

APÉNDICE

A. MODELOS DE CIERRE DE LAS ECUACIONES DE LA TURBULENCIA

Los modelos de cierre para la turbulencia son ecuaciones semi-empíricas que relacionan las correlaciones de las fluctuaciones de las variables mediante constantes obtenidas de investigaciones experimentales.

Cuando esta ecuación se expresa de forma algebraica se habla de un modelo de cero ecuaciones. Cuando el modelo involucra ecuaciones en derivada parciales (EDP), se trata de un modelo de una o dos ecuaciones, dependiendo del número de EDP's. Los llamados modelos de media ecuación utilizan ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO).

Estos modelos de cierre son ampliamente usados en diferentes campos de la Ingeniería, y tienen una papel muy importante en la resolución de problemas de capa límite o flujos turbulentos en dominios de geometría complicada.

En los modelos de cero ecuaciones, las correlaciones de las fluctuaciones son asociadas a los valores medios de las variables mediante simples expresiones algebraicas. Un ejemplo de este tipo de modelos ha sido expuesto en la sección 2.3.2 (ecuación (2.52)).

En los modelos de una ecuación, las escalas de longitud son expresadas algebraicamente, mientras que las de velocidad se expresan en función de la energía cinética turbulenta

$$k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle. \quad (\text{A.1})$$

La viscosidad turbulenta se escribe como

$$\nu_t = k^{1/2} l, \quad (\text{A.2})$$

donde l es una longitud de mezcla similar a la definida en (2.53).

Dos de los modelos de una ecuación más recientemente desarrollados son el de Baldwin-Barth (Baldwin and Barth, 1990) y el de Spalart-Allmaras (Spalart and Allmaras, 1992).

En el primero se obtiene una ecuación para el número de Reynolds turbulento, definido

como

$$Re_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad (\text{A.3})$$

y la viscosidad turbulenta se expresa como

$$\nu_t = c_\mu \nu \langle Re_t \rangle D_1 D_2, \quad (\text{A.4})$$

donde $c_\mu = 0,09$ y D_i son dos funciones amortiguadoras que extienden la validez del modelo a regiones cercanas al contorno del dominio.

El modelo de Spalart-Allmaras resuelve una ecuación de transporte para una cierta variable ν^* , relacionada con la viscosidad turbulenta mediante

$$\nu_t = \nu^* f \quad (\text{A.5})$$

con

$$f = \frac{\left(\frac{\nu^*}{\nu}\right)^3}{\left(\frac{\nu^*}{\nu}\right)^3 + c_v^3} \quad ; \quad c_v = 7,1 \quad (\text{A.6})$$

En la ecuación de transporte de ν^* existen varios coeficientes empíricos más (ver, por ejemplo, (Hoffmann and Chiang, 1998)).

El modelo de dos ecuaciones k - ε describe las ecuaciones para la energía cinética turbulenta k y para la disipación de energía ε como

$$\frac{\partial}{\partial t} k + \nabla \cdot (\vec{u}k) = \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + \nu_t G - \varepsilon \quad (\text{A.7})$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + \nabla \cdot (\vec{u}\varepsilon) = \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + c_{1\varepsilon} \nu_t G \frac{\varepsilon}{k} - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{A.8})$$

donde G es el término de generación de energía cinética turbulenta,

$$G = 2 \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2, \quad (\text{A.9})$$

y la viscosidad turbulenta se calcula como

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (\text{A.10})$$

donde c_μ es el coeficiente introducido en (A.4). Los valores del resto de constantes son $\sigma_k = 1,0$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $c_{1\varepsilon} = 1,44$ y $c_{2\varepsilon} = 1,92$

En el modelos $k-\omega$, la segunda ecuación es para la disipación turbulenta específica, ω . En el modelo $k-\omega$ propuesto por Wilcox (1988), las ecuaciones para k y para ω son

$$\frac{\partial}{\partial t} k + \nabla \cdot (\vec{u}k) = \nabla \cdot [(\nu + \nu_t \sigma^*) \nabla k] + \nu_t G - \beta^* \omega k \quad (\text{A.11})$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega + \nabla \cdot (\vec{u}\omega) = \nabla \cdot [(\nu + \nu_t \sigma) \nabla \omega] + \alpha \frac{\omega}{k} \nu_t G - \beta \omega^2, \quad (\text{A.12})$$

la viscosidad turbulenta viene dada por

$$\nu_t = \frac{k}{\omega}, \quad (\text{A.13})$$

y la disipación de energía ε es

$$\varepsilon = \beta^* \omega k. \quad (\text{A.14})$$

Las constantes del modelo son

$$\alpha = 5/9 \quad \beta = 3/40 \quad \beta^* = 0,09 \quad \sigma = 0,5 \quad \sigma^* = 0,5$$

