Capítulo 3

Interpolación K-algebraica de Birkhoff

3.1 Introducción

En este capítulo presentamos los elementos básicos de *la interpolación K-algebraica de Birkhoff*, en la que los interpoladores son *polinomios lacunarios* de la forma

$$p(x) = a_1 x^{k_1} + \cdots + a_n x^{k_n}.$$

Los grados $k_1, \ldots, k_n$ son enteros no negativos y, en general, no consecutivos. Para especificar el *espacio de interpolación* $\mathcal{P}_K(\mathbb{R}) = \langle x^{k_1}, \ldots, x^{k_n} \rangle$, empleamos la *secuencia de grados* $K = (k_1, \ldots, k_n)$.

En la Sección 3.2 se define el problema de interpolación K-algebraica de Birkhoff, se presenta la *matriz de Vandermonde generalizada* correspondiente a este caso y se formula una expresión del polinomio interpolador en forma de determinante.

En la Sección 3.3 se establecen las definiciones de *regularidad* para los problemas de interpolación K-algebraicos y se define la *K-regularidad condicional*, *K-regularidad* y *K-regularidad ordenada* para matrices de interpolación.

La Sección 3.4 introduce el *sistema de órdenes de derivación* $Q(E)$ de una matriz de interpolación E: n-pla que contiene los órdenes de derivación especificados en E dispuestos en orden no decreciente. En capítulos posteriores se construye una generalización de la condición de Pólya al problema de la interpolación K-algebraica y se establecen teoremas de descomposición. En el desarrollo del nuevo marco teórico, el sistema de órdenes de derivación es, a pesar de su sencillez, un elemento fundamental. Como primera aplicación, se define el *exceso de grado* $\rho(E,K) = \sum(K - Q(E))$ y se muestra que $\rho(E,K) \geq 0$ es condición necesaria para la K-regularidad condicionada de E.

En la Sección 3.5 se demuestra que el determinante $D(E,K,X)$ es un polinomio homogéneo de grado $\rho(E,K)$ (cuando no es idénticamente nulo) y se detalla como transportar un problema de interpolación K-algebraica sobre $[a,0]$ o $[0,b]$ al intervalo $[0,1]$. Como consecuencia, en la Sección 3.6, se muestra como el estudio de la K-regularidad (K-regularidad ordenada) de una matriz de interpolación E sobre un intervalo $[0,b]$ puede reducirse al intervalo $[0,1]$. Para intervalos de la forma $[a,0]$, podemos estudiar la K-regularidad (K-regularidad ordenada) sobre $[0,1]$ de la matriz $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E.

El capítulo finaliza con el estudio de la K-regularidad de la interpolación K-algebraica de *Lagrange* sobre intervalos $[a,0]$ y $[0,b]$.

3.2 Definiciones y notaciones

3.2.1 El problema K-algebraico de interpolación

Denominamos *sistema de n grados* a una n-pla $K = (k_1,\ldots,k_n)$ formada por enteros no negativos y que es estrictamente creciente, esto es,

$$0 \leq k_1 < \cdots < k_n.$$

Dado un sistema de n grados K, representamos por $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de polinomios generado por las potencias $x^{k_1},\ldots,x^{k_n}$. Es decir,

$$\mathcal{P}_K(\mathbb{R}) = \left\langle x^{k_1},\ldots,x^{k_n}\right\rangle.$$

El espacio vectorial $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ es de dimensión n.

Definición 3.1 *Sea K un sistema de grados, denominamos problema de interpolación K-algebraica de Birkhoff a un problema de interpolación de Birkhoff cuyo espacio de interpolación es $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$.*

Con mayor detalle, un problema de interpolación K-algebraica de Birkhoff sobre el intervalo $[a,b]$ queda determinado por una cuaterna (E,K,X,C), donde

- E es una matriz de interpolación con m filas y n unos.
- $K = (k_1, \ldots, k_n)$ es un sistema de n grados.
- X es un sistema admisible de m nodos de $[a, b]$.
- $C = (c_{ij} : e_{ij} = 1)$ es un sistema de n valores reales.

El problema de interpolación definido por (E, K, X, C) consiste en determinar un polinomio lacunario $p(x)$ en $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ que verifique las n condiciones

$$D^{(j)}p(x_i) = c_{ij}, \qquad e_{ij} = 1 \tag{3.1}$$

El problema de interpolación K-algebraica definido por (E, X, K, C) es *regular* si tiene solución única.

Observemos que la interpolación algebraica es un caso particular de problema K-algebraico cuando se toma el sistema de grados $K = (0, 1, \ldots, n-1)$. En lo sucesivo, emplearemos la terminología: *problema de interpolación algebraico clásico* o *interpolación algebraica clásica,* para referirnos a problemas de interpolación cuyo espacio de interpolación es $\mathcal{P}_s(\mathbb{R})$ (espacio de polinomios de grado $\leq s$).

3.2.2 Matriz de Vandermonde generalizada

Si fijamos una base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$, las condiciones (3.1) conducen a un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas. La base $\mathcal{G}_K = (g_1, \ldots, g_n)$ definida por

$$g_1(x) = \frac{x^{k_1}}{k_1!},\ g_2(x) = \frac{x^{k_2}}{k_2!}, \ldots, g_n(x) = \frac{x^{k_n}}{k_n!}\ ,$$

es una elección especialmente adecuada por su buen comportamiento respecto de la derivación. Representamos por $V(E, K, X)$ a la *matriz de Vandermonde generalizada del problema* (E, K, X, C) respecto de la base $\mathcal{G}_K$, $D(E, K, X)$ representa su determinante.

Esquemáticamente, $V(E, K, X)$ es una matriz de n filas de la forma

$$\left(\frac{x_i^{k_1-j}}{(k_1-j)!}, \frac{x_i^{k_2-j}}{(k_2-j)!}, \ldots, \frac{x_i^{k_n-j}}{(k_n-j)!}; \quad e_{ij} = 1 \right).$$

La matriz $V(E, K, X)$ depende de la ordenación de los elementos de $\mathcal{G}_K$ y de la ordenación de los elementos $e_{ij} = 1$ de la matriz de interpolación

E. Diferentes ordenaciones dan lugar a permutaciones de filas y columnas en $V(E,K,X)$. Tales reordenaciones no afectan a la anulación de $D(E,K,X)$ y, por lo tanto, no afectan a la existencia y unicidad de soluciones. No obstante, una ordenación adecuada será importante para poder abordar correctamente algunos problemas.

