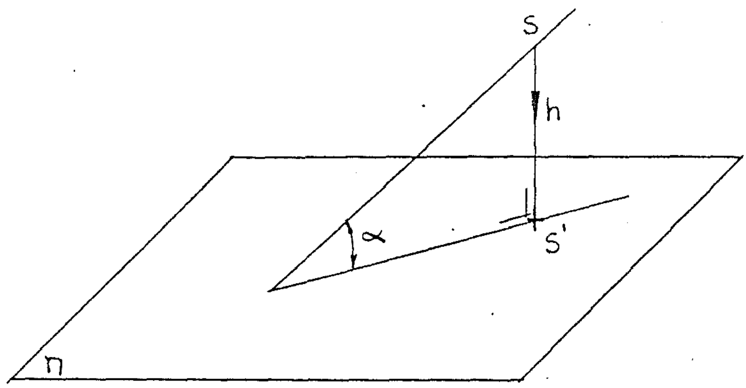
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

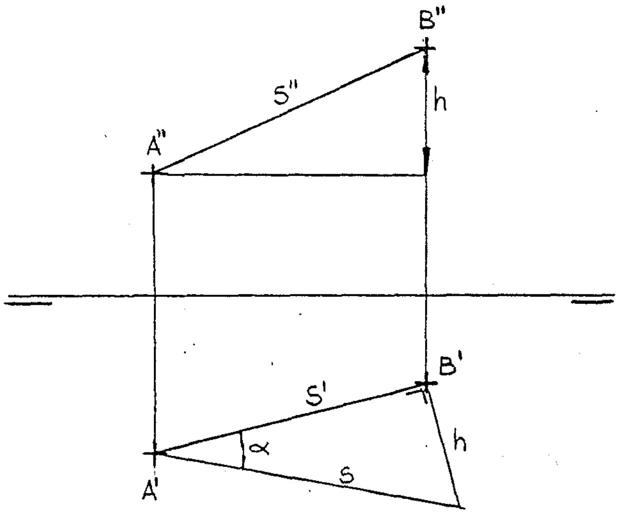
Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

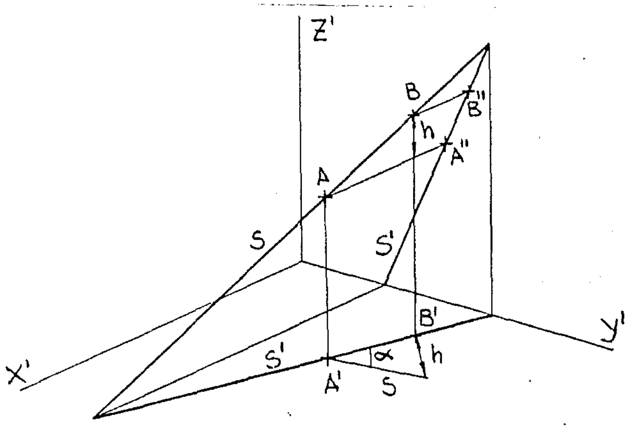


s', en la figura, tiene un valor menor que s, dependiendo del valor del ángulo α. Se forma un triángulo rectángulo dentro del plano formado por la intersección de s y s', en este triángulo s' es un cateto, s la hipotenusa y el otro cateto nos viene determinado por la distancia del extremo del segmento al plano. Este triángulo rectángulo mantiene una relación de semejanza con cualquier otro que obtengamos considerando otro punto como extremo del segmento, ya que el ángulo recto y α no varian. Este triángulo se encuentra en el espacio y nosotros trabajamos en un plano, las propiedades que existan en 3D, nos interesa proyectarlas en 2D . Si giramos, que no abatimos como imprópia y muy comunmente se dice, el triángulo alrededor de la proyección de la recta conseguiremos tenerlo sobre el plano y del mismo tamaño y propiedades que en el espacio, la proyección es el dato que tenemos sobre el papel, sòlo nos es menester saber cuanto vale la magnitud h.

Si estamos trabajando en Dièdrico, al tener dos proyecciones del segmento podremos realizar la operación en cualquiera de ellas dàndonos la información del desnivel la otra proyección:



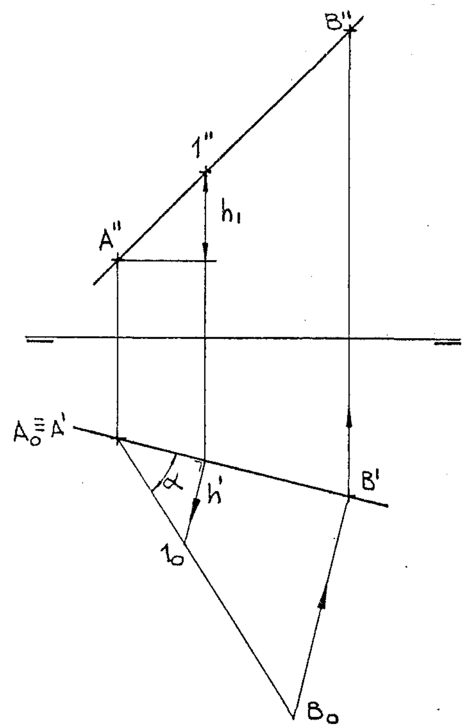
En Axonomètrico implicaria el uso de las proyecciones previas, lo que queda muy gràfico pero bastante prolijo de uso.



Para su implementación deberemos hacer especial hincapié en la precisión en los métodos de selección de rectas y posteriormente en los de selección sobre ellas de puntos. Una vez obtenidos dichos puntos el cálculo de la distancia real no implica usar, tampoco en este caso, una traducción del usado en Diédrico sino que analiticamente se halla el valor de esta magnitud y se puede enviar a la linea o hoja de diálogo optativamente junto con las coordenadas de los puntos consultados. En varios programas comerciales se añaden a estas informaciones la distancia proyectada que es la distancia que tiene el segmento considerando ambos puntos como de 2 dimensiones. Puede ser interesante pues nos da una idea de la inclinación real de la recta por su proximidad o no al valor de la distancia real, sobre todo si se programa que ambas informaciones se den en la misma pantalla de información, contiguas. Como la relación entre dichas magnitudes es el coseno del ángulo α, puede estar implementado el cálculo de este ángulo y escribirlo justo al lado de la relación de distancias proyectada y real.

Más interesante es el problema inverso: señalar sobre una recta (nuevamente hago hincapié en que el concepto recta-segmento es usado continuamente de forma ambivalente), un punto que se encuentre sobre ella, a una distancia determinada de otro punto y en un sentido determinado.

En Diédrico se construye según el mismo esquema usado para hallar la verdadera magnitud de un segmento:



Se selecciona un punto 1 arbitrario del que se calcula su distancia real al punto de referencia A, si como es probable este punto no cumple la condiciòn de estar a la distancia requerida, la recta A_o1_o al menos nos da la informaciòn de la inclinaciòn de la recta real, sobre la verdadera magnitud de dicha recta asi obtenida se busca el punto B_o, y de alli obtenemos el punto B buscado.

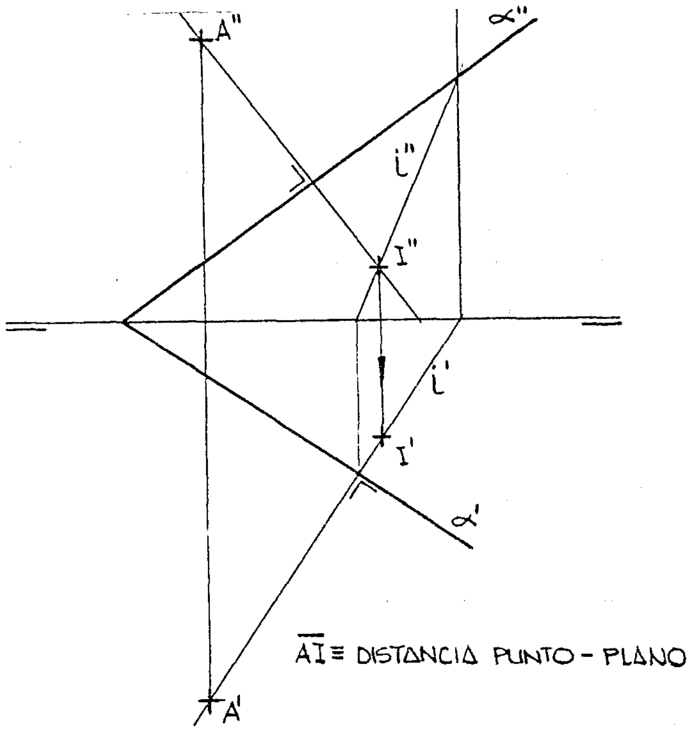
En nuestro caso serà menester efectuar tres acciones complementàrias: primero señalar la recta sobre la que queremos operar, a continuaciòn indicar cual es el punto de referencia y finalmente con el cursor escogemos en cual de los dos sentidos de la recta debe encontrarse el punto buscado, despues de haber entrado por teclado el valor de la distancia deseada.

Finalmente debe tenerse prevista la eventualidad de eliminar gráficamente la parte de recta que deje de ser necesaria en una operación determinada. Ejemplo: tenemos la dirección de la altura de una pirámide, sobre ella calculamos la posición del vértice que resulta que da lugar a un segmento de distinto tamaño del que teníamos anteriormente; nos interesará en este caso eliminar la parte sobrante a partir de V. Normalmente en los programas de Informática Gráfica está previsto en algún lugar de la matriz correspondiente el asignar un 0 o un 1, según se desee que el elemento en cuestión, pese a tener toda la información sobre él almacenada, sea dibujado o nó (o al revés). Aquí se plantea una nueva posibilidad intermedia en cierta forma.

La solución puede estar en la acción, ya implementada en algún programa consultado, de ROMPER la recta, y transformarla en varias rectas superpuestas que se dibujan sin ninguna diferencia aparente pero que al ser, de hecho, independientes se pueden eliminar una a una dando el resultado apetecido de eliminación parcial de la información.

Distancia de un punto a un plano.

De hecho ya hemos hablado de este concepto en el capítulo 6, al tratar el tema de la perpendicularidad de recta y plano, con uso de las propiedades inherentes al Teorema de las Tres Perpendiculares. Recordemos que en Diédrico sólo hallábamos la dirección de la perpendicular al plano y era necesaria una segunda operación para obtener la intersección de la recta con el plano, mediante el uso de algún plano proyectante.



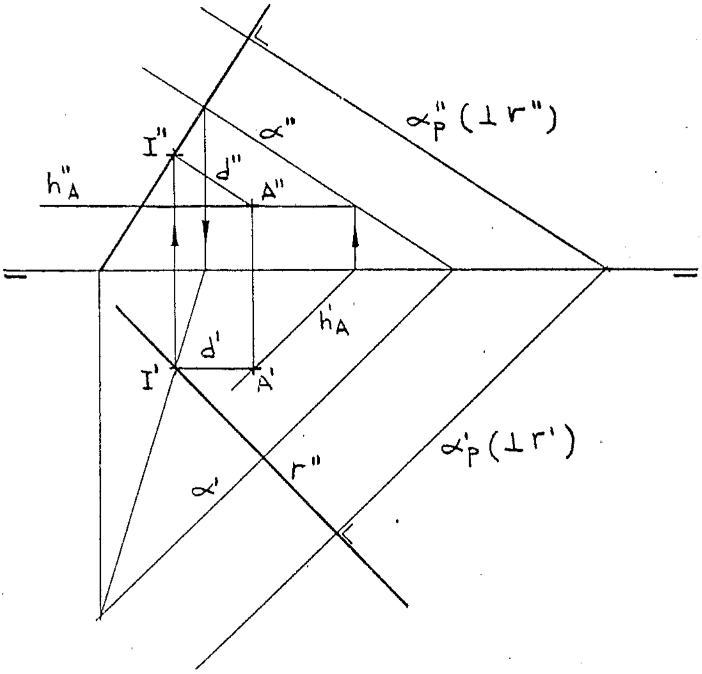
Aparece aqui, por primera vez, un concepto que hará acto de presencia profusamente en este capitulo, el de la diferencia entre verdadera magnitud y verdadera posición. Una vez hallado el punto de intersección de la perpendicular con el plano, ¿está resuelta la cuestión de la distancia del punto al plano?, lógicamente no, pues tenemos dos puntos sobre la proyección diédrica de una recta y hemos visto que, normalmente, esta magnitud es inferior al valor real de la distancia entre estos dos puntos. Nos queda pues la operación hecha en el apartado anterior de cálculo de dicha distancia. Concluimos que la distancia entre los puntos proyectados no es necesariamente la distancia del punto al plano, pero si la verdadera posición de dicha distancia, quiere esto decir que cualquier otro punto del plano se encontrará a mayor distancia de nuestro punto que el hallado.

Ya vimos que nuestra opción iba dirigida en el sentido de hallar ya de entrada el punto de intersección de la perpendicular con el plano, para asi tener inmediatamente definida la recta sin tener que recurrir al uso de las trazas para ello. Una vez dibujado el segmento tenemos la verdadera posición de la recta, y en la linea de diálogo exactamente la misma respuesta que habiamos previsto antes para la distancia entre dos puntos de una recta: coordenadas de los dos puntos, distancia real y proyectada, y ángulo de la recta proyectada respecto a la real.

Distancia de un punto a una recta.

Puede parecer extraño que tanto aqui como en cualquier libro de texto que aborde la Geometria de Punto, Recta y Plano, siempre se hable primero de distancia de punto a plano que de distancia de punto a recta (en cierta forma es mucho más sorprendente el caso del sistem Cónico en donde, por las razones que ya hemos comentado en otra parte de esta tesis, se habla primero de la definición de la recta que de la del punto), y ello es debido al número de operaciones que lleva inherentes. El proceso a seguir es trazar el plano perpendicular a la recta que pase por el punto, éste plano corta a la recta en un punto, es la distancia entre estos dos puntos la distancia buscada.

