Capítulo 5

K-regularidad ordenada

5.1 Introducción

El Teorema de Atkinson-Sharma (1969, [10]) es uno de los resultados más relevantes de la interpolación algebraica de Birkhoff, en él se establece la regularidad ordenada de las matrices de interpolación de Pólya que carecen de secuencias impares soportadas.

En este capítulo se determinan condiciones suficientes para la K-regularidad ordenada de matrices de interpolación que verifican la K-condición de Pólya, los resultados obtenidos generalizan el Teorema de Atkinson-Sharma a la interpolación K-algebraica. Se estudia, asimismo, la K-regularidad de los problemas de 1 nodo y la K-regularidad ordenada de problemas de 2 nodos, problemas hermitianos y casi-hermitianos.

Inicialmente, el estudio se centra en el intervalo $[0, 1]$; posteriormente, las propiedades establecidas en la Secciones 3.5 y 3.6, relativas a las transformaciones de nodos de los problemas K-algebraicos, nos permiten extender los resultados a los intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$.

En la Sección 5.2 se introduce la *propiedad K-inclusiva* $Q(E) \subseteq K$ como condición necesaria de K regularidad sobre conjuntos que contienen el 0 (Palacios y Rubió, 1997 [71]) y la *propiedad K-inclusiva ordenada* $Q_1(E) \subseteq K$ como condición necesaria de K-regularidad ordenada sobre $[0, 1]$, donde $Q_1(E)$ es el sistema de órdenes de derivación especificados por la primera fila de E. La propiedad K-inclusiva ordenada es un elemento importante en las demostraciones de K-regularidad ordenada sobre $[0, 1]$, pues nos permite extender el problema K-algebraico adecuadamente hasta obtener un problema algebraico asociado sobre el que podemos aplicar las propiedades conocidas de la interpolación algebraica de Birkhoff.

La Sección 5.3 se centra en el estudio de la K-regularidad de los problemas algebraicos de 1 nodo (Palacios y Rubió, 1997 [71]). En este caso, la condición K-inclusiva es condición necesaria y suficiente de K-regularidad sobre cualquier conjunto que contenga al 0. Sobre conjuntos que no contienen al 0, la K-condición de Pólya caracteriza la K-regularidad.

En la Sección 5.4 se estudia la K-regularidad ordenada de problemas de 2 nodos que verifican la K-condición de Pólya. No es posible establecer, en este caso, un resultado general sobre el intervalo [0,1]. Para sistemas de nodos del tipo $0 = x_1 < \cdots < x_m$, la propiedad K-inclusiva ordenada caracteriza la regularidad del problema (E, K, X). En el caso $0 < x_1 < \cdots < x_m$, el problema queda abierto, pues se muestra que este problema es equivalente al problema de la regularidad ordenada de la interpolación algebraica de 3 nodos.

La Sección 5.5 se ocupa de la K-regularidad ordenada de matrices de interpolación hermitianas. Para este tipo de matriz de interpolación siempre se verifica la K-condición de Pólya, y la propiedad K-inclusiva ordenada caracteriza la K-regularidad ordenada sobre intervalos del tipo $[0, b]$. Sobre intervalos de la forma $[a, 0]$, una matriz hermitiana E es K-regular ordenada si y sólo si la matriz $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E, es K-inclusiva ordenada.

En la Sección 5.6 se obtienen, para matrices de interpolación casi-hermitianas que verifican la K-condición de Pólya, resultados análogos a los obtenidos en el problema de dos nodos. Esto es, la regularidad de los problemas (E, K, X) con $0 = x_1 < \cdots < x_m$ queda caracterizada por la propiedad K-inclusiva ordenada; en el caso $0 < x_1 < \cdots < x_m$, el problema queda abierto.

Finalmente, en la Sección 5.7, se presenta la *generalización del Teorema de Atkinson-Sharma a la interpolación K-algebraica.* La generalización se apoya en el concepto de *secuencia K-soportada* que, brevemente, puede definirse como sigue: dada una matriz de interpolación E, sea k_1^* el primer grado ausente en K; construimos la matriz $\bar{E}$ que se obtiene añadiendo a E una primera fila con un único uno en la posición k_1^*, entonces, una secuencia de E está K-soportada si la correspondiente secuencia en $\bar{E}$ está soportada. Sobre el intervalo $[0, b]$, una matriz de interpolación que cumple la K-condición de Pólya es K-regular ordenada si cumple la condición K-inclusiva ordenada y carece de secuencias impares K-soportadas. Si el intervalo es de la forma $[a, 0]$, el criterio se aplica a la matriz $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas en E.

5.2 La propiedad de inclusión

5.2.1 K-inclusión

En la interpolación algebraica clásica, la condición de Pólya es condición necesaria y suficiente de regularidad condicionada. Para una matriz de interpolación E con n unos, el sistema de grados es $K_{n-1} = (0, 1, \ldots, n-1)$ y la condición de Pólya puede expresarse en la forma $Q(E) \leq (0, 1, \ldots, n-1)$. De ahí resulta que, en el problema algebraico clásico, los órdenes de derivación prescritos por una matriz condicionalmente regular deben coincidir con alguno de los grados.

En la interpolación K-algebraica la situación es distinta; una matriz de interpolación puede verificar la K-condición de Pólya y, no obstante, indicar órdenes de derivación distintos de los elementos de K.

El hecho de que los órdenes de derivación especificados por E se encuentren entre los grados de K es una propiedad importante en la K-regularidad. En esta sección formalizamos estas ideas mediante la definición de la *propiedad K-inclusiva* y mostramos que tal propiedad es condición necesaria para la K-regularidad sobre conjuntos que contienen el 0.

Definición 5.1 *Dadas $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ y $K = (k_1, \ldots, k_r)$, decimos que la n-pla Q está incluida en la r-pla K si se cumple*

$$\{q_j : j = 1, \ldots, n\} \subseteq \{k_j : j = 1, \ldots, r\}.$$

En ese caso, escribimos $Q \subseteq K$.

Definición 5.2 *Sea K un sistema de grados. Un sistema de órdenes de derivación Q verifica la propiedad inclusiva respecto de K (o más brevemente, propiedad K-inclusiva) si se verifica $Q \subseteq K$. Una matriz de interpolación E es K-inclusiva si se verifica $Q(E) \subseteq K$.*

Proposición 5.1 *Sea E una matriz de interpolación, K un sistema de $|E|$ grados y A un conjunto de números reales tal que $0 \in A$. Si E no es K-inclusiva, entonces E es K-singular en A.*

Demostración. Sea $n = |E|$, $K = (k_1, \ldots, k_n)$ y m el número de filas de E; obviamente, suponemos que A tiene al menos m elementos distintos. Si $Q(E) \not\subseteq K$, entonces existe un elemento $e_{ij} = 1$ en E tal que $j \neq k_s$ para

$s = 1, \ldots, n$. Tomamos un sistema de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$ con $x_i = 0$ y los restantes nodos distintos en A. La fila correspondiente a $e_{ij} = 1$ en la matriz de Vandermonde generalizada $V(E, K, X)$ es completamente nula y, en consecuencia, E es K-singular en A. $\square$

Ejemplo 5.2.1 *Matrices de interpolación K-inclusivas.*

Si consideramos el sistema de grados

$$K = (0, 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15),$$

la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es K-inclusiva, pues su sistema de órdenes de derivación es

$$Q(E) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 3)$$

y verifica

$$Q(E) = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 3) \subseteq (0, 1, 3, 7, 9, 11, 13, 15) = K.$$

Respecto del sistema de grados $K' = (0, 1, 3, 4, 6)$, la matriz de interpolación

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es K'-singular en $[0, 1]$, pues se cumple

$$Q(E') = (0, 0, 2, 3, 3) \nsubseteq (0, 1, 3, 4, 6) = K.$$

Para la matriz de interpolación

$$E'' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema de órdenes de derivación $Q(E'') = (0, 0, 1, 3, 4)$, que verifica $Q(E'') \subseteq K'$. Por lo tanto, E'' podría ser K'-regular en [0,1] (de hecho, es K'-regular). $\square$

5.2.2 K-inclusión ordenada

Dada una matriz de interpolación E, representamos por $Q_1(E)$ el sistema de órdenes de derivación especificados por la primera fila de E. Apoyándonos en $Q_1(E)$, definimos la *inclusividad ordenada* de una matriz de interpolación respecto de un sistema de grados. Esta propiedad es condición necesaria para la *K-regularidad ordenada* de una matriz de interpolación sobre $[0,1]$.

