UNIVERSITAT DE BARCELONA

Sobre la distribución de los valores de una función representada por una serie de Dirichlet lagunar

Ferran Sunyer i Balaguer

Mat

SOBRE LA DISTRIBUCION DE LOS VALORES DE UNA FUNCION REPRESENTADA POR UNA SERIE DE DIRICHLET LAGUNAR

por F. Sunyer Balaguer

Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor en Ciencias Matematicas

SOBRE LA DISTRIBUCIÓN DE LOS VALORES DE UNA FUNCIÓN REPRESENTADA POR UNA SERIE DE DIRICHLET LAGUNAR

por F. Sunyer Balaguer

En una serie de Notas y Memorias [9,10,11,12] (1) el autor de esta demostró que cuando la serie de Taylor, que representa una función entera u holomorfa en el círculo unidad, es suficientemente lagunar, la función toma la totalidad de los valores finitos sin que sea posible la existencia del valor excepcional que, según el teorema de Picard, puede presentar; y tambien desaparece la posibilidad de existencia de otros casos excepcionales en otros campos de la teoria general.

Luego, en otra Memoria [13], extendi los resultados ~~xxxxxxxxxx~~ anteriores referentes a las funciones enteras a las series de Dirichlet. Esta extensión tenia, además del propio, un interes doble: En primer lugar cuando las series de Dirichlet tenian exponentes enteros los ultimos resultados precisaban en cierto sentido los anteriormente obtenidos para las series de Taylor. Y en segundo lugar completaban unos teoremas de Polya y Mandelbrojt sobre las direcciones de Julia.

Como los resultados referentes a las series de Dirichlet solamente eran validos para las funciones enteras y para las series convergentes en la totalidad del plano, evidentemente faltaban los

(1) Los números entre parentesis angulares remiten a la bibliografia del final de la Memoria.

resultados para las funciones holomorfas en un semiplano, correspondientes a los teoremas para las series de Taylor convergentes unicamente en el circulo unidad. Es a llenar este vacio a lo que va dirigida esta Memoria.

En el capítulo I doy algunos resultados de otros autores y alguno de propio que serviran para la demostración de los teoremas objeto de este trabajo.

En el capítulo II enunciaremos tres resultados en forma menos precisa que lo estaban en la Memoria [13]. Estos resultados los daremos sin demostración, y unicamente los he incluido en este trabajo para centrar el tema y para dar una exposición de conjunto de la teoria.

El capítulo III tiene por objeto demostrar dos teoremas que en forma inprecisa pueden enunciarse diciendo que cuando una serie de Dirichlet convergente en un semiplano es suficientemente lagunar (la función supuesta de orden finito) el conjunto de puntos en que esta función toma un valor finito cualquiera (sin excepción) tiene una <u>densidan positiva respecto al orden</u> en la proximidad de cualquier punto del eje de convergencia. El capítulo IV contiene la demostración de un resultado semejante para las funciones de orden infinito.

Creo conveniente señalar que la diferencia entre los resultados que denominamos lemas y los denominados teoremas no se ha establecido basandose en su interes, pues muchos de los que aqui figuran como lemas han aparecido en Memorias propias o de otros autores como teoremas interesantes en si. Unicamente la distinción sirve para indicar que los denominados teoremas forman parte de la teoria objeto de esta Memoria, mientras que los lemas sirven en ella como resultados auxiliares para la demostración de los primeros. En particular los resultados del autor denominados aqui lemas 1.4, 3.5, 3.6, 4.4 y 4.5 me parece tienen un interes independiente de la aplicacion que aqui les damos. Por ejemplo los lemas 3.5 y 3.6 aparecerán en una Memoria de proxima publicación [14] como resultados principales, y los 4.4 y 4.5 pienso publicarlos en otra Memoria en la que estudiaré los productos de Tsuji [15] para el orden infinito y los productos canonicos que construimos en el capítulo IV de esta Memoria.

Las relaciones $f(x) = O(g(x))$ y $f(x) = o(g(x))$ significarán respectivamente como es habitual que $f(x)/g(x)$ queda acotada o tiende a cero. Por lo tanto, las expresiones $O(1)$ y $o(1)$ representarán cantidades acotadas o que tienden a cero respectivamente.

En la mayor parte de esta Memoria, como es costumbre para las series de Dirichlet, la variable independiente será $s = \sigma + it$ y cuando s vaya afectada por algun subindice u otro signo se entenderá, aunque no se indique explicitamente, que σ y t tiene el mismo subindice o signo; por ejemplo siempre se entendera que

$$s_0 = \sigma_0 + it_0, \qquad s_n = \sigma_n + it_n, \qquad s' = \sigma' + it', \quad \text{etc.}$$

Finalmente, no puedo terminar esta introducción sin cumplir el para mi agradable deber de dar las más afectuosas gracias al Profesor Dr. José M. Orts quien ha aceptado figurar como ponente de esta Tesis y de quien tantas atenciones vengo recibiendo.

Capitulo I

1.1.- Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales no negativos tales que

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots \qquad \lim \lambda_n = \infty$$

la condición $0 = \lambda_0$ en lugar de ser restrictiva, da mayor generalidad a los resultados que obtendremos, pues permite suponer en las series de Dirichlet que estudiaremos la posibilidad de existencia del termino constante. Representemos por $N(x)$ el mayor número n tal que $\lambda_n < x$, entonces siguiendo a Mandelbrojt [3] llamaremos al cociente

$$D(x) = N(x)/x$$

función de densidad de la sucesión $\{\lambda_n\}$, y densidad superior a

$$D' = \overline{\lim}\, D(x),$$

Finalmente llamaremos densidad media superior a la expresión

$$\overline{D}^{\bullet} = \overline{\lim} \left(\frac{1}{x} \int_0^x D(t)dt \right).$$

Por otra parte, Polya [7] define la densidad máxima de la misma sucesión $\{\lambda_n\}$ por la expresión

$$D = \lim_{t \to 1} \overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{N(x) - N(tx)}{x - tx}$$

Evidentemente siempre se cumple $D \geq D^{\bullet} \geq \overline{D}^{\bullet}$, y aunque no los necesitaremos creo interesante señalar los siguientes resultados que ya son conocidos, pero que el ultimo raras veces viene explicitamente señalado:

1º Siempre $D^{\bullet} \leq e\bar{D}^{\bullet}$.

2º Por el contrario el cociente $D/D^{\bullet}$ no puede acotarse por una cantidad independiente de la sucesión, e incluso existen sucesiones para las cuales $D^{\bullet} < \infty$ y $D = \infty$. Lo unico que puede afirmarse es que si $D^{\bullet} = 0$, entonces $D = 0$.

Modificando ligeramente la definición de Mandelbrojt [3] debido a la existencia de $\lambda_0 = 0$, escribiremos, suponiendo como siempre en este trabajo que $\bar{D}^{\bullet} < \infty$,

$$(1.1.1) \qquad \Lambda_k(z) = z \prod_{n \neq k} \left(1 + \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) = \sum c_{2n+1} z^{2n+1}$$

$$(1.1.2) \qquad L_k(u) = \int_0^{\infty} \Lambda_k(r) e^{-ur} dr = \sum \frac{(2n+1)!\, c_{2n+1}}{u^{2n+2}}$$

convergente para $u > \pi \bar{D}^{\bullet}$, y

$$(1.1.3) \qquad \Lambda'_k = \prod_{n \neq k} \frac{\lambda_n^2}{\lambda_k \left|\lambda_k^2 - \lambda_n^2\right|}$$

Ahora vamos a demostrar dos lemas que son casos particulares de unos resultados de Mandelbrojt, puesto que estos casos particulares son los que tenemos que utilizar en los capítulos III y IV para demostrar los resultados que nos interesan.

De [3, 3.3.II] se deduce

LEMA 1.1.A.- <u>Si</u>

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \qquad D(x) = O(x^{-\beta}) \qquad (0 < \beta < 1)$$

<u>donde</u> h <u>y</u> β <u>son constantes, se verifican</u>

$$\log \Lambda_k^{\bullet} = O(\lambda_k^{1-\beta})$$

Asimismo de [4, lema VI] se deduce

LEMA 1.1.B.- <u>Si</u>

$$D(x) = O(x^{-\beta}) \qquad (0<\beta<1)$$

<u>donde</u> β <u>es una constante, se verifica</u>

$$\log(uL_k(u)) = O(u^{(\beta-1)/\beta}) \leq cu^{(\beta-1)/\beta}$$

<u>con</u> c <u>constante independiente de</u> k.

1.2.- En este número daremos el enunciado de un resultado conocido por desigualdad fundamental de Mandelbrojt. Nosotros lo daremos unicamente para series de Dirichlet convergentes, pues solamente a series convergentes tenemos que aplicarlo en esta Memoria, ya que si quisieramos enunciarlo en la forma general de Mandelbrojt [3, 3.7.I] tendriamos que dar una serie de definiciones que nos llevarian mucho trabajo y que para nuestro objeto seria inutil. No obstante daremos su demostración que en este caso es relativamente sencilla.

LEMA 1.2.- <u>Si la sucesión</u> $\{\lambda_n\}$ <u>es de densidad media superior</u> $\bar{D}$ <u>finita y si la serie</u>

$$f(s) = \sum d_n e^{-\lambda_n s}$$

<u>converge en un semiplano(o en la totalidad del plano) entonces en cualquier círculo</u>

$$|s - s_0| \leq u > \pi \bar{D}.$$

<u>completamente interior al semiplano de convergencia, existe un punto</u> s' <u>tal que</u>

$$\log|f(s')| > \log|d_k| - \lambda_k \sigma_0 - \log \Lambda_k^{\bullet} - \log(uL_k(u))$$

para todo valor k, donde σ_0 ~~es~~ el la parte real de s_0.

