UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departamento de Ingenieria Hidráulica, Marítima y Ambiental

ESTABILIZACIÓN DE LA SUPERFICIE LIBRE EN LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES SHALLOW-WATER POR ELEMENTOS FINITOS. APLICACIONES OCEANOGRÁFICAS.

Autor: Manuel Espino Infantes
Directores: Marc A. García
Agustín Sánchez-Arcilla

Barcelona, mayo de 1994

APÉNDICE I.

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS

I.1. Método de residuos ponderados según z

Pretendemos construir una aproximación a u y v, mediante una combinación lineal de funciones:

$$u(x,y,z)=N_I(\xi)\,u_I(x,y) \qquad (I.1a)$$

$$v(x,y,z)=N_I(\xi)\,v_I(x,y) \qquad (I.1b)$$

(con convenio de suma para los subíndices repetidos), siendo ξ la profundidad normalizada adimensional, definida como:

$$\xi=\frac{z+h}{\eta+h} \qquad (I.2)$$

y $N_l(\xi)$, $l=1,2,\ldots$ el conjunto de funciones base compatibles con las condiciones de contorno en $z=\eta$ y $z=-h$.

Suponemos también que las magnitudes $1/\rho$ y ρ_o/ρ tienen una variación vertical del tipo:

$$\frac{1}{\rho}\approx N_j^*(\xi)\ [\frac{1}{\rho}]_j(x,y) \qquad (I.3)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho}\approx N_j^*(\xi)\ [\frac{\rho_0}{\rho}]_j(x,y) \qquad (I.4)$$

siendo N_j^* funciones de interpolación cualesquiera.

Podemos considerar que las ecuaciones (2.22a y b) expresan el equilibrio de momentum para un conjunto de puntos con las mismas coordenadas x e y, alineados sobre la vertical, y que η es conocido. Una vez sustituidas (I.1a y b), (I.3) y (I.4)) en (2.22a y b), la discretización vertical de las ecuaciones mediante el método de residuos ponderados consiste en multiplicar a éstas por N funciones peso arbitrario (W_k, $k=1\ldots N$) e integrarlas sobre todo el dominio ($z\in(-h,\eta)$). Integrando por partes los términos en derivadas segundos y aproximando $\eta+h\approx h$, se obtiene:

$$\varepsilon\ b_{klm}\ h\ [u_l\ \partial_x u_m + v_l\ \partial_y u_m] - c_{kl}\ h\ v_l =$$

$$=-a_{kj}\ h\ [\frac{\rho_0}{\rho}]_j\ \partial_x\eta\ -\ d_{jkm}\ h^2\ [\frac{1}{\rho}]_j\ \partial_x\rho_m\ +$$

$$+\ \frac{E_H}{2}\ c_{kl}\ h\ [2\ \partial_x(K_H\ \partial_x u_l)\ +\ \partial_y[K_H(\partial_y u_l\ +\ \partial_x v_l)]]\ -$$

$$-\frac{E_z}{2}\ [e_{kl}\ \frac{1}{h}\ u_l\ +\ W_k\ |_{\xi=1}\ N_j^*\ |_{\xi=1}\ [\frac{1}{\rho}]_j\ \tau_x^S\ -\ W_k\ |_{\xi=0}\ N_j^*\ |_{\xi=0}\ [\frac{1}{\rho}]_j\ \tau_x^B]$$

$$k=1,2,...,N \qquad (I.5a)$$

$$\varepsilon\ b_{klm}\ h\ [u_l\ \partial_x v_m\ +\ v_l\ \partial_y v_m] + c_{kl}\ h\ u_l\ =$$

$$=-a_{kj}\ h\ [\frac{\rho_0}{\rho}]_j\ \partial_y\eta\ -\ d_{jkm}\ h^2\ [\frac{1}{\rho}]_j\ \partial_y\rho_m\ +$$

$$+\ \frac{E_H}{2}\ c_{kl}\ h\ [2\ \partial_y(K_H\ \partial_y v_l)\ +\ \partial_x[K_H(\partial_x v_l\ +\ \partial_y u_l)]]\ -$$

$$-\frac{E_z}{2}\ [e_{kl}\ \frac{1}{h}\ v_l\ +\ W_k\ |_{\xi=1}\ N_j^*\ |_{\xi=1}\ [\frac{1}{\rho}]_j\ \tau_y^S\ -\ W_k\ |_{\xi=0}\ N_j^*\ |_{\xi=0}\ [\frac{1}{\rho}]_j\ \tau_y^B]$$

