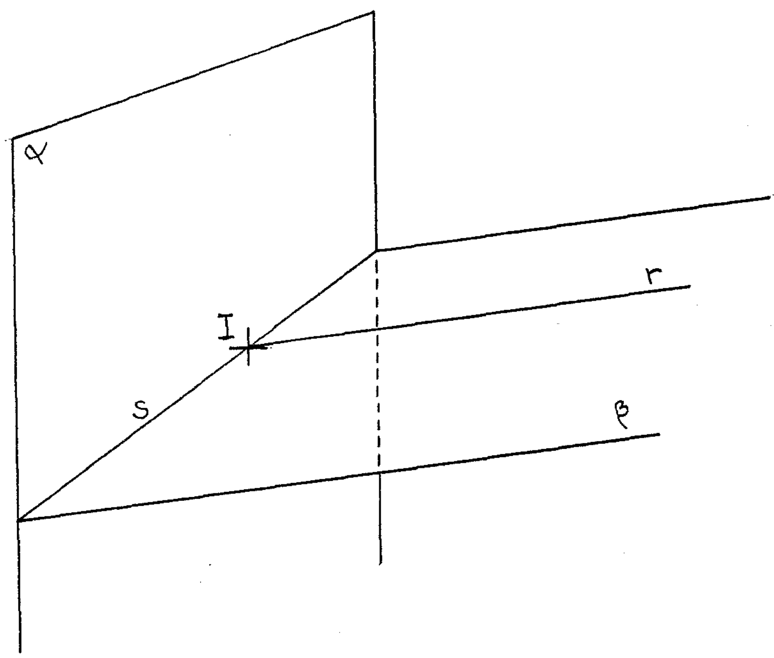
La traducción axonométrica de lo anterior es obvia:



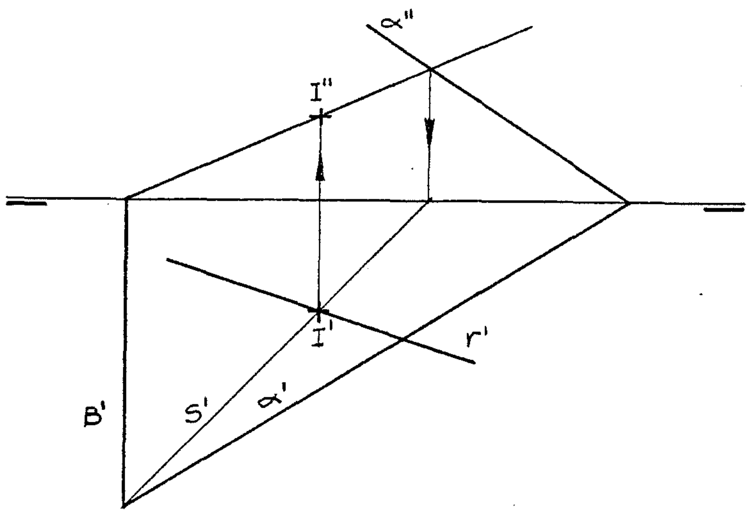
Su almacenamiento ya no es el Z o Y constantes sino que habrà que almacenar la ecuaciòn de dicho plano hallado correctamente. En cuanto a su traducciòn gràfica para nuestro uso, antes deberìamos ver cuàl es su utilidad, y en funciòn de ella actuar en consecuencia.

El uso de los planos de canto no es, normalmente, un fin en sì mismo sino que es una ayuda en otra operaciones geomètricas, veàmos cuales. Cuando pretendemos encontrar la intersecciòn de una recta y un plano, el problema no se resuelve de una forma inmediata sino que se hace referencia a otro caso de intersecciòn, màs sencillo, previamente resuelto. Como veremos en el capitulo 5 dedicado a los problemas de intersecciòn, una vez estudiado el caso de la intersecciòn de dos rectas, al resolver la intersección de recta y plano interviene necesariamente el concepto de plano proyectante.