Definición 5.3 *Sea E una matriz de interpolación, $Q_1(E)$ el sistema de órdenes de derivación especificados por la primera fila de E y K un sistema de $|E|$ grados. Decimos que E cumple la condición inclusiva ordenada respecto de K (E es K-inclusiva ordenada) si se verifica $Q_1(E) \subseteq K$.*

Proposición 5.2 *Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de $|E|$ grados. Si E no es K-inclusiva ordenada, entonces E es K-singular ordenada en $[0,1]$.*

Demostración. Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$ y m el número de filas de E. Si se verifica $Q_1(E) \not\subseteq K$, entonces existe un elemento $e_{1j} = 1$ de E tal que $j \neq k_s$ para $s = 1, \ldots, n$. Consideramos un sistema de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$ con $x_1 = 0$; los restantes nodos toman valores crecientes $x_2 < \cdots < x_m$ en $(0,1]$. La fila correspondiente a $e_{1j} = 1$ en la matriz de Vandermonde generalizada $V(E,K,X)$ es completamente nula y, en consecuencia, la matriz de interpolación E es K-singular ordenada en $[0,1]$. $\square$

Ejemplo 5.2.2 *K-inclusión ordenada.*

Consideramos el sistema de grados $K = (0,1,3,4,8)$. La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es K-singular ordenada en $[0,1]$, pues se verifica

$$Q_1(E) = (0,2,3) \not\subseteq (0,1,3,4,8) = K.$$

Para la matriz de interpolación

$$E' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$Q_1(E') = (0, 1) \subseteq (0, 1, 3, 4, 8) = K.$$

Por lo tanto, E' es K-inclusiva ordenada y pudiera ser K-regular ordenada en [0,1] (de hecho lo es). Observemos que E' no es K-inclusiva y, por lo tanto, E' es K-singular en $[0, 1]$. $\square$

5.3 Problemas de 1 nodo

En esta sección abordamos el estudio de la K-regularidad para matrices de interpolación de una fila. En este caso simple, el problema puede resolverse completamente.

Si el nodo no es nulo, la K-condición de Pólya caracteriza la K-regularidad.

Proposición 5.3 *Sea K un sistema de n grados, E una matriz de interpolación de una fila con n unos y $X = (x)$ un sistema de un nodo con $x \neq 0$. El par (E, X) es K-regular si y sólo si E verifica la K-condición de Pólya.*

Demostración. Sabemos que la K-condición de Pólya es condición necesaria para la K-regularidad; veamos que, en este caso, también es suficiente. En efecto, si E es una matriz que verifica la K-condición de Pólya, hemos visto en la Proposición 4.9, que el determinante de la matriz de Vandermonde generalizada se puede escribir en la forma $D(E, K, X) = \alpha\ x^{\rho_K(E)}$, donde α es una constante no nula y $\rho_K(E)$ es el K-exceso de grado de E. Como $x \neq 0$, el par (E, X) es K-regular. $\square$

Cuando el nodo es nulo, la propiedad K-inclusiva nos permite caracterizar la K-regularidad.

Proposición 5.4 *Sea K un sistema de n grados, E una matriz de interpolación de una fila con n unos y $X = (0)$ un sistema de un nodo. El par (E, X) es K-regular si y sólo si E es K-inclusiva.*

Demostración. Si E no es K-inclusiva, siguiendo un razonamiento análogo al empleado en la demostración de la Proposición 5.1, obtenemos que (E, X) es K-singular.

Supongamos que E es K-inclusiva. Como E tiene una sola fila, $Q(E)$ tiene n elementos distintos que están entre los elementos de K, por lo tanto, $Q(E)$ y

K tienen los mismos elementos. Es más, como ambas n-plas están ordenadas de forma creciente, es $Q(E) = K$.

Observemos que para matrices de una fila, la propiedad K-inclusiva implica el cumplimiento de la K-condición de Pólya. Además, se cumple $\rho_K(E) = 0$ y la Proposición 4.9 nos permite afirmar que el determinante $D(E, K, (x))$ es un polinomio en x de grado cero, esto es, una constante no nula. De ahí obtenemos $D(E, K, (0)) \neq 0$. De hecho, si organizamos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según los valores crecientes de j, entonces la matriz de Vandermonde generalizada $V(E, K, (x))$ es la matriz unitaria de orden n. $\square$

Ejemplo 5.3.1 *Problemas de 1 nodo.*

Tomamos la matriz de interpolación

$$E = (0, 0, 1, 0, 1, 1)$$

y el sistema de grados $K = (4, 6, 8)$. El sistema de órdenes de derivación de E es $Q(E) = (2, 4, 5)$. Para el sistema de nodos $X = (x)$, obtenemos la matriz de Vandermonde generalizada

$$V(E, K, (x)) = \begin{pmatrix} x^2/2! & x^4/4! & x^6/6! \\ 1 & x^2/2! & x^4/4! \\ 0 & x & x^3/3! \end{pmatrix},$$

cuyo determinante $D(E, K, (x))$ es un polinomio homogéneo en x de grado

$$\rho_K(E) = \sum (K - Q(E)) = 18 - 11 = 7.$$

En concreto, es

$$D(E, K, (x)) = \frac{11}{720} x^7.$$

La matriz de interpolación E no es K-inclusiva y es K-singular si la elección $x = 0$ es admisible; no obstante, vemos que E verifica la K-condición de Pólya ($Q(E) \leq K$) y tal como indica la Proposición 5.3, el par $(E, (x))$ es K-regular para cualquier elección $x \neq 0$.

Por otra parte, si fijamos el sistema de grados $K = (4, 6, 8)$ la única matriz de una fila K-inclusiva es

$$\bar{E} = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1).$$

Si disponemos la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ según grados crecientes y los $\bar{e}_{1j} = 1$ de $\bar{E}$ según valores crecientes de j, la matriz de Vandermonde generalizada es

$$V\left(\bar{E}, K, X\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \square$$

La K-regularidad del par (E, X) con E matriz de interpolación de un fila y $X = (x)$ puede resumirse como sigue:

► $x = 0$, $(E,(x))$ K-regular $\Leftrightarrow$ E es K-inclusiva.
► $x \neq 0$, $(E,(x))$ K-regular $\Leftrightarrow$ E verifica K-Pólya.

K-regularidad para problemas de 1 nodo.

En la interpolación algebraica clásica, la regularidad de matrices de interpolación de hasta dos filas queda caracterizada por el cumplimento de las condiciones de Pólya. En el ejemplo anterior podemos ver que existen matrices de interpolación de una fila que son K-singulares a pesar de cumplir la K-condición de Pólya. Es interesante observar el carácter singular que posee el 0 en este problema de regularidad. Esto nos confirma que, en la interpolación K-algebraica, las traslaciones de nodos pueden afectar a la regularidad.

En los problemas K-algebraicos de un nodo, la propiedad K-inclusiva nos permite caracterizar la K-regularidad sobre $\mathbb{R}$.

Proposición 5.5 *Sea K un sistema de n grados y E una matriz de interpolación de una fila con n unos. E es K-regular sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si verifica la propiedad K-inclusiva.*

Demostración. Sea $X = (x)$. Como x puede tomar el valor 0, la propiedad K-inclusiva es condición necesaria para la K-regularidad. Supongamos que E verifica la propiedad K-inclusiva. Si es $x = 0$, la Proposición 5.4 nos asegura que el par (E, X) es K-regular. Cuando $x \neq 0$, razonamos como en la demostración de la Proposición 5.4 y obtenemos que E verifica la K-condición de Pólya; seguidamente, observando la Proposición 5.3, obtenemos que (E, X) es K-regular. □

De la demostración precedente, es inmediato que la propiedad K-inclusiva es condición necesaria y suficiente para la K-regularidad de matrices de interpolación de una fila sobre cualquier conjunto que contenga el 0, en particular, sobre $[0, 1]$.

Proposición 5.6 *Sea K un sistema de n grados y E una matriz de interpolación de una fila con n unos. E es K-regular sobre $[0, 1]$ si y sólo si verifica la propiedad K-inclusiva.*

Demostración. Es análoga a demostración de la Proposición 5.5. □

Sobre conjuntos que no contienen el 0, la K-regularidad de matrices de una fila queda caracterizada por la K-condición de Pólya.

