Capítulo 1

Introducción

1.1 Motivación

El principal objetivo de esta memoria es extender la teoría de la *interpolación de Birkhoff* a espacios de interpolación del tipo

$$\left\langle x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_n} \right\rangle,$$

donde $k_1, \ldots, k_n$ son enteros no negativos distintos y, en general, no consecutivos. En este caso, el polinomio interpolador será un *polinomio lacunario*

$$p(x) = a_1\, x^{k_1} + \cdots + a_n\, x^{k_n} \tag{1.1}$$

El espacio de interpolación $\left\langle x^{k_1}, x^{k_2}, \ldots, x^{k_n} \right\rangle$ queda definido por los *grados* $k_1, \ldots, k_n$. Hemos denominado *sistema de grados* K a una n-pla de enteros no negativos distintos dispuestos de forma estrictamente creciente, esto es,

$$K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad 0 \leq k_1 < \cdots < k_n.$$

Designamos por $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ el espacio de los polinomios (1.1) (con coeficientes reales).

A lo largo de esta memoria, empleamos el término *interpolación K-algebraica* para referirnos a un problema de interpolación cuyo espacio de interpolación es $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$. Para referirnos a los problemas de interpolación sobre espacios de polinomios de grado menor que n, empleamos el término *interpolación algebraica clásica.*

La aportación fundamental de la interpolación K-algebraica es la rotura del vínculo entre grado y dimensión que existe en la interpolación algebraica clásica. En la interpolación algebraica clásica el número de condiciones determina el espacio de interpolación. En contraste, el número de condiciones de un problema de interpolación K-algebraica determina únicamente la dimensión de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$, pudiendo existir distintos sistemas de grados K con los que es factible llevar a cabo la interpolación.

Podemos ilustrar esta situación con un sencillo ejemplo. Si tomamos la función

$$f(x) = e^{6x}$$

y las condiciones de interpolación

$$p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1),$$

en el marco de la interpolación algebraica clásica queda determinado el polinomio de Taylor de orden 1

$$p_1(x) = 403.\,43 + 2420.\,6(x-1).$$

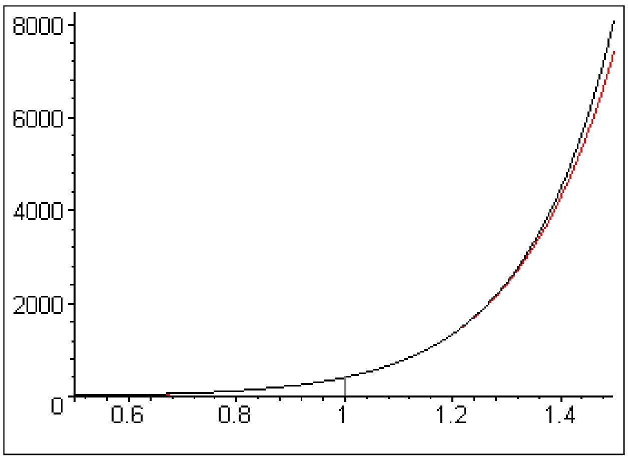
Si abordamos el problema desde la perspectiva de la interpolación K-algebraica, podemos obtener un polinomio interpolador para cada espacio de interpolación de la forma $\langle x^r, x^s \rangle$. Fijando la condición adicional

