

Parte I

TEORÍA

2. TEORÍA BÁSICA DE LA TURBULENCIA

En este capítulo se presentan las ecuaciones básicas que describen la dinámica de los fluidos en general, y la turbulencia en particular. La primera parte del capítulo está dedicada a las ecuaciones de conservación de materia y cantidad de movimiento. Estas ecuaciones están expresadas en forma diferencial, describiendo la dinámica de elementos de fluido en un cierto dominio, tanto tridimensional como bidimensional. El fluido es considerado en todo momento como un medio continuo, sin estructura molecular. Para que esta hipótesis sea válida, el tamaño del elemento de fluido debe ser lo suficientemente grande como para que en él haya cabida para un gran número de moléculas, y lo suficientemente pequeño para que las propiedades físicas (densidad, velocidad, presión, ...) puedan ser consideradas uniformes en su interior. El tamaño concreto del elemento de fluido depende del caso tratado. Es diferente en el caso de dinámica atmosférica que en el flujo sanguíneo en arterias microscópicas. Pero en todos los casos, el elemento de fluido será muy pequeño en comparación con el dominio del flujo, aunque de tamaño macroscópico. La validez de la hipótesis de continuidad del medio viene determinada por el valor del número de Knudsen, definido como el cociente entre el camino libre medio molecular y la longitud característica del elemento de fluido¹. El tema está tratado en cualquiera de los libros clásicos sobre Mecánica de Fluidos, como el de Landau y Lifshitz (1986).

En la segunda parte del capítulo se trata el tema de turbulencia estadística. Se presentan los conceptos básicos sobre estadística necesarios para comprender las deducciones de las ecuaciones, y se modifican las expresiones de la dinámica de fluidos para describir los procesos de transporte en flujo turbulento. Las obras consultadas para la confección de este apartado han sido, principalmente las de Libby (1996), Lesieur (1997), Tennekes y Lumley (1972), Townsend (1976) y Hinze (1975).

¹ El número de Knudsen también se define a veces como el cociente del camino libre medio y una longitud característica del dominio, de forma que indica que colisiones son mas frecuentes: las dadas entre moléculas o las que tienen lugar contra el contorno. También existe un número de Knudsen turbulento, en el que el camino libre medio es substituido por el tamaño típico de los remolinos. En el contexto del presente trabajo, en el que se estudia la denominada turbulencia libre, el número de Knudsen turbulento será muy pequeño.

De la definición dada de la turbulencia en el primer capítulo y las ecuaciones presentadas en el presente, no está clara la diferencia entre turbulencia y caos. La teoría del caos se ha formado en las últimas décadas como una importante disciplina independiente. Ésta describe el comportamiento de sistemas dinámicos con un número limitado de grados de libertad, en los que dos puntos arbitrariamente cercanos en el espacio de fases se separan en el tiempo de forma exponencial. La diferencia primordial entre la teoría del caos y la turbulencia es que en ésta última el número de grados de libertad del sistema es mucho mayor y que exhibe comportamiento caótico no solamente en el tiempo sino también el espacio (Lesieur, 1997).

Por otro lado, si un flujo turbulento es descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes, éste es completamente determinista, aunque su evolución puede ser realmente complicada debido a las interacciones no lineales. Aunque este punto de vista contradice la condición de impredecibilidad de la turbulencia, es útil para el desarrollo de modelos numéricos de simulación de flujos turbulentos. Puede ser útil, para resolver esta contradicción, el uso de modelos estocásticos y funciones aleatorias.

En la última parte del capítulo se describen algunos de los modelos numéricos para la simulación de flujo turbulento por ordenador. De los cuatro modelos presentados, dos son “dinámicos”, en el sentido de que la base de la simulación es la resolución de las ecuaciones de la dinámica de fluidos; los otros dos modelos son “cinemáticos”, dado que realizan campos de velocidad que, sin ser turbulentos, poseen características propias de los mismos. Los dos modelos “dinámicos” son deterministas en el sentido de que, dada una cierta configuración del flujo, sería posible predecir su estado para un tiempo arbitrario. En los modelos “cinemáticos” presentados se introduce algún tipo de impredecibilidad a través de funciones aleatorias.

2.1. Ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos

2.1.1. Ecuación de continuidad

Desde un punto de vista Euleriano, a través de la superficie cerrada que limita un volumen, el flujo total de masa es cero. Por supuesto, se entiende que flujo saliente y entrante tienen signos contrarios.

En forma diferencial, esta condición se expresa como

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

La propiedad de *incompresibilidad* del fluido, $\frac{d\rho}{dt} = 0$, nos da, de forma sencilla, la condición cinemática de la continuidad

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.2)$$

Desarrollada, esta condición es

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

en el espacio tridimensional y

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

en el bidimensional.

2.1.2. Ecuación de conservación de cantidad de movimiento

Sobre la partícula de fluido debe cumplirse también la conservación de la cantidad de movimiento o, lo que es lo mismo, la 2a. ley de la Dinámica de Newton. Ésta establece que el balance de fuerzas total que actúa sobre la partícula de fluido equivale a su masa por su aceleración. Expresando esto por unidad de volumen obtenemos

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \vec{f} \quad (2.5)$$

donde p es la presión, $\vec{\tau}$ es el tensor de tensiones² y \vec{f} agrupa la totalidad de fuerzas másicas externas por unidad de volumen.

Si el fluido es newtoniano³, el tensor de tensiones $\vec{\tau}$ se expresa en función del tensor gradiente de la velocidad mediante la ecuación constitutiva

$$\vec{\tau} = \mu \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right] \quad (2.6)$$

donde $\nabla \vec{u}$ es el tensor divergencia de velocidad, $\partial u_i / \partial x_j$ y $(\nabla \vec{u})^T$ es su transpuesto, $\partial u_j / \partial x_i$, y μ es el *coeficiente de viscosidad dinámica*; su cociente con la densidad ρ es el denominado *coeficiente de viscosidad cinemática*, ν .

² A efectos de simplicidad, el tensor de tensiones se ha expresado sin traza, que esta incluida en el término de presión

³ En el presente trabajo no se van a considerar fluidos no newtonianos.

Substituyendo (2.6) en (2.5) se obtiene la *ecuación de Navier-Stokes* para fluidos newtonianos

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \left[\nu \left(\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right) \right] + \frac{\vec{f}}{\rho} \quad (2.7)$$

que, si la viscosidad ν es constante en todos los puntos del dominio, se convierte en

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} + \frac{\vec{f}}{\rho}, \quad (2.8)$$

definiendo el operador laplaciano ∇^2 como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.9a)$$

en tres dimensiones y, evidentemente,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.9b)$$

en el espacio bidimensional.

Conviene resaltar que la ecuación de Navier-Stokes es, a diferencia de la ecuación de continuidad, una relación vectorial, por lo que, en realidad, son tres ecuaciones escalares en el espacio tridimensional y dos en el bidimensional:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_x + \frac{f_x}{\rho} \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_y + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_y + \frac{f_y}{\rho} \quad (2.10b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_z + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_z = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_z + \frac{f_z}{\rho} \quad (2.10c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_x + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_x + \frac{f_x}{\rho} \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u_y + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} \right) u_y = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u_y + \frac{f_y}{\rho} \quad (2.11b)$$

2.1.3. Ecuación de vorticidad

Una forma conveniente de expresar las ecuaciones de la dinámica de fluidos es mediante el rotacional de la velocidad, magnitud que se conoce como *vorticidad*.

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}. \quad (2.12)$$

Si aplicamos el operador rotacional a todos los términos de (2.7) y realizamos algunas operaciones algebraicas, obtenemos la ecuación de la vorticidad,

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (2.13)$$

Esta formulación tiene la gran ventaja de que elimina el término del gradiente de presión, ya que el rotacional de un gradiente es siempre nulo. Por otra parte, no se ha incluido el término de rotacional de la fuerza externa porque, en general, éstas son de carácter conservativo, y, por lo tanto, de rotacional nulo.

En el miembro de la derecha de la ecuación de la vorticidad, (2.13), el segundo término identifica, al igual que en la ecuación de Navier-Stokes, la disipación de energía por viscosidad molecular. El primer término describe el fenómeno de estiramiento de los tubos de vorticidad en la dirección de la velocidad.

2.2. Turbulencia bidimensional

Teóricamente es posible resolver las ecuaciones de Navier-Stokes (o la ecuación de la vorticidad) en un dominio bidimensional, en el que las velocidades del fluido tienen tan solo componentes horizontales, $\vec{u} = (u_x, u_y, 0)$. Es fácil ver que un campo de estas características únicamente tendría componente vertical de la vorticidad,

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega_z) = \left(0, 0, \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (2.14)$$

Si desarrollamos la ecuación de vorticidad (2.13) en cada uno de sus componentes en

el dominio tridimensional,

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_x + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\omega_x = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right)u_x + \nu \nabla^2 \omega_x \quad (2.15a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_y + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\omega_y = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right)u_y + \nu \nabla^2 \omega_y \quad (2.15b)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_z + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}\right)\omega_z = \left(\omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right)u_z + \nu \nabla^2 \omega_z, \quad (2.15c)$$

teniendo en cuenta (2.14) es inmediato escribir la ecuación de la vorticidad en dos dimensiones,

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y}\right)\omega = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\omega, \quad (2.16)$$

donde, por simplicidad, hemos identificado $\omega_z = \omega$.

Otra forma de expresar la dinámica bidimensional es introduciendo la *función de corriente*, $\psi(x, y, t)$, dada por

$$u_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (2.17a)$$

$$u_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (2.17b)$$

de forma que la vorticidad es $\omega = \omega_z = \nabla^2 \psi$, y (2.16) se escribe como

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega + J[\omega, \psi] = \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\omega, \quad (2.18)$$

donde $J[\cdot, \cdot]$ es el operador jacobiano bidimensional.