El proceso en Diėdrico es muy laborioso, no digamos ya en Axonomėtrico, sea r y A la recta y el punto respectivamente:



Para calcular α, plano perpendicular a r pasando por A, sòlo tenemos la información de que sus trazas deben ser perpendiculares a las proyecciones diėdricas de r. Como ya hemos hecho en otras ocasiones trazamos un plano arbitrario α_p que cumpla esa condición, y posteriormente imponemos que un plano paralelo a ėste contenga a A. Debemos a continuaciòn hallar la intersecciòn de α con r, mediante el uso de algùn plano proyectante, obteniendo el punto I, de forma que AI es la verdadera posiciòn de la distancia que estamos buscando. Queda finalmente la operaciòn de obtener la verdadera magnitud de dicha distancia.

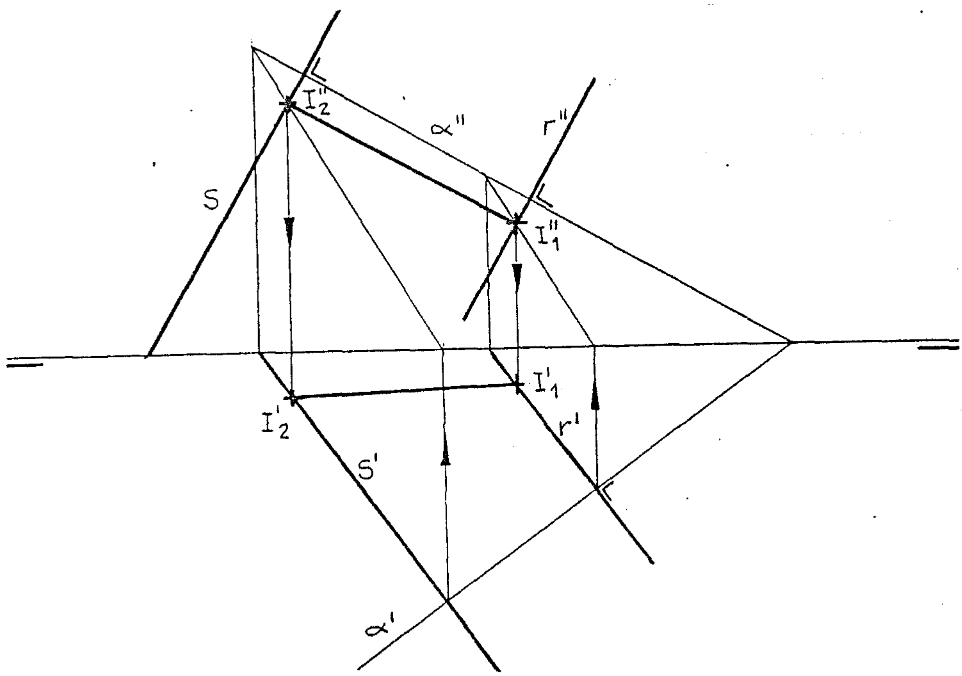
A pesar de lo farragoso de la exposición, como ya he comentado en otras ocasiones, el àlgebra del sistema Diédrico es muy sistemàtica, valga la redundancia, lo que ayuda a su ejecución quizàs en detrimento de su comprensión. Es menester tener la visión de lo que se està realizando para evitar posibles errores, y que èstos no pasen desapercibidos, evitando asi su acumulación. El sistema Axonomètrico es más complejo, pero sus resultados son más facilmente comprobables, incluso para un neofito, de ahi su elección para la presentación gràfica de las operaciones analiticas realizadas por el ordenador.

La respuesta gràfica a la distancia de un punto a una recta es, por comparación con los sistemas de representación tradicionales, sorprendentemente simple, ya que sólo se trata de señalar el punto I de verdadera posición de la distancia y posteriormente la información literal habitual.

Distancia entre dos rectas paralelas.

Finalizado el apartado dedicado al punto y su relación con la recta y el plano, empecemos ocupàndonos de un caso particular de rectas que no se cruzan sino que se cortan, eso si en un punto imprópio. Son pues rectas coplanarias, y su distancia se obtendrá mediante la construcción de una perpendicular común, y su intersección posterior con las rectas en cuestión. También hay autores que razonan que la distancia entre este tipo de rectas se puede obtener mediante la consulta de la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra. Prefiero, por sistemático, el primer razonamiento.

Veamos, como es habitual, su resolución en el Sistema Diédrico:



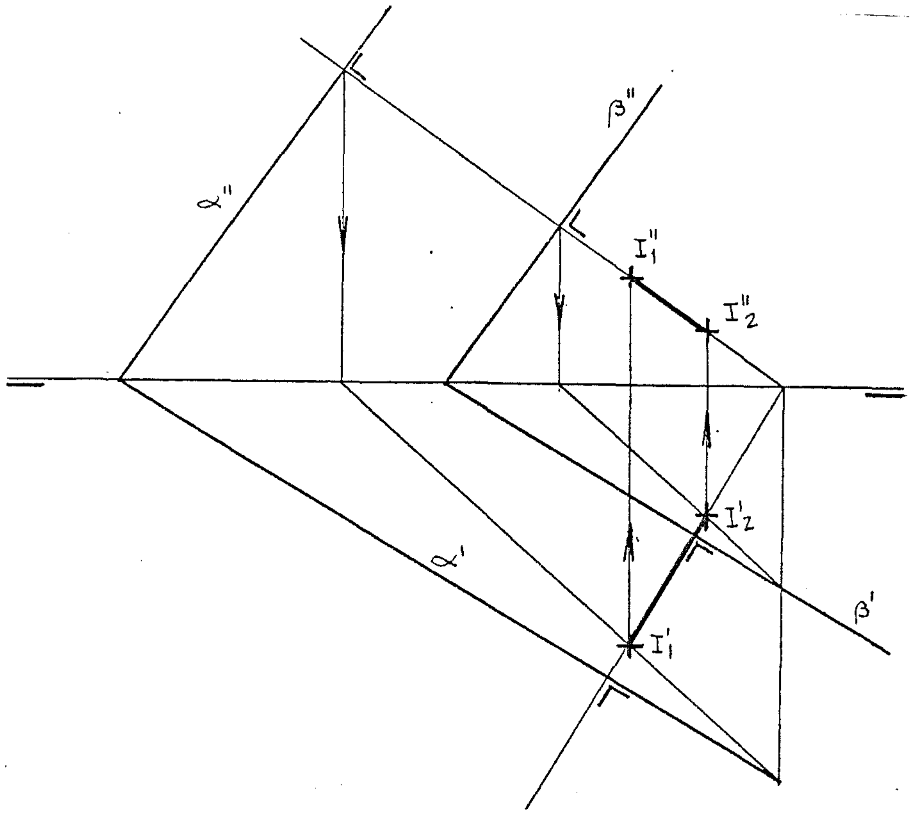
El plano α perpendicular, donde se encontrará la perpendicular común, lo trazamos en cualquier posición, posteriormente lo intersecamos con r y s, los punto I_1 e I_2 están a la distancia buscada, la obtendremos de la forma habitual.

Nuestro programa HYPATIA tiene varias posibles respuestas a este caso. Analíticamente no hay problema ninguno ya que no es necesario señalar cuales son los puntos que nos indican la verdadera posición de la distancia, ya que pueden ser cualquier par de ellos; y las ecuaciones que nos definen las rectas tendrán los coeficientes proporcionales. No creo, sin embargo, que deba preveerse una orden especial para el cálculo de la distancia entre rectas paralelas, considero mucho mejor que este caso se encuentre englobado en el caso general, que veremos más adelante, aunque tanto su respuesta gráfica como la literal sean distintas a las que se darán en aquel caso. El diálogo puede ser: DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS, una vez seleccionadas nos puede devolver la información RECTAS PARALELAS-DISTANCIA =.... En el caso de rectas cualesquiera habría otras dos posibles respuestas, como veremos, RECTAS CONCURRENTES y DISTANCIA MINIMA, será en este último caso que habrá que preveer el cálculo de esta distancia mínima y de su verdadera posición, o sea el devolver la información de que puntos sobre ambas rectas se encuentran a dicha distancia mínima.

Distancia entre planos paralelos.

Este caso es el inverso del anterior, la distancia entre dos planos nos vendrá dada por la porción de perpendicular común que queda limitada por dichos planos.

Con la misma sencillez del concepto lo resolveremos en Diédrico, mediante la obtención de una perpendicular cualquiera, ni siquiera imponiendo que pase por un punto dado, y cortándola con los dos planos:



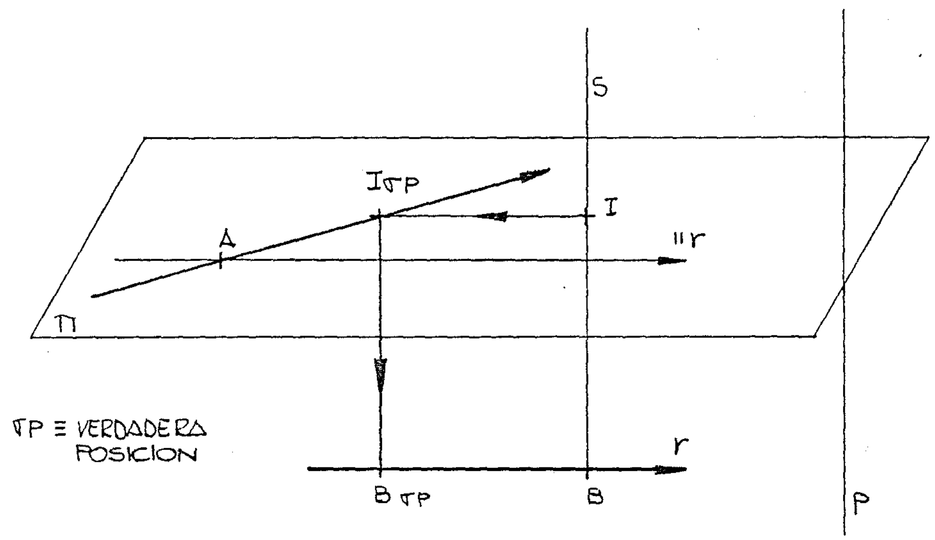
Para la intersección de la recta con cada uno de los planos, hacemos uso de un solo plano proyectante.

Siendo como se ve una cuestión básicamente de consulta, en nuestra implementación informática no creo necesario preveer la respuesta gráfica que incluya el dibujo de un segmento equivalente al que se usa en Diédrico, bastará como en el caso de rectas paralelas la información sobre el paralelismo y la respuestas literal del valor de la distancia consultada. No se da aqui la posibilidad de tener varias opciones como en el caso de las rectas, ya que dos planos siempre se cortan, consecuentemente su distancia es, en este sentido, nula, dándose el caso de distancia mesurable sólo cuando su recta de intersección es imprópia.

Minima distancia entre dos rectas que se cruzan.

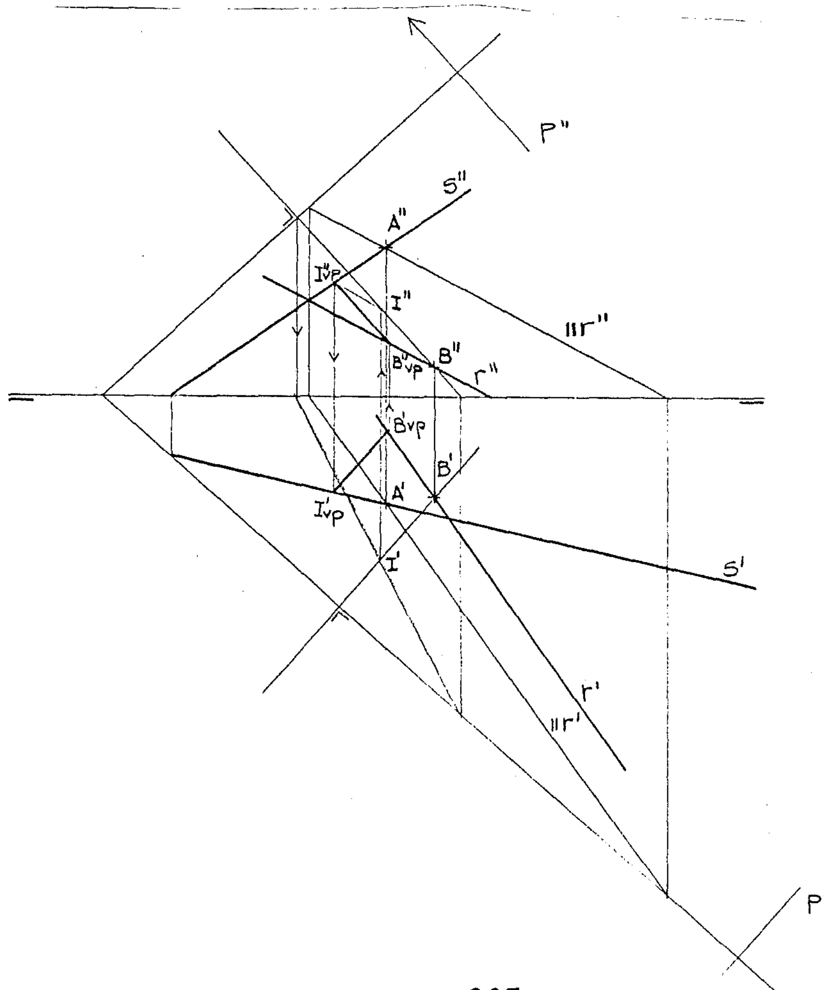
Este caso y el de distancia entre dos puntos sobre una recta son los conceptos bàsicos entre los que se contemplan en este capitulo. Particularmente en la busqueda de la distancia minima entre dos rectas que se cruzan se encuentran muy claramente explicitados los conceptos de verdadera magnitud y verdadera posiciòn, veàmoslo. La distancia entre dos rectas que se cruzan es la magnitud del segmento obtenido al cortar la recta perpendicular comùn a ambas rectas con ellas. Obtenemos dos puntos, uno sobre cada recta, que son los que se encuentran a la distancia minima, de ahi que normalmente se pida encontrar la distancia minima entre dos rectas en magnitud y posiciòn.

