Anejo 2 . Cuantificación de la incertidumbre de los modelos utilizados para el análisis del campo de presiones actuante sobre los peldaños

1. Introducción

En el Capítulo 4 se han presentado unos patrones que permiten modelar la distribución de la presión tanto sobre la cara vertical como la horizontal de los peldaños. Es de interés analizar la fiabilidad de dichos modelos. Para ello se han aplicado las herramientas que ofrece la inferencia estadística. Se acompañarán los modelos propuestos de los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis correspondientes que se resumen en los siguientes subapartados.

En la práctica, no sólo interesa dar una estimación de un parámetro sino, además un intervalo que permita precisar la incertidumbre existente en la estimación. Un intervalo de confianza (Peña (1949)) para un cierto parámetro θ con un nivel de confianza $(1-\alpha)$ es una expresión del tipo:

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \qquad (1)$$

donde los límites θ_1 y θ_2 dependen de la muestra y se calculan de manera tal que si construimos muchos intervalos, cada vez con distintos valores muestrales, el $100(1-\alpha)\%$ de ellos contendrán el verdadero valor del parámetro. La idea fundamental es que sea cual sea θ, podemos conocer aproximadamente la distribución del error relativo que cometeremos al estimar con la estimación puntual obtenida previamente.

Los contrastes de hipótesis constituyen un método habitualmente utilizado en tomas de decisiones en ingeniería. Así, si se indica que se acepta una cierta hipótesis, que se definirá como *hipótesis nula* (H_0), con un cierto *nivel de significación* (α) se estará informando que se ha estudiado y tenido en cuenta la dispersión de los datos, así como, de los riesgos y limitaciones de las propias conclusiones obtenidas de dichos datos. Estos contrastes pretenden establecer criterios objetivos, en el sentido que dos autores distintos, con los mismos datos, terminaran obteniendo las mismas conclusiones.

Se comprende, a pesar de todo, que dichas conclusiones dependerán del nivel de significación, α, que se fije. Los valores que tradicionalmente se toman para este parámetro son 10%, 5% ó 1%. En principio, se escoge α para que muestre la probabilidad de cometer el error de rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es verdadera[1]. Si siempre se usa el mismo valor $\alpha\%$, a la larga ,se tenderá a cometer dicha clase de error el $\alpha\%$ de las veces. Ello podría hacer pensar en elegir un nivel de significación lo más pequeño posible. Se comprueba que esto conduciría, por el contrario, a aumentar la probabilidad de aceptar la hipótesis nula cuando en realidad no es cierta[2]. Se comprende, pues, que hay que llegar a un compromiso en la decisión del nivel de significación con el que se trabajará.

1. 1. Bondad de ajuste. Test de Kolmogorov–Smirnov

El objetivo de este tipo de contrastes es comparar la función de distribución acumulada teórica con la experimental. Se asumirá, en este caso, como hipótesis nula (H_0) que la variable aleatoria analizada ($P_{normalizada}$) sigue una función de distribución de probabilidad normal. Se considerará la realización de la muestra aleatoria ordenada de menor a mayor, $P_{normalizada(i)}$, así como los estadísticos:

$$D^+ = \max_{i=1,2,\ldots n} \left| \frac{i}{n} - F\left(P_{normalizada(i)}\right) \right| \; ; D^- = \max_{i=1,2,\ldots n} \left| \frac{i-1}{n} - F\left(P_{normalizada(i)}\right) \right| \qquad (2)$$

Donde $F(P_{normalizada})$ es la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $P_{normalizada}$. Entonces se establece que:

$$D = \max\left\{D^+, D^-\right\} \qquad (3)$$

es una realización para una cierta variable aleatoria. Así para el caso en que $F(P_{normalizado})$ presente una distribución normal con parámetros desconocidos, con valor esperado m estimado por la media muestral y varianza σ^2 estimada por la varianza muestral, Stephens (1974) obtuvo los valores de su función de densidad de probabilidad que se muestran en la Tabla 1.

[1] Llamado error de Tipo I (ver Benjamín y Cornell (1981)).
[2] Llamado error de Tipo II (ver Benjamín y Cornell (1981)).

El criterio a aplicar será rechazar la hipótesis nula H_0 si la realización D, definida por la expresión (3), corregida con la ecuación mostrada en la tabla, es mayor que el valor correspondiente a un nivel de significación α elegido.

Es de interés notar que la mayoría de los paquetes de cálculo, dan como resultado del contraste el valor α_p correspondiente a la probabilidad de la cola superior que queda si se cortara por la realización obtenida. Por tanto, cuanto mayor sea α_p con mayor motivo se aceptará la hipótesis nula, y viceversa, cuanto menor sea α_p con mayor motivo se rechazaría. En la práctica, valores $\alpha_p > 0.2$ se toman como suficientemente altos como para aceptar la hipótesis de distribución normal, en cambio para valores $\alpha_p < 0.1$ se recomienda rechazar dicha hipótesis.

Tabla 1. Valores de la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria definida en la expresión (3) (Stephenson (1974)).

Niveles de significación α	*0.15*	*0.10*	*0.05*	*0.025*	*0.01*
$F(P_{normalizada})$ normal con media y varianza estimados por m, σ^2 : $D \cdot \left(\sqrt{n} - 0.01 + \frac{0.85}{\sqrt{n}} \right)$	0.775	0.819	0.895	0.955	1.035

1. 2. Contraste de la regresión

1. 2. 1. Caso de dos variables

Se pretende con este contraste analizar la falta de correlación entre dos variables, es decir: $r = 0$. Si dos variables aleatorias tienen una distribución normal, se puede demostrar que el coeficiente de correlación muestral (r) entre ambos tiene una distribución relacionada con una *t de Student* con $n-2$ grados de libertad, suponiendo cierta la hipótesis nula de que $r = 0$. En resumen, se establece que la hipótesis nula, H_0, es: $r = 0$ y la hipótesis alternativa, H_1, es $r \neq 0$. Si H_0 es cierta, el estadístico

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{4}$$

sigue una t de Student con $(n-2)$ grados de libertad, siendo n el número de muestras. Con lo que se aceptaría la hipótesis nula si

$$-c \leq t \leq +c \quad siendo\ c = t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \tag{5}$$

donde α es el nivel de significación.

Así, en el caso concreto de las variables analizadas $P_{normalizada}$ y la variable que constituye el término dependiente, que es función en general de la posición (y/l o z/h según sea la huella o la contrahuella) y del caudal circulante (y_c/h), interesará rechazar la hipótesis nula, es decir aceptar que entre ambas variables la correlación muestral es significativa.

1. 2. 2. Caso de más de dos variables

Supóngase en este caso m variables aleatorias normalmente distribuidas. Se analizará el contraste definido por la hipótesis nula, H_0, en la que se establece que el coeficiente de correlación múltiple poblacional es nulo ($r = 0$), en una muestra de tamaño n. O lo que es lo mismo, que todos los coeficientes de regresión obtenidos el ajuste pueden aceptarse como nulos. Si H_0 es cierta y $n > m$, entonces el estadístico:

$$F = \frac{r^2 / (m-1)}{(1-r^2) / (n-m)} \tag{6}$$

sigue una distribución F con *(m–1)* y *(n–m)* grados de libertad. Siendo n el número de muestras y m el número de variables explicativas. Con lo que se aceptaría la hipótesis nula si

$$-c \leq F \leq +c \quad siendo\ c = F_{\frac{\alpha}{2},m-1,n-m} \tag{7}$$

donde α es el nivel de significación.