Proposición 5.7 *Sea K un sistema de n grados y E una matriz de interpolación de una fila con n unos y A un conjunto de números reales tal que $0 \notin A$. E es K-regular sobre A si y sólo si verifica la K-condición de Pólya.*

Demostración. Es inmediata observando la Proposición 5.3. □

5.4 Problemas de 2 nodos

En esta sección estudiamos el problema de la K-regularidad ordenada para matrices de interpolación de dos filas. En primer lugar, abordados el problema sobre el intervalo $[0,1]$, posteriormente, extendemos los resultados a intervalos de la forma $[a,0]$ y $[0,b]$.

En la interpolación algebraica clásica, la regularidad de las matrices de interpolación de dos filas queda caracterizada por el cumplimiento de la condición de Pólya.

En la interpolación K-algebraica, la situación es notablemente más compleja. El Ejemplo 5.4.1 nos muestra que la K-condición de Pólya no es suficiente para asegurar la K-regularidad en $[0,1]$. Este hecho no nos sorprende pues, según hemos visto en la sección precedente, la K-condición de Pólya no es suficiente para asegurar la K-regularidad sobre $[0,1]$ en los problemas de 1 nodo.

Ejemplo 5.4.1 *K-regularidad ordenada sobre $[0,1]$ para matrices de interpolación de 2 filas que verifican la K-condición de Pólya.*

Tomamos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema de grados $K_1 = (0,1,2)$. El par (E, K_1) define un problema de interpolación algebraico clásico. El sistema de órdenes de derivación de E es $Q(E) = (0,0,2)$. Vemos que se cumple

$$Q(E) = (0,0,2) \leq (0,1,2) = K_1,$$

por lo tanto, E satisface la condición de Pólya y es regular. Podemos verificar esta circunstancia mediante la matriz de Vandermonde generalizada. Tomamos el sistema de nodos $X = (x_1, x_2)$ y disponemos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del segundo índice. Entonces, la matriz de Vandermonde generalizada es

$$V(E, K_1, X) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2/2! \\ 1 & x_2 & x_2^2/2! \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su determinante toma el valor $D(E, K_1, X) = x_2 - x_1$. Vemos que, efectivamente, $D(E, K_1, X)$ no se anula para ninguna elección admisible del sistema de nodos X.

Tomemos ahora el sistema de grados $K_2 = (0, 1, 3)$. Como es

$$Q(E) = (0, 0, 2) \leq (0, 1, 3) = K_2,$$

la matriz de interpolación E cumple la condición de Pólya respecto de K_2. La matriz de Vandermonde generalizada, es ahora

$$V(E, K_2, X) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^3/3! \\ 1 & x_2 & x_2^3/3! \\ 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

y su determinante toma el valor $D(E, K_2, X) = x_1 (x_2 - x_1)$. Vemos que E no es K-regular en $[0, 1]$, pues el determinante $D(E, K_2, X)$ se anula para los sistemas de nodos $X = (0, x_2)$ con $x_2 \in (0, 1]$. No obstante, observamos que la K_2-singularidad ordenada de E en $[0, 1]$ era previsible, pues E no es K_2-inclusiva ordenada. En efecto, $Q_1 (E) = (0, 2) \not\subseteq (0, 1, 3) = K_2$. $\square$

Si nos centramos en las matrices de dos filas que cumplen la K-condición de Pólya y son K-inclusivas ordenadas, podemos asegurar la K-regularidad ordenada sobre $[0, 1]$ de los pares (E, X) con $X = (x_1, x_2)$ en el caso que $x_1 = 0$.

Proposición 5.8 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación de 2 filas que verifica la K-condición de Pólya y $X = (x_1, x_2)$ con $x_1 = 0$, $x_2 \in (0, 1]$. El par (E, X) es K-regular si y sólo si E es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. Si E no es K-inclusiva ordenada, razonamos como en la demostración de la Proposición 5.2 y obtenemos que el par (E, X) es K-singular para cualquier elección de $x_2 \in (0, 1]$.

Supongamos ahora que la matriz de interpolación E es K-inclusiva ordenada. Sea n el número de unos de E, $K = (k_1, \ldots, k_n)$, F_1 y F_2 las filas de E, n_1 el número de unos en F_1, n_2 el número de unos en F_2, $Q_1(E) = Q(F_1) = \left(q_1^1, \ldots, q_{n_1}^1\right)$ el sistema de órdenes de derivación especificado por F_1 y $Q_2(E) = Q(F_2)$ el sistema de órdenes de derivación designados por la segunda fila de E.

Representamos por K^* el sistema de grados formado por los elementos de K que no están en $Q_1(E)$. Notemos que $Q_1(E)$ está formado por enteros distintos y, por lo tanto, K^* tiene n_2 elementos; sea $K^* = \left(k_1^*, \ldots, k_{n_2}^*\right)$. Organizamos la base del espacio de interpolación $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ en la forma

$$\frac{x^{q_1^1}}{q_1^1!}, \ldots, \frac{x^{q_{n_1}^1}}{q_{n_1}^1!}; \quad \frac{x^{k_1^*}}{k_1^*!}, \ldots, \frac{x^{k_{n_2}^*}}{k_{n_2}^*!},$$

y disponemos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice.

Con esa disposición, la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación $(E, K, (0, x_2))$ tiene la siguiente estructura triangular inferior por bloques

$$V(E, K, X) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \hline M & V(F_2, K^*, (x_2)) \end{array}\right), \tag{5.1}$$

donde I_{n_1} es la matriz unitaria de orden n_1, $\mathbf{0}_{n_1 \times n_2}$ es la matriz nula de dimensiones $n_1 \times n_2$, M es una matriz de dimensiones $n_2 \times n_1$ y $V(F_2, K^*, (x_2))$ es la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación $(F_2, K^*, (x_2))$ para una ordenación adecuada de la base de $\mathcal{P}_{K^*}(\mathbb{R})$ y de los elementos de F_2. Por otra parte, se cumple

$$K = K^* \uplus Q_1(E), \qquad Q(E) = Q(F_2) \uplus Q_1(E).$$

Como $Q(E)$ verifica la condición de Pólya respecto de K, si aplicamos la Proposición 4.7, obtenemos $Q(F_2) \leq K^*$. Finalmente, como $(F_2, K^*, (x_2))$ es un problema K-algebraico de un nodo no nulo que verifica la K^*-condición de Pólya, de la Proposición 5.3 resulta $D(F_2, K^*, (x_2)) \neq 0$ y, en consecuencia, $D(E, K, (0, x_2)) = D(F_2, K^*, (x_2)) \neq 0$. $\square$

Después de los resultados obtenidos en el estudio de la regularidad de problemas de 1 nodo, surge una pregunta natural: *en los problemas de dos* *nodos, ¿son la K-condición de Pólya y la K-inclusividad ordenada condiciones suficientes para K-regularidad ordenada sobre* $[0,1]$*?* El siguiente ejemplo responde negativamente a la cuestión, mostrando que en el caso $0 < x_1 < x_2 \leq 1$, la K-condición de Pólya y la propiedad K-inclusiva ordenada no bastan para asegurar la K-regularidad ordenada del par (E, X).

Ejemplo 5.4.2 *Matriz de 2 filas K-singular ordenada en* $[0,1]$ *que es K-inclusiva ordenada y verifica la K-condición de Pólya.*

Sea la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema de grados $K = (0, 2, 3)$. La matriz de interpolación E verifica la K-condición de Pólya

$$Q(E) = (0, 0, 2) \leq (0, 2, 3) = K$$

y es K-inclusiva ordenada

$$Q_1(E) = (0, 2) \subseteq (0, 2, 3) = K.$$

Tomamos un sistema de dos nodos $X = (x_1, x_2)$ y disponemos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del segundo índice. Entonces, la matriz de Vandermonde generalizada es

$$V\left(E, K, X\right) = \begin{pmatrix} 1 & x_1^2/2! & x_1^3/3! \\ 1 & x_2^2/2! & x_2^3/3! \\ 0 & 1 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Para las elecciones de nodos $X = (x_1, x_2)$ con $x_1 = 0$ y $x_2 \in (0, 1]$, obtenemos

$$V(E, K, X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2^2/2! & x_2^3/3! \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, el determinante toma el valor $D(E, K, X) = -(1/3!)\, x_2^3$ y, por lo tanto, E es K-regular para todas las elecciones admisibles de nodos con primer nodo nulo. Para los sistemas de nodos

$$X = (x_1, x_2), \qquad 0 < x_1 < x_2 \leq 1,$$

podemos realizar una homotecia de nodos y estudiar, sin pérdida de generalidad, las elecciones de nodos $Y = (y, 1)$ con $0 < y < 1$. La matriz de Vandermonde generalizada para este caso es

$$V(E, K, Y) = \begin{pmatrix} 1 & y^2/2! & y^3/3! \\ 1 & 1/2 & 1/3! \\ 0 & 1 & y \end{pmatrix}$$

y su determinante toma el valor

$$D(E, K, Y) = -\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}(y-1)\left(2y^2 + 2y - 1\right).$$

