UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

OPERACIONES ANALITICAS BASICAS.

Previo.

En estos apéndices se tratarán los conceptos analíticos que nos sirven para resolver la parte interna del tratamiento de la información, que, como hemos dicho repetidamente, es puramente matemática independientemente de la forma en que se realice el diálogo interactivo. De hecho se usarán muchos conceptos de la Geometría Analítica tradicional, convenientemente adaptada a nuestro caso. Aunque el motivo de nuestro estudio es el trabajo en 3D, es aconsejable empezar por las dos dimensiones, ya que muchos de los conceptos no son más que una generalización de la geometría plana, y tampoco hemos de olvidar el hecho de que pese a que estemos representando figuras espaciales, las representamos en un plano.

TRANSFORMACIONES BASICAS EN EL PLANO.

Las transformaciones que vamos a estudiar son: cambios de escala, simetrías, cizalladuras, giros y traslaciones.

Supongamos un punto de coordenadas (X,Y), referido a los ejes de la misma pantalla, considerando el origen de coordenadas el extremo inferior izquierdo del área que consideremos de trabajo, el eje x el que tiene por origen dicho punto y tiene el sentido hacia el extremo inferior derecho de la pantalla, el eje y es el obvio, vertical partiendo del origen. Para manipular estos dos valores numèricos haremos uso de matrices de una fila y dos columnas, o sea que al punto (X,Y) lo consideraremos como la matriz $|X, Y|$.

Veamos el efecto que se produce en la matriz del punto al multiplicarla por otra matriz, cuadrada, de dos por dos elementos, tenemos un nuevo punto cuyas coordenadas cumplirán , siendo Xn e Yn las nuevas coordenadas:

$$|Xn,\ Yn| = |X,\ Y| \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A.X + C.Y,\ B.X + D.Y|$$

veremos a continuaciòn las relaciones entre (X,Y) y (Xn,Yn), segùn sean los valores de los coeficientes de la matriz. Dicha matriz representa, lògicamente, una transformaciòn geomètrica arbitrària.

Si damos a B y C, el valor cero, nos quedarà:

$$Xn = A.\ X$$
$$Yn = D.\ X$$

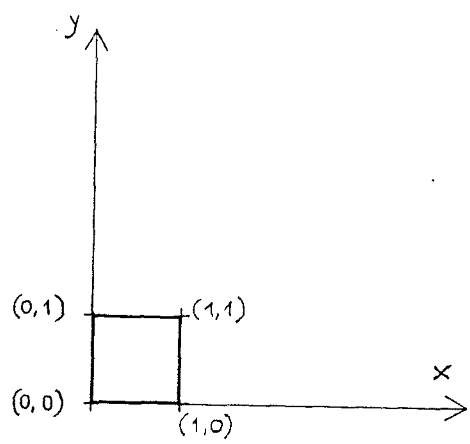
hemos efectuado dos cambios de escala, uno en la direcciòn de cada eje coordenado, considerando A y D distintos. Si A y D son iguales, hemos realizado una homotecia.

Cuando A y D valen la unidad, el nuevo punto coincide con el dado, dando el signo conveniente obtenemos cualquier tipo de simetria plana:

A =-1 -- Simetria respecto al
eje y.
D =-1 -- Simetria respecto al
eje x.
A =D =-1 -- Simetria respecto al
origen.

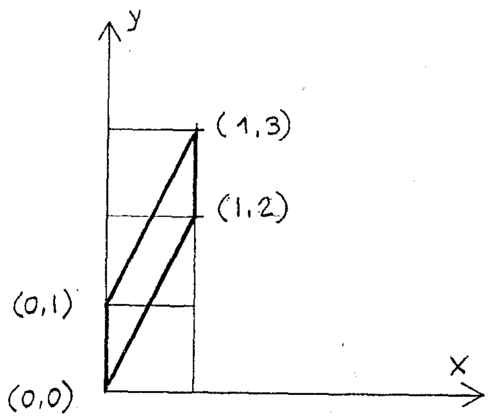
Para las siguientes operaciones, nos hace falta trabajar con figuras planas, que están formadas por una serie de puntos; sus matrices representativas tendrán siempre dos columnas y tantas filas como puntos definan dicha figura.

