

Universidad Politécnic de Catalunya
Programa de Doctorado de Matemática Aplicada
Departamento Matemática Aplicada III

Contribución al Problema de Interpolación de Birkhoff

Memoria presentada por
Francisco Palacios Quiñonero
para aspirar al grado de Doctor

Director: **Dr. Pere Rubió i Díaz**

Barcelona, Diciembre 2004

Interpolación de Birkhoff sobre espacios
 $\langle x^{k_1}, \dots, x^{k_p} \rangle$

Francisco Palacios
Director: Pere Rubió

Índice General

1	Introducción	1
1.1	Motivación	1
1.2	Objetivos de la investigación	7
1.3	Contenido y estructura de la memoria	8
2	Resultados relevantes conocidos	11
2.1	Introducción	11
2.2	Problema de interpolación de Birkhoff	12
2.2.1	Definición del problema	12
2.2.2	Matriz de Vandermonde generalizada	14
2.2.3	Definiciones de regularidad	15
2.2.4	Polinomios anuladores	16
2.2.5	Problemas de interpolación notables	16
2.2.6	Secuencias y matrices hermitianas	17
2.3	Interpolación algebraica de Birkhoff	18
2.3.1	Definición	18
2.3.2	Exceso total de grado	19
2.3.3	Transformación afín de nodos	19
2.3.4	Regularidad condicionada	20
2.3.5	Descomposición normal	22
2.3.6	Regularidad ordenada	25
2.3.7	Condiciones suficientes de singularidad	28

2.4	Expresión del polinomio interpolador en forma de determinante	30
2.5	Interpolador y transformación afín de nodos	32
3	Interpolación K-algebraica de Birkhoff	35
3.1	Introducción	35
3.2	Definiciones y notaciones	36
3.2.1	El problema K -algebraico de interpolación	36
3.2.2	Matriz de Vandermonde generalizada	37
3.2.3	Expresión del polinomio interpolador en forma de determinante	38
3.3	Matrices de interpolación K -regulares	40
3.4	Sistema de órdenes de derivación de una matriz de interpolación	43
3.4.1	Definición	43
3.4.2	Equivalencia en órdenes de derivación	46
3.4.3	K -exceso total de grado	47
3.5	Transformación de nodos	49
3.6	Regularidad en intervalos $[a, 0]$ y $[0, b]$	55
3.7	Interpolación K -algebraica de Lagrange	56
4	K-regularidad condicionada	59
4.1	Introducción	59
4.2	Condición de Pólya	60
4.2.1	Sistemas de órdenes de derivación de Pólya	60
4.2.2	Condición de Pólya para matrices de interpolación . . .	61
4.3	K -condición de Pólya	64
4.4	Extensiones y restricciones de Pólya	67
4.5	Teorema de K -regularidad condicionada	72
4.6	Sistema de grados de Pólya mínimo	75
5	K-regularidad ordenada	79
5.1	Introducción	79

5.2	La propiedad de inclusión	81
5.2.1	K -inclusión	81
5.2.2	K -inclusión ordenada	83
5.3	Problemas de 1 nodo	84
5.4	Problemas de 2 nodos	87
5.5	Problemas hermitianos	93
5.6	Problemas casi-hermitianos	98
5.7	Condición suficiente de K -regularidad ordenada	101
5.7.1	Secuencias K -soportadas	101
5.7.2	Generalización del Teorema de Atkinson-Sharma	104
6	K-descomposición de matrices de interpolación	109
6.1	Introducción	109
6.2	Pares (Q, K) descomponibles	110
6.3	Descomposición de un par (E, K)	113
6.4	Teorema de descomposición	118
6.5	Sistema de grados indescomponible mínimo	120
6.6	Matrices totalmente indescomponibles	125
7	Descomposición canónica	131
7.1	Introducción	131
7.2	Forma estándar de un par (E, K)	132
7.2.1	Par (Q, K) estándar	133
7.2.2	Forma estándar de una matriz de interpolación	135
7.3	Teorema de traslación de órdenes y grados	137
7.4	Teorema de descomposición estándar	139
7.5	Descomposición canónica	142
7.5.1	Descomposición total	142
7.5.2	Descomposición canónica	149
7.6	Teoremas de singularidad	157

8 Conclusiones y futuras líneas de investigación	169
8.1 Conclusiones	169
8.2 Resumen de resultados obtenidos	171
8.3 Futuras líneas de investigación	179
A Algunos casos particulares	181
A.1 Interpolación de Lagrange en $\langle x^r, x^s \rangle$	183
A.1.1 Construcción del interpolador	184
A.1.2 Criterios para determinar el espacio de interpolación	185
A.1.3 Interpolación de exponenciales	187
A.1.4 Interpolación de rama asintótica	191
A.2 Problemas de un nodo	195
A.2.1 Espacio de interpolación $\langle x^r \rangle$	195
A.2.2 Espacio de interpolación $\langle x^r, x^s \rangle$	201
A.3 Interpolación de Hermite-Sylvester	209
A.3.1 Interpolación con espacio $\langle 1, x, x^r \rangle$	209
A.3.2 Interpolación con espacio $\langle 1, x^r, x^s \rangle$	219
A.4 Interpolación polinomial a trozos	237
A.4.1 Planteamiento	237
A.4.2 Construcción del interpolador	238
A.4.3 Interpolación de exponenciales	239
A.4.4 Interpolación de rama asintótica	244
Bibliografía	252