Las implicaciones de (2.16) (o (2.18)) son muy importantes. En primer lugar, si la viscosidad se puede considerar nula (fluido perfecto), la vorticidad es conservada en la trayectoria de una partícula de fluido. En segundo lugar, desaparece el término que describe el estiramiento de los tubos o líneas de vorticidad. En realidad, según esto último, podría desprenderse que no existe la turbulencia bidimensional. En efecto, el fenómeno de estiramiento y rotación de los tubos de vorticidad es considerado como una de las características propias de un flujo turbulento, que ha de ser, por tanto, tridimensional (Libby, 1996). Por otra parte, existen otros argumentos teóricos en contra de la existencia real de la turbulencia bidimensional. Kiehn (1999) demuestra mediante argumentos topológicos que no es posible que tengan lugar procesos irreversibles en flujos bidimensionales.

Sin embargo, un flujo turbulento bidimensional conserva las propiedades de imprevisibilidad y efectividad de mezcla propias de la turbulencia. Kraichnan y Montgomery (1980) reflejan esta idea en el texto inicial de su fundamental artículo sobre turbulencia bidimensional: “[...]. Two-dimensional turbulence has the special distinction that it is nowhere realised in nature or the laboratory but only in computer simulation. Its importance is two-fold: first, that it idealises geophysical phenomena in the atmosphere, oceans and magnetosphere and provides a starting point for modelling these phenomena; second, that it presents a bizarre and instructive statistical mechanics.[...]”.

Seria posible producir turbulencia bidimensional en el laboratorio confinando el flujo entre dos placas paralelas. Sin embargo, la aparición de capas límite en las placas tendería a anular las escalas de turbulencia mayores que la separación entre placas y desarrollar únicamente turbulencia tridimensional a escalas menores. Esto se puede inhibir mediante una gran viscosidad o un movimiento de rotación. Esto último es precisamente lo que ocurre en la capa límite atmosférica, donde la turbulencia puede considerarse bidimensional a ciertas escalas (Kraichnan and Montgomery, 1980).

Notamos que existen dos puntos claves en referencia a la turbulencia bidimensional:

1. La turbulencia bidimensional no es un caso concreto, o simplificado, de la turbulencia tridimensional. La diferencia establecida por la desaparición del término de estiramiento de tubos de vorticidad implica el estudio de fenómenos que no tienen analogía alguna en la turbulencia tridimensional. Por lo tanto, deben considerarse como dos disciplinas a un mismo nivel, con aspectos comunes, pero completamente independientes.
2. En la naturaleza o el laboratorio no es posible turbulencia estrictamente bidimensional. Ésta sólo existe en el contexto de las simulaciones por ordenador o las investigaciones teóricas.

El segundo punto expuesto puede crear dudas sobre la conveniencia de estudiar un fenómeno que no se encuentra reflejado en la naturaleza. Sin embargo, la creación de modelos de turbulencia bidimensional puede ayudar a entender fenómenos naturales de características quasi-bidimensionales, como la capa límite atmosférica o ciertos flujos dados en magnetohidrodinámica y superfluidos (Kraichnan and Montgomery, 1980).

Es sabido que en la turbulencia tridimensional existe un invariante cuadrático del movimiento, que es la energía. Esto lleva a la idea de la cascada de Richardson, que describe cómo la energía es transmitida de las grandes escalas de la turbulencia a las mas pequeñas,

hasta que finalmente es disipada por la viscosidad molecular (Frisch, 1995). En turbulencia bidimensional, según hemos visto, nos encontramos con un segundo invariante. En este caso, además de la energía, el módulo de la vorticidad es conservada a lo largo de la trayectoria de una partícula (si no se tiene en cuenta la viscosidad). Se define la *enstrofía* como

$$Z = \frac{1}{2} \|\vec{\omega}\|^2 \quad (2.19)$$

por analogía con la relación entre velocidad y energía. Veremos que, de forma análoga a la cascada de energía hacia las escalas pequeñas en turbulencia tridimensional, existe en la bidimensional una cascada de enstrofía. Además, debido a que la energía sigue conservándose, aparece también una cascada de energía, pero en este caso hacia las escalas mayores, dando lugar a *estructuras coherentes*, que son formaciones características de la turbulencia bidimensional (se ampliará este tema en el capítulo 4). Para poder describir esto con claridad, es preciso antes presentar algunas ideas básicas sobre turbulencia estadística.

2.3. Turbulencia estadística

Existe un planteamiento algo diferente del presentado hasta ahora para el estudio de la turbulencia. Se basa en un tratamiento estadístico análogo al usado en el estudio termodinámico de los gases, pero construido sobre las ecuaciones de Navier-Stokes (Reynolds, 1895).

Antes de describir este planteamiento, se presentan las definiciones básicas de algunos conceptos estadísticos. A continuación se utilizan estas herramientas para transformar las ecuaciones de Navier-Stokes obteniendo la ecuación de Reynolds, con el importante término del tensor de Reynolds, que describe el transporte de cantidad de movimiento en flujo turbulento.

2.3.1. Definiciones básicas de magnitudes estadísticas

Promedio

Supongamos una cierta magnitud A , que puede adoptar una serie de N valores a_i , $i = 1, \dots, N$. Definimos el promedio o media de A como

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i \quad (2.20)$$

En general, hay que distinguir entre si el promedio es de conjunto, o bien temporal. En el primer caso, los distintos valores a_i son obtenidos de realizaciones diferentes del experimento. En el segundo, los valores son obtenidos como una serie temporal de medidas. Evidentemente, si el proceso que genera las mediciones de A es estacionario, los dos promedios serán idénticos para $N \rightarrow \infty$ ⁴.

En el caso de que la magnitud A se obtenga como una función continua del tiempo (posible únicamente en el caso de expresiones analíticas, ya que todo instrumento de laboratorio o cálculo numérico por ordenador ofrece resultados discretos de la variable), el promedio en un cierto intervalo T es definido como

$$\langle A \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt \quad (2.21)$$

Fluctuaciones

Si la variable A se puede expresar como una función continua del tiempo, en el intervalo T tendrá un promedio $\langle A \rangle$ definido por (2.21). En un cierto instante $t \in [0, T]$, se define la fluctuación de A como

$$a'(t) = a(t) - \langle A \rangle. \quad (2.22)$$

Evidentemente, siempre se cumple que

$$\langle a' \rangle = 0 \quad (2.23)$$

Una magnitud importante en el estudio de la turbulencia es la desviación cuadrática media de la fluctuación, $\langle a'^2 \rangle^{1/2}$, que indica la escala de variación de $a(t)$ alrededor de la media. La fluctuación relativa $\frac{\langle a'^2 \rangle^{1/2}}{\langle A \rangle}$ es también una medida importante de esta variación.

Función de densidad de probabilidad

Dado que lo interesante de una cierta magnitud $a(t)$ no es el valor en sí, sino sus valores estadísticos, una forma muy apropiada de caracterizarla es mediante una función de densidad de probabilidad (probability density function, o pdf), que no es más que una función $P(a)$ que tiene la propiedad de que $P(a)da$ indica la probabilidad de que A tenga un valor comprendido entre a y $a + da$. Libby (1996) describe de forma muy clara cómo calcular la pdf a partir de valores experimentales.

⁴ Este es el conocido como teorema de ergodicidad

Las relaciones de la pdf de una cierta magnitud con sus propiedades estadísticas son

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(a) da \quad (2.24a)$$

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} aP(a) da \quad (2.24b)$$

$$\langle a'^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \langle A \rangle)^2 P(a) da \quad (2.24c)$$

Se puede calcular, en general, el momento de cualquier orden a partir de la pdf mediante

$$\langle a'^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (a - \langle A \rangle)^n P(a) da. \quad (2.25)$$

Son de especial interés los momentos de tercer y cuarto orden, que dan lugar a las llamadas *sesgo* (skewness) y *kurtosis* (flatness)

$$S = \frac{\langle a'^3 \rangle}{\langle a'^2 \rangle^{3/2}} \quad (2.26)$$

$$K = \frac{\langle a'^4 \rangle}{\langle a'^2 \rangle^2} \quad (2.27)$$

La primera indica la asimetría de la pdf alrededor de la media. La kurtosis refleja la importancia de valores simétricos de la pdf, pero muy alejados de la media (lo que normalmente se denomina “ colas ” de la pdf).

Frecuentemente se encuentran en la naturaleza series de valores cuya pdf se aproximan a la forma teórica conocida como *curva de Gauss*

$$P(a) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{-(a - \langle A \rangle)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.28)$$

donde $\sigma^2 = \langle a'^2 \rangle$. Esta distribución es simétrica, por lo que $S = 0$. Por otro lado, el valor de la kurtosis es $K = 3$.

Correlaciones

Una forma de medir la rapidez (tanto en el tiempo como en el espacio) con la que fluctúa una cierta señal es mediante la *autocorrelación*. Supongamos, a modo de ejemplo,

que disponemos de una cierta variable $a(t)$, con un promedio $\langle A \rangle$ y una fluctuación $a'(t)$, y construimos otra a partir de ésta introduciendo un desplazamiento τ del tiempo, $a(t + \tau) = \langle A \rangle + a'(t + \tau)$. Si multiplicamos las fluctuaciones de estas dos variables y realizamos un promedio temporal, obtenemos un número que será diferente para cada valor de τ . Evidentemente, si τ es muy pequeño, este número será muy cercano a $\langle a'^2 \rangle$, de forma que el *coeficiente de autocorrelación temporal*,

$$R(\tau) = \frac{\langle a'(t)a'(t + \tau) \rangle}{\langle a'^2 \rangle} \quad (2.29)$$

es una función de τ que cumple que $R(\tau) \rightarrow +1$ cuando $\tau \rightarrow 0$.