$$p''(1) \simeq f''(1),$$

resulta el polinomio

$$p(x) = 242.\,057\,x^4 + 161.\,372\,x^9.$$

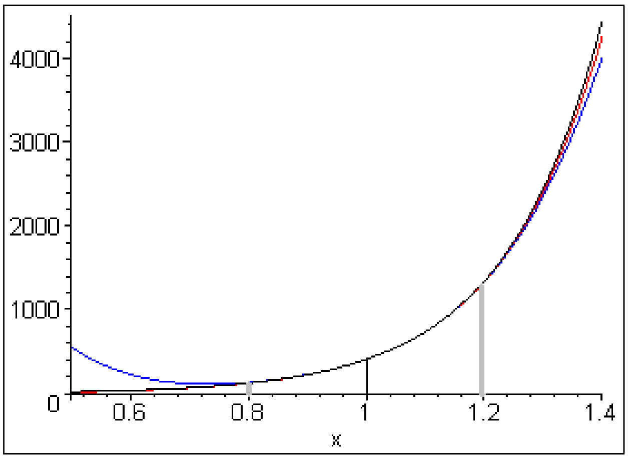
En el siguiente gráfico representamos la función $f(x) = e^{6x}$ (en negro) y el polinomio interpolador p (en rojo) sobre el intervalo [0.5,1.5]



Sobre el intervalo $[0.8, 1.2]$, el polinomio lacunario p es mejor aproximante de f (en norma L_2) que el polinomio de Taylor de f en $x = 1$ de orden 4

$$\begin{aligned} p_4(x) &= -2017.14 + 2420.57\,x + 7261.72\,(x-1)^2 + \\ &\quad +14523.44\,(x-1)^3 + 21785.15\,(x-1)^4 \ . \end{aligned}$$

El siguiente gráfico representa conjuntamente a la función f (en negro), el polinomio interpolador p (en rojo) y el polinomio de Taylor p_4 (en azul)



Resultados similares pueden obtenerse cuando interpolamos en las proximidades de una discontinuidad asintótica. Para la función racional

$$f(x) = \frac{1}{(x-1.2)^2},$$

las condiciones de interpolación

$$f(1) = p(1), \quad f'(1) = p'(1),$$

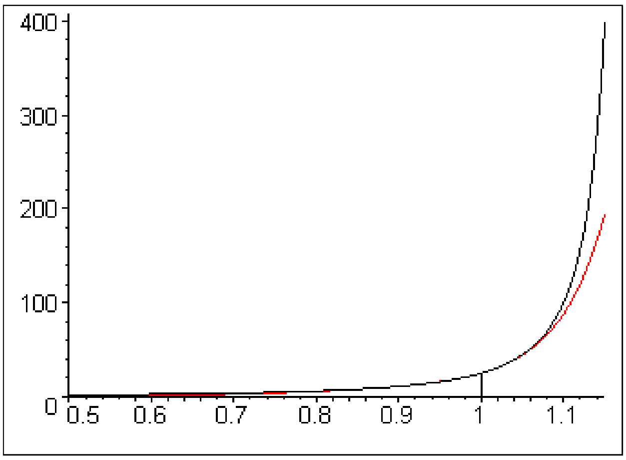
determinan, en el marco de la interpolación algebraica clásica, un polinomio de grado 1 cuya gráfica es la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 1$. Si optamos por una estrategia de interpolación K-algebraica con condición adicional

$$p''(1) \simeq f''(1),$$

obtenemos el polinomio lacunario

$$q(x) = 19.737\ x^6 + 5.263\ x^{25}.$$

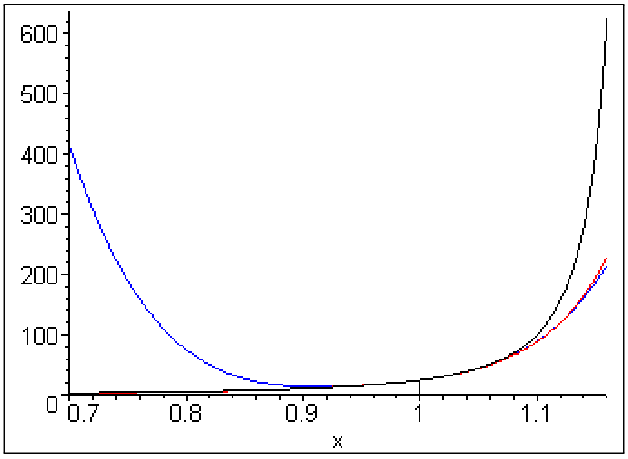
El siguiente gráfico muestra la representación conjunta sobre el intervalo [0.5,1.15] de la función $f(x) = 1/(x-1.2)^2$ (en negro) y el polinomio interpolador q (en rojo)