1. 3. Intervalo de confianza de la pendiente

Si se supone que las realizaciones de la variable aleatoria $P_{normalizada}$ siguen una distribución normal y son independientes, entonces la pendiente de la recta de regresión A también es normal, ya que es combinación lineal de variables normales independientes. Si el número n de realizaciones es pequeño y la varianza de la variable $P_{normalizada}$ es desconocida, se comprueba (Benjamín y Cornell (1981), Draper y Smith (1966)) que el intervalo de confianza de dicha pendiente se basa en un valor tomado de la distribución t de Student:

$$\hat{A} \pm t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \cdot s_A \tag{8}$$

Donde $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$ corresponde al valor de una distribución t de Student con *n–2* grados de libertad para una probabilidad igual a la mitad del nivel de significación, α, y s_A es la estimación muestral de la desviación de A, siendo:

$$s_A^2 = \frac{n}{n-2} \cdot \left(1 - r^2\right) \cdot \frac{s_P^2}{n \cdot s_X^2} \tag{9}$$

No cabe duda que lo que cabe esperar es registrar intervalos de muy poca amplitud, es decir estimaciones bien definidas del parámetro en cuestión, en este caso la pendiente A. Nótese que cuanto mayor sea la varianza de la variable $P_{normalizada}$ mayor será dicho intervalo, mientras que éste será tanto mas estrecho cuanto más pequeño sea $(1-\alpha)$. Este valor se puede entender como la proporción de que muchos intervalos de $(1-\alpha)\cdot 100$ por ciento de confianza incluyan la verdadera pendiente del ajuste. Igualmente, el $\alpha\cdot 100$ por ciento de ellos no incluirá dicho verdadero valor. En la práctica se usará, en este caso, el intervalo del 90% de confianza, esto es $\alpha = 10\%$. Es importante darse cuenta que disminuir α exige aumentar la amplitud del intervalo, es decir, hacer menos preciso el enunciado acerca del valor de A.

1. 4. Intervalo de confianza del término independiente

Por lo que respecta al término independiente B de los ajustes, se puede justificar (Benjamín y Cornell (1981), Draper y Smith (1966)) que éste también es combinación lineal de las $P_{normalizada}$, y su varianza es:

$$s_B^2 = \left(1 + \frac{\bar{x}^2}{s_X^2}\right) \cdot \frac{s_P^2}{n-2} \cdot \left(1 - r^2\right) \tag{10}$$

Donde $\bar{x}$ es el valor medio de la variable explicativa X. El intervalo de confianza del 90%, también se basa en una distribución t de Student con *n–2* grados de libertad:

$$\hat{B} \pm t_{0.05,n-2} \cdot s_B \tag{11}$$

1. 5. Contraste sobre la pendiente

En este caso, se contrastará que el valor de la pendiente (A) de una cierta recta, que relaciona las dos variables aleatorias de trabajo, es igual a un determinado valor (A_1) que se especificará en cada caso, con un cierto nivel de significación, α. De esta manera, se establecerá que la hipótesis nula, H_0 será $A = A_1$, mientras que como hipótesis alternativa, H_1, se tomará $A \neq A_1$. En estas condiciones, si H_0 es cierta, el estadístico

$$t = \frac{s_X \cdot \sqrt{n-2}}{s_P \cdot \sqrt{1-r^2}} \left(\hat{A} - A_1\right) \tag{12}$$

sigue una t de Student con *(n-2)* grados de libertad. Donde $\hat{A}$ corresponde a la estimación de la pendiente de la recta de regresión, y s_X y s_P son las desviaciones típicas de la variable explicativa X y $P_{normalizada}$ respectivamente. Con lo que se aceptaría la hipótesis nula si

$$-c \le t \le +c \quad siendo\ c = t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \tag{13}$$

En el caso que se analizará, sobre los modelos establecidos en el Capítulo 4, interesará aceptar la hipótesis nula, a fin de confirmar la validez de los modelos.

1. 6. Contraste sobre el término independiente

Se pretende confirmar la validez del término independiente (B) estimado para una cierta recta, que relaciona las dos variables aleatorias de trabajo, con un cierto nivel de significación, α. Así, se asumirá que la hipótesis nula, H_0 será $B = B_1$, mientras que como hipótesis alternativa, H_1, se tomará $B \neq B_1$. En estas condiciones, si H_0 es cierta, el estadístico

$$t = \frac{s_X \cdot \sqrt{n-2}\sqrt{n}}{s_P \cdot \sqrt{1-r^2}\sqrt{\sum x_i^2}} \left(\hat{B} - B_1\right) \tag{14}$$

sigue una t de Student con *(n-2)* grados de libertad. Donde $\hat{B}$ corresponde a la estimación del término independiente de la recta de regresión. Con lo que se aceptaría la hipótesis nula si

$$-c \le t \le +c \quad siendo\ c = t_{\frac{\alpha}{2},n-2} \tag{15}$$

En el caso que se analizará, sobre los modelos establecidos en el Capítulo 4, interesará aceptar la hipótesis nula, a fin de confirmar la validez de los modelos.

2. Distribución de la presión sobre las huellas

2. 1. Bondad de ajuste de los registros normalizados

Para cada caudal, sobre la huella de dos peldaños ($L/k_s = 63.51$ y $L/k_s = 69.66$), se ha registrado la presión en siete puntos de medida (ver apartado 4.1. del Capítulo 4). Tal y como ya ha sido descrito en el apartado 4.2.1 del mismo capítulo, en cada punto de medida se presentan al menos dos registros que fueron obtenidos con el objetivo de confirmar la repetibilidad del fenómeno. Igualmente se ha citado ya que cualquier tratamiento posterior de dichos registros se ha realizado a partir de sus valores medios, en cada punto de medida.

En este apartado se expone el análisis de la bondad de ajuste a una distribución normal, de los valores obtenidos para cada uno de los estadísticos analizados. Debido al número de puntos analizado sobre la huella (ver apartado 4.1 del Capítulo 4) y al número de valores promediados para la obtención de los estimadores de los respectivos estadísticos, cabe esperar algunos problemas en aceptar la normalidad para alguno de los casos analizados.

Se apreciará en la Tabla 2 que se muestra a continuación como que, si bien, la mayoría de los estadísticos, para cada uno de los caudales ensayados, muestra un buen ajuste a una distribución normal unos pocos, que suelen coincidir con los menores caudales circulantes no se ajustan a dicha distribución con la bondad deseada para una robusta aplicación de los procesos de inferencia con los que se van a analizar los modelos. De cualquier modo, todos los modelos se ajustan al propuesto con un nivel de significación $\alpha > 0.068$, que en cualquier caso garantiza que el modelo es aceptable con un nivel de significación superior al *6.5%* en todos los casos analizados.

Tabla 2. Análisis de la bondad de ajuste de los valores estimados para cada estadístico de trabajo, a una distribución normal.