Por otra parte, si la señal es estadísticamente estacionaria, la función de autocorrelación sera simétrica respecto de $\tau = 0$, y, por lo tanto, su primera derivada será nula en el origen. Experimentalmente, y, sobre todo en el estudio de la turbulencia, se encuentra además que la función de autocorrelación tiende asintóticamente 0 para valores grandes de τ .

Una escala de tiempo asociada a la autocorrelación temporal surge directamente de su integral, asumiendo que es convergente. Es la denominada *escala integral de tiempo* o, simplemente, *tiempo integral*

$$T_1 = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_0^\tau R(\tau') d\tau' \quad (2.30)$$

Otra escala de tiempo característica surge de desarrollar la función de autocorrelación hasta segundo orden en el origen,

$$R(\tau) \sim R(0) + \frac{dR(0)}{d\tau} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} \tau^2 \quad (2.31)$$

Como se ha comentado, $R(0) = 1$ y $\frac{dR(0)}{d\tau} = 0$, de forma que

$$R(\tau) \sim 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} \tau^2 \quad (2.32)$$

y, por otro lado, desarrollando hasta segundo orden $a'(t + \tau)$ en $\tau = 0$

$$a'(t + \tau) \sim a'(t) + \frac{da'(t)}{dt} \tau + \frac{1}{2} \frac{d^2 a'(t)}{dt^2} \tau^2, \quad (2.33)$$

multiplicando por $a'(t)$, promediando y dividiendo por $\langle a'^2 \rangle$, tal y como se indica en (2.29),

al comparar términos con (2.32) se obtiene

$$\frac{d^2 R(0)}{d\tau^2} = \frac{\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \rangle}{\langle a'^2 \rangle} \quad (2.34)$$

y

$$R(\tau) \sim 1 + \frac{1}{2} \frac{\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \rangle}{\langle a'^2 \rangle} \tau^2 \quad \text{cuando } \tau \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

Esta expresión da pie a la definición de un segundo tiempo característico,

$$T_2 = \left[\frac{-2 \langle a'^2 \rangle}{\langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \rangle} \right]^{1/2}, \quad (2.36)$$

aunque suele ser mas conveniente reescribir esta expresión como

$$T_2 = \left[\frac{2 \langle a'^2 \rangle}{\langle \left(\frac{da'}{dt} \right)^2 \rangle} \right]^{1/2}, \quad (2.37)$$

usando

$$a' \frac{d^2 a'}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(a' \frac{da'}{dt} \right) - \left(\frac{da'}{dt} \right)^2 \Rightarrow \langle a' \frac{d^2 a'}{dt^2} \rangle = - \left\langle \left(\frac{da'}{dt} \right)^2 \right\rangle, \quad (2.38)$$

ya que es mas fiable calcular la primera derivada de una señal que la segunda.

El tiempo integral T_1 indica la escala de las fluctuaciones a gran escala. Por el contrario, el tiempo T_2 da información sobre la importancia de las fluctuaciones rápidas. La figura 2.1 muestra de forma esquemática estas dos escalas de tiempo.

Evidentemente, toda esta explicación basada en una señal temporal puede ser extrapolada a una señal espacial. Experimentalmente, la diferencia es que en lugar de tomar una serie temporal de medidas con un detector, se dispone de un conjunto de detectores separados una cierta distancia que, simultáneamente, toman una medida de la señal. Tendremos entonces, considerando una disposición en línea de estos detectores, una autocorrelación espacial,

$$R(\lambda) = \frac{\langle a'(l) a'(l + \lambda) \rangle}{\langle a'(l)^2 \rangle}, \quad (2.39)$$

en la que los promedios se realizan sobre todos los valores de l , una escala integral de

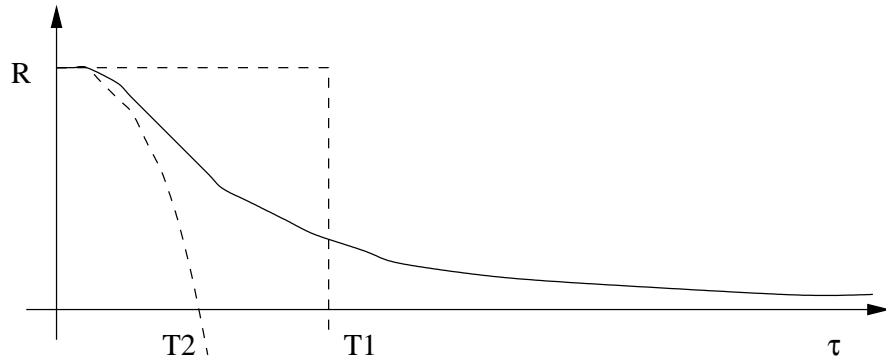


Fig. 2.1: Autocorrelación temporal de una señal. Interpretación gráfica de las escalas características de tiempo. T_1 es la escala integral de tiempo (2.30), asociada a las variaciones a gran escala. La escala T_2 está definida en (2.37), y está asociada a variaciones rápidas del flujo.

espacio,

$$L_1 = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^\lambda R(\lambda') d\lambda' \quad (2.40)$$

y una escala de espacio relacionada con las fluctuaciones a pequeña escala,

$$L_2 = \left[\frac{2 \langle a'^2 \rangle}{\langle (\frac{da'}{dt})^2 \rangle} \right]^{1/2} \quad (2.41)$$

Para finalizar, indicamos que el hecho de que la primera derivada de la autocorrelación sea nula en el origen está originada por la homogeneidad de la señal en el espacio.

Espectro de una señal

El espectro, o más exactamente, la densidad espectral de energía, es un concepto muy importante en el tratamiento estadístico de cualquier señal y, en concreto, en el estudio de la turbulencia. De nuevo comenzaremos la explicación basándonos en una serie temporal de fluctuaciones para generalizar a continuación al caso de serie espacial.

Es importante recordar en primer lugar la idea de transformada de Fourier. Dada una función genérica $f(t)$, se define su transformada de Fourier como

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(i\omega t) dt \quad (2.42)$$

y la transformada inversa de $\hat{f}(\omega)$ como

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (2.43)$$

La forma en que se expresan en relación a los factores 2, π o sus raíces varia mucho en función de la definición dada de transformada y transformada inversa de Fourier. Lo importante es que el producto de los dos factores sea $(1/2\pi)$. La opción adoptada en el presente trabajo es la habitual en la literatura sobre turbulencia. Se puede consultar una amplia información sobre el cálculo numérico de la transformada de Fourier y sus aplicaciones en la obra de Press et al. (1992).

Consideremos la transformada de Fourier de la autocorrelación de una señal $a'(t)$, definida en (2.29), pero sin normalizar,

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle a'(t)a'(t + \tau) \rangle \exp(i\omega\tau) d\tau. \quad (2.44)$$

Una propiedad interesante de la transformada de Fourier es que si la función a transformar es real y par, como es el caso de la autocorrelación, entonces su transformada también es real y par. En este caso particular, la expresión anterior se puede calcular como

$$\phi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \langle a'(t)a'(t + \tau) \rangle \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (2.45)$$

y, a la inversa,

$$\langle a'(t)a'(t + \tau) \rangle = \int_0^{+\infty} \phi(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (2.46)$$

A $\phi(\omega)$ se le denomina densidad espectral de intensidad (o función característica) de la señal. En el caso que nos ocupa de una señal temporal, si la describimos como la superposición de una relación continua de señales armónicas, cada una con una frecuencia ω , entonces

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \phi(\omega) d\omega \quad (2.47)$$

es la contribución a la intensidad de todos los armónicos con frecuencias comprendidas entre ω_1 y ω_2 . Con la expresión (2.46) es fácil comprobar que, para $\tau = 0$,

$$\langle a'^2 \rangle = \int_0^{+\infty} \phi(\omega) d\omega \quad (2.48)$$

Todo esta argumentación para una señal temporal puede ser generalizada a una señal espacial unidimensional. Los conceptos son los mismos, con la posición en lugar del tiempo y el número de onda k en el de la frecuencia (ver sección (2.3.4)).

En el caso de una señal bidimensional o tridimensional, la función característica definida en (2.45) es ahora un tensor, y la integral (2.47) se realiza sobre una corona o sobre una capa, respectivamente.

En el apéndice B se comentan algunos aspectos técnicos del cálculo numérico del espectro de energía de un flujo turbulento bidimensional.

2.3.2. La ecuación de Reynolds

Siguiendo el trabajo de Reynolds (1895), si descomponemos la velocidad de un flujo turbulento como $\vec{u} = \vec{U} + \vec{u}'$, donde $\vec{U} = \langle \vec{u} \rangle$, entonces la ecuación de continuidad (2.2) se cumple para el flujo medio y para las fluctuaciones,

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (2.49a)$$

$$\nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (2.49b)$$

Por otro lado, al hacer el promedio de las ecuaciones de Navier-Stokes (2.7) obtenemos las denominadas ecuaciones de Reynolds para el flujo medio,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{U} + \rho (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = \nabla p + \nabla \left[\mu \left(\nabla \vec{U} + (\nabla \vec{U})^T \right) + \vec{\tau}^t \right] + \langle \vec{f} \rangle, \quad (2.50)$$

que son análogas a las de Navier-Stokes, pero con el término añadido del tensor de Reynolds,

$$\tau_{ij}^t = -\rho \langle u'_i u'_j \rangle \quad (2.51)$$

que es el responsable de la transferencia de cantidad de movimiento (y, por lo tanto, pérdida de energía en el flujo medio) debida a las correlaciones de las fluctuaciones de velocidad.