Sea un cuadrado unitario con un vèrtice en el origen de coordenadas, numerémos sus vèrtices en el sentido contrario a las agujas de un reloj, de forma que el vector normal del plano definido seria un eje z que "saldria" hacia el observador.



la matriz por la que vamos a multiplicar nuestro cuadrado, cumplirà A = D =1, siendo B distinta de cero, por ejemplo 2:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$



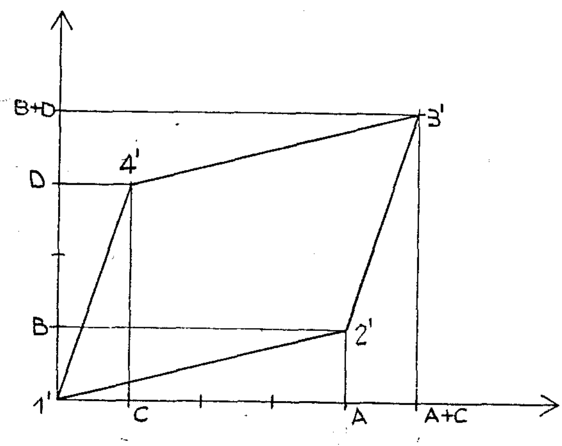
el cuadrado 1-2-3-4, nos ha quedado transformado en el paralelogramo 1'-2'-3'-4', que se obtiene del anterior mediante una cizalladura en la dirección del eje y. Para obtener una cizalladura en la dirección del eje x, basta con mantener A y D, en su valor unitário y dar un valor distinto de cero a C, manteniendo nulo B. Como en el caso de la simetrìa si B y C son ambos distintos de cero, tendremos el caso general de cizalladura.

Algunas propiedades.

Vamos a ver algunas relaciones que pueden deducirse de los valores de los cuatro coeficientes A,B,C y D, de la matriz de una transformación. Para ello volvamos al cuadrado unitario con un vèrtice en el origen de coordenadas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1' \\ A & B & 2' \\ A+C & B+D & 3' \\ C & D & 4' \end{vmatrix}$$

observamos que 2' y 4' tienen justamente los valores que nos definen la transformación (màs adelante veremos la utilidad de esta propiedad).



Veamos ahora cuanto vale el àrea del cuadrilàtero 1'-2'-3'-4', refiriéndonos a la figura anterior, tenemos:

àrea 1'-2'-3'-4'= (A+C).(B+D)- A.B/2-C.D/2-A.B/2-C.D/2-C.B-B.C = A.D-B.C.

expresiòn a la que llegamos descomponiendo el àrea total englobada, (A+C).(B+D), en ella misma, de la que se restan cuatro triàngulos y dos paralelogràmos. Los triàngulos son:

- el que tiene por lados A y B, de àrea A.B/2.

- el que tiene por lados C y D, de àrea C.D/2.

- el que tiene por lados (A+C)-C y (B+D)-D, de àrea A.B/2.

- el que tiene por lados (B+D)-B y (A+C)-A, de àrea C.D/2.

Finalmente, los paralelógramos seràn:

- el que tiene por lados C y (B+D)-B, de àrea C.B.

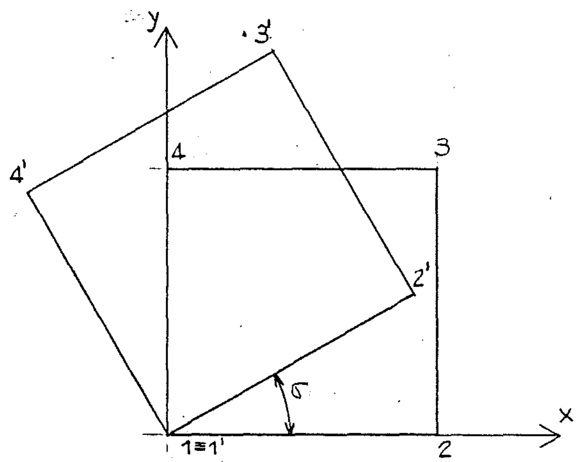
- el que tiene por lados B y (A+C)-C, de àrea B.C.

De donde se infiere que el determinante de la matriz de la transformaciòn, nos da el àrea del paralelogramo transformado del cuadrado unitàrio, con un vertice en el origen de coordenadas. Si tenemos un poligono de àrea S, sabemos que el àrea de su transformado por una matriz de transformación valdrá:

$$S' = S \cdot (A.D - B.C)$$

Giros, traslaciones y coordenadas homogéneas.