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Media*		*Desv. Típica*		*Percentil 95%*		*Percentil 5%*	
		D (ec. (3))	α_p	*D (ec. (3))*	α_p	*D (ec. (3))*	α_p	*D (ec. (3))*	α_p
63.51	1.17	0.283	0.087	0.283	0.089	0.287	0.080	0.277	0.101
	1.42	0.262	0.149	0.261	>0.200	0.265	0.141	0.240	>0.200
	1.64	0.258	>0.200	0.252	>0.200	0.256	>0.200	0.248	>0.200
	1.85	0.262	>0.200	0.254	>0.200	0.258	>0.200	0.254	>0.200
	2.05	0.286	0.082	0.276	0.103	0.284	0.086	0.294	0.068
	2.25	0.260	>0.200	0.244	>0.200	0.255	>0.200	0.261	>0.200
69.66	1.17	0.285	0.084	0.268	0.131	0.279	0.097	0.206	>0.200
	1.42	0.275	0.108	0.259	>0.200	0.266	0.137	0.187	>0.200
	1.64	0.261	>0.200	0.244	>0.200	0.251	>0.200	0.265	0.140
	1.85	0.251	>0.200	0.222	>0.200	0.231	>0.200	0.203	>0.200
	2.05	0.212	>0.200	0.189	>0.200	0.201	>0.200	0.228	>0.200
	2.25	0.208	>0.200	0.209	>0.200	0.206	>0.200	0.242	>0.200

2. 2. Intervalos de confianza de las estimaciones de los valores máximo y mínimo de cada estadístico

Para establecer la normalización de los estadísticos es necesario estimar los valores máximo y mínimo de cada una. En la Tabla 4.13 del Capítulo 4, se presentan las expresiones propuestas para la obtención de los valores extremos de los respectivos estadísticos, expresiones que se dieron comunes a ambos escalones (*L/k_s = 69.66* y *L/k_s = 63.51*). En la siguiente tabla se dan los valores de los intervalos de confianza correspondientes a dichos coeficientes ajustados.

Tabla 3. Intervalos de confianza del 95% correspondientes a los ajustes de los valores máximo y mínimo de cada estadístico, sobre la huella. (Ver Tabla 4.13 del Capítulo 4)

Estadístico		*Intervalos de confianza*
Máximo $\frac{P}{\gamma h} = b\frac{y_c}{h} + c$	Presión media	b = 1.03 ± 0.106 c = 0.700 ± 0.177
	Desviación típica	b = 0.550 ± 0.028 c = 0.611 ± 0.047
	Percentil del 95%	b = 2.07 ± 0.138 c = 1.95 ± 0.231
	Percentil del 5%	b = 0.375 ± 0.063 c = 0.019 ± 0.105
Mínimo $\frac{P}{\gamma h} = a\left(\frac{y_c}{h}\right)^2 + b\frac{y_c}{h} + c$	Presión media	a = 0.227 ± 0.049 b = –0.756 ± 0.156 c = 0.832 ± 0.116
	Desviación típica	a = 0.310 ± 0.036 b = –0.091 ± 0.115 c = 0.137± 0.086
	Percentil del 95%	a = 0.310 ± 0.054 b = –0.755 ± 0.170 c = 0.916 ± 0.127
	Percentil del 5%	a = 0.090 ± 0.092 b = –0.527 ± 0.291 c = 0.534 ± 0.217

2. 3. Primera propuesta de modelación (Capítulo 4. Apartado 4.2.1.1.)

Hay que tener en cuenta que el ajuste lineal establecido en esta primera propuesta de modelación se basa, en el caso de la presión media, desviación típica y percentil del 95%, en la transformación logarítmica siguiente:

$$\ln\left(-\ln\left(\frac{P_{normalizada}}{\gamma\, h}\right)\right) = A \cdot \ln\left(\frac{y}{l}\right) + B \tag{16}$$

Donde, si el modelo se escribe en la forma

$$P_{normalizada} = \exp\left(-k\left(\frac{y}{l}\right)^{\alpha}\right) \tag{17}$$

entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= A \\ k &= \exp(B) \end{aligned} \tag{18}$$

Mientras que para el percentil del 5% se estableció el siguiente ajuste cuadrático:

$$\left[P_{Perc.5\%}\right]_{normalizad\,o} = a\left(\frac{z}{h}\right)^2 + b\frac{z}{h} + c \tag{19}$$

En la Tabla 4.15 y la Tabla 4.16, mostradas en el apartado 4.2.1.1 del Capítulo 4 se han mostrado los coeficientes que se proponen para el modelo en cuestión. A lo largo de todo el apartado 4.2.1.1 del citado Capítulo 4, se establece todo el proceso desarrollado hasta llegar a los resultados mostrados en la Tabla 4.15 y Tabla 4.16 referenciadas anteriormente. Nótese que este modelo establece una única curva que se ajusta con aparentemente buena correlación, de manera simultánea, a los valores adimensionalizados de la presión media, desviación típica y percentil del 95%, para todos los caudales y los dos escalones ensayados. Por este motivo se, mostrará a continuación el análisis de inferencia realizado de manera conjunta a los tres citados estadísticos, y para todos los caudales y escalones ensayados.

El caso del percentil del 5%, debido a que se le estableció un patrón distinto al exponencial (expresión (19)) se analizará de manera independiente.

2. 3. 1. Contraste sobre la regresión

2. 3. 1. 1. Presiones medias, desviación típica y percentil del 95%

Se pasa a analizar la existencia de correlación muestral significativa entre los valores de la presión media, desviación típica y percentil del 95% de manera conjunta y su posición en la huella, para el ajuste de la primera propuesta de modelación (i. e. $ln(-ln(P_{normalizada}))$ y $ln(y/l)$).

Así, considerando la hipótesis nula, H_0, que establece que la correlación muestral entre los valores para los que se establecerá el ajuste lineal es nula ($r = 0$), la ecuación (4) establece el estadístico a analizar:

$$t = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}, \quad siendo \quad \hat{t} = 39.8 \tag{20}$$

Con ello, si el límite del contraste (expresión (5)) es $c = 2.84$, que corresponde a una distribución t de Student con $183 - 2 = 181$ grados de libertad, para un nivel de significación $\alpha = 1\%$, se aprecia que el valor del estadístico $\hat{t} > c$, por lo que hay que rechazar la hipótesis nula con un nivel de significación del 1%, y por tanto podrá asumirse que la correlación entre los valores para los que se establecerá el modelo sí es significativa.

2. 3. 1. 2. Percentil 5%

Igualmente en este caso se analiza la existencia o no de correlación significativa entre los valores obtenidos para el percentil del 5% y su posición en la huella. En este caso se ha establecido un patrón cuadrático (expresión (19)), por lo que si se establece la hipótesis nula, H_0, según la cual, igual que en el apartado anterior, $r = 0$, el estadístico a analizar viene dado por la ecuación (6), donde en este caso $m = 2$ y $n = 96$:

$$F = \frac{r^2 / (m-1)}{(1-r^2) / (n-m)}, \quad siendo \quad \hat{F} = 1390 \qquad (21)$$

Si el límite del contraste (expresión (7)) es c = 6.91 (distribución F con $2 - 1 = 1$ y $96 - 2 = 94$ grados de libertad, con nivel de significación $\alpha = 1\%$). Con ello se concluye de nuevo que puede aceptarse la existencia de correlación significativa para establecer el citado modelo cuadrático.