Veamos el proceso que se sigue en el Sistema Dièdrico, para ello previamente esquematicemos cuales seràn las operaciones que vamos a realizar. El segmento que nos dè la verdadera magnitud de la distancia debe encontrarse sobre la perpendicular comùn a ambas rectas, si èstas fueran coplanarias la direcciòn de esta perpendicular seria obviamente la de la perpendicular a dicho plano; dado que no es el caso, ya que por hipòtesis ambas rectas se cruzan, deberemos conducir nuestro razonamiento de otra forma.

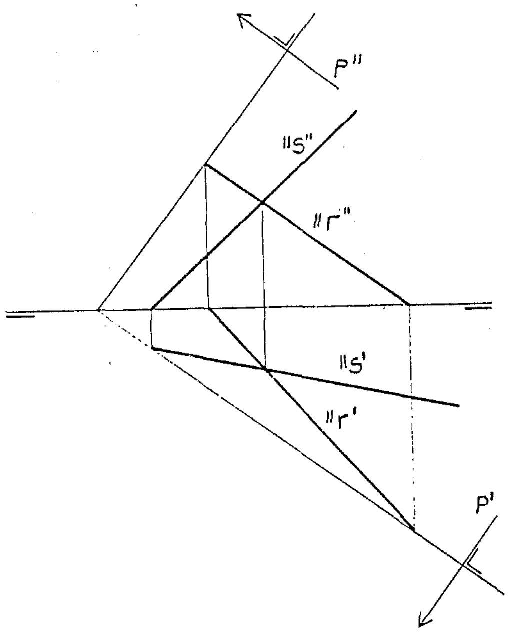


A pesar de que las dos rectas no sean coplanarias tienen un punto imprópio cada una, y el concepto de perpendicularidad, como hemos visto anteriormente, está intimamente ligado a estos puntos imprópios independientemente de otros conceptos. Podemos definir un plano dándole como caracteristica diferenciadora la recta imprópia formada por la "unión" de los puntos imprópios de las dos rectas dato, de ahi podremos calcular la dirección, punto imprópio, de la recta perpendicular a ambas rectas. El anterior razonamiento se traduce por trazar por un punto cualquiera de s una paralela a r, ambas rectas formarán un plano al que deberá ser perpendicular la recta que nos dé la distancia mínima.

Una vez obtenida la dirección de la perpendicular al plano, trazando por un punto cualquiera de r una paralela a ésta, sabemos que la intersección de la recta obtenida con el plano formado anteriormente, nos dará un punto que unido con el escogido sobre r formará el segmento de distancia mínima entre ambas rectas. No queda aun resuelto el problema de cuales son los puntos que, sobre ambas rectas, se encuentran a dicha distancia mínima, aunque ya tengamos el valor de ésta. El punto I, intersección de la perpendicular con el plano, es harto improbable que esté sobre la recta s, para que así sea basta con desplazarlo sobre el plano paralelamente a r, como los puntos del otro extremo del segmento continuamente se apoyan en esta recta, cuando I lo haga sobre s, tendremos en verdadera posición al segmento de distancia mínima. Veamos la traducción diédrica del razonamiento realizado:



Algunos autores, para no complicar excesivamente el dibujo, realizan las operaciones de obtención de la dirección de la perpendicular aparte mediante paralelas a las dos rectas, en vez de mantener una y por ella trazar la paralela a la otra:



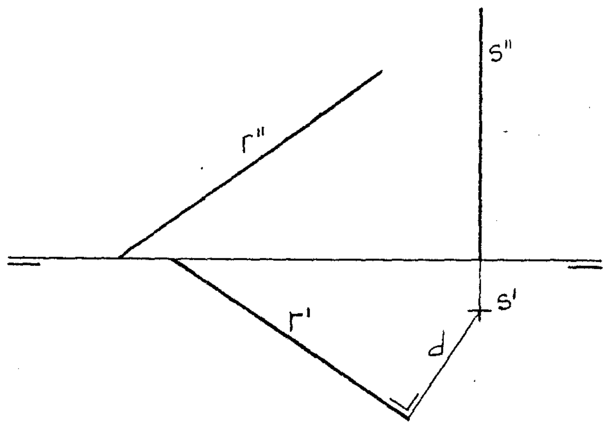
El procedimiento a seguir, posteriormente, es idéntico al realizado más arriba.

A diferencia de otros casos vistos en este capitulo, ahora si que nos interesa conocer además de la distancia minima, donde se da esta circunstancia, debemos, pues, implementar la obtención de dichos puntos. Es posible que alguien piense que dada la enorme capacidad que tiene un ordenador de realizar operaciones repetitivas, y que de hecho prácticamente siempre nos plantearemos el hallar distancias entre segmentos, seria facil programar que sistemáticamente hagamos un barrido de puntos sobre una recta y calculemos su distancia a todos los puntos de la otra, almacenando cada vez la distancia menor y la información de los puntos que la dan, para finalmente llegar a unir gráficamente los dos puntos obtenidos. El razonamiento es impecable y se usa en diversos algoritmos algebraicos, pero pensemos que para ello se requiere realizar bucles repetitivos en los que hay que preestablecer el salto, entendiendo por tal la unidad que nos permita discernir un punto de la recta del siguiente, de forma que podamos afinar la precisión a voluntad, resultando que podemos transformar un segmento finito en prácticamente infinito. Personalmente no soy proclive a realizar una operación tan burda, independientemente de la gran precisión que se pueda obtener, y prefiero realizar una variante del sistema expuesto anteriormente para resolver el problema en diédrico.

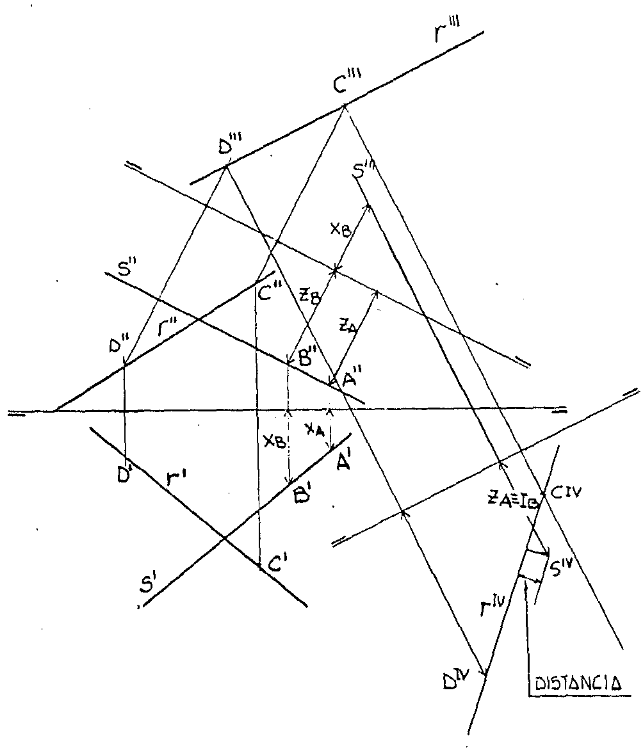
En dicho razonamiento hay algo parecido al algoritmo repetitivo que he comentado en el párrafo anterior, el ir desplazando el segmento que nos da la distancia mínima hasta que obtengamos la verdadera posición con el segmento apoyándose sobre las dos rectas. Intentemos huir de este tanteo y sustituirlo por dos ecuaciones que representen a dos lugares geométricos y que nos dén una solución única y válida. Vemos en la figura espacial que nos ha servido para aclarar las operaciones que posteriormente hemos realizado en diédrico, que una vez definida la dirección de la normal común a las dos rectas, ésta puede formar con cualquiera de ellas un plano que las corta precisamente en los puntos que buscamos. Posteriormente se puede preveer el dibujar un segmento que una dichos puntos, con lo que tendremos la respuesta gráfica de la distancia mínima.

Para ello bastará por un punto arbitrario, (x,y,z), cortar las paralelas a las dos rectas y obtener la ecuación del plano que definen, de ahí encontrar los coeficientes de la recta perpendicular. Por un punto cualquiera de la primera de las rectas, (dicho punto puede ser el de su definición o incluso uno de los traza), imponer que pasen la perpendicular y dicha recta; una vez obtenida la ecuación del plano, pasamos a encontrar su intersección con las rectas dato de forma que encontramos los puntos que nos definen la mínima distancia. Las respuestas literal y gráfica serán las habituales que hemos visto hasta ahora.

Las operaciones programadas para resolver la cuestión de distancia mínima entre dos rectas, recuerdan por su complejidad a la intersección de planos con sólidos, tanto en un caso como en otro, la geometría usa la manipulación de los elementos para ponerlos en posiciones que nos simplifiquen el trabajo. En el caso de intersección de un sólido por un plano, ya hemos visto que usábamos el cambio de plano de proyección poniendo el plano seccionador de canto; en el caso de distancia mínima entre rectas que se cruzan, si alguna de ellas estuviera en la posición que hemos llamado de punta, se simplificaría mucho la consulta de su distancia, ya que la distancia sería la perpendicular trazada desde dicha recta, en la proyección en la que la vemos reducida a un punto, a la otra recta:



Normalmente se puede conseguir lo anterior también mediante cambios de plano de proyección (también se suelen usar giros):



No es mi interès extenderme en este tema, dado que precisamente la Informatizaciòn de la Geometrìa permite no tener que recurrir a estos procedimientos, como estamos viendo, pero me sirve de introducciòn al proximo capitulo en donde continuamente estaremos cotejando este tipo de herramientas gráficas como son los cambios de plano de proyecciòn.

GEOMETRIA DE PUNTO, RECTA Y PLANO.

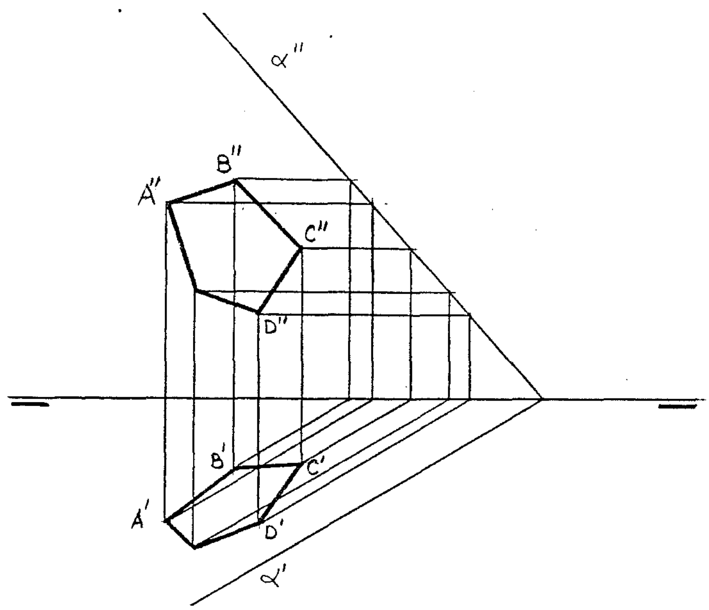
Obtención de verdaderas magnitudes lineales y superficiales.

El hecho de que trabajemos con proyecciones de 3D en 2D, conlleva que nos encontremos con la dificultad de tener sobre el papel o sobre la pantalla del ordenador unas figuras, representación de otras del espacio, con unas formas y tamaños distintos, generalmente, de las formas y tamaños de las figuras que representan. Ya hemos visto lo que ocurria cuando queriamos hallar la verdadera magnitud de un segmento. Pero, al igual que en aquel caso, pese al hecho de que las magnitudes son distintas, es posible encontrar una ley que nos relacione la figura proyectada con la figura real. Una vez establecida, en cada caso y a nivel teórico, la relación entre dichas figuras, es menester traducir dicha relación sobre el plano de nuestro dibujo, para alli manipularlo algebraicamente y obtener los resultados buscados. El algebra geométrica nos permite realizar múltiples operaciones, impondremos que las magnitudes que relacionamos cumplan las condiciones necesarias. No debemos olvidar que en definitiva, ya sea sobre una hoja de papel o sobre la pantalla de un ordenador, estamos trabajando en 2D; si el dibujo que estamos realizando representa exclusivamente estas dos dimensiones no nos hace falta ninguna otra apoyatura para trabajar, mientras que si trabajamos sobre proyecciones del espacio sabemos que los elementos que se hallan ante nuestra vista están relacionados mediante una serie de propiedades de forma que son algo màs que simples lineas y puntos, son la representación de planos, caras, aristas, etc.

Imaginemos que tenemos una piràmide irregular de plàstico de un tamaño tal que nos cabe en la mano, y nos interesa saber que tipo de triàngulo existe cada cara, es obvio que para verlo giraremos la piràmide en nuestra mano hasta que la cara escogida quede ante nuestra vista de forma que podamos apreciar su forma, si ademàs queremos medir sus lados, manteniendo la cara en dirección a nosotros apoyaremos una regla graduadada sobre dicha cara y ponièndola sobre cada arista de la piràmide las mediremos. Seràn estas las operaciones que realizaremos cuando queramos obtener información de las proyecciones de una figura. Variaremos la dirección de proyección de forma que una cara nos quede en verdadera forma, y serà sobre esta proyección que mediremos sus lados obteniendo su verdadera magnitud. Esta operación serà la que realizaremos en nuestra geometria informatizada, y es de hecho, conceptualmente, la equivalente a otra operación que ya hemos utilizado anteriormente: el cambio de plano de proyección. Ademàs de a esta operación sustiuirà, como veremos, a los abatimientos y los giros.

Abatimientos.

Planteèmonos el problema de hallar la verdadera magnitud y forma de un poligono.



Si estamos trabajando en Diédrico, de este poligono tenemos dos proyecciones, ninguna de las cuales, generalmente, cumple con la condición de darnos inmediatamente la información que necesitamos. En el espacio el poligono se encuentra contenido en un plano, vemos que es el hecho de proyectar ortogonalmente a los planos de proyección lo que nos da una imagen deformada del poligono en cada vista. Si lo que hicieramos fuera "posar" el poligono, por ejemplo, sobre el plano horizontal de referencia no normalmente a dicho plano sino girando el plano en donde se encuentra el poligono, alrededor de la recta de intersección de ambos planos, obtendriamos sobre el plano horizontal exactamente la misma figura que tenemos en el espacio. La operación que hemos descrito se llama abatimiento.