Normalmente, ordenaremos los elementos de la base $\mathcal{G}_K$ según potencias crecientes y los elementos $e_{ij} = 1$ de la matriz de interpolación según el orden lexicográfico creciente de los índices (i,j) con prevalencia del primer índice; cuando sea conveniente usar otra ordenación, ésta se indicará explícitamente.

3.2.3 Expresión del polinomio interpolador en forma de determinante

Siguiendo un razonamiento análogo al empleado en la demostración de la Proposición 2.2, podemos obtener una expresión en forma de determinante del polinomio interpolador para el problema de interpolación K-algebraica de Birkhoff.

Proposición 3.1 *Dado un problema de interpolación K-algebraica de Birkhoff regular (E,K,X,C), el polinomio solución $p(x) \in \mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ queda definido implícitamente por*

$$\left| \begin{array}{c|c} \dfrac{x^{k_1}}{k_1!} \quad \cdots \quad \dfrac{x^{k_n}}{k_n!} & p(x) \\ \hline V(E,K,X) & \mathbf{C} \end{array} \right| = 0,$$

donde $\mathbf{C}$ es una columna formada por los valores c_{ik}, ordenados de forma coherente con la ordenación de filas de $V(E,K,X)$.

Demostración. Es análoga a la demostración de la Proposición 2.2. $\square$

Ejemplo 3.2.1 *Problema de interpolación K-algebraica de Birkhoff.*

Consideremos el sistema de 4 grados $K = (1,2,5,6)$, la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el sistema de nodos $X = (0, 1, 2)$ y el sistema de valores C formado por

$$c_{11} = 1, \quad c_{15} = 4, \quad c_{21} = 0, \quad c_{35} = 6.$$

El problema de interpolación K-algebraica definido por (E, K, X, C) consiste en determinar un polinomio $p(x)$ en

$$\mathcal{P}_K(\mathbb{R}) = \left\langle x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^5}{5!}, \frac{x^6}{6!} \right\rangle,$$

que verifique las condiciones

$$D\,p(0) = 1, \quad D^{(5)}p(0) = 4, \quad D\,p(1) = 0, \quad D^{(5)}p(2) = 6 \qquad (3.2)$$

Si ordenamos los elementos $e_{ij} = 1$ según el orden lexicográfico creciente de los índices (i, j) con prevalencia del primer índice, la matriz de Vandermonde generalizada es

$$V(E, K, X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/4! & 1/5! \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante toma el valor $D(E, K, X) = -2$. Por lo tanto, el problema de interpolación K-algebraica (E, K, X, C) es regular.

Podemos expresar implícitamente el polinomio interpolador en la forma

$$\left| \begin{array}{cccc|c} x & x^2/2! & x^5/5! & x^6/6! & p(x) \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1/4! & 1/5! & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{array} \right| = 0.$$

Calculando este determinante y despejando $p(x)$, resulta

$$p(x) = x - \frac{47}{80}x^2 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{720}x^6.$$

Es inmediato verificar que el polinomio obtenido cumple las condiciones (3.2). Observemos que la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no cumple la condición de Pólya y, por lo tanto, es totalmente singular en el contexto de la interpolación algebraica clásica. $\square$

Notemos que el polinomio interpolador solución del problema de interpolación K-algebraica (E, K, X, C) puede determinarse implícitamente mediante la ecuación

$$\left| \begin{array}{c|c} g_1(x) \quad \cdots \quad g_n(x) & p(x) \\ \hline V_{\mathcal{G}}(E, K, X) & \mathbf{C} \end{array} \right| = 0,$$

donde $\mathcal{G} = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ es una base cualquiera del espacio de interpolación

$$\mathcal{P}_K(\mathbb{R}) = \left\langle x^{k_1}, \dots, x^{k_n} \right\rangle,$$

y $V_{\mathcal{G}}(E, K, X)$ es la matriz de Vandermonde generalizada de (E, X) respecto del sistema de funciones $\mathcal{G}$. Normalmente, la base

$$g_1(x) = \frac{x^{k_1}}{k_1!},\ g_2(x) = \frac{x^{k_2}}{k_2!}, \dots, g_n(x) = \frac{x^{k_n}}{k_n!},$$

es la mejor elección; no obstante, cuando la matriz de interpolación E es muy simple, puede ser adecuado usar la base $(x^{k_1}, x^{k_2}, \dots, x^{k_n})$.

3.3 Matrices de interpolación K-regulares

Las definiciones de regularidad de la Sección 2.2.3 quedan, en el caso de la interpolación K-algebraica, como sigue.

- Una *terna* (E, K, X) es *regular* si el problema de interpolación K-algebraica definido por (E, K, X, C) tiene solución única para cualquier elección del sistema de valores C; en caso contrario, decimos que (E, K, X) es *singular*. Si la terna (E, K, X) es regular, también decimos que el par (E, X) es K*-regular*.

- Un *par* (E, K) es *condicionalmente regular* en $[a, b]$ si la terna (E, K, X) es regular para alguna elección del sistema de nodos X en $[a, b]$; en caso contrario, decimos que el par (E, K) es *totalmente singular* en $[a, b]$.

- Un *par* (E, K) es *regular* en $[a, b]$ si, para cualquier elección del sistema de nodos X en $[a, b]$, la terna (E, K, X) es regular; en caso contrario, el *par* (E, K) es *singular* en $[a, b]$.

- El *par* (E, K) es *regular ordenado* en $[a, b]$ si la terna (E, K, X) es regular para toda elección del sistema de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$ en $[a, b]$ que verifique $x_1 < \cdots < x_m$; en caso contrario, el par (E, K) es *singular ordenado* en $[a, b]$.

Apoyándonos en estas definiciones, establecemos las definiciones de regularidad y singularidad de una matriz de interpolación respecto de un sistema de grados K.

Definición 3.2 *Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de $|E|$ grados. Decimos que la matriz de interpolación E es condicionalmente regular respecto de K (o más brevemente, E es condicionalmente K-regular), si el par (E, K) es condicionalmente regular; en caso contrario, decimos que E es totalmente singular respecto de K (E es totalmente K-singular). La matriz de interpolación E es K-regular (regular ordenada) sobre $[a, b]$ si lo es el par (E, K); en caso contrario, E es K-singular (K-singular ordenada) sobre $[a, b]$.*

Veremos en el capítulo siguiente que la K-regularidad condicionada de una matriz de interpolación es independiente del intervalo. En el estudio de la K-regularidad y la K-regularidad ordenada, el intervalo sí es relevante.

Es interesante observar que, en la interpolación algebraica clásica, el número de unos de la matriz de interpolación determina completamente el espacio de interpolación. Para una matriz de interpolación E con n unos el espacio de interpolación es el espacio $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor que n.