El problema ahora reside en que las ecuaciones de Reynolds no son cerradas, ya que el tensor de Reynolds es desconocido. La expresión más generalizada para el tensor de Reynolds surge al hacer una analogía con el tensor de tensiones para fluidos newtonianos, (2.6),

$$\vec{\tau}^t = \mu_t \left[\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T \right] \quad (2.52)$$

introduciendo la *viscosidad turbulenta*, μ_t , o, de forma equivalente, la *viscosidad cinemática*

turbulenta que se puede expresar en términos de una *longitud de mezcla*, l :

$$\nu_t = \frac{\mu_t}{\rho} = lv'. \quad (2.53)$$

La longitud de mezcla es una estimación de la distancia que ha de recorrer una partícula de fluido en una cierta dirección para que las componentes en esa dirección de su posición y su velocidad pierdan su correlación. La velocidad v' representa de forma genérica las fluctuaciones de velocidad en el flujo turbulento. En cierta forma, se puede pensar en la longitud de mezcla como el recorrido libre medio de la teoría cinética de los gases (Tennekes and Lumley, 1972).

Es posible, sin embargo, obtener una expresión para el transporte del tensor de Reynolds. Consideremos la ecuación (2.5) para la componente u_i de la velocidad,

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} u_i + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} + f_i, \quad (2.54)$$

y la análoga para la componente u_j . Si multiplicamos la primera por u_j , la segunda por u_i , las sumamos y promediamos, obtenemos la expresión buscada,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \langle u'_i u'_j \rangle + \rho U_k \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k} = & -\rho \left(\langle u'_j u'_k \rangle \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \langle u'_i u'_k \rangle \frac{\partial U_j}{\partial x_k} \right) \\ & - \rho \frac{\partial \langle u'_i u'_j u'_k \rangle}{\partial x_k} - \left(\frac{\partial \langle p u'_j \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial \langle p u'_i \rangle}{\partial x_j} \right) \\ & + \left\langle p \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle + \langle f_i u'_j \rangle + \langle f_j u'_i \rangle + \left(\left\langle u'_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u'_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

que incluye términos desconocidos, como las interacciones de tercer orden de las fluctuaciones, $\langle u'_i u'_j u'_k \rangle$, o las correlaciones presión-velocidad. Ecuaciones para la evolución de las correlaciones de orden 3 puede ser deducida, sin más que seguir el proceso anterior con las ecuaciones de Navier-Stokes, pero aplicándolo a (2.55), pero esto involucraría correlaciones de orden 4, y así podríamos seguir indefinidamente. Este es el conocido como el problema de cierre de las ecuaciones de la turbulencia. Existen modelos de cierre de estas ecuaciones, con diferentes grados de complejidad. El tratamiento de este tema está fuera de los objetivos de este trabajo. En el apéndice A se incluye un pequeño resumen de estos modelos de cierre, aunque para profundizar en el tema, se remite al lector al trabajo de Launder (1990) y al de Hanjalic (1994), y a las referencias incluidas en los mismos.

A pesar de las dificultades que plantea la ecuación (2.55), en cuanto a la aparición de términos desconocidos, es interesante el análisis del último de los factores del miembro de la derecha. Éste describe la disipación de energía turbulenta por viscosidad molecular. Desarrollando éste término, usando (2.6), se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\left\langle u'_j \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle u'_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} \right\rangle \right) &= \mu \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \langle u'_i u'_j \rangle + \mu \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\left\langle u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle u'_i \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right\rangle \right) \\ &\quad - \mu \left(2 \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (2.56)$$

De los tres términos que forman la disipación viscosa, en la mayoría de los flujos turbulentos, los dos primeros son mucho menores que el tercero, ya que las derivativas espaciales de los promedios de las fluctuaciones son del orden de la inversa de una escala macroscópica, relacionada con el dominio del flujo o la escala integral de la turbulencia, mientras que las derivativas de las fluctuaciones son del orden de la inversa de una escala espacial mucho menor (Libby, 1996). Esto permite definir el tensor de disipación viscosa como

$$\varepsilon_{ij} = \nu \left(2 \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \right) \quad (2.57)$$

Si, por último, en la ecuación (2.55), hacemos $i = j = k$, y sumamos los índices repetidos, obtenemos la ley de conservación de la energía cinética media turbulenta,

$$\frac{\partial}{\partial t} k + U_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \langle u'_k u'_l \rangle \frac{\partial U_l}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{\rho} \langle p u'_k \rangle + \frac{1}{2} \langle u'_k u'_l u'_l \rangle \right) + \langle f_k u'_k \rangle - \varepsilon, \quad (2.58)$$

donde $k = \frac{1}{2} \langle u'_k u'_k \rangle$, y, además de los términos de producción por cizalla-dura, presión, correlaciones de tercer orden y fuerzas másicas, aparece la disipación viscosa media,

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{kk} = \frac{1}{2} \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \right) \left(\frac{\partial u'_l}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_l} \right) \right\rangle. \quad (2.59)$$

Si la turbulencia es isotrópica, se cumplen las relaciones cinemáticas (Taylor, 1935)⁵

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\rangle \quad (2.60a)$$

$$\left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \quad (2.60b)$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle = -\frac{1}{2} \left\langle \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\rangle \quad (2.60c)$$

y ε se puede expresar como

$$\varepsilon = 15\nu \left\langle \left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle, \quad (2.61)$$

que es la forma usual de cálculo de la disipación de energía (Hinze, 1975; Lin and Reid, 1963).

2.3.3. Correlaciones de velocidad y escalas de la turbulencia

Las dimensiones características de espacio y tiempo del flujo turbulento son definidas a partir de las autocorrelaciones de las fluctuaciones de la velocidad. En ocasiones es posible relacionar las correlaciones temporales y las espaciales en base a la *hipótesis de Taylor*. Si el flujo es homogéneo con una velocidad media U en la dirección x , se asume que

$$\frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.62)$$

siempre y cuando la fluctuación u' sea mucho menor que la velocidad media U (Hinze, 1975). Un estudio mas a fondo de este problema fue llevado a cabo por Lin (1953), quien demuestra que, para turbulencia homogénea y altos números de Reynolds, la hipótesis de Taylor es válida si

$$\frac{\langle (du/dt)^2 \rangle}{U^2 \langle (\partial u/\partial x)^2 \rangle} \approx 5 \frac{u'^2}{U^2}. \quad (2.63)$$

La interpretación física de la hipótesis de Taylor (2.62) es que las fluctuaciones de velocidad en el tiempo en un punto fijo del espacio creadas por un campo turbulento “congelado”, moviéndose como un todo, son idénticas, desde un punto de vista estadístico,

⁵ Se prescinde de la prima en la notación de estas relaciones debido a que la condición de isotropía no se cumple únicamente sobre las fluctuaciones, sino sobre el flujo total.

a las fluctuaciones de velocidad en un instante dado a lo largo del eje x .

Escala integral de tiempo

Es la integral de la correlación de fluctuaciones de velocidad medidas en un solo punto con un desplazamiento temporal.

$$T = \int_0^{\infty} R(\tau) d\tau \quad (2.64)$$

con

$$R(\tau) = \frac{\langle \vec{u}'(\vec{x}, t) \cdot \vec{u}'(\vec{x}, t + \tau) \rangle}{\langle u'(\vec{x})^2 \rangle} \quad (2.65)$$

Se ha considerado que el flujo turbulento es estadísticamente estacionario, de forma que la autocorrelación $R(\tau)$ es independiente de t . Por otro lado, para que la integral de (2.64) sea convergente, es necesario que

$$R(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad \tau \rightarrow \infty$$

es decir, que las velocidades estén decorrelacionadas para un tiempo lo suficientemente largo.

Escala integral de espacio

De hecho, existen dos escalas integrales de espacio, definidas en base a dos correlaciones diferentes. La correlación espacial de velocidades puede ser longitudinal, si se realiza entre las componentes de las velocidades en la dirección de vector separación entre los puntos; o, por otra parte, puede ser transversal, si las componentes de las velocidades están en el plano perpendicular al vector separación,

$$R_{\parallel}(r) = \frac{\langle u_{\parallel}(\vec{x}) u_{\parallel}(\vec{x} + \vec{r}) \rangle}{\langle \vec{u}(\vec{x})^2 \rangle} \quad (2.66a)$$

$$R_{\perp}(r) = \frac{\langle u_{\perp}(\vec{x}) u_{\perp}(\vec{x} + \vec{r}) \rangle}{\langle \vec{u}(\vec{x})^2 \rangle} \quad (2.66b)$$

donde las correlaciones no dependen del carácter vectorial de \vec{r} si la turbulencia es isótropa.

Se definen entonces la escala integral longitudinal de espacio como

$$L_l = \int_0^{\infty} R_{\parallel}(r) dr \quad (2.67)$$

y la escala integral transversal de espacio como

$$L_t = \int_0^\infty R_\perp(r) dr \quad (2.68)$$

Microescala de Taylor

En la página 20 se explicó cómo a partir de la autocorrelación de una señal es posible extraer información sobre el alcance de las fluctuaciones a pequeña escala. En el caso de la autocorrelación espacial longitudinal de las fluctuaciones de velocidad, esta escala se denomina microescala de Taylor, L_λ , y viene dada por

$$\frac{1}{L_\lambda^2} = -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 R_\parallel(r)}{dr^2} \right|_{r \rightarrow 0} \quad (2.69)$$

En la turbulencia típica generada en el laboratorio mediante una rejilla, la escala integral tiene, aproximadamente, el tamaño de los orificios de la rejilla (unos centímetros) y la microescala de Taylor es unas 10 veces menor.

Existe aún una tercera escala de espacio importante, conocida como la escala de Kolmogorov, pero es conveniente introducir antes la teoría estadística de la turbulencia de Kolmogorov-Obukhov para comprender el papel que juega esta escala.