$$k=1,2,...,N \qquad (I.5b)$$

con

$$\vec{\tau}^S = K_z\ \partial_z \vec{u}\ \big|_{z=\eta}$$

$$\vec{\tau}^B = K_z\ \partial_z \vec{u}\ \big|_{z=0}$$

$$a_{kj} = \int_0^1 W_k\ N_j^* d\xi$$

$$b_{klm} = \int_0^1 W_k\ N_l\ N_m d\xi$$

$$c_{kl} = \int_0^1 W_k\ N_l d\xi$$

$$d_{kjm} = \int_0^1 W_k\ N_j^* \left[\int_\xi^1 N_m^* d\xi\right] d\xi$$

$$e_{kl} = \int_0^1 (\partial_\xi W_k)\, K_z\, (\partial_\xi N_l)\, d\xi$$

(con convenio de suma para los subíndices repetidos).

La expresión verticalmente integrada de la ecuación adimensional de l continuidad (2.9) desde el fondo ($\xi=0$) hasta la superficie ($\xi=1$) es:

$$\nabla_H \cdot (h\overline{\vec{u}}) = 0 \qquad (I.6)$$

donde $\overline{\vec{u}}$ es la velocidad promediada verticalmente, definida ya en (1.9a y b).

Elijiendo tantas funciones peso W_k como funciones base N_l, las igualdades (I.5a y b) junto con (I.6) forman un conjunto de 2N+1 ecuaciones con 2N+1 incógnitas (las funciones $u_l(x,y)$, $v_l(x,y)$, $l=1,2,\ldots N$ y η).

Las funciones peso W_k pueden elegirse de diversas maneras (colocación puntual, colocación por subdominios, etc...) optando por el método de Galerkin convencional:

$$W_l=N_l \qquad l=1,2,\ldots,N \qquad (I.7)$$

I.2. Método de residuos ponderados en el plano xy

Buscamos resolver el problema planteado por las ecuaciones (I.5a y b) y (I.6). Para ello, construimos una aproximación de $u_j(x,y)$, $v_j(x,y)$ y $\eta(x,y)$ de la forma:

$$u_j(x,y)=M^q(x,y)\,u_j^q \qquad (I.8a)$$

$$v_j(x,y)=M^q(x,y)\,u_j^q \qquad (I.8b)$$

$$\eta(x,y) = P^s(x,y)\,\eta^s \qquad (I.8c)$$

(con convenio de suma para los superíndices repetidos), siendo $M^q(x,y)$, $q=1,\ldots$ $P^s(x,y)$, $s=1\ldots$ dos conjuntos de funciones de forma compatibles con las condiciones de contorno $\{(x,y)\in\Gamma)$.

Interpolamos con las funciones M^q la variación horizontal de las variables h, 1/h, $\{\rho_0/\rho\}_m$,$\{1/\rho\}_m$, ρ_n, K_H,K_z, τ_x^S,τ_y^S, τ_x^B y τ_y^B en el dominio $\{(x,y)\in\Omega)$, y sustituimos sus valores aproximados en las ecuaciones (I.5a y b) y (I.6). Multiplicamos por funciones peso arbitrarias G^i, $i=1,2,\ldots M$ las ecuaciones (I.5 a y b) y por L^s, $s=1,2,\ldots K$ la ecuación (I.6), tras lo cual integramos por partes las expresiones resultantes sobre todo el dominio (Ω) (sólo los términos en los que figuran derivadas de orden superior, con el fin de rebajar los requisitos de continuidad que deben satisfacer las funciones de forma). Haciendo lo anterior resulta:

$$0=\varepsilon\; b_{klj}\; h^p\; u_j^q\; [u_l^r \int_\Omega G^i\, M^p\, M^r\, \partial_x M^q\, d\Omega \;+\; v_l^r \int_\Omega G^i\, M^p\, M^r\, \partial_y M^q\, d\Omega]$$

$$-c_{kj}\; h^p\; v_j^q \int_\Omega G^i\, M^p\, M^q\, d\Omega-$$

$$-a_{km}\; [\frac{\rho_0}{\rho}]_m^s\; h^t\; \eta^r\; [\int_\Omega P^r\, \partial_x (G^i\, M^s\, M^t)\, d\Omega - \int_\Gamma P^r\, G^i\, M^s\, M^t\, n_x\, d\Gamma] +$$

