UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

GEOMETRIA DE PUNTO, RECTA Y PLANO.

Posiciones relativas de Rectas y Planos.

Paralelismo y perpendicularidad.

Los problemas de paralelismo y perpendicularidad en 2D, se encuentran resueltos en cualquier paquete gráfico que consultemos, no asi en 3D. La explicación se encuentra nuevamente en la posible utilización de dichas propiedades como herramienta gráfica o no. Es muy probable encontrar en programas de 3D una opción para trazar por un punto una recta paralela a una vertical, por ejemplo, pero su traducción gráfica puede ser o una recta infinita (en el sentido de que ocupa toda la pantalla) o una recta que no es más que la traslación al punto escogido del segmento seleccionado. Aun en este caso, que de alguna manera podriamos considerar correcto, sólo podemos realizar estas operaciones respecto a unos tipos de rectas muy especiales: horizontales y verticales, entendiendo por tales las que son paralelas a los lados perpendiculares que nos definen la pantalla (1). Es dificil encontrar implementada la posibilidad de trazar la paralela a una recta cualquiera; y no digamos ya el caso de trazarle a esta recta una perpendicular (recientemente, primeros meses de 1987, han aparecido en el mercado español de software algunos paquetes que resuelven plausiblemente estas cuestiones, de los que hablaré en otro lugar de esta exposición).

Esto no quiere decir que no existan opciones de trabajo que impliquen la utilización de estas propiedades; es muy probable que en un buen programa podamos consultar la distancia, tanto numérica como en verdadera posición gráfica, entre un punto y una recta; lo que no está implementado es usar dichas propiedades para, con su ayuda, poder construir las figuras poliédricas que deseemos. Nuestro interés va dirigido, pues, al uso de dichas propiedades de una forma biunívoca, es decir por poner un ejemplo, nos interesa tanto poder consultar que una recta es perpendicular a un plano, como construir dicha recta de forma interactiva en tiempo real.

Los casos que vamos a estudiar son:

1.- Rectas paralelas entre si.

2.- Planos paralelos entre si.

3.- Rectas y planos paralelos entre si.

4.- Recta perpendicular a un plano.

5.- Plano perpendicular a una recta.

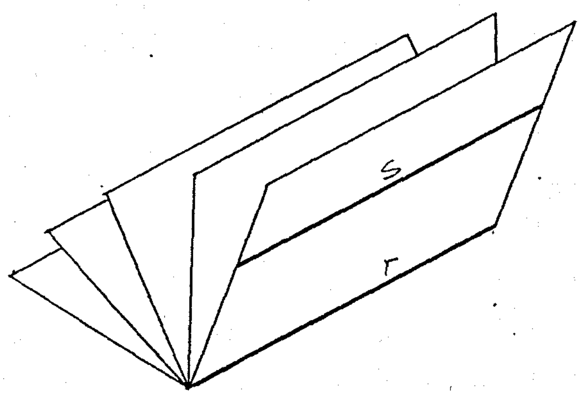
6.- Planos perpendiculares entre si.

7.- Rectas perpendiculares entre si.

8.- Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

Rectas paralelas entre si.

Tanto si realizamos el estudio de las rectas paralelas en el Sistema Diédrico, como si lo hacemos en el Axonométrico, dado que ambos son proyecciones cilindricas, sabemos que las rectas paralelas se proyectan en paralelas. Dos rectas paralelas tienen un punto en común, su dirección, necesitamos pues dar sòlo otro punto de paso para definirlas. A la dirección se le llama punto impròpio (geometria proyectiva), mientras que los puntos de paso fisicos (en el sentido obvio del tèrmino) son los llamados puntos pròpios. Con esta nomenclatura de puntos pròpios e impròpios podemos llegar a la conclusión, sorprendente para los no iniciados, de que dos rectas paralelas se cortan en un punto, y por lo tanto definen un plano, esta última conclusión ya no es tan sorprendente pues es fàcil imaginarse que por una recta pasan infinitos planos que la contienen, el escoger de entre ellos el que contiene a una recta paralela no encierra ninguna dificultad adicional.



Giremos el razonamiento del revés, para poder dibujar en 3D una recta paralela a otra ambas deben ser coplanarias. Sea r la recta y A el punto por donde hay que trazar la recta paralela, dicha recta r_p deberá encontrarse sobre el plano ß formado por r y A:

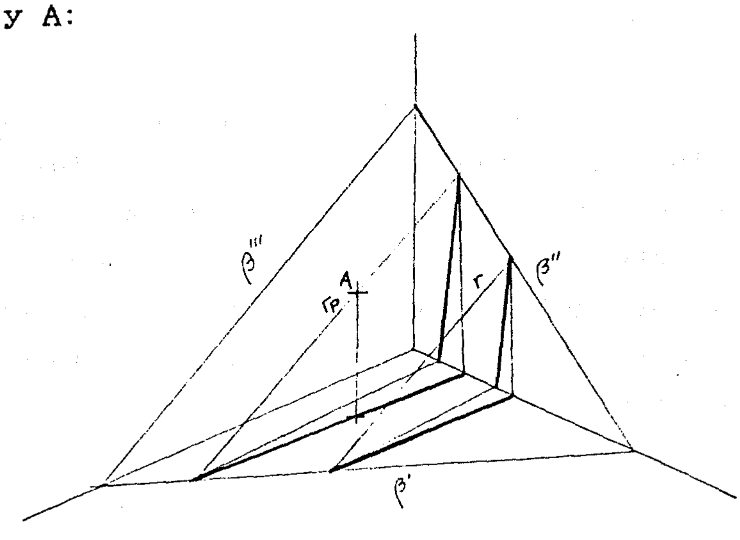
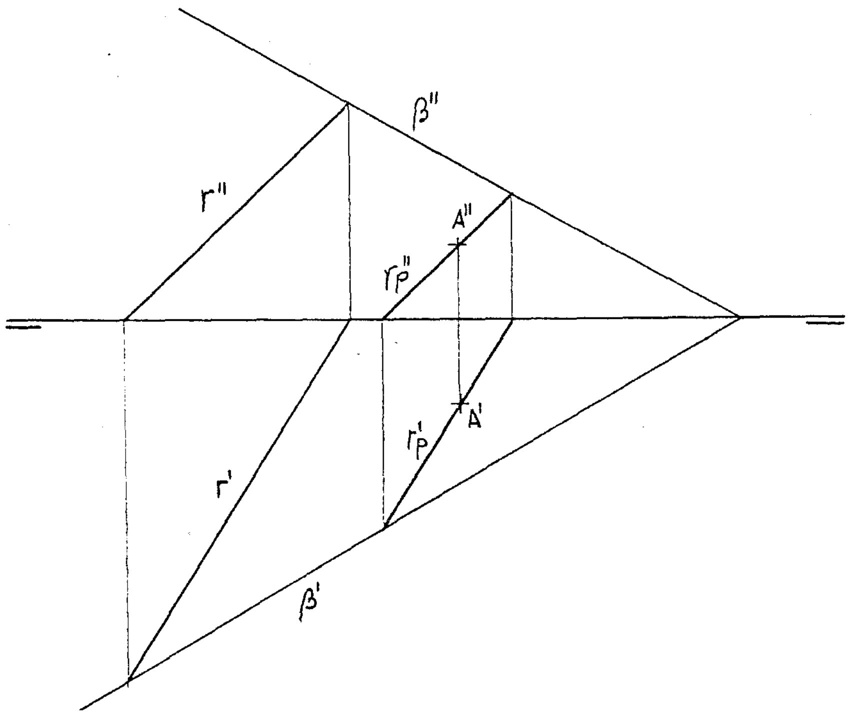


FIGURA B.

