UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

APORTACIÓN AL ESTUDIO DEL SOFTWARE NECESARIO PARA LA INFORMATIZACIÓN DE LOS MÉTODOS DE APRENDIZAJE DE LAS TÉCNICAS DE EXPRESIÓN GRÁFICA, Y SU POSTERIOR IMPLEMENTACIÓN

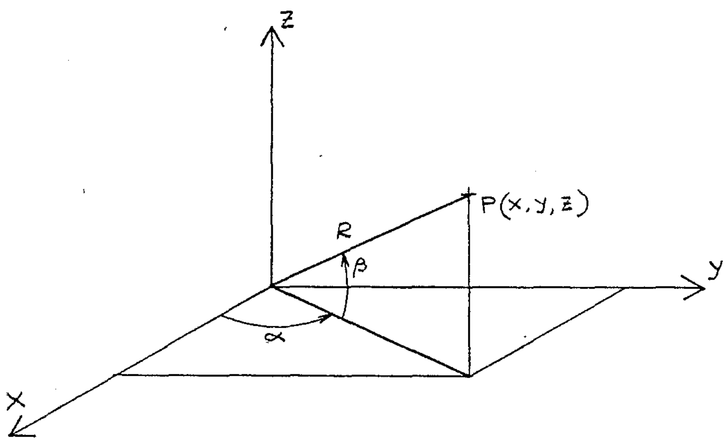
Autor: Miquel Castillo i Ballarda
Director: Jordi Mestres i Sardà

1988

OPERACIONES ANALITICAS BASICAS (3D).

SISTEMAS DE COORDENADAS.

Como ya hemos visto anteriormente usamos unos ejes coordenados "directos", como referencia de los puntos del espacio. Un punto cualquiera puede quedar referido a dichos ejes de dos formas: por coordenadas cartesianas o por coordenadas esfèricas.



Las relaciones entre ambos tipos de coordenadas ya han sido comentadas anteriormente, pero podemos enunciarlas nuevamente:

$$X = R.\ \cos\alpha.\cos\beta$$
$$Y = R.\ \mathrm{sen}\,\alpha.\cos\beta$$
$$Z = R.\ \mathrm{sen}\,\beta$$
$$R^2 = X^2+Y^2+Z^2$$

TRANSFORMACIONES BASICAS EN EL ESPACIO.

Vamos a proceder a un estudio parecido al del Apèndice A, pero trabajando ya directamente con coordenadas homogèneas, o sea que un punto cualquiera del espacio lo notaremos como una matriz $|X,Y,Z,1|$, consecuencia de lo cual, las matrices de transformacion, deberàn ser cuadradas y de cuatro por cuatro.

Anàlogamente a lo visto en el plano, la matriz de cambio de escala tiene forma diagonal , llamàndola T seria:

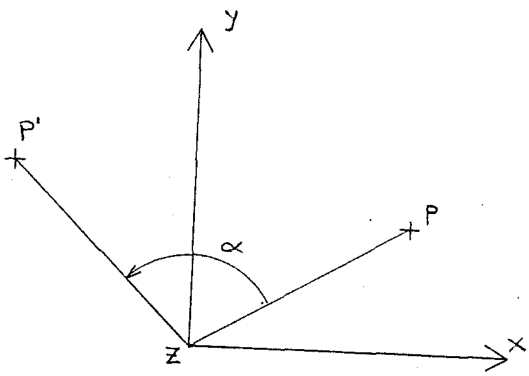
$$\begin{vmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y su efecto sobre un punto cualquiera serà:

$$| \; X \;\; Y \;\; Z \;\; 1| \; . \; T \; = | \; A.X \;\; B.Y \;\; C.Z \;\; 1|$$

En cuanto a los giros, el hecho de encontrarnos en el espacio introduce unas variaciones que no tenian lugar en el Apèndice A: hay que notificar alrededor de que eje se quiere hacer dicho giro.