Se ha comprobado que el modelo $k-\omega$ da mejores resultados que el $k-\varepsilon$ en la subcapa laminar de la capa límite y en la región logarítmica de la misma. Sin embargo, el modelo $k-\varepsilon$ se ha mostrado superior en las zonas más externas de la capa límite. Menter (1992) combinó lo mejor de los dos modelos para construir un nuevo modelo de dos ecuaciones. Este modelo utiliza el $k-\omega$ en las regiones internas de la capa límite para cambiar a $k-\varepsilon$ en las zonas más externas. Existen dos versiones de este modelo: el “baseline model” (BSL) y el “shear-stress transport model” (SST). La diferencia entre las dos versiones está en la definición de la viscosidad turbulenta. En el BSL, ésta se define como en (A.13), mientras que en el SSL, viene dada por

$$\nu_t = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)}, \quad (\text{A.15})$$

donde $a_1 = 0,31$, Ω es el módulo de la vorticidad y

$$F_2 = \tanh \left\{ \left[\max \left(2 \frac{\sqrt{k}}{0,09\omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2} \right) \right]^2 \right\},$$

siendo y la distancia al contorno más cercano.

En el denominado modelo k- ε RNG, se utilizan los métodos del Grupo de Renormalización (Wilson, 1971a,b) para modificar las ecuaciones de Navier-Stokes, de forma que estas pueden ser aplicadas en una malla menos fina que con el modelo k- ε estándar. Básicamente, el método RNG elimina una parte de las escalas pequeñas del espectro de energía expresándola en términos de las escalas mayores. La aplicación de este modelo implica el uso de una ecuación para el cálculo de la viscosidad efectiva como

$$\nu_{ef} = \nu + \nu_t = \nu \left[1 + \sqrt{\frac{c_\mu k^2}{\nu \varepsilon}} \right]^2, \quad (\text{A.16})$$

donde el valor de c_μ ya no es el mismo que en (A.4) y (A.10). En la tabla A.1 se muestran los valores de los diferentes coeficiente para los modelos k- ε estándar y k- ε RNG.

	k- ε estándar	k- ε RNG
c_μ	0.09	0.0845
$c_{1\varepsilon}$	1.44	1.42
$c_{2\varepsilon}$	1.92	1.68
σ_k	1.0	0.7194
σ_ε	1.314	0.7194

Tab. A.1: Coeficientes de las ecuaciones de los modelos k- ε estándar y k- ε RNG.

B. SOBRE EL CÁLCULO DE ESPECTROS DE ENERGÍA DE FLUJOS BIDIMENSIONALES

En el transcurso del trabajo realizado en esta tesis, se han comprobado dos cosas en referencia al cálculo de espectros de energía de flujos bidimensionales: primera, que hay varias formas de calcularlo, y segunda, que no es fácil decidir cuál es la mejor.

En este trabajo se han considerado tres formas:

- A partir de la autocorrelación de velocidades. Ésta es la forma más académica, ya que es como realmente está definido el espectro de energía (ver ec. (2.45)). Sin embargo, esto plantea varias dificultades: la primera es que hay que calcular *el tensor* correlación de velocidades. Y esto supone una pérdida de información, ya que al ser una estadística de dos puntos, parte de las escalas pierden muestreo estadístico. Por ejemplo, en nuestro caso, el dominio es una discretización 128×128 biperiódico. Al calcular la correlación de velocidades a una distancia 0, disponemos de 16384 datos para cada campo (es decir, para cada instante disponible). Este número baja a la cuarta parte cuando la distancia de correlación es la mitad del dominio (64 pasos de celda), y sigue disminuyendo a medida que ampliamos la escala.

A parte de este inconveniente de pérdida de muestreo, está el hecho de que el proceso de cálculo es bastante más largo, por el simple hecho de haber de calcular el tensor de correlaciones de las velocidades.

Después de haber calculado el tensor correlación, se calcula su transformada de Fourier mediante una FFT bidimensional (Press et al., 1992) y se integra por coronas.

$$E(k) \sim \frac{1}{2} \int_{\|\vec{k}\|=\text{constant}} \text{FFT} \left(\left\langle v_i(\vec{x}) v_i(\vec{x} + \vec{l}) \right\rangle \right) d\vec{k} \quad (\text{B.1})$$

En la práctica este método es poco empleado, básicamente porque la potencia de cálculo requerida no compensa la calidad de la información a gran escala.