El polinomio $p(y) = 2y^2 + 2y - 1$ se anula para el valor $y = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) \in (0, 1)$. Por lo tanto, la matriz de interpolación E es K-singular ordenada en $[0, 1]$, a pesar de cumplir la K-condición de Pólya y ser K-inclusiva ordenada. $\square$

Sea $X = (x_1, x_2)$ con $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Los resultados obtenidos para el problema de la K-regularidad ordenada sobre $[0, 1]$ para matrices de interpolación de dos filas pueden resumirse como sigue

- ► E no K-Pólya $\to$ E totalmente K-singular.
- ► E K-Pólya
  - ► $x_1 = 0$ $\quad (E, X)$ es K-regular $\Leftrightarrow$ E es K-inclusiva ordenada.
  - ► $x_1 \neq 0$ $\to$ No se puede decidir.

Con respecto a la imposibilidad de decidir cuando $x_1 \neq 0$, notemos que si tuviéramos un criterio para decidir este caso, entonces quedaría resuelto el problema de regularidad ordenada de matrices de interpolación de tres filas en la interpolación algebraica clásica; tal problema, sin embargo, continua abierto.

Con mayor detalle, sea E una matriz de interpolación de 3 filas y consideremos el sistema de nodos $X = (x_1, x_2, x_3)$ con $x_1 < x_2 < x_3$. En el problema algebraico clásico, podemos suponer sin pérdida de generalidad que se cumple $0 = x_1 < x_2 < x_3 = 1$. Sea F_1 la primera fila de E, E_c la submatriz de E formada por las filas 2 y 3; n, n_1 y n_c el número de unos, respectivamente, de E, F_1 y E_c y $Q_1(E) = \left(q_1^1, \ldots, q_{n_1}^1\right)$. El sistema de grados del problema de interpolación algebraica clásica definido por la matriz de interpolación E es $K_{n-1} = (0, 1, \ldots, n-1)$.

Formamos el sistema de grados $K^* = \left(k_1^*, \ldots, k_{n_c}^*\right)$, que contiene los elementos de K que no están en $Q_1(E)$, organizamos la base de $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ en la forma

$$\frac{x^{q_1^1}}{q_1^1!}, \ldots, \frac{x^{q_{n_1}^1}}{q_{n_1}^1!}; \qquad \frac{x^{k_1^*}}{k_1^*!}, \ldots, \frac{x^{k_{n_c}^*}}{k_{n_c}^*!},$$

y tomamos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice. Con esa disposición, la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación algebraica clásica (E, X) tiene la siguiente estructura triangular superior por bloques:

$$V(E, X) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_c} \\ \hline M & V(E_c, K^*, (x_2, x_3)) \end{array}\right),$$

donde I_{n_1} es la matriz unidad de orden n_1, $\mathbf{0}_{n_1 \times n_c}$ es la matriz nula de dimensiones $n_1 \times n_c$, M es una matriz de dimensiones $n_c \times n_1$ y $V(E_c, K^*, (x_2, x_3))$ es la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación de dos nodos $(E_c, K^*, (x_2, x_3))$ cuando tomamos una ordenación adecuada de la base de $\mathcal{P}_{K^*}(\mathbb{R})$ y de los unos de la matriz de interpolación E_c.

Está claro que se cumple $D(E, X) = D(E_c, K^*, (x_2, x_3))$. Por lo tanto, si tuviéramos un *criterio simple* para decidir acerca de la regularidad ordenada de la matriz de 2 filas E_c respecto de K^* cuando $0 < x_2 < x_3 \leq 1$, entonces podríamos establecer la regularidad ordenada de E para la interpolación algebraica clásica.

Para intervalos de la forma $[0, b]$, puede establecerse una resultado similar al presentado en la Proposición 5.8.

Proposición 5.9 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación de 2 filas que verifica la K-condición de Pólya y $X = (x_1, x_2)$ con $x_1 = 0$, $x_2 \in (0, b]$. El par (E, X) es K-regular si y sólo si E es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. Para cada sistema de nodos $X = (0, x_2)$ en $[0, b]$, determinamos el sistema de nodos $Y = (1/b)\, X = (0, y_1)$ en $[0, 1]$. Teniendo en cuenta la Proposición 3.4, se cumple $D(E, K, X) = (1/b)^{\rho_K(E)}\, D\left(E, K, Y\right)$. Está claro que los problemas (E, K, X) son regulares si y sólo si todos los problemas (E, K, Y) lo son y observando la Proposición 5.8, la demostración es inmediata. $\square$

Para intervalos de la forma $[a, 0]$, podemos establecer un criterio similar invirtiendo el orden de las filas de E.

Proposición 5.10 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación de 2 filas que verifica la K-condición de Pólya y $X = (x_1, x_2)$ con $x_1 \in [a, 0)$, $x_2 = 0$. El par (E, X) es K-regular si y sólo la matriz de interpolación $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas en E, es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. Sea $X = (x_1, 0)$ con $a \leq x_1 < 0$. Determinamos el sistema de nodos $Y = (y_1, 0)$ con $y_1 = (1/a)\, x_1$ y $\widehat{Y} = (0, \hat{y}_2)$ con $\hat{y}_2 = y_1$. Entonces, se cumple

$$D(E, K, X) = (1/a)^{\rho_K(E)}\, D\,(E, K, Y) = (1/a)^{\rho_K(E)}\, D\left(\widehat{E}, K, \widehat{Y}\right)$$

y, por lo tanto, el problema (E, K, X) es regular si y sólo si el problema $\left(\widehat{E}, K, \widehat{Y}\right)$ lo es. Observamos que $\widehat{E}$ satisface la K-condición de Pólya pues $Q(\widehat{E}) = Q(E)$ y que el sistema de nodos $\widehat{Y}$ verifica $0 = \hat{y}_1 < \hat{y}_2 \leq 1$. Teniendo en cuenta la Proposición 5.8, se completa la demostración. $\square$

5.5 Problemas hermitianos

En la sección anterior hemos visto que la K-condición de Pólya y la propiedad K-inclusiva ordenada no bastan para caracterizar la K-regularidad ordenada en $[0, 1]$ de las matrices de interpolación de 2 filas. En el caso especial de las matrices hermitianas, tal caracterización sí es posible.

Recordamos que una *fila* de una matriz de interpolación es *hermitiana* si contiene una única secuencia de unos que empieza en la primera columna. Una *matriz de interpolación* es *hermitiana* si todas sus filas son hermitianas. Una matriz de interpolación de m filas es *casi-hermitiana* si sus filas interiores son hermitianas.

En la interpolación algebraica clásica, las matrices hermitianas son siempre regulares; las matrices casi-hermitianas son regulares si cumplen la condición de Pólya. Las matrices de interpolación de Lagrange son un tipo particular de matrices hermitianas con secuencias de longitud 1. En la Sección 3.7, hemos visto que la K-regularidad de una matriz de interpolación de Lagrange sobre $[0,1]$ queda caracterizada por la condición $k_1 = 0$, esto es, por la propiedad K-inclusiva. Este resultado pueden extenderse a las matrices de interpolación hermitianas. Veamos, en primer lugar, que las matrices hermitianas verifican la condición de Pólya respecto de todo sistema de grados K.

Proposición 5.11 *Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de $|E|$ grados. Si E es hermitiana, entonces E verifica la K-condición de Pólya.*

Demostración. Sea $n = |E|$. En el problema algebraico clásico, la matriz E es regular y, por lo tanto, E verifica la condición de Pólya respecto del sistema de grados $K_{n-1} = (0, 1, \ldots, n-1)$, esto es, se cumple $Q(E) \leq K_{n-1}$. Como cualquier sistema de n grados $K = (k_1, \ldots, k_n)$ mayora a K_{n-1}, obtenemos $Q(E) \leq K$. $\square$

Para sistemas de nodos X no nulos en $[0,1]$, podemos asegurar que los pares (E, X) con E matriz de interpolación hermitiana son regulares respecto de cualquier sistema de grados K.

