

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departamento de Ingeniería Hidráulica, Marítima y Ambiental

**ESTABILIZACIÓN DE LA SUPERFICIE
LIBRE EN LA SOLUCIÓN DE
ECUACIONES SHALLOW-WATER POR
ELEMENTOS FINITOS.
APLICACIONES OCEANOGRÁFICAS.**

Autor: Manuel Espino Infantes

Directores: Marc A. García

Agustín Sánchez-Arcilla

Barcelona, mayo de 1994

CAPÍTULO 4.

ESTABILIZACIÓN DE LAS OSCILACIONES ESPUREAS DE LA PRESIÓN EN LAS ECUACIO- NES DE SHALLOW-WATER

El elemento isoparamétrico de cuatro lados Q1/P0 es una opción frecuente en el estudio de problemas de "materiales incompresibles" por el MEF pese a que, al no satisfacer la condición de compatibilidad de Babuska-Brezzi (ó inf-sup), puede producir oscilaciones espúreas de la presión que degraden la convergencia de la solución.

Estos modos de presión espúreas parecen no afectar a las soluciones de la velocidad en formulaciones como las de penalización clásica (Lee et al., 1979). Pero, como se ha demostrado de forma experimental en el capítulo anterior, esto no es así desafortunadamente para el algoritmo generalizado de Uzawa.

El elemento Q_1/P_0 , por su bajo coste computacional, llega a ser más atractivo que elementos "ortodoxos" como el Q_2/P_1 , cuya precisión es cuadrática (vs. precisión $O(L)$ del elemento Q_1/P_0). Teniendo en cuenta que las incertidumbres que introducimos en los submodelos de cierre (e.g. tensiones turbulentas, fricción con el fondo, etc...), no está clara la ventaja de reducir el error de truncamiento en un orden de magnitud si ello es a costa de encarecer notablemente el coste computacional.

Por ello, se han investigado técnicas para obtener aproximaciones estables de la altura de la superficie libre utilizando la discretización Q_1/P_0 . En este capítulo se presenta una revisión del estado del arte de los métodos disponibles para obviar la severa restricción que el criterio de estabilidad de Babuska-Brezzi impone para las interpolaciones mixtas de la velocidad y de la presión.

4.1. Técnicas para eliminar los modos espúreos de presión

Podemos definir como modo de presión aquellas funciones $q_h' \in Q_h$ con $q_h' \neq 0$ tales que:

$$\int_{\Omega} q_h' \nabla_h \cdot u_h d\Omega = 0 \quad \forall u_h \in V_h \quad (4.1)$$

donde u_h es la solución para el problema discreto del campo de velocidades y V_h, Q_h son los subespacios de Hilbert de aproximaciones a la velocidad y a la altura de la superficie libre, respectivamente.

Existe una relación entre los modos de presión y las condiciones de contorno. Si $q_h' = \text{cte}$ en Ω , aplicando el teorema de Gauss en (4.1):

$$\int_{\Gamma} u_h \cdot n \, d\Gamma \quad \forall u_h \in V_h \quad (4.2)$$

donde (4.2) es el balance de masa global cuando consideramos un problema con condiciones de contorno Dirichlet homogéneas.

En el caso del elemento Q1/P0, la ecuación (4.1) tiene soluciones $q_h' \neq \text{cte}$ puesto que el núcleo del operador gradiente discreto tiene una dimensión mayor que uno. Estos son los llamados modos de presión espúreos. Su existencia significa que tenemos una condición de compatibilidad extra con los datos,

condición que además no tiene significado físico y que supone una restricción artificial a la solución del problema.

En un principio, para mejorar la calidad de los campos de presión (i.e. altura de la superficie libre) obtenidos con la discretización Q1/P0, se propusieron esquemas de filtrado de la solución numérica del tipo (Lee et al., 1979):

$$\eta''(x,y) = M^q(x,y) \eta''^q \quad (4.3)$$

(con convenio de suma para los superíndices repetidos), siendo $M^q(x,y)$ $q=1,2,\dots,M$ el conjunto de funciones de forma asociados con la velocidad, y η''^q los M valores nodales incógnitas del campo suavizado de alturas de superficie libre. Para un campo de η afectado por modos espúreas de presión, la función continua η'' que da un mejor ajuste sobre el dominio Ω , en el sentido de los mínimos cuadrados, será la que minimiza el siguiente funcional:

$$J = \int_{\Omega} (\eta'' - \eta)^2 d\Omega \quad (4.4)$$

donde J será mínimo cuando:

$$\frac{\partial J}{\partial \eta''^q} = 0 \quad \forall q=1,2,\dots,M \quad (4.5)$$

resultando un sistema lineal de ecuaciones del tipo:

$$K^{qp} \eta^{/q} = f^p \quad p=1,2,\dots,M \quad (4.6)$$

(con convenio de suma para los superíndices repetidos), siendo K^{qp} y f^p una matriz y un vector globales que se forman al ensamblar las contribuciones elementales:

$$(K^{qp})^{(e)} = \int_{\Omega^e} M^q M^p d\Omega \quad (4.7)$$

$$(f^p)^{(e)} = \int_{\Omega^e} \eta^{(e)} M^p d\Omega \quad (4.8)$$

Según Sani et al. (1981), los modos espúreos de presión en mallas rectangulares suelen ser generalmente ortogonales al conjunto de funciones base $M^q(x,y)$ $q=1,2,\dots,M$. De acuerdo con ello, la técnica descrita debe eliminarlos satisfactoriamente en esos casos. Ahora bien, con mallas no rectangulares, ello no es así sobre todo en los nodos esquina (Lee et al., 1979). Por otra parte, si se emplean algoritmos iterativos tipo Uzawa, se requiere un suavizado de cada solución intermedia de η para no afectar al campo de velocidad y con ello a la convergencia. Todo ello hace perder atractivo a esta técnica frente al empleo del elemento Q2/P1, exento de modos espúreos de presión.

Más recientemente, se han sugerido en la bibliografía diferentes alternativas para hacer frente, de una manera general, a la severa restricción que el criterio de Babuska-Brezzi impone sobre el tipo de elemento a utilizar en las formulaciones mixtas. Ellas se pueden agrupar en tres grandes grupos:

- Los métodos que calculan el campo de altura de superficie libre a través de una ecuación de Poisson, a la que generalmente se llega tomando la divergencia de la ecuación del momentum (e.g. Sohn y Heinrich, 1990).
- Los algoritmos que emplean la técnica de compresibilidad artificial y las formulaciones de Petrov-Galerkin con parámetros de "upwinding" adecuados a la escala de tiempo de los procesos físicos relevantes (ver e.g. Zienkiewicz y Wu, 1991).
- Por último, los métodos que eliminan iterativamente las inestabilidades de los campos de altura de superficie libre solución, proyectandolos sobre un subespacio libre de cualquier modo de presión espúreo (e.g. Fortin y Boivin, 1990).