2.3.4. Espectro de energía. Teoría de Kolmogorov

Lo que se conoce como *espectro de energía*, $E(k, t)$, es, en realidad, la densidad de energía cinética de la turbulencia en el espacio de Fourier integrada sobre una esfera de radio k , de forma que la energía total de la turbulencia viene dada por

$$\frac{1}{2} \langle \vec{u}(\vec{x}, t)^2 \rangle = E(t) = \int_0^{+\infty} E(k, t) dk. \quad (2.70)$$

El espectro de energía es siempre real y positivo. De una forma menos matemática, el valor del espectro de energía para el número de onda k informa sobre la energía cinética correspondiente a los remolinos de escala l de la turbulencia, donde l viene dado por

$$l = \frac{2\pi}{k} \quad (2.71)$$

La evolución en el tiempo del espectro de energía para turbulencia homogénea e isótro-

pa, no forzada, viene dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) E(k, t) = T(k), \quad (2.72)$$

donde $T(k)$ es la denominada función de transferencia de energía, que puede ser expresada como (Frisch, 1995)

$$T(k) = \int_0^\infty \cos(kl) \left(1 + l \frac{\partial}{\partial l}\right) \left(3 + l \frac{\partial}{\partial l}\right) \left(5 + l \frac{\partial}{\partial l}\right) \frac{S_3(l)}{6\pi l} dl, \quad (2.73)$$

donde $S_3(l) = \left\langle \left(\vec{u}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{u}(\vec{r})\right)^3 \right\rangle$ es la denominada función de estructura de tercer orden.

$T(k)$ refleja la redistribución de energía en el espacio de Fourier como resultado de las interacciones del modo k con el resto de modos.

La disipación de energía, (2.59), puede ser expresada en relación al espectro de energía integrando (2.72) en todo el rango de modos k ,

$$\varepsilon = \frac{dE}{dt} = - \int_0^\infty 2\nu k^2 E(k, t) dk, \quad (2.74)$$

dato que

$$\int_0^\infty T(k) dk = 0$$

debido a que $T(k)$ no contiene ningún término disipativo (McComb, 1990).

En el año 1941, Kolmogorov publicó dos artículos donde exponía una teoría estadística de la turbulencia homogénea e isotrópica (Kolmogorov, 1941a,b). Denominaremos a esta teoría como K41. Para explicar la teoría de Kolmogorov y sus implicaciones hemos creído conveniente seguir la línea expuesta por Frisch (1995).

Considerando un flujo para número de Reynolds muy alto, partimos de las siguientes tres hipótesis.

Hipótesis 1. Para escalas pequeñas, en comparación con el mecanismo generador de la turbulencia, y lejos de los contornos, la turbulencia es *homogénea* e *isótropa*. Esto quiere decir que la variación de velocidad a una distancia \vec{l} no depende del punto de

origen ni de la orientación de \vec{l} (desde un punto de vista estadístico).

$$\delta\vec{u}(\vec{r} + \vec{r}', \vec{l}) = \delta\vec{u}(\vec{r}, \vec{l}) \quad (2.75)$$

$$\delta\vec{u}(\vec{r}, \vec{l}) = \delta\vec{u}(\vec{r}, l), \quad (2.76)$$

con

$$\delta\vec{u}(\vec{r}, \vec{l}) = \left\langle \vec{u}(\vec{r} + \vec{l}, t) - \vec{u}(\vec{r}, t) \right\rangle, \quad (2.77)$$

donde el promedio se realiza o bien sobre diferentes realizaciones del flujo, o bien sobre el tiempo si la turbulencia es estadísticamente estacionaria.

Hipótesis 2. A pequeña escala, la turbulencia es autosimilar.

$$\delta\vec{u}(\vec{r}, \lambda l) \sim \lambda^h \delta\vec{u}(\vec{r}, l) \quad (2.78)$$

Hipótesis 3. La disipación de energía por unidad de masa, ε , es finita y no nula.

Este planteamiento varia del de Kolmogorov, quien consideró como hipótesis fundamental que toda la estadística a pequeña escala está únicamente y universalmente determinada por l y ε . A este rango de escalas se denomina *rango de equilibrio universal*, denotando el hecho de que su dinámica no depende del mecanismo que genera la turbulencia. A esta hipótesis de Kolmogorov se la conoce como *primera hipótesis de similaridad*. Esto implica directamente, mediante un sencillo análisis dimensional, que la función de estructura de segundo orden, definida como

$$S_2(l) = \left\langle \left(\vec{u}(\vec{r} + \vec{l}, t) - \vec{u}(\vec{r}, t) \right)^2 \right\rangle, \quad (2.79)$$

viene dada, para l mucho más pequeña que la escala integral, por

$$S_2(l) = C\varepsilon^{2/3}l^{2/3}, \quad (2.80)$$

donde C es una constante adimensional universal. Sin embargo, esto plantea el problema expuesto por Landau y Lifshitz (1986) sobre la universalidad de C , ya que al realizar la operación de promedio para obtener $S_2(l)$, la variación de ε en tiempos del orden del tiempo característico de los remolinos grandes jugará un papel importante, y esta ley de variación es evidentemente diferente para cada flujo particular. Volveremos sobre este punto más adelante.

La *segunda hipótesis de similaridad* de Kolmogorov indica que, para un número de Reynolds lo suficientemente grande, existe un subrango del rango de equilibrio universal, denominado *subrango inercial*, en el que el único parámetro importante de la dinámica es la disipación de la energía, ε . Este subrango inercial está limitado por el tamaño mínimo que pueden tener los remolinos, denominado *escala de Kolmogorov*. Esta escala puede ser deducida, también mediante sencillo análisis dimensional, obteniéndose

$$\eta = \nu^{\frac{3}{4}} \varepsilon^{-\frac{1}{4}}. \quad (2.81)$$

Por debajo de esta escala se encuentra el subrango de disipación, donde la energía es disipada por la viscosidad molecular en forma de calor.

Considerando esta segunda hipótesis de similaridad de Kolmogorov, es sencillo llegar a una expresión para el espectro de energía en el subrango inercial:

$$E(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}. \quad (2.82)$$

Un resultado importante que se puede deducir de K41, a partir de la ecuación de Kármán-Howarth-Monin (Kármán and Howarth, 1938) y mediante la definición de flujo de energía entre escalas, es la expresión para la función de estructura de tercer orden,

$$S_3(l) = \left\langle \left(\vec{u}(\vec{r} + \vec{l}, t) - \vec{u}(\vec{r}) \right)^3 \right\rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon l \quad (2.83)$$

Este resultado es importante en cuanto es exacto y no trivial. De hecho, se utiliza como condición de fiabilidad para modelos de turbulencia homogénea e isotropa.

2.3.5. Teoría de Kraichnan. Cascada de entropía y cascada inversa de energía

La teoría K41 fue desarrollada para la turbulencia tridimensional. Si bien la turbulencia bidimensional representa una simplificación desde el punto de vista de reducción de dimensiones espaciales, no puede considerarse como un caso particular de la misma. Esto es debido, básicamente, a la conservación inviscida de la vorticidad con el movimiento del fluido, que provee a la turbulencia bidimensional de aspectos únicos (ver sección 2.2).

La dinámica fundamental de la turbulencia bidimensional desde el punto de vista estadístico se describe en profundidad en el artículo de Kraichnan and Montgomery (1980) (ver también (Lesieur, 1983)).

Al igual que en turbulencia tridimensional, la energía es conservada por los términos

no lineales de las ecuaciones de la dinámica. Pero ahora, además, debido a que no existe el fenómeno de alargamiento de los vórtices, también es conservada la enstrofia, definida en (2.19).

La relación entre enstrofia media de la turbulencia y espectro de energía es

$$Z(t) = \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk = \int_0^\infty \Omega(k, t) dk, \quad (2.84)$$

donde $\Omega(k, t)$ es el espectro de enstrofia.

Consideramos un flujo turbulento estacionario, donde la energía es inyectada por un forzaje $f(k)$, alrededor de k_i . Entonces, al igual que existe una inyección de energía cinética⁶,

$$\varepsilon = \int_0^\infty f(k) dk, \quad (2.85)$$

existe una inyección de enstrofia,

$$\beta = \int_0^\infty k^2 f(k) dk. \approx k_i^2 \varepsilon. \quad (2.86)$$

En este caso, se demuestra que aparece una doble cascada. La energía es transferida casi exclusivamente hacia las grandes escalas ($k < k_i$), mientras que el flujo de enstrofia se realiza hacia las pequeñas escalas ($k > k_i$).

Kraichnan (1967) y Leith (1968) propusieron que si el número de Reynolds es lo suficientemente alto, existe un rango de números de onda, $k_i < k \ll k_d$, en el que la dinámica de la turbulencia únicamente es función de β y k . Mediante análisis dimensional, se llega a que el espectro de energía en este rango es

$$E(k) \sim \beta^{2/3} k^{-3}. \quad (2.87)$$

El número de onda k_d corresponde a la escala en la que la enstrofia se difunde por efecto de la viscosidad molecular,

$$k_d = \left(\frac{\beta}{\nu^3} \right)^{1/6} \quad (2.88)$$

Para la cascada inversa de energía, Kraichnan (1968) llega a la misma expresión que se deduce de K41, (2.82), con la diferencia de que cambia el signo de flujo de energía entre escalas.

⁶ Igual, evidentemente, a la dispersión, ya que la energía esta equilibrada globalmente

El espectro de energía de un flujo turbulento bidimensional está representado de forma esquemática en la figura 2.2.