En contraste, en la interpolación K-algebraica el número de unos de la matriz de interpolación determina únicamente la dimensión del espacio de interpolación. Dada una matriz de interpolación E, podemos considerar una infinidad de sistemas de $|E|$ grados K. La regularidad de los pares (E, K) resultantes dependerá, en general, tanto de la matriz de interpolación E como del sistema de grados K.

Ejemplo 3.3.1 *Matriz de interpolación K-regular ordenada en* $[0, 1]$.

Consideremos el sistema de grados $K = (1, 2, 5, 6)$ y la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Queremos estudiar si la matriz de interpolación E es K-regular ordenada sobre el intervalo $[0,1]$. Para simplificar el estudio empleamos los resultados de la Sección 3.5, que nos aseguran que la K-regularidad ordenada de una matriz de interpolación no se ve afectada por homotecias de nodos (de razón positiva). Por lo tanto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que el sistema de nodos $X = (x_1, x_2, x_3)$ verifica $0 \leq x_1 < x_2 < x_3 = 1$. El espacio de interpolación es

$$\mathcal{P}_K(\mathbb{R}) = \left\langle x, \frac{x^2}{2!}, \frac{x^5}{5!}, \frac{x^6}{6!} \right\rangle$$

y, si disponemos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i,j) con prevalencia del primer índice, la matriz de Vandermonde generalizada es

$$V(E,K,X) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^4/4! & x_1^5/5! \\ 0 & 1 & x_1^3/3! & x_1^4/4! \\ 1 & x_2 & x_2^4/4! & x_2^5/5! \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En el caso $x_1 = 0$, resulta la matriz de Vandermonde generalizada

$$V(E,K,(0,x_2,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^4/4! & x_2^5/5! \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante toma el valor

$$D(E,X,K) = \frac{1}{24}x_2^4 - \frac{1}{120}x_2^5 = \frac{1}{120}x_2^4\,(x_2 - 5)\,.$$

Está claro que $D(E,K,X)$ no se anula para ningún valor de x_2 en $[0,1]$ que verifique $0 = x_1 < x_2 < x_3 = 1$.

En el caso $x_1 > 0$, la matriz de Vandermonde generalizada es

$$V(E,K,X) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^4/4! & x_1^5/5! \\ 0 & 1 & x_1^3/3! & x_1^4/4! \\ 1 & x_2 & x_2^4/4! & x_2^5/5! \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calculamos el determinante, resulta

$$D(E,X,K) = \frac{1}{24}x_2^4 - \frac{1}{120}x_2^5 - \frac{1}{6}x_2x_1^3 + \frac{1}{24}x_2x_1^4 + \frac{1}{8}x_1^4 - \frac{1}{30}x_1^5.$$

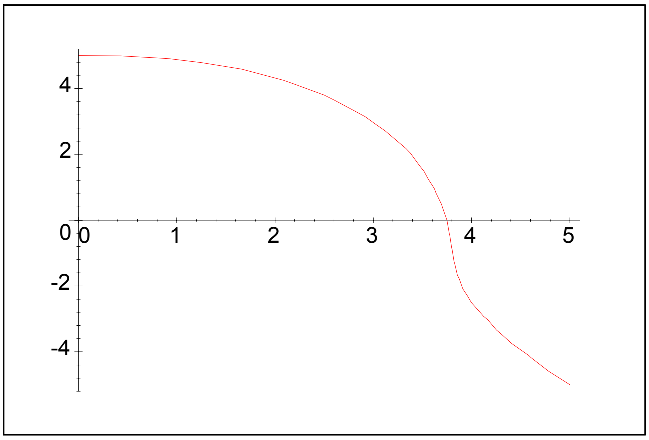
Expresando $D(E, X, K)$ en la forma

$$-\frac{1}{120}\left(4x_1^3 - 15x_1^2 + 3x_2x_1^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_2^2 - 5x_2^2 + x_2^3\right)(x_1 - x_2)^2,$$

el problema se reduce a determinar si existen soluciones de la ecuación

$$4x_1^3 - 15x_1^2 + 3x_2x_1^2 - 10x_1x_2 + 2x_1x_2^2 - 5x_2^2 + x_2^3 = 0 \tag{3.3}$$

que verifiquen $0 < x_1 < x_2 < 1$. Si representamos gráficamente la curva definida en forma implícita por la ecuación (3.3), obtenemos



Vemos que el gráfico no corta la región $0 < x_1 < x_2 < 1$. Por lo tanto, parece razonable aceptar que el determinante de $D(E, X, K)$ es no nulo para toda elección admisible de x_1 y x_2.

El presente ejemplo pone de manifiesto que, aún para matrices de interpolación sencillas como la que nos ocupa, la cuestión de determinar si el determinante de Vandermonde generalizado se anula presenta serias dificultades. Más adelante veremos como la generalización del Teorema de Atkinson-Sharma nos permite afirmar de forma sencilla y rigurosa la K-regularidad ordenada de la matriz de interpolación E sobre $[0, 1]$. $\square$

3.4 Sistema de órdenes de derivación de una matriz de interpolación

3.4.1 Definición

Un elemento $e_{ij} = 1$ en la matriz de interpolación E indica que los problemas de interpolación asociados a la matriz E prescriben el valor de la derivada

j en el nodo i. En el estudio de algunas propiedades, la asociación entre órdenes de derivación y nodos no es relevante. La condición de Pólya es un buen ejemplo de esta circunstancia.

El *sistema de órdenes de derivación* de una matriz de interpolación E recoge los órdenes de derivación especificados por E, prescindiendo de su asociación con los distintos nodos. La ordenación no decreciente de los órdenes de derivación es especialmente adecuada cuando se dispone la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ según potencias crecientes.

Definición 3.3 *Sea E una matriz de interpolación con n unos. Denominamos sistema de órdenes de derivación de la matriz de interpolación E a la n-pla de enteros no negativos que se obtiene ordenando de forma no decreciente los órdenes de derivación prescritos por E.*

Para representar al sistema de órdenes de derivación de E, empleamos la notación $Q(E)$. Cuando sea conveniente, emplearemos la expresión: *sea Q un sistema de n órdenes de derivación* para indicar que $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ es una n-pla de enteros no negativos que verifica $q_1 \leq \cdots \leq q_n$.