4.1.1. Ecuaciones de Poisson para la presión

Sohn y Heinrich (1990) proponen una formulación tipo Poisson para calcular el campo de altura de superficie libre a partir de los campos de velocidades obtenidos a través de una técnica de penalización. Tomando la divergencia de la ecuación del momentum (III.3) obtienen esta ecuación para la altura de la superficie libre:

$$\nabla^2 \eta = \frac{\rho}{\rho_0} \nabla \cdot [-\varepsilon((u \nabla) u) + \frac{E}{2} (\nabla \cdot (K \nabla u)) - \tau] \text{ en } \Omega \quad (4.9)$$

donde u es el vector velocidad, η la altura de superficie libre, E es el número de Ekman, K es un coeficiente de viscosidad turbulenta, ρ la densidad, ρ_0 una densidad característica de la superficie marina y τ es el término que agrupa las fuerzas externas (fricción, tensión superficial ejercida por el viento, etc...)

La condición de contorno correcta para (4.9) la calculan al multiplicar (III.3) por el vector unitario normal al contorno (n) y evaluar el producto, entendiéndolo como un límite, en dicho contorno. Ello lleva a:

$$\frac{\partial \eta}{\partial n} = \frac{\rho}{\rho_0} n \cdot [-\varepsilon((u \nabla) u) + \frac{E}{2} (\nabla \cdot (K \nabla u)) - \tau] \text{ en } \Gamma \quad (4.10)$$

donde el problema de Neumann (4.9) y (4.10) tiene solución única salvo una constante aditiva que se puede especificar al fijar el valor de η en un punto.

Aplicando residuos ponderados a la ecuación (4.9) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\rho} \int_{\Omega} \nabla q \nabla \eta d\Omega &= \int_{\Gamma} q \left[\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \eta}{\partial n} - n \cdot \left[\varepsilon((u \nabla) u) + \frac{E}{2} (\nabla \cdot (K \nabla u)) - \tau \right] \right] d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \nabla q \cdot \left[\varepsilon((u \nabla) u) + \frac{E}{2} (\nabla \cdot (K \nabla u)) - \tau \right] d\Omega \quad \forall q \in Q' \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde q son las funciones de peso arbitrario pertenecientes al espacio de Hilbert Q' , con $Q' = H^1(\Omega)$. Al introducir (4.10) en (4.11) el problema, en su forma débil, resulta:

$$\frac{\rho_0}{\rho} \int_{\Omega} \nabla q \nabla \eta d\Omega = \int_{\Omega} \nabla q [\varepsilon((u \cdot \nabla)u) + \frac{\rho}{2} (\nabla \cdot (K \nabla u)) - \tau] d\Omega \quad \forall q \in Q' \quad (4.12)$$

Aquí, la aproximación al campo de η requiere conocer la segunda derivada parcial de las componentes de la velocidad. Los autores, para poder utilizar esta formulación a la vez que una discretización del tipo Q1/P0, proponen construir una aproximación de la derivada primera de la velocidad, usando una interpolación bilineal, de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M^q(x,y) \alpha^q \quad (4.13a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = M^q(x,y) \beta^q \quad (4.13b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = M^q(x,y) \gamma^q \quad (4.13c)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = M^q(x,y) \delta^q \quad (4.13d)$$

donde α^q , β^q , γ^q y δ^q son los valores de las derivadas en el nodo q y M^q son las funciones de forma bilineales.

Sean u'' y v'' son las aproximaciones en elementos finitos de u y v usando elementos bilineales, esto es:

$$u'' = M^q(x,y) u^q \quad (4.14a)$$

$$v'' = M^q(x,y) v^q \quad (4.14b)$$

La aproximación por mínimos cuadrados a la derivada primera de u con respecto a x se obtiene minimizando el funcional:

$$J_\alpha = \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u''}{\partial x} \right)^2 d\Omega \quad (4.15)$$

debiéndose proceder de igual manera para las otras derivadas parciales. La ecuación de Euler para (4.15) es:

$$\frac{\partial J_\alpha}{\partial \alpha^q} = 2 \int_\Omega M^q \left(M^p \alpha^p - \frac{\partial M^p}{\partial x} \alpha^p \right)^2 d\Omega \quad (4.16)$$

lo que nos conduce a un sistema de ecuaciones de la forma:

$$M\alpha = F \quad (4.17)$$

donde

$$M=[m^{pq}]=\int_{\Omega} M^p M^q d\Omega \quad (4.18a)$$

$$F=[f^q]=\int_{\Omega} M^q \frac{\partial M^p}{\partial x} u^p d\Omega \quad (4.18b)$$

La solución de (4.17) proporciona el vector α que contiene la primera derivada con respecto a x de u en los puntos nodales. La segunda derivada de u se obtiene directamente al derivar la ecuación (4.13a):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial M^q}{\partial x} \alpha^q \quad (4.19)$$

El mismo procedimiento es de aplicación para obtener la aproximación a las otras 3 derivadas parciales de segundo orden que aparecieren en la ecuación (4.12).

La dificultad de este método reside en la elección de las correctas condiciones de contorno para la altura de la superficie libre. En el contexto de los métodos fraccionados, Donea et al. (1980) demostraron que la incorrecta satisfacción de dichas condiciones de compatibilidad para las η estaban relacionadas con la aparición de modos espúreas de presión en la solución. La aproximación usual de que:

$$\vec{\nabla}\eta \cdot \vec{n}=0 \text{ en } \Gamma' \quad (4.20)$$

siendo Γ' la parte del contorno en la que imponemos condiciones Dirichlet homogéneas para la velocidad, no es acorde con la realidad. La correcta condición de contorno para η es la conservación de la componente del momentum normal al contorno (Gresho, 1991).

4.1.2. Métodos de compresibilidad artificial y formulaciones de Petrov-Galerkin

El método de compresibilidad artificial permite evitar la aparición de ceros en la diagonal de la matriz del sistema. Su fundamento es considerar como solución del problema definido a través de las ecuaciones (III.3) y (III.4) la del correspondiente problema no estacionario cuando el tiempo tiende a infinito y se emplea una ecuación de la continuidad perturbada del siguiente modo:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot u = 0 \quad (4.21)$$

siendo c una constante positiva arbitraria, de valor grande. El nombre que recibe el método proviene del hecho de que estas ecuaciones son formalmente

equivalentes a las que gobernarían el movimiento de un flujo compresible cuya ecuación de estado fuese:

$$\eta = c^2 \rho \quad (4.22)$$

Más allá de esta analogía formal, la ecuación carece de sentido físico hasta que no se alcanza la estacionaridad. La variable t no es realmente un tiempo, sino una variable de iteración adimensional ("marching variable") que progresa a medida que se avanza hacia la convergencia.

De entre las técnicas de elementos finitos para problemas de flúidos citados en la revisión de Zienkiewicz y Wu (1991), el algoritmo explícito de Taylor-Galerkin, utilizado con éxito en la discretización de problemas de convección-difusión y ecuaciones de flujo compresible, es una alternativa al método de compresibilidad artificial.