Si consideramos que tenemos resuelto informáticamente el problema en 2D, podríamos hacer un cambio de proyección de forma que coincida con la de la normal al plano y allí acometer el problema planteado. Es obvio que no será esta la forma de resolver el problema, dada la extrema complejidad que entraña el mecanismo de hacer un cambio de proyección para una operación tan elemental como trazar una paralela.

Veamos como se resuelve el problema en el Sistema Diédrico:



como trabajamos con las proyecciones de la recta, y hemos dicho que el paralelismo se conserva en las proyecciones cilíndricas, no tenemos ninguna dificultad. La recta r'lo único que ha de cumplir además de ser paralela a r es pasar por las proyecciones A" y A' de A. Comprobamos lo dicho anteriormente de que r_p se encuentra en el plano definido por A y r, mediante la verificación de que sus puntos traza se encuentran sobre las rectas traza de dicho plano.

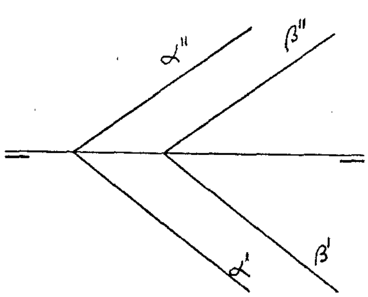
Los mismos conceptos en el Sistema Axonométrico, tienen una traducción inmediata. VER FIGURA B.

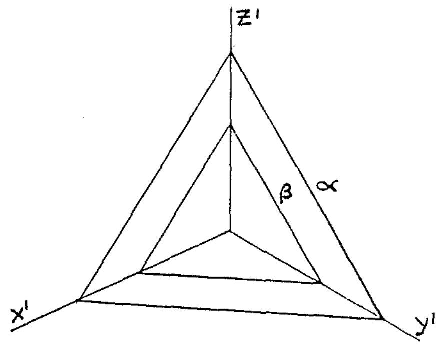
Para nuestros intereses nos basta con que las proyecciones directas de dos rectas paralelas sean paralelas, será ésta la información gráfica que devolverá nuestro programa HYPATIA, lo que se obtendrá hallando los puntos traza convenientes en cada caso. De la información almacenada sobre la recta a la que queremos trazar una paralela, sólo nos interesa el versor que nos determina su dirección. Aplicando dicho versor a partir del punto A tendremos determinada la recta paralela, de la que automáticamente hallaremos los puntos traza, pudiendo inmediatamente dar como respuesta gráfica su proyección directa. El estudio de cuales de los tres puntos traza deben ser usados para la "definición" de la proyección directa de la recta paralela, puede ser obviada teniendo en cuenta que serán del mismo carácter que los de la recta de referência. Dependerá de la forma en que esté estructurado el programa el que se realice dicho cálculo sistemáticamente o que se use la información previa almacenada de la recta imagen o previa.

Planos paralelos entre si.

En las proyecciones cilindricas con las que estamos trabajando, también se conserva el paralelismo de las rectas traza que nos determinan los planos.

Tendremos pues tanto en Diédrico como en Axonométrico:

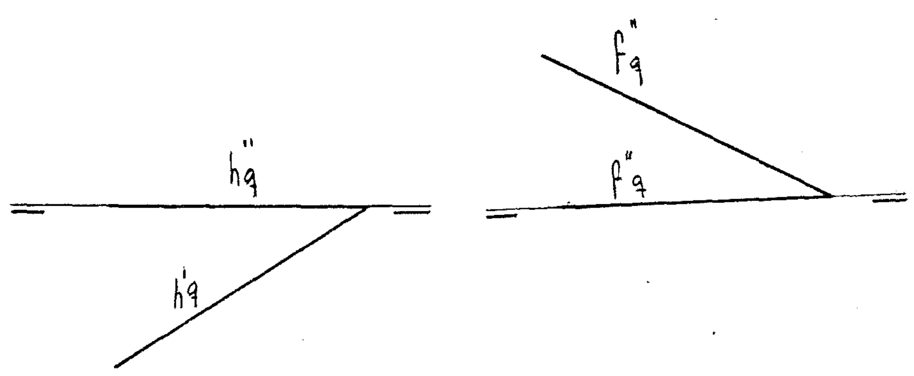




Nuestra atención se centrará ahora en el proceso de obtención de dicho plano paralelo, del que tenemos tan sencilla traducción gráfica.

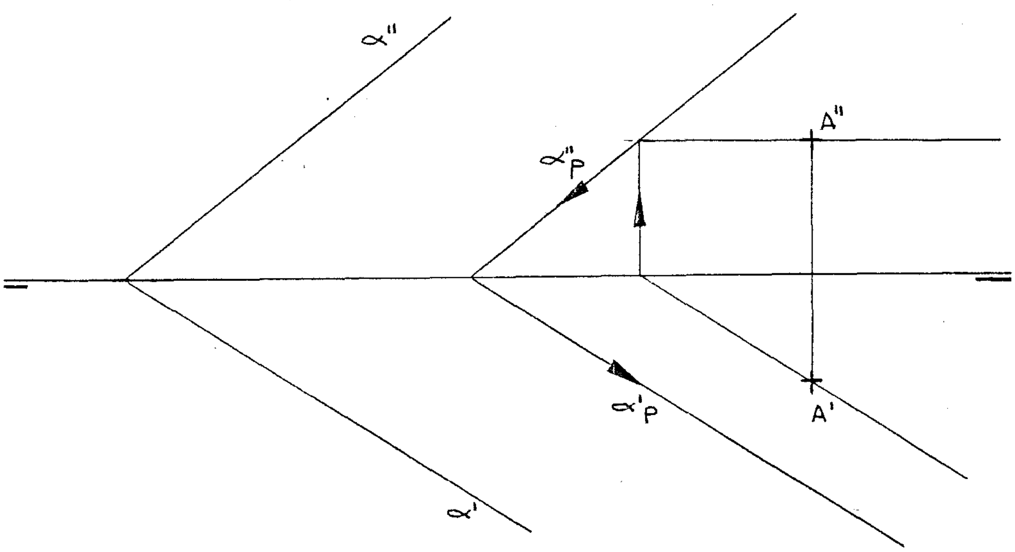
Dada la complejidad de algunas operaciones geométricas en el Sistema Axonométrico, éstas se resuelven en Diédrico y luego traducimos los resultados al sistema anterior. Anteriormente ya he usado esta modalidad de trabajo, y creo que es lógico que asi sea, ya que no se trata aqui de resolver cada cuestión en todos los sistemas sino de plantear el problema y exponer, comparándolas, varias soluciones. El sistema Diédrico, pese a su dificultad de interpretación en algunos casos, tiene un "álgebra" muy clara que en muchas ocasiones da la pista de la solución idónea.