Sobre el intervalo [0.85,1.15], q es mejor aproximante de f que su polinomio de Taylor de orden 4 en $x = 1$

$$q_4(x) = -225 + 250\,x + 1875\,(x-1)^2 + 12500\,(x-1)^3 + 78125\,(x-1)^4\,.$$

El siguiente gráfico muestra la representación conjunta sobre [0.7,1.15] de la función f (en negro), el polinomio interpolador q (en rojo) y el polinomio de Taylor q_4 (en azul)



Los ejemplos presentados permiten afirmar sin lugar a dudas que, en ciertas situaciones, la interpolación K-algebraica puede ser más conveniente que la interpolación algebraica clásica. Por otra parte, es preciso resaltar que la interpolación K-algebraica no es una alternativa, sino una extensión de la interpolación algebraica clásica, ya que comprende a ésta como caso particular cuando se toma el sistema de grados $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $\ldots$, $k_n = n - 1$.

El empleo de polinomios lacunarios como aproximantes ha suscitado el interés de los investigadores desde que C. Müntz demostrara su célebre teorema de completitud (1914, [65]): *dados* $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to +\infty$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, *el conjunto de los polinomios de Müntz* $\sum_{i=0}^{n} a_i x^{\lambda_i}$, *donde* a_i *son coeficientes reales y* $\lambda_0 = 0$, *es denso en* $C[0,1]$, *con la norma uniforme, si y sólo si* $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} = +\infty$.

Tras este primer resultado, se han realizado numerosas extensiones. Sin ánimo de ser exhaustivos, en esta línea cabe citar los trabajos de: Százs, 1916 [86]; Clarkson y Erdös, 1943 [30]; Schwartz, 1959 [82]; Operstein, 1996 [67]; Borwein y Erdélyi, 1996 [21], 1997 [22], 1998 [24]; Boivin y Zhu, 2002 [15]; Almira, 2001 [1], 2004 [2]; Almira y Del Toro, 2002 [3], 2003 [6]; Almira, Del Toro y López-Moreno, 2002 [4], 2004 [5]; Almira, Del Toro y Jodar, 2004 [9].

Asimismo, se han generalizado a los espacios de Müntz numerosos elementos de la teoría de aproximación clásica. Podemos citar, por ejemplo, la construcción de polinomios ortogonales de Müntz-Legendre (Borwein y Erdélyi, 1994 [16]); la generalización de la desigualdad de Markov (Newman, 1976 [66]; Borwein y Erdélyi, 1994 [16], 1996 [19], [20]; Erdélyi, 2000 [34], 2001 [35]) o la construcción de polinomios de Bernstein para espacios de Müntz (Lorentz, 1986 [59]; Mazure, 1999 [62]). También podemos destacar el estudio de los *polinomios incompletos*, polinomios de la forma $p(x) = \sum_{k=n_1}^{n} a_k x^k$ (Kemperman y Lorentz, 1979 [46]; Lorentz 1977 [57], 1980 [58]; Saff y Varga, 1975 [76], 1978 [77], 1981 [79], [80]).

La abundancia de literatura sobre aproximación mediante polinomios lacunarios contrasta llamativamente con la falta de resultados acerca de la interpolación K-algebraica. El primer problema con que debemos enfrentarnos es que, en general, no es posible asegurar la existencia de solución para la interpolación K-algebraica, ni siquiera para estrategias de interpolación simples como la interpolación de Lagrange.