El problema no estacionario está descrito por las ecuaciones:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon((u \cdot \nabla)u) - \frac{E}{2} \nabla \cdot (K \nabla u) + \frac{\rho_0}{\rho} \nabla \eta - \tau = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \cdot u = 0 \quad (4.24)$$

que se discretizan en el tiempo usando una expansión en serie de Taylor de segundo orden:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_n \quad (4.25a)$$

$$\frac{\Delta \eta}{\Delta t} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_n + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Big|_n \quad (4.25b)$$

donde las derivadas de primer orden se deducen de (4.23) y (4.24):

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_n = [-\varepsilon((u \cdot \nabla)u) + \frac{E}{2} \nabla \cdot (K \nabla u) + \tau] \Big|_n - \frac{\rho_0}{\rho} \nabla \eta \Big|_n \quad (4.26a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \Big|_n = -c^2 \nabla \cdot u \Big|_n \quad (4.26b)$$

y las derivadas de segundo orden pueden ser obtenidas de forma similar, siendo para u:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_n &= \frac{\partial}{\partial t} [-\varepsilon((u \cdot \nabla)u) + \frac{E}{2} \nabla \cdot (K \nabla u) + \tau] \Big|_n - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \nabla \eta \right) \Big|_n = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [-\varepsilon((u \cdot \nabla)u) + \frac{E}{2} \nabla \cdot (K \nabla u) + \tau] \Big|_n - \frac{\rho_0}{\rho} \nabla \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \Big|_n = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [-\varepsilon((u \cdot \nabla)u) + \frac{E}{2} \nabla \cdot (K \nabla u) + \tau] \Big|_n - c^2 \frac{\rho_0}{\rho} \nabla^2 u \Big|_n \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aquí, el primer término de la derecha tiene mayor orden de derivación que el segundo, por lo que se puede aproximar:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_n = c^2 \frac{\rho_0}{\rho} \nabla^2 u \Big|_n \quad (4.28)$$

De forma análoga se obtiene la segunda derivada de η :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \Big|_n &= -\frac{\partial}{\partial t} c^2 \nabla \cdot u \Big|_n = -c^2 \nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \Big|_n = \\ &= c^2 \nabla \cdot \left[\varepsilon((u \cdot \nabla)u) - \frac{E}{2} \nabla \cdot (K \nabla u) - \tau + \frac{\rho_0}{\rho} \nabla \eta \right] \Big|_n \end{aligned} \quad (4.29)$$

Al introducir las ecuaciones (4.26a y b), (4.27) y (4.28) en (4.25a y b) se obtiene:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = -\varepsilon((u^{[r]} \cdot \nabla)u^{[r]}) + \frac{E}{2} \nabla \cdot (K \nabla u^{[r]}) + \tau - \frac{\rho_0}{\rho} \nabla \eta^{[r]} + \frac{1}{2} \Delta t c^2 \frac{\rho_0}{\rho} \nabla^2 u^{[r]} \quad (4.30a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\Delta \eta}{\Delta t} = -\nabla \cdot u^{[r]} + \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \left[\varepsilon((u^{[r]} \cdot \nabla)u^{[r]}) - \frac{E}{2} \nabla \cdot (K \nabla u^{[r]}) - \tau + \frac{\rho_0}{\rho} \nabla \eta^{[r]} \right] \quad (4.30)$$

Discretizando en el espacio las ecuaciones (4.30a y b) mediante el método de Galerkin con las funciones de forma (III.12a y b), se llega al sistema matricial:

$$\frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} M_u & 0 \\ 0 & M_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u^* \\ \Delta \eta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(u^*)+G' & D^t \\ D+L(u^*) & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ \eta^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

con

$$[M_u] = \int_{\Omega} M^t M d\Omega$$

$$[M_\eta] = -\frac{1}{c^2} \int_{\Omega} P^t P d\Omega$$

$$[G'] = -\frac{E}{2} \int_{\Omega} M^t \nabla \cdot (K \nabla M) d\Omega + \frac{1}{2} \Delta t c^2 \frac{\rho_0}{\rho} \int_{\Omega} M^t \nabla^2 M d\Omega$$

$$[L(u^*)] = \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot [\epsilon u^* \int_{\Omega} P^t ((M \nabla \cdot) M) d\Omega + \frac{E}{2} \int_{\Omega} P^t \nabla \cdot (K \nabla M) d\Omega]$$

$$[T] = \frac{1}{2} \Delta t \frac{\rho_0}{\rho} \int_{\Omega} P^t \nabla P d\Omega \quad (4.32)$$

y D^t, D, F iguales que en (III.16). Si nos interesa conocer, simplemente, la solución estacionaria, el sistema de ecuaciones a resolver se puede reducir a la expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} A(u^*)+G' & D^t \\ D+L(u^*) & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ \eta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

donde la matriz G' difiere de la matriz G de la expresión (III.15) sólo en el término que proviene de:

$$\frac{1}{2} \Delta t c^2 \frac{\rho_0}{\rho} \nabla(\nabla \cdot u) \quad (4.34)$$

Ahora bien, cuando se alcanza la convergencia y se cumple la condición de incompresibilidad, este término tiende a cero, por lo que entonces G' es similar a G .

Como tanto la matriz G como la T son matrices simétricas, no hay ceros en la diagonal de la matriz del sistema, y por tanto no existirán restricciones por esta razón sobre el tipo de elemento a utilizar para evitar los problemas de inestabilidad numérica en la solución. Ahora bien, en la expresión de la matriz T aparecen, de nuevo, derivadas de primer orden para las funciones de forma para la altura de la superficie libre, lo que restringe la aplicabilidad del elemento Q1/P0.

Sampaio (1991) llega a una formulación similar a esta, aplicando el método de los residuos ponderados de Galerkin a la ecuación de la continuidad estacionaria (III.4) y combinándola con el método de los mínimos cuadrados aplicado a las ecuaciones del momento discretizadas en el tiempo. El resultado en este caso es una formulación de Petrov-Galerkin donde el parámetro de "upwinding" se elige de acuerdo con la escala de tiempo del proceso físico relevante.

4.1.3. Técnica de los macroelementos

De acuerdo con lo propuesto por Fortin y Boivin (1990), supongamos que discretizamos el dominio Ω donde están definidas las ecuaciones (III.3), (III.4) y (III.5)) en una malla de elementos finitos Q1/P0 de tal forma que exista una relación biunívoca entre esta discretización y otra construída mediante macroelementos o agregaciones de 4 elementos Q1/P0 con un nodo común (figura 4.1a). Los autores citados demuestran que existe, relacionado con esta malla de macroelementos, un subespacio $Q_h'' \subset Q_h$ tal que la solución del problema discreto (III.9) y (III.10) en $V_h \times Q_h''$ es estable. Para llegar a él, se construye una base ortogonal de Q_h $\{\phi_{i,M}\}$ como muestra la figura 4.1b.

A partir de lo anterior, se definen de forma natural los subespacios:

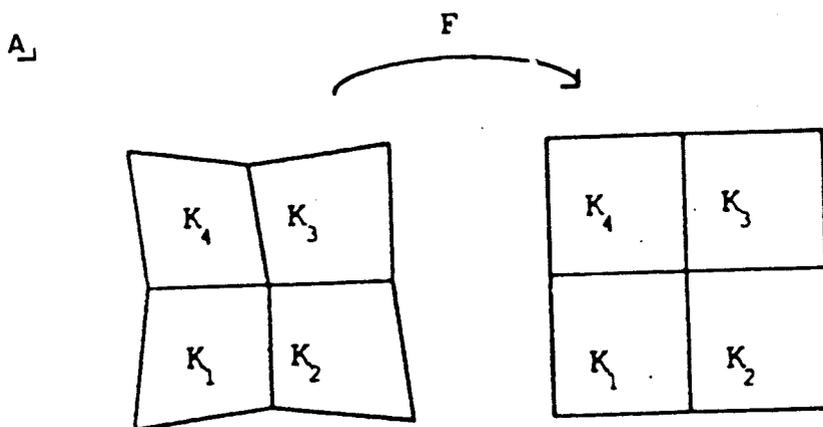
$$Q_h'' = \left[\sum_M \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{iM} \phi_{i,M} \right) \right] \quad (4.35a)$$

$$Q_h^* = \left[\sum_M \alpha_{4M} \phi_{4,M} \right] \quad (4.35b)$$

Es obvio que los modos espúreos de presión pertenecen al subespacio Q_h^* ; y que, además Q_h'' y Q_h^* son ortogonales por construcción con respecto al producto escalar $L^2(\Omega)$.