Volvamos al desarrollo expuesto más arriba, veamos los valores de los terminos de la matriz de transformación para conseguir que nuestro cuadrado unitário efectue un giro alrededor del origen de coordenadas, para ello supongamos el problema resuelto:



sabemos por la primera de las propiedades antes comentadas, que conociendo las nuevas coordenadas de 2' y 4', podremos saber el valor de los coeficientes de la matriz de la transformación, de la siguiente forma:

$$X_{2'} = A \qquad X_{4'} = C$$
$$Y_{2'} = B \qquad Y_{4'} = D$$

en nuestro caso valdràn:

$$X_{2'} = \cos \sigma \qquad X_{4'} = \operatorname{sen} \sigma$$
$$Y_{2'} = -\operatorname{sen} \sigma \qquad Y_{4'} = \cos \sigma$$

de ahi que la exprexiòn de la matriz de la transformaciòn quede:

$$\begin{vmatrix} \cos \sigma & \operatorname{sen} \sigma \\ -\operatorname{sen} \sigma & \cos \sigma \end{vmatrix}$$

observemos que el valor del determinante de la matriz de giro vale 1 (dado que $\cos^2\sigma+\operatorname{sen}^2\sigma=1$), lo que por otra parte es lògico, ya que un giro no varia el valor del àrea girada, lo que està en consonància con la segunda de las propiedades de las matrices de transformaciòn, que hemos visto en el apartado anterior.

Hasta ahora hemos resuelto todas las operaciones geomètricas que nos proponiamos mediante el uso de las matrices. Si lo que nos proponemos es hacer una traslaciòn, pensemos que esto implica SUMAR a los valores de las coordenadas unas cantidades que nosotros determinamos, por ejemplo si estas cantidades son M y N, queremos obtener:

$$X' = X + M$$
$$Y' = Y + N$$

no existe ninguna operaciòn con nuestra matriz de dos por dos que nos permita realizar dicha adiciòn. Para resolver este problema, y otros conceptos que veremos màs adelante, añadiremos un tercer componente a la matriz que nos define un punto, a este tercer componente, de momento, le daremos el valor de 1.

El haber añadido una columna a la matriz de definición de un punto, nos permite añadir una nueva fila a la matriz de la transformación, veamos si la matriz T cumple las condiciones de producir una traslación:

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ M & N \end{vmatrix}$$

su efecto sobre un punto arbitrario (X,Y) será:

$$|X',Y'| = |X,Y,1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ M & N \end{vmatrix} = |X+M, Y+N|$$

que es el resultado que queriamos, aunque ya vemos que su apariencia no es muy correcta, mientras que a (X,Y) se le añade la columna 1, a (X',Y') no se le hace lo mismo, además al quedar la matriz de la transformación de forma no-cuadrada, nos impedirá hallarle la inversa, cosa que como veremos más adelante nos es muy necesària.

Para resolver ambos problemas añadimos una nueva columna a la matriz T, de forma que la expresión anterior queda más correcta y "simètrica":

$$|X',Y',1| = |X,Y,1| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ M & N & 1 \end{vmatrix} = |X+M, Y+N|$$

Vemos que acabamos de representar un punto del plano, que es una magnitud de 2 dimensiones, mediante 3 valores. Trabajamos con las llamadas Coordenadas Homogèneas. Pensemos que se trata, en general, ,de saber que un objeto en un espacio de n dimensiones, puede perfectamente ser representado en un espacio de n+1 dimensiones. Es, en cierta forma, la operaciòn inversa de lo que ocurre con la acciòn de proyectar donde pasamos de n a n-1 dimensiones. Aunque en este caso, la dimensiòn suplementaria solo intervendrà para jugar el papel de factor de escala. Asi, en el caso màs general de un punto tridimensional (x,y,z), serà representado en coordenadas homogèneas por (sx,sy,sz,s), siendo s el que nos da el valor del factor de escala. Aparte de los motivos que hemos visto en el pàrrafo anterior, existe otra motivaciòn para trabajar con este tipo de coordenadas: las coordenadas homogèneas pueden permitir representar las coordenadas de puntos que de otra manera no podrian ser representados. Supongamos que trabajamos con un ordenador o un programa comercial que no nos permita emplear nùmeros enteros,¿como representariamos el punto (0.44, 0.5, 0.33)?, directamente imposible, pero escogiendo correctamente el valor de s en coordenadas homogèneas, nuestro punto pasarà a valer (44,50,33,100), que ya es un valor correcto en nuestra àrea de trabajo. Imaginemonos, finalmente, que queremos representar un punto, una de cuyas coordenadas vale 327670000, sabiendo que si estamos trabajando con un ordenador de 8 bits, el nùmero màximo que se puede introducir es -32768 o +32768, el uso de las coordenadas homogèneas es la ùnica soluciòn.