Para construir un plano α' paralelo a α pasando por A, hemos de hacer el razonamiento de que A debe pertenecer a un plano del que sólo sabemos que tiene unas rectas traza paralelas a las de α. Veamos que quiere decir esto; las rectas traza de un plano no son más que rectas singulares de éste en una posición extrema, por ejemplo la traza horizontal de un plano es la horizontal de cota z=0 de dicho plano, y la traza vertical será la frontal de x=0.



Recordemos que para comprobar si un punto pertenecia a un plano, trazábamos por él dos rectas singulares de dicho plano: una horizontal y una frontal, por ejemplo, y si cumplian que sus puntos traza se encontraban sobre las rectas traza del plano la comprobación era correcta.

En nuestro caso, por el hecho de conocer la dirección que deben tener las trazas del plano paralelo, tenemos ya definidas tanto las horizontales como las frontales de dicho plano. Nos basta con realizar la operación de intersecar ambas, horizontal y frontal, en A para tener determinado α_p por sus trazas.



Analiticamente, la diferencia entre dos planos paralelos nos viene dada por el tèrmino independiente de la ecuación que los define. Si tenemos los coeficientes que nos definen el plano al que hay que trazar su paralelo por un punto, nos basta hacer cumplir la ecuación del plano en dicho punto y hallar el termino independiente que nos lo indentificarà.

La identificación gráfica será más compleja dado que los planos hemos acordado de definirlos de varias formas, dependiendo en cada caso del entorno en que nos estemos moviendo y de las operaciones previstas. Si el plano es un poligono, su plano paralelo no tiene por que ser también un poligono, y aun siéndolo no tiene por que tener ni el mismo número de lados ni las magnitudes de esos lados tener los mismos valores que sus paralelos. Debemos evitar los casos particulares, y dejarlos como lo que son, una posibilidad posterior, y dedicarnos a contemplar el caso de que la respuesta esperada sea la de plano **infinito**.

La obtención de un polígono paralelo a otro de igual magnitud, números de vértices y lados, etc, no queda contemplada en este apartado, sino en el de generación de figuras mediante sweep que lo que hacen es desplazar el plano a otra posición determinada por la magnitud de dicho sweep, con las tres posibilidades usuales:

- Mover. Con el efecto de que se crea el mismo poligono en la nueva posición, desapareciendo el original.

- Copiar. La operación es la misma que la anterior, pero el resultado final es de, como minimo, dos poligonos en pantalla.

- Unir. El poligono original y los copiados, uno o varios, quedan enlazados por sus vèrtices, apareciendo de esta forma las aristas del volumen generado.

En los casos comentados se sustituye el concepto de plano paralelo por un punto, por plano paralelo sobre una direcciòn perpendicular, a una distancia determinada.

Retomemos el hilo de nuestro comentario despues de la disgresiòn debida a la generaciòn de sòlidos mediante sweep; debemos distinguir, aqui, entre que queramos determinar un plano por sus efectos, por ejemplo nos interesa la secciòn por dicho plano de un cuerpo, o para situarlo fisicamente sobre el dibujo, con la posibilidad de usarlo màs adelante. En el primer caso basta con tener un sistema pràctico de selecciòn del plano imagen u original, que serà motivo de los siguientes pàrrafos, y una vez definida analiticamente la ecuaciòn del plano paralelo, pasar a la operaciòn vista en el capitulo anterior de intersecciòn de un cuerpo con un plano.

En el segundo caso, se nos vuelven a presentar los problemas de representarlo por sus trazas o preveer algún signo convencional que nos supla esta posibilidad. La opción de usar signos convencionales para representar un plano, creo que es una posibilidad interesante que nos puede ayudar a mantener la pantalla relativamente "limpia"; dicho signo convencional podria ser una especie de asterisco, estrella, triángulo, etc, con una flecha que nos indique un sentido de definición, como veremos más adelante, para distinguirlo de las cruces que nos definen los puntos (de distintos tamaños según representen proyección directa, prévia o punto traza). Inmediatamente que se ha definido por un punto, por ejemplo el N, un plano paralelo a otro dado, (este razonamiento puede ser generalizado para cualquier caso de plano pasando por un punto dado), se le atribuye por defecto al plano el nombre πN, y gráficamente se le representa, o no, por el signo convencional escogido, dejando la posibilidad al usuario de darle otro nombre, y se almacena su proceso de creación, que debe poder ser consultado en cualquier momento.

A la luz de lo anterior, se nos plantea un nuevo problema de diálogo usuario-ordenador: el manejo de la información gráfica que se va generando a medida que se va creando un sólido de forma interáctiva. La consulta de la relativamente corta historia de la Microinformática, que ha realizado el que suscribe, para enmarcar el presente estudio nos puede servir para contemplar con algo de perspectiva un problema similar que ocurrió en el area de los tratamientos de texto. Inicialmente, en la pantalla del ordenador aparecian una cantidad agobiante de signos convenciales, còdigos ASCII, etc, que eran, de hecho, lo que almacenaba el ordenador para transmitir finalmente a la impresora las ordenes pertinentes para que el resultado fuera el deseado. Ejemplo de este sistema de presentaciòn en pantalla puede ser el renombrado programa WordStar. Posteriormente apareciò la modalidad WYSIWYG (lo que Ud. ve es lo que Ud. tiene) en donde esos signos convencionales han sido eliminados de forma que los mismos resultados que aparecen en pantalla son los que apareceràn una vez sea impreso el documento, ejemplo de este tipo de programa es el Word de Microsoft. Quiere esto decir que una linea subrayada, pongamos por caso, aparecerà asi en la pantalla y no sin subrayar y con unos signos especiales al principio y al final de la linea en cuestiòn. No obstante, siempre existe la posibilidad de consultar como se encuentran esos signos de "puntuaciòn" en cualquier momento, para comprobar, por ejemplo, si la separaciòn excesiva entre dos palabras es debida a la compensaciòn realizada por el tratamiento de textos o es que el usuario involuntariamente ha pulsado màs de un espacio de tabulador entre dos palabras. Aplicàndolo a nuestro caso, ya hemos determinado en su momento que el representar un plano por sus trazas queda como optativo y puntual para cada plano, pero seria interesante que a una determinada orden apareciera la opciòn de que vieramos TODOS los planos que han intervenido en nuestro trabajo hasta aquel momento, representados todos ellos, para evitar enbarullamientos excesivos por un signo puntual convencional, de forma que puedan ser consultados o invocados mediante cursor situando èste sobre dicho punto. Para ello podemos hacer uso de los **layers**, que son el equivalente a hojas de papel transparente que ponemos sobre un dibujo, de forma que lo complementan pero que en cualquier momento podemos levantar, eliminando asi su efecto gràfico. Esta ayuda se encuentra implementada en varios de los programas comerciales consultados; podemos tener todo un nivel, que seria una traducciòn bastante apropiada de layer, dedicado exclusivamente a signos convencionales de los planos que vayamos definiendo, y mediante la acciòn de hacer o no presente, visible, dicho nivel tenemos la opciòn de consulta inmediata de dicha informaciòn gràfica. Los niveles los iremos usando posteriormente para otras utilidades.