Situèmonos en el caso màs parecido al plano, con los ejes x e y en la posiciòn habitual y pensando que el origen de coordenadas no es màs que la proyecciòn del eje z sobre el plano x,y, sea A un punto que gira alrededor del eje z:



si estuvieramos trabajando en 2D, la matriz valdria:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

y añadiendole una fila y una columna unitarias de forma que pase a ser de cuatro por cuatro, nos quedará:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

èsta será la matriz de giro alrededor del eje z, en 3D y coordenadas homogèneas. Anàlogamente obtendriamos la que nos da el giro alrededor de x y de y:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \cos\alpha & 0 & -\operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nuevamente se comprueba, además de ser obvio, que el determinante de las matrices de giro vale uno. También es interesante constatar, que el producto de giros no es conmutativo, por no serlo el producto de matrices, luego el orden en que se infieran giros a un cuerpo influye en la posición final de éste.

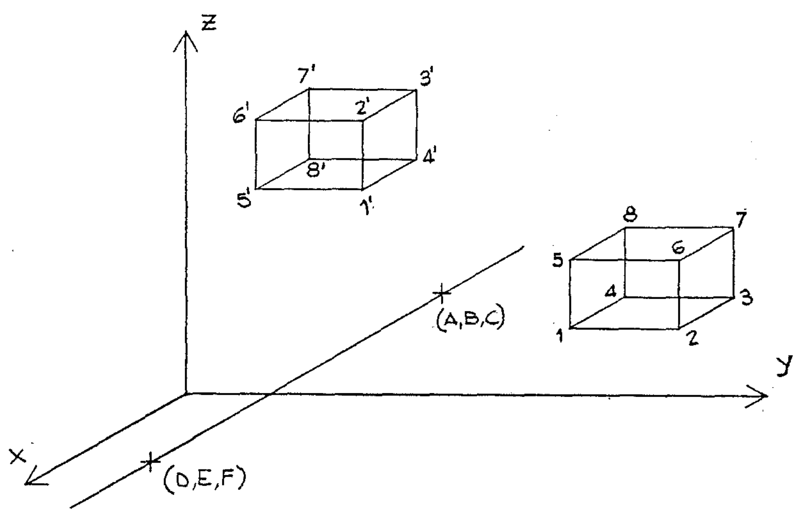
Las matrices de traslación, como extensión de lo dicho para 2D, tienen la forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ M & N & P & 1 \end{vmatrix}$$

Las simetrias tambien son inmediatas teniendo en cuenta que lo único que hay que hacer es cambiar el signo de la coordenada que no es del plano alrededor del cual se hace dicha simetria. Ejemplo: cambiar x por -x cuando hacemos una simetria alrededor del plano yz. De acuerdo con lo anteriormente dicho, las matrices de simetria respecto a xy, xz e yz tienen las expresiones:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Nuevamente el giro alrededor de un eje arbitrario, en un caso sencillo, no es màs que una extensiòn de lo dicho para las transformaciones en 2D. La "traducciòn" directa de lo dicho en el Apèndice A, seria girar una figura alrededor de un eje paralelo a uno de los de referencia un àngulo dado ß, se trataria sencillamente de hacer una traslaciòn del eje dado hasta coincidir con el eje, a continuaciòn realizar el giro, y, finalmente, deshacer la traslaciòn:



al ser el eje paralelo a un eje, el x por ejemplo, aunque dicho eje nos vendrà definido por dos puntos de paso, como es habitual, de hecho lo ùnico que nos interesarà seràn las coordenadas (A,B,C) de uno de ellos, mientras que las coordenadas (D,E,F) del otro solo tienen la misiòn de definir un eje paralelo al de referencia. Haremos que (A,B,C) pasen a valer (0,0,0), como ya vimos en el caso de 2D, las tres matrices que actuaràn en este caso son:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -A & -B & -C & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & \mathrm{sen}\beta & 0 \\ 0 & -\mathrm{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ A & B & C & 1 \end{vmatrix}$$