La proyección de $\eta_h \in Q_h$ sobre el subespacio Q_h^* es:

FIGURA 4.1. a) Un macroelemento y su referencia. b) Funciones base para la altura de superficie libre en el macroelemento. (Fuente: Fortin y Boivin, 1990)



B_1

+1	+1
+1	+1

a) $\phi_{1,M}$

-1	+1
-1	+1

b) $\phi_{2,M}$

-1	-1
+1	+1

c) $\phi_{3,M}$

-1	+1
+1	-1

d) $\phi_{4,M}$

$$P(\eta_h) = \sum_M \alpha_{4,M}(\eta_h) \phi_{4,M} \quad (4.36)$$

donde:

$$\alpha_{4,M}(\eta_h) = \frac{\int_M \eta_h \phi_{4,M} d\Omega}{\int_M \phi_{4,M} \phi_{4,M} d\Omega} \quad (4.37)$$

siendo $I \cdot P(\eta_h)$ la proyección de $\eta_h \in Q_h$ sobre Q_h (I es la matriz identidad). Desarrollando las expresiones (4.36) y (4.37) e introduciendo el hecho de que la discretización de la altura de la superficie libre es del tipo escalón, se llega a la expresión:

$$P(\eta_{M,k}^{(e)}) = \frac{\sum_{l=1}^4 (-1)^l \eta_{M,l}^{(e)}}{\sum_{l=1}^4 \frac{1}{\Omega_{M,l}}} (-1)^k \frac{1}{\Omega_{M,k}} \quad (4.38)$$

donde $\eta_{M,k}^{(e)} \in Q_h$ es la altura de la superficie libre del elemento k-ésimo perteneciente al macroelemento M ($k=1,2,3,4$).

El nuevo elemento definido por M, usando V_h y Q_h como subespacios de Hilbert de aproximaciones a la velocidad y a la altura de la superficie libre, respectivamente, cumple la condición de estabilidad de Babuska-Brezzi (Brezzi y Fortin, 1991), y por lo tanto la solución numérica del sistema de ecuaciones no se verá afectada por inestabilidades debidas a modos espúreos de presión.

El empleo explícito de esta nueva discretización que podemos llamar $4Q1/4P0$, no presenta ventajas en frente del $Q2/P1$. El macroelemento $4Q1/4P0$ tiene exactamente los mismos grados de libertad que el $Q2/P1$, por lo que para un ancho de banda de la matriz del sistema igual y un coste computacional similar, sólo conseguimos convergencias de orden $O(L)$ frente a la precisión $O(L^2)$ del segundo. El uso implícito de la técnica de los macroelementos, sin embargo, es mucho más ventajosa.

En el ámbito del flujo de Stokes, problema lineal, Vicent y Boyer (1992) demuestran que utilizando el elemento $4Q1/4P0$ junto con el algoritmo de Uzawa ((3.1) y (3.2)), la matriz del sistema de ecuaciones algebraicas resultante es definida positiva. De esta forma, aseguran poder utilizar el método del gradiente conjugado para resolver el sistema lineal, siendo su factor de convergencia independiente del tamaño de la malla computacional utilizada.

4.2. Implementación de una técnica de estabilización iterativa. Eficiencia relativa a otros métodos

Aunque los métodos de compresibilidad artificial y los que calculan los campos de η a partir de una ecuación de Poisson permiten discretizar las ecuaciones independientemente de la condición de compatibilidad de Babuska-Brezzi, ambas familias de técnicas obligan al cálculo de derivadas de primer orden de la altura de la superficie libre. Por lo que las funciones de forma para la altura de superficie libre deben ser de tipo C^0 , continuamente diferenciables en el interior de cada elemento Ω^e y continuas en todo el dominio.

Es obvio que las funciones escalón del elemento $Q1/P0$ para la interpolación de η no cumplen este requisito. Los métodos anteriores son óptimos con interpolaciones del mismo orden para la velocidad y la altura de la superficie libre. Solamente el tipo de formulación introducida por Sohn y Heinrich (1990) a partir de una ecuación de Poisson para η no presenta este requisito sobre las funciones de forma para la altura de superficie libre. Pero, en la formulación débil de dicha ecuación de Poisson aparecen derivadas segundas de la velocidad, por lo que habría que recurrir a un método de aproximación por mínimos cuadrados de esas derivadas, si se utilizara el elemento $Q1/P0$.

Creemos, pues, que la técnica idónea para eliminar las oscilaciones espúreas de las soluciones en una discretización $Q1/P0$ de las SWE es proyectar las soluciones intermedias del campo de η en cada iteración sobre un subespacio

libre de modos espúreos de presión, generado éste a partir de la agrupación en macroelementos de los elementos de la malla original.

La implementación de estas proyecciones en un algoritmo iterativo como el de Uzawa generalizado es sencilla. Se puede penalizar la ecuación (3.6b) de la forma:

$$\delta \eta^{[r]} = -\lambda'(1-P)(D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r+1]}) \quad (4.39)$$

donde $P:Q_h \rightarrow Q_h^*$ y $(I-P):Q_h \rightarrow Q_h$ son los operadores proyección definidos en (4.36).

Si introducimos directamente (4.39) en la ecuación del momentum (3.6a), el ancho de banda de la matriz del sistema algebraico se incrementa debido al hecho de que se ensamblan macroelementos que tienen un mayor número de grados de libertad que el elemento Q_1/P_0 . Para evitar lo anterior, siguiendo el desarrollo de Fortin y Boivin (1990), podemos hacer uso de la aproximación:

$$P(D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r+1]}) \approx P(D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r]}) \quad (4.40)$$

cuya validez ha sido demostrada por los autores. Esto nos permite escribir el algoritmo de Uzawa generalizado, que ahora llamaremos proyectado, de la siguiente manera:

0) Calcular los vectores de inicialización $u_{\beta}^{[0]}$, $\eta^{[0]}$ como:

$$[G'_{\alpha\beta} + \lambda' G''_{\alpha\beta}] u_{\beta}^{[0]} = F_{\alpha} \quad (4.41a)$$

$$\eta^{[0]} = -\lambda'(1-P)(D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[0]}) \quad (4.41b)$$

1) Para $r \geq 0$, siendo conocidos $u_{\beta}^{[r]}$ y $\eta^{[r]}$, resolver el sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_e [(A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} + A_{\alpha\gamma\beta}^{(e)}) u_{\gamma}^{[r]} + G_{\alpha\beta}^{(e)} + \lambda' G''_{\alpha\beta}] u_{\beta}^{[r+1]} = \sum_e [F_{\alpha}^{(e)} + A_{\alpha\beta\gamma}^{(e)} u_{\gamma}^{[r]} u_{\beta}^{[r]} - D_{\alpha}^{(e)} (\eta^{[r]} + \lambda' P(\eta^{[r]}))] \quad (4.42)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, 2N^{(e)} M^{(e)}$$