2. 3. 2. Intervalos de confianza

2. 3. 2. 1. Para la pendiente y término independiente, del ajuste global a la presión media, desviación típica y percentil del 95%

En la Tabla 4.16 del apartado 4.2.1.1.1 del Capítulo 4, se mostraron los valores k y α de la ecuación (17), para la distribución global sobre la huella de la presión, desviación típica y percentil del 95%. En la siguiente Tabla 4 se resumen los cálculos realizados para la estimación de los intervalos de confianza del 95% de ambos parámetros.

Tabla 4. Determinación de los intervalos de confianza del 95% para la pendiente y término independiente del ajuste global de la presión media, desviación típica y percentil del 95%.

$k = 20.1$	$B = 3.00$	$s_B = 0.058$	$t_{0.025,\, n-2} = 2.26$	$\mathbf{3.00 \pm 0.131}$
$\alpha = 2.91$	$A = 2.91$	$s_A = 0.052$	$t_{0.025,\, n-2} = 2.26$	$\mathbf{2.91 \pm 0.118}$

2. 3. 2. 2. Para los coeficientes correspondientes al ajuste global al percentil del 5%

En la Tabla 4.15 del apartado 4.2.1.1.1 del Capítulo 4, se mostraron los valores obtenidos para el ajuste correspondiente al percentil del 5%. A continuación se muestran los intervalos de confianza obtenidos para cada coeficiente:

Tabla 5. Intervalos de confianza del 95% correspondientes a los coeficientes de la expresión (19)

Coeficiente $a = 4.50$	$s_a = 0.145$	$t_{0.025,\, n-2} = 2.28$	$\mathbf{4.50 \pm 0.330}$
Coeficiente $b = -5.76$	$s_b = 0.167$	$t_{0.025,\, n-2} = 2.28$	$\mathbf{-5.76 \pm 0.380}$
Coeficiente $c = 1.87$	$s_c = 0.042$	$t_{0.025,\, n-2} = 2.28$	$\mathbf{1.87 \pm 0.096}$

2. 4. Segunda propuesta de modelación (Capítulo 4. Apartado 4.2.1.2.)

En este caso el patrón lineal establecido para esta segunda propuesta de modelación se basó, para los cuatro estadísticos analizados en:

$$\left[P_{estadísitico}\right]_{normalizado} = A\cos\left(\frac{y}{l}\cdot\frac{\pi}{2C}\right) + B \qquad (22)$$

A lo largo del apartado 4.2.1.2 del Capítulo 4, se establecen las bases para llegar al modelo cosenoidal propuesto:

$$\left[P_{estadísitico}\right]_{normalizado} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{y}{l}\cdot\frac{\pi}{2C}\right) + 1\right) \qquad (23)$$

Donde el único parámetro de ajuste es el coeficiente C, que depende del caudal circulante así como del estadístico que se esté analizando. Esta dependencia de C con el caudal hace que en este caso resulte, para cada estadístico, una familia de curvas en función del caudal. Por este motivo se analizará, a continuación, la existencia de correlación muestral significativa entre los valores correspondientes a cada estadístico ($P_{normalizada}$) y su posición en la huella ($cos((y/l)\pi/2C))$), de manera individualizada para cada caudal ensayado sobre cada escalón. De igual manera se estudiará la validez de asumir los coeficientes del modelo iguales a $1/2$.

2. 4. 1. Presiones medias

2. 4. 1. 1. Contraste sobre la regresión

Tabla 6. Análisis de la existencia de correlación muestral significativa entre los valores de la presión media y su posición en la huella, para el ajuste de la segunda propuesta de modelación (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y $\cos((y/l)\pi/2C)$). Límite del contraste, c = 4.77 (t de Student con 7-2=5 grados de libertad, con nivel de significación α =1%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Correlación (r)*	*Estadístico (ec.(4))*
63.51	1.17	0.993	18.9
	1.42	0.998	32.8
	1.64	0.996	26.0
	1.85	0.995	22.1
	2.05	0.989	15.1
	2.25	0.996	24.8
69.66	1.17	0.986	13.5
	1.42	0.988	14.5
	1.64	0.991	17.0
	1.85	0.991	16.4
	2.05	0.988	14.5
	2.25	0.985	12.9

En cualquier caso se acepta que la correlación muestral es significativa para establecer el segundo modelo que se plantea, con un nivel de significación del *1%*.

2. 4. 1. 2. Contraste sobre la pendiente y el término independiente

Tabla 7. Análisis de la validez de la pendiente A = 1/2 y del término independiente B = 1/2 para el modelo cosenoidal que relaciona los valores de la presión media y su posición en la huella, (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y $\cos((y/l)\pi/2C)$, expresión (23)). Límite del contraste, c = 2.57 (t de Student con 7-2=5 grados de libertad, con nivel de significación α =10%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Coeficientes ajustados*		*Estadístico del contraste*	
		Pendiente	*Término independiente*	*Pendiente (ec.(12))*	*Término independiente (ec(14))*
63.51	1.17	0.519	0.519	0.678	0.864
	1.42	0.513	0.513	0.843	1.08
	1.64	0.526	0.526	1.28	1.63
	1.85	0.522	0.522	0.916	1.17
	2.05	0.532	0.532	0.919	1.18
	2.25	0.516	0.516	0.769	0.986
69.66	1.17	0.507	0.507	0.196	0.258
	1.42	0.512	0.512	0.334	0.441
	1.64	0.527	0.527	0.864	1.15
	1.85	0.530	0.530	0.929	1.26
	2.05	0.536	0.536	0.968	1.35
	2.25	0.537	0.537	0.887	1.27

Se acepta, entonces, con un nivel de significación del *10%* que los coeficientes del modelo, pueden adoptar los valores $A = 0.5$ y $B = 0.5$.

2. 4. 2. Desviación Típica

2. 4. 2. 1. Contraste sobre la regresión

Tabla 8. Análisis de la existencia de correlación muestral significativa entre los valores de la desviación típica y su posición en la huella, para el ajuste de la segunda propuesta de modelación (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y cos((y/l)π/2C)). Límite del contraste, c = 4.77 (t de Student con 7-2=5 grados de libertad, con nivel de significación α =1%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Correlación (r)*	*Estadístico (ec.(4))*
63.51	1.17	0.994	19.6
	1.42	0.997	30.9
	1.64	0.998	37.9
	1.85	0.999	43.7
	2.05	0.996	16.2
	2.25	0.996	25.8
69.66	1.17	0.989	15.0
	1.42	0.992	18.1
	1.64	0.996	24.3
	1.85	0.996	26.4
	2.05	0.994	20.3
	2.25	0.993	18.9

De nuevo, puede aceptarse con un nivel de significación del *1%* que la correlación muestral es significativa para establecer el modelo cosenoidal que se plantea sobre la desviación típica.