Capitulo 8.

Para usarla como sistema de proyección es muy compleja, pero es muy útil como ayuda como hemos visto. El problema radicará, ahora, en la traducción diédrica de dicha operación, o sea en como relacionar lo que tenemos, las dos proyecciones del polígono, para obtener su verdadera magnitud por abatimiento. Vamos a estudiar esta problemática paso a paso, con los siguientes casos:

- "Abatimiento" de un punto (1).

- "Abatimiento" de una recta.

- Abatimiento de una forma plana.

- Abatimiento de un circulo.

y sus aplicaciones:

- Angulo entre dos rectas.

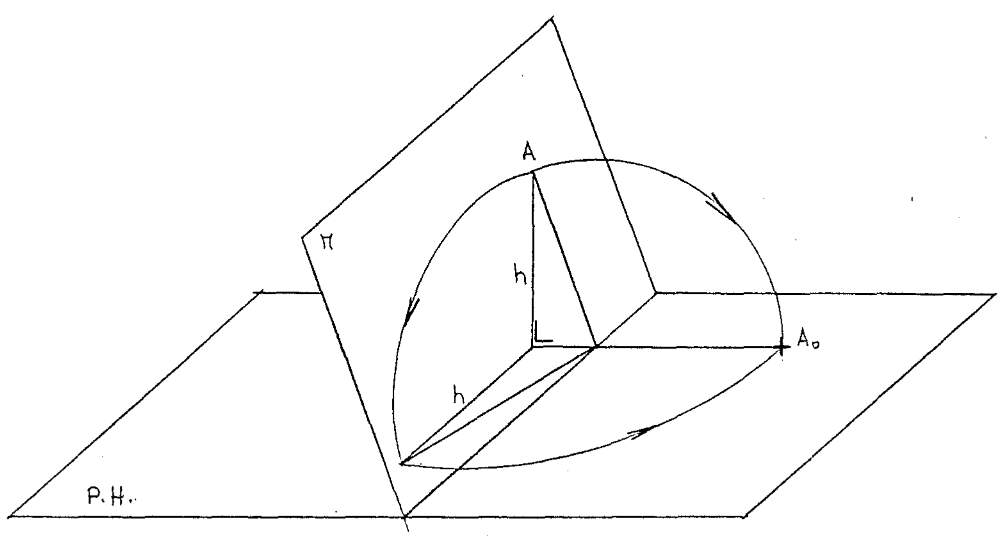
- Angulo de una recta con un plano.

- Angulo entre dos planos. Plano bisector.

Abatimiento de un punto.

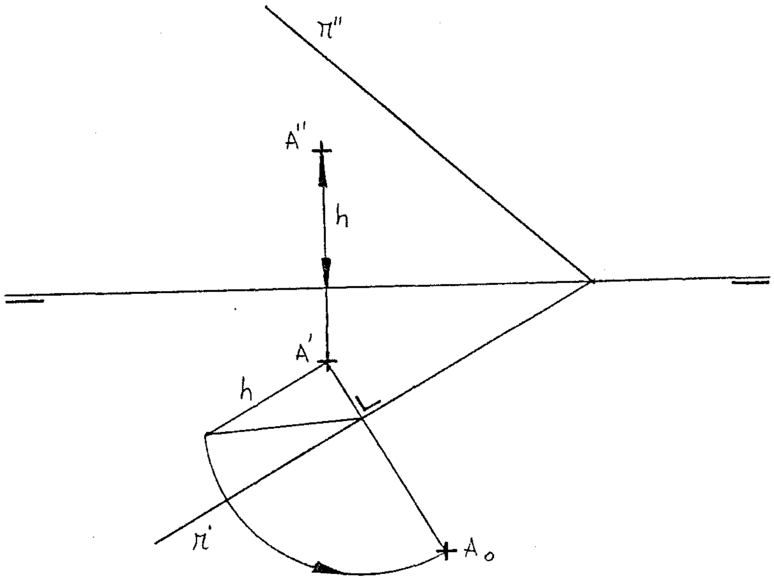
El ejemplo planteado anteriormente de hallar la verdadera magnitud de un poligono haciendo uso del abatimiento, se podria resolver abatiendo todos los puntos que lo definen, aunque, de hecho, no será nunca totalmente asi, nos sirve de justificación para estudiar como abatiremos un punto del que tenemos sus proyecciones diédricas.

Supongamos que queremos abatirlo sobre el plano horizontal, y que el punto A se encuentra sobre un plano determinado π; hemos dicho anteriormente que abatir un plano sobre otro es el resultado de hacerlos coincidir girándolos alrededor de su recta de intersección, normalmente se le llama charnela a esta recta:



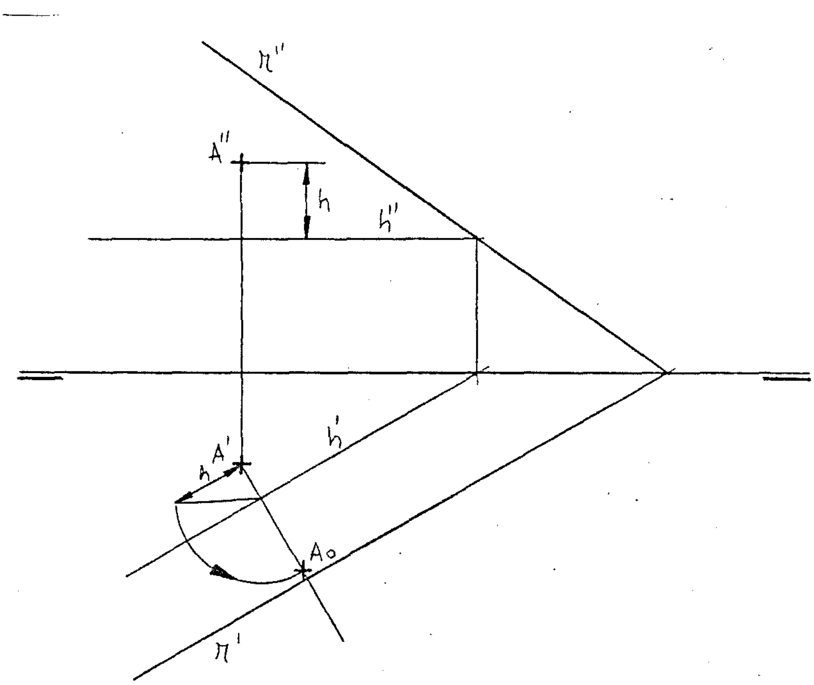
A describirá una circunferencia de radio su distancia a la charnela, y centro la intersección de una perpendicular trazada por él a dicha recta de intersección. Al abatido de A le llamaremos A_o.

En diédrico, lo que tenemos son las dos proyecciones de A, A' y A", y las trazas del plano donde se encuentra el punto:



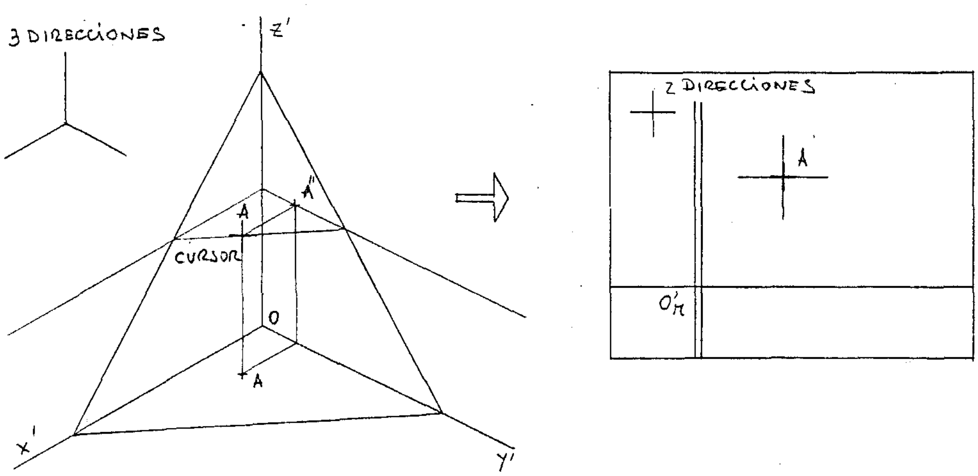
Para hallar A_o, reconocemos en la traza horizontal de π a la charnela alrededor de la cual abatiremos el punto. A y A_o se encuentran en un plano perpendicular a dicha charnela, lo que nos permite establecer un primer lugar geométrico de donde puede estar A_o. Nos faltará realizar el arco de circunferencia de radio r, para acabar de definir el abatido de A. Similarmente a lo que teníamos cuando hallábamos la distancia entre dos puntos de una recta, de hecho es la distancia entre dos puntos el radio que estamos buscando, podemos girar el triángulo que se forma en el plano perpendicular a la charnela, y mediante consulta del desnivel h en el proyección vertical de A, obtendremos el valor de dicho radio. En el dibujo previo se indica en que forma usamos la información del radio.

Dado que el razonamiento es idéntico para un plano paralelo al horizontal de referencia, podemos hacer el abatimiento alrededor de una horizontal (aceptemos lo impropio de la expresión):



El hecho de realizar los abatimientos alrededor de cualquier plano paralelo a los de proyección es lo que hace muy operativo a este sistema de hallar verdaderas magnitudes.

Omitiré el referirme al Sistema Axonometrico por su extrema complejidad, no obstante contemplemos como podemos sustituir la operación que acabamos de realizar mediante el uso de la Informática. Supongamos que tenemos en pantalla la representación de la proyección de los tres ejes coordenados que nos definen un sistema Axonométrico, sobre la superficie de la pantalla tenemos un cursor, representado por dos segmentos perpendiculares en el sentido bidimensional, que podemos gobernar mediante teclado, ratón o tableta, que se mueve según tres direcciones paralelas a las proyecciones de los ejes. Con dicho cursor definimos un plano y sobre él un punto. Queremos realizar un cambio de proyección de forma que la pantalla pase a representar las dos dimensiones del plano definido, no nos importa ahora como. En la nueva proyección el cursor se moverá según dos direcciones perpendiculares, ¿cuales serán estas direcciones?.

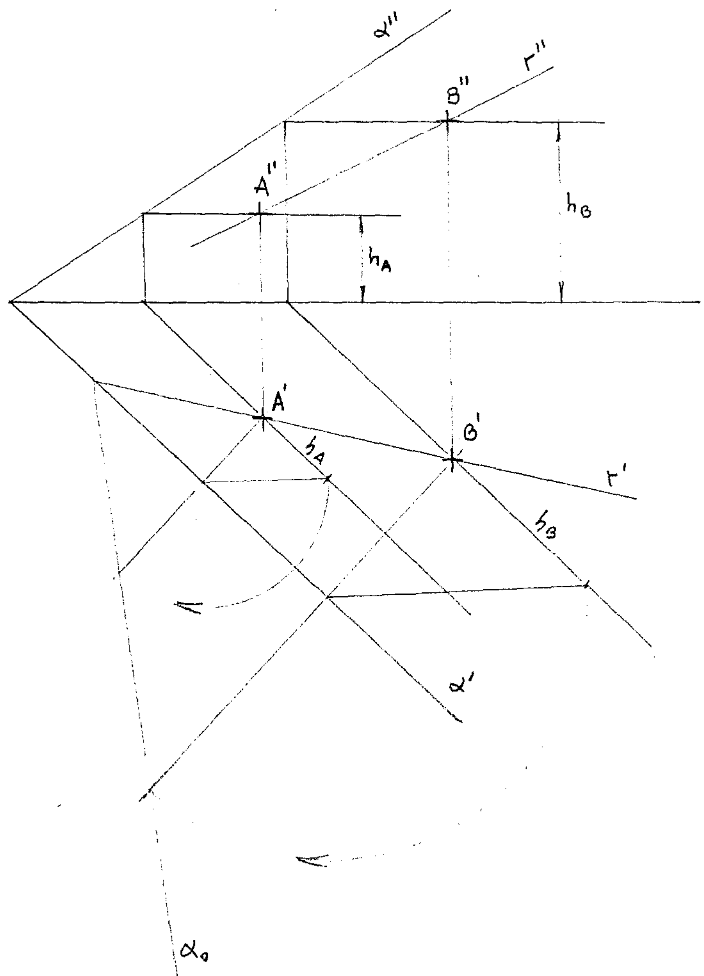


Si se tratara de un paso de la vista axonométrica a cualquiera de las diédricas, tendriamos la ayuda de que en cualquiera de estas vistas tenemos las proyecciones de los ejes coordenados que nos dan una referencia, y además tenemos la información suplementaria del punto de intersección de los ejes, tanto cuando se proyectan en tres como cuando lo hacen en dos, es el punto (0,0,0). Nada de eso ocurrirá cuando la pantalla represente a un plano cualquiera, en este caso no es de gran ayuda el tener gráficamente representadas las proyecciones de los tres ejes, ni tampoco podemos saber donde se encuentra el origen de coordenadas, hemos de preveer algo especifico para nuestro plano. Aseguramos analiticamente que el cursor se mueva siempre en puntos cuyas tres coordenadas cumplan continuamente la ecuación del plano al que pertenecen. Sobre este plano debemos definir dos direcciones perpendiculares de referencia, parece obvio que una sea la de las horizontales del plano. Si lo hacemos asi, es obligado que la dirección perpendicular sea la de las rectas de máxima pendiente (r.m.p.), ya que una de sus propiedades es ser, precisamente, perpendiculares a las horizontales. Queda por decidir si es necesario que exista un punto de referencia independiente de los elementos que se encuentren en dicho plano. En el caso que nos ocupa, en el que sólo tenemos un punto en juego parece ser necesario. No hemos de dejar de observar, sin embargo, que éste no será el caso más usual y habrán otros puntos y rectas que habrán sido "arrastrados" en el cambio. Suponiendo que el programa está diseñado de forma que la identificación alfanumérica de dichos elementos se conserve en dicho cambio de punto de vista opcionalmente (2), no nos será dificil reconocer la posición relativa de los elementos que se encuentran en el plano. Si a pesar de ello queremos que haya un punto de referencia que nos identifique el plano, éste debe de ser la proyección del origen de coordenadas, en la dirección de la normal al plano, sobre dicho plano O_π. Será por este punto por el deberán pasar los **ejes** coordenados del plano en cuestión. El sentido de dichos ejes no ofrecerá ninguna dificultad dado que el versor normal ha de ser perpendicular a la pantalla, dicho sentido debe ser antihorario, luego crecerán los valores numéricos sobre los ejes hacia la derecha y hacia arriba. No obstante lo dicho anteriormente, no es probable que usemos un cambio de sistema de proyección para determinar un punto por coordenadas, sino que lo que haremos es ejecutar dicho cambio para asi poder trabajar geométricamente en 2D, y posteriormente traducir dichos resultados gráficos al axonométrico usual de trabajo.