Movimientos cualesquiera. Composiciòn.

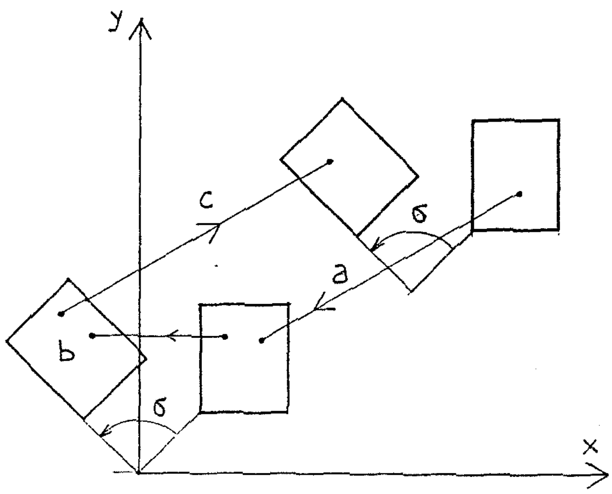
En general, los movimientos a que someteremos los polìgonos de un plano, no seràn simplemente un giro o una traslaciòn, sino una composiciòn de varios de estas transformaciones elementales. Hasta el momento todos las transformaciones las hemos efectuado alrededor del origen de coordenadas, en lo sucesivo, en las composiciones de transformaciones, se harà siempre una traslaciòn que implica trabajar alrededor del origen de coordenadas, y una vez ejecutada la transformaciòn desharemos la traslaciòn, para volver a la posiciòn original.

Vamos a resolver el problema de girar un polìgono alrededor de un punto de coordenadas (Xg, Yg) un àngulo σ. Para ello cada vèrtice del polìgono ha de ser sometido a la matriz del giro, para la obtenciòn de dicha matriz, habremos de efectuar las operaciones comentadas en el pàrrafo anterior:

a.- Trasladar el punto (Xg,Yg) al origen de coordenadas.

b.- Efectuar, conforme a lo que hemos visto hasta ahora, el giro de magnitud σ.

c.- Deshacer la traslaciòn inicial, volviendo del centro de coordenadas al punto (Xg,Yg).



El resultado de estas tres operaciones, serà una matriz que es la que estamos buscando.

La matriz asociada a la operaciòn a, siendo una traslaciòn tendrà la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -M & -N & 1 \end{vmatrix}$$

siendo M y N iguales respectivamente a Xg e Yg.

En el caso de la segunda matriz, no existe ninguna dificultad, dado que es la que hemos comentado anteriormente:

$$\begin{vmatrix} \cos \sigma & \text{sen } \sigma & 0 \\ -\text{sen } \sigma & \cos \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Y, finalmente, nos queda volver a la posiciòn original con una nueva traslaciòn, en sentido contrario a la anterior:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ M & N & 1 \end{vmatrix}$$

Aunque de lo comentado anteriormente, ya se infiere que la operaciòn debe hacer en el orden establecido a-b-c, por si fuera poco, el hecho de que su traducciòn analitica sea un producto matricial nos lo recuerda, dado el caracter no conmutativo, en general, de estos productos.

Como este producto de matrices ha de actuar sobre todos los puntos de la figura plana que queramos girar, lo que normalmente se hace es tener ya realizados estos productos de forma literal, de forma que solo nos haga falta introducir los valores de M, N y σ:

$$\underline{X' = X.\ \cos \sigma - Y.\ \text{sen } \sigma - M.\ \cos \sigma + N.\ \text{sen } \sigma + M}$$
$$\underline{Y' = X.\ \text{sen } \sigma + Y.\ \cos \sigma - M.\ \text{sen } \sigma - N.\ \cos \sigma + N}$$