2. 4. 2. 2. Contraste sobre la pendiente y el término independiente

Tabla 9. Análisis de la validez de la pendiente A = 1/2 y del término independiente B = 1/2 para el modelo cosenoidal que relaciona los valores de la desviación típica y su posición en la huella, (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y cos((y/l)π/2C), expresión (23)). Límite del contraste, c = 2.57 (t de Student con 7-2=5 grados de libertad, con nivel de significación α =10%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Coeficientes ajustados*		*Estadístico del contraste*	
		Pendiente	*Término independiente*	*Pendiente (ec.(12))*	*Término independiente (ec(14))*
63.51	1.17	0.493	0.493	–0.281	–0.358
	1.42	0.496	0.496	–0.240	–0.306
	1.64	0.504	0.504	0.329	0.423
	1.85	0.512	0.512	0.989	1.28
	2.05	0.505	0.505	0.270	0.349
	2.25	0.488	0.488	–0.626	–0.813
69.66	1.17	0.512	0.512	0.342	0.448
	1.42	0.515	0.515	0.524	0.691
	1.64	0.520	0.520	0.950	1.26
	1.85	0.524	0.524	1.19	1.62
	2.05	0.525	0.525	0.980	1.36
	2.25	0.512	0.512	0.453	0.627

En cualquier caso podrá aceptarse con un nivel de significación del 10% que los coeficientes del modelo adoptan los valores *A = 1/2* y *B = 1/2*.

2. 4. 3. Percentil 95%

2. 4. 3. 1. Contraste sobre la regresión

Tabla 10. Análisis de la existencia de correlación muestral significativa entre los valores del percentil del 95% y su posición en la huella, para el ajuste de la segunda propuesta de modelación (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y cos((y/l)π/2C)). Límite del contraste, c = 4.77 (t de Student con 7-2=5 grados de libertad, con nivel de significación α =1%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Correlación (r)*	*Estadístico (ec.(4))*
63.51	1.17	0.994	20.5
	1.42	0.998	36.3
	1.64	0.998	34.8
	1.85	0.997	19.9
	2.05	0.995	22.1
	2.25	0.997	28.6
69.66	1.17	0.988	14.2
	1.42	0.991	16.9
	1.64	0.994	19.9
	1.85	0.994	20.3
	2.05	0.991	16.5
	2.25	0.991	16.1

Puede concluirse que la correlación muestral es significativa para el patrón cosenoidal del percentil del 95%, con un nivel de significación del *1%.*

2. 4. 3. 2. Contraste sobre la pendiente y el término independiente

Tabla 11. Análisis de la validez de la pendiente A = 1/2 y del término independiente B = 1/2 para el modelo cosenoidal que relaciona los valores del percentil del 95% y su posición en la huella, (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y cos((y/l)π/2C), expresión (23)). Límite del contraste, c = 2.57 (t de Student con 7-2=5 grados de libertad, con nivel de significación α =10%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Coeficientes ajustados*		*Estadístico del contraste*	
		Pendiente	*Término independiente*	*Pendiente (ec.(12))*	*Término independiente (ec(14))*
63.51	1.17	0.507	0.507	0.294	0.374
	1.42	0.501	0.501	0.099	0.126
	1.64	0.514	0.514	0.973	1.25
	1.85	0.513	0.513	0.762	0.979
	2.05	0.519	0.519	0.799	1.03
	2.25	0.502	0.502	0.139	0.180
69.66	1.17	0.510	0.510	0.289	0.379
	1.42	0.515	0.515	0.479	0.632
	1.64	0.525	0.525	0.946	1.26
	1.85	0.529	0.529	1.12	1.53
	2.05	0.535	0.535	1.08	1.51
	2.25	0.522	0.522	0.674	0.948

De nuevo se aceptará con un nivel de significación del 10% que los coeficientes, podrán adoptar los valores A = 1/2 y $B = 1/2$.

2. 4. 4. Percentil 5%

2. 4. 4. 1. Contraste sobre la regresión

Tabla 12. Análisis de la existencia de correlación muestral significativa entre los valores del percentil del 5% y su posición en la huella, para el ajuste de la segunda propuesta de modelación (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y $\cos((y/l)\pi/2C)$). Límite del contraste, c = 4.77 (t de Student con 7-2=5 grados de libertad, con nivel de significación α =1%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Correlación (r)*	*Estadístico (ec.(4))*
63.51	1.17	0.982	11.6
	1.42	0.997	27.5
	1.64	0.992	17.1
	1.85	0.988	14.4
	2.05	0.976	9.96
	2.25	0.987	13.5
69.66	1.17	0.972	9.31
	1.42	0.969	8.78
	1.64	0.983	11.9
	1.85	0.973	9.42
	2.05	0.949	6.77
	2.25	0.938	6.06

Para el percentil del 5%, se observa igual que en los otros casos que la correlación muestral también es significativa para su patrón cosenoidal, con un nivel de significación del *1%.*

2. 4. 4. 2. Contraste sobre la pendiente y el término independiente

Tabla 13. Análisis de la validez de la pendiente A = 1/2 y del término independiente B = 1/2 para el modelo cosenoidal que relaciona los valores del percentil del 5% y su posición en la huella, (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y $\cos((y/l)\pi/2C)$, expresión (23)). Límite del contraste, c = 2.57 (t de Student con 7-2=5 grados de libertad, con nivel de significación α =10%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Coeficientes ajustados*		*Estadístico del contraste*	
		Pendiente	*Término independiente*	*Pendiente (ec.(12))*	*Término independiente (ec(14))*
63.51	1.17	0.517	0.535	0.378	1.01
	1.42	0.534	0.540	1.733	2.68
	1.64	0.525	0.537	0.823	1.59
	1.85	0.520	0.526	0.548	0.956
	2.05	0.500	0.509	0.004	0.241
	2.25	0.522	0.532	0.561	1.09
69.66	1.17	0.519	0.519	0.342	0.445
	1.42	0.520	0.520	0.341	0.466
	1.64	0.538	0.549	0.840	1.48
	1.85	0.538	0.555	0.666	1.22
	2.05	0.534	0.566	0.426	1.15
	2.25	0.523	0.563	0.262	1.01

Se acepta, entonces, con un nivel de significación del *10%* que los coeficientes del modelo, pueden adoptar los valores *A = 1/2* y *B = 1/2.*

3. Distribución de la presión sobre las contrahuellas

3. 1. Bondad de ajuste de los registros normalizados

Para cada caudal, sobre la contrahuella de dos peldaños (*L/k_s = 61.46* y *L/k_s = 67.61*), se ha registrado la presión en cinco puntos de medida sobre el *L/k_s = 61.46* y siete sobre *L/k_s = 67.61*. Tal y como ya ha sido descrito en el apartado 4.2.2 del Capítulo 4, en cada punto se obtuvieron al menos dos registros que fueron tomados a fin de corroborar la repetibilidad del fenómeno. Igualmente se ha citado ya que cualquier tratamiento posterior de dichos registros se ha realizado a partir de sus valores medios, en cada punto de medida.

En este apartado se muestra el análisis de la bondad de ajuste, a una distribución normal, de los valores obtenidos para cada uno de los estadísticos analizados, sobre las contrahuellas analizadas. Al igual que sucedió para los valores obtenidos sobre las huellas (ver apartado 2. 1), debido al número de puntos analizado (ver apartado 4.1 del Capítulo 4) y al número de valores promediados para la obtención de los estimadores de los respectivos estadísticos, cabe esperar algunos problemas en aceptar la normalidad para alguno de los casos analizados.

Al igual que se apreció sobre el análisis equivalente desarrollado para los valores correspondientes a las huellas, en general se aprecia una aceptable bondad de ajuste a una distribución normal, como para asegurar un buen punto de partida para la aplicación de las herramientas de contraste de los modelos, cuyos resultados se mostrarán a continuación. Ello es así para el comportamiento sobre las contrahuellas de todos los estadísticos, salvo en el caso del percentil del 95%, para el cual en general no se podrá asumir dicho comportamiento normal.