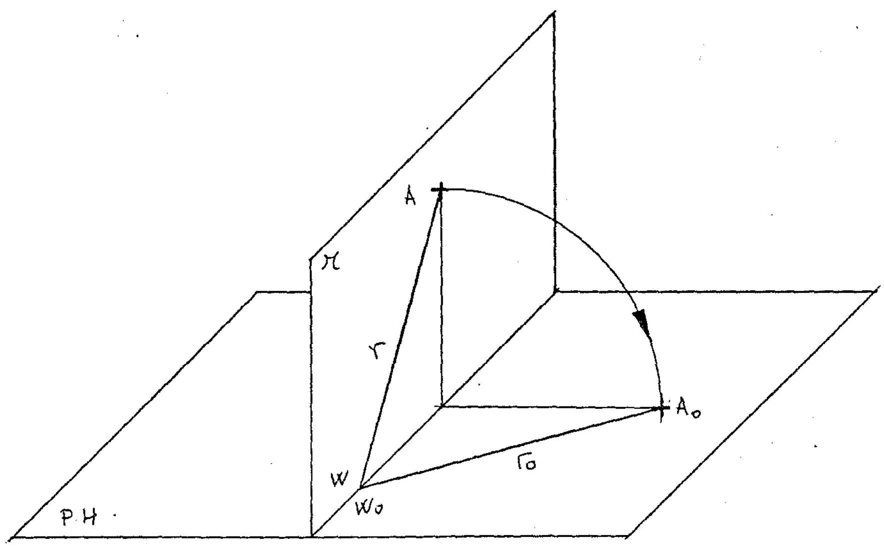
Como tributo a la geometria tradicional y para tener una sencilla identificación de cual de las dos rectas paralelas que tenemos en pantalla es una horizontal y cual no, podemos representar la r.m.p. por una linea doble, mientras que la horizontal nos vendrá representada por un recta de trazo sencillo. Para la obtención de O_π será necesario tener implementado el proceso de intersección de un plano con una recta pasando por el centro de coordenadas con la dirección de la normal al plano.

Abatimiento de una recta.

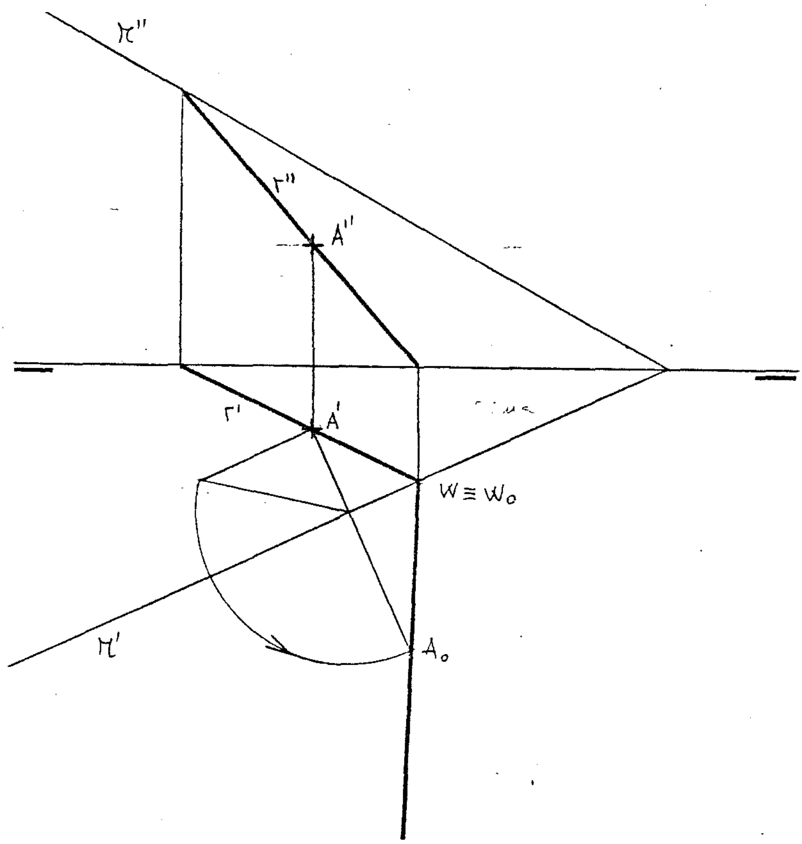
Si consideramos que una recta nos viene definida por dos puntos de paso, abatir una recta consistirá en abatir dos de esos puntos, veàmoslo:



En el dibujo de la figura no hemos hecho nada nuevo respecto al apartado anterior ni de hecho ha sido necesario, dado el caracter genèrico que tiene esta exposiciòn. De todas formas puede ser interesante ver que existe una forma mas elegante de realizar la operaciòn de abatir una recta (hago hincapiè en lo poco afortunado de la expresiòn nuevamente), para ellos vayamos al dibujo que nos representa el problema en el espacio:

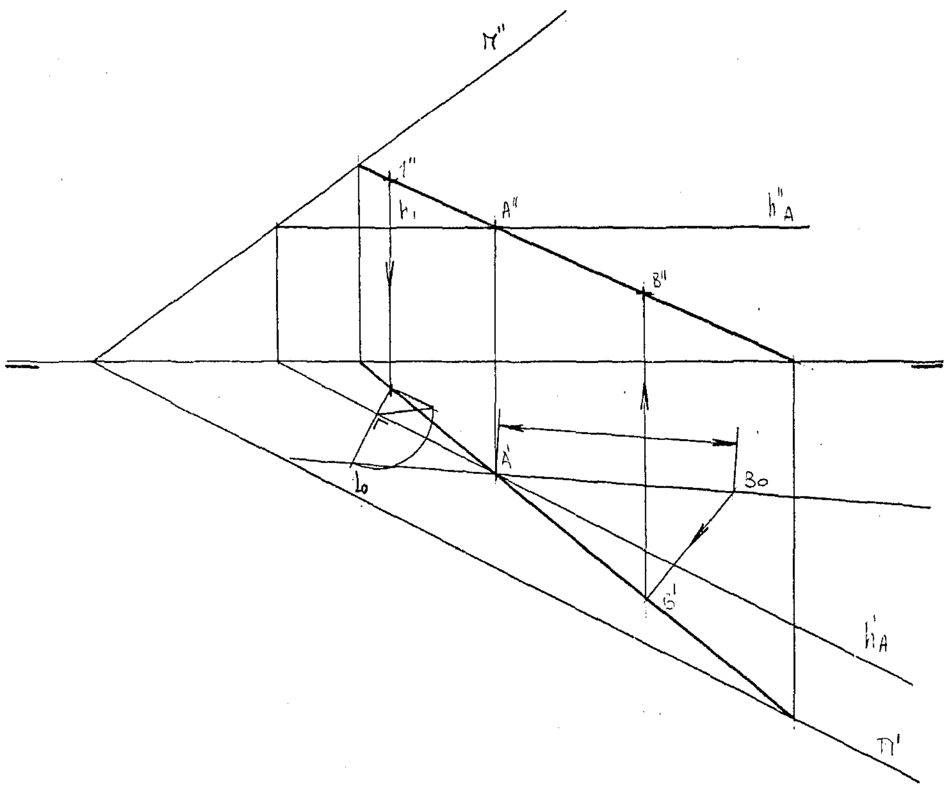


Como la recta r se encuentra en el plano π, y la charnela es de la intersección de los dos planos: r y la charnela se cortan forzosamente en un punto W. W es un punto doble, entendiendo por tal que coincide con su abatido W_0. De lo anterior se infiere que si podemos encontrar fácilmente este punto común entre el plano que se abate y el plano sobre el que se abate, nos bastará abatir un sólo punto para hallar la abatida de una recta.



El punto W tendrá importancia en el apartado siguiente cuando hablemos de las figuras planas, como ya veremos.

Al igual que en el caso del punto, el abatimiento puede realizarse sobre cualquier plano paralelo a los de proyección; en la figura se ha resuelto el problema de determinar el extremo de un segmento de magnitud dada del que conocemos dicha magnitud, su sentido y uno de los puntos.



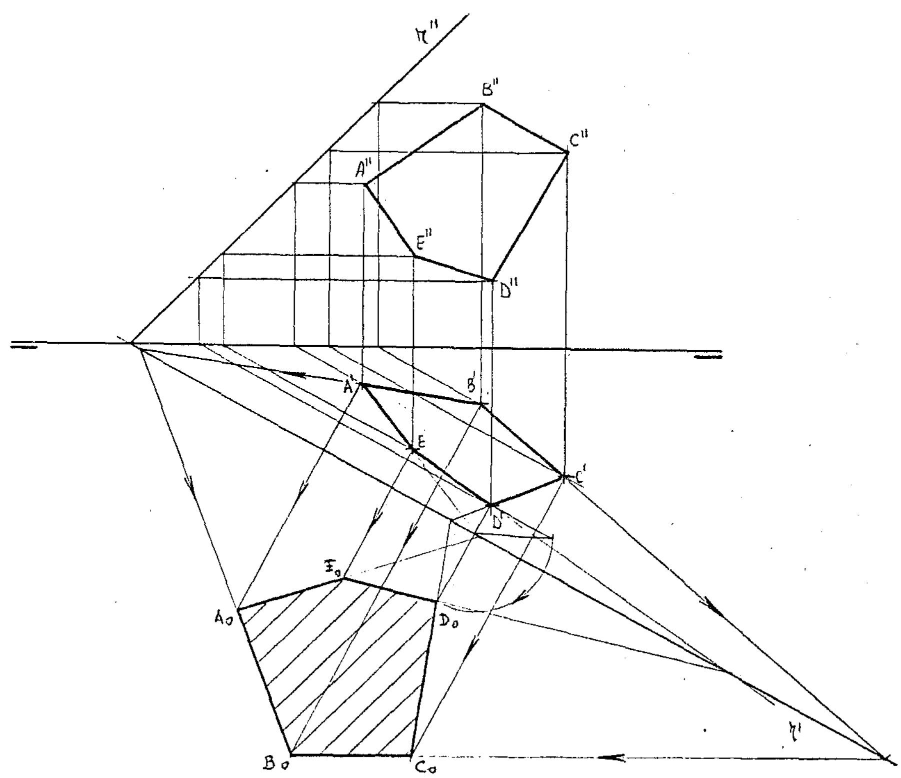
La solución analitico-informàtica no difiere en nada a la comentada en el caso del punto. Si pretendemos resolver el mismo ejercicio simple que se ha propuesto en la ùltima figura, se constata, una vez màs, la necesidad de poder alargar y acortar a voluntad segmentos en funciòn de las condiciones dadas por el contexto ya sea de forma gràfica o desde teclado, previa selecciòn mediante cursor de a que lado del segmento ha de crearse el nuevo punto .

Abatimiento de una forma plana.

Igual que haciamos al empezar el apartado dedicado al abatimiento de una recta, aqui podemos decir que una forma plana està formada por una serie de vèrtices, abatiendo cada uno de ellos y unièndolos ordenadamente tendremos resuelto el problema de obtenciòn del abatido de dicha forma. No es conveniente hacer sistemàticamente este razonamiento, cierto por otra parte, pues podriamos cometer errores dificiles de descubrir a poco que la figura que nos ocupe sea compleja.

En este punto de la exposiciòn muchos libros pasan a hablar de la afinidad entre las proyecciones y los abatimientos, como, hasta aqui, no me ha sido necesario introducir la Geometria Proyectiva, no veo que sea este el momento de recurrir a ella. Planteèmos las propiedades que vamos a comentar como simples instrumentos que nos permiten asegurarnos de la bondad de los resultados cuando estamos realizando un abatimiento.

Hemos visto que en cada recta que se abate existe un punto que permanece invariable, lo podremos hallar en cualquier momento prolongando una recta proyectada y su abatida, dicho punto deberà encontrarse sobre la charnela. La segunda condiciòn que usaremos exhaustivamente, es el hecho de que un punto proyectado y el correspondiente abatido se encuentran sobre una perpendicular a la charnela. Usando las dos propiedades comentadas, tendremos elementos de comprobaciòn de que las operaciones que estamos realizando son correctas, pudiendo intercalarlas con la obtención mecánica de los puntos mediante la diferencia de alturas.