De hecho, fijados los enteros k_j que verifican $0 \leq k_1 < \cdots < k_n$ y los nodos $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, existe un polinomio $p(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x^{k_j}$, que satisface las n condiciones $p(x_j) = c_j$ para c_j arbitrarios si y sólo si $k_1 = 0$ y los incrementos de grados $\Delta_j = k_j - k_{j-1}$ son todos impares (Passow 1974, [68]; Lorentz, 1975 [54]).

En la *interpolación de Hermite-Sylvester*, el polinomio $p(x) = \sum_{j=1}^{r} a_j x^{k_j}$ debe satisfacer las $r = \sum_{i=1}^{n} (r_i + 1)$ condiciones

$$D^{(j)} p(x_i) = c_{ij}, \quad \text{para} \quad j = 0, \ldots, r_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

En este caso, existe el polinomio p para cualquier elección de los nodos x_i y de los valores c_{ij} si y sólo si

$$k_j = j - 1, \quad \text{para} \quad j = 0, 1, \ldots, \max_i\{r_i\}$$

y los incrementos de grados $\Delta_j = k_j - k_{j-1}$ son todos impares (Passow 1974, [68]).

En la *interpolación algebraica de Birkhoff*, se determina un polinomio de grado menor que n imponiendo n condiciones; las condiciones fijan los valores que debe tomar el polinomio, o alguna de sus derivadas, en determinados nodos $x_1, \ldots, x_m$. Los problemas clásicos de interpolación de Lagrange, Taylor, Hermite, Hermite-Sylvester y Abel-Gontscharov son casos particulares de la interpolación algebraica de Birkhoff.

El estudio de la Interpolación de Birkhoff se inicia en 1906 con el trabajo de G. C. Birkhoff [13]. En 1931, G. Pólya [73] establece una condición necesaria de *regularidad* y caracteriza la *regularidad de los problemas de dos nodos.* En 1966, I. J. Schoenberg [83] introduce las *matrices de interpolación* para representar la estructura de las condiciones que impone el problema de interpolación.

Una matriz de interpolación tiene una fila asociada a cada uno de los nodos x_j. Para cada condición del tipo $D^{(j)}p(x_i) = c_{ij}$, la matriz de interpolación tiene un elemento $e_{ij} = 1$. Los índices de columnas empiezan en 0 y un elemento $e_{i0} = 1$ en la matriz de interpolación indica que el problema de interpolación contiene la condición $p(x_i) = c_{i0}$. Así, por ejemplo, la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

define un *problema de Hermite* de tres nodos.

Con las matrices de interpolación surge el *problema de la regularidad,* que consiste en establecer condiciones simples, basadas en la estructura de la matriz de interpolación, que permitan decidir sobre la existencia y unicidad de soluciones para la familia de problemas de interpolación asociados a una misma matriz de interpolación.

El problema de la regularidad da lugar a una intensa actividad investigadora: A. Sharma y J. Prasad introducen las *matrices normales* y la *descomposición normal* (1968, [84]); D. R. Ferguson da una caracterización de la regularidad para el caso complejo (1969, [36]); K. Atkinson y A. Sharma establecen la condición suficiente de *regularidad ordenada* basada en la no existencia de *secuencias impares soportadas* (1969, [10]); en 1971, G. Lorentz y K. Zeller

[52] formulan condiciones suficientes de *singularidad ordenada* para *matrices de interpolación indescomponibles.*

A primera vista, las exigentes condiciones de regularidad para los problemas de interpolación K-algebraica de Lagrange y Hermite-Sylvester pueden disuadirnos del empleo de polinomios lacunarios como interpolantes. Asimismo, parecen indicar que los polinomios lacunarios no son aptos para el empleo de estrategias de interpolación más generales.

La situación cambia drásticamente si exigimos que el 0 no sea punto interior del intervalo de interpolación. Para intervalos de la forma $[a, 0]$ o $[0, b]$, la regularidad del problema de interpolación K-algebraica de Lagrange queda caracterizada por la sencilla condición $k_1 = 0$. Sobre el intervalo de interpolación $[0, b]$, la regularidad ordenada del problema K-algebraico de Hermite-Sylvester puede caracterizarse por la condición $k_j = j$, para $j = 0, 1, \dots, r_1$; sobre el intervalo $[a, 0]$, la condición es $k_j = j$ para $j = 0, 1, \dots, r_n$.