Ejemplo 3.4.1 *Sistema de órdenes de derivación de una matriz de interpolación.*

El sistema de órdenes de derivación de la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es

$$Q(E) = (2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 7)\,.$$

Para una matriz de interpolación de Lagrange con n unos

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

se obtiene el sistema de órdenes de derivación

$$Q(E_1) = (\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{(n)}).$$

Las matrices de interpolación

$$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E_4 = (0, 1, 1, 1),$$

tienen el mismo sistema de órdenes de derivación

$$Q(E_3) = Q(E_4) = (1, 2, 3)\,. \quad \square$$

En la interpolación algebraica clásica, se usa ampliamente el concepto de *matriz de interpolación normal*: matriz de interpolación con tantas columnas como unos. Este sencillo concepto juega un papel importante en la definición de la condición de Pólya y en el Teorema de descomposición.

La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es normal ni normalizable, aunque esto no supone ningún problema en el contexto de la interpolación algebraica clásica pues, cuando se emplea el espacio de interpolación de los polinomios de grado inferior al número de unos de la matriz, las matrices de interpolación no normalizables son siempre totalmente singulares.

En el marco de la interpolación K-algebraica, la situación es radicalmente distinta. Esto resulta claro si observamos el Ejemplo 3.3.1, donde se muestra que la matriz de interpolación E es regular ordenada sobre $[0, 1]$ respecto del sistema de grados $K = (1, 2, 5, 6)$.

La siguiente proposición establece una condición suficiente de K-singularidad total que generaliza el concepto de matriz no normalizable.

Proposición 3.2 *Sea E una matriz de interpolación, $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ su sistema de órdenes de derivación y $K = (k_1, \ldots, k_n)$ un sistema de grados. Si se verifica $q_n > k_n$, entonces la matriz de interpolación E es totalmente K-singular.*

Demostración. Existe en E un elemento $e_{i,q_n} = 1$. Si se cumple $q_n > k_n$, entonces la fila correspondiente a e_{i,q_n} en la matriz de Vandermonde generalizada $V(E, K, X)$ es de la forma

$$\left(\frac{x_i^{k_1 - q_n}}{(k_1 - q_n)!} \quad \frac{x_i^{k_2 - q_n}}{(k_2 - q_n)!} \quad \cdots \quad \frac{x_i^{k_n - q_n}}{(k_n - q_n)!} \right).$$

Esta fila es completamente nula, por lo tanto, $V(E, K, X)$ es singular para cualquier elección del sistema de nodos. $\square$

Observemos que en el caso de la interpolación algebraica clásica, el sistema de grados es $K_{n-1} = (0, 1, \ldots, n-1)$ y la condición $q_n \leq n-1$ equivale a que la matriz de interpolación sea normalizable.

3.4.2 Equivalencia en órdenes de derivación

Definición 3.4 *Decimos que dos matrices de interpolación E, E' son equivalentes en órdenes de derivación si sus sistemas de órdenes de derivación $Q(E)$ y $Q(E')$ coinciden. Dado un sistema de órdenes de derivación Q, decimos que una matriz de interpolación es de clase Q si se verifica $Q(E) = Q$.*

Es inmediato que la equivalencia en órdenes de derivación es una relación de equivalencia. El conjunto de las matrices de interpolación queda clasificado en clases de matrices que comparten un mismo sistema de órdenes de derivación, es razonable representar las clases por el sistema de órdenes que comparten; así, la denominación *matriz de clase Q* está bien justificada.

Importantes propiedades de la interpolación K-algebraica son compatibles con la equivalencia en órdenes de derivación. En particular, veremos en el capítulo siguiente que la K-regularidad condicionada de una matriz de interpolación depende únicamente del sistema de órdenes $Q(E)$ y, por lo tanto, es una propiedad compatible con la equivalencia de órdenes de derivación.

Ejemplo 3.4.2 *Matrices equivalentes en órdenes de derivación.*

Las matrices de interpolación

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

son equivalentes en ordenes de derivación. En los tres casos, el sistema de órdenes de derivación es $Q = (0, 0, 1, 2, 3)$. Si prescindimos de columnas finales totalmente nulas (posteriores a la última columna no nula), existe una única matriz de interpolación de clase $Q = (0, 0, 0, 0)$, que corresponde al problema de interpolación de Lagrange de 4 nodos

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de matrices de interpolación de clase $Q' = (0, 1, 2, 3)$ tiene 75 elementos (prescindiendo de columnas finales totalmente nulas). La única matriz de una fila es $E_5 = (1, 1, 1, 1)$, hay 14 matrices de 2 filas, 36 de 3 filas y 24 matrices de 4 filas, que se obtienen permutando las filas de

$$E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

3.4.3 K-exceso total de grado

Dada una matriz de interpolación E con n unos, es bien conocido que la cantidad

$$\rho(E) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) - \sum_{e_{ij}=1} j,$$

permite expresar algunas propiedades notables de la interpolación algebraica clásica. En particular, para las matrices de interpolación condicionalmente regulares, $\rho(E)$ es el grado total del determinante de la matriz de Vandermonde generalizada $D(E, X)$ (considerado como función polinómica de los nodos) y la condición $\rho(E) > 0$ es condición necesaria de regularidad condicionada.

En esta sección extendemos la definición de $\rho(E)$ a la interpolación K-algebraica y establecemos la condición $\rho_K(E) > 0$ como condición necesaria de K-regularidad condicionada.

En el capítulo anterior hemos denominado a $\rho(E)$ *exceso total de grado*, cuando generalizamos la definición al problema K-algebraico, podemos ver que esta denominación está claramente justificada.

Definición 3.5 *Sea E una matriz de interpolación, $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ su sistema de órdenes de derivación y $K = (k_1, \ldots, k_n)$ un sistema de grados. Denominamos exceso total de grado de la matriz de interpolación E respecto* *del sistema de grados K (o más brevemente, K-exceso total de grado de E) al entero*

$$\rho_K(E) = \sum (K - Q(E)) = \sum_{j=1}^{n} (k_j - q_j) \,.$$

Notemos que la definición del K-exceso de grado se ha hecho mediante el sistema de órdenes de derivación de E, por lo tanto, todas las matrices de interpolación de clase Q comparten el mismo K-exceso total de grado.

Dado un sistema de n órdenes de derivación Q y un sistema de n grados, representamos por $\rho_K(Q)$ el K-exceso total de grado de las matrices de interpolación de clase Q.

Emplearemos la expresión: *E tiene K-exceso de grado* para indicar que K es una sistema de $|E|$ grados y que $\rho_K(E) \geq 0$. Análogamente, diremos que un sistema de n órdenes de derivación Q tiene K-exceso total de grado para indicar que K es un sistema de n grados y que se cumple $\rho_K(Q) \geq 0$. Dada una n-pla $T = (t_1, \ldots, t_n)$, si no hay riesgo de confusión, empleamos la notación $\sum T$ para representar $\sum_{j=1}^{n} t_j$.