Proposición 5.12 *Sea E una matriz de interpolación de m filas, K un sistema de $|E|$ grados y $X = (x_1, \ldots, x_m)$, $0 < x_1 < \cdots < x_m \leq 1$ un sistema de nodos. Si E es hermitiana, entonces el par (E, X) es K-regular.*

Demostración. Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$. Si se cumple $k_n = n - 1$, entonces el sistema de grados es $K_{n-1} = (0, 1, \ldots, n-1)$ y estamos en un problema algebraico clásico. Como E es hermitiana, el par (E, X) es regular para cualquier elección del sistema de nodos X, en particular (E, X) es regular para los sistemas X especificados.

Supongamos, como segundo caso, que se cumple $k_n \geq n$. Formamos el sistema de grados K^* que contiene los grados de $K_{k_n} = (0, 1, \ldots, k_n)$ que no están en K; podemos escribir $K^* = (k_1^*, \ldots, k_r^*)$ con $r = k_n + 1 - n$ (como $k_n \geq n$, es $r \geq 1$). Construimos ahora una matriz de interpolación E^* de $m + 1$ filas y $k_n + 1$ columnas de la forma

$$E^* = \left(\frac{F_1}{\bar{E}} \right),$$

donde F_1 es una fila de longitud $k_n + 1$ que tiene unos en los lugares especificados por K^*y $\bar{E}$ es una matriz de m filas y $k_n + 1$ columnas que tiene unos en las mismas posiciones que E.

La matriz de interpolación E^* es una matriz casi-hermitiana cuyo sistema de órdenes de derivación es $Q(E^*) = Q(E) \uplus K^*$. Como se cumple $K_{k_n} = K \uplus K^*$ y $Q(E)$ verifica la condición de Pólya respecto de K, según la Proposición 4.6, resulta que $Q(E^*)$ verifica la condición de Pólya respecto de K_{k_n}. La matriz de interpolación E^* es, por lo tanto, regular ordenada en la interpolación algebraica clásica.

Tomamos el sistema de $m+1$ nodos $Y = (0, x_1, \ldots, x_m)$, organizamos la base de $\mathcal{P}_{k_n}(\mathbb{R})$ en la forma

$$\frac{x^{k_1^*}}{k_1^*!}, \ldots, \frac{x^{k_r^*}}{k_r^*!}, \quad \frac{x^{k_1}}{k_1!}, \ldots, \frac{x^{k_n}}{k_n!},$$

y disponemos los elementos $e_{ij}^* = 1$ de E^* según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice. Con esa disposición, la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación algebraica clásica definido por el par (E^*, Y) tiene la siguiente estructura triangular inferior por bloques

$$V(E^*, Y) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r\times n} \\ \hline M & V(E, K, X) \end{array} \right),$$

donde I_r es la matriz unidad de orden r, $\mathbf{0}_{r\times n}$ es la matriz nula de dimensiones $r \times n$, M es una matriz de dimensiones $n \times r$ y $V(E, K, X)$ es la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación (E, K, X) para una disposición adecuada de la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ y de los elementos $e_{ij} = 1$ de E. Como se cumple $D(E, K, X) = D(E^*, Y) \neq 0$, resulta que (E, X) es K-regular. $\square$

Cuando el primer nodo es nulo, esto es, cuando se verifica

$$0 = x_1 < \ldots < x_m \leq 1,$$

la K-inclusividad ordenada permite caracterizar la K-regularidad ordenada de los pares (E, X) para matrices de interpolación hermitianas.

Proposición 5.13 *Sea E una matriz de interpolación hermitiana de m filas, K un sistema de $|E|$ grados y $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de m nodos que verifica $0 = x_1 < \ldots < x_m \leq 1$. El problema de interpolación (E, K, X) es regular si y sólo si E es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. Si la matriz de interpolación E no es K-inclusiva ordenada, razonamos como en la demostración de la Proposición 5.2 y obtenemos que el problema de interpolación (E, K, X) es singular para cualquier elección de $x_2, \ldots, x_m$.

Supongamos que la matriz de interpolación E es K-inclusiva ordenada. En el caso $m = 1$, E es una matriz de interpolación de una fila y, según la Proposición 5.6, (E, K, X) es regular.

En el caso $m \geq 2$, representamos por E^c a la matriz de interpolación que resulta de E cuando suprimimos su primera fila. Como todas las filas de E son hermitianas, E^c también es una matriz hermitiana. Sea K^c el sistema de grados formado por los grados de K que no están en $Q_1(E)$. Si la primera fila de E tiene n_1 unos, entonces $Q_1(E)$ tiene n_1 elementos distintos; como E es K-inclusiva ordenada, K^c tiene $n_2 = n - n_1$ elementos distintos y E^c tiene n_2 unos. Tomamos el sistema de $m-1$ nodos $X^c = (x_2, \ldots, x_m)$, que verifican $0 < x_2 < \cdots < x_m \leq 1$. Según la Proposición 5.12, el problema de interpolación (E^c, K^c, X^c) es regular.

Sea $K^c = \left(k_1^c, \ldots, k_{n_2}^c\right)$ y $Q_1(E) = \left(q_1^1, \ldots, q_{n_1}^1\right)$. Organizamos la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ en la forma

$$\frac{x^{q_1^1}}{q_1^1!}, \ldots, \frac{x^{q_{n_1}^1}}{q_{n_1}^1!}; \quad \frac{x^{k_1^c}}{k_1^c!}, \ldots, \frac{x^{k_{n_2}^c}}{k_{n_2}^c!},$$

y disponemos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i, j) con prevalencia del primer índice. Con esa disposición, la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación (E, K, X) presenta la siguiente estructura triangular inferior por bloques

$$V(E, K, X) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n_1} & \mathbf{0}_{n_1 \times n_2} \\ \hline M & V(E^c, K^c, X^c) \end{array}\right),$$

donde I_{n_1} es la matriz unidad de orden n_1, $\mathbf{0}_{n_1 \times n_2}$ es la matriz nula de dimensiones $n_1 \times n_2$, M es una matriz de dimensiones $n_2 \times n_1$ y $V(E^c, X^c, K^c)$ es la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación (E^c, K^c, X^c) para una disposición adecuada de la base de $\mathcal{P}_{K^c}(\mathbb{R})$ y de los elementos $e_{ij}^c = 1$ de E^c. Se cumple $D(E, K, X) = D(E^c, K^c, X^c) \neq 0$, por lo tanto, obtenemos que (E, X, K) es regular. $\square$

Apoyándonos en las dos proposiciones anteriores, podemos caracterizar la K-regularidad ordenada en $[0,1]$ de las matrices de interpolación hermitianas.

Proposición 5.14 *Sea E una matriz de interpolación hermitiana y K un sistema de $|E|$ grados. E es K-regular ordenada en $[0,1]$ si y sólo si E es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. Según la Proposición 5.2, la K-inclusividad ordenada es condición necesaria para la K-regularidad en $[0,1]$, veamos la suficiencia. Supongamos que E es K-inclusiva ordenada, sea m el número de filas de E y $X = (x_1, \ldots, x_m)$ con $0 \leq x_1 < \cdots < x_m \leq 1$. Si es $x_1 > 0$, según la Proposición 5.12, el problema de interpolación (E, X, K) es regular. En el caso $x_1 = 0$, como E es K-inclusiva, es la Proposición 5.13 quien nos asegura la regularidad de (E, X, K). $\square$

Ejemplo 5.5.1 *K-regularidad de matrices de interpolación hermitianas.*

Consideramos el sistema de grados $K = (0, 2, 3, 4, 5, 6)$. La matriz de interpolación hermitiana

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es K-regular ordenada en $[0,1]$. Para las matrices de interpolación hermitianas

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$Q_1(E_1) = Q_1(E_2) = (0, 1), \quad Q_1(E_3) = Q_1(E_4) = (0, 1, 2).$$

Ninguna de las matrices de interpolación E_1, E_2, E_3, E_4 (que se obtienen permutando la filas de E) cumple la propiedad K-inclusiva ordenada y, en consecuencia, todas ellas son K-singulares en $[0,1]$. $\square$

La siguiente proposición caracteriza la K-regularidad ordenada una matriz de interpolación hermitiana sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$.