- A partir de la energía. A pequeña escala, la correlación de velocidades es básicamente

la energía cinética. El segundo método se basa en calcular directamente la FFT bidimensional del campo de energía (y luego, claro está, integrar por coronas)

$$E(k) \sim \frac{1}{2} \int_{\|\vec{k}\|=\text{constant}} \text{FFT}(v_i(\vec{x})v_i(\vec{x})) d\vec{k} \quad (\text{B.2})$$

- A partir del campo de velocidad. Parecido al anterior, pero en lugar de calcular la transformada de Fourier de la energía, se calcula de las velocidades, y se calcula la energía *a posteriori*.

$$E(k) \sim \frac{1}{2} \hat{v}_i(k)\hat{v}_i(k) \quad ; \quad v_i(k) = \int_{\|\vec{k}\|=\text{constant}} \text{FFT}(v_i(\vec{x})) d\vec{k} \quad (\text{B.3})$$

- A partir del campo de vorticidad. Se calcula primero el espectro de enstrofia y, a continuación, según la expresión (2.84), se calcula el espectro de energía.

$$E(k) = \frac{\Omega(k)}{k^2} \quad ; \quad \Omega(k) = \frac{1}{2} \int_{\|\vec{k}\|=\text{constant}} \text{FFT}(\omega^2(\vec{x})) d\vec{k} \quad (\text{B.4})$$

Las diferencias que surgen al realizar los cálculos con cada método son extraordinarias. En la figura B.1 se muestran los espectros que surgen al calcular con cada uno de los métodos con el campo obtenido de la DNS descrita en el capítulo 4. Los espectros calculado a partir de la vorticidad y a partir de la velocidad dan resultados muy similares. El espectro calculado con la correlación ofrece un resultado inaceptable, posiblemente debido a la pérdida de información en el cálculo del tensor correlación comentado anteriormente. El espectro calculado a partir del campo de energía difiere mucho del los dos primeros, aunque desconocemos la razón.

Se da por correcto el espectro calculado a partir de la vorticidad, por dos razones: coincide con el resultado obtenido con la velocidad, y esto enfrenta a dos coincidencias frente a dos resultados dispares; y segunda, ofrece una pendiente mayor que 3, característica de la turbulencia bidimensional.

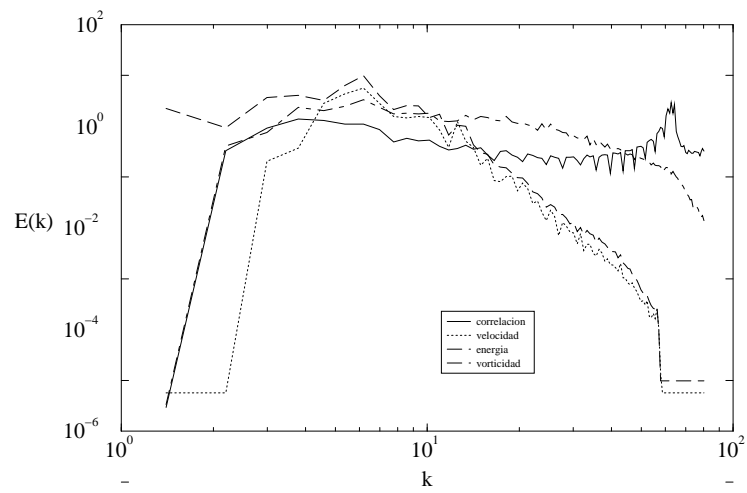


Fig. B.1: Espectros de energía del campo mostrado en capítulo 4, cada uno calculado con un método diferente.

C. GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS DE DISTRIBUCIÓN GAUSSIANA

Dado que la Simulación Cinemática es una simulación de tipo Montecarlo, es necesario analizar en cierta medida el generador de números aleatorios utilizado.

Se ha preferido prescindir del generador de números aleatorios que aportan la mayoría de compiladores FORTRAN (normalmente denominado RAN) dado que, en general, son generadores congruenciales lineales, que generan una serie de números enteros entre 0 y $m - 1$ según la expresión

$$I_{j+1} = aI_j + c \quad (\text{mod } m)$$

donde m es un número muy grande. Esta expresión es relativamente aceptable tan solo si a y m (el valor $c = 0$ es tan bueno como cualquier otro) son muy cuidadosamente escogidos. Sin embargo, aún así, no supera el test de χ^2 cuando son representados números sucesivos en un plano bidimensional para una serie no mayor que el periodo m .