Proposición 3.3 *Sea Q un sistema de n órdenes de derivación y K un sistema de n grados. Si se verifica $\rho_K(Q) < 0$, entonces toda matriz de interpolación de clase Q es totalmente K-singular.*

Demostración. Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, $K = (k_1, \ldots, k_n)$ y E una matriz de interpolación de clase Q. Si $\rho_K(Q)$ es estrictamente negativo, entonces existe un par $k_{j_0} < q_{j_0}$ y se cumple $k_1 < \cdots < k_{j_0} < q_{j_0}$.

Si disponemos la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ según grados crecientes y organizamos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según órdenes de derivación no decrecientes (podemos tomarlos, por ejemplo, según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia de la segunda componente), la matriz de Vandermonde generalizada $V(E, K, X)$ tiene entonces la siguiente estructura

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc|ccc} x^{k_1} & \cdots & x^{k_{j_0}} & x^{k_{j_0+1}} & \cdots & x^{k_n} \end{array} \\
\begin{array}{c} q_1 \\ \vdots \\ q_{j_0-1} \\ \hline q_{j_0} \\ \vdots \\ q_n \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c} \quad * \quad & \quad * \quad \\ \hline \quad 0 \quad & \quad * \quad \end{array} \right)
\end{array} .$$

La submatriz M formada por las j_0 primeras columnas de $V(E, K, X)$ tiene como máximo $j_0 - 1$ filas no nulas. Por lo tanto, se verifica $\mathrm{rang}(M) < j_0$ y, en consecuencia, obtenemos $\mathrm{rang}[V(E, K, X)] < n$. $\square$

Ejemplo 3.4.3 *K-exceso total de grado.*

Sea la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su sistema de órdenes de derivación es $Q(E) = (3, 3, 6, 6, 7)$. Respecto del sistema de grados $K = (0, 1, 2, 3, 4)$, obtenemos

$$\rho_K(E) = \sum [(0, 1, 2, 3, 4) - (3, 3, 6, 6, 7)] = -15.$$

Según la anterior proposición, la matriz de interpolación E es totalmente K-singular, esto es, E es totalmente singular en el contexto de la interpolación algebraica clásica.

Si tomamos el sistema de grados $K' = (3, 4, 5, 6, 7)$, obtenemos

$$\rho_{K'}(E) = \sum [(3, 4, 5, 6, 7) - (3, 3, 6, 6, 7)] = 0.$$

En principio, E podría ser K'-regular condicionada, aunque tal como se verá en el capítulo siguiente, E es totalmente singular respecto de K' por no verificar la K'-condición de Pólya.

Finalmente, si tomamos $K'' = (3, 4, 6, 7, 8)$, resulta

$$\rho_{K''}(E) = \sum [(3, 4, 6, 7, 8) - (3, 3, 6, 6, 7)] = 3.$$

Veremos en el capítulo siguiente que K'' es el menor sistema de grados (con la mayoración uniforme de n-plas) respecto del cual la matriz de interpolación E es condicionalmente regular. $\square$

3.5 Transformación de nodos

Entre las numerosas dificultades que presenta el estudio de la interpolación K-algebraica destaca el hecho de que la existencia y unicidad de soluciones se ve afectada por las transformaciones afines de los nodos. En un principio, esto parece conducirnos a que el estudio de la K-regularidad sobre cada intervalo $[a, b]$ sea un caso particular.

Podemos ver de forma simple que el problema K-algebraico no admite traslaciones de nodos observando que cuando se realiza un cambio de variable $y = x + c$ en un polinomio $q(y) \in \mathcal{P}_K(\mathbb{R})$, se obtiene un polinomio $p(x) = q(x + c)$ que, en general, no es combinación lineal de las potencias x^{k_j}.

Afortunadamente, el problema K-algebraico sí admite las homotecias de los nodos. Esta propiedad es de gran importancia, pues va a permitirnos reducir los problemas de interpolación K-algebraica sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$ a problemas K-algebraicos sobre el intervalo $[0, 1]$.

En la siguiente proposición se muestra como se ve afectado el determinante $D(E, K, X)$ cuando se efectúa una homotecia sobre los nodos.

Proposición 3.4 *Sea K un sistema de n grados, Q un sistema de n órdenes de derivación, E una matriz de interpolación de clase Q y β una constante no nula. Se verifica*

$$D(E, K, \beta X) = \beta^{\rho_K(Q)} D(E, K, X) \tag{3.4}$$

donde $\rho_K(Q)$ es el K-exceso total de grado de Q.

Demostración. Supongamos que $D(E, K, X)$, considerado como función de los nodos, es idénticamente nulo. Entonces, $D\left(E, K, \beta X,\right)$ también es idénticamente nulo y se cumple (3.4) de forma trivial.

Supongamos ahora que $D(E, K, X)$ no es idénticamente nulo y sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$. Según hemos visto en la Proposición 3.3, el sistema de órdenes de derivación Q tiene K-exceso total de grado (esto es, se cumple $\rho_K(Q) \geq 0$). Si E es una matriz de clase Q con m filas, veamos que en este caso el determinante $D(E, K, X)$ es un polinomio homogéneo en $x_1, \ldots, x_m$ de grado total $\rho_K(Q)$.

En efecto, con una ordenación de los elementos $e_{ij} = 1$ según órdenes de derivación no decrecientes, la fila i-ésima de matriz de la Vandermonde generalizada $V(E, K, X)$ es de la forma

$$\left(\frac{t_i^{k_1 - q_i}}{(k_1 - q_i)!} \quad \frac{t_i^{k_2 - q_i}}{(k_2 - q_i)!} \quad \cdots \quad \frac{t_i^{k_n - q_i}}{(k_n - q_i)!} \right),$$

donde t_i es una de las variables $x_1, \ldots, x_m$. El determinante $D(E, K, X)$ es suma de términos de la forma

$$\alpha\, t_1^{k_{\sigma(1)} - q_1}\ t_2^{k_{\sigma(2)} - q_2} \cdots t_n^{k_{\sigma(n)} - q_n} \tag{3.5}$$

donde α es una constante, que es nula cuando alguno de los $k_{\sigma(j)} - q_i$ es negativo, cada t_i es una de las variables $x_1, \ldots, x_m$ y σ es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$.