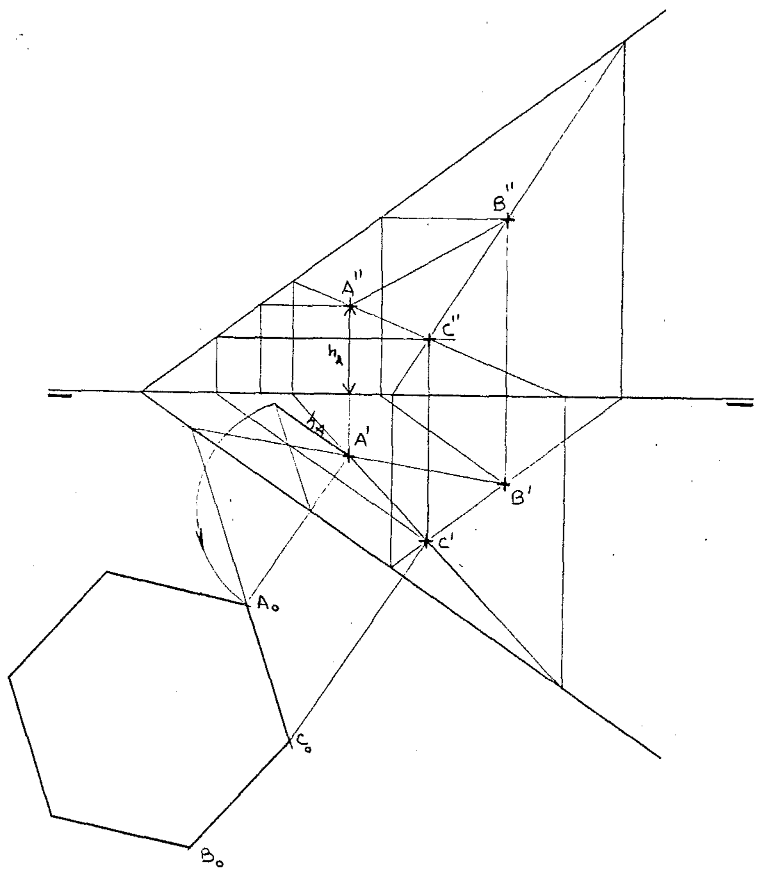
Supongamos que en la figura anterior lo que se pretendia era hallar el area encerrada por las cinco lineas, con el sencillo procedimiento de un abatimiento hemos encontrado dicha medida. HYPATIA debe resolver el mismo problema mediante el cambio de dirección de proyección, sin tener que encontrar relaciones entre una proyección y el abatido de la figura real, lo que nos da el programa es la verdadera magnitud y verdadera forma de la figura plana en cuestión con los mismos presupuestos que en la Geometria Descriptiva, deben estar definidos los cinco lados del poligono a abatir, mediante la orden CAMBIO DE PUNTO DE VISTA.

A efectos pedagógicos no creo que la opción informatizada quede en mal lugar frente al procedimiento actual, en este último, siempre hablando del sistema Diédrico, nuestros razonamientos nos han de llevar a escoger que plano hemos de abatir, para a continuación enzarzarnos en la obtención del abatido perdiendo, es lógico, un poco de la perspectiva de por que estamos haciendo dicho cambio de plano, sobre todo si dicha operación no es el fin último de nuestro ejercicio sino un paso intermedio en su desarrollo. Si el cálculo de la verdadera magnitud fuera el motivo de nuestras operaciones bastaria con hacerla aparecer en pantalla y a continuación hacer un volcado de la misma en impresora o mejor aun en plotter. Cabe aqui preguntarse por el papel de la representación sobre papel de un resultado, hasta aqui el principal uso de dichas copias era la consulta pero no se excluia el manipularlas dado el caso. Ahora la proyección que nos dará el plotter (3) será un Axonométrico del que en repetidas ocasiones hemos criticado su falta de operatividad frente a lo espectacular de su comprensibilidad. Hay que preveer, a mi entender, que la presentación de resultados se hará cada vez más con el mismo ordenador de forma que se puedan ir manipulando las vistas con el objeto de ir aclarando puntos oscuros, mientras que las copias en papel quedarán un poco como una representación a la que se hará poco caso (en cierta forma, algo parecido a lo que ocurre actualmente con las representaciones cònicas, la mayor parte de ellas enmarcadas o enmarcables), a menos que una vez concluido un trabajo, nos tomemos la molestia de hallar todas las vistas que preveamos que son interesantes y las imprimamos. La posibilidad de que un proyecto acabado se entregue directamente en un diskette con el programa que lo ha confeccionado en una versiòn **acortada** especialmente para realizar consultas, no creo que sea muy descabellada.

Abatimiento de un circulo.

Hasta ahora hemos usado la operaciòn de abatimiento para hallar, bàsicamente, la verdadera magnitud de figuras planas; de paso tambièn hemos hallado su verdadera forma, pero no era primordial (màs adelante si lo serà, cuando intervengan los àngulos contenidos en una forma plana). Si nos planteamos el manejar circunferencias, el problema varia. Que una circunferencia se proyecte como tal es lo màs improbable, normalmente lo harà como elipse. La forma en que nos moveremos para hallar en cada momento los elementos necesàrios para definir correctamente una elipse, es paradigmàtica del trabajo con proyecciones de un cuerpo espacial.

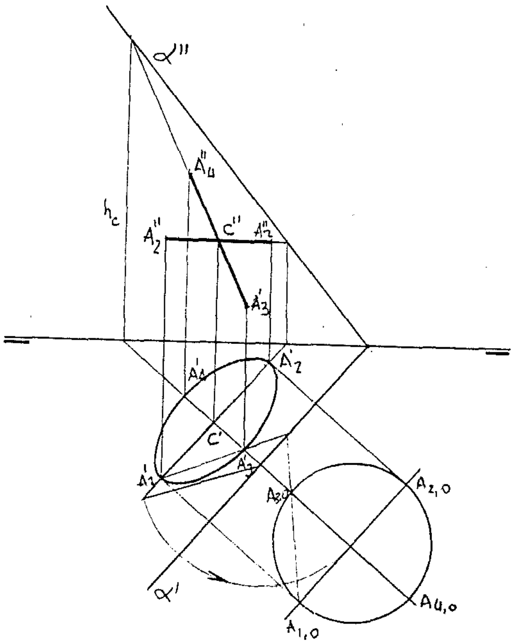
Una circunferencia es una figura plana, por lo tanto se encontrarà formando parte de una de las caras de los sòlidos con los que trabajaremos, es menester ver ese plano de la cara de forma que la circunferencia se proyecte como tal. De esa vista sacaremos la informaciòn necesària para definir la elipse en la proyecciòn correspondiente. De hecho es el mismo proceso que tendriamos en un sencillo ejercicio como el siguiente: dados tres puntos A, B y C, encontrar la proyección diédrica del hexágono regular de lado AC:



A, B y C nos definen el plano sobre el que debe encontrarse el hexágono, AC lo vemos en proyección por lo que aun no tenemos la magnitud del lado de dicho polígono, abatámos el plano definido por los tres puntos, y con él AC, A_0C_0 es el valor del lado buscado, construyamos en dicho abatimiento el hexágono pedido y desabatamos los siguientes puntos. Este es el proceso que seguiremos con la circunferencia, con alguna pequeña diferencia debido al caracter de curva de èsta.

Considerando que si tenemos de una elipse sus ejes ya la podemos dibujar, y que la información en nuestro poder es el plano que la contiene, las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia. Procedamos a abatir dicho plano y con èl el centro, dibujando a continuaciòn la circunferencia en cuestiòn. Sabemos que la proyecciòn de cualquier par de diàmetros perpendiculares nos darà dos diàmetros conjugados, ya podrìamos, con èstos, dibujar la elipse, pero hemos dicho que lo resolverìamos a partir de los ejes; recordando que èstos no son màs que un par de diàmetros conjugados perpendiculares, veamos de conseguir un par de diàmetros de la circunferencia que conserven la perpendicularidad al desabatirlos.

Hemos visto anteriormente que el abatido de un punto y èl mismo se encuentran sobre la perpendicular a la charnela, consecuentemente si tenemos un diametro de direcciòn perpendicular a dicha recta, podemos asegurar que su direcciòn despuès del abatimiento seguirà siendo perpendicular, aunque no podemos afirmar que el tamaño se conserve, (de hecho serà menor), si dibujamos el diàmetro perpendicular al que hemos hallado,serà lògicamente paralelo a la charnela. Por la propiedad que hemos comentado anteriormente de que existe en toda recta un punto que no varìa en un abatimiento, vemos que en este caso dicho punto es el imprópio de la recta y la charnela, concluimos que su abatida serà también paralela a la charnela, y como sus extremos los hallaremos por sendas perpendiculares, nos encontramos que el tamaño es exactamente el de un diámetro de la circunferencia; hemos obtenido el eje mayor de la elipse, siendo, lógicamente, la otra recta hallada posteriormente es el eje menor.

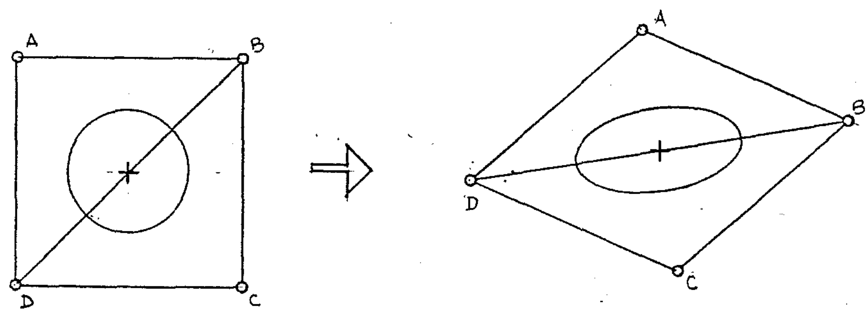


Con esta operación tenemos resuelta la obtención de una de las proyecciones de la elipse, para hallar la otra tenemos dos opciones: repetir la operación con el otro plano de referencia o pasar la información de los ejes a la otra vista con lo que obtendremos diámetros conjugados a partir de los cuales también podemos dibujar la cónica.

Remarquemos que en ningún momento hemos tenido en cuenta la opción de hallar la elipse sencillamente por puntos, considerando que de hecho es un polígono de infinitos lados y, consecuentemente, vèrtices. Veamos cual seria el proceso si hicieramos esta consideración. Pensemos que primero deberiamos escoger un punto sobre una circunferencia, comprobando que se encuentre precisamente a la distancia exacta del centro, por ejemplo, y este punto lo desabatimos y posteriormente imponiendo que se encuentra en el plano abatido hallamos su otra proyección. El proceso es laborioso y fuente de errores, y además ¿cuantos puntos son necesàrios para considerar definida correctamente la cònica?, y ¿que ocurrirà si queremos realizar operaciones con ella tales como cortarla con una recta o trazarle tangentes por un punto?. Para responder a todas estas cuestiones hemos optado por hallarle los ejes a la cònica, dado que existe todo un bagaje geomètrico que nos permite resolverlas puntualmente.

Paradòjicamente la versión informatizada del problema, es justamente la contraria: una circunferencia o una elipse es considerada como un polígono infinito. Con esta opción se resuelve sòlo uno de los problemas que nos plantean los circulos en proyección. Mediante el cambio de punto de vista escogemos aquella proyección en donde la circunferencia se ve como tal, se define y se almacena como una matriz de gran número de puntos, depende de la definición de la pantalla, obtenidos todos mediante giros iguales a partir del centro, aunque sin dibujar los radios correspondientes.

Cuando se vuelve a la vista en que la circunferencia no se ve como tal, todos los segmentos, no representados gráficamente, sufren las deformaciones que nos definen la elipse deseada.

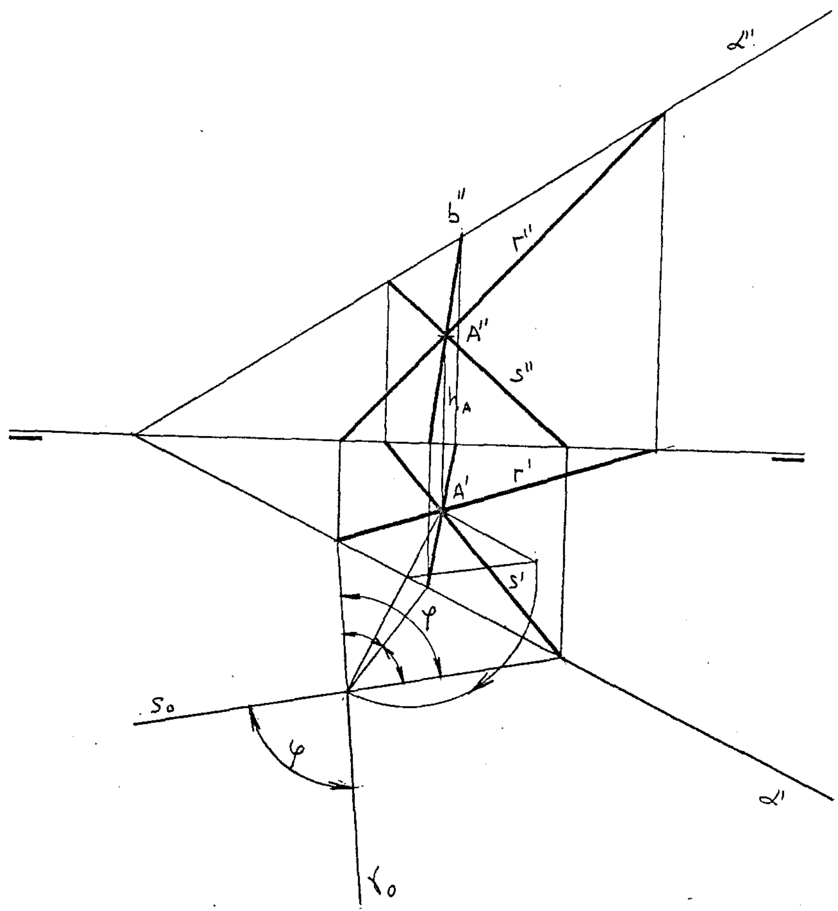


Podríamos decir que algo tan escurridizo como el dibujo de cónicas, mediante la Geometría Informatizada lo tenemos resuelto casi sin pensarlo, mediante el mismo software que nos permite pasar de una vista a otra automáticamente. Otra cosa será cuando las elipses, o cónicas en general, no sean una molesta proyección de una circunferéncia sino exactamente cónicas definidas como tales en planos determinados y sobre las que queremos realizar operaciones algebraicas, definirlas mediante una serie de condiciones, etc. Dado que, por definición, las cónicas son curvas planas, su estudio no corresponde a esta parte. No sería lógico, sin embargo, no tratarlas con algún detenimiento dada la importancia de su estudio. Se da la circunstancia de que no existe ningùn paquete comercial que le dedique su atenciòn, aparte de a las elipses y con algunos matices que seràn comentados en su momento, y ello pucde ser debido a que los programadores les queda aun la rèmora del caracter escurridizo, como he dicho antes, de su manejos. Precisamente la Informàtica puede hacer un gran servicio para ayudar a perder la prevenciòn que se ha tenido por las cònicas. Ya Apolonio (nacido aproximadamente 260 años antes de Jesucristo) dedicò mucho espacio en sus obras a su estudio, a pesar de ello, es dificil que, en nuestros dias alguien recurra a ellas para buscar soluciones mientras que los matemàticos antiguos si lo hacian con toda naturalidad (4). El estudio de las cònicas ha sido uno de los objetos de estudio preferentes del que suscribe, habiendo logrado escribir, en colaboraciòn con Xavier Codina i Muñoz (5), un programa que permite resolver algunos de los problemas fundamentales tanto de creaciòn como de manejo de cònicas. Dicho programa ha sido probado sobre unos grupos piloto de alumnos de primer curso de ingenieria. Un comentàrio de dicho programa, su estudio, elaboraciòn y desarrollo puede encontrarse en el capitulo de conclusiones de esta tesis.