Demostración .- En cualquier círculo completamente interior al semiplano de convergencia, la convergencia será uniforme. Por lo tanto en el círculo

(1.2.1) $$|s - s_0| \leq u > \pi \mathfrak{D}.$$

si escribimos

$$R_m(s) = f(s) - \sum_{0}^{m} d_n e^{-\lambda_n s}$$

para cualquier $\varepsilon > 0$ existirá un $m(\varepsilon)$ tal que para $m > m(\varepsilon)$ se verifica

$$|R_m(s)| < \varepsilon$$

en la totalidad del círculo (1.2.1)

Por otra parte para cualquier función $\Phi(s)$ holomorfa en el círculo (1.2.1) la serie

(1.2.2) $$\Phi^{\bullet}(s) = \sum (-1)^n c_{2n+1} \Phi^{(2n+1)}(s)$$

representará una función holomorfa en el círculo

(1.2.3) $$|s - s_0| \leq \rho < u - \pi \mathfrak{D},$$

puesto que según la formula de Cauchy en todo este círculo se cumplen

$$|\Phi^{(n)}(s)| \leq \frac{Mn!}{(u - \rho)^n}$$

donde M es máximo de el ~~xxxxx~~ $\Phi(s)$ en (1.2.1), y por lo tanto la serie (1.2.2) es uniformemente convergente en (1.2.3). Y en virtud de (1.1.2) tendremos

(1.2.4) $$|\Phi^{\bullet}(s_o)| \leq uL_k(u)M.$$

Por consiguiente tomando en lugar de $\Phi(s)$ la $R_m(s)$ tendremos

(1.2.5) $$|R_m^{\bullet}(s_o)| < uL_k(u)\,\mathcal{E}.$$

Como por otra parte

(1.2.6) $$R_m^{\bullet}(s) = f^{\bullet}(s) - \left(\sum_{0}^{m} d_n e^{-\lambda_n s}\right)^{\bullet}$$

y puesto que cuando $m > k$ se tiene evidentemente

$$\left(\sum_{0}^{m} d_n e^{-\lambda_n s}\right)^{\bullet} = i d_k \Lambda_k(i\,\lambda_k) e^{-\lambda_k s}$$

de (1.2.5) y (1.2.6) resulta

$$|f^{\bullet}(s_o) - i d_k \Lambda_k(i\,\lambda_k) e^{-\lambda_k s_o}| < uL_k(u)\,\mathcal{E}$$

y como quiera que el primer miembro de esta desigualdad es independiente de m, y $\mathcal{E}$ puede ser tan pequeña como se quiera resulta finalmente

$$f^{\bullet}(s_o) = i d_k \Lambda_k(i\,\lambda_k) e^{-\lambda_k s_o}.$$

Por lo tanto, si s' es el punto de (1.2.1) en que el modulo de f(s) toma su máximo valor, tendremos, en virtud de (1.2.4) aplicada ~~xxxxxx~~ a f(s) (en lugar de aplicarla a $\Phi(s)$),

$$|f(s')|\; \Lambda_k^{\bullet} uL_k(u) \geq |d_k| e^{-\lambda_k\, o}$$

o sea

$$\log|f(s')| > \log|a_k| - \lambda_k\, \sigma_0 - \log \Lambda_k^{\bullet} - \log(uL_k(u))$$

que es lo que queriamos demostrar.

1.3.- En este número enunciaremos un resultado de Milloux en su forma más precisa que se obtiene siguiendo el razonamiento de Nevanlinna [6,pag.104-107].

LEMA 1.3.- <u>Si una función</u> $f(s)$ <u>holomorfa en el círculo</u> $|s|\leq R$ <u>verifica, en este mismo círculo, la desigualdad</u>

$$\log|f(s)|\leq M,$$

<u>y si además en una curva continua que partiendo del origen llega hasta la circunferencia</u> $|s|= R$, <u>la función viene acotada por</u>

$$\log|f(s)|\leq m \qquad (m< M)$$

<u>tendremos, en todo círculo</u> $|s|\leq r< R$,

$$\log|f(s)|\leq M - (M - m)\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,sen}\frac{R - r}{R + r}.$$

1.4.- El lema que ahora vamos a enunciar y demostrar podria obtenerse como un corolario de un teorema de Caratheodory, pero nosotros lo demostraremos por otro procedimiento.

Sea S la semifaja $\{\sigma > 0,\ |t|< \pi/2\}$ y S' la $\{\sigma > 0,\ |t|< \pi/4\}$ con estas notaciones se puede demostrar el

LEMA 1.4.- <u>Si en</u> S <u>la función</u> $f(s)$ <u>es holomorfa y sin ceros, y verifica</u>

$$\log|f(s)|< H$$

<u>en la semifaja</u> S' <u>se cumplira, para</u> σ <u>suficientemente proxima a cero</u> ~~en la semifaja S~~

$$\log \frac{1}{|f(s)|} \leq 2(H - \log|f(\log 2)|)\frac{1 + e^{-\sigma}}{1 - e^{-\sigma}} - \log|f(\log 2)|$$

Demostración.- La función de Green del semiplano $\mathcal{R}(w) < H$ (donde $\mathcal{R}(w)$ es la parte real de w) que tiene por polo el punto w_0 viene dada por la expresión

$$g(w, w_0, H) = \log\left|\frac{w - 2H + \bar{w}_0}{w - w_0}\right|$$

donde $\bar{w}_0$ representa el conjugado de w_0.

Efectuemos la represntación conforme de la semifaja S sobre el círculo $|z| < 1$, de modo que el punto $s_0 = \log 2$ corresponda al punto $z=0$. Siguiendo un razonamiento utilizado por Milloux [5, pag. 292-294] puede demostrarse que la curva que corresponde a $|z| = r$ contiene en su interior, para r suficientemente proxima a 1, la parte de S^* que verifica

$$\log \frac{1 - r}{2} \leq -\sigma \leq \log(1 - 2(1 - r))$$

Por lo tanto los puntos de S^* para los cuales σ es suficientemente proxima a cero, cumplen la desigualdad

$$g(s, s_0, S) \geq \log \frac{2}{1 + e^{-\sigma}}$$

donde $s_0 = \log 2$ según hemos dicho, y donde $g(s, s_0, S)$ es la función de Green de la semifaja S que tiene por polo el punto s_0.

Según el principio de Lindelöff (vease por ejemplo Nevanlinna [6, pag. 46]) si $f(s)$ es una función holomorfa y sin ceros en S tal que en esta misma semifaja $\log|f(s)| < H$, tendremos

$$g(\log f(s), \log f(s_0), H) \geq g(s, s_0, S)$$

y por lo tanto, en los puntos de S^* para los cuales σ es suficientemente proxima a cero, se cumple

$$\log \frac{1}{|f(s)|} \leq 2(H - \log|f(s_o)|)\frac{1 + e^{-\sigma}}{1 - e^{-\sigma}} - \log|f(s_o)|,$$

o sea la conclusión del lema.

Capitulo II

2.1.- Según hemos indicado en la introducción, en este capítulo solamente enunciaremos tres teoremas que demostramos en una de nuestras Memorias anteriores [13] a fin de centrar los tres teoremas objeto de los capítulos siguientes dentro de la teoria general.

Antes de dar los enunciados debemos dar algunas definiciones. Me interesa señalar pero, que a fin de no complicar demasiado estas definiciones, los enunciados de los tres teoremas de este capítulo serán dados en una forma menos general que la que figura en la Memoria antes citada.

Sea f(s) una función entera que tenga las siguientes propiedad

$$\sup_{-\infty<t<+\infty} |f(\sigma+ it)| = M(\sigma, f)<\infty$$

para cualquier valor real de σ(en particular toda función representada por una serie de Dirichlet absolutamente convergente en la totalidad del plano, tendrá esta propiedad). Para esta clase de funciones Ritt [8] define el orden (que por este motivo se llama habitualmente orden (R)) de la siguiente forma: La función f(s) es de orden (R) igual a ρ si

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\log \log M(\sigma,f)}{-\sigma} = \rho.$$

De modo semejante representando por Φ la faja horizontal (como en todo el trabajo las fajas y semifajas seran siempre horizontales en lo sucesivo suprimiremos la palabra horizontal que se sobreentendera)

$$\alpha_1 < t < \alpha_2$$

y poniendo

$$M(\sigma, \Phi, f) = \operatorname*{Sup}_{\alpha_1 < t < \alpha_2} |f(\sigma + it)|$$

el orden (R) de f(s) en la faja Φ vendra definido por

$$\rho = \overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\overset{+}{\log} \overset{+}{\log} M(\sigma, \Phi, f)}{-\sigma}$$

Del mismo modo que la teoria de las funciones enteras representadas por series de Taylor, y de modo parecido al que nosotros usamos en el capítulo siguiente para los órdenes de las funciones holomorfas en un semiplano, cuando $\rho < \infty$ se puede precisar la noción de orden del siguiente modo: La función $\rho(\sigma)$ será llamada un orden (R) precisado, si

$$\lim \rho(\sigma) = \rho, \qquad \lim \rho'(\sigma)\sigma = 0,$$

y entonces la función f(s) será de tipo A del orden (R) precisado $\rho(\sigma)$ si

$$\overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\log M(\sigma, f)}{e^{-\rho(\sigma)\sigma}} = A$$

e igualmente la función f(s) será en Φ de tipo A del orden (R) precisado $\rho(\sigma)$ si

$$\overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\log M(\sigma, \Phi, f)}{e^{-\rho(\sigma)\sigma}} = A$$

Como en el transcurso de esta Memoria solo nos ocuparemos de órdenes (R), en lo sucesivo suprimiremos la (R) y los llamaremos simplemente órdenes.

Finalmente, la notación $n(x,\Phi,f)$ representará en este capítulo el número de ceros contenidos en la parte $0 \geq \sigma \geq x$ de Φ.

TEOREMA I.- Sea $f(s)$ una función entera que puede representarse por una serie de Dirichlet

$$\equiv \sum d_n e^{-\lambda_n s}$$

convergente ([1]) en todo el plano y que es de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(\sigma)$. Dada una faja Φ de anchura $> \pi/\rho$, es suficiente que la sucesión $\{\lambda_n\}$ de densidad máxima D verifique

$$D < \Delta_1, \qquad \underline{\lim}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0,$$

donde Δ_1 depende unicamente de ρ y Φ, para que cualquiera que sea el valor finito de a (sin excepción) sea satisfecha

$$\overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{n(\sigma, \Phi, f-a)}{e^{-\rho(\sigma)\sigma}} > B_1$$

donde B_1 depende unicamente de ρ y Φ.