Proposición 5.15 *Sea E una matriz de interpolación hermitiana y K un sistema de $|E|$ grados. Entonces, se cumple: (i) E es K-regular ordenada sobre el intervalo $[0,b]$ $(b>0)$ si y sólo si E es K-inclusiva ordenada. (ii) E es K-regular ordenada sobre el intervalo $[a,0]$ $(a<0)$ si y sólo si la matriz de interpolación $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E, es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. (i) Es inmediata a partir de la Proposición 5.14 y de la Proposición 3.7. (ii) Resulta de considerar la Proposición 3.8 y la Proposición 5.14. □

Ejemplo 5.5.2 *K-regularidad ordenada de matrices hermitianas sobre intervalos de la forma $[a,0]$ y $[0,b]$.*

Sea la matriz de interpolación

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema de grados

$$K=(0,1,3,4,5,9,10,11,12)\,.$$

Observando la primera fila de E, obtenemos $Q_1(E)=(0,1)\subseteq K$. Por lo tanto, la matriz hermitiana E es K-regular ordenada sobre todo intervalo de la forma $[0,b]$. Para decidir acerca de la K-regularidad ordenada de E sobre intervalos de la forma $[a,0]$, invertimos el orden de las filas de E para formar la matriz

$$\widehat{E}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso, resulta $Q_1(\widehat{E})=(0,1,2)\nsubseteq K$. En consecuencia, E es K-singular ordenada sobre todo intervalo de la forma $[a,0]$. □

5.6 Problemas casi-hermitianos

Una matriz de interpolación de m filas es *casi-hermitiana* si sus filas interiores (de índices $2,\ldots,m-1$) son hermitianas. En el problema clásico de interpolación algebraica, la regularidad ordenada de las matrices casi-hermitianas queda caracterizada por la condición de Pólya. En la interpolación K-algebraica, la K-condición de Pólya y la K-inclusión ordenada permiten caracterizar la K-regularidad ordenada de las matrices de interpolación casi-hermitianas para los sistemas de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$ con $0 = x_1 < \cdots < x_m \leq 1$. Si eliminamos la restricción $x_1 = 0$, tal caracterización ya no es posible.

Observemos que las matrices de interpolación de 2 filas son casi-hermitianas y que el problema de la regularidad de (E, K, X), donde E es una matriz de 2 filas y $X = (x_1, x_2)$ cumple $0 < x_1 < x_2 \leq 1$, aún permanece abierto. El Ejemplo 5.4.2 nos muestra una matriz casi-hermitiana que es K-singular ordenada en [0,1] a pesar de cumplir la K-condición de Pólya y ser K-inclusiva.

La siguiente proposición generaliza la Proposición 5.13 al caso de las matrices casi-hermitianas que verifican la K-condición de Pólya. En la demostración, extendemos el problema (E, K, X) para obtener un problema algebraico clásico (E^*, K_{k_n}, X) donde E^* es una matriz casi-hermitiana que verifica la condición de Pólya. En el caso casi-hermitiano carecemos de una proposición análoga al la Proposición 5.12 y, por lo tanto, no podemos seguir una línea de demostración similar a la empleada en Proposición 5.13.

Proposición 5.16 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación casi-hermitiana con m filas que cumple la K-condición de Pólya y $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de nodos que cumple $0 = x_1 < \cdots < x_m \leq 1$. El problema de interpolación (E, K, X) es regular si y sólo si E es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. Si E no es K-inclusiva ordenada, razonamos como en la demostración de la Proposición 5.2 y obtenemos que E es K-singular para cualquier elección de los nodos $x_2, \ldots, x_m$.

Supongamos que la matriz de interpolación E es K-inclusiva ordenada y sea n el número de unos de E y $K = (k_1, \ldots, k_n)$. En el caso $k_n = n - 1$, nos encontramos en un problema algebraico clásico y, teniendo en cuenta que E es casi-hermitiana y verifica la condición de Pólya, el problema de interpolación (E, K, X) es regular para cualquier elección del sistema de nodos X que verifique $x_1 \leq \cdots \leq x_m$. En particular, (E, K, X) es regular cuando se cumple $0 = x_1 < \cdots < x_m \leq 1$.

Como segundo caso, supongamos que se cumple $k_n \geq n$. Formamos el sistema de grados K^* que contiene los elementos de $K_{k_n} = (0, 1, \ldots, k_n)$ que no están en K; podemos escribir $K^* = (k_1^*, \ldots, k_r^*)$ con $r = k_n + 1 - n$, como se cumple $k_n \geq n$, es $r \geq 1$. Construimos una matriz de interpolación E^* de m filas y $k_n + 1$ columnas como sigue: la primera fila contiene unos en las posiciones indicadas por $Q_1(E) \uplus K^*$; en las filas restantes, E^* tiene unos en las mismas posiciones que E. Como E verifica la K-condición de Pólya, para cada elemento $e_{ij} = 1$ de E, se cumple $j \leq k_n$, por lo tanto, todos los unos de E pueden colocarse en una matriz de m filas y $k_n + 1$ columnas. Por otra parte, como E verifica la propiedad K-inclusiva ordenada, $Q_1(E)$ y K^* no tienen elementos comunes; en consecuencia, el número de unos de E^* es $n^* = n + r = k_n + 1$.

Veamos ahora que E^* verifica la condición de Pólya respecto de K_{k_n}. Tenemos $K_{k_n} = K \uplus K^*$, $Q(E^*) = Q(E) \uplus K^*$, además, K y K^* no tienen elementos comunes y $Q(E) \leq K$. Si aplicamos la Proposición 4.6, resulta que $Q(E^*) \leq K_{k_n}$. Finalmente, observamos que E^* tiene las mismas secuencias que E en las filas $2, \ldots, m$. En resumen, E^* es una matriz de interpolación casi-hermitiana que cumple la condición de Pólya y es, por lo tanto, regular ordenada (para la interpolación algebraica clásica).

Organizamos la base de $\mathcal{P}_{k_n}(\mathbb{R})$ en la forma

$$\frac{x^{k_1^*}}{k_1^*!}, \ldots, \frac{x^{k_r^*}}{k_r^*}; \qquad \frac{x^{k_1}}{k_1!}, \ldots, \frac{x^{k_n}}{k_n!},$$

y disponemos los elementos $e^*_{ij} = 1$ de E^* colocando en primer lugar e_{1,k_1^*}, $\ldots$, e_{1,k_r^*} y, seguidamente, los restantes en un orden dado. Con esa organización, la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación (E^*, K_{k_n}, X) presenta la siguiente estructura triangular inferior por bloques

$$V(E^*, K_{k_n}, X) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \mathbf{0}_{r\times n} \\ \hline M & V(E,K,X) \end{array} \right),$$

donde I_r es la matriz unidad de orden r, $\mathbf{0}_{r\times n}$ es la matriz nula de dimensiones $r \times n$, M es una matriz de dimensiones $n \times r$ y $V(E,K,X)$ es la matriz de Vandermonde generalizada del problema de interpolación (E,K,X) para una disposición adecuada de la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ y de los elementos $e_{ij} = 1$ de E. Como la matriz de interpolación E^* es regular, se cumple

$$D(E,K,X) = D(E^*, K_{k_n}, X) \neq 0. \quad \square$$

El resultado obtenido en la proposición anterior, se extiende de forma inmediata a los sistemas de nodos de la forma $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_m \leq b$.

Proposición 5.17 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación casi-hermitiana con m filas que cumple la K-condición de Pólya y un sistema de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$ con $0 = x_1 < \cdots < x_m \leq b$. El problema de interpolación (E, K, X) es regular si y sólo si E es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. Es análoga a la demostración de la Proposición 5.9. □

Para sistema de nodos de la forma $a \leq x_1 < \cdots < x_m = 0$, invertimos el orden de las filas de E.

Proposición 5.18 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación casi-hermitiana con m filas que verifica la K-condición de Pólya y $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de nodos que cumple $a \leq x_1 < \cdots < x_m = 0$. El problema de interpolación (E, K, X) es regular si y sólo si la matriz de interpolación $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas en E, es K-inclusiva ordenada.*

Demostración. Es análoga a la demostración de la Proposición 5.10. □

5.7 Condición suficiente de K-regularidad ordenada

En la interpolación algebraica clásica, el principal resultado de regularidad ordenada es el Teorema de Atkinson-Sharma, en él se establece la regularidad ordenada de las matrices de interpolación de Pólya que carecen de *secuencias impares soportadas.*

En esta sección definimos las *secuencias K-soportadas*, una generalización del concepto de secuencia soportada que es adecuado para el estudio de la K-regularidad ordenada en $[0, 1]$. Posteriormente, apoyándonos en la definición de secuencia K-soportada, establecemos una condición suficiente de K-regularidad ordenada sobre $[0, 1]$ que generaliza el Teorema de Atkinson-Sharma. Los resultados sobre transformación de nodos, obtenidos en la Sección 3.6, nos permiten establecer condiciones suficientes de K-regularidad ordenada en intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$.