Los términos (3.5) no nulos son de grado total

$$\sum_{i=1}^{n} \left(k_{\sigma(i)} - q_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (k_i - q_i) = \rho_K(Q).$$

El determinante $D(E, K, X)$ es suma de términos de la forma (3.5) y, como por hipótesis no es idénticamente nulo, resulta ser un polinomio homogéneo en $x_1, \ldots, x_m$ de grado total $\rho_K(Q)$. $\square$

Un problema de interpolación K-algebraica regular con nodos en $[0, b]$ puede transformarse, mediante una homotecia de razón positiva, en un problema K-algebraico con nodos en $[0, 1]$.

Proposición 3.5 *Sea E una matriz de interpolación con m filas, X un sistema de m nodos en $[0, b]$, $b > 0$, K un sistema de $|E|$ grados y $Y = \frac{1}{b}X$. Se cumple: (i) El par de interpolación (E, Y) es K-regular si y solo si (E, X) es K-regular. (ii) Si el par (E, X) es regular, entonces, para cada sistema de valores $C = (c_{ij} : e_{ij} = 1)$, el polinomio que soluciona el problema de interpolación K-algebraica (E, K, X, C) es $p(x) = q\left(\frac{x}{b}\right)$, donde $q(y)$ es la solución del problema de interpolación $\left(E, K, Y, \bar{C}\right)$ con $\bar{c}_{ij} = b^j c_{ij}$ para $e_{ij} = 1$.*

Demostración. (i) De la Proposición 3.4, obtenemos

$$D(E, K, Y) = \left(\frac{1}{b}\right)^{\rho_K(E)} D(E, K, X)$$

y, por lo tanto, el determinante $D(E, K, Y)$ es nulo si y sólo si $D(E, K, X)$ es nulo. (ii) El polinomio interpolador $q(y)$ existe por ser (E, Y) K-regular. Si el sistema de grados es $K = (k_1, \ldots, k_n)$, entonces es $q(y) \in \left\langle y^{k_1}, \ldots, y^{k_n}\right\rangle$, de donde obtenemos

$$p(x) = q\left(\frac{x}{b}\right) \in \left\langle x^{k_1}, \ldots, x^{k_n}\right\rangle.$$

Finalmente, para cada elemento $e_{ij} = 1$ de E, se cumple

$$D_x^{(j)} p(x_i) = D_y^{(j)} q(y_i)\, \frac{1}{b^j} = \bar{c}_{ij} \frac{1}{b^j} = c_{ij}.$$

Por lo tanto, el polinomio $p(x)$ es la solución del problema de interpolación (E, K, X, C). $\square$

Ejemplo 3.5.1 *Transformación de un problema de interpolación K-algebraica con nodos en $[0,b]$ al intervalo $[0,1]$.*

Tomamos, como en el Ejemplo 3.2.1, $K=(1,2,5,6)$, la matriz de interpolación

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el sistema de nodos $X=(0,1,2)$ y el sistema de valores C formado por

$$c_{11}=1, \quad c_{15}=4, \quad c_{21}=0, \quad c_{35}=6.$$

Con la transformación $Y=\frac{1}{2}X$, transportamos los nodos al intervalo $[0,1]$. Los nuevos nodos son $Y=(0,1/2,1)$. La matriz de Vandermonde generalizada de la terna (E,K,Y) es

$$V(E,K,Y)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/384 & 1/3840 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y el sistema de valores $\bar{C}$ está formado por los valores

$$\bar{c}_{11}=1, \quad \bar{c}_{15}=128, \quad \bar{c}_{21}=0, \quad \bar{c}_{35}=192.$$

El polinomio $q(y)$, que soluciona el problema de interpolación $(E,K,Y,\bar{C})$, queda definido implícitamente por la ecuación

$$\begin{vmatrix} y & y^2/2! & y^5/5! & y^6/6! & q(y) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 128 \\ 1 & 1/2 & 1/384 & 1/3840 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 192 \end{vmatrix}=0.$$

Calculando el determinante y despejando $q(y)$, resulta

$$q(y)=2y-\frac{47}{20}y^2+\frac{16}{15}y^5+\frac{4}{45}y^6.$$

Finalmente, si realizamos la sustitución $y=x/2$ en $q(y)$, obtenemos

$$p(x)=q\left(\frac{x}{2}\right)=x-\frac{47}{80}x^2+\frac{1}{30}x^5+\frac{1}{720}x^6. \quad \square$$

Dado un problema de interpolación (E, K, X, C) regular con nodos en el intervalo $[a, 0]$, también es posible realizar una homotecia de nodos que transforme el problema original en otro con nodos en el intervalo $[0, 1]$. Sin embargo, observamos que al tratarse de una homotecia de razón negativa, se produce una inversión del orden de los nodos.

Con vistas a una reducción de los problemas de K-regularidad ordenada sobre $[a, 0]$ al intervalo $[0, 1]$, modificamos el problema transformado realizando una inversión del orden de los nodos y de las filas de la matriz de interpolación.

Para una matriz de interpolación $E = (e_{ij})$ con m filas y c columnas, definimos la matriz $\widehat{E} = (\hat{e}_{ij})$ que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E, esto es

$$\hat{e}_{ij} = e_{m-i+1,j} \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 0, \ldots, c-1.$$

Dado un sistema de m nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$, empleamos una notación análoga $\widehat{X} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_m)$ para designar el sistema que se obtiene invirtiendo el orden de los nodos de X, es decir, $\hat{x}_i = x_{m-i+1}$ para $i = 1, \ldots, m$.

Proposición 3.6 *Sea $E = (e_{ij})$ una matriz de interpolación con m filas, X un sistema de m nodos en el intervalo $[a, 0]$, $a < 0$, K un sistema de $|E|$ grados, $Y = \frac{1}{a}X$, $\widehat{E}$ la matriz que resulta de invertir el orden de la filas de E y $\widehat{Y}$ el sistema de nodos que se obtiene invirtiendo el orden de los nodos de Y. Se cumple: (i) El par (E, X) es K-regular si y sólo si el par $\left(\widehat{E}, \widehat{Y}\right)$ es K-regular. (ii) Si el par (E, X) es K-regular, entonces, para cada sistema de valores $C = (c_{ij} : e_{ij} = 1)$, el polinomio que soluciona el problema (E, K, X, C) puede escribirse en la forma $p(x) = q(\frac{x}{a})$, donde $q(y)$ es la solución del problema de interpolación $\left(\widehat{E}, K, \widehat{Y}, \widehat{C}\right)$ con $\hat{c}_{ij} = a^j c_{m-i+1,j}$ para $\hat{e}_{ij} = 1$.*