Tabla 14. Análisis de la bondad de ajuste de los valores estimados para cada estadístico de trabajo, a una distribución normal.

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Media*		*Desv. Típica*		*Percentil 95%*		*Percentil 5%*	
		D (ec. (3))	α_p	*D (ec. (3))*	α_p	*D (ec. (3))*	α_p	*D (ec. (3))*	α_p
61.46	1.17	0.182	> 0.20	0.292	> 0.20	0.278	> 0.20	0.227	> 0.20
	1.42	0.215	> 0.20	0.254	> 0.20	0.310	0.113	0.245	> 0.20
	1.64	0.238	> 0.20	0.244	> 0.20	0.375	0.045	0.240	> 0.20
	1.85	0.276	> 0.20	0.258	> 0.20	0.401	0.022	0.222	> 0.20
	2.05	0.285	> 0.20	0.260	> 0.20	0.381	0.018	0.209	> 0.20
	2.25	0.296	> 0.20	0.257	> 0.20	0.390	0.030	0.198	> 0.20
67.61	1.17	0.225	> 0.20	0.216	> 0.20	0.314	0.036	0.163	> 0.20
	1.42	0.145	> 0.20	0.184	> 0.20	0.274	0.110	0.179	> 0.20
	1.64	0.162	> 0.20	0.196	> 0.20	0.263	0.148	0.167	> 0.20
	1.85	0.214	> 0.20	0.231	> 0.20	0.240	> 0.20	0.157	> 0.20
	2.05	0.258	> 0.20	0.235	> 0.20	0.263	0.146	0.155	> 0.20
	2.25	0.271	0.120	0.193	> 0.20	0.334	0.019	0.143	> 0.20

3. 2. Intervalos de confianza de las estimaciones de los valores máximo y mínimo de cada estadístico

Al igual que se ha planteado en el caso de las huellas, se muestra a continuación los intervalos de confianza del 95% correspondientes a los ajustes de los valores máximo y mínimo de cada estadístico. En la Tabla 4.29 del Capítulo 4, se presentaron las expresiones propuestas. Estas expresiones se obtuvieron de manera conjunta para ambos escalones (*L/k_s = 69.66* y *L/k_s = 63.51*).

Tabla 15. Intervalos de confianza del 95% correspondientes a los ajustes de los valores máximo y mínimo de cada estadístico sobre la contrahuella. (Ver Tabla 4.29 del Capítulo 4)

Estadístico		*Intervalos de confianza*
Máximo $\frac{P}{\gamma\, h}=a\left(\frac{y_c}{h}\right)^2+b\frac{y_c}{h}+c$	Presión media	a = 0 b = 0.377 ± 0.059 c = 0.061 ± 0.099
	Desviación típica	a = 0 b = 0.261 ± 0.039 c = –0.049 ± 0.065
	Percentil del 95%	a = 0 b = 0.797 ± 0.076 c = –0.174 ± 0.127
	Percentil del 5%	a = 1.61 ± 0.107 b = –0.503 ± 0.339 c = 0.638 ± 0.252
Mínimo $\frac{P}{\gamma\, h}=b\frac{y_c}{h}+c$	Presión media	b = 0.181 ± 0.056 c = –0.531 ± 0.084
	Desviación típica	b = 0.135 ± 0.020 c = –0.065 ± 0.031
	Percentil del 95%	b = 0.365 ± 0.042 c = –0.313 ± 0.071
	Percentil del 5%	b = –0.275 ± 0.105 c = –0.444 ± 0.170

3. 3. Propuesta de modelación (Capítulo 4. Apartado 4.2.2.1.)

El patrón lineal establecido para esta propuesta de modelación, para los cuatro estadísticos analizados, se estableció a partir de:

- para la presión media y el percentil del 5%:

$$\left[P_{estadísitico}\right]_{normalizad\,o}=A\cos\left(\frac{z}{h}\cdot\pi\right)+B \qquad (24)$$

- para la desviación típica y el percentil del 95%:

$$\left[P_{percentil95\%}\right]_{normalizad\,o}=A\sin\left(\frac{z}{h}\cdot\frac{\pi}{4C}\right)+B \qquad (25)$$

En el apartado 4.2.2.1 del Capítulo 4, se establecen las bases para llegar al modelo trigonométrico propuesto, así en la Tabla 4.27 del citado capítulo, ser resumen los valores que deben adoptar dichos coeficientes:

$$\textit{Presión media: } \left[P_{media}\right]_{normalizad\,o}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{z}{h}\cdot\pi\right)\right) \qquad (26)$$

$$\textit{Desviación típica: } \left[P_{Desv.Típica}\right]_{normalizad\,o}=1-\sin\left(\frac{z}{h}\cdot\frac{\pi}{4C}\right) \qquad (27)$$

$$\textit{Percentil del 5\%: } \left[P_{media}\right]_{normalizad\,o}=\frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{z}{h}\cdot\pi\right)\right) \qquad (28)$$

$$\textit{Percentil del 95\%:}\ \left[P_{Perc.95\%}\right]_{normalizado} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4C}\right)-1}\left(\sin\left(\frac{z}{h}\cdot\frac{\pi}{4C}\right)-1\right) \qquad (29)$$

Donde, al igual que se planteó sobre la huella, el único parámetro de ajuste del modelo es el coeficiente C, que es función del caudal circulante así como del estadístico que se esté estudiando. Resultan pues, para la desviación típica y percentil del 95% una familia de curvas en función del caudal. En cambio, para la presión media y percentil del 5% resulta una única curva común a todos los caudales. Así, a continuación, se analizará que la correlación muestral, entre los valores correspondientes a cada estadístico ($P_{normalizada}$) y su posición sobre la contrahuella ($cos((z/h)\pi)$ ó $sin((z/h)\pi/4C)$), es suficientemente significativa. Se planteará de manera individualizada para cada caudal ensayado sobre cada escalón. Al igual, se analizará la validez de asumir los coeficientes del modelo iguales a los mostrados en las ecuaciones (26) a (29).

3. 3. 1. Presiones medias

3. 3. 1. 1. Contraste sobre la regresión

Nótese que en el peldaño $L/k_s = 67.61$ para el caudal $y_c/h = 2.25$, para un nivel de significación $\alpha = 1\%$ el estadístico se encuentra prácticamente sobre el límite del contraste, es decir, para tal nivel de significación, en dicho caso, habría que aceptar la hipótesis nula según la cual la correlación muestral no es significativa, aunque para un nivel de significación no mucho mayor del 1% (por ejemplo con $\alpha = 1.2\%$ el límite del contraste sería $c = 4.57$), ésta podría ser rechazada. Para $L/k_s = 61.46$ tan solo los dos caudales menores, para los que se registraron 5 puntos sobre la contrahuella, permiten asegurar la existencia de correlación muestral a un nivel de significación $\alpha = 1\%$. El resto de caudales debido a la cantidad de puntos que finalmente fueron aceptados (únicamente 4 en cada caso) precisan de un mayor nivel de significación para rechazar la hipótesis nula y por tanto aceptar la existencia de correlación muestral. A pesar de ello, se prosigue con el análisis por cuanto puede apreciarse que los coeficientes de correlación obtenidos fueron siempre superiores al 90%.