Veamos algunos de los posibles signos convencionales para la identificaciòn y manipulaciòn ràpida de planos:

- En el caso de plano-poligono-cara y dada la opciòn, comentada en anteriores capitulos, de poder elegir una cara mediante cursor señalando con èl el centro de gravedad (c.d.g.) de dicha cara, parece obvio que sea en la posiciòn de dicho c.d.g donde deba estar el signo convencional. En cuanto a la flecha indicativa del sentido de definiciòn de dicha cara, siempre debe estar representada en sentido anti-horario, a los efectos, vistos en el apartado de intersecciòn por un plano, de dar coherencia al sòlido del que forma parte.

- Los planos determinados por la intersecciòn de dos rectas pueden plantearnos una dificultad adicional: que dicho punto no se encuentre en pantalla. Parece lògico que ello se pueda resolver con un reescalado de pantalla de forma que dicho punto quepa en ella, pero puede darse el caso de que poder ver este punto implique perder información gráfica del resto del dibujo; debemos pues contemplar la posibilidad de que el punto de intersección no se encuentre en pantalla. Si es así el signo convencional se representará sobre la **primera** de las rectas que definen el plano, y con la flecha definidora de sentido indicanda a la segunda recta. Nuevamente aparece el concepto del sentido que tiene el plano. En el caso de que el punto de intersección sea asequible, sobre él se encontran el punto y la flecha que indicará en sentido antihorario a la segunda recta que define el plano.

- En el caso de plano definido por

tres puntos, se señalará el primero y la flecha indicará el sentido antihorario que nos llevaria al siguiente punto, y de èste al ùltimo.

- .....

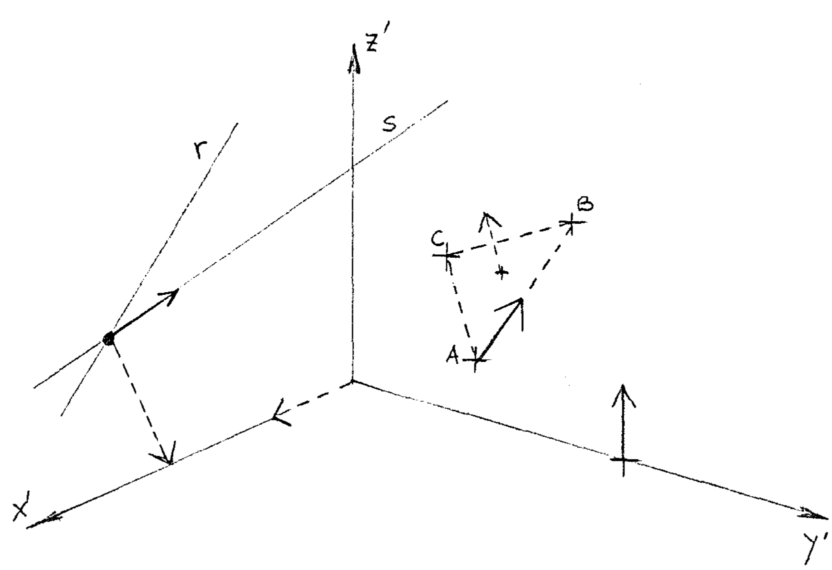
Podriamos seguir con la enumeraciòn de las distintas caracteristicas que deberian cumplir los signos convencionales en los distintos casos de planos; no lo creo necesàrio, en todo caso cuando puntualmente vayan apareciendo casos se puede hacer un comentario al respecto. Creo, sin embargo, interesante insistir en un concepto que ha aparecido en el capitulo anterior y en èste y es, de hecho, algo sustancial en el tratamiento informàtico de la informaciòn gràfica: el sentido de un plano.

Ya he dicho en otra ocasiòn que un concepto que no suele ser destacado en el estudio de la Geometria es el, por otra parte trivial en apariencia, de que un plano divide al espacio en dos semiespacios, y deberemos siempre saber en cual de los dos nos encontramos. El interior de un cuerpo es la intersecciòn de los semiespacios comunes de todas las caras que lo definen. El proceso de ir formando un cuerpo poliėdrico no es, en el fondo, màs que ir dividiendo el espacio en semiespacios e ir intersecando èstos hasta que nos quede perfectamente definido el interior, "el aire" encerrado por la figura. Es por esto que, en la medida de lo posible, es necesàrio ir creando nuestra figura en el sentido correcto.

Lo anterior no quiere añadirle rigidez al trabajo de diseño interactivo. De hecho, uno de los argumentos para preconizar el Diseño Asistido por Ordenador (D.A.O) frente al dibujo sobre papel tradicional, es el de que si en ambos casos realizamos un croquis, mientras que si lo hemos realizado sobre papel, una vez finalizado aun queda la operaciòn de realizar nuevamente el dibujo a la luz de las conclusiones obtenidas, en el caso del D.A.O. el resultado que tenemos en pantalla ya puede ser considerado correcto y definitivo. ¿Deberemos en cambio preveer incluso el orden en que cortamos dos rectas para formar un plano para tener las ventajas del diseño con ordenador?. La respuesta **debe** ser negativa, y para ello serà necesàrio procurarnos las herramientas informàticas que nos permitan en cualquier momento cambiar el sentido de definiciòn de un plano, en el caso de que durante el proceso de creaciòn y diseño hallamos previsto erroneamente dicho sentido.

Nos queda tambièn el caso de saber en que forma hemos usado los planos de proyecciòn en la definiciòn de nuestro sòlido, aunque hemos dicho que en principio, siempre podemos considerar que estamos trabajando en el primer cuadrante. Preveamos, no obstante, dado que sòlo se trata de tres planos singulares, como indicaremos que los hemos usado de referència y en que sentido lo hemos hecho. Sea el plano ZY, si lo usamos en el sentido que su normal sea justamente el eje X, deberiamos de haberlo definido como dos rectas que se cortan en el centro de coordenadas, siendo la primera de ellas el eje Y y la segunda el Z; consecuentemente el signo convencional debe estar sobre Y y la flecha señalar hacia Z, en el caso contrario las indicaciones son las obvias.