Demostración. (i) Si razonamos como en la demostración de la Proposición 3.5, se obtiene que el determinante $D(E, K, X)$ se anula si y sólo si el determinante $D(E, K, Y)$ se anula. La fila correspondiente a un $\hat{e}_{ij} = 1$ en la matriz de Vandermonde generalizada $V(\hat{E}, K, \hat{Y})$ es de la forma

$$\left(\frac{\hat{x}_i^{k_1-j}}{(k_1-j)!}, \ldots, \frac{\hat{x}_i^{k_n-j}}{(k_n-j)!} \right) = \left(\frac{x_{m-i+1}^{k_1-j}}{(k_1-j)!}, \ldots, \frac{x_{m-i+1}^{k_n-j}}{(k_n-j)!} \right)$$

y coincide con la fila correspondiente al elemento $e_{m-i+1,j} = 1$ de la matriz $V(E, K, Y)$, por lo tanto, los determinantes $D(E, K, Y)$ y $D(\widehat{E}, K, \widehat{Y})$ difieren a lo sumo en el signo. (ii) Si (E, X) es K-regular, hemos visto que $\left(\widehat{E},\widehat{Y}\right)$ es K-regular. Sea $q(y)$ la solución de $\left(\widehat{E},K,\widehat{Y},\widehat{C}\right)$, entonces $q(y)\in\left\langle y^{k_1},\dots,y^{k_n}\right\rangle$ y resulta

$$p(x)=q\left(\frac{x}{a}\right)\in\left\langle x^{k_1},\dots,x^{k_n}\right\rangle.$$

Además, se cumple

$$\begin{aligned} D_x^{(j)}p(x_i) &= D_y^{(j)}q(y_i)\left(\frac{1}{a}\right)^j=D_y^{(j)}q(\hat{y}_{m-i+1})\left(\frac{1}{a}\right)^j \\ &= \hat{c}_{m-i+1,j}\left(\frac{1}{a}\right)^j=a^jc_{ij}\left(\frac{1}{a}\right)^j=c_{ij}. \quad \square \end{aligned}$$

Ejemplo 3.5.2 *Transformación de un problema de interpolación K-algebraica con nodos en el intervalo* $[a,0]$ *al intervalo* $[0,1]$.

Consideremos el problema de interpolación (E,K,X,C) definido por el sistema de grados $K=(1,3,5,6)$, la matriz de interpolación

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el sistema de nodos $X=(-2,-1,0)$ y el sistema de valores C formado por

$$c_{11}=1,\quad c_{22}=3,\quad c_{23}=4,\quad c_{33}=2.$$

La solución del problema (E,K,X,C) está determinada implícitamente por la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & x^3/3! & x^5/5! & x^6/6! & p(x) \\ 1 & 2 & 2/3 & -4/15 & 1 \\ 0 & -1 & -1/6 & 1/24 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/6 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Desarrollando este determinante y despejando $p(x)$, obtenemos

$$p(x)=-\frac{119}{5}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{10}x^5-\frac{17}{30}x^6.$$

Vemos que $p(x)\in\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ y es inmediato comprobar que se verifica

$$p'(-2)=1,\quad p''(-1)=3,\quad p'''(-1)=4,\quad p'''(0)=2.$$

Consideramos ahora el problema $\left(\widehat{E},K,\widehat{Y},\widehat{C}\right)$, donde $\widehat{E}$ se obtiene invirtiendo el orden de filas en E

$$\widehat{E}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

El sistema de nodos $\widehat{Y}$ se obtiene aplicando la transformación

$$Y=\frac{1}{(-2)}X=(1,1/2,0)\,,$$

e invirtiendo el orden en Y, esto es, $\widehat{Y}=(0,1/2,1)$. Finalmente, los valores $\widehat{C}$ son

$$\begin{aligned}\hat{c}_{13}&=(-2)^3\,c_{33}=-16,\\ \hat{c}_{22}&=(-2)^2\,c_{22}=12,\\ \hat{c}_{23}&=(-2)^3\,c_{23}=-32,\\ \hat{c}_{31}&=(-2)^1\,c_{11}=-2.\end{aligned}$$

El polinomio $q(y)$ que soluciona el problema $\left(\widehat{E},K,\widehat{Y},\widehat{C}\right)$ está definido implícitamente por la ecuación

$$\begin{vmatrix}y&y^3/3!&y^5/5!&y^6/6!&q(y)\\0&1&0&0&-16\\0&1/2&1/48&1/384&12\\0&1&1/8&1/48&-32\\1&1/2&1/24&1/120&-2\end{vmatrix}=0,$$

de donde resulta

$$q(y)=\frac{238}{5}y-\frac{8}{3}y^3+\frac{176}{5}y^5-\frac{544}{15}y^6.$$

Si realizamos la sustitución $y=x/(-2)$ en $q(y)$, obtenemos

$$p(x)=q\left(x/(-2)\right)=-\frac{119}{5}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{10}x^5-\frac{17}{30}x^6.\quad\square$$

3.6 Regularidad en intervalos $[a,0]$ y $[0,b]$.

A partir de las proposiciones de la sección anterior, es sencillo ver que el estudio de la K-regularidad y la K-regularidad ordenada sobre intervalos

$[a, 0]$ y $[0, b]$ puede reducirse al estudio sobre el intervalo $[0, 1]$. En cuanto a la regularidad condicionada, veremos en el capítulo siguiente que ésta es independiente del intervalo.

Proposición 3.7 *Una matriz de interpolación E es K-regular (K-regular ordenada) sobre el intervalo $[0, b]$, $b > 0$, si y sólo si E es K-regular (K-regular ordenada) en $[0, 1]$.*

Demostración. Supongamos que E es K-regular en $[0, 1]$. Para cada sistema de nodos X en $[0, b]$, determinamos el sistema de nodos $Y = \left(\frac{1}{b}\right) X$ en $[0, 1]$ y obtenemos

$$D(E, K, X) = b^{\rho_K(E)}\, D\,(E, K, Y) \neq 0.$$

Por lo tanto, E es K-regular en $[0, b]$. Recíprocamente, si E es K-regular en $[0, b]$, para cada sistema de nodos Y en $[0, 1]$, tomamos el sistema de nodos $X = bY$ en $[0, b]$ y de la relación

$$D\,(E, K, Y) = \left(1/b^{\rho_K(E)}\right) D(E, K, X),$$

resulta que E es K-regular en $[0, 1]$. En cuanto a la K-regularidad ordenada, basta con observar que las transformaciones $Y = \left(\frac{1}{b}\right) X$, $X = bY$ con $b > 0$, conservan la ordenación de nodos. $\square$