$$+d_{kmn}\ \rho_n^s\ [\frac{1}{\rho}]_m^t\ h^p\ h^w \int_\Omega G^i\ M^p\ M^t\ M^w\ \partial_x M^s\ d\Omega\ +$$

$$+\frac{E_H}{2}[c_{kj}\ h^p\ u_j^q\ K_H^t\ [\int_\Omega M^t (2\ \partial_x (G^i\ M^p)\ \partial_x M^q + \partial_y (G^i\ M^p)\ \partial_y M^q)\, d\Omega\ -$$

$$-\int_\Gamma G^i\ M^p\ M^t\ (2\,(\partial_x M^q)\ n_x + (\partial_y M^q)\ n_y)\ d\Gamma] +$$

$$+c_{kj}\ h^p\ v_j^q\ K_H^t [\int_\Omega M^t\ \partial_y (G^i\ M^p)\ \partial_x M_q\ d\Omega - \int_\Gamma G^i\ M^p\ M^t\ (\partial_x M^q)\ n_y\ d\Gamma]] +$$

$$+\frac{E_z}{2}[[\frac{1}{h}]^t\ e_{kj}^p\ u_j^q \int_\Omega G^i\ M^t\ M^p\ M^q\ d\Omega -$$

$$-(W_k\ |_{\xi=1}\ N_m^*\ |_{\xi=1}[\frac{1}{\rho}]_m^t\ \tau_x^{Sp} + W_k\ |_{\xi=0}\ N_m^*\ |_{\xi=0}[\frac{1}{\rho}]_m^t\ \tau_x^{Bp}) \int_\Omega G^i\ M^t\ M^p\ d\Omega]$$

$$k=1,2,\ldots,N \qquad i=1,2,\ldots,M \qquad (I.9a)$$

$$0=\varepsilon\ b_{klj}\ h^p\ v_j^q\ [u_l^r \int_\Omega G^i\ M^p\ M^r\ \partial_x M^q\ d\Omega + v_l^r \int_\Omega G^i\ M^p\ M^r\ \partial_y M^q\ d\Omega]$$

$$+c_{kj}\ h^p\ u_j^q \int_\Omega G^i\ M^p\ M^q\ d\Omega -$$

$$-a_{km}\ [\frac{\rho_0}{\rho}]^s_m\ h^t\ \eta^r\ [\int_\Omega P^r\ \partial_y(G^i\ M^s\ M^t)\,d\Omega-\int_\Gamma P^r\ G^i\ M^s\ M^t\ n_y\ d\Gamma]+$$

$$+d_{kmn}\ \rho^s_n\ [\frac{1}{\rho}]^t_m\ h^p\ h^w\int_\Omega G^i\ M^p\ M^t\ M^w\ \partial_y M^s\ d\Omega\ +$$

$$+\frac{E_H}{2}[c_{kj}\ h^p\ v^q_j\ K^t_H\ [\int_\Omega M^t(2\ \partial_y(G^i\ M^p)\ \ \partial_y M^q\ +\ \partial_x(G^i\ M^p)\ \ \partial_x M^q)\,d\Omega\ -$$

$$-\int_\Gamma G^i\ M^p\ M^t\ \ ((\partial_x M^q)\ \ n_x\ +\ (2\,(\partial_y M^q)\ \ n_y)\ \ d\Gamma]+$$

$$+c_{kj}\ h^p\ u^q_j\ K^t_H[\int_\Omega M^t\ \partial_x(G^i\ M^p)\ \ \partial_y M_q\ \ d\Omega-\int_\Gamma G^i\ M^p\ M^t\ \ (\partial_y M^q)\ \ n_x\ \ d\Gamma]\,]+$$

$$+\frac{E_z}{2}[\,[\frac{1}{h}]^t\ e^p_{kj}\ \ v^q_j\int_\Omega G^i\ M^t\ M^p\ M^q\ d\Omega-$$

$$-(W_k\ \big|_{\xi=1}\ N^*_m\ \big|_{\xi=1}[\frac{1}{\rho}]^t_m\ \tau^{S^p}_y+W_k\ \big|_{\xi=0}\ N^*_m\ \big|_{\xi=0}[\frac{1}{\rho}]^t_m\ \tau^{B^p}_y)\int_\Omega G^i\ M^t\ M^p\ d\Omega]$$