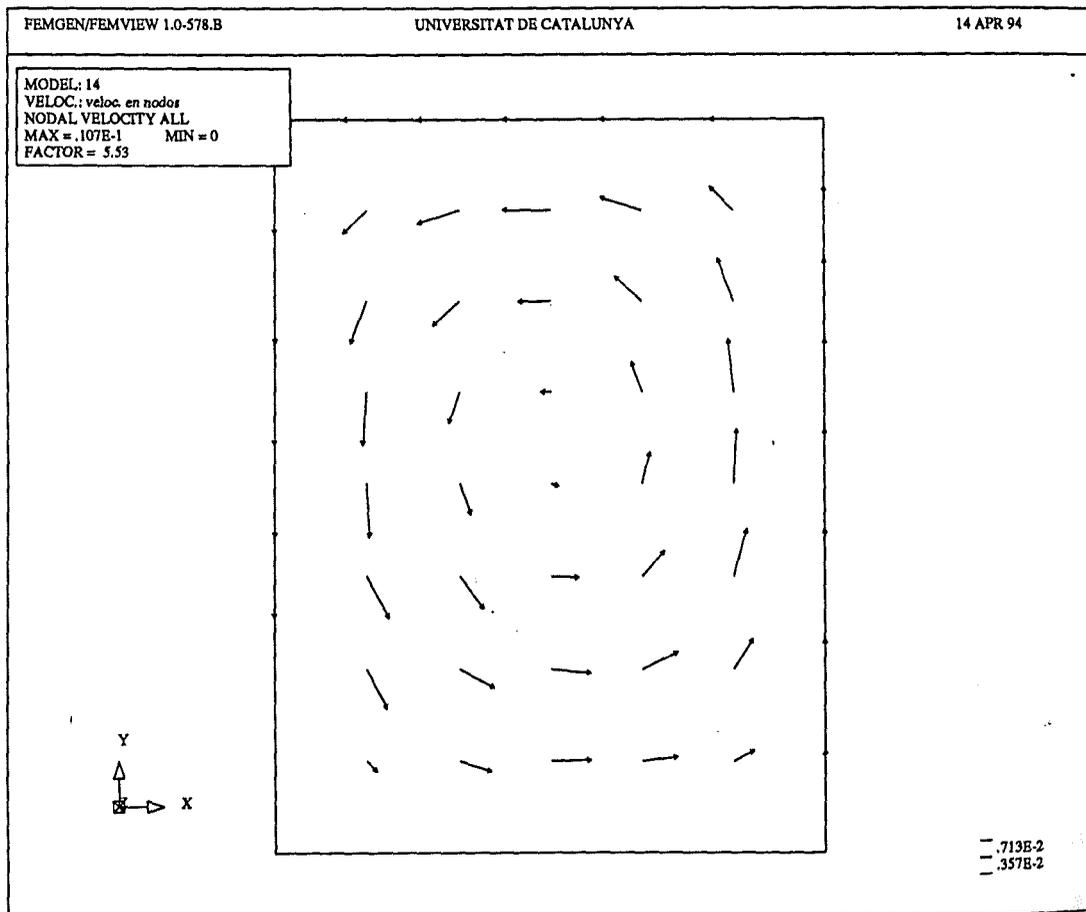
2) Actualizar los valores de la altura de superficie libre:

$$\eta^{[r+1]} = \eta^{[r]} - \lambda' (1-P)(D_{\beta}^{(e)} u_{\beta}^{[r+1]}) \quad \forall e \quad (4.43)$$

3) Iterar sobre 1) hasta alcanzar la convergencia.

Para ilustrar la eficiencia del nuevo algoritmo, volveremos al ejemplo práctico presentado en las figuras 1.10, 1.11 y 1.12 del capítulo primero. Allí, se provocaba la aparición de modos espúreos de presión al imponer condiciones Dirichlet homogéneas de forma no simétrica, sobre los contornos de una dársena imaginaria rectangular afectada por una distribución triangular de tensiones de viento. En la figuras 4.2 y 4.3 se presentan las soluciones del modelo para los campos de velocidad y de altura de superficie libre, respectivamente, una vez implementada la técnica de estabilización de los macroelemen-

FIGURA 4.2. Caso: corriente inducida por el viento en una darsena cerrada. Algoritmo proyectado de Uzawa. Solución para el campo de velocidades.



tos. El campo de η está libre de modos espúreos de presión (figura 4.4) y las soluciones para la velocidad y η se corresponden con las esperadas.

Considerando ahora el caso de la corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme descrito en el capítulo 3, con un valor del parámetro de penalización $\lambda' = 1$ por encima de lo aconsejable para mantener el escalado de los términos de la ecuación (2.34), y empleando el algoritmo sin estabilización iterativa de η , obtenemos buenas soluciones del campo de velocidades (figura 4.5), pero malas para el campo de altura de superficie libre (figura 4.6) debido a la aparición de modos espúreos de presión (figura 4.7). Utilizando el algoritmo proyectado de Uzawa, se obtiene un resultado semejante para las velocidades (figura 4.8) pero quedan eliminados los modos espúreos de presión que afectaban la calidad de la solución para la altura de superficie libre (figuras 4.9 y 4.10).

En los dos ejemplos anteriores, la malla de macroelementos a sido construida ha partir de la discretización original en elementos Q1/P0, simplemente por el proceso inverso a lo que sería un refinamiento de malla. Los resultados de ambas simulaciones numéricas, nos indican que la formulación propuesta elimina los modos de presión espúreos, dando buenos resultados tanto para las velocidades como para la altura de superficie libre. Y esto se consigue sin apenas incrementar el gasto computacional (los consumos de CPU son semejantes tanto para el algoritmo de Uzawa generalizado como el proyectado). El costo de CPU extra, asociado a la definición de la malla de macroelementos y al proceso de proyección, se compensa con el hecho de disponer de mejores

FIGURA 4.4. Caso: corriente inducida por el viento en una darsena cerrada. Algoritmo proyectado de Uzawa. Diferencias positivas (\square) y negativas (x) de η con respecto a su valor medio.