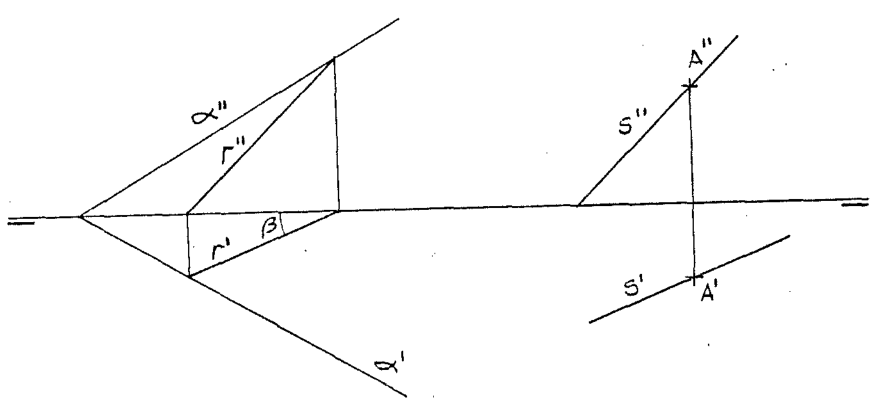
Concluyendo con el apartado de los signos convencionales, una vez implementado nos serà sencillo mediante su materializaciòn en pantalla comprobar: a) su nùmero, b) saber si "miran" hacia delante (entendiendo por tal que su vector normal sale de la pantalla y se dirige hacia el observador), hacia atràs, o hacia arriba (Z positivas) o hacia abajo, y c) señalarlos con el cursor y diferenciarlos del conjunto de planos definidos, identificàndolos.



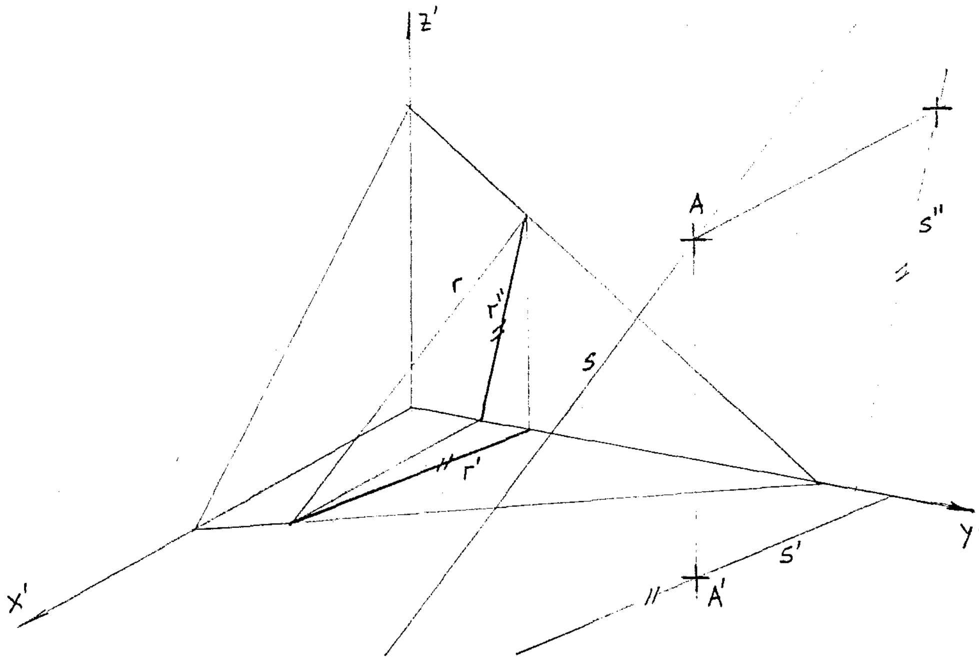
Rectas y planos paralelos entre si.

Una recta es paralela a un plano si lo es a cualquier recta de este plano. El número de soluciones, pues, es infinito. Hablando en tèrminos de puntos y rectas impròpios, mientras que una recta tiene un punto impròpio un plano tiene una recta impròpia, lugar geomètrico de todos los puntos impròpios de todas las rectas que lo forman. Lògicamente una recta, con sòlo un punto impròpio en juego sòlo puede tener en común con el plano al que debe ser paralela ese punto, luego deberà ser paralela a una recta del plano.

El caso se reducirà a seleccionar una recta sobre un plano y trazar por un punto dado su paralela, en Dièdrico no reviste ninguna dificultad:



Asimismo, en Axonomètrico, la operaciòn es inmediata:



Lògicamente al ser infinitas las rectas que cumplan la poco restrictiva condiciòn de ser paralelas a un plano, tenemos la posibilidad de introducir alguna otra condiciòn para que la soluciòn sea ùnica. El problema se plantearà, normalmente, de otra forma: nos vendrà impuesta una condiciòn que nos obligarà a escoger entre las infinitas rectas de un plano una, y serà a èsta a la que deberemos trazar la paralela por un punto dado. Supongamos que en la figura en Diédrico, el àngulo ß nos ha venido predeterminado, consecuentemente nos encontramos con la proyecciòn horizontal de una recta que hemos de imponer el que pertenezca a un plano, de dicha condiciòn obtenemos la proyecciòn vertical, es a partir de este momento que podemos trazar por un punto cualquiera una paralela a dicha recta, con la seguridad de que será paralela al plano por construcción.

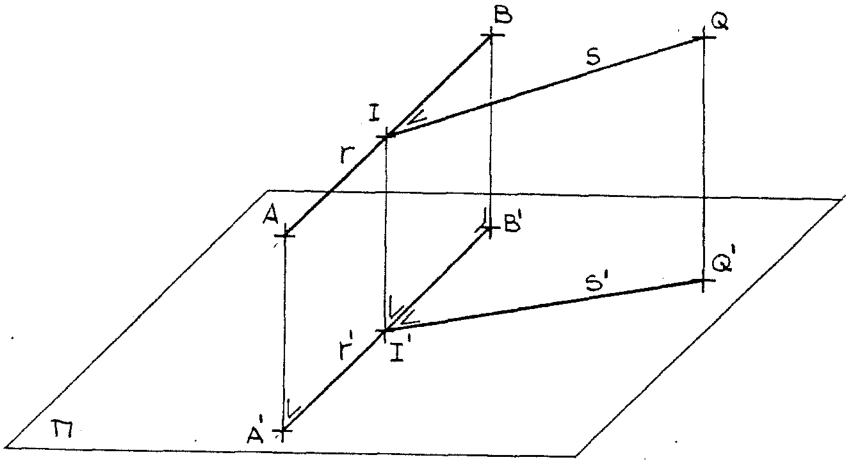
Deberemos tener implementadas varias posibilidades de definir una recta en un plano. Todas estas posibilidades irán apareciendo en este capitulo y posteriores. Una vez definida y hallados de forma inmediata sus puntos trazas, el materializar y almacenar la paralela por un punto dado no representa ninguna dificultad adicional.

Recta perpendicular a un plano.

Entramos ahora en las operaciones de perpendicularidad, algo más complejas que las de paralelismo que acabamos de comentar, pero, en cierta forma, más usuales dado que se encuentran en la raiz de todos los procesos de cálculo de distancias entre elementos del mismo género o de géneros distintos. En el caso de paralelismo el hecho de que los sistemas de representación con los que trabajamos nos obviaran el estudio de prolijas comprobaciones, nos permitió dedicarnos sin preambulo alguno al estudio de su representación gráfica, no será este el caso de la perpendicularidad.

Antes de introducirnos en la casuistica propia de la perpendicularidad hagamos dos comentarios o propiedades previos que nos serán de gran utilidad:

- El Teorema de las Tres Perpendiculares, que nos dice que si dos rectas son perpendicualres en el espacio y una de ellas es paralela a un plano, las proyecciones sobre el plano en cuestiòn de las dos rectas del espacio, tambièn son perpendiculares.