$$k=1,2,\ldots,N\qquad i=1,2,\ldots,M\qquad\qquad (I.9b)$$

$$h_j\ h^p\ \ [u^q_j\int_\Omega L^s\ \partial_x(M^p\ M^q)\ \ d\Omega+\int_\Omega L^s\ \partial_y(M^p\ M^q)\ \ d\Omega=0$$

$$s=1,2,\ldots,K \qquad (I.9c)$$

con:

$$a_{km}=\int_0^1 W_k\ N_m^* d\xi$$

$$b_{klj}=\int_0^1 W_k\ N_l\ N_j d\xi$$

$$c_{kj}=\int_0^1 W_k\ N_j d\xi$$

$$d_{kmn}=\int_0^1 W_k\ N_m^* [\int_\xi^1 N_n^* d\xi]\ d\xi$$

$$e_{kj}^p=\int_0^1 (\partial_\xi W_k)\ K_z^p\ (\partial_\xi N_j)\ d\xi$$

$$h_j=\int_0^1 N_j d\xi$$

(con convenio de suma para los subíndices repetidos).

Así, eligiendo tantas funciones de forma M^q como funciones peso G^i y tantas funciones de forma P^s como funciones peso L^r, las ecuaciones (I.9a, b y

c) forman un sistema de 2NM+K ecuaciones con 2NM+K incógnitas: los coeficientes u_j^q, v_j^q y η^s.

Al optar de nuevo por el método de Galerkin para elegir las funciones peso, tenemos:

$$G^i=M^i \quad i=1,2,...,M \;, \quad L^r=P^r \quad r=1,2,...,K \qquad (I.10)$$

Se ha retenido el cálculo de las integrales de línea que aparecen en las ecuaciones (I.9) porque las condiciones de contorno naturales tienen una interpretación física poco clara en nuestro problema.

APÉNDICE II.

EXPRESIÓN DE LAS MATRICES Y VECTORES ELEMENTALES

$A^{(e)}_{\alpha\beta\gamma}$: α impar, β impar, γ impar

$$= \varepsilon \; b_{klj} \; h^{p} \int_{\Omega^e} G^{i} \; M^{p} \; M^{r} \; \partial_x M^{q} \; d\Omega$$

α impar, β impar, γ par

$$= \varepsilon \; b_{klj} \; h^{p} \int_{\Omega^e} G^{i} \; M^{p} \; M^{r} \; \partial_y M^{q} \; d\Omega$$

α impar, β par, γ impar $= 0$

α impar, β par, γ par $= 0$

α par, β impar, γ impar $= 0$

α par, β impar, γ par $= 0$

α par, β par, γ impar

$$= \varepsilon \; b_{klj} \; h^{p} \int_{\Omega^e} G^{i} \; M^{p} \; M^{r} \; \partial_x M^{q} \; d\Omega$$

α par, β par, γ par

$$= \varepsilon \ b_{k1j} \ h^p \int_{\Omega^e} G^i \ M^p \ M^r \ \partial_y M^q \ d\Omega$$

$$(II.1)$$

$G'^{(e)}_{\alpha\beta}$: α impar, β impar

$$= \frac{E_H}{2} \ c_{kj} \ h^p \ K_H^t \ [\int_{\Omega^e} M^t (2 \ \partial_x (G^i \ M^p) \ \partial_x M^q + \partial_y (G^i \ M^p) \ \partial_y M^q) \, d\Omega \ -$$

$$- \int_{\Gamma^e} G^i \ M^p \ M^t \ (2 (\partial_x M^q) \ n_x + (\partial_y M^q) \ n_y) \ d\Gamma] +$$

$$+ \frac{E_z}{2} [[\frac{1}{h}]^t \ e_{kj}^p \int_{\Omega^e} G^i \ M^t \ M^p \ M^q \ d\Omega +$$

$$+ W_k \ |_{\xi=0} \ N_m^* \ |_{\xi=0} [\frac{1}{\rho}]_m^t \ N_j \ |_{\xi=0} \ \gamma^{B^s} \int_{\Omega^e} G^i \ M^t \ M^s \ M^q \ d\Omega]$$