Si en lugar de la densidad máxima se considera la densidad media superior, es posible enunciar y demostrar el siguiente:

TEOREMA II.- Sea $f(s)$ una función entera que puede representarse por una serie de Dirichlet

$$\sum d_n e^{-\lambda_n s}$$

([1]) Puesto que en todo este trabajo se supone $D^* < \infty$ las abscisas de convergencia y convergencia absoluta coinciden.

convergente en todo el plano y que es de orden ρ y de tipo 1 del orden precisado $\rho(\sigma)$. Dada una faja Φ de anchura $>\pi/\rho$, es suficiente que la sucesión $\{\lambda_n\}$ de densidad media superior $\overline{D}^{\bullet}$, verifique

$$\overline{D}^{\bullet}<\Delta_2 \qquad \underline{\lim}(\lambda_{n+1}-\lambda_n) = h>0,$$

donde Δ_2 depende unicamente de ρ, h y Φ, ~~pa~~ para que cualquiera que sea el valor finito a (sin excepción) sea satisfecha

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{n(\sigma,\Phi,f-a)}{e^{-\rho(\sigma)\sigma}} > B_2$$

donde B_2 depende unicamente de ρ, h y Φ.

2.2.- Cuando la función es de orden infinito, es decir cuando

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\log\log M(\sigma,f)}{-\sigma} = \rho = \infty$$

es posible hallar una función no creciente $W(\sigma)$ tal que

$$W\left(\sigma-\frac{1}{\log W(\sigma)}\right)<|W(\sigma)|^{1+o(1)}$$

$$\overline{\lim_{\sigma\to-\infty}} \frac{\log\log M(\sigma,f)}{\log W(\sigma)} = 1$$

y entonces el cociente

$$\rho(\sigma) = \frac{\log W(\sigma)}{-\sigma}$$

se llama orden de la función f(s) de orden infinito. La demostracion de la existencia de estos ordenes puede verse en |-13| y sigue un curso casi igual a la que daremos al principio del capítulo IV ~~pxx~~ para los órdenes de las funciones holomorfas en $\sigma>0$, y que en este mismo semiplano son de orden infinito. Con esta definición puede enunciarse:

TEOREMA III.- Sea f(s) una función entera que puede representarse por una serie de Dirichlet

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

convergente en todo el plano y que es de orden infinito $\rho(\sigma)$. Si la $\{\lambda_n\}$ verifica

$$\underline{\lim}(\lambda_{n+1} - \lambda_n) > 0, \qquad D(\lambda) = O(\lambda^{-\beta}) \qquad (0 < \beta < 1)$$

entonces cualesquiera que sean la faja Φ y el valor finito a (sin excepción) resulta

$$\overline{\lim_{\sigma \to -\infty}} \frac{\log n(\sigma, \Phi, f-a)}{\log W(\sigma)} = 1.$$

Capitulo III

3.1.- Sea f(s) una función representada por una serie de Dirichlet

$$\sum d_n e^{-\lambda_n s}$$

convergente en el semiplano $\sigma > 0$; puesto que en todo este trabajo suponemos que la densidad media superior de $\{\lambda_n\}$ verifica $\overline{D}^* < \infty$, y que por lo tanto tambien se cumple $D^* < \infty$, en virtud del resultado que hemos recordado en una Nota al pie de pagina del capítulo anterior, el semiplano de convergencia será de convergencia absoluta. Por consiguiente, para todo valor de $\sigma > 0$ existirá

$$M(\sigma, f) = \sup_{-\infty < t < +\infty} |f(\sigma + it)|.$$

Entonces comparando la definición del orden de Ritt para las funciones enteras representadas por series de Dirichlet [8] con la definición corriente para las funciones holomorfas en el círculo unidad, resulta natural definir el orden de Ritt de la función f(s) en el semiplano $\sigma > 0$ por la expresión

$$\rho = \overline{\lim_{\sigma \to 0}} \frac{\overset{+}{\log} \overset{+}{\log} M(\sigma, f)}{\log(1/\sigma)} \qquad (1)$$

Cuando $\rho < \infty$ diremos que la función es de orden finito en el semiplano $\sigma > 0$; mientras que si $\rho = \infty$ la función correspondiente se-

(1) Evidentemente en lugar de $\log(1/\sigma)$ podria escribirse $-\log \sigma$, pero por diversas razones prefiero lo primero.

rá de orden infinito en el mismo semiplano.

3.2.- Cuando f(s) es de orden finito se puede demostrar facilmente que tambien en el caso que estamos estudiando existe un orden que puede llamarse orden precisado $\rho(\sigma)$ con las siguientes propiedades:

(3.2.1) $$\lim_{\sigma\to 0}\rho(\sigma)=\rho, \qquad \lim_{\sigma\to 0}(\sigma\rho'(\sigma)\log(1/\sigma))=0,$$

(3.2.2) $$\lim_{\sigma\to 0}[\rho(\sigma)\log(1/\sigma)-\rho(k\sigma)\log(1/k\sigma)]=\rho\log k,$$

(3.2.3) $$\overset{+}{\log} M(\sigma,f)\leq(1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$$

y finalmente que para una sucesión infinita de valores de σ que tienda a cero, se cumple el signo de igualdad en (3.2.3).

En efecto, pueden presentarse dos casos:

a) existen una sucesión $\{\sigma_i\}$ de valores de σ tales que $\lim \sigma_i=0$ y que

$$\frac{\log\log M(\sigma_i,f)}{\log(1/\sigma_i)}\geq\rho$$

y

b) existe un valor σ_0 tal que para $0<\sigma<\sigma_0$

$$\frac{\log\log M(\sigma,f)}{\log(1/\sigma)}<\rho$$

En el caso a) escribiremos

(3.2.4) $$h(\sigma)=\max_{0<\sigma'\leq\sigma}\frac{\log\log M(\sigma',f)}{\log(1/\sigma')}$$

y

(3.2.5) $$\rho(\sigma) = \max_{\sigma'\geq\sigma} [h(\sigma') + \log_3(1/\sigma') - \log_3(1/\sigma)]$$

donde $\log_3 x=\log\log\log x$. Entonces dadas las propiedades de $M(\sigma,f)$ (vease por ejemplo Ritt|8|) resulta de (3.2.4) y (3.2.5) que $\rho(\sigma)$ es continua, no decreciente y que $\lim\rho(\sigma)=\rho$. Por otra parte, resulta tambien rapidamente que

$$\log M(\sigma,f)\leq(1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$$

y que existe una sucesión que tiende a cero que satisface al signo de igualdad en esta ultima formula.

Finalmente de (3.2.5) resulta tambien facilmente

$$\rho(\sigma') - \rho(\sigma)\leq\log_3(1/\sigma) - \log_3(1/\sigma') \qquad (\sigma<\sigma')$$

y por lo tanto

$$0\leq\rho'(\sigma)\leq\frac{1}{\sigma\log(1/\sigma)\log_2(1/\sigma)}$$

y

$$\rho(\sigma)\log(1/\sigma) - \rho(k\sigma)\log(1/k\sigma)\leq\log(1/\sigma)(\log_3(1/k\sigma) - \log_3(1/\sigma))+$$
$$+\rho(k\sigma)\log k,$$

y de todo esto se deduce

$$\lim(\sigma\rho'(\sigma)\log(1/\sigma)) = 0$$

$$\overline{\lim}|\rho(\sigma)\log(1/\sigma) - \rho(k\sigma)\log(1/k\sigma)| = \rho\log k.$$

En el caso b) escribiremos

$$h(\sigma) = \max_{\sigma' \geq \sigma} \frac{\log \log M(\sigma', f)}{\log(1/\sigma')}$$

y

$$\rho(\sigma) = \max_{0<\sigma' \leq \sigma} [h(\sigma') + \log_3(1/\sigma) - \log_3(1/\sigma')]$$

y por razonamientos semejantes a los del caso a) se deduce asimismo que el orden precisado $\rho(\sigma)$ tiene las propiedades señaladas al principio de este número.

3.3.- Sea $\mu(\sigma)$ el módulo del termino máximo de la serie

$$f(s) = \sum d_n e^{-\lambda_n s}$$

y $\lambda(\sigma)$ el exponente máximo que corresponde a $\mu(\sigma)$, o sea

$$\mu(\sigma) = \max_{n \geq 0} |d_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

y

$$\lambda(\sigma) = \max \lambda_n \quad \text{cuando} \quad |d_n| e^{-\lambda_n \sigma} = \mu(\sigma)$$

Entonces puede demostrarse el siguiente:

LEMA 3.3.- <u>Sea</u> f(s) <u>una función holomorfa en el semiplano</u> $\sigma > 0$ <u>y representable en elmismo por una serie de Dirichlet</u>

$$\sum d_n e^{-\lambda_n s}$$

<u>convergente para</u> $\sigma > 0$ <u>y cuyos exponentes verifican la condición</u>

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0.$$

<u>Si en</u> $\sigma > 0$ <u>la función es de orden</u> $\rho > 0$ <u>y de orden precisado</u> $\rho(\sigma)$,

tendremos

$$\lambda(\sigma) \leq (1 + o(1))2^{\rho+1}(1/\sigma)^{\rho(\sigma)+1}$$

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0}} \frac{\log \mu(\sigma)}{\log M(\sigma,f)} = \overline{\lim_{\sigma\to 0}} \frac{\log \mu(\sigma)}{(1/\sigma)^{\rho(\sigma)}} = 1.$$

Demostración.- En primer lugar resulta casi evidente la validez de las relaciones

$$\log \mu(\sigma) = \log \mu(\sigma_0) - \int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda(x)dx \leq \log M(\sigma,f) \leq (1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$$

la ultima desigualdad ~~xx~~ sigue de la definición del orden precisado. Puesto que suponemos $\rho > 0$, la expresión $(1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$ crece infinitamente cuando $\sigma \to 0$, de modo monotono a partir de un valor de σ, por lo tanto

$$-\int_{\sigma_0}^{\sigma} \lambda(x)dx = \int_{\sigma}^{\sigma_0} \lambda(x)dx \leq (1 + o(1))(1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$$

y como $\lambda(\sigma)$ es una función no creciente para $\sigma > 0$, resulta

$$\lambda(\sigma)\,\sigma/2 \leq (1 + o(1))(2/\sigma)^{\rho(\sigma/2)}$$

y teniendo en cuenta (3.2.2) se sigue

$$\lambda(\sigma) \leq (1 + o(1))2^{\rho+1}(1/\sigma)^{\rho(\sigma)+1}$$

Por otra parte, de la condición $\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h$ se deduce $n < \lambda_n/h$. Sea $\sigma_1 < \sigma$ un valor que determinaremos posteriormente, y definamos n_1 por igualdad $\lambda_{n_1} = \lambda(\sigma_1)$, entonces son evidentes las desigualdades

$$M(\sigma,f) \leq \sum_0^{\infty} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} \leq (n_1 + 1)\mu(\sigma) + \sum_{n>n_1} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}$$

de todo lo cual se deduce

$$(3.3.1) \quad M(\sigma,f) \leq \mu(\sigma)\left(\frac{\lambda(\sigma_1)}{h} + 1 + \sum_{n>n_1} e^{-h(n-n_1)(\sigma-\sigma_1)}\right) \leq$$

$$\leq \mu(\sigma)\left(\frac{\lambda(\sigma_1)}{h} + 1 + \frac{1+o(1)}{h(\sigma-\sigma_1)}\right)$$

Para el caso del orden finito que estamos considerando σ_1 puede determinarse por $\sigma_1 = \sigma/2$ y entonces de las desigualdades (3.3.1)

$$M(\sigma,f) \leq \mu(\sigma) O((1/\sigma)^{\rho(\sigma)+1})$$

Por lo tanto en los puntos donde

$$\log M(\sigma,f) = (1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$$

tendremos, puesto que $\rho > 0$,

$$(3.3.2) \qquad \log \mu(\sigma) = (1 - o(1)) \log M(\sigma,f) = (1 - o(1))(1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$$

y como quiera que siempre

$$\log \mu(\sigma) \leq \log M(\sigma,f) \leq (1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$$

las (3.3.2) demuestran la segunda afirmación del lema.