Sean r y α la recta y el plano que queremos intersecar, si por r hacemos pasar un plano ß que la contenga:



ß y α se cortan según una nueva recta s, que por pertenecer a ambos planos pertenece a ß que a su vez contiene a r, consecuentemene r y s son coplanarias. Dos rectas coplanarias se cortan en un punto própio o imprópio, que una vez obtenido contesta al problema propuesto. Como en el razonamiento anterior a ß no se le ha impuesto ninguna condición restrictiva, nada nos impide que sea un plano de canto, o proyectante en general, es éste el que usaremos dada la gran facilidad de su determinación en el Sistema Diédrico:

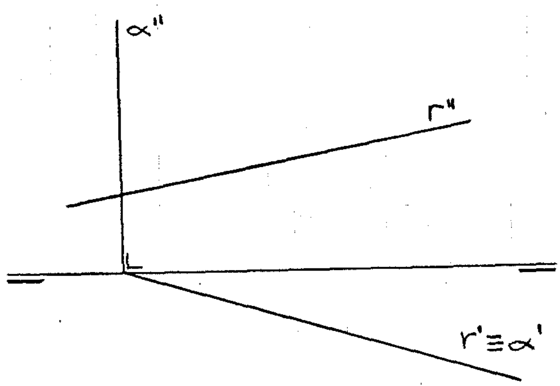


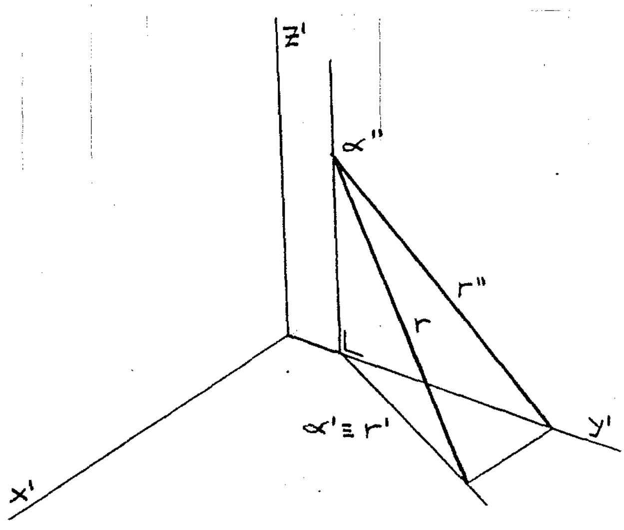
Como nosotros no nos serviremos de esta mecànica para resolver la intersecciòn de recta y plano, sino que hallaremos las coordenadas del punto de intersecciòn analiticamente; sòlo nos queda el preveer la posibilidad de dibujar un plano de canto como un caso particular de plano perpendicular a uno de los proyecciòn conteniendo una recta. Es preciso, sin embargo, tener programado que si el plano que se pide es de esta naturaleza el programa nos conteste gràficamente con las trazas de dicho plano, pues su utilidad consistirà en hacer tanteos de como puede quedar una figura al ser seccionada segùn una direcciòn determinada.

Seria ùtil tener programado en estos casos de tanteo a los que me he referido màs arriba, la posibilidad de devolver gràficamente la informaciòn de como queda el cuerpo seccionado en las dos partes del espacio que un plano limita. De esta posibilidad ya hablaremos oportunamente cuando hablemos de intersecciones, pero viene a cuento comentarlo aqui pues un plano proyectante usado como seccionador sòlo es lògico definirlo como conteniendo a una direcciòn; mientras que en el caso general de plano se puede definir por tres puntos o por los àngulos que forme con los planos de proyecciòn.

Plano Proyectante Horizontal.

Dado que en todo el apartado anterior me he referido a los planos proyectantes en general y al de canto en particular, baste con presentar sus representaciones en Dièdrico y Axonomètrico:





Notas y Referencias.