α impar, β par

$$= \frac{E_H}{2} \ c_{kj} \ h^p \ K_H^t \ [\int_{\Omega^e} M^t (\partial_y (G^i \ M^p) \ \partial_x M^q \ d\Omega \ -$$

$$- \int_{\Gamma^e} G^i \ M^p \ M^t \ (\partial_x M^q) \ n_y \ d\Gamma \ ] - c_{kj} \ h^p \int_{\Omega^e} G^i \ M^p \ M^q \ d\Omega \ +$$

$$+\frac{E_z}{2}\ W_k\ |_{\xi=0}\ N_m^*\ |_{\xi=0}[\frac{1}{\rho}]_m^t\ N_j\ |_{\xi=0}\ \gamma^{B^s}\int_{\Omega^e} G^i\ M^t\ M^s\ M^q\ d\Omega]$$

α par, β impar

$$=\frac{E_H}{2}\ c_{kj}\ h^p\ K_H^t\ [\int_{\Omega^e} M^t(\partial_x(G^i\ M^p)\ \partial_y M^q\ d\Omega\ -$$

$$-\int_{\Gamma^e} G^i\ M^p\ M^t\ (\partial_y M^q)\ n_x\ d\Gamma\ ]+\ c_{kj}\ h^p\int_{\Omega^e} G^i\ M^p\ M^q\ d\Omega\ +$$

$$+\frac{E_z}{2}\ W_k\ |_{\xi=0}\ N_m^*\ |_{\xi=0}[\frac{1}{\rho}]_m^t\ N_j\ |_{\xi=0}\ \gamma^{B^s}\int_{\Omega^e} G^i\ M^t\ M^s\ M^q\ d\Omega]$$

α par, β par

$$=\frac{E_H}{2}\ c_{kj}\ h^p\ K_H^t\ [\int_{\Omega^e} M^t(\partial_x(G^i\ M^p)\ \partial_x M^q\ +\ 2\ \partial_y(G^i\ M^p)\ \partial_y M^q)\,d\Omega\ -$$

$$-\int_{\Gamma^e} G^i\ M^p\ M^t\ ((\partial_x M^q)\ n_x\ +\ 2\ (\partial_y M^q)\ n_y)\ d\Gamma]+$$

$$+\frac{E_z}{2}[\,[\frac{1}{h}]^t\ e_{kj}^p\int_{\Omega^e} G^i\ M^t\ M^p\ M^q\ d\Omega+$$

$$+W_k \;\Big|_{\xi=0}\; N_m^* \;\Big|_{\xi=0} [\frac{1}{\rho}]_m^t \; N_j \;\Big|_{\xi=0}\; \gamma^{B^s}\int_{\Omega^e} G^i \; M^t \; M^s \; M^q \; d\Omega]$$

$$(II.2)$$

$D^{t(e)}{}_{\alpha}$: α impar

$$= -a_{km} \; [\frac{\rho_0}{\rho}]_m^s \; h^t \; [\int_{\Omega^e} \partial_x (G^i \; M^s \; M^t)\, d\Omega - \int_{\Gamma^e} G^i \; M^s \; M^t \; n_x \; d\Gamma]$$

α par

$$= -a_{km} \; [\frac{\rho_0}{\rho}]_m^s \; h^t \; [\int_{\Omega^e} \partial_y (G^i \; M^s \; M^t)\, d\Omega - \int_{\Gamma^e} G^i \; M^s \; M^t \; n_y \; d\Gamma]$$

$$(II.3)$$

$F^{(e)}{}_{\alpha}$: α impar

$$-d_{kmn} \; \rho_n^s \; [\frac{1}{\rho}]_m^t \; h^p \; h^w \int_{\Omega^e} G^i \; M^p \; M^t \; M^w \; \partial_x M^s \; d\Omega \; +$$

$$+\frac{E_z}{2} \; W_k \;\Big|_{\xi=1}\; N_m^* \;\Big|_{\xi=1} [\frac{1}{\rho}]_m^t \; \tau_x^{S^p} \int_{\Omega^e} G^i \; M^t \; M^p \; d\Omega$$