La subrutina utilizada en esta memoria evita este inconveniente reordenando de forma aleatoria el orden de la serie y, además, se amplía el periodo de la misma combinando dos series de diferente periodos. Esta subrutina, denominada RAN2, está descrita en Press et al. (1992). Su periodo es de, aproximadamente, 10^{18} . Más que suficiente para nuestros propósitos.

Para generar números aleatorios de distribución gaussiana utilizamos el *método de Box-Muller*.

En general, dado un conjunto de series de números aleatorios x_1, x_2, \dots con distribución de probabilidad conjunta $p(x_1, x_2, \dots)$ y sean y_1, y_2, \dots funciones de x_1, x_2, \dots , la distribución de probabilidad conjunta de las y 's vendrá dada por

$$p(y_1, y_2, \dots) dy_1 dy_2 \dots = p(x_1, x_2, \dots) \left| \frac{\partial(x_1, x_2, \dots)}{\partial y_1, y_2, \dots} \right| dy_1 dy_2 \dots \quad (\text{C.1})$$

Lo que buscamos es una serie de números aleatorios cuya distribución de probabilidad

venga dada por

$$p(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy. \quad (\text{C.2})$$

Consideremos dos series de números aleatorios de desviación uniforme x_1 y x_2 , y las funciones

$$y_1 = \sqrt{-2\sigma^2 \ln x_1} \cos(2\pi x_2) \quad (\text{C.3})$$

$$y_2 = \sqrt{-2\sigma^2 \ln x_1} \sin(2\pi x_2), \quad (\text{C.4})$$

de forma equivalente, podemos escribir

$$x_1 = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y_1^2 + y_2^2)} \quad (\text{C.5})$$

$$x_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{y_2}{y_1} \quad (\text{C.6})$$

y así, el determinante del jacobiano de la ecuación (C.1) es

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = - \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma^2}} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (\text{C.7})$$

con lo cual queda demostrado que obtendremos dos series independientes de números distribuidos normalmente.

D. ASPECTOS SOCIOLÓGICOS DE LA LEY DE RICHARDSON

Ante todo, el autor de la presente memoria debe aceptar el hecho de ser completamente lego en el campo de la sociología. Sin embargo, las conversaciones con el profesor Babiano sobre la ley de Richardson han divagado a menudo a campos que podrían ser considerados poco científicos pero, no por ello, dignos de menos interés.

Estos aspectos de la ley de Richardson tienen que ver con su posible paralelismo con las relaciones sentimentales entre parejas de personas, no necesariamente unidas mediante lazos de amor, sino también mediante amistad, odio o simple relación profesional. En este caso, la distancia entre “partículas” debe interpretarse como una distancia sentimental o afectuosa. El camino (magnitud Lagrangiana) que recorre cada “partícula” viene determinado por la sociedad en la que se desenvuelven, que hace el papel de campo Euleriano. Este puede, en efecto, ser considerado en la mayoría de los casos como turbulento.

La sociedad impone entonces una cierta escala integral como escala característica de separación entre “partículas”. Si la separación inicial entre dos individuos es muy pequeña, esta irá evolucionando en el tiempo como t^2 hasta que llegue a una escala en la que sus aceleraciones relativas (Lagrangianas) estén decorrelacionadas en el tiempo, momento en el que sigue una ley de Richardson aumentando la separación como t^3 . Esta ley se extiende en el tiempo hasta que la separación relativa llega a ser del orden de la escala integral impuesta por el medio en el que se desenvuelven. En este momento, sus velocidades Lagrangianas se encuentran totalmente decorrelacionadas, y hallamos un comportamiento Browniano ($\sim t$) que perdura en el tiempo de forma indefinida. La duración temporal del régimen de Richardson va a depender del tamaño del subrango inercial del entorno en el que están sumergidas las partículas.

Si la separación entre “partículas” es inicialmente lo suficientemente grande (los lazos que las unen no son muy fuertes), puede no llegar a apreciarse la ley de Richardson, y esta relación entra directamente en el régimen Browniano.

Todo esto, por supuesto, de forma promediada sobre la totalidad de relaciones existentes en un cierto entorno sociológico.

Evidentemente, todo esto debe considerarse como un simple “divertimento” surgido del

análisis continuado (casi obsesivo) del comportamiento de las partículas fluidas en un campo turbulento. La extrapolación al campo sociológico no tiene ninguna base experimental ni teórica y, desde luego, el autor de la presente memoria no se cree con capacidad para realizar una simulación por ordenador. Lo único que espera el autor es que no sea cierta en el caso de las relaciones que han surgido en relación con la presente tesis y, en especial, con el profesor Babiano. Aunque esto, por desgracia, dependerá del nivel de turbulencia del entorno.