3.4.- Si representamos por Δ la semifaja $\{\sigma > 0, \ |t| < \delta\}$ y si en la definición de orden y de orden precisado sustituimos $M(\sigma,f)$ por

$$M(\sigma,\Delta,f) = \sup_{|t|<\delta} |f(\sigma + it)|$$

queda definido el orden y el orden precisado en una semifaja cualquiera Δ.

Con estas definiciones y teniendo en cuenta las propiedades del orden precisado, el lema 1.4 permite demostrar facilmente el siguiente

LEMA [redacted] 3.4.- <u>Sea</u> f(s) <u>una función holomorfa y sin ceros en</u>

la semifaja $S = \{\sigma > 0, |t| < \pi/2\}$ y de orden $\rho > 0$ y orden precisado $\rho(\sigma)$ en esta misma semifaja. Entonces la función $1/f(s)$ será de orden $\leq \rho + 1$ en la semifaja $S' = \{\sigma > 0, |t| < \pi/4\}$ y en la misma cumplirá

$$\log \frac{1}{|f(s)|} \leq C(1/\sigma)^{\rho(\sigma)+1}$$

donde C es una constante numerica

Este lema también puede enunciarse en otra forma que en algunas aplicaciones resulta más comoda.

LEMA 3.4_1.- Sea $f(s)$ una función holomorfa y sin ceros en la semifaja ~~Sx~~ S, y que en la S' es de orden $\rho > 1$ y de orden precisado $\rho(\sigma)$. entonces la función $1/f(s)$ será de orden $\geq \rho - 1$ en la S y en misma se cumplirá

$$\overline{\lim_{\sigma \to 0}} \frac{\log M(\sigma, S, 1/f)}{(1/\sigma)^{\rho(\sigma)-1}} > 0.$$

Demostración.- Unicamente demostraremos la forma del lema 3.4 pues la 3.4_1 sigue de la anterior.

Si en la semifaja S la función es de orden $\rho > 0$ y de orden precisado $\rho(\sigma)$, ello quiere decir que existe un σ_0 tal que para $0 < \sigma_1 < \sigma_0$

$$\log|f(s_1)| \leq (1/\sigma_1)^{\rho(\sigma_1)} \qquad (s_1 \in S),$$

Por lo tanto aplicando el lema 1.4 a $f(s)$ y a la semifaja $\{\sigma > \sigma_1, |t| < \pi/2\}$ (cosa que siempre será posible para σ_1 suficientemente pequeña, pues $(1/\sigma)^{\rho(\sigma)}$ crece infinitamente cuando $\sigma \to 0$)

$$\log \frac{1}{|f(s)|} \leq 2\left| (1/\sigma_1)^{\rho(\sigma_1)} - \log|f(\log 2 - \sigma_1)| \right| \frac{1 + e^{\sigma_1 - \sigma}}{1 - e^{\sigma_1 - \sigma}} -$$

$$- \log|f(\log 2 - \sigma_1)|$$

con la condición de que $s \in \{\sigma > \sigma_1,\ |t| < \pi/4\}$. Ahora si elegimos $\sigma_1 = \sigma/2$, la desigualdad anterior nos dará inmediatamente, teniendo en cuenta las propiedades de los órdenes precisados

$$\log \frac{1}{|f(s)|} \leq C(1/\sigma)^{\rho(\sigma)+1}$$

para $s \in S'$.

3.5.- ~~xxxx~~ Sea $\{c_n = a_n + ib_n\}$ la sucesión de los ceros de f(s) interiores a la semifaja $S_o = \{\sigma > 0,\ |t| < \pi\}$. Dado que en esta Memoria suponemos que f(s) viene representada por una serie de Dirichlet absolutamente convergente en el semiplano $\sigma > 0$, es evidente que la sucesión $\{c_n\}$ tiene todos sus puntos de acomulación sobre el segmento $\{\sigma = 0,\ |t| \leq \pi\}$. Definamos n(x) como el número de puntos c_n tales que $a_n > x$, y supongamos que

$$\overline{\lim_{x \to o}} \frac{\log n(x)}{\log(1/x)} \leq \theta + 1 \qquad (\theta < \infty)$$

De esto puede deducirse la existencia de una función $\rho_1(x)$ monotona y tal que

$$\lim_{x \to o} \rho_1(x) = \rho_1 \leq \theta + 1 \tag{3.5.1}$$

$$\lim_{x \to o} (x\rho_1'(x)\log(1/x)) = 0 \tag{3.5.2}$$

$$n(x) \leq (1/x)^{\rho_1(x)} \tag{3.5.3}$$

el signo de igualdad siendo válido en una sucesión de valores de x que tiende a cero.

Entonces si p es un entero positivo $> \theta$ y

$$E_p(u) = (1 - u)\exp(u +\dots+ \frac{u^p}{p})$$

representa el factor primario de Weierstrass se puede construir el siguiente producto canonico

$$Q(s) = \prod_{0}^{\infty} E_p\left(\frac{2a_n}{s + \bar{c}_n}\right)$$

que sera una función holomorfa en $\sigma > 0$.

Para probar esta posibilidad basta demostrar que el producto del segundo mienbro ~~xxx~~ de la anterior igualdad es uniformemente convergente en cualquier recinto cerrado interior a un semiplano $\sigma > 0$, y para ello es suficiente ver que

$$\sum a_n^{p+1} < \infty$$

que tambien puede escribirse

$$\int_{\infty}^{0} x^{p+1} dn(x) < \infty$$

Integrando por partes, y teniendo en cuenta que en virtud de (3.5.1), (3.5.3) y de $p > \theta$, resulta que $\lim(x^{p+1}n(x)) = 0$, se sigue que basta demostrar que

$$\int_{0}^{\infty} x^p n(x)\,dx < \infty .$$

y puesto que según las definiciones anteriores existe un x_0 tal que para $0 < x < x_0$ se cumple $\rho_1(x) < p - \eta + 1$; y un x_1 tal que si $x > x_1$ se verifica $n(x) = 0$, es suficiente demostrar que

$$\int_{0}^{x_0} x^{\eta - 1} dx < \infty ,$$

lo cual es evidente.

Una vez demostrado que Q(s) es holomorfa en $\sigma > 0$, vamos a enunciar y a demostrar:

LEMA 3.5.- <u>Si</u> $\rho_1(x)$ <u>tiene las propiedades señaladas en</u> (3.5.1), (3.5.2) <u>y</u> (3.5.3), <u>y si</u> $p > \theta$, <u>entonces</u>

$$\log|Q(s)| = O((1/\sigma)^{\rho_1(\sigma)})$$

<u>para</u> $s \in S_0$.

Demostración.- Según la definición de Q(s) y puesto que (vease por ejemplo Valiron [16])

$$\log|E_p(u)| \leq h\frac{|u|^{p+1}}{1 + |u|}$$

donde h es una constante que depende unicamente de p, tendremos

$$(3.5.4)\quad \begin{cases} \log|Q(s)| \leq \displaystyle\int_{\infty}^{0} h\left(\frac{2x}{\sigma + x}\right)^{p+1} dn(x) \leq \\ \leq h2^{p+1}\left(n(\sigma) + \displaystyle\int_{\sigma}^{0}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{p+1} dn(x)\right) \leq \\ \leq h2^{p+1}(p + 1)(1/\sigma)^{p+1}\displaystyle\int_{0}^{\sigma} x^p n(x)dx, \end{cases}$$

la ultima desigualdad se obtiene mediante una integración por partes y teniendo en cuente que $\lim x^{p+1}n(x) = 0$.

Supongamos ahora que σ es suficientemente proxima a cero para que, cuando $0 < x < \sigma$,

$$p+1-\rho_1(x)-x\rho_1'(x)\log x > \frac{p - \theta}{2}$$

Entonces tendremos

$$\int_0^{\sigma} x^p n(x)dx \leq \int_0^{\sigma} x^{p-\rho_1(x)}dx \leq$$

$$\leq \frac{2}{p-\theta}\int_0^{\sigma}(p+1-\rho_1(x)-x\rho_1'(x)\log x)x^{p-\rho_1(x)}dx = \frac{2x^{p+1-\rho_1(x)}}{p-\theta}$$

De esto y de las (3.5.4) resulta finalmente

$$\log|Q(s)| \leq \frac{h2^{p+2}(p+1)}{p-\theta}\,(1/\sigma)^{\rho_1(\sigma)}$$

o sea la afirmación del lema.

3.6.- El lema que sigue dará una acotación inferior para Q(s). Naturalmente esta acotación será únicamente válida al exterior de unos pequeños círculos centrados en los c_n.

LEMA 3.6.- <u>Al exterior de los pequeños círculos</u> $\{|s-c_n| \leq \leq (2a_n)^{\theta+4}\}$ <u>y con las mismas condiciones que en el lema</u> 3.5, <u>se verifica</u>

$$\log\frac{1}{|Q(s)|} = O\left((1/\sigma)^{\rho_1(\sigma)}\log(1/\sigma)\right)$$

<u>para</u> $s \in S_0$.