α par

$$-d_{kmn}\ \rho_n^s\ [\frac{1}{\rho}]_m^t\ h^p\ h^w \int_{\Omega^e} G^i\ M^p\ M^t\ M^w\ \partial_y M^s\ d\Omega\ +$$

$$+\frac{E_z}{2}\ W_k\ |_{\xi=1}\ N_m^*\ |_{\xi=1}[\frac{1}{\rho}]_m^t\ \tau_y^{sp} \int_{\Omega^e} G^i\ M^t\ M^p\ d\Omega$$

$$(II.4)$$

$D^{(e)}{}_{\beta}$: β impar

$$= h_j\ h^p \int_{\Gamma^e} M^p\ M^q\ n_x\ d\Gamma$$

β par

$$= h_j\ h^p \int_{\Gamma^e} M^p\ M^q\ n_y\ d\Gamma$$

$$(II.5)$$

con las expresiones de los coeficientes a_{km}, b_{klj}, c_{kj}, d_{kmn}, e_{kj}^P, h_j:

$$a_{km}=\int_0^1 W_k\ N_m^* d\xi$$

$$b_{klj}=\int_0^1 W_k \ N_l \ N_j d\xi$$

$$c_{kj}=\int_0^1 W_k \ N_j d\xi$$

$$d_{kmn}=\int_0^1 W_k \ N_m^* \left[\int_\xi^1 N_n^* d\xi\right] d\xi$$

$$e_{kj}^p=\int_0^1 (\partial_\xi W_k)\, K_z^p\, (\partial_\xi N_j)\, d\xi$$

$$h_j=\int_0^1 N_j d\xi \qquad (II.6)$$

APÉNDICE III.

CONDICIÓN BABUSKA-BREZZI. ELEMENTOS ADMISIBLES.

Podemos escribir las SWE adimensionales, en forma vectorial, de este modo:

$$\varepsilon\,((\vec{u}.\nabla_H)\,\vec{u}) = -\frac{\rho_0}{\rho}\nabla_H\eta + \frac{E_H}{2}\nabla_H.\,[K_H(\nabla_H\vec{u} + (\nabla_H\vec{u})^t)] + \frac{E_z}{2}(K_z\partial_z\vec{u}) \qquad (III.1)$$

$$\nabla.\vec{u}=0 \qquad (III.2)$$

donde el subíndice H denota la restricción de los operadores gradiente (∇) y divergencia ($\nabla.$) al plano xy y $()^t$ es el operador transponer. Los términos de Coriolis y gradiente baroclínico de presión, aunque están incluidos en la formulación del modelo, no se han escrito aquí por simplicidad.

Las ecuaciones (III.1) y (III.2) son eminentemente 3D. Pero, al usar una estrategia de discretización quasi-3D usando como funciones base los polinomios de Legendre de grado par (1.7), dichas ecuaciones discretizadas, cuando trabajamos con un sólo grado de libertad vertical, coinciden con la versión de las mismas integradas verticalmente (ecuaciones 2DH). Por otro lado, las restricciones que la formulación mixta impone sobre las funciones de interpolación de las variables es similar tanto en problemas 3D como en 2D.

Así, por simplicidad, podemos reducir nuestro análisis acerca de la admisibilidad del elemento, al estudio del problema:

$$\varepsilon\left((u.\nabla)u\right)-\frac{E}{2}\nabla.(K\nabla u)+\frac{\rho_0}{\rho}\nabla\eta-\tau=0 \quad en\ \Omega \qquad (III.3)$$

$$\nabla.u=0 \quad en\ \Omega \qquad (III.4)$$

$$u\,|_{\Gamma}=0 \quad en\ \Gamma \qquad (III.5)$$

donde Ω es un dominio poligonal cualquiera en $\mathbb{R}^2$ con contorno $\partial\Omega = \Gamma$, u es el vector velocidad, E es el número de Ekman, K es un coeficiente de viscosidad turbulenta y τ es el término que agrupa las fuerzas externas (fricción, tensión supercial ejercida por el viento, etc...). Aquí suponemos que las condiciones de contorno son de tipo Dirichlet homogéneas, tal como expresa (III.5).

El problema dado por las ecuaciones diferenciales (III.3), (III.4) y la condición de contorno (III.5) es equivalente al descrito por la forma débil de dichas ecuaciones:

$$R(\vec{u},\eta)=\varepsilon\int_{\Omega}v(u.\nabla)\,ud\Omega-\frac{E}{2}\int_{\Omega}v\nabla.\,(K\nabla u)\,d\Omega+\frac{\rho_0}{\rho}\int_{\Omega}v\nabla\eta\,d\Omega-\int_{\Omega}v\tau\,d\Omega=0$$

$$\forall v\in V \qquad (III.6)$$

$$\int_{\Omega}q\ \nabla.\,u\ d\Omega=0 \qquad \forall q\in Q \qquad (III.7)$$

donde $R(u,\eta)$ es el residuo que hay que minimizar junto a la condición (III.7) y, v y q las funciones peso pertenecientes a los espacios de Hilbert apropiados (V y Q, respectivamente).