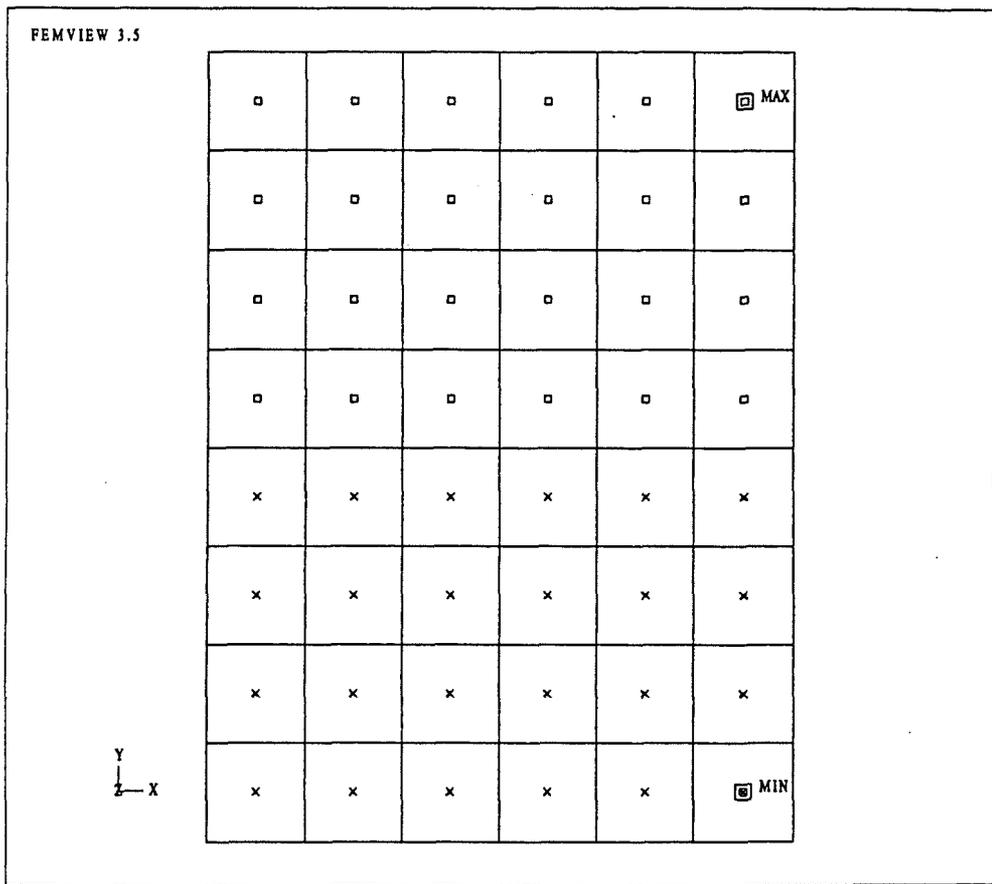


FIGURA 4.5. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Algoritmo de Uzawa generalizado. Solución para el campo de velocidades.

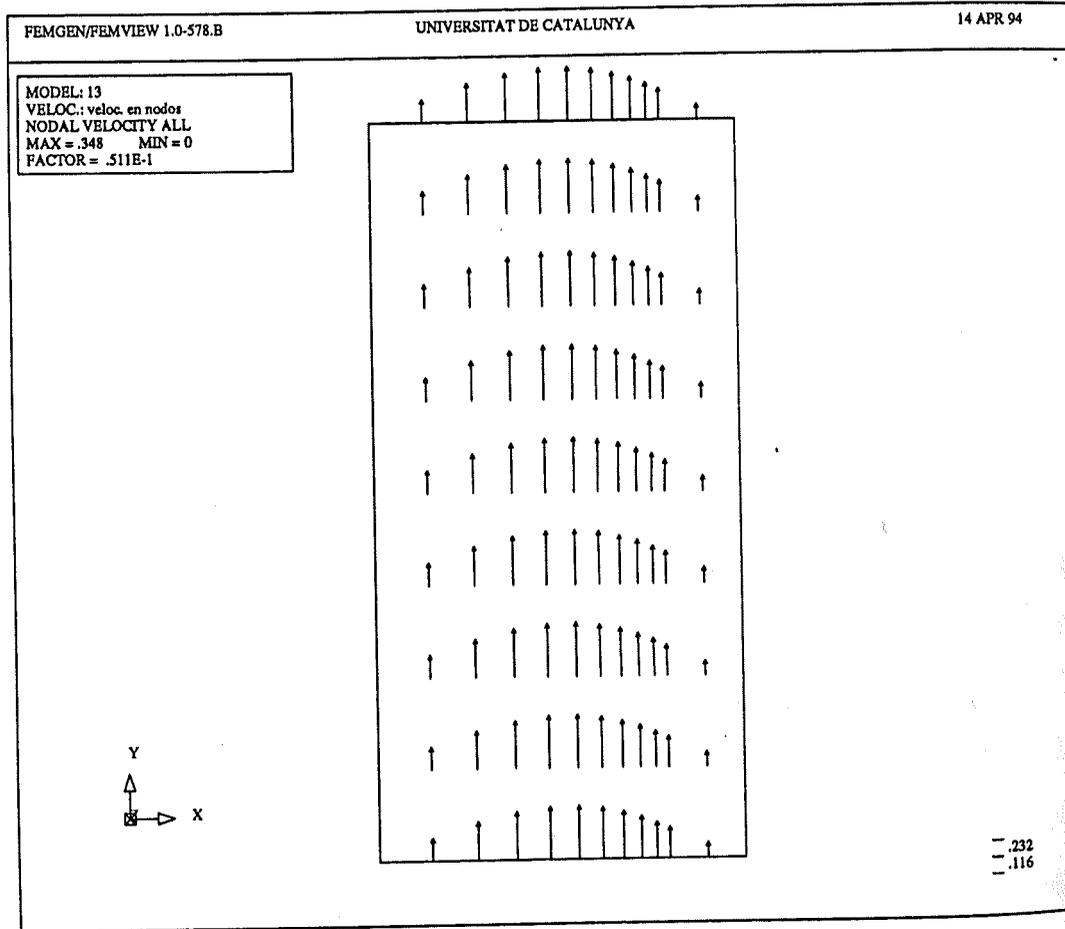


FIGURA 4.6. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Algoritmo de Uzawa generalizado. Solución para el campo de alturas de superficie libre.