Tabla 16. Análisis de la existencia de correlación muestral significativa entre los valores de la presión media y su posición en la contrahuella, para el ajuste propuesto (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y $cos((z/h)\pi)$).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Correlación (r)*	*Límite del contraste (c)*	*Estadístico (ec.(4))*
61.46	1.17	−0.977	$t_{0.01/2,5-2} = 7.45$	−7.87
	1.42	−0.964	$t_{0.017/2,5-2} = 6.19$	−6.25
	1.64	−0.947	$t_{0.107/2,4-2} = 4.15$	−4.16
	1.85	−0.923	$t_{0.154/2,4-2} = 3.39$	−3.39
	2.05	−0.914	$t_{0.172/2,4-2} = 3.19$	−3.19
	2.25	−0.905	$t_{0.189/2,4-2} = 3.02$	−3.03
67.61	1.17	−0.970	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	−8.87
	1.42	−0.972	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	−9.25
	1.64	−0.956	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	−7.31
	1.85	−0.950	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	−6.82
	2.05	−0.924	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	−5.39
	2.25	−0.900	$t_{0.012/2,7-2} = 4.57$	−4.61

3. 3. 1. 2. Contraste sobre la pendiente y el término independiente

De la observación de la siguiente tabla se concluye que se acepta, entonces, con un nivel de significación del *10%* que los coeficientes del modelo, pueden adoptar los valores $A = -1/2$ y $B = 1/2$.

Tabla 17. Análisis de la validez de la pendiente A = –1/2 y del término independiente B = 1/2 para el modelo cosenoidal que relaciona los valores de la presión media y su posición en la contrahuella, (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y $\cos((z/h)\pi)$, expresión (26)). Nivel de significación de los contrastes α =10%.

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Coeficientes ajustados*		*Límite del contraste (c)*	*Estadístico del contraste*	
		Pendiente	*Término independiente*		*Pendiente (ec.(12))*	*Término independiente (ec.(14))*
61.46	1.17	–0.464	0.465	$t_{0.05,5-2} = 3.18$	0.603	–0.871
	1.42	–0.458	0.443	$t_{0.05,5-2} = 4.18$	0.577	–1.13
	1.64	–0.450	0.520	$t_{0.05,4-2} = 6.21$	0.463	0.197
	1.85	–0.446	0.487	$t_{0.05,4-2} = 6.21$	0.408	–0.106
	2.05	–0.447	0.473	$t_{0.05,4-2} = 6.21$	0.375	–0.209
	2.25	–0.447	0.462	$t_{0.05,4-2} = 6.21$	0.355	–0.278
67.61	1.17	–0.461	0.444	$t_{0.05,7-2} = 3.16$	0.760	–1.389
	1.42	–0.439	0.458	$t_{0.05,7-2} = 3.16$	1.29	–1.15
	1.64	–0.424	0.467	$t_{0.05,7-2} = 3.16$	1.31	–0.744
	1.85	–0.439	0.422	$t_{0.05,7-2} = 3.16$	0.953	–1.57
	2.05	–0.453	0.357	$t_{0.05,7-2} = 3.16$	0.565	–2.21
	2.25	–0.433	0.359	$t_{0.05,7-2} = 3.16$	0.712	–1.94

3. 3. 2. Desviación Típica

3. 3. 2. 1. Contraste sobre la regresión

Apréciese como en este caso, en el peldaño $L/k_s = 61.46$ para los caudales $2.25 > y_c/h > 1.64$, habría que aceptar la hipótesis nula, con un nivel de significación entre *2.5*% y 3.4%. Sin ninguna duda, ello es debido a que en dichos casos se ha trabajado con tan solo *4* puntos de medida, mientras que en el $L/k_s = 67.61$ se trabajó sobre *7* puntos. Ello fue así, debido a que en el primer peldaño, tal y como ya ha sido citado anteriormente, hubo que desestimar los registros que ahora se echan en falta, debido a irregularidades detectadas durante el procesamiento de los datos. A pesar de todo, puede observarse que las correlaciones obtenidas en cada caso son superiores al 98%, por lo que se procederá en adelante, a confirmar el modelo aunque siempre siendo muy conscientes de los inconvenientes detectados. En el caso del peldaño L/k_s = *61.*46, para los caudales $y_c/h = 1.64$ e $y_c/h = 1.85$ se requiere un nivel de significación del test algo mayor del *1*% (*1.3*% y *2.3*% respectivamente) debido, en este caso, a las correlaciones mostradas entre las variables (*0.898* y *0.869* respectivamente) algo inferiores a los valores obtenidos para el resto de caudales.

Tabla 18. Análisis de la existencia de correlación muestral significativa entre los valores de la desviación típica y su posición en la contrahuella, para el ajuste propuesto (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y $\sin((z/h)\pi/4C)$).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Correlación (r)*	*Límite del contraste (c)*	*Estadístico (ec.(4))*
61.46	1.17	–0.984	$t_{0.01/2,5-2} = 7.45$	–9.48
	1.42	–0.985	$t_{0.01/2,5-2} = 7.45$	–9.86
	1.64	–0.983	$t_{0.034/2,4-2} = 7.57$	–7.67
	1.85	–0.983	$t_{0.034/2,4-2} = 7.57$	–7.62
	2.05	–0.986	$t_{0.028/2,4-2} = 8.36$	–8.38
	2.25	–0.988	$t_{0.025/2,4-2} = 8.86$	–8.98
67.61	1.17	–0.919	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–5.21
	1.42	–0.922	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–5.34
	1.64	–0.898	$t_{0.013/2,7-2} = 4.48$	–4.56
	1.85	–0.869	$t_{0.023/2,7-2} = 3.89$	–3.92
	2.05	–0.942	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–6.27
	2.25	–0.940	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–6.17

3. 3. 2. 2. Contraste sobre la pendiente y el término independiente

Tabla 19. Análisis de la validez de la pendiente A = –1 y del término independiente B = 1 para el modelo cosenoidal que relaciona los valores de la desviación típica y su posición en la contrahuella, (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y cos((z/h)π/2C), expresión (27)). Nivel de significación de los contrastes α =10%.

Escalón (L/k_s)	Caudal (y_c/h)	Coeficientes ajustados		Límite del contraste (c)	Estadístico del contraste	
		Pendiente	Término independiente		Pendiente (ec.(12))	Término independiente (ec(14))
61.46	1.17	–1.05	1.11	$t_{0.05,5-2} = 3.18$	–0.433	1.27
	1.42	-1.06	1.12	$t_{0.05,7-2} = 3.18$	–0.569	1.42
	1.64	–1.05	1.12	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	–0.386	1.18
	1.85	–1.06	1.12	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	–0.419	1.24
	2.05	–1.07	1.13	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	–0.518	1.51
	2.25	–1.06	1.13	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	–0.548	1.55
67.61	1.17	–1.05	1.13	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.271	0.904
	1.42	–1.05	1.13	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.261	0.968
	1.64	–1.04	1.12	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.155	0.780
	1.85	–1.10	1.21	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.344	1.11
	2.05	–1.11	1.21	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.604	1.80
	2.25	–1.03	1.11	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.202	1.04

En cualquier caso podrá aceptarse con un nivel de significación del 10% que los coeficientes del modelo adoptan los valores $A = -1$ y $B = 1$.