- Si tenemos una recta y queremos formar el plano perpendicular a ella por un punto; como que un plano nos puede venir definido por dos rectas que se cortan en un punto, se debe cumplir:

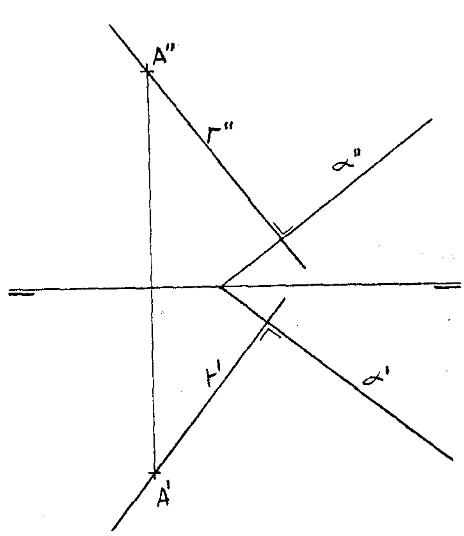
a) Por el punto escogido deben pasar dos rectas.

b) La recta dada debe ser perpendicular a todas las rectas del plano buscado.

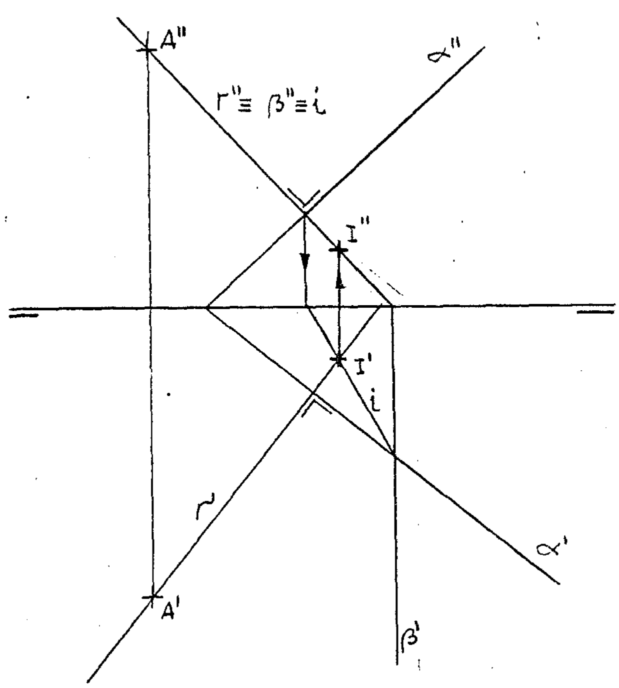
Consecuentemente trazaremos por el punto escogido dos perpendiculares a la recta dada y obtendremos el plano. Luego una recta serà perpendicular a un plano si lo es a dos rectas cualesquiera de dicho plano.

Veamos la traducciòn diédrica de lo dicho hasta aqui: si una recta es perpendicular a un plano lo ha de ser a cualesquiera dos de èste, busquemos, como es habitual, rectas que sean singulares pues cumplen a la vez la pertenencia al plano y su singularidad nos simplificarà el razonamiento. En este caso las rectas singulares son horizontales y frontales, ambas son rectas paralelas a los planos de proyecciòn, por lo tanto una recta que sea perpendicular a una recta horizontal, por ejemplo, se proyectarà, en virtud del teorema de las tres perpendiculares, perpendicular a la proyecciòn de dicha horizontal en el plano horizontal de referencia. Anàlogo razonamiento hariamos para las rectas frontales.

Avancemos un paso màs en nuestro comentario e introduzcamos las trazas en la representaciòn del plano, como ya hemos dicho las trazas no son màs que rectas singulares en posiciòn limite; luego una recta perpendicular a un plano se proyecta perpendicular a las trazas de dicho plano.



La traducción axonomètrica serviria como ejemplo de la complicación inherente a este sistema, y como justificación del paso a dièdrico y posterior traducción de los resultados nuevamente a Axonomètrico; omito por esta razón el tratamiento tradicional de la perpendicularidad en el Sistema Axonomètrico. No olvidemos, sin embargo, que es en este sistema en donde aspiramos a presentar los resultados obtenidos analiticamente por el programa implementado dentro de nuestro ordenador. Cuando hemos resuelto el problema en Dièdrico, la respuesta han sido las dos proyecciones de una recta, de hecho hemos dado la información gráfica sobre la dirección de la recta. Usualmente de esta recta no suelen darse los punto traza, sino que con las proyecciones pasando por las del punto tenemos suficiente. Si quisieramos dar otro punto de paso, que no sea en ningún caso el de intersección con alguno de los planos de proyección, seria lògico que este punto fuese la intersección de la recta con el plano, lo que nos obligaria a realizar una operación posterior para hallarlo:

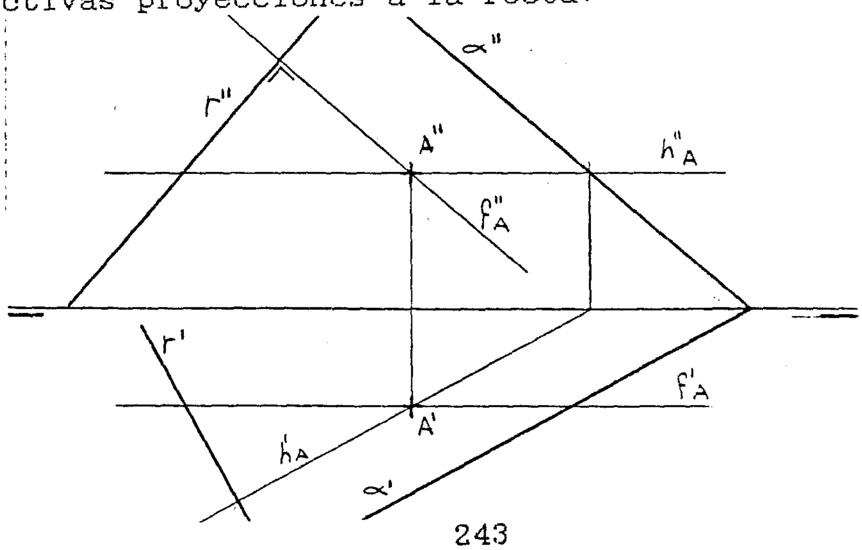


para obtener la intersección hemos tenido que introducir planos proyectantes, con lo que la operación no da la impresión de ser una sucesión lógica de acontecimientos que nos lleven a definir correctamente una recta. Pese a ello este será el sistema ha implementar informáticamente, debido a que no es usual el uso de las trazas para definir un plano, y la sencilla operación de hallar la intersección de recta y plano nos da a cambio mucha información gráfica, veámoslo.