5.7.1 Secuencias K-soportadas

Recordamos que una secuencia en una matriz de interpolación es una bloque (maximal) de unos consecutivos situados en una misma fila de la matriz. Con mayor precisión, si $E = (e_{ij})$ es una matriz de interpolación de $p+1$ columnas (de índices $0, \ldots, p$), una *secuencia* de E es un conjunto de elementos

$$e_{i,j_0} = e_{i,j_0+1} = \cdots = e_{i,j_0+r-1} = 1,$$

que verifican $e_{i,j_0-1} = 0$ cuando $j_0 > 0$ y $e_{i,j_0+r} = 0$ cuando $j_0 + r \leq p$. En la interpolación algebraica clásica, se dice que la *secuencia* está *soportada* si existen en E dos elementos $e_{i_1,j_1} = 1$ y $e_{i_2,j_2} = 1$ para los que se verifica $i_1 < i < i_2$, $j_1 < j_0$ y $j_2 < j_0$.

Con el fin facilitar el manejo de las secuencias, introducimos a continuación la notación S_{ij}^r.

Notación Dada una matriz de interpolación $E = (e_{ij})$, representamos por $S_{ij}^r(E)$ a una secuencia de longitud r de la matriz de interpolación E situada en la fila i, cuyo primer elemento es e_{ij}. La secuencia $S_{ij}^r(E)$ está formada por los elementos $e_{ij} = e_{i,j+1} = \cdots = e_{i,j+r-1} = 1$. Los elementos $e_{i,j-1}$ y $e_{i,j+r}$, caso de existir, son nulos.

Cuando no haya riesgo de confusión, emplearemos la notación S_{ij}^r y, si la longitud de la secuencia no es relevante, escribiremos simplemente $S_{ij.}$ Una secuencia S_{ij}^r es par o impar según r sea par o impar.

Para poder definir cómodamente las secuencias K-soportadas, distinguimos entre el soporte inferior y el soporte superior de una secuencia.

Definición 5.4 *Dada una matriz de interpolación $E = (e_{ij})$, decimos que una secuencia $S_{ij}(E)$ está soportada superiormente si existe un elemento $e_{i_1,j_1} = 1$ de E que verifica $i_1 < i$ y $j_1 < j$; en ese caso, decimos que el elemento e_{i_1,j_1} soporta superiormente a la secuencia $S_{ij}(E)$. Decimos que $S_{ij}(E)$ está soportada inferiormente si existe un elemento $e_{i_2,j_2} = 1$ de E tal que $i_2 > i$ y $j_2 < j$; en ese caso, e_{i_2,j_2} soporta inferiormente a $S_{ij}(E)$. Finalmente, decimos que $S_{ij}(E)$ está soportada cuando esta soportada superior e inferiormente.*

Ejemplo 5.7.1 *Secuencias soportadas.*

En la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \boxed{1 \quad 1 \quad 1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

hemos resaltado la secuencia S^3_{22}. Se trata de una secuencia de longitud 3 cuyo primer elemento es e_{22}. Los elementos e_{10} y e_{11} soportan superiormente a S^3_{22}; inferiormente, la secuencia está soportada por e_{31} y e_{41}. La secuencia S^3_{22} está soportada.

Es inmediato que la nueva definición de secuencia soportada coincide con la usual. La secuencia S^3_{31}

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1 \quad 1 \quad 1} & & & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

está soportada superiormente por e_{10} y e_{20}; inferiormente, la secuencia S^3_{31} no está soportada. $\square$

La siguiente definición extiende el concepto de secuencia soportada al problema de interpolación K-algebraico.

Definición 5.5 *Dada una matriz de interpolación E y un sistema de $n = |E|$ grados $K = (k_1, \ldots, k_n)$, sea $K^* = (k^*_1, \ldots, k^*_r)$ el sistema de $r = k_n + 1 - n$ grados formado por los elementos de $K_{k_n} = (0, 1, \ldots, k_n)$ que no están en K. Decimos que una secuencia $S_{ij}(E)$ está soportada superiormente respecto del sistema de grados K (o más brevemente, está K-soportada superiormente) si $S_{ij}(E)$ está soportada superiormente o $k^*_1 < j$. Si la secuencia $S_{ij}(E)$ está K-soportada superiormente y soportada inferiormente, decimos que $S_{ij}(E)$ está K-soportada.*

Cuando $k_n = n-1$, el sistema K^* es vacío y la condición $k^*_1 < j$ nunca sucede al no existir k^*_1; en ese caso, la definición de secuencia K-soportada coincide con la definición de secuencia soportada empleada en $\mathcal{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 5.7.2 *Secuencias K-soportadas.*

La matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

carece de secuencias soportadas. Consideramos el sistema de grados

$$K = (0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10)\,.$$

En la primera fila, E tiene dos secuencias S_{12}^2 y S_{15}^1. Observamos que el elemento e_{21} es soporte inferior de ambas. En cuanto al soporte superior, está claro que ninguna de las dos está soportada superiormente, de hecho, ninguna secuencia de la primera fila puede estarlo. Queda por verificar la condición $k_1^* < j$. El máximo grado de K es $k_8 = 10$, de donde obtenemos

$$K_{k_8} = K_{10} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)\,.$$

K^* es el sistema de grados formado por los elementos de K_{10} que no están en K, esto es, $K^* = (1, 5, 9)$. De ahí, resulta que $k_1^* = 1$ y, por lo tanto, ambas secuencias están K-soportadas superiormente. En definitiva, S_{12}^2 y S_{15}^1 están K-soportadas. $\square$

5.7.2 Generalización del Teorema de Atkinson-Sharma

Nos ocupamos en este apartado de la demostración del principal resultado: la generalización del Teorema de Atkinson-Sharma al problema de interpolación K-algebraica. Estudiamos, en primer lugar, el problema que corresponde al intervalo $[0, 1]$; seguidamente, los resultados se generalizan a intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$.

De forma análoga a como hicimos en secciones anteriores, abordamos en proposiciones separadas el estudio de los dos casos principales. En las demostraciones de ambas proposiciones hay momentos en que se realizan razonamientos del todo análogos a los que aparecen en algunas demostraciones precedentes; en tales casos, hemos creído oportuno omitir los detalles y centrarnos en la línea principal de la demostración.

Proposición 5.19 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación de m filas que verifica la K-condición de Pólya y $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de nodos que cumple $0 < x_1 < \cdots < x_m \leq 1$. Si E no tiene secuencias impares K-soportadas, entonces el problema de interpolación (E, K, X) es regular.*

Demostración. Sea n el número de unos de $E = (e_{ij})$ y $K = (k_1, \ldots, k_n)$. En el caso $k_n = n - 1$, el problema de interpolación (E, K, X) es un problema algebraico clásico y E es una matriz que cumple la condición de Pólya y carece de secuencias impares soportadas. Según el Teorema de Atkinson-Sharma, la matriz de interpolación E es regular ordenada y, por lo tanto, el problema (E, K, X) es regular.

En el caso $k_n \geq n$, sea $K^* = (k_1^*, \ldots, k_r^*)$ el sistema de $r = k_n + 1 - n$ grados formado por los elementos de $K_{k_n} = (0, 1, \ldots, k_n)$ que no están en K. Formamos la matriz de interpolación E^* de $m+1$ filas y k_n+1 columnas como sigue: la primera fila de E^* contiene unos en las posiciones especificadas por K^*, la submatriz formada por las filas $2, \ldots, m+1$ de E^* es una matriz de m filas y $k_n + 1$ columnas que tiene unos en las mismas posiciones que E. Como E verifica la condición de Pólya respecto de K, sus elementos $e_{ij} = 1$ verifican $j \leq k_n$; por lo tanto, la construcción indicada está bien definida. Esquemáticamente, tenemos

$$E^* = \left(\frac{F_1}{\bar{E}} \right),$$

donde $\bar{E}$ y E son matrices de m filas que tienen elementos 1 en las mismas posiciones.