Desde esta perspectiva y teniendo en cuenta la caracterización de la regularidad del *problema de interpolación K-algebraica de Birkhoff de un nodo* (Palacios y Rubió, 1997 [71]), parece razonable abordar el *problema general de la regularidad de la interpolación K-algebraica de Birkhoff.*

1.2 Objetivos de la investigación

Tal como se ha establecido en la sección precedente, el objetivo principal de la investigación es *la construcción de un marco teórico adecuado para la interpolación de Birkhoff mediante polinomios lacunarios.* Este objetivo genérico puede concretarse en los siguientes objetivos particulares (empleamos el término *K-regularidad* para referirnos a la regularidad en el problema K-algebraico):

1. Formulación de un planteamiento adecuado para el problema de interpolación K-algebraica de Birkhoff.

2. Estudio del problema de K-regularidad condicionada.

3. Estudio del problema de K-regularidad ordenada.

4. Generalización del concepto de descomposición normal y formulación de teoremas de descomposición para el caso K-algebraico.

Por otra parte, parece claro que un segundo objetivo de la investigación debe ser la exploración de posibles aplicaciones que se derivan del marco teórico desarrollado. En ese sentido nos proponemos *estudiar el comportamiento de algunos casos particulares de interpolación K-algebraica con condiciones adicionales*. Más concretamente, se pretende estudiar algunos casos simples de interpolación K-algebraica de funciones de *gran crecimiento*, tales como las funciones exponenciales

$$f(x) = e^{m\,x}, \quad m > 0,$$

y funciones racionales del tipo

$$f(x) = \frac{1}{(x-1-\epsilon)^m}, \quad m > 0, \quad \epsilon > 0,$$

en las proximidades de la asíntota vertical $x = 1 + \epsilon$.

No obstante, debemos remarcar que el objetivo del estudio de estos casos particulares no es establecer métodos eficientes de interpolación, sino mostrar que la interpolación mediante polinomios lacunarios es una vía potencialmente útil en algunas situaciones que son ciertamente difíciles de abordar mediante la interpolación algebraica clásica.

1.3 Contenido y estructura de la memoria

En la redacción de esta memoria, las notaciones y definiciones relativas a la interpolación algebraica de Birkhoff se ajustan, dentro de lo posible, al enfoque dado en *Birkhoff Interpolation* (Lorentz, Jetter y Riemenschneider, 1983 [60]). Con la intención de facilitar la consulta directa de las diferentes secciones, se ha procurado especificar frecuentemente el significado de las notaciones; asimismo, se ha introducido un buen número de ejemplos simples que esperamos que contribuyan a aclarar los conceptos nuevos y agilicen la lectura.

La memoria se ha estructurado en 8 capítulos y un apéndice. Después de este primer capítulo de introducción, se dedica el Capítulo 2 a presentar el *problema general de interpolación de Birkhoff* y los principales resultados conocidos de la interpolación algebraica de Birkhoff que son relevantes para la investigación. También se incluye una *expresión en forma de determinante* para la solución del problema algebraico de interpolación de Birkhoff y se detalla como puede reducirse la interpolación algebraica de Birkhoff sobre un intervalo arbitrario $[a, b]$ al intervalo $[0, 1]$.

En el Capítulo 3 se concretan las definiciones y notaciones para la *interpolación K-algebraica* de Birkhoff y el *problema de la K-regularidad* de una matriz de interpolación y se extiende la expresión del polinomio interpolador en forma de determinante al problema K-algebraico. Se introduce el concepto fundamental de *sistema de órdenes de derivación*: n-pla no decreciente que contiene los órdenes de derivación correspondientes al problema de interpolación. Se estudia la problemática de la transformación de nodos y se muestra como el estudio de la K-regularidad (K-regularidad ordenada) de una matriz de interpolación sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$ puede reducirse al intervalo $[0, 1]$. Para cerrar el capítulo, se presenta una demostración simple de la regularidad de la *interpolación K-algebraica de Lagrange* sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$ basada en los polinomios anuladores.