En el caso general siendo la direcciòn del eje N, que se descompondrà segùn los tres ejes como $N=N_1.i+N_2.j+N_3.k$, siendo i,j,k los versores segùn los tres ejes de referencia, la matriz del giro,G, serà:

$$\begin{vmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{vmatrix}$$

con:

$$\begin{aligned}
G_{11} &= N_1{}^2+(1-N_1{}^2).\cos\beta \\
G_{12} &= N_1N_2(1-\cos\beta)+N_3.\mathrm{sen}\beta \\
G_{13} &= N_1N_3(1-\cos\beta)-N_2.\mathrm{sen}\beta \\
G_{14} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{21} &= N_1N_2(1-\cos\beta)-N_3.\mathrm{sen}\beta \\
G_{22} &= N_2{}^2+(1-N_2{}^2).\cos\beta \\
G_{23} &= N_2N_3(1-\cos\beta)+N_1.\mathrm{sen}\beta \\
G_{24} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{31} &= N_1N_3(1-\cos\beta)+N_2.\mathrm{sen}\beta \\
G_{32} &= N_2N_3(1-\cos\beta)-N_1.\mathrm{sen}\beta \\
G_{33} &= N_3{}^2+(1-N_3{}^2).\cos\beta \\
G_{34} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{41} &= 0 \\
G_{42} &= 0 \\
G_{43} &= 0 \\
G_{44} &= 1
\end{aligned}$$

Apéndice B.

Vemos que podemos obtener los giros alrededor de los ejes x, y o z, sencillamente dando a N el valor i, j o k, así:

giro alrededor de z $N_1 = N_2 = 0$, $N_3 = 1$
giro alrededor de x $N_2 = N_3 = 0$, $N_1 = 1$
giro alrededor de y $N_2 = N_1 = 0$, $N_2 = 1$

<u>Propiedades de las matrices de las transformaciones geométricas</u>.

1) Observemos que, en el caso anterior, hemos sometido un punto a dos traslaciones para dejarlo en la misma posición en que se encontraba; traduciendo dicha operación a forma matricial, tenemos una matriz para una primera traslación, otra para la segunda traslación y la matriz composición-de-ambas-transformaciones. Esta última debe ser una matriz, cuadrada, que aplicada sobre un punto en coordenadas homogéneas, nos dé el mismo punto, la forma de dicha matriz debe ser:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

es la matriz unidad, y el producto de las otras dos la debe tener como resultado, esta propiedad se traduce como que ambas son <u>inversas</u>, hemos llegado a una propiedad matemática a través de una propiedad geométrica, independientemente de como se hallaría la inversa de una matriz por el procedimiento habitual, cuando se trate de encontrar l inversa de una matriz de una traslaciòn, basta co cambiar el signo de M,N y P de la ùltima fila d dicha matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ M & N & P & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -M & -N & -P & 1 \end{vmatrix}$$

Mediante razonamientos parecidos, llegariamos la conclusiòn de que para encontrar la matriz in versa de una de cambio de escala, basta sustitui los elementos A, B y C, por sus inversos 1/A, 1/B 1/C, y en el caso de un giro sustituir ß por -ß.

2) La simple inspecciòn de una matriz general d transformaciòn, nos permite analizar cuales son lo movimientos a que someteràn a un cuerpo en s aplicaciòn.

Podemos dividir la matriz general de una trans formaciòn geomètrica, de 4 x 4, en cuatro distin tas:

$$\begin{vmatrix} 3 \times 3 & \begin{matrix} 3 \\ \times \\ 1 \end{matrix} \\ 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{vmatrix}$$

a.- Una matriz de 3 x 3 en donde vienen englobados los conceptos de escalado, cizalladura y rotación.

b.- Una matriz de 3 x 1, que produce una transformación perspectiva.

c.- Una matriz de 1 x 3, que produce una traslación.

d.- Una matriz de 1 x 1, es un factor de escala.