El proceso será, primero identificación del plano al que se quiere trazar la perpendicular, por uno de los sistemas vistos anteriormente, y posteriormente identificar el punto. La respuesta gráfica obtenida será un punto sobre el plano y posteriormente el segmento que lo une con el punto exterior al plano. Quiere esto decir que en este caso no seguimos para nada el proceso habitual seguido en Diédrico, no calculamos de ninguna forma la inclinación que deberá tener la recta para cumplir el ser perpendicular al plano dado, sino que la definimos por dos puntos de paso: el dado y el de intersección de ella con el plano. Independientemente de ello, la información que almacenamos es la habitual, dirección, puntos traza, etc., y tenemos siempre la opción de, en función de las características del uso que queramos darle a dicha recta, alargarla o acortarla posteriormente. El situar un punto sobre el plano nos sirve, además, para darnos nueva información gráfica de la situación de dicho plano. Si el motivo de hallar la perpendicular al plano era saber la distancia entre punto y plano, la respuesta gráfica ya es exactamente la que tenemos prevista, dando en la linea de diàlogo o en la pantalla de texto, en su caso, la información puntual de dicha distancia.

Plano perpendicular a una recta.

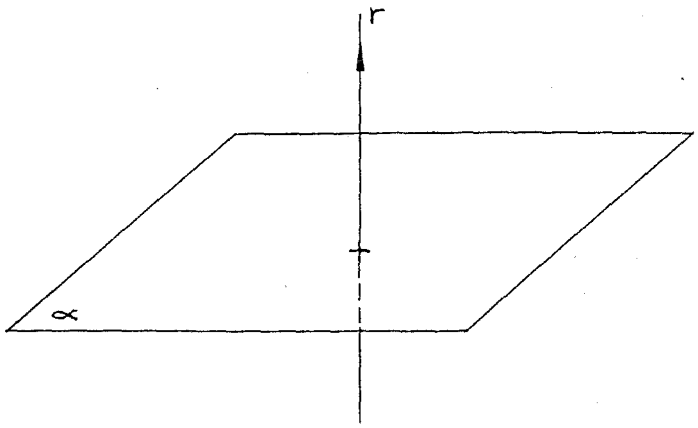
Este es justamente el caso inverso al visto anteriormente, hasta el punto de que en el comentario hecho despuès del Teorema de las Tres Perpendiculares es dificil discernir cuando estamos hablando de un caso o de su inverso. Atengàmonos a dicho comentario; en èl se dice que para definir un plano uno de los sistemas es cortar dos rectas. Supongamos que queremos trazar por un punto un plano perpendicular a una recta, trazamos por este punto dos rectas con lo que tenemos definido un plano por dicho punto, dicho plano para ser perpendicular a la recta deberà cumplir el contener rectas perpendiculares a la dada. Nuevamente hacemos que las rectas cualesquiera que nos definen el plano sean singulares, horizontal y frontal, y paralelas a los planos de proyección para usar la propiedad del Teorema de la Tres Perpendiculares. En Diédrico es obvio que deberemos trazar la horizontal y la frontal que sean perpendiculares en las respectivas proyecciones a la recta:



posteriormente estas dos rectas nos definirán el plano, y podremos encontrarle sus rectas traza si lo consideramos conveniente.

No es tan sencilla su traducción informática, pero dentro de lo que cabe vamos también a hacer un procedimiento inverso al anterior ya que no nos interesa la respuesta gráfica de las trazas del plano. Sigamos con el punto de intersección de la recta y el plano, este punto, en este caso, es el pie de la perpendicular del vector normal a un plano, siendo la normal la recta en cuestión. Ya tenemos pues los suficientes elementos para hilvanar la respuesta que buscamos.

El tipo de definición gráfica del plano será mediante un signo convencional sobre el punto de intersección de recta y plano, con la flecha señalando el sentido que nos venga impuesto por el contexto, o por defecto el mismo de la recta considerando éste el de las alturas crecientes:



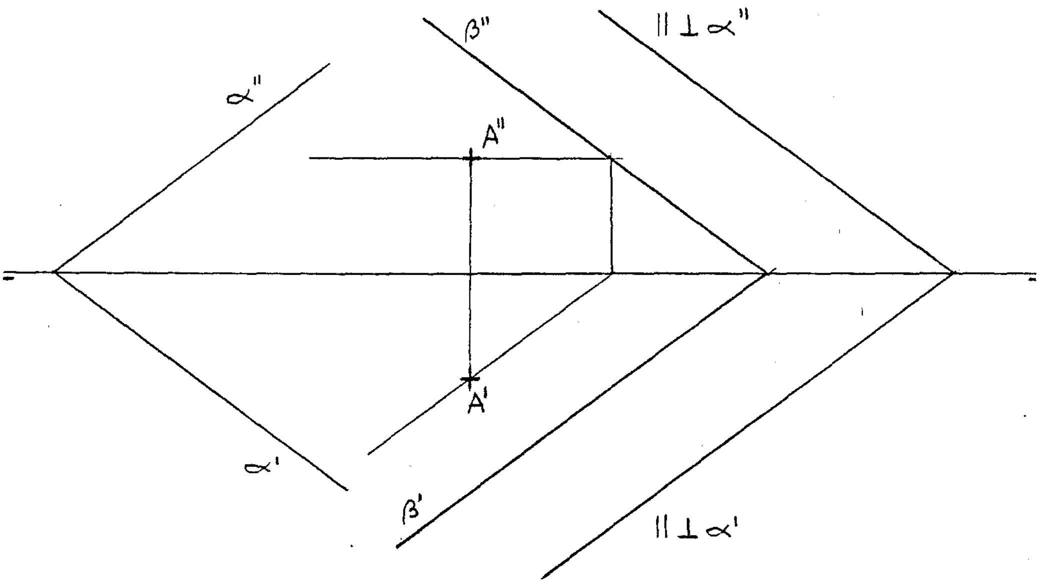
puede darse el caso de que el punto de intersecciòn no se halle, como en la figura, dentro de la recta-segmento que el contexto del diseño nos define, sino en alguna de sus prolongaciones; en este caso creo aconsejable que el punto se presente aislado o con un pequeño segmento que nos dė idea de a que recta pertenece. Creo que esta segunda opciòn, aunque en principio parece la acertada, implica añadir nuevos signos convencionales y no es aconsejable, al menos en principio.

Independientemente de la consulta de todos los planos en un momento dado, mediante la activaciòn del nivel correspondiente, es conveniente que en el momento de ser creados aparezcan los signos convencionales definitorios. En este punto se plantea la discusiòn de si deben estar continuamente en pantalla todos los planos definidos en nuestro proceso de diseño, dado que hemos estudiado dos casos reciprocos y mientras que la recta perpendicular a un plano es definida y dibujada, y en principio no està prevista el poder hacerla visible o invisible opcionalmente, en el caso del plano si. Esto nos lleva a establecer toda una jerarquizaciòn de niveles de forma que todas las posibles alteraciones de elementos de nuestro dibujo vayan quedando en su posiciòn original dentro de alguno de ellos, y puedan ser activados en cualquier momento y recuperados. Una variaciòn de esta modalidad comentada aqui, la encontramos en algunos programas en donde es posible redibujar TODAS las lineas borradas a lo largo de una sesiòn de trabajo, e incluso puntualmente recuperar solo la ùltima.