Demostración.- Evidentemente

$$\log\frac{1}{|Q(s)|} = -\sum\log\left|E_p\left(\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right)\right| \leq$$

$$\leq -\sum\nolimits_{(1)}\log\left|E_p\left(\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right)\right| + \sum\nolimits_{(2)}\left|\log\left|E_p\left(\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right)\right|\right|,$$

donde $\sum_{(1)}$ se extiende a todos los valores de n tales que

$$\left|\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right| \geqslant 1/2$$

y $\sum_{(2)}$ a los

$$\left|\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right| < 1/2$$

Aplicando el desarrolllo en serie de Taylor a $\log(1 - u)$, cuando $|u| < 1/2$, podremos escribir

$$|\log|E_p(u)|| < 2|u|^{p+1},$$

y por lo tanto,

$$(3.6.1) \qquad \sum_{(2)}\left|\log\left|E_p\left(\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right)\right|\right| = O\left(\sum_{(2)}\left|\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right|^{p+1}\right)$$

Por otra parte podremos escribir en $\sum_{(1)}$

$$(3.6.2) \qquad -\log\left|E_p\left(\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right)\right| \leq \log\left|\frac{s+\bar{c}_n}{s-c_n}\right| + K\left|\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right|^{p+1}$$

donde K puede tomarse independiente de n y de s.

Al exterior de los pequeños círculos $\{|s - c_n| \leq (2a_n)^{\rho+4}\}$ se verificará

$$(3.6.3) \qquad \log\left|\frac{s+\bar{c}_n}{s-c_n}\right| < K_1(1 + \log(1/\sigma))$$

donde K_1 también es independiente de n y de s.

Teniendo en cuenta que cuando $\sigma \to 0$ los segundos miembros de (3.6.2) y de (3.6.3) son superiores a una constantes positivas, su producto multiplicado por una cierta constante finita es mayor que su suma. y por lo tanto, de (3.6.1), (3.6.2) y (3.6.3) se sigue

$$\text{(3.6.4)} \qquad \log \frac{1}{|Q(s)|} = O\left(\sum \left| \frac{2a_n}{s+\bar{c}_n} \right|^{p+1} \log(1/\sigma) \right),$$

y como, según vimos en la demostración del lema 3.5,

$$\sum \left| \frac{2a_n}{s+\bar{c}_n} \right|^{p+1} = O((1/\sigma)^{\rho_1(\sigma)}),$$

de (3.6.4) sigue la afirmación del lema 3.6 que queríamos demostrar.

3.7.- Finalmente, antes de demostrar los dos teoremas objeto de este capítulo vamos a demostrar un lema que nos será muy util para determinar el crecimiento de $|f(s)/Q(s)|$ en una semifaja interior a la S_0, conociendo el orden de $f(s)$ en S_0 y la función $\rho_1(x)$ correspondiente a la sucesión $\{c_n\}$ de los ceros de $f(s)$ interiores a S_0 con los cuales suponemos formado $Q(s)$.

LEMA 3.7.- <u>Para cualquier punto</u> $s_0 = \sigma_0 + it_0$ (<u>con</u> σ_0 <u>suficientemente pequeña) perteneciente a una semifaja</u> $S_1 = \{\sigma > 0,\ |t| < \varphi_1\}$, <u>donde</u> $\varphi_1 < \pi$, <u>puede formarse un rectangulo de lados paralelos a los ejes con las siguientes propiedades:</u>

1º <u>Contiene el punto</u> s_0 <u>en su interior</u>

2º <u>Los lados no penetran en el interior de los círculos</u> $\{|s-c_n| \leq (2a_n)^{\sigma+4}\}$

3º <u>La longitud b de los lados horizontales satisface a</u> $b = o(\sigma_0^2)$.

Demostración.- La suma de los diámetros de los círculos cuyos centros tienen una abscisa inferior a x es igual a

$$2\int_x^{0} x^{\theta+4}dn(x) \leq 2(\theta+4)\int_0^x x^{\theta+3}n(x)dx = O\left(\int_0^x x^{2-\varepsilon}dx\right) = o(x^2).$$

De esta acotación de la suma de los diámetros se sigue facilmente el enunciado del lema 3.7.

3.8.- El resultado que vamos a obtener es menos preciso por tres conceptos que el que daremos en el número siguiente. Por lo tanto, a primera vista parece que es absurdo establecerlo; pero no lo parecerá si se tiene en cuenta que la demostración del primero sigue el mismo curso que la demostración del resultado que daremos para las funciones de orden infinito en el capítulo siguiente, mientras que el método que nos permite obtener del resultado más preciso no hemos podido aplicarlo al orden infinito Por consiguiente, la demostración de este primer teorema ~~xxx~~ permitirá una comprensión más facil y rapida de la demostración del resultado del capítulo siguiente. Además la demostración del teorema IV, que demostraremos seguidamente es mucho más facil que la del teorema V a pesar de que parezca lo contrario, pues esta ultima la daremos solamente esquematicamente.

TEOREMA IV.- Sea $f(s)$ una función holomorfa en el semiplano $\sigma > 0$ de orden $\rho > 1$ y de orden precisado $\rho(\sigma)$. Si en este semiplano la función puede representarse por una serie de Dirichlet convergente

$$\sum d_n e^{-\lambda_n s}$$

donde la sucesión de los exponentes verifica

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \qquad D(\lambda) = O(\lambda^{-\beta}) \qquad (0<\beta<1)$$

donde h y β son constantes, y si además β satisface a

$$3(1-\beta)/\beta < \rho - 1, \qquad (\rho+1)(1-\beta) < \rho .$$

Entonces el número n(x,a) de ceros de f(s)-a contenidos en la parte $\sigma > x$ de la semifaja $\{\sigma > 0, |t - t_0| < b\}$ verificará para cualquier valor finito a (sinexcepción).

$$\overline{\lim_{x \to 0}}(x^{\rho(x)-1}n(x,a)) > 0.$$

Demostración.- En primer lugar resulta evidente que mediante un cambio de variable puede suponerse, sin perdida de generalidad que la semifaja que interviene en el teorema es la S_0. Entonces aplicando el lema 1.2, teniendo en cuenta que en este caso $\bar{D}^* = 0$, resulta que en cualquier círculo $|s - s_0| < u > 0$, interior al semiplano $\sigma > 0$, existirá un punto s' en el cual se cumple la desigualdad

(3.81) $\quad \log|f(s')| > \log|d_k| - \lambda_k \sigma_0 - \log \Lambda_k^* - \log(uL_k(u)).$

Si ahora elegimos k igual al valor que rinde máximo la expresión $\log|d_k| - \lambda_k \sigma_0$ tendremos

(3.8.2) $\quad \log|f(s')| > \log\mu(\sigma_0) - \log\Lambda_k^* - \log(uL_k(u)),$

La primera afirmación del lema 3.3 junto con el lema 1.1.A permite escribir

$$\log \Lambda_k^* = o\left((1/\sigma_0)^{(\rho(\sigma_0)+1)(1-\rho)-\varepsilon}\right)$$

donde ε tiende a cero con σ_0. Además el lema 1.1.B nos permite escribir

(3.8.3) $\quad \log(uL_k(u)) < Cu^{(\beta-1)/\beta}.$

Por lo tanto, de (3.8.2) aplicando la segunda afirmación del lema 3.3 y teniemdo en cuenta que en el caso que estamos estudiando u puede ser tan pequeña como se quiera, se deduce facilmente que en la semifaja S' existe una sucesión de puntos $\{s_n\}$ tales que $\sigma_n \to 0$ y

(3.8.4) $$\underline{\lim}(\sigma_n^{\rho(\sigma_n)}\log|f(s_n)|) > H > 0.$$

Por consiguiente, si la sucesión $\{c_n\}$ de los ceros de f(s) - a interiores a la semifaja S_0, verifica

$$n(x,a) \leq (1/x)^{\rho_1(x)}$$

donde $\rho_1(x)$ es una función monotona que cumple (3.5.1) y (3.5.2) y que determinaremos posteriormente y si formamos el producto Q(s) como hemos hecho en 3.5 resultará que la función

$$F(s) = (f(s) - a)/Q(s)$$

carecera de ceros en S_0, y según (3.8.4) y el lema 3.5 se cumplirá a partir de un valor de n

(3.8.5) $$\log|F(s_n)| > H(1/\sigma_n)^{\rho(\sigma_n)} - H_1(1/\sigma_n)^{\rho_1(\sigma_n)}$$

donde H_1 es una constante que depende unicamente del valor de p elegido para construir Q(s). Supongamos que $\rho_1(\sigma)$ satisface a

(3.8.6) $$\overline{\lim}\,\frac{(1/\sigma)^{\rho_1(\sigma)}}{(1/\sigma)^{\rho(\sigma)}} < \frac{H}{H_1},$$

entonces de (3.8.5) se sigue que, a partir de un valor de n, se cumple

$$\log|F(s_n)| > H_2(1/\sigma_n)^{\rho(\sigma_n)}$$

lo cual permite afirmar que la función F(s) que no se anula en S_0 es en S' de orden superior o igual a ρ y de orden precisado igual o superior a $\rho(\sigma) + (\log H_2)/(\log(1/\sigma))$.

Si aplicamos a F(s) el lema 3.4_1 resulta que en la semifaja S existe una sucesión de puntos $\{z_n = x_n + iy_n\}$ tal que $x_n \rightarrow 0$ y

$$\lim (x_n)^{\rho(x_n)-1} \log|F(x_n)| < -H_3 < 0.$$

Alrededor de cada punto z_n consideremos el círculo $G_n = \{ |s - z_n| < x_n/2 \}$. Dado que los puntos z_n son interiores a la semifaja S a partir de un valor de n los círculos G_n serán totalmente interiores a la S_0, y por lo tanto, la función F(s) no se anula en ningún círculo G_n. En consecuencia en una curva que del punto z_n llega hasta la circunferencia del círculo G_n se cumple

$$(3.8.7) \qquad \log|F(s)| < -H_3(1/x_n)^{\rho(x_n)-1}$$

puesto que esta desigualdad se cumple en el centro.