Tomamos el sistema de nodos $Y = (0, x_1, \ldots, x_m)$ y, siguiendo un razonamiento del todo análogo al empleado en la demostración de la Proposición 5.12, obtenemos que la matriz de interpolación E^* verifica la condición de Pólya y que los determinantes $D\left(E^*, K_{k_n}, Y\right)$ y $D\left(E, K, X\right)$ tienen el mismo valor (para una adecuada disposición de la base de $\mathcal{P}_K\left(\mathbb{R}\right)$ y de los elementos con valor uno de E^* y E).

Por lo tanto, nos basta con demostrar que se cumple $D(E^*, K_{k_n}, Y) \neq 0$ y, para ello, es suficiente con demostrar que E^* carece de secuencias impares soportadas. Supongamos que la secuencia $S_{ij}^r\left(E^*\right)$ está soportada. La secuencia $S_{ij}^r\left(E^*\right)$ debe encontrarse en las filas interiores de E^*, por lo tanto, existe la secuencia $S_{i-1,j}^r\left(E\right)$. Sea $e_{i_1,j_1}^* = 1$ un soporte superior de $S_{ij}^r\left(E^*\right)$ y $e_{i_2,j_2}^* = 1$ un soporte inferior.

Para e_{i_2,j_2}^* se cumple $i_2 > i$ y $j_2 < j$. En consecuencia, existe el elemento $e_{i_2-1,j_2} = 1$ en E que soporta inferiormente a $S_{i-1,j}^r\left(E\right)$.

En cuanto a e_{i_1,j_1}^*, pueden presentarse dos casos. Si es $i_1 > 1$, entonces existe en E un elemento $e_{i_1-1,j_1} = 1$ que soporta superiormente a $S_{i-1,j}^r\left(E\right)$; si es $i_1 = 1$, entonces existe un $k_s^* < j$ y, en particular, $k_1^* < j$. En ambos casos, la secuencia $S_{i-1,j}^r\left(E\right)$ está K-soportada superiormente.

Para toda secuencia soportada $S_{ij}^r(E^*)$, obtenemos una secuencia K-soportada de la misma longitud $S_{i-1,j}^r\left(E\right)$; como E carece de secuencias impares K-soportadas, resulta que E^* carece de secuencias impares soportadas. $\square$

Proposición 5.20 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación de m filas que verifica la K-condición de Pólya y es K-inclusiva ordenada y $X = (x_1, \dots, x_m)$ un sistema de nodos que cumple $0 = x_1 < \cdots < x_m \leq 1$. Si E carece de secuencias impares K-soportadas, entonces el problema de interpolación (E, K, X) es regular.*

Demostración. Sea n el número de unos de E y $K = (k_1, \dots, k_n)$. En el caso $k_n = n - 1$, razonamos como en la demostración de la proposición anterior y obtenemos que (E, K, X) es regular.

Supongamos que se cumple $k_n \geq n$ y sea $K^* = (k_1^*, \dots, k_r^*)$ el sistema de $r = k_n + 1 - n$ grados formado por los elementos de $K_{k_n} = (0, 1, \dots, k_n)$ que no están en K. Construimos una matriz de interpolación $E^* = (e_{ij}^*)$ de m filas y $k_n + 1$ columnas que tiene unos en las mismas posiciones que E y, además, $e_{1,k_j^*}^* = 1$ para $j = 1, \dots, r$. Como E verifica la K-condición de Pólya, los $e_{ij} = 1$ cumplen $j \leq k_n$; por lo tanto, la construcción de E^* es posible. Además, como E es K-inclusiva ordenada, se cumple $Q_1(E) \subseteq K$ y, por lo tanto, $Q_1(E)$ y K^* no tienen elementos comunes. De ahí obtenemos que E^* tiene $n^* = k_n + 1$ unos y que su sistema de órdenes de derivación es $Q(E^*) = Q(E) \uplus K^*$.

Organizamos ahora la base de $\mathcal{P}_{k_n}(\mathbb{R})$ y de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$ y los unos de E^* y E como en la demostración de la Proposición 5.16 y, mediante un razonamiento análogo al que allí se emplea, obtenemos que los valores de los determinantes $D(E, K, X)$ y $D(E^*, K_{k_n}, X)$ coinciden; también obtenemos que la matriz de interpolación E^* verifica la condición de Pólya. Estamos en una situación similar a la obtenida en la proposición anterior, apoyándonos en el Teorema de Atkinson-Sharma, vemos que para asegurar le regularidad del problema de interpolación (E, K, X) es suficiente con demostrar que E^* carece de secuencias impares soportadas.

Supongamos que la secuencia $S_{ij}^r(E^*)$ está soportada y sea e_{i_1,j_1}^* un soporte superior de $S_{ij}^r(E^*)$ y e_{i_2,j_2}^* un soporte inferior.

Como $i > 1$, obtenemos una secuencia $S_{ij}^r(E)$ y un elemento $e_{i_2,j_2} = 1$ de E que soporta inferiormente a $S_{ij}^r(E)$.

En cuanto a e_{i_1,j_1}^*, pueden suceder dos casos. Si se cumple $(i_1, j_1) = (1, k_s^*)$ para algún s, entonces $k_1^* < j$ y $S_{ij}^r(E)$ está K-soportada superiormente; si es $(i_1, j_1) \neq (1, k_s^*)$ para $s = 1, \dots, r$, entonces obtenemos un $e_{i_1,j_1} = 1$ en E que soporta superiormente a $S_{ij}^r(E)$.

En definitiva, para cada secuencia $S_{ij}^r(E^*)$ soportada, podemos obtener la secuencia K-soportada de la misma longitud $S_{ij}^r(E)$; como E carece de secuencias impares K-soportadas, resulta que E^* carece de secuencias impares soportadas. $\square$

El siguiente teorema sintetiza los resultados de las dos proposiciones anteriores.

Teorema 5.1 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación que verifica la K-condición de Pólya y es K-inclusiva ordenada. Si E carece de secuencias impares K-soportadas, entonces E es K-regular ordenada en $[0, 1]$.*

Demostración. Sea m el número de filas de E y $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un sistema de nodos que verifica $0 \leq x_1 < \cdots < x_m \leq 1$. Si se cumple $x_1 = 0$, aplicamos la Proposición 5.20 y obtenemos que el problema de interpolación (E, K, X) es regular; la Proposición 5.19 nos asegura la regularidad de (E, X, K) en el caso $x_1 > 0$. $\square$

Ejemplo 5.7.3 *Condición suficiente de K-regularidad ordenada.*

En el Ejemplo 3.3.1 se analizó la regularidad ordenada en [0,1] de la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto del sistema de grados $K = (1, 2, 5, 6)$. Tras la construcción de la matriz de Vandermonde generalizada y el estudio de la anulación de su determinante, se llegó a la conclusión de que E es K-regular ordenada en $[0, 1]$. Si formamos los sistema de órdenes de derivación $Q(E) = (1, 1, 2, 5)$ y $Q_1(E) = (1, 2)$, vemos que se cumple

$$Q(E) = (1, 1, 2, 5) \leq (1, 2, 5, 6) = K,$$

$$Q_1(E) = (1, 2) \subseteq (1, 2, 5, 6) = K.$$

Por lo tanto, la matriz de interpolación E verifica la K-condición de Pólya y es K-inclusiva ordenada. El máximo grado de K es $k_4 = 6$, de donde obtenemos $K^* = (0, 3, 4)$ y $k_1^* = 0$. La matriz de interpolación E carece de secuencias K-soportadas y, según el Teorema 5.1, E es K-regular ordenada en $[0, 1]$.

Notemos que en este caso no era necesario determinar k_1^* para ver que la matriz de interpolación E carece de secuencias K-soportadas, pues E carece de secuencias soportadas inferiormente. $\square$

La siguiente proposición establece condiciones suficientes de K-regularidad ordenada sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$.

Proposición 5.21 *Sea K un sistema de grados y E una matriz de interpolación que verifica la K-condición de Pólya. Se cumple: (i) Si E es K-inclusiva ordenada y carece de secuencias impares K-soportadas, entonces E es K-regular ordenada sobre $[0, b]$ ($b > 0$). (ii) Si la matriz $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E, es K-inclusiva ordenada y carece de secuencias impares K-soportadas, entonces E es K-regular ordenada sobre $[a, 0]$ ($a < 0$).*

Demostración. Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.7, la Proposición 3.8 y el Teorema 5.1. $\square$

Ejemplo 5.7.4 *K-regularidad ordenada sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$.*

Si tomamos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y el sistema de grados $K = (1, 2, 5, 6)$ del ejemplo anterior, obtenemos que E es K-