3. 3. 3. Percentil 95%

3. 3. 3. 1. Contraste sobre la regresión

Nótese como en este caso, ningún caudal ensayado para el escalón $L/ks = 61.46$ supera el contraste con un nivel de significación del *5%*. Al igual que sucedió en el caso anterior de la desviación típica, el caso más crítico de aceptación de la hipótesis nula, ha correspondido al caudal $y_c/h = 1.65$, para el cual dicha H_0 tan solo podría ser rechazada para un nivel de significación del 13.5%. Sin duda, de nuevo, ello es debido a los pocos puntos de registro usados. A pesar de todo, al igual que en el caso anterior de la presión media, obsérvese como las correlaciones obtenidas en cualquier caso superaron 0.90, nivel que se considera suficientemente alto para poder establecer los contrastes sobre los valores fijados de los coeficientes *A* y *B*.

Tabla 20. Análisis de la existencia de correlación muestral significativa entre los valores del percentil del 95% y su posición en la contrahuella, para el ajuste propuesto (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y sin((z/h)π/4C)).

Escalón (L/k_s)	Caudal (y_c/h)	Correlación (r)	Límite del contraste (c)	Estadístico (ec.(4))
61.46	1.17	–0.905	$t_{0.07/2,5-2} = 3.67$	–3.68
	1.42	–0.915	$t_{0.06/2,7-2} = 3.90$	–3.92
	1.64	–0.934	$t_{0.135/2,4-2} = 3.65$	–3.69
	1.85	–0.943	$t_{0.115/2,4-2} = 3.99$	–4.00
	2.05	–0.949	$t_{0.105/2,4-2} = 4.19$	–4.25
	2.25	–0.949	$t_{0.105/2,4-2} = 4.19$	–4.27
67.61	1.17	–0.939	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–6.10
	1.42	–0.927	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–5.53
	1.64	–0.914	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–5.05
	1.85	–0.930	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–5.68
	2.05	–0.951	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–6.88
	2.25	–0.939	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–6.08

3. 3. 3. 2. Contraste sobre la pendiente y el término independiente

Tabla 21. Análisis de la validez de la pendiente y del término independiente dados por la expresión (29) para el modelo senoidal que relaciona los valores del percentil del 95% y su posición en la contrahuella, (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y sin((z/h)π/4C)). Nivel de significación de los contrastes α =10%).

Escalón (L/k_s)	Caudal (y_c/h)	Coeficientes ajustados		Límite del contraste (c)	Estadístico del contraste	
		Pendiente	Término independiente		Pendiente (ec.(12))	Término independiente (ec(14))
61.46	1.17	–0.443	0.438	$t_{0.05,5-2} = 3.18$	0.536	–0.835
	1.42	–0.451	0.458	$t_{0.05,7-2} = 3.18$	0.428	–0.526
	1.64	–0.479	0.479	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	0.230	–0.336
	1.85	–0.496	0.496	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	0.173	–0.261
	2.05	–0.507	0.507	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	0.136	–0.209
	2.25	–0.508	0.509	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	0.136	–0.197
67.61	1.17	–0.480	0.480	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	0.258	–0.366
	1.42	–0.481	0.481	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	0.247	–0.373
	1.64	–0.517	0.517	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.066	0.101
	1.85	–0.540	0.540	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.213	0.328
	2.05	–0.546	0.545	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.158	0.242
	2.25	–0.568	0.569	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	–0.214	0.365

De nuevo se aceptará con un nivel de significación del 10% que los coeficientes, podrán adoptar los valores indicados por la expresión (29).

3. 3. 4. Percentil 5%

3. 3. 4. 1. Contraste sobre la regresión

El mismo comentario que se ha establecido en los casos anteriores, para $L/k_s = 61.46$ con $2.25 > y_c/h > 1.64$, podrá repetirse en este caso. Otra vez el caso más crítico ha correspondido al caudal $y_c/h = 1.64$, para el cual la hipótesis nula sólo podría ser rechazada con un nivel de significación del *11%.* En dicho peldaño, para el resto de caudales, se podría rechazar la hipótesis nula para niveles de significación entre el 1*.5%* y el *10%.* De nuevo las correlaciones obtenidas se consideran suficientes (mayores de *0.95*) para proceder a los contrastes de los coeficientes *A* y *B*.

Tabla 22. Análisis de la existencia de correlación muestral significativa entre los valores del percentil del 5% y su posición en la contrahuella, para el ajuste propuesto (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y cos((z/h)π/2C)).

Escalón (L/k_s)	Caudal (y_c/h)	Correlación (r)	Límite del contraste (c)	Estadístico (ec.(4))
61.46	1.17	–0.966	$t_{0.016/2,5-2} = 6.32$	–6.43
	1.42	–0.955	$t_{0.024/2,7-2} = 5.47$	–5.56
	1.64	–0.945	$t_{0.11/2,4-2} = 4.09$	–4.09
	1.85	–0.950	$t_{0.10/2,4-2} = 4.30$	–4.31
	2.05	–0.956	$t_{0.09/2,4-2} = 4.55$	–4.59
	2.25	–0.957	$t_{0.09/2,4-2} = 4.55$	–4.69
67.61	1.17	–0.979	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–10.63
	1.42	–0.963	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–7.95
	1.64	–0.958	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–7.45
	1.85	–0.971	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–9.14
	2.05	–0.974	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–9.70
	2.25	–0.959	$t_{0.01/2,7-2} = 4.77$	–7.61

3. 3. 4. 2. Contraste sobre la pendiente y el término independiente

Tabla 23. Análisis de la validez de la pendiente $A = -1/2$ y del término independiente $B = 1/2$ para el modelo cosenoidal que relaciona los valores del percentil del 5% y su posición en la contrahuella, (i. e. entre ($P_{normalizada}$) y $\cos((z/h)\pi/2C)$, expresión (28)). Nivel de significación de los contrastes α =10%).

Escalón (L/k_s)	*Caudal (y_c/h)*	*Coeficientes ajustados*		*Límite del contraste (c)*	*Estadístico del contraste*	
		Pendiente	*Término independiente*		*Pendiente (ec.(12))*	*Término independiente (ec(14))*
61.46	1.17	−0.497	0.530	$t_{0.05,5-2} = 3.18$	0.039	0.561
	1.42	−0.496	0.525	$t_{0.05,7-2} = 3.18$	0.050	0.465
	1.64	−0.492	0.515	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	0.063	0.166
	1.85	−0.489	0.489	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	0.095	−0.129
	2.05	−0.489	0.484	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	0.101	−0.201
	2.25	−0.488	0.471	$t_{0.05,4-2} = 4.30$	0.118	−0.357
67.61	1.17	−0.490	0.487	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	0.212	−0.367
	1.42	−0.489	0.498	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	0.184	−0.045
	1.64	−0.487	0.498	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	0.205	−0.040
	1.85	−0.476	0.470	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	0.458	−0.745
	2.05	−0.481	0.453	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	0.373	−1.22
	2.25	−0.478	0.441	$t_{0.05,7-2} = 2.57$	0.356	−1.21

Se acepta, entonces, con un nivel de significación del *10%* que los coeficientes del modelo, pueden adoptar los valores $A = -1/2$ y $B = 1/2$.