Por otra parte, las propiedades de f(s) y los lemas 3.6 y 3.7 permiten deducir, recordando nuestra suposición (3.8.6), que en el círculo G_n se verifica

$$(3.8.8) \qquad \log|F(s)| < H_4(1/x_n)^{\rho(x_n)} \log(1/x_n).$$

El lema 1.3 permite deducir de (3.8.7) y (3.8.8) que a partir de un valor de n y para cualquier $\varepsilon > 0$ (por pequeño que sea) en el círculo $g_n = \{ |s - z_n| \leq x_n^{3+\varepsilon} \}$ se cumple

$$(3.8.9) \qquad \log|F(s)| < -H_5(1/x_n)^{\rho(x_n)-1}.$$

Y si ahora suponemos que

$$\lim (1/\sigma)^{\rho_1(\sigma)-\rho(\sigma)+1} = 0$$

como con mayor motivo se cumple (3.8.6), los razonamientos hechos hasta aqui son validos. Por lo tanto, aplicando de nuevo el lema 3.5, de

(3.8.9) resulta

$$(3.8.10) \qquad \log|f(s)| < -\frac{H_5}{2}(1/x_n)^{\rho(x_n)-1}$$

en g_n y a partir de un valor de n.

Si hacemos una nueva aplicación del lema 1.2 al círculo g_n, y para un valor de k constante, tendremos que en g_n existe un punto ~~sal~~ ~~spk~~ s_n' tal que

$$\log|f(s_n')| > H_6 - \log(x_n^{3+\varepsilon} L(x_n^{3+\varepsilon})),$$

y en virtud del lema 1.1.B

$$(3.8.11) \qquad \log|f(s_n')| > -Cx_n^{(3+\varepsilon)(\beta-1)/\beta}$$

y puesto que, según las hipotesis del teorema $3(1-\beta)/\beta < \rho - 1$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, la (3.8.11) esta en contradicción con la (3.8.10). Hemos llegado a esta contradicción suponiendo que

$$\lim \frac{n(x,a)}{(1/x)^{\rho(x)-1}} = 0$$

por lo tanto, esta contradicción demuestra que

$$\lim \frac{n(x,a)}{(1/x)^{\rho(x)-1}} > 0,$$

o sea el teorema.

3.9.- Del teorema que vamos a enunciar daremos solamente la idea general de la demostración, pues en realidad para dar la demostración completa tendría que enunciar de nuevo los lemas contenidos en la Memoria tantas veces citada [13] y de la cual hemos enunciado los tras teoremas principales. Además según se verá, la demostración seguiría un curso semejante (si bien con variaciones de bastante importancia) a la de los teoremas de mi Memoria antedicha [13].

TEOREMA V.- *Sea $f(s)$ una función holomorfa en el semiplano $\sigma > 0$ de orden $\rho > 1$ y de orden precisado $\rho(\sigma)$. Si en este semiplano la función puede representarse por una serie de Dirichlet convergente*

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

donde la sucesión de los exponentes verifica

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \qquad D(\lambda) = O(\lambda^{\beta}) \qquad (0 < \beta < 1)$$

donde h *y* β *son constantes, y si además* β *satisface*

$$(1-\beta)/\beta < \rho, \qquad (\rho + 1)(1-\beta) < \rho.$$

Entonces si $n_0(x,a)$ *representa el número de ceros de* $f(s) - a$ *contenidos en el dominio definido por* $\arg(s - it_0) < b > \pi/\rho$, $|s - it_0| > x$ *se verificará, para cualquier valor fijo de* t_0 *y para cualquier valor finito de* a *(sin excepción)*

$$\overline{\lim_{x \to 0}} \frac{n_0(x,a)}{(1/x)^{\rho(x)}} > 0.$$

Demostración.- Si escribimos

$$F(z) = f(e^z + it_0),$$

entonces la función $F(z)$ en la faja $|y| < b > \pi/\rho$ del plano de las $z = x + iy$, a pesar de no poderse representar por una serie de Dirichlet lagunar, tendrá unas propiedades tan semejantes a las de las funciones que intervienen en la sección I y II de mi Memoria [13] que pueden repetirse con variaciones más o menos importantes los razonamientos efectuados para demostrar uno de los teoremas allí contenidos [13, teorema

$2,5/y$ que corresponde al teorema II de esta Memoria.

Observación.- Que el teorema V es más preciso que el IV es evidente por varios conceptos:

1º La condición $(1-\beta)/\beta<\rho$ del teorema V es menos restrictiva que la $3(1-\beta)/\beta<\rho-1$ del teorema IV.

2º El número $n_0(x,a)$ de ceros del teorema V se refiere a los ceros contenidos en un ángulo cuyo vértice esta en el eje de convergencia, mientras que $n(x,a)$ se refería a una semifaja cuyo punto frontera central también esta sobre el eje de convergencia. Pero como se ve inmediatamente por pequeña que sea la anchura de la semifaja la parte del ángulo próximo al vértice será siempre interior a la semifaja.

3º El crecimiento que afirma el teorema V para $n_0(x,a)$ es superior al que afirma el teorema IV para $n(x,a)$, a pesar de lo dicho en el apartado 2º.

Capitulo IV

4.1.- Cuando el orden de f(s) es infinito construiremos una función cuyo crecimiento será regular y que acotará superiormente $M(\sigma,f)$. De modo semejante a lo que hace K.L. Hiong [2].

Sea $\varphi(x)$ una función definida del siguiente modo:

$$\varphi(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \leq 0$$

$$\varphi(1) = 2^2$$

y escribiendo $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_n = x_{n-1} + \dfrac{1}{\varphi(x_{n-2})}$ supondremos

$$\varphi(x_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2}\varphi(x_{n-1}) = n^2$$

mientras que para $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ supondremos que $\varphi(x)$ es lineal. Con esta definición de $\varphi(x)$ esta función tiene las siguientes propiedades:

1º Si $A = 1 + \sum(1/n^2)$ entonces $\lim_{x \to A} \varphi(x) = \infty$.

2º $\varphi(x)$ es una función creciente para $x \geq 0$.

3º $\varphi\left(x + \dfrac{1}{\varphi(x)}\right) \leq (1 + o(1))\varphi(x)$.

En virtud de la propiedad segunda, para $\varphi > 1$ existirá la función inversa definida por $v(\varphi(x)) = x$.

Pongamos

$$g(\sigma) = \log(1/\sigma) \max_{\sigma' \geq \sigma} \frac{\log \log M(\sigma', f)}{\log(1/\sigma')}$$

Entonces para $\sigma < \sigma_0$, donde $g(\sigma_0) > 1$, definamos $U(\sigma)$ como el máximo valor de

(4.1.1) $$\varphi((1/\sigma) + v(g(\sigma')) - (1/\sigma'))$$

para $\sigma' \leq \sigma$.

Según esta definición la $U(\sigma)$ será una función continua de σ En efecto, sea σ' una cantidad que rinde máximo la expresion (4.1.1), la existencia de este valor es evidente dadas las propiedades de $\varphi(x)$ y de $g(\sigma)$. Sea ahora un valor σ_1 próximo a σ y que verifique

(4.1.2) $$\sigma_1 < \sigma;$$

én primer lugar resulta facil demostrar que

(4.1.3) $$U(\sigma_1) \geq U(\sigma),$$

yen segudo lugar, si representamos por σ_1' un valor tal que

(4.1.4) $$U(\sigma_1) = \varphi((1/\sigma_1) + v(g(\sigma_1')) - (1/\sigma_1')) \qquad (\sigma_1' \leq \sigma_1)$$

tendremos

$$U(\sigma) \geq \varphi((1/\sigma) + v(g(\sigma_1')) - (1/\sigma_1'))$$

o sea

$$v(g(\sigma')) - (1/\sigma') \geq v(g(\sigma_1')) - (1/\sigma_1')$$

de esta,(4.1.3) y (4.1.4) resulta

$$\varphi((1/\sigma) + v(g(\sigma')) - (1/\sigma')) \leq U(\sigma_1) \leq \varphi((1/\sigma_1) + v(g(\sigma')) - (1/\sigma'))$$

y como $\varphi(x)$ es una función continua para todo el segmento donde esta definida, hemos demostrado que $U(\sigma)$ es continua a la izquierdo pues hemos supuesto σ_1 verifica (4.1.2).

Ahora demostraremos que también es contimua a la drecha. Supongamos pues que σ_1 es un valor próximo a σ pero que verifique $\sigma_1 > \sigma$

Igual que anteriormente resulta facil demostrar que

$$U(\sigma_1) \leq U(\sigma) = \varphi((1/\sigma) + v(g(\sigma')) - (1/\sigma'));$$

y además, si σ_1 es suficientemente proxima a σ, de la definición *de* $U(\sigma)$, se sigue inmediatamente

$$U(\sigma_1) \geq \varphi((1/\sigma_1) + v\,(g(\sigma')) - (1/\sigma')).$$

y estas dos ultimas desigualdades demuestran que $U(\sigma)$ es continua a la derecha. Que es lo que ~~queríamos demostrar~~ faltaba para demostrar que es continua

Por otra parte, la ~~demostración~~ definición de $U(\sigma)$ muestra inmediatamente *que*

$$U(\sigma) \geq g(\sigma) \geq \log\log M(\sigma, f)$$

pero se puede demostrar que existe una sucesión de valores de σ que tiende a cero para los cuales

$$U(\sigma) = \log\log M(\sigma, f).$$

En efecto, sea σ° un valor tan próximo a cero como se quiera, y sea $\sigma < \sigma^{\circ}$ un valor tal que

$$g(\sigma) = \log\log M(\sigma, f).$$

Entonces definamos σ' como el más pequeño valor tal que $\sigma' \leq \sigma$ *y*

$$\varphi((1/\sigma') + v(U(\sigma)) - (1/\sigma)) = g(\sigma'),$$

la existencia de este valor se sigue inmetiatamente de la definicion de $U(\sigma)$. Pero por otra parte para este valor σ' debe cumplirse

$$U(\sigma') = g(\sigma');$$

pues si no se cumpliera, es decir si

$$U(\sigma') > g(\sigma'),$$

resultaria que existiria un $\sigma'' < \sigma'$ tal que

$$U(\sigma') = \varphi((1/\sigma') + v(g(\sigma'')) - (1/\sigma'')) > g(\sigma'),$$

y por lo tanto

$$(1/\sigma') + v(g(\sigma'')) - (1/\sigma'') > (1/\sigma') + v(U(\sigma)) - (1/\sigma),$$

o sea

$$g(\sigma'') > \varphi((1/\sigma'') + v(U(\sigma)) - (1/\sigma));$$

y por consiguiente existira un valor $\sigma''' < \sigma''$ tal que

$$g(\sigma''') = \varphi((1/\sigma''') + v(U(\sigma) - (1/\sigma)),$$

contrariamente a la definición de σ'.