Planos perpendiculares entre si.

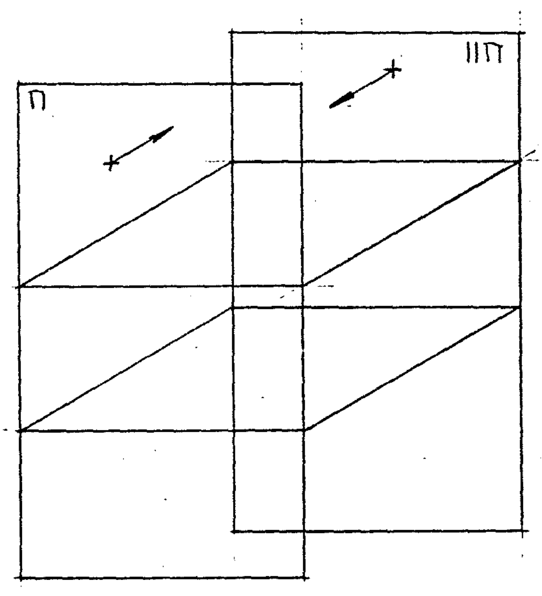
Dos planos son perpendiculares cuando uno contiene a una recta perpendicular al otro, como el concepto de perpendicularidad entre recta y plano también se apoya en que la recta debe ser perpendicular a todas del plano, se puede decir que la condición de perpendicularidad se cumple cuando un plano contiene la perpendicular a una recta cualquiera del otro plano.

Más adelante nos plantearemos el encontrar el ángulo entre dos planos, independientemente de ello intentemos quitar un poco de la indeterminación que hemos notado en los comentarios del párrafo anterior. Dos planos siempre se cortan, ya sea en una recta propia o en una impròpia en el caso de planos paralelos, pues bien para que dos planos sean perpendiculares las rectas que contienen deben ser perpendiculares a esta recta de intersección. Cortando ambos planos por los de proyección y aplicando las propiedades que hemos comentado al introducirnos en el tema de la perpendicularidad, es obvio que las trazas de los planos perpendiculares deben ser perpendiculares. Con objeto de quitar indeterminación impongamos que el plano perpendicular a α pase por un punto determinado.



El proceso seguido ha sido el de encontrar las direcciones de las trazas de un plano perpendicular a α, y posteriormente trazar por el punto determinado un plano paralelo al obtenido.

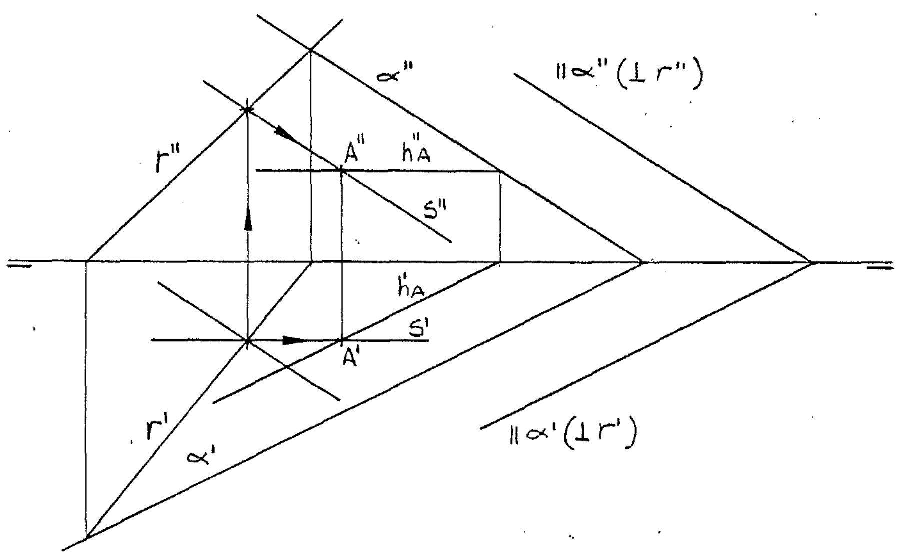
No hay una transcripciòn gràfica especifica para este caso de planos perpendiculares, sòlo la linea o pantalla de diàlogo, o la posterior consulta del àngulo que forman los planos nos podrà dar una idea de que dos planos son perpendiculares. Queda por comentar que relaciòn cumplen, o mejor dicho debemos hacer cumplir por programa, a los sentidos de dos planos perpendiculares. Mientras que dichos sentidos son los mismos en el caso de planos paralelos, deberàn ser opuestos en este caso. El motivo de hacer opuestos los sentidos de los planos perpendiculares no tiene una justificaciòn lògica, lo he decidido en funciòn de mi experiencia con planos en el Sistema Acotado. Dada la especial peculiaridad del uso del sentido de un plano en nuestro caso particular, es muy recomendable dejar la posibilidad de variarlo a posteriori. Veamos por que: hemos dicho que cuando creamos un plano paralelo a otro el sentido del nuevo plano debe ser el mismo que el original, supongamos que lo que pretendemos es usar dicho plano, obtenido por paralelismo de uno interior de un poliedro o incluso una base de dicho poliedro, para que sea limite del cuerpo, el sentido debe ser justamente el opuesto al que nos da el programa; debido a ello es menester dejar siempre la posibilidad de variar el sentido de un plano.



Rectas perpendiculares entre si.

Como se desprende de los párrafos anteriores son perpendiculares a una recta todas las que están contenidas en un plano perpendicular a ésta. Nuevamente nos encontramos ante un caso indeterminado, será una nueva condición la que nos permetirá destacar a una de las infinitas que están contenidas en un plano.

La condición más sencilla es que dicha perpendicular pase por un punto dado, veamos su resolución en Diédrico:



Sabemos que las direcciones de las trazas del plano deben ser perpendiculares a las proyecciones diédricas de la recta, a continuación imponemos que un plano paralelo al hallado pase por el punto dado. Podemos materializar la recta hallando la intersección de la primera recta con el plano y uniendo ambos puntos. Nuevamente, esta será la opción escogida para nuestra representación de perpendicular a una recta por un punto en 3D. Las operaciones hasta llegar a la obtención del punto de intersección del plano perpendicular y la recta no tendrán ningún reflejo gráfico y el plano en cuestión no quedará reflejado en la correspondiente matriz de planos, dado que no es más que una construcción auxiliar a la que no tenemos, en pricipio, por que tener que recurrir más adelante. La respuesta gráfica será la señalización del punto y la visualización del posterior segmento, como siempre alargable o acortable a voluntad. El punto de intersección de recta y plano tampoco es necesário que sea almacenado.

Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

Este es un problema al que daremos solución más adelante al estudiar la distancia entre dos rectas. El hecho de enunciarlo aqui se debe al interés de seguir una exposición tradicional del tema de la Geometria de Punto, Recta y Plano.

Notas y Referencias.

(1) Este comentário fue realizado muy al principio del estudio. Actualmente, es imprópio afirmar que sólo se pueden trazar paralelas a verticales y horizontales.