Si consideramos una partición en elementos finitos τ_h de Ω en elementos de cuatro lados, e introducimos los subespacios de dimensión finita $V_h\subset(H_0^1(\Omega))^n$ y $Q_h\subset L^2(\Omega)$ definidos por:

$$V_h=[v\in(H_0^1(\Omega))^2\ \mid\ v_{|_k}\in(Q_1(K))^2,\forall K\in\tau_h] \qquad (III.8a)$$

$$Q_h=[p\in L^2(\Omega)\ \mid\ p_{|_k}\in P_0(K),\forall K\in\tau_h] \qquad (III.8b)$$

donde $Q_1(K)$ es el espacio de funciones bilineales isoparamétricos y $P_0(K)$ es el espacio de funciones escalón (este tipo de discretización es la correspondiente al elemento Q1/P0), podemos formular el problema aproximado, consistente en encontrar $u_h\in V_h$ y $p_h\in Q_h$ tales que:

$$\varepsilon\int_{\Omega} v_h (u_h.\nabla_h)\, u_h d\Omega - \frac{E}{2}\int_{\Omega} v_h \nabla_h .\,(K\nabla_h u_h)\, d\Omega + \frac{\rho_0}{\rho}\int_{\Omega} v_h \nabla_h \eta_h d\Omega - \int_{\Omega} v_h \tau_h d\Omega = 0$$

$$\forall v_h \in V_h \qquad (III.9)$$

$$\int q_h \ \nabla_h . u_h \ d\Omega = 0 \qquad \forall q_h \in Q_h \qquad (III.10)$$

La condición Babuska-Brezzi dice que para que una aproximación en elementos finitos sea estable, se debe satisfacer la condición siguiente para una constante k independiente del tamaño medio de los elementos de la discretización (ver e.g. Brezzi y Fortin, 1991):

$$\underset{q_h}{infi} \ \underset{v_h \neq 0}{supr} \ \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla_h . v_h d\Omega}{\|v_h\|_{V_h} \ \|q_h\|_{Q_h/\mathbb{R}}} \geq k \qquad (III.11)$$

siendo $\|..\|$ las normas de los subespacios respectivos. La norma del cociente sobre Q_h aparece porque la altura de superficie libre esta definida salvo una constante (ec. (III.9) y (III.10)). La condición (III.11) significa implícitamente que la altura de superficie libre también debe estar definida salvo una constante en el caso discreto, lo cual no es obvio en principio.

La estabilidad de una aproximación en elementos finitos para un medio incompresible esta relacionada con las propiedades del operador discreto de la divergencia (∇_h.) y su transpuesto (∇_h). Usualmente, este operador no es la restricción del operador divergencia en $\mathbb{R}^2$ sobre Q_h. De hecho, $\nabla_h.u_h$ es la proyección de $\nabla.u_h$ en el espacio Q_h.

Aquí, es donde aparecen los problemas del elemento Q1/P0, puesto que para esta discretización el operador discreto de la divergencia coincide con el operador divergencia en $\mathbb{R}^2$ (Engelman et al., 1982), por lo que el sistema (III.9) y (III.10) es singular y la altura de la superficie libre se determina salvo una constante sólo para una aproximación razonable. Esto implica que tenemos una condición de compatibilidad extra con los datos de partida del problema.

La condición (III.11) -que el elemento Q1/P0 no satisface- es el criterio que nos indica las condiciones que deben cumplir los elementos para que la solución sea estable. Sin embargo, algunas causas del porqué de la aparición de inestabilidades en la solución de las SWE se pueden explicar por razonamientos mucho más sencillos.