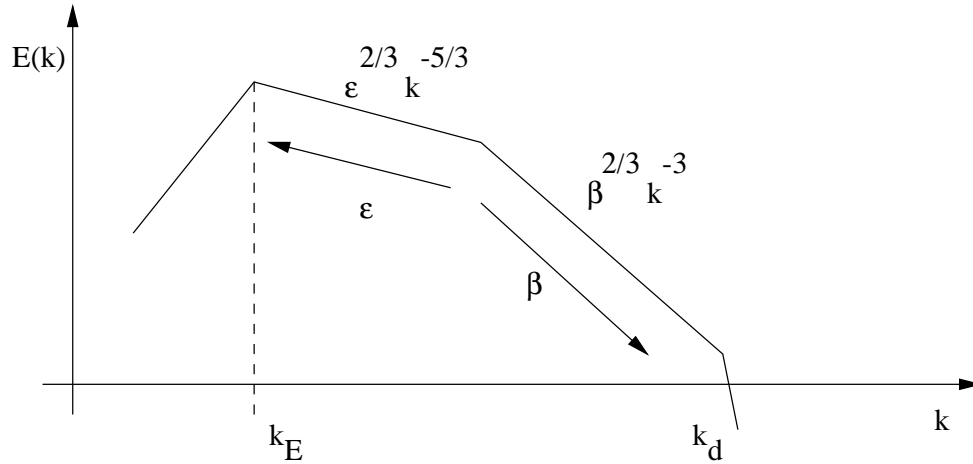


Fig. 2.2: Espectro de energía de turbulencia bidimensional. k_E es la escala más energética, k_I es la escala a la que se realiza el forzaje (inyección de energía) y k_d es la escala de disipación. Los ejes son logarítmicos.

2.3.6. Funciones de estructura e intermitencia

En la sección 2.3.4 se han introducido las funciones de estructura de la turbulencia de orden 2 y 3 en el contexto de la teoría K41. Para la función de estructura de orden p , definida como

$$S_p(l) = \left\langle \left\| \vec{u}(\vec{r} + \vec{l}, t) - \vec{u}(\vec{r}) \right\|^p \right\rangle, \quad (2.89)$$

la teoría de Kolmogorov predice, en el rango inercial, una ley de escala del tipo

$$S_p(l) \sim \varepsilon^{p/3} l^{p/3}, \quad (2.90)$$

como se puede deducir de las expresiones (2.80) y (2.83).

No obstante, la comprobación experimental de la ley de escala de las funciones de estructura no es sencilla para $p \geq 4$, debido a que involucra las colas de las funciones de densidad de probabilidad de los incrementos de velocidad, y esto requiere mucha precisión en las medidas experimentales y unos registros de datos muy grandes.

Anselmet et al. (1984) verificaron la discrepancia de las funciones de estructura de gran orden con la predicción de Kolmogorov. Los resultados de Anselmet y, posteriormente, los

obtenidos por Gagne (1987), sugieren, de todas formas, un comportamiento potencial de las funciones de estructura en el rango inercial:

$$S_p(l) \sim l^{\zeta_p} \quad (2.91)$$

donde ζ_p son los denominados exponentes de las funciones de estructura.

Más recientemente, van de Water y Herweijer (1999) han encontrado, experimentalmente, mayores discrepancias aún en los exponentes de las funciones de estructuras transversales⁷.

Benzi et al. (1993a,b, 1995) proponen una expresión más fundamental que (2.91). La función de estructura de orden p se escala ahora respecto a la función de estructura de orden 3,

$$S_p(l) \sim S_3(l)^{\xi_p} \quad \text{con } \xi_p = \frac{\zeta_p}{\zeta_3} \quad (2.92)$$

y comprueban esta autosimilitud no sólo en el subrango inercial, sino también en el rango disipativo⁸. Esto ha recibido el nombre de *autosimilitud extendida* (extended self-similarity, o, generalmente, ESS). Veamos a continuación cómo se explica en la actualidad esta discrepancia con K41.

A raíz de la crítica de Landau y Lifshitz comentada en la página 30, el propio Kolmogorov modificó su teoría 20 años después (Kolmogorov, 1962) introduciendo una tercera hipótesis, según la cual consideraba fluctuaciones espaciales de ε , promediándola en esferas de radio l , de forma que la varianza de la distribución del logaritmo de ε_l sigue la relación

$$\sigma_l^2 = K + \mu \ln \frac{L}{l}, \quad (2.93)$$

donde L es la escala integral de la turbulencia, K depende las grandes escalas y μ es una constante universal, que actúa como factor de escala del campo de disipación,

$$\langle \varepsilon(\vec{r})\varepsilon(\vec{r} + \vec{l}) \rangle \sim l^{-\mu}. \quad (2.94)$$

Esta teoría es conocida como la teoría de Kolmogorov-Oboukhov-Yaglom, y esta desarrollada en detalle en Monin y Yaglom (1975). El hecho de que la disipación de energía no esté distribuida uniformemente en el dominio es lo que da lugar a lo que se conoce como *intermitencia* de la turbulencia, concretamente como intermitencia interna, diferenciándola

⁷ Es decir, el desplazamiento l se realiza en dirección normal a la velocidad.

⁸ O, lo que es lo mismo, para bajos números de Reynolds.

así de la intermitencia externa relacionada con las estructuras coherentes (Lesieur, 1997). A μ se le da el nombre de *parámetro de intermitencia*.

El aspecto más importante de la intermitencia es el efecto que tiene sobre el espectro de energía y las funciones de estructura en el subrango inercial. Se considera que K41 sigue siendo localmente válida, utilizando ε_l como parámetro determinante de la dinámica a pequeña escala. En base a esta suposición, tenemos que

$$E(k) \sim \langle \varepsilon_l^{2/3} \rangle k^{-5/3}. \quad (2.95)$$

El momento de orden n de la disipación de energía a escala l se escribe, con la ayuda de (2.93), como

$$\langle \varepsilon_l^n \rangle \sim \langle \varepsilon \rangle^n \left(\frac{L}{l} \right)^{\mu \frac{n(n-1)}{2}}, \quad (2.96)$$

y, por lo tanto, con $n = 2/3$,

$$E(k) \sim \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} (kL)^{-\frac{\mu}{9}}. \quad (2.97)$$

Un análisis similar con la función de estructura de orden p lleva a la expresión

$$S_p(l) \sim \langle \varepsilon \rangle^{p/3} l^{p/3} \left(\frac{L}{l} \right)^{\mu p(p-3)/18}, \quad (2.98)$$

es decir,

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{\mu}{18} p(3-p), \quad (2.99)$$

que lleva a valores negativos de ζ_p para valores altos de p , lo cual entra en conflicto con los valores experimentales observados.

Otros modelos de descripción de la intermitencia tienen relación con la geometría fractal.

En el conocido como *modelo β* (Frisch et al., 1978; Frisch, 1995), se considera que un remolino de dimensión L se descompone en remolinos de escala $L/2$, y estos a su vez lo hacen en remolinos de la mitad de tamaño y así hasta la escala de disipación. En la “generación” n , el tamaño de los remolinos es $^9L2^{-n}$. La idea del modelo β es suponer que en cada generación, los remolinos no ocupan la totalidad del espacio, sino una fracción

⁹ El factor 2 no es importante. Es tomado por simplicidad, pero su valor no afecta a los resultados obtenidos en relación a las leyes de escala.

$\beta < 1$ del mismo. Si se parte en la generación 0 de N_0 remolinos, se asume que en la generación n el número de remolinos será

$$N(n) = N_0 2^{nD}, \quad (2.100)$$

de forma que el volumen ocupado por los remolinos, en el espacio tridimensional, es

$$V(n) = N(n)L(n)^3 = N_0 L_0^3 2^{(D-3)n}. \quad (2.101)$$

Si $D = 3$, los remolinos en la generación n ocupan la totalidad del volumen ocupado en la generación inicial. Para un valor genérico de D , la fracción β de volumen ocupado es

$$\beta(n) = \frac{V(n)}{V_0} = \left(\frac{L(n)}{L_0} \right)^{3-D} = 2^{(D-3)n}. \quad (2.102)$$

D es conocido como la *dimensión fractal* (Mandelbrot, 1982) de la turbulencia, y puede ser fraccionaria.

A la luz de este modelo, el espectro de energía queda modificado de la forma

$$E(k) = \langle \varepsilon \rangle^{2/3} k^{-5/3} (kL)^{(D-3)/3}, \quad (2.103)$$

y los exponentes de las funciones de estructura se expresan como

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + (3-p) \frac{(3-D)}{3}, \quad (2.104)$$

de forma que, de (2.99), el parámetro de intermitencia μ se relaciona con la dimensión fractal D mediante

$$\mu = 18 - 6D. \quad (2.105)$$

Este modelo, aunque se acerca mejor que K41 a los valores experimentales observados, no es satisfactorio para valores altos de p .

Una modificación del modelo β es suponer que en lugar de un objeto fractal, tenemos en la turbulencia intermitente uno multifractal, en el sentido de que en cada paso de descomposición (en cada “generación”) ésta no es regida por la misma dimensión fractal. En cada generación, la dimensión fractal es aleatoria.

Llamamos β_n al cociente entre el volumen ocupado por los remolinos en la generación $n + 1$ y el ocupado en la n . En el modelo β este cociente era conocido a priori, como

parámetro del modelo. En el *modelo β aleatorio* (Paladin and Vulpiani, 1987; Frisch, 1995; Jiménez, 2000) β_n es una propiedad estadística de la intermitencia, y viene dado por una función de densidad de probabilidad $P(\beta_n)$. Paladin and Vulpiani (1987) simplifican un poco el modelo considerando que la función de probabilidad tiene la forma

$$P(\beta) = \alpha\delta(\beta - 0,5) + (1 - \alpha)\delta(\beta - 1), \quad (2.106)$$

donde $0 \leq \alpha \leq 1$, y δ es la función delta de Dirac. El parámetro α se ajusta de forma experimental, obteniéndose $\alpha \approx 0,125$ (Jou, 1997). En la tabla 2.1 se reflejan los valores de algunos exponentes de funciones de estructura. Se puede apreciar el buen ajuste de los valores para el modelo multifractal.