Si $\sigma' = \sigma$ la demostración esta terminada. Supongamos pues $\sigma' < \sigma$ Ahora bien, si σ' es suficientemente pequeña, o dicho de otro modo, si $1/\sigma'$ es suficientemente grande las propiedades de $\varphi(x)$ demuestran rapidamente que σ' no puede pertenecer a los posibles intervalos en los que $g(\sigma) > \log\log M(\sigma, f)$, puesto que en ellos $g(\sigma)/\log(1/\sigma)$ es constante, Por lo tanto,

$$U(\sigma') = g(\sigma') = \log\log M(\sigma', f);$$

y como σ' puede tomar valores tan pequeños como se quiere, hemos demostrado la existencia de la sucesión que nos interesa.

Finalmente, vamos a demostrar que si

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{U(\sigma)}$$

se tiene

$$U(\sigma_1) \leq (1 + o(1))U(\sigma).$$

Esto resulta facilmente si consideramos que de la definición de $U(\sigma)$, se sigue

(4.1.5) $\quad U(\sigma_1) \leq \varphi((1/\sigma_1) + v(U(\sigma)) - (1/\sigma)),$

y de la propiedad 3ª de $\varphi(x)$ y de $\varphi(v(U(\sigma))) = U(\sigma)$, resulta de (4.1.5)

$$U(\sigma_1) \leq \varphi\left(v(U(\sigma)) + \frac{1}{\varphi(v(U(\sigma)))}\right) \leq (1 + o(1))U(\sigma),$$

que es lo que queriamos demostrar.

En consecuencia, si escribimos

$$W(\sigma) = e^{U(\sigma)}$$

habremos definido una función para $\sigma > 0$ continua, no craciente y tal que

$$(1/\sigma) = [W(\sigma)]^{o(1)}$$

y que poniendo

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\log W(\sigma)}$$

satisface a

$$W(\sigma_1) \leq [W(\sigma)]^{1+o(1)}$$

y que además verifica

$$\log M(\sigma, f) \leq W(\sigma),$$

donde el signo de igualdad se cumple para una sucesión infinita de valores de σ que tiende a cero. Entonces poniendo

$$\rho(\sigma) = \frac{\log W(\sigma)}{\log(1/\sigma)}$$

diremos que f(s) es de orden infinito $\rho(\sigma)$ en el semiplano $\sigma > 0$.

4.2.- Con las mismas notaciones que en 3.3 tendremos

$$\frac{\lambda(\sigma)}{\log W(\sigma)} \leq \int_{\sigma_1}^{\sigma} \lambda(\sigma) d\sigma \leq (1 + o(1)) W(\sigma_1),$$

o sea

$$\lambda(\sigma) \leq [W(\sigma)]^{1+o(1)}.$$

[redacted]

Por otra parte, puesto que las condiciones sobre $\{\lambda_n\}$ del 3.3 continuan siendo válidas, la desigualdad

$$M(\sigma, f) \leq \mu(\sigma) \left(\frac{\lambda(\sigma_1)}{h} + 1 + \frac{1 + o(1)}{h(\sigma_1 - \sigma)} \right)$$

continua cumpliendose para el orden infinito igual que lo hacia para el finito. Para los valores que verifican

$$\log M(\sigma, f) = W(\sigma)$$

se cumplen

$$\log \mu(\sigma) \leq \log M(\sigma, f) = W(\sigma) \leq (1 + o(1)) \log \mu(\sigma)$$

y por consiguiente podremos enunciar

LEMA 4.2.- Sea f(s) una función holomorfa en el semiplano $\sigma>0$ y representable en el mismo por una serie de Dirichlet convergente

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuyos exponentes verifican la condición $\lambda_{n+1}-\lambda_n \geq h>0$. Si f(s) es de orden infinito $\rho(\sigma)$ en $\sigma>0$, se verificaran

$$\lambda(\sigma)\leq[W(\sigma)]^{1+o(1)}$$

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0}}\,\frac{\log\mu(\sigma)}{\log M(\sigma,f)}=\overline{\lim_{\sigma\to 0}}\,\frac{\log\mu(\sigma)}{W(\sigma)}=1.$$

4.3.- Con las mismas notaciones que en 3.4, si en la definición de la función $W(\sigma)$ se sustituye la $M(\sigma,f)$ por la $M(\sigma,\Delta,f)$, obtendremos la definicion de los ordenes infinitos $\rho(\sigma)$ en una semifaja. Con estas definiciones y notaciones, aplicando el lema 1.4 se puede demostrar el lema siguiente:

LEMA 4.3.- Sea f(s) una función holomorfa y sin ceros en la semifaja $S=\{\sigma>0,\ |t|<\pi/2\}$ y de orden infinito $\rho(\sigma)$ en esta misma semifaja. Entonces en la $S^*=\{\sigma>0,\ |t|<\pi/4\}$ se verifica

$$\log|1/f(s)|\leq[W(\sigma)]^{1+o(1)}$$

Este lema también puede enunciarse en la forma:

LEMA 4.3_1.- Sea una función holomorfa y sin ceros en la semifaja S y que en la S^* es de orden infinito $\rho(\sigma)$. Entonces se cumplen

$$\overline{\lim_{\sigma\to 0}}\ \frac{\log\log M(\sigma, S, 1/f)}{\log W(\sigma)} \geq 1.$$

4.4.- Con las notaciones de 3.5 vamos a construir un producto canonico, pero al contrario de lo que sucedia alli el número p no será fijo, sino que variara con n, es decir, escribiremos

$$Q(s) = \prod E_{p_n}\left(\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right)$$

y para determinar el valor de p_n en función de n, haremos la siguientes suposiciones: Existe una función $\rho_1(x)$ que tiende al infinito cuando $x\to 0$ y tal que

$$\rho_1'(x) = o\left(\frac{(\rho_1(x))^{3/2}}{x\log(1/x)}\right) \tag{4.4.1}$$

Además definiendo como en 3.5 n(x) por el máximo valor de n tal que $a_n \geq x$, supondremos que

$$\overline{\lim}\ \frac{\log n(x)}{\rho_1(x)\log(1/x)} < 1.$$

Entonces determinaremos p_n como el máximo entero tal que

$$p_n \leq \rho_1(a_n),$$

y demostraremos el:

LEMA 4.4.- <u>Si</u> $\{c_n = a_n + ib_n\}$ <u>es una sucesión de puntos interiores a la semifaja</u> $S_0 = \{\sigma > 0,\ |t| < \pi\}$ <u>y cuyos puntos de acumulación estan sobre la recta</u> $\sigma = 0$. Si $\rho_1(x)$ <u>tiene las propiedades señaladas en este número, y si para un</u> θ <u>tal que</u> $0 < \theta < 1$, <u>se verifica</u>

(4.4.2) $$\overline{\lim_{x\to 0}} \frac{\log n(x)}{\rho_1(x)\log(1/x)} < \theta$$

Entonces el producto

$$Q(s) = \prod E_{p_n}\left(\frac{2a_n}{s+\bar{c}_n}\right)$$

donde p_n es el mayor entero que verifica $p_n \leq \rho_1(a_n)$, es una función holomorfa en la S_o, se anula en, y unicamente en, los c_n y verifica

$$\log|Q(s)| = o\left((W_1(\sigma^{1/(1-\theta)}))^{\theta}\right)$$

donde $W_1(\sigma) = (1/\sigma)^{\rho_1(\sigma)}$

Demostración.- Según Denjoy [1] existe una constante numerica H que para cualquier valor de p y cualquier valor de u se cumple

$$\log|E_p(u)| \leq H|u|^{p+1}.$$

Por lo tanto

$$\log|Q(s)| \leq 2H\int_{0}^{\infty}\left(\frac{2x}{\sigma+x}\right)^{\rho_1(x)} dn(x) \leq$$

$$\leq 2H2^{\rho_1(\sigma)}n(\sigma) + 2H\int_{\sigma}^{\infty} 2^{\rho_1(x)}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\rho_1(x)} dn(x) \simeq$$

$$\simeq 2H\int_{0}^{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\rho_1(x)} \frac{2^{\rho_1(x)}n(x)}{x}\,(\rho_1(x) + x\rho_1'(x)\log(2x/\sigma))dx,$$

y en virtud de (4.4.1) y (4.4.2) resultará finalmente

$$\log|Q(s)| \leq o(1)\int_{0}^{\sigma}\left(\frac{x^{1-\theta}}{\sigma}\right)^{\rho_1(x)} \frac{2^{\rho_1(x)}(\rho_1(x))^{3/2}n(x)}{(1/x)^{\theta\rho_1(x)-1}}\,dx \leq$$

$$\leq o\left((W_1(\sigma^{1/(1-\theta)}))^{\theta}\right)$$

que es lo que queriamos demostrar.

4.5.- Igual que en el capítulo III vamos a dar una acotación inferior para $Q(s)$ al exterior de unos pequeños círculos que definiremos.

Sea $W(\sigma)$ una función con las propiedades que en el nº 4.1 suponemos que tienen las que representamos por esta notación. Pero de momento no suponemos ninguna relación entre esta función $W(\sigma)$ y la $W_1(\sigma)$ que interviene en la acotación de $n(x)$.

LEMA 4.5.- Al exterior de los círculos $\{|s - c_n| \leq (W(a_n))^{-1}\}$ con las mismas condiciones que en el lema 4.4, se cumple

$$\log \frac{1}{|Q(s)|} \leq o\left((W_1(\sigma^{1/(1-\theta)}))^{\theta} \log W(\sigma)\right)$$

en cualquier dominio finito de S_c.