Proposición 3.8 *Una matriz de interpolación E es K-regular (K-regular ordenada) sobre el intervalo $[a, 0]$, $a < 0$, si y sólo si la matriz de interpolación $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas en E, es K-regular (K-regular ordenada) en $[0, 1]$.*

Demostración. Supongamos que $\widehat{E}$ es K-regular ordenada en $[0, 1]$ y sea X un sistema de nodos en $[a, 0]$ que verifica $x_1 < \cdots < x_m$. Los nodos del sistema $\widehat{Y}$ que se obtiene invirtiendo el orden en $Y = (1/a)\, X$ están en $[0, 1]$ y verifican $\hat{y}_1 < \cdots < \hat{y}_m$. Por lo tanto, el par $(E, \widehat{Y})$ es K-regular y según la Proposición 3.6 , el par (E, X) es K-regular. Para demostrar el recíproco, basta con tomar el sistema de nodos X en $[0, 1]$ y construir $\widehat{Y}$ en $[a, 0]$ invirtiendo el orden del sistema de nodos $Y = aX$. Para demostrar el caso K-regular, basta con suprimir la condición $x_1 < \cdots < x_m$. $\square$

3.7 Interpolación K-algebraica de Lagrange

Un problema de interpolación de Lagrange tienen únicamente órdenes de derivación nulos. En [31] (Davis 1975, pág. 31), encontramos un ejemplo de interpolación de Lagrange sobre el espacio de interpolación $\langle 1, x^2 \rangle$ en el que se observa que el problema es regular en $[0, 1]$ y singular en $[-1, 1]$.

En [60] (Lorentz et al. 1983, pág. 132), se caracteriza la regularidad ordenada de la interpolación de Lagrange sobre espacios de interpolación $\left\langle x^{k_1}, \ldots, x^{k_n} \right\rangle$ con nodos en $[-1, 1]$. El resultado se refiere a los *sistemas de Chebychev* y es una consecuencia del estudio sobre *matrices de interpolación casi simples* (una fila es simple si tiene exactamente un uno, una matriz casi simple tiene como máximo una fila no simple.)

Proposición 3.9 *Sea $\mathcal{G}$ el sistema de funciones $g_1(x) = x^{k_1}, \ldots, g_n(x) = x^{k_n}$, donde $0 \leq k_1 < \cdots < k_n$ son enteros. $\mathcal{G}$ es un sistema de Chebychev en $[-1, 1]$ si y sólo si $k_1 = 0$ y todas las diferencias $k_j - k_{j-1}, j = 1, \ldots, n$, son impares.*

Teniendo en cuenta que un sistema de funciones linealmente independientes $\mathcal{G} = (g_1, \ldots, g_n)$ es un *sistema de Chebychev* en $[a, b]$ si y sólo si la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación de Lagrange de n nodos sobre el espacio de interpolación $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}(\mathbb{R})$ es regular sobre $[a, b]$, está claro que la proposición anterior caracteriza la K-regularidad del problema de interpolación K-algebraica de Lagrange sobre $[-1, 1]$.

A la vista de la Proposición 3.9 puede parecer que, en principio, los espacios $\left\langle x^{k_1}, \ldots, x^{k_n} \right\rangle$ no son adecuados como espacios de interpolación. No obstante, cuando nos restringimos a intervalos de la forma $[a, 0]$ o $[0, b]$ (donde los nodos no pueden cambiar de signo), vemos que la situación mejora enormemente.

En la siguiente proposición establecemos una condición necesaria y suficiente muy poco restrictiva para la K-regularidad del problema de interpolación K-algebraica de Lagrange sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$. En capítulos posteriores veremos que, cuando nos restringimos a intervalos de la forma $[a, 0]$ o $[0, b]$, es posible llevar a cabo una generalización casi completa de los principales resultados de la interpolación algebraica de Birkhoff y formular resultados análogos para la interpolación K-algebraica de Birkhoff.

Proposición 3.10 *Sea E una matriz de interpolación de Lagrange con n unos, $K = (k_1, \ldots, k_n)$ un sistema de grados e I un intervalo de la forma $[a, 0]$ o $[0, b]$. E es K-regular sobre I si y sólo si $k_1 = 0$.*

Demostración. En este caso la matriz E no varía si invertimos el orden de filas. Observando los resultados de la Sección 3.6, resulta que E es K-regular sobre I si y sólo si lo es sobre $[0, 1]$.

Veamos ahora que si $k_1 \neq 0$, entonces E es K-singular. Para ello nos basta con tomar un nodo $x_j = 0$ y observar que, en tal caso, la fila correspondiente en la matriz de Vandermonde generalizada es totalmente nula.

Finalmente, supongamos $k_1 = 0$ y veamos que E es regular en $[0, 1]$. La demostración de esta parte se basa en la inexistencia de polinomios anuladores no triviales. En el caso de la interpolación K-algebraica, la caracterización de la regularidad mediante polinomios anuladores queda como sigue: *la matriz de interpolación E es K-regular en $[a, b]$ si y sólo si, para cada sistema admisible de nodos X en $[a, b]$, el único polinomio $p(x)$ de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$, que es anulador del par (E, X), es el polinomio idénticamente nulo.*

Sea $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de nodos en $[0, 1]$ y $p(x)$ un polinomio no idénticamente nulo del espacio generado por 1, $x^{k_2}, \ldots, x^{k_n}$, que es anulador del par (E, X), esto es, $p(x)$ verifica $p(x_i) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Consideramos dos casos: (i) Existe un nodo nulo $x_j = 0$. (ii) Todos lo nodos son positivos.

En el caso (i), resulta $p(x) = a_2 x^{k_2} + \cdots + a_n x^{k_n}$. Observamos que $p(x)$ tiene a lo sumo $n - 1$ coeficientes (no nulos) y que, entre ellos, se pueden producir como máximo $n - 2$ cambios de signo. Entonces, $p(x)$ tiene como máximo $n - 2$ raíces positivas, esto es, como máximo $n - 1$ raíces en $[0, 1]$, lo que contradice que sea anulador de (E, X).

En el caso (ii), $p(x)$ es de la forma $p(x) = a_1 + a_2 x^{k_2} + \cdots + a_n x^{k_n}$. Ahora $p(x)$ tiene a lo sumo n coeficientes (no nulos) y, entre ellos, pueden producirse como máximo $n - 1$ cambios de signo. Por lo tanto, $p(x)$ tiene a lo sumo $n - 1$ raíces positivas y no puede ser anulador de (E, X). $\square$