	ζ_2	ζ_4	ζ_6	ζ_8	ζ_{10}	ζ_{12}
Experimental	0.70	1.20	1.62	2.00	2.36	2.68
K41	0.67	1.33	2.00	2.67	3.33	4.00
modelo β	0.72	1.27	1.92	2.36	2.91	3.46
modelo β aleatorio	0.71	1.22	1.72	2.16	2.42	2.75

Tab. 2.1: Valores de exponentes de las funciones de estructura (ver (2.91)). De Jou (1997).

Ahora bien, todo esto es en lo que se refiere a turbulencia tridimensional. Que ocurre con la turbulencia bidimensional?

La teoría de Kolmogorov-Kraichnan da lugar a una ley k^{-3} para el espectro de energía (ver sección 2.3.5), y una ley de escala del tipo

$$S_p(l) \sim l^{\zeta_p}, \quad \text{con } \zeta_p = p, \quad (2.107)$$

para las funciones de estructura, en la cascada de enstrofia, ya que si, de forma análoga a K41, consideramos que en este rango la función de estructura de orden p tan sólo depende de la disipación de enstrofia β y de la escala,

$$S_p = f(\beta, l), \quad (2.108)$$

por análisis dimensional, dado que las unidades de S_p son $m^p s^{-p}$ y las de β y l son s^{-3} y m respectivamente, se obtiene $S_p \sim \beta^{p/3} l^p$.

Sin embargo, varios experimentos numéricos muestran espectros con pendiente más fuerte que 3 en la cascada de enstrofia (Basdevant et al., 1981; McWilliams, 1984; Ba-

biano et al., 1995)¹⁰. Algunos autores (Basdevant et al., 1981) proponen la intermitencia como la causa de esta diferencia entre teoría y resultados numéricos. Paladin y Vulpiani (1987) afirman que, en turbulencia bidimensional, la intermitencia interna no afecta a la forma del espectro ni a la ley de escala de las funciones de estructura. Éstas son una consecuencia directa de la conservación de enstrofia en la trayectoria de un fluido en ausencia de disipación y forzaje externo. Por otro lado, se comprueba que la expresión (2.107) es únicamente válida a escalas mucho menores que la escala típica de disipación.

La explicación que, finalmente, dan Paladin and Vulpiani (1987) es que la forma del espectro de energía es debida a la intermitencia externa. Es decir, al papel de las estructuras coherentes vorticales, a una escala macroscópica. Estas estructuras coherentes advectan una turbulencia de fondo, de espectro k^{-3} . El espectro global del flujo tendrá una pendiente mayor.

Otra interpretación puede ser considerar que lo que no afecta a la ley espectral ni a la forma de las funciones de estructura en turbulencia bidimensional es la intermitencia *a pequeña escala*, entendiendo por pequeña el rango de escalas que van de la de disipación a la de Taylor. La intermitencia a gran escala (mayor que la escala de Taylor), asociada a las estructuras coherentes, es la que, de alguna forma, puede afectar a la ley de escala de las funciones de estructura, o a la forma del espectro de energía.

Sin embargo, este es un tema que queda abierto. En el capítulo 6 se mostrarán dos campos con configuraciones macroscópicas completamente diferentes. Uno con estructuras coherentes vorticales bien definidas y otro con una distribución de vorticidad mucho más uniforme y sin presencia de intermitencia a gran escala aparente. Sin embargo, los dos campos tienen espectros de energía idénticos y, lo que es más, la potencia de los espectros de energía es mayor que 3. Parece ser, entonces, que tampoco la intermitencia a gran escala es capaz de explicar la observación de espectros de pendiente mayor que 3. Este es un punto importante que será tratado en profundidad en el capítulo 6.

2.4. Modelos numéricos de simulación de flujos turbulentos

Se describen a continuación cuatro puntos de vista diferentes para la obtención de flujos turbulentos en un ordenador. Evidentemente, existen más, y una descripción completa y detallada de todos ellos (e, incluso, tan solo de los cuatro presentados) exigiría un tratamiento que está fuera del alcance de este trabajo.

¹⁰ En el capítulo 4 describiremos un modelo de simulación numérica de la turbulencia y mostraremos el espectro de energía resultante, $E(k) \sim k^{-4}$ (figura 4.1).

Las dos primeras estrategias mostradas están basadas en la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes. La primera resuelve directamente las ecuaciones en todas las escalas presentes en el dominio computacional, razón por la que recibe el nombre genérico de Simulación Numérica Directa (Direct Numerical Simulation, o DNS). La segunda modifica las ecuaciones de la dinámica de forma que las variables representan el comportamiento del flujo para escalas mayores que la determinada por la discretización del dominio. Las interacciones a escalas menores han de ser modeladas. El nombre de este procedimiento podría traducirse como Simulación de Gran Remolino, aunque es generalmente conocido como Large-Eddy Simulation, o LES.

Las dos últimas simulaciones buscan generar flujos turbulentos “artificiales” que posean propiedades estadísticas convenientes, sin resolver las ecuaciones de la dinámica de los fluidos. Son los modelos conocidos como Simulación Cinemática (KS) y Generación Estocástica (SG).

De los cuatro modelos, tan sólo, el de LES y el de Generación Estocástica van a ser tratados aquí con cierta profundidad. Los modelos de DNS y KS se van a describir de forma superficial debido a que se van a dedicar a ellos los capítulos 4 y 5, respectivamente, por ser dos temas centrales de esta tesis..

2.4.1. Simulación Numérica Directa

En una DNS se resuelven explícitamente todas las escalas envueltas en el flujo turbulento, con el límite inferior impuesto por la escala disipativa¹¹. Debido a esto, el número de Reynolds del flujo simulado es relativamente bajo. El número de grados de libertad está relacionado con el número de Reynolds mediante (Landau and Lifshitz, 1986; McComb, 1990)

$$N \approx Re^{9/4}, \quad (2.109)$$

en turbulencia tridimensional, y

$$N \approx Re^2 \quad (2.110)$$

para turbulencia bidimensional (Lesieur, 1997).

Sin embargo, el rápido aumento de memoria y velocidad de los ordenadores actuales y la tecnología de procesamiento en paralelo hacen que el número de Reynolds de los flujos simulados sea cada día mayor. Hace tan solo 10 años, la máxima resolución era de 300^3 en

¹¹ Esta será la escala de Kolmogorov (2.81), si el flujo es tridimensional, o la escala de disipación de la enstrofia, (2.88), si es bidimensional.

un ordenador CRAY 2. Recientemente, Sakate et al. (Sakate et al., 2000) han informado de una resolución de $1024 \times 512 \times 768$. El número de Reynolds se ha multiplicado por tres.

En turbulencia bidimensional, las prestaciones de los ordenadores modernos prácticamente permiten simular cualquier número de Reynolds.

En el capítulo 4 se describe con detalle el modelo de DNS utilizado en la primera parte del presente trabajo.

2.4.2. Large-Eddy Simulation

La descripción que se hace en este apartado de la Large-Eddy Simulation (LES) está detallada ampliamente en el capítulo que Lesieur (1997) le dedica.

A diferencia de la Simulación Numérica Directa, una LES no simula explícitamente todas las escalas de la turbulencia. De hecho, a menudo, y sobre todo en el campo de la ingeniería, lo que interesa de una simulación es el comportamiento a gran escala. Esto implica que una LES necesita algún modelo que represente la transferencia de energía a las escalas pequeñas.

Para escribir las ecuaciones de gobierno a gran escala, se hace uso de una función de filtro que asocia un determinado campo $f(\vec{x}, t)$ con la malla, de tamaño Δx , creando así el campo filtrado mediante una operación de convolución,

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int \bar{G}_{\Delta x}(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{x}, t) d\vec{y} = \int \bar{G}_{\Delta x}(\vec{y}) f(\vec{x} - \vec{y}, t) d\vec{y} \quad (2.111)$$

Este filtro $\bar{G}_{\Delta x}$ es, generalmente, una curva gaussiana de tamaño $\sigma^2 \sim \Delta x^2$. Siempre que Δx sea constante en toda la malla, esta operación de filtrado conmuta con las derivaciones espaciales. Debido a esto, si la variable considerada es la velocidad, la condición de continuidad se cumple también para la velocidad filtrada

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.112)$$

y al aplicar la operación de filtrado a las ecuaciones de Navier-Stokes obtenemos

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + T_{ij} \right], \quad (2.113)$$

donde T_{ij} es el tensor de escala de submalla, dado por

$$T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} = \overline{u_i u_j} - \overline{\overline{u_i} \overline{u_j}} - \overline{(\overline{u_i} u'_j + \overline{u_j} u'_i)} - \overline{u'_i u'_j}, \quad (2.114)$$

con la fluctuación de la velocidad \vec{u}' definida en este contexto como¹²

$$u'_i = u_i - \overline{u_i} \quad (2.115)$$

El problema reside entonces en escribir los términos relacionados con el campo de submalla (fluctuaciones) como función del campo a gran escala. Por analogía con la expresión (2.6) se escribe el tensor de submalla como

$$T_{ij} = 2\nu_t \overline{S}_{ij} + \frac{1}{3} T_{kk} \delta_{ij} \quad (2.116)$$

donde se introduce una viscosidad turbulenta ν_t y el tensor

$$\overline{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.117)$$

es el tensor de deformación del campo filtrado. Las ecuaciones de Navier-Stokes para el campo filtrado se escriben entonces como

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u}_i + \overline{u}_j \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial}{\partial x_j} [(\nu + \nu_t) \overline{S}_{ij}] \quad (2.118)$$

donde la presión modificada $\overline{P} = \overline{p} - (1/3)\rho T_{kk}$ se calcula mediante la ecuación de continuidad filtrada (2.112), aplicando la divergencia a la ecuación (2.118). La cuestión ahora es encontrar un modelo para la viscosidad turbulenta.