Aplicaciones de los abatimientos.

Angulo entre dos rectas.

El problema que vamos a contemplar es el de hallar la verdadera forma del àngulo formado por dos rectas que se cortan en un punto. Como dicho par de rectas, por el hecho de cortarse, definen un plano, supongamos que tenemos el problema planteado ya en esos terminos: dos rectas y un punto contenidos en un plano.



Como hemos visto a lo largo de este capitulo, el abatir las dos rectas viene simplificado si hacemos uso de los puntos de intersección de las rectas con la charnela, el hecho de ser estos puntos dobles nos simplifica el problema, ya que sólo nos hará falta hallar el abatido del punto de intersección para tener completamente definido el abatido del ángulo. Además de medir el ángulo podriamos hacer alguna operación con él, como dividirlo en partes iguales, o trazarle la bisectriz; para no complicar el dibujo optemos por esta última posibilidad. Una vez trazada dicha bisectriz, sólo nos es necesário saber en que punto corta a la charnela, dado que el otro punto es el de intersección de las rectas, para tenerla completamente definida.

Informáticamente el problema no representa ninguna novedad, a fuer de ser sinceros tampoco lo representa en el caso tradicional, dado que una vez hecho el cambio de punto de vista el problema queda reducido en un problema de 2D, y podemos recurrir a los programas previstos a tal efecto, o en su defecto a las macros que en función de nuestros intereses específicos creemos (6).

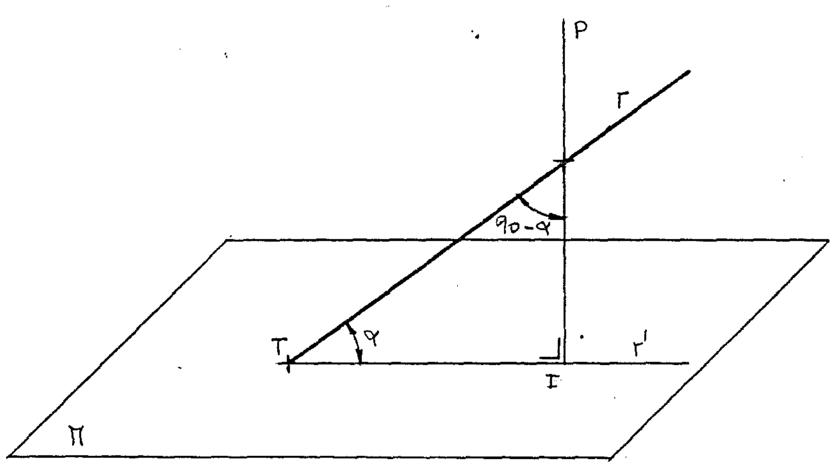
Si lo que deseamos es una consulta independiente de su representación gráfica, mediante cálculos analíticos implicando a los cosenos directores de las rectas, siendo éstos los cosenos de los ángulos que forman éstas con los ejes coordenados, la respuesta literal es inmediata. Dado que podemos obtener el valor del ángulo de forma sencilla, analíticamente, también de la misma forma podríamos hallar las particiones que nos convengan. Al igual que existe la posibilidad de, en 2D, trazar una recta paralela a otra, en principio del mismo tamaño, podemos programar el trazar una recta que forme un ángulo dado con otra por un punto de ésta; posteriormente podríamos prolongar o acortar el resultado.

Aplicación de lo anterior seria la implementación inmediata de la función bisectriz, una vez obtenido el valor del ángulo formado por dos rectas.

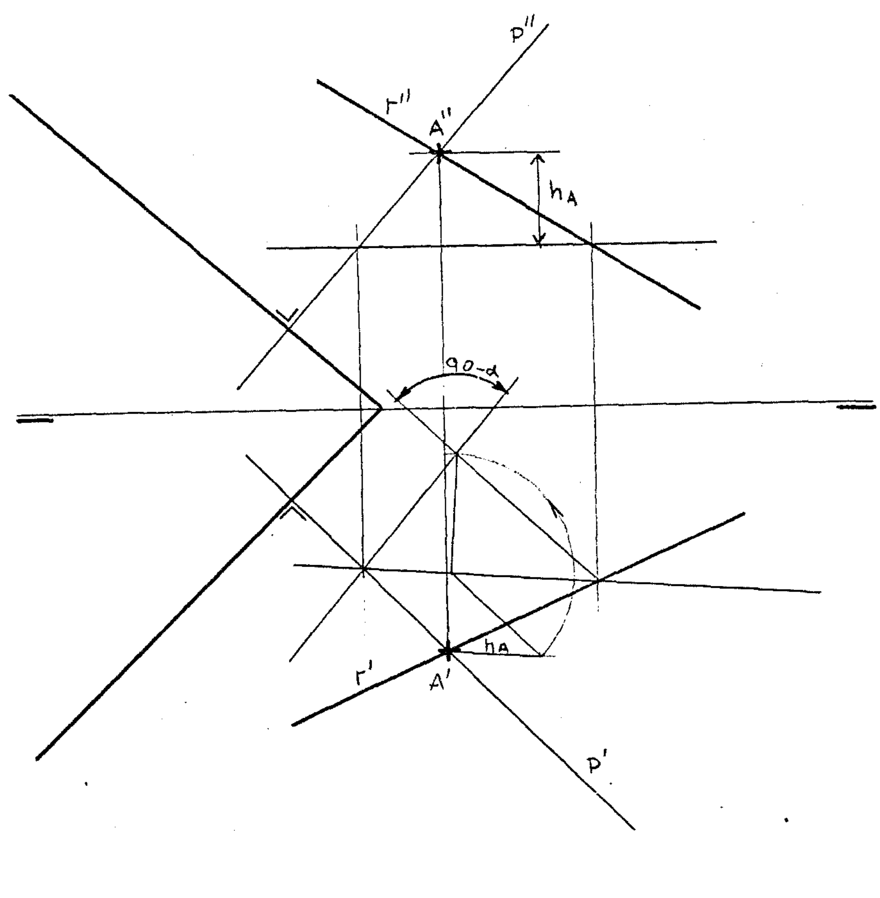
Angulo entre una recta y un plano.

A diferencia del estudio del ángulo que forman dos rectas, en donde sin ninguna dificultad podiamos introducir la determinación de su bisectriz, en el caso de ángulo de recta y plano, es menester preveer, antes de acometer su obtención, el motivo de la consulta. Si solamente nos interesa conocer el valor de dicho ángulo, resolveremos su determinación de una forma diferente, aunque complementária, de como lo haremos si estamos interesados en operar con dicho ángulo, para obtener, por ejemplo, su bisectriz.

Ambos métodos tienen la misma raiz teórica, el ángulo que forma una recta con un plano, es el que existe entre dicha recta y su proyección sobre el plano en cuestión:



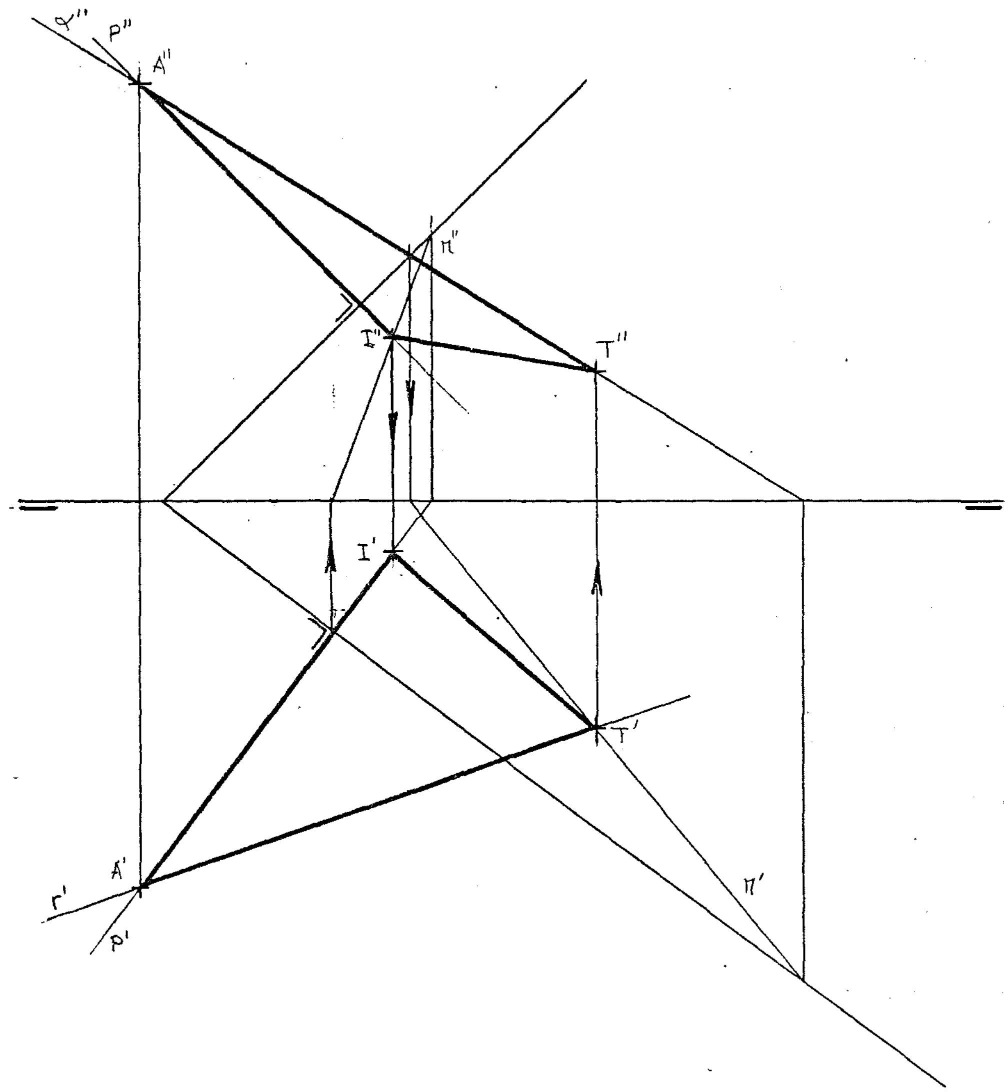
La definición implica encontrar la intersección de la recta con el plano, para obtener uno de los puntos que nos determinarán la proyección de la recta sobre él. El otro punto que nos definirá la recta proyección será el obtenido como intersección con el plano de una perpendicular, a él, cualquiera que tenga su origen en la recta. Observemos que si el ángulo buscado es α, el ángulo formado por la recta dato y la perpendicular al plano vale 90-α, por lo que si lo que nos interesa es sólo el valor de dicho ángulo el número de operaciones se simplifica, veámoslo:



Sea r la recta y π el plano respecto al que queremos hallar el àngulo, usando la versiòn simplificada, nos bastarà hallar el àngulo que forman r y cualquier recta perpendicular a π por un punto de dicha recta. Tracemos por A, un punto cualquiera de r, una perpendicular a π, nos bastarà, como hemos visto anteriormente, que las direcciones de las proyecciones de la perpendicular p sean perpendiculares a las trazas de π.

p y r, por el hecho de cortarse en A, definen un plano ß del que podrìamos hallar sus trazas, lo que no es necesàrio, pues ya hemos comentado màs arriba que para realizar un abatimiento, que es nuestro objetivo, podemos usar un plano paralelo al horizontal, dicho plano cortarà a las rectas que definen a ß según una horizontal, y serà alrededor de ella que realizaremos el abatimiento. Nos bastarà abatir A, ya que tenemos los puntos dobles del abatimiento en los de intersecciòn con la horizontal.

Si lo que pretendemos es hallar el àngulo en verdadera posiciòn ademàs de en verdadera magnitud, el proceso se complica. Al igual que en el caso anterior por un punto A cualquiera de la recta r, trazaremos la perpendicular al plano, pero mientras que en el caso anterior teniamos suficiente, aqui nos interesarà encontrar el punto I de intersecciòn con el plano π.



También será necesário encontrar el punto T de intersección de r con π. Las rectas unión de T e I y de A y T, son las que forman el ángulo que buscamos (mediante el proceso habitual de obtención de dichos puntos, apoyándonos en el uso de planos proyectantes habitual). El problema queda reducido al cálculo del ángulo que forman dos rectas que se cortan en el punto T, ineludiblemente deberemos hallar el plano que forman y abatir el ángulo formado para hallar el valor de su magnitud.

Será T el punto que abatiremos, y será a partir de T_0 desde donde encontraremos la bisectriz que nos habíamos propuesto hallar (operación que omito en aras de simplificar el dibujo).