Si discretizamos las variables u y η utilizando las funciones vectoriales de forma M y P (cuyas componentes son las funciones escalares de forma $M^q(x,y)$ y $P^i(x,y)$, respectivamente):

$$u=Mu^* \qquad (III.12a)$$

$$\eta=P\eta^* \qquad (III.12b)$$

siendo u^* y η^* los vectores que contienen las incógnitas nodales para la velocidad y la altura de superficie libre, respectivamente; y aplicamos el método de Galerkin para discretizar las ecuaciones (III.3) y (III.4):

$$\int_{\Omega} M^t [\varepsilon((u.\nabla)u) - \frac{E}{2}\nabla.(K\nabla u) + \frac{\rho_0}{\rho}\nabla\eta - \tau]\, d\Omega = 0 \qquad (III.13)$$

$$\int_{\Omega} P^t \; [\nabla . u] \; d\Omega = 0 \qquad (III.14)$$

se obtiene el siguiente sistema algebraico de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} A(u^*)+G & D^t \\ D & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^* \\ \eta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (III.15)$$

donde:

$$[A(u^*)] = \varepsilon u^* \int_{\Omega} M^t (M.\nabla) M \; d\Omega$$

$$[G] = -\frac{E}{2}\int_{\Omega} M^t \; \nabla.(K\nabla M)\, d\Omega$$

$$[D^t] = \frac{\rho_0}{\rho}\int_{\Omega} M^t \; \nabla P \; d\Omega$$

$$[D] = \int_{\Omega} P^t \; \nabla M \; d\Omega$$

$$[F] = \int_{\Omega} M^t \; \tau \; d\Omega \qquad (III.16)$$

Si el problema es lineal (A(u*)=0), se obtiene la solución, mediante el algoritmo de Uzawa, eliminando u* de la primera ecuación y sustituyéndola en la segunda, con lo que obtenemos:

$$DG^{-1}D^t \; \eta^* = DG^{-1}F \qquad (III.17)$$

asumiendo que la matriz G es no singular (o que $Gu^* \neq 0 \; \forall u^* \neq 0$). Para calcular η^* es necesario asegurar que la matriz:

$$H = DG^{-1}D^t \qquad (III.18)$$

tampoco es singular.

La matriz H será singular si el número de componentes del vector u^* (n_u) es menor que el número de componentes del vector η^* (n_η). Para evitar que H sea singular una condición necesaria es:

$$n_u \geq n_\eta \qquad (III.19)$$

La misma condición (III.19) asegura que no pueda existir la solución $u^*=0$. Por contra, si no se cumple esta condición se pueden obtener inestabilidades en la solución numérica.

La condición (III.19) es necesaria pero no suficiente para asegurar que la matriz H es no singular. Un requerimiento adicional a partir de (III.17) es que:

$$D^t\eta^* \neq 0 \qquad \forall \eta^* \neq 0 \qquad (III.20)$$

ya que si ésto no es así, la solución puede no ser única. Esta condición, como ya hemos mencionado, es inherente a la condición Babuska-Brezzi, pero no se puede verificar algebraicamente.

La condición (III.19) se puede deducir directamente de la expresión en residuos ponderados de Galerkin de la ecuación de la continuidad (III.14):

$$\int_{\Omega} P^{i}\,[\nabla . u]\, d\Omega = 0 \qquad i=1,2,\ldots.,L \qquad (III.21)$$

Tenemos L ecuaciones con 2M incógnitas, donde L y M son el número de nodos para la altura de la superficie libre y la velocidad en la región Ω, respectivamente. Sin embargo, debido a la presencia de las condiciones de contorno, el número de ecuaciones y el número de grados de libertad es menor:

- La altura de superficie libre esta definida, para estas ecuaciones, salvo una constante aditiva que se fija imponiendo un valor de η en un nodo del contorno.

- La velocidad se prescribe en una parte del contorno Γ. Supongamos que el número de nodos para la velocidad en el contorno, donde se prescriben condiciones de contorno Dirichlet, es igual a R.

El sistema (III.21) es, en estas condiciones, de L-1 ecuaciones con 2(M-R) incógnitas. Por lo que, la condición para que la velocidad no este completamente descrita por la ecuación de continuidad es:

$$2\,(M-R) > P-1 \qquad (III.22)$$

La expresión (III.22) es idéntica a la (III.19) pues, $n_\eta = L-1$ y $n_u = 2(M-R)$. A partir de la condición (III.19), un requerimiento aceptado generalmente para la elección del tipo de elemento es que las funciones de forma para la altura de la superficie libre deban ser, al menos, de un orden menor que las de la velocidad. Recordemos nuevamente que esta condición es necesaria pero no suficiente para asegurar la estabilidad de la solución.