Uno de los modelos más utilizados es el de Smagorinsky (1963), en el que ν_t se considera proporcional al tamaño de la malla Δx y a una cierta velocidad relacionada con esa escala, $\nu_{\Delta x} = \Delta x \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}$. Es decir,

$$\nu_t = (C_S \Delta x)^2 \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}. \quad (2.119)$$

La constante C_S tiene normalmente un valor comprendido entre 0,1 y 0,2.

¹² No debe confundirse la fluctuación de una variable respecto de la media con la que surge de realizar un filtrado. La diferencia más importante es que, al contrario que en el promedio, la operación de filtrado no es idempotente, es decir, $\overline{\overline{f}} \neq \overline{f}$.

El gran inconveniente de una LES es que, sea cual sea el modelo de transferencia de energía a pequeña escala, éste no va a ser capaz de propagar la impredecibilidad de la escala de submalla a las grandes escalas. Esto quiere decir que si partimos de dos campos idénticos a escalas mayores que Δx , pero completamente diferentes a escalas menores, los dos campos evolucionarán en el tiempo de forma idéntica, mientras que, en la realidad, las diferencias a pequeña escala tendrían que acabar por manifestarse a gran escala para un tiempo lo suficientemente largo. De todas formas, esto no invalida los resultados estadísticos obtenidos a gran escala, tan solo la disposición espacial de las estructuras generadas.

2.4.3. Generación Estocástica

Los procesos estocásticos han sido utilizados para generar flujos turbulentos con unas propiedades estadísticas concretas. Están basados en una ecuación de Oerstein-Uhlenbeck, y la técnica que describimos en este apartado crea la función de corriente del flujo a partir de una ecuación de Langevin (Caretá et al., 1993; Martí~Pérez, 1997),

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\vec{r}, t) = \nu\nabla^2\phi(\vec{r}, t) + Q[\lambda^2\nabla^2]\nabla \cdot \vec{\xi}(\vec{r}, t) \quad (2.120)$$

donde ν es la viscosidad cinemática y ξ es un ruido gaussiano blanco con media cero y correlación

$$\langle \xi_i(\vec{r}_1, t_1)\xi_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle = 2\varepsilon_0\nu\delta(t_1 - t_2)\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\delta_{ij} \quad (2.121)$$

Los parámetros ε_0 y λ controlan la intensidad del flujo y la escala integral, respectivamente. Al igual que en la simulación cinemática, el espectro de energía es establecido en el modelo como parámetro externo. En el caso de la generación estocástica, éste es introducido mediante el operador $Q[\lambda^2\nabla^2]$

La transformada de Fourier de (2.120) es

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi}(\vec{k}, t) = -\nu k^2\hat{\phi}(\vec{k}, t) - iQ(-\lambda^2 k^2)k_i\xi_i(\vec{k}, t) \quad (2.122)$$

y la correlación en el espacio de Fourier de la función de corriente es

$$\langle \hat{\phi}^*(\vec{k}_1, t)\hat{\phi}(\vec{k}_2, t) \rangle = (2\pi)^2\delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2)S(k, t), \quad (2.123)$$

donde $S(k, t)$ esta relacionada con el espectro de energía mediante

$$E(k, t) = \frac{1}{4\pi} k^3 S(k, t) \quad (2.124)$$

Mediante cálculo estocástico (Gardiner (1985)), y usando (2.121), puede ser demostrado que $S(k, t)$ cumple

$$\frac{\partial}{\partial t} S(k, t) = -2\nu k^2 S(k, t) + 2\varepsilon_0 \nu k^2 Q^2(-\lambda^2 k^2) \quad (2.125)$$

y, por lo tanto, el espectro evolucionará en el tiempo como

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k, t) = -2\nu k^2 E(k, t) + \pi k W(k), \quad (2.126)$$

que es la ley de evolución (2.72), pero sin el término de transferencia de energía entre modos, $T(k)$, y un término adicional, $W(k)$ que representa la inyección de energía debida al forzage,

$$W(k) = \frac{\varepsilon_0 \nu}{2\pi^2} k^4 Q^2(-\lambda^2 k^2). \quad (2.127)$$

El estado estacionario es alcanzado cuando el término de forzage se equilibra con el de disipación, de forma que

$$E(k) = \frac{\pi}{2\nu k} W(k) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} k^3 Q^2(-\lambda^2 k^2), \quad (2.128)$$

y surge la relación entre el operador $Q[\lambda^2 \nabla^2]$ y el espectro de energía del campo que se quiere simular.

La implementación del modelo se realiza discretizando la ecuación (2.122) en el espacio de Fourier, convirtiéndose en un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y no acopladas. La integración exacta entre t y $t + \Delta t$ da

$$\phi_{\alpha\beta}(t + \Delta t) = \exp(\nu c_{\alpha\beta} \Delta t) \phi_{\alpha\beta}(t) + \sigma_{\alpha\beta}(t) + \gamma_{\alpha\beta}(t) \quad (2.129)$$

en función de las nuevas variables random

$$\sigma_{\alpha\beta}(t) = Q_{\alpha\beta} d_{x_{\alpha\beta}} \int_t^{t+\Delta t} \xi_{x_{\alpha\beta}}(t') \exp[(t + \Delta t - t') \nu c_{\alpha\beta}] dt' \quad (2.130a)$$

$$\gamma_{\alpha\beta}(t) = Q_{\alpha\beta} d_{y_{\alpha\beta}} \int_t^{t+\Delta t} \xi_{y_{\alpha\beta}}(t') \exp[(t + \Delta t - t')\nu c_{\alpha\beta}] dt' \quad (2.130b)$$

Los operadores diferenciales laplaciano y divergencia se convierten en los factores $c_{\alpha\beta}$ y $\vec{d}_{\alpha\beta}$, respectivamente,

$$c_{\alpha\beta} = \frac{2}{\Delta^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi\alpha}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\beta}{N}\right) - 2 \right] \quad (2.131a)$$

$$\vec{d}_{\alpha\beta} = \frac{1}{\Delta} \left(\exp\left(i\frac{2\pi\alpha}{N}\right) - 1, \exp\left(i\frac{2\pi\beta}{N}\right) - 1 \right), \quad (2.131b)$$

donde Δ es el tamaño de la discretización espacial y N el de la malla.

A partir de una adecuada condición inicial, se calcula para cada paso de tiempo la función de corriente ϕ en el espacio de Fourier, y se realiza la antitransformada discreta para obtener el campo de velocidades,

$$v_{x_{\alpha\beta}}(t) = \frac{1}{2\Delta} (\phi_{\alpha,\beta-1}(t) - \phi_{\alpha,\beta+1}(t)) \quad (2.132)$$

$$v_{y_{\alpha\beta}}(t) = \frac{1}{2\Delta} (\phi_{\alpha+1,\beta}(t) - \phi_{\alpha-1,\beta}(t)) \quad (2.133)$$

2.4.4. Simulación Cinemática

La Simulación Cinemática comparte con la Generación Estocástica la introducción del espectro de energía como parámetro de la simulación. Además, al igual que aquella, al no ser una simulación “dinámica”, no existe un flujo real de energía ni enstrofia entre escalas. La energía de cada escala es establecida por el modelo, y se mantiene constante en toda la simulación.

La diferencia fundamental entre ambos modelos es que en la KS el campo de velocidades es creado directamente a partir del espectro. Sus ventajas son que no es una simulación basada en una malla, y no requiere la resolución de ninguna ecuación.

La idea fue introducida por Kraichnan (1970), que estudió la difusión de partículas en un flujo turbulento, homogéneo, isótropo y estacionario, creado por la superposición de modos de Fourier discretos,

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N \left[\vec{A}_n \sin(\psi_n) + \vec{B}_n \cos(\psi_n) \right], \quad (2.134)$$

donde

$$\psi_n = \vec{k}_n \cdot \vec{x} + \omega_n t \quad (2.135)$$

y

$$\vec{A}_n = \vec{\zeta}_n \times \vec{k}_n \quad (2.136a)$$

$$\vec{B}_n = \vec{\xi}_n \times \vec{k}_n \quad (2.136b)$$

asegura la condición de continuidad,

$$\vec{A}_n \cdot \vec{k}_n = \vec{B}_n \cdot \vec{k}_n = 0. \quad (2.137)$$

El espectro de energía es introducido mediante la distribución del módulo de \vec{A}_n y \vec{B}_n frente al de \vec{k}_n .

Este modelo será analizado en detalle en el capítulo 5.

2.5. Sumario

En este capítulo hemos introducido algunos conceptos básicos sobre mecánica de fluidos y sobre la turbulencia estadística. Hemos realizado especial hincapié en los aspectos fenomenológicos de la teoría de Kolmogorov para turbulencia tridimensional y de la de Kraichnan para la bidimensional. Se han definido conceptos importantes para el seguimiento del resto del trabajo: espectro de energía, disipación de energía, escalas de la turbulencia, funciones de estructura e intermitencia. El aspecto más importante a destacar de esta parte es cómo la intermitencia puede afectar a la forma del espectro de energía; concretamente sobre el efecto que tiene sobre la ley potencial del espectro en el subrango inercial.

Se ha realizado también una ligera descripción de cuatro de los modelos más extendidos en la actualidad para la simulación de turbulencia homogénea e isotropa: la LES, la DNS, la SG y la KS. Tal y como ha sido establecido en el primer capítulo, el presente trabajo trata en su totalidad sobre la KS, y gran parte de éste está dedicado a su confrontación frente a la DNS. Por esta razón, estos dos modelos serán descritos con más profundidad en capítulos posteriores. Hemos creído, no obstante, interesante presentarlos junto a los otros dos modelos para poder situarlos en el panorama actual de los modelos numéricos.