Demostración.- De modo semejante al nº 3.6 supongamos que $\sum_{(1)}$ se extiende a los valores de n que verifican

$$\left|\frac{2a_n}{s + \bar{c}_n}\right| > 1 - \frac{1}{\log W(\sigma)}$$

mientras que $\sum_{(2)}$ se extiende a los

$$\left|\frac{2a_n}{s + \bar{c}_n}\right| \leq 1 - \frac{1}{\log W(\sigma)}$$

Aplicando la serie de Taylor a $\log(1 - u)$ cuando $|u| \leq 1 - \eta$ resulta que

$$(4.5.1) \qquad \sum_{(2)} \left| \log \left| E_{p_n} \frac{2a_n}{s + \bar{c}_n} \right| \right| = O\left(\sum_{(2)} \left| \frac{2a_n}{s + \bar{c}_n} \right|^{\rho_1(a_n)} \log W(\sigma) \right)$$

Por otra parte resulta facil demostrar que para los valores de n que intervienen en $\sum_{(1)}$ se puede escribir

$$(4.5.2) \qquad - \log \left| E_{p_n}\left(\frac{2a_n}{s + \bar{c}_n} \right) \right| \leq \log \left| \frac{s + \bar{c}_n}{s - c_n} \right| + O\left(\rho_1(a_n) 2^{\rho_1(a_n)} \left| \frac{2a_n}{s + \bar{c}_n} \right|^{\rho_1(a_n)} \right)$$

y como al exterior de los círculos que intervienen en el lema se cumplen para estos valores de n, dadas las propiedades de $W(\sigma)$,

$$\log \left| \frac{s + \bar{c}_n}{s - c_n} \right| = O(\log W(a_n)) = O(\log W(\sigma)).$$

Y de (4.5.1) y (4.5.2), resulta

$$\log \frac{1}{|Q(s)|} = O\left(\int_{\infty}^{0} \rho_1(x) 2^{\rho_1(x)} \left(\frac{2x}{\sigma + x} \right)^{\rho_1(x)} dn(x) \log W(\sigma) \right)$$

y la misma demostración que en el 4.4 permite deducir, teniendo en cuenta que los factores adicionales dentro la integral son de un orden de crecimiento relativamente pequeño,

$$\log \frac{1}{|Q(s)|} = o\left((W_1(\sigma^{1/(1-\theta)}))^{\sigma} \log W(\sigma) \right)$$

o sea la conclusión del lema 4.5 .

4.6.- Igual que en el capítulo III vamos a dar una acotación de la suma de los diametros de los pequeños círculos que intervienen en el lema anterior.

LEMA 4.6.- <u>Si</u> $\overline{\lim}(\rho_1(\sigma)/\rho(\sigma)) < 1$. <u>Para cualquier punto</u>

$s_0 = \sigma_0 + it_0$ (con σ_0 suficientemente pequeña) perteneciente a una semifaja $S_1 = \{\sigma > 0,\ |t| < \varphi_1\}$, donde $\varphi_1 < \pi$, puede formarse un rectangulo con las siguientes propiedades:

1º Contiene el punto s_0 en su interior.

2º Los lados son paraleles a los ejes y no penetran en el interior de los círculos $\{|s - c_n| \leq (W(a_n))^{-1}\}$.

3º La longitud b de los lados horizontales satisface a

$$\underline{\lim} \frac{\log(1/b)}{\log W(\sigma_0)} > 0.$$

Demostración.- La suma de los diametros de los pequeños circulos que intervienen en el lema y cuyos centros tienen una abscisa inferior a x es

$$(4.6.1) \qquad P_x = \int_x^0 \frac{dn(x)}{W(x)} \leq \int_0^x \frac{n(x)}{x} \frac{\rho(x) + x\rho'(x)\log x}{W(x)}\, dx$$

y puesto que según es facil deducir de la definición de $\rho(x)$ dada en 4.1,

$$\rho'(x) = o\left(\frac{(\rho(x))^{3/2}}{x \log(1/x)}\right)$$

sigue finalmente de (4.6.1)

$$P_x \leq (W(x))^{-\eta}$$

donde $\eta > 0$ es una constante.

4.7.- Una vez demostrados estos lemas puede demostrarse el ultimo teorema de esta Memoria .

TEOREMA VI.- Sea f(s) una función holomorfa en el semiplano $\sigma > 0$, y de orden infinito $\rho(\sigma)$. Si esta función esta representada en este mismo semiplano por una serie de Dirichlet convergente

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

cuyos exponentes verifican

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geq h > 0, \qquad D(\lambda) = O(\lambda^{-\beta}) \qquad (0 < \beta < 1)$$

donde h y β son constantes. Entonces el número n(x,a) de los ceros de f(s)-a contenidos en la parte $\sigma > x$ de la semifaja $\{\sigma > 0,\ |t-t_0| < b\}$ cumple para culaquier valor finito de a(sin excepción)

$$\overline{\lim_{x \to 0}} \frac{\log n(x,a)}{\rho(x^{1-\theta})\log(1/x)} \geq 1 - \theta$$

donde $1/2 < \theta < 1$.

Demostración.- Como la demostración sigue un curso semejante a la del taorema IV daremos solamente las lineas generales de la misma, haciendo notar las modificaciones que hay que introducir en ella.

Igual que en el 3.8 supondremos efectuada una transformación lineal de la variable de modo que la semifaja que interviene en el teorema sea la $S_0 \equiv \{\sigma > 0,\ |t| < \pi\}$. Supongamos de momento que el teorema no sea cierto, es decir, que exista un valor θ tal que $1/2 < \theta < 1$ y

$$(4.7.1) \qquad \overline{\lim} \frac{\log n(x,a)}{\rho(x^{1-\theta})\log(1/x)} < (1-\theta)\theta_1 \qquad (0 < \theta_1 < 1)$$

entonces poniendo

$$\rho_1(x) = \theta_1 \frac{1-\theta}{\theta} \rho(x^{1-\theta})$$

resulta facilmente por el lema 4.4 la posibilidad de construir un producto canonico tal que se anule en los ceros de f(s)-a y que

(4.7.2) $$\log|Q(s)| < (W(\sigma))^{a_1}$$

Por otra parte, aplicando el lema 1.2 y los 1.1.A, 1.1.B y 4.2, se pueda demostrar que en la semifaja $S^* = \{\sigma > 0, |t| < \pi/4\}$ se verifica

$$\overline{\lim} \frac{\log \log M(\sigma, S^*, f-a)}{\log W(\sigma)} = 1,$$

y por lo tanto, en esta misma semifaja existen puntos en los cuales se cumple

$$\log|(f(s) - a)/Q(s)| > (W(\sigma))^{1-o(1)}.$$

Mediante el lema 4.3 se deduce que en la semifaja $S\{\sigma > 0,$ $|t| < \pi/2\}$ existen puntos en los cuales

(4.7.3 $$\log|(f(s) - a)/Q(s)| < -(W(\sigma))^{1-o(1)}.$$

Si ahora aplicamos los lemas 4.5, 4.6 y las propiedades de losm órdenes $\rho(\sigma)$ resulta que siempre se cumple

(4.7.4) $$\log|(f(s)-a)/Q(s)| < (W(\sigma))^{1+o(1)}$$

~~Xkx~~ Y de (4.7.2), (4.7.3) y (4.7.4), aplicando el lema 1.3 resulta la existencia en S_0 de una sucesión de círculos $\{|s-s_n''| < (W(\sigma_n''))^{-\varepsilon}\}$ (para cualquier $\varepsilon > 0$) tales que $\sigma_n'' \to \infty$ y

(4.7.5) $$\log|f(s)-a| < -(W(\sigma_n''))^{1-o(1)}$$

Una nueva aplicación del lema 1.2, para un valor de k constante nos llevaria, tuviendo en cuenta el lema 1.1.B, a una contradicción con (4.7.5). Este absurdo demuestra la imposibilidad de (4.7.1), y por lo tanto el teorema,

Bibliografia

1.- Denjoy, A - Sur le produit canonique d'ordre infini (Jour de Math. 6 serie, t. 6, 1910 pag. 1-136)

2.- Hiong, K.L. - Sur les fonctions entières et les fonctions meromorphes d'ordre infini (Jour. Math. 9 serie, t. 14, 1935, pag.233).

3.- Mandelbrojt, S. - Series adherentes Régularisation des suites Applications (Paris 1952).

4.- Mandelbrojt, S. - Quasi-analyticity and analytic continuation - a general principle (Trans. Am. Math. Soc. vol. 55, 1944, pag.96-131).

5.- Milloux H. - Sur les directions de Borel des fonctions entieres, de leurs derivées et de leurs integrales (Jour d'An. Math. vol. 1, 1951).

6.- Nevanlinna, R. - Eindeutige analytische Funktionen (Zweite auflage, Berlin 1953).

7.- Polya, G.--Untersuchungen uber Lucken und Singuleritate von Potenzreihen (Math. Zeitschrift t. 29, 1929, pag. 549).

8.- Ritt, J.F. - On certain points in the theory of Dirichlet series (Am. Jour. Math. vol. 50, 1928, pag.73-86).

9.- Sunyer Balaguer, F. - Sur la substitution d'une valeur exceptionnelle par une proprieté lacunaire C.R. Acad. Sci. Paris, t. 224,1947, pag. 1609-1610 y t.225, 1947, pag.21-23).

10.- Sunyer Balaguer, F. - Sur la substitution d'une valeur exceptionnelle par une propriété lacunaire (Acta Math. t. 87, 1952, pag. 17-31).

11.- Sunyer Balaguer, F. - Sobre la substitución de una función excepcional por una propiedad lagunar (Memorias R.Acad. Ci. Y Art. de Barcelona, III, epoca, vol. 29, 1948, pag. 475).

12.- Sunyer Balaguer, F. - Propiedades de las funciones enteras representadas por series de Taylor lagunares (Orden finito)(Collectanea Math. vol.2, 1950, pag.129-174)

13.- Sunyer Balaguer, F. - Sobre la distribución de los valores de una función entera representada por una serie de Dirichlet lagunar (Rev. Acad. de Ciencias de Zaragoza, serie 2ª, t. 5, 1950 pag. 25-73).

14.- Sunyer Balaguer, F. - Productos canonicos para las funciones holomorfas en una semifaja (Collectanea Math.vol. 14, 1962).

15.- Tsuji, M. - Canonical product for a meromorphic function in a unit circle (Jour. Math. Soc. Of Japan vol. 8,1956, pag. 7-21).

16.- Valiron, G. - Lectures on the general theory of integral functions (2º edición, New York 1949)

Barcelona mayo 1962.

Ferran Sunyer Balaguer