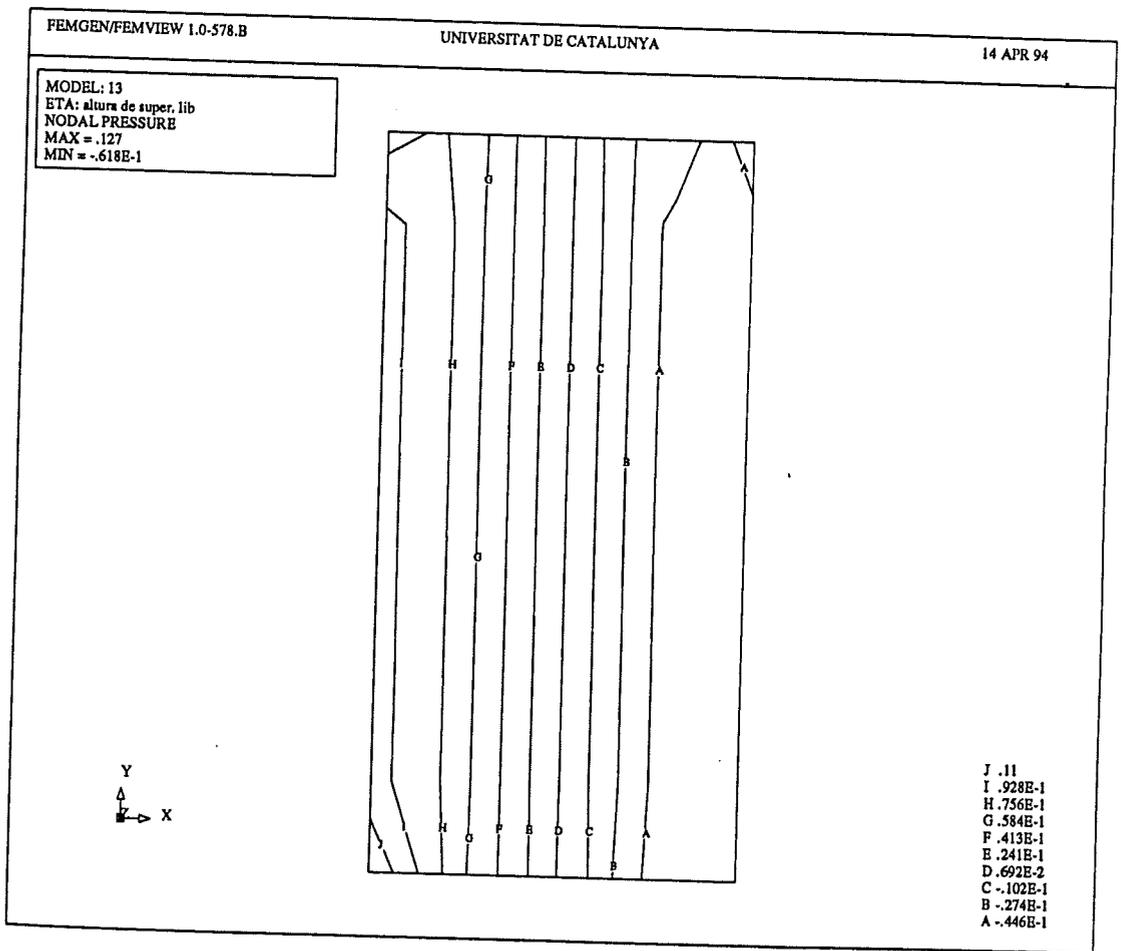


FIGURA 4.7. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Algoritmo de Uzawa generalizado. Diferencias positivas (○) y negativas (x) de η con respecto a su valor medio.

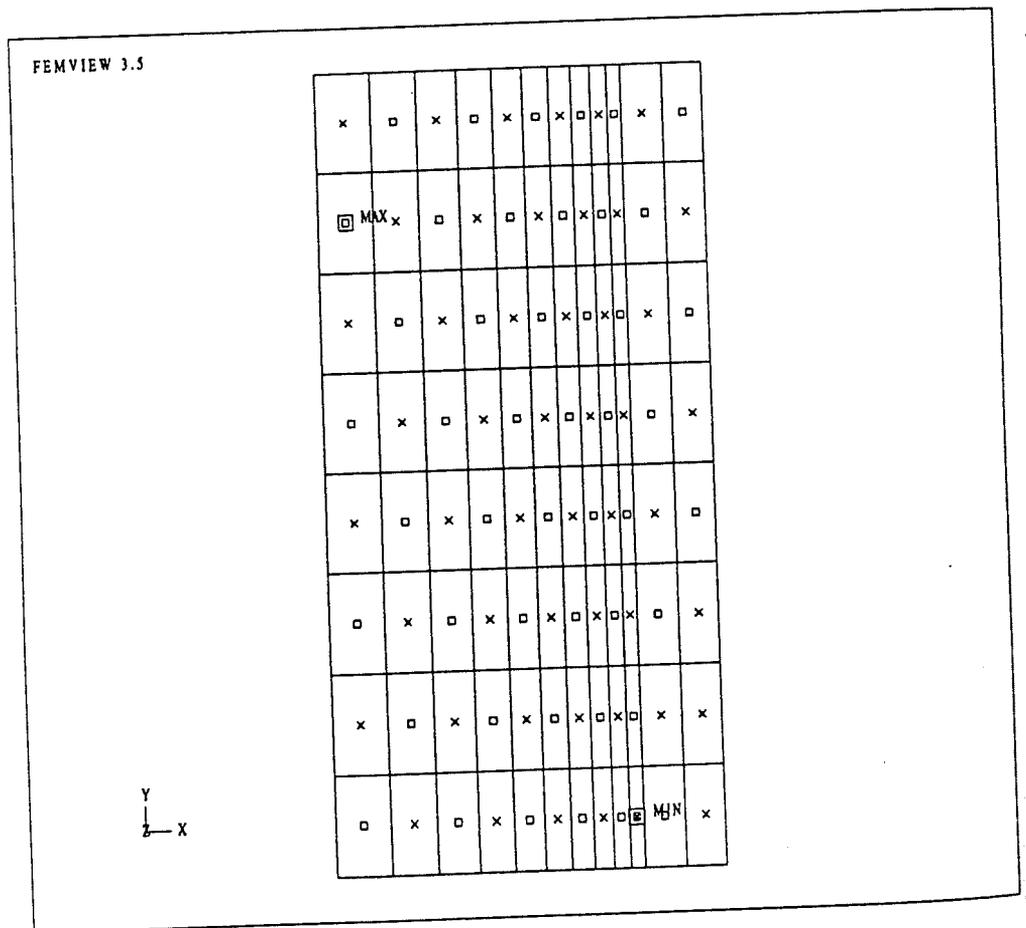


FIGURA 4.8. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Algoritmo proyectado de Uzawa. Solución para el campo de velocidades.

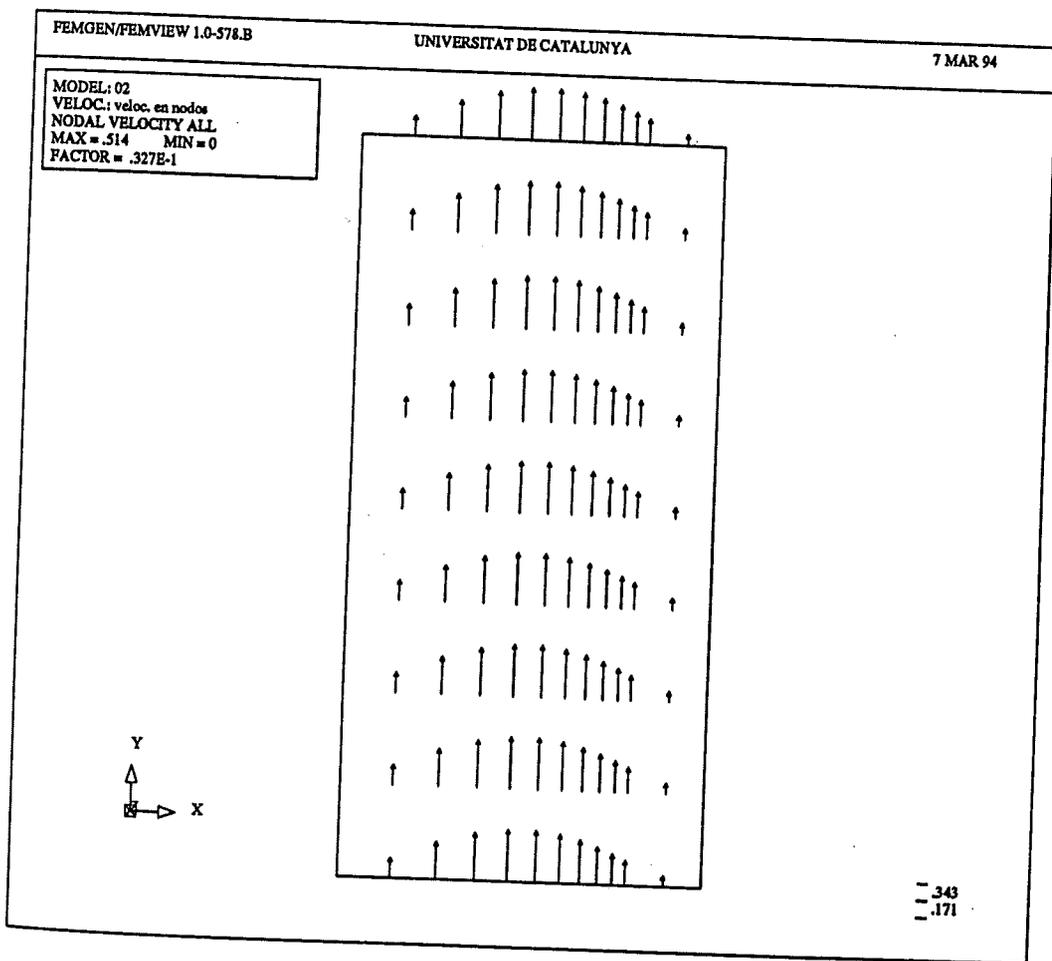


FIGURA 4.9. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Algoritmo proyectado de Uzawa. Solución para el campo de alturas de superficie libre.