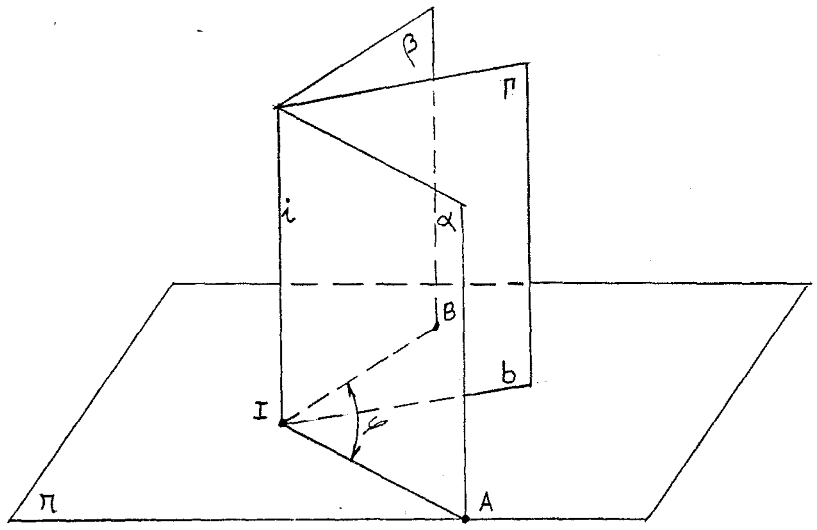
Analiticamente el ángulo entre una recta y un plano es el complementário del formado por la recta y la normal al plano, lo que, de hecho, es una traducción exacta del primero de los dos casos comentados más arriba. Distinto será cuando queramos ver gráficamente dicho ángulo, para, posteriormente realizar operaciones con él.

Llegados a este punto se plantea la cuestión de si deben estar todas las operaciones implementadas o, por el contrario, teniendo el bagaje teórico necesário y las herramientas informáticas suficientes dejar que el usuario las manipule convenientemente con arreglo a sus fines. La consulta del ángulo de una recta con un plano considero que puede ser una de las funciones implementadas, pero el poder hallar una recta que pase por el punto de intersección de otra con un plano y forme con dicho plano un ángulo que sea determinada fracción del que forma la otra recta con dicho plano, considero que es algo que debe ser obtenido mediante una serie de operaciones realizadas por el usuario. Si dichas operaciones, posteriormente, son consideradas interesantes para una determinada operación, pueden ser programadas en forma de macro. Paradójicamente esta conclusión está en consonáncia, a pesar mio, con las carencias expresadas respecto a la no implementación del cálculo de la bisectriz en los paquetes de 2D.

Angulo de dos planos. Plano bisector.

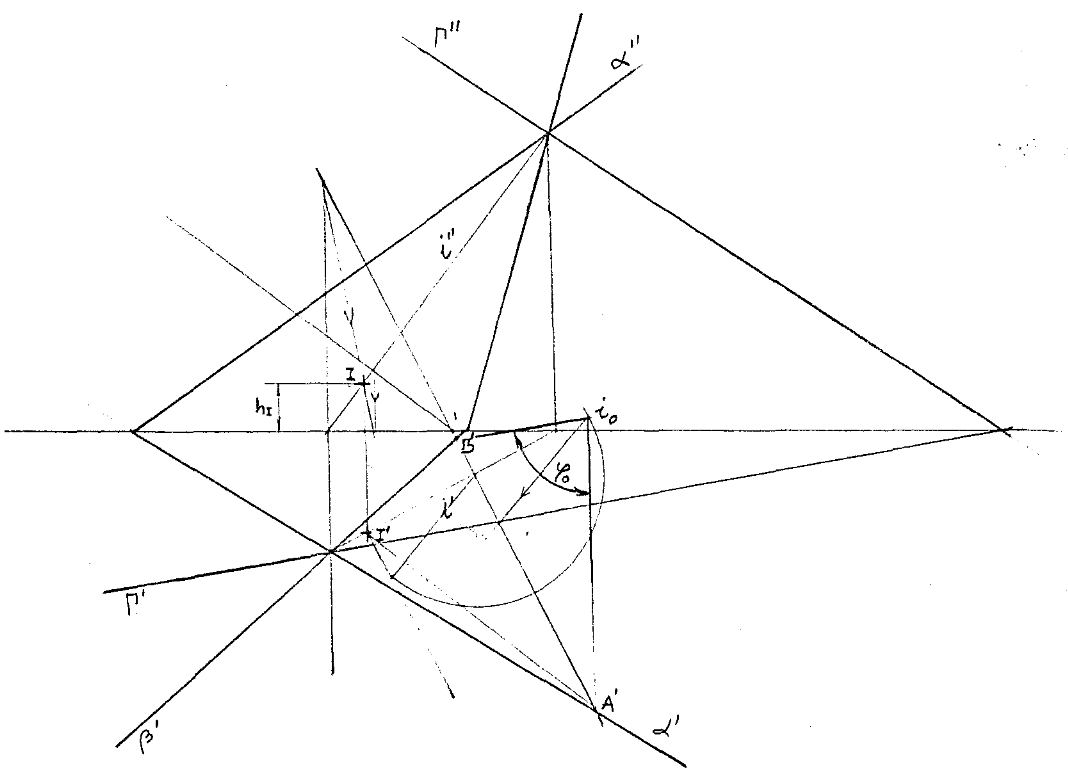
Al igual que en los casos anteriores de ángulos entre entidades del mismo género o de distinto género, el ángulo entre dos planos puede considerarse de formas distintas en función de para que queramos dicha información; si sólo se trata de hallar su valor atacaremos el problema de una manera determinada, mientras que si el objetivo a conseguir es la obtención del plano bisector el enfoque es totalmente distinto.

Empecemos por esta segunda opción que es la más tradicional, para ello recurramos a la figura:



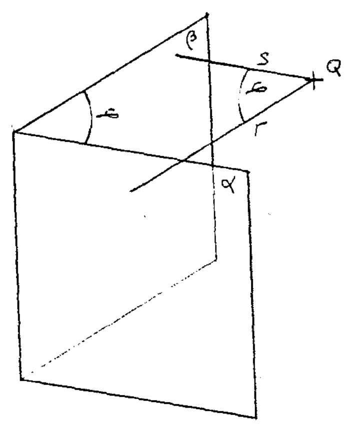
Sean α y ß los planos a los que hemos de hallar su plano bisector Γ. Dos planos siempre de cortan, llamemos i a dicha recta, para ver la magnitud del ángulo que forman los planos, se corta a ambos por un plano perpendicular a i, π, en donde veremos la magnitud del ángulo, que será el formado por las rectas de intersección de α y ß con π. Sobre el plano π obtenemos la bisectriz del ángulo formado por los planos, dicha recta b, junto con la charnela i definen el plano Γ bisector buscado.

El número de operaciones a realizar es elevado, apliquémoslas, no obstante, ordenadamente.

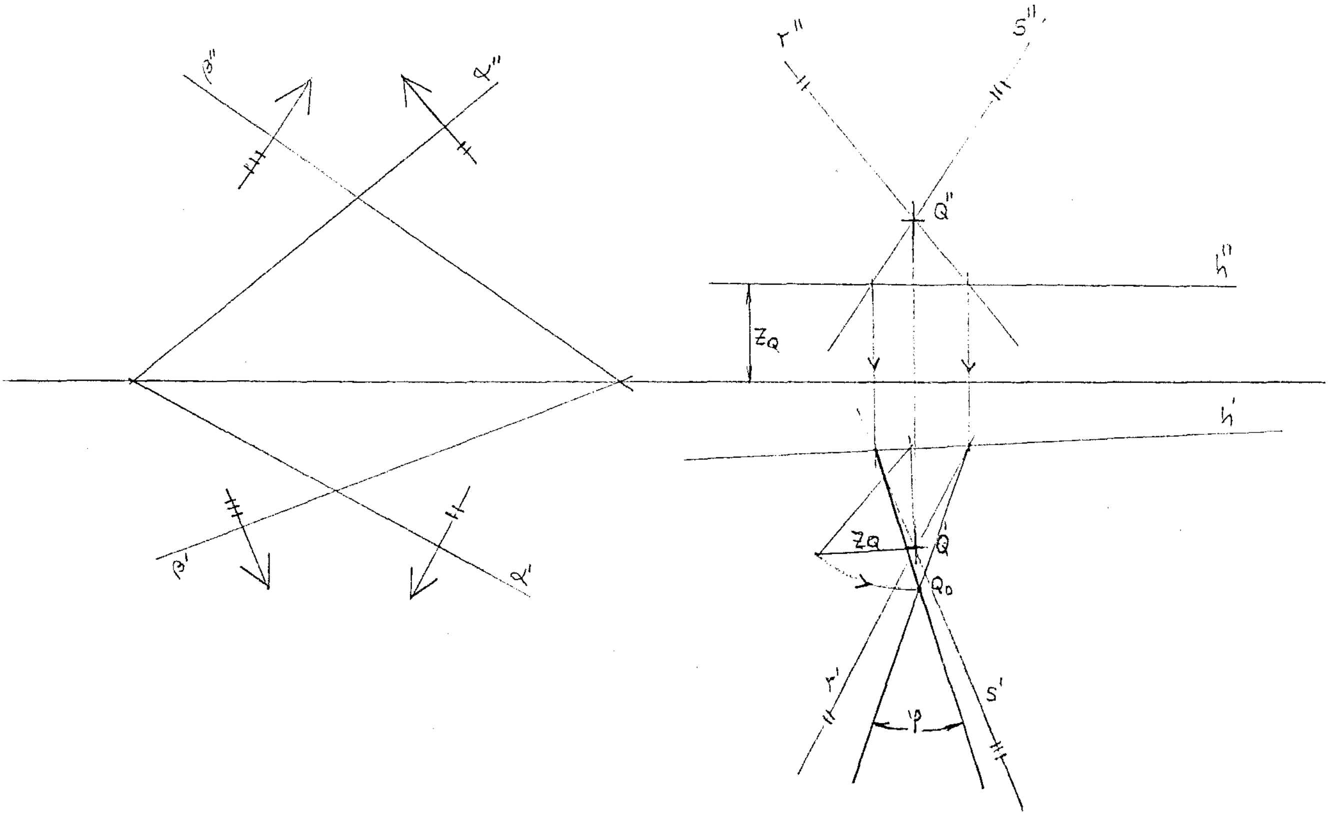


La figura superior se ha obtenido siguiendo paso a paso el razonamiento previo. Como se puede ver la complejidad es grande, a pesar de haber usado el mínimo de operaciones posible (se ha trabajado sólo en la proyección horizontal, tanto para hallar el ángulo cómo la recta b').

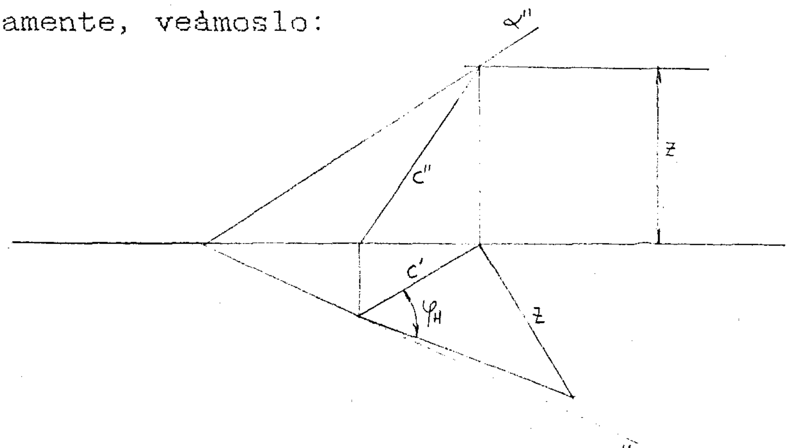
Si por el el contrario, sólo nos interesa el valor puntual del ángulo entre los dos planos, podemos trazar por un punto cualquiera sendas perpendiculares a los planos α y ß, el ángulo de esas perpendiculares nos dará la magnitud que buscamos.



Aplicando lo dicho al Sistema Diédrico tendremos:



Si nos interesara conocer el valor del ángulo que forma un plano con los de proyección, basta con considerar uno de éstos como el segundo de los planos del caso general, la recta de intersección será una de las trazas y el problema se simplifica notoriamente, veámoslo:



Dado que los planos nos vienen definidos por sus versores, será el ángulo que formen dichos versores el que formen los planos, es de esta manera que nuestro programa HYPATIA nos contestará a la pregunta del valor del ángulo entre dos planos dados.

Si lo que nos interesa es hallar el plano bisector, el caso es distinto. No vale, aqui, el argumento de que es probable que sea mejor dejarlo en manos del futuro usuario, dado que es una construcción muy concreta, de hecho se trata de un caso de plano que forma un ángulo determinado con otros dos y además debe contener a la recta de intersección de dichos planos, pospongo, pues, su comentario a haber estudiado ese caso general.

Notas y Referencias.

(1) No es correcto hablar de abatir una recta o un punto, ya que lo se abate siempre es un plano. Se acepta la expresión por la facilidad de uso y comprensión del concepto que encierra.

(2) Este es un punto de extrema dificultad pues existen dos formas de atribuir carácteres alfanuméricos a los elementos: asociándolos a un nivel o independientemente de éste. Cualquiera de las dos opciones tiene ventajas e inconvenientes. El asociarlos a un nivel, nos permite eliminarlos en el momento que nos convenga, pero tiene el inconveniente de que el concepto de nivel va muy intimamente ligado al de la vista en que se definen los elementos que están contenidos en él, y puede

darse el caso de que al cambiar de vista los caracteres queden en la posición anterior. Si contrariamente escogemos los caracteres independientes del nivel, no podremos en ningún momento hacerlos desaparecer de la pantalla. Obviamente la solución es que estén asociados a un nivel y que al cambiarse de punto de vista, la estructura interna del nivel haga lo própio. Algunos programas comerciales ya lo han resuelto.

(3) Es menester tener cuidado con asociar plotter e impresora, normalmente ésta nos da dos respuestas gráficas: el volcado directo de pantalla, muy grosero de apariencia, y un volcado programado, que tiene una apariencia mejor que además elude la iconografía del programa con que se ha creado. El plotter, en principio, está previsto para resultados más austeros y de gran precisión.

(4) Véase el uso que hace Pappus de la hipérbola para resolver el problema de la trisección. Carl Boyer páginas 243, 244 y 245. Obra citada anteriormente.

(5) La idea básica partió de Francesc Compta i Gonzalez y fue indispensable el apoyo lógico, y logístico, de Jordi Mestres i Sardá.

(6) No he encontrado ningún programa, entre los consultados, que tuviera implementada la función bisectriz, aunque en todos ellos fue posible encontrarla, mediante el enlace de varias funciones consecutivas.