En el Capítulo 4 se define la *K-condición de Pólya,* que extiende la condición de Pólya al problema de interpolación K-algebraico y se establece el *Teorema de K-regularidad condicionada*, que permite caracterizar las matrices de interpolación K-regulares mediante la K-condición de Pólya. Se introduce el concepto de *par de Pólya* (Q, K), formado por un sistema de grados K y un sistema de órdenes de derivación Q que verifica la K-condición de Pólya y se aborda el problema de extender y restringir adecuadamente un par de Pólya (Q, K) de forma que el par resultante sea de Pólya. Los resultados obtenidos permiten simplificar notablemente las demostraciones de K-regularidad. El capítulo finaliza con la obtención del *sistema de grados de Pólya mínimo* para una matriz de interpolación.

El Capítulo 5 está dedicado al estudio de la K-regularidad ordenada. Se introduce la *propiedad de K-inclusión* y de *K-inclusión ordenada* como condiciones necesarias de K-regularidad y K-regularidad ordenada. Se estudia la K-regularidad ordenada sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$ para matrices de una y dos filas, matrices hermitianas y casi-hermitianas. Se define el concepto de *secuencia K-soportada* y se demuestra el *Teorema de K-regularidad ordenada*, que establece condiciones suficientes de K-regularidad ordenada sobre intervalos del tipo $[a, 0]$ y $[0, b]$ que generalizan el *Teorema de Atkinson-Sharma.*

En el Capítulo 6 se define la *K-condición fuerte de Pólya* y los *índices de descomposición* de un par (E, K). Se demuestra el *Teorema de descomposición,* que reduce el estudio de la regularidad de un par descomponible (E, K) al estudio de la regularidad de sus pares componentes. Se introduce el concepto de *sistema de grados indescomponible mínimo* de una matriz de interpolación y se caracterizan las matrices de interpolación *totalmente indescomponibles.*

En el Capítulo 7 se define la *forma estándar* de un par (E, K), que permite eliminar las columnas iniciales nulas mediante una traslación de los grados y se demuestra el *Teorema de traslación de órdenes y grados*, que reduce los problemas de K-regularidad a la forma estándar. Se formula la *descomposición canónica*, que permite descomponer un par de Pólya (E, K) en un cierto número de pares (E_j, K_j) indescomponibles en forma estándar y se demuestra el *Teorema de descomposición canónica*, que reduce los problemas de K-regularidad a los pares indescomponibles en forma estándar. Finalmente, se establecen *condiciones suficientes de singularidad ordenada* sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$ para pares (E, K) indescomponibles en forma estándar.

En el Capítulo 8, se presentan las conclusiones y un breve resumen de los resultados obtenidos. También se detallan algunas posibles líneas de investigación que se derivan del presente trabajo.

Finalmente, en el Apéndice se explora el potencial interés práctico de la interpolación K-algebraica mediante el estudio de casos particulares. Para ello se estudian algunos problemas simples de *interpolación K-algebraica con condiciones adicionales* y se construyen estrategias sencillas de *interpolación K-algebraica a trozos*. Los resultados obtenidos se aplican a la interpolación de exponenciales y de ramas asintóticas (interpolación de una función en las proximidades de una asíntota vertical).

Para realizar los cálculos y gráficos se han empleado los recursos de cálculo simbólico y gráfico de Maple 8. No obstante, es preciso destacar que este enfoque sólo es adecuado para problemas de pequeña dimensión; para problemas de gran dimensión sería preciso emplear recursos de álgebra lineal numérica.