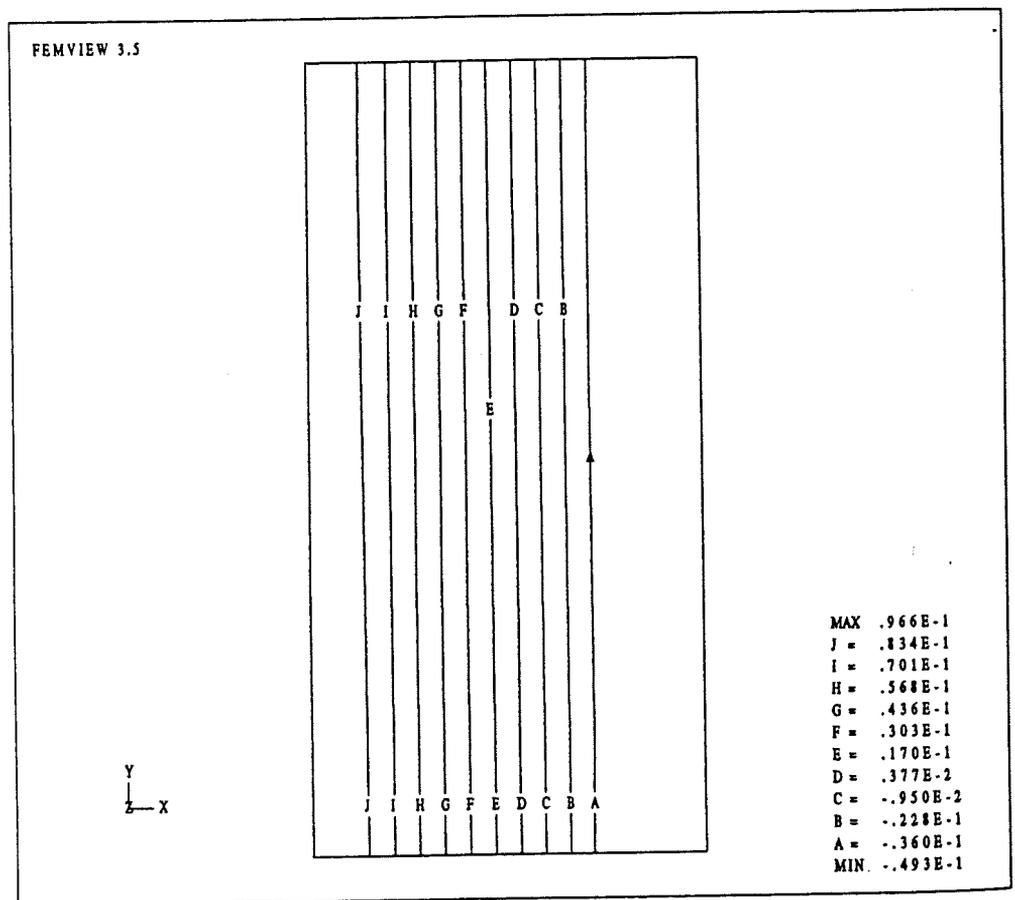
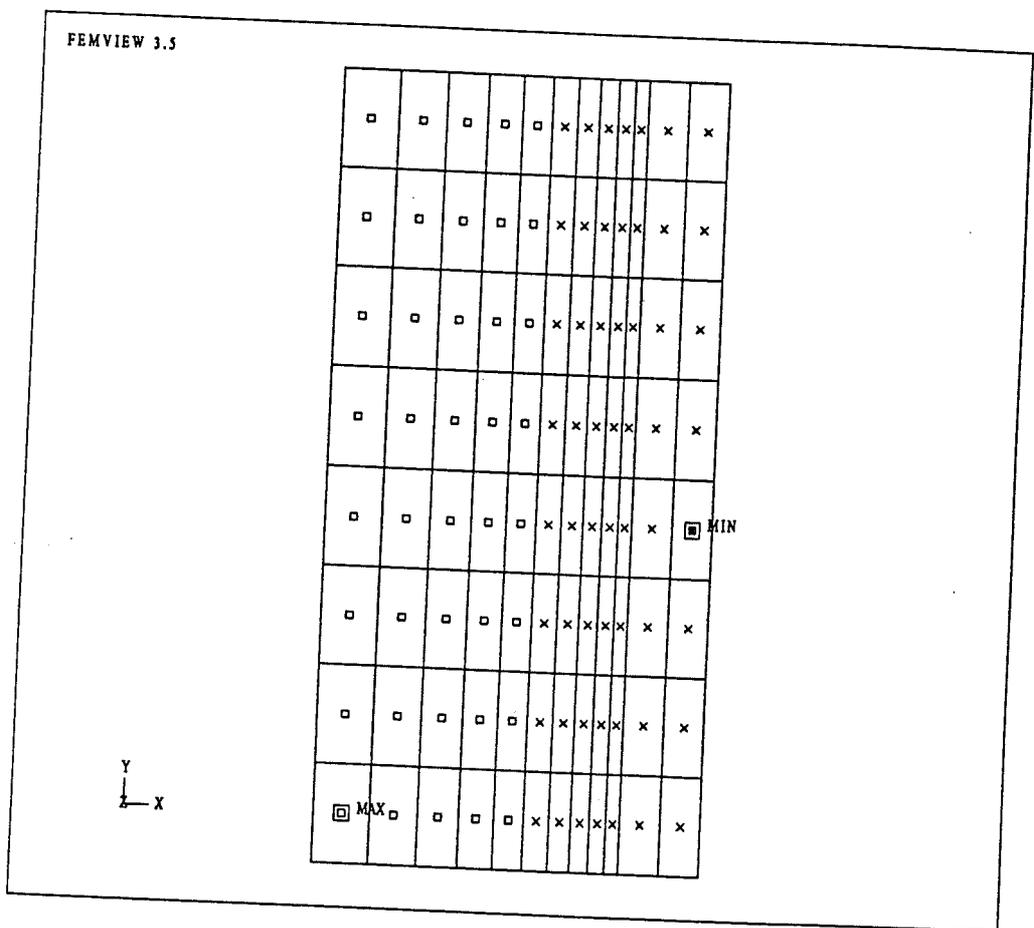


FIGURA 4.10. Caso: corriente inducida por la rotura del oleaje en una playa longitudinalmente uniforme. Algoritmo proyectado de Uzawa. Diferencias positivas (○) y negativas (x) de η con respecto a su valor medio.



estimas de η con el algoritmo proyectado de Uzawa. Y así, converger en un menor número de iteraciones.