(1) pag. 101 de la ediciòn en castellano de "Historia de la Matemàtica" de Carl B. Boyer, traducido por Mariano Martinez Pèrez para Alianza Editorial. 1986. La versiòn original data de 1968.

(2) Si quisièramos que la orden de pertenencia de un punto a un plano implicara una serie de operaciones gràficas en la pantalla, convendria sencillamente programar una serie de operaciones bàsicas de una forma encadenada prefijada. A esto en los programas comerciales se le llama programar MACROS. En otro lugar de esta tesis se hablarà màs a fondo del tema, pero quizàs sea interesante hacer un pequeño apunte aqui.

En un programa de investigaciòn como puede ser HYPATIA, puede parecer que no es pròpio hablar de MACROS, pues su significado tradicional es el de que un usuario pueda programar dentro de un paquete comercial. Normalmente los programas comerciales solian ser cerrados y un usuario lo ùnico que podia ir haciendo era usar ordenadamente las opciones que se le suministraban. Esta politica no durò mucho historicamente, ya que de esta forma los creadores de un programa podian perder posibles clientes frente a otros paquetes que hacian menos operaciones, pero una determinada de estas operaciones la hacia màs facilmente que el suyo, cuando de hecho no era necesario màs que acoplar varias de las operaciones que ellos tambièn ofrecian. Dando la posibilidad, mediante un lenguaje determinado que normalmente no es el mismo con el que se ha creado un programa aunque si parecido, de que el usuario programase de forma sencilla este acoplamiento, conseguian que el cliente viera las otras excelencias de su paquete.

El uso de macros en nuestro caso, puede venir justificado por la voluntad de emular el sistema de trabajo de los ordenadores que forman parte de una red. En estos casos, los ordenadores pueden consultar librerias como por ejemplo la G.K.S., ya nombrada en varias ocasiones anteriormente. En el segmento de los microordenadores considerados ellos mismos como unidad, esta posibilidad no existe como tal, pero si un sistema, de CAD que es lo más habitual, ofrece la posibilidad de programar MACROS, de hecho se puede considerar que el paquete se convierte, en cierta forma, en una libreria a la que el usuario pueden acudir siempre que lo considere oportuno.

Ejemplo: consideremos que nos proponemos hallar la intersección de una elipse con una recta y disponemos de un sistema de CAD comercial que nos permite definir elipses, agrupar entidades e intersecarlas, las entidades, por rectas. El usuario sólo debe consultar de que forma se define en el paquete a la elipse, (soy consciente de la restricción que esto implica, ver mis comentàrios sobre AutoCAD al respecto), crearla y una vez la tengamos en pantalla darle un nombre como entidad e intersecarla con la recta que nos interese.

Esta forma "hibrida" de programación es, a mi modo de ver, el camino a seguir para conseguir que los microordenadores solucionen los problemas geométricos que nos planteamos, y de la forma que nos los planteamos. Evitamos de esta forma partir cada vez de cero y usamos todo el material previamente creado, aunque no trabaje de la forma que nos interesa. Algo parecido ocurre con el almacenamiento de la información de un segmento y su forma de introducirla. Es trabajo del programador preveer todas las formas de definición que el usuario crea conveniente, para en definitiva, y mediante sencillos programas, almacenarlas como estaba preestablecido.

Borland, una compañía de origen francés afincada en los Estados Unidos, facilita librerias de cálculo algébrico de forma que sólo es menester introducirlas en nuestro programa y llamarlas según unas variables determinadas. De hecho esta forma de trabajar emula el trabajo que se hacia como usuario de un gran ordenador (mainframe), en cola (batch): se escribia el programa en el que continuamente se hacian llamadas a subrutinas ya implementadas en el ordenador, se enviaba el programa a éste y al cabo de un tiempo se recibia la respuesta. Todo esto se puede hacer actualmente desde un mismo microordenador, consultando las librerias comerciales o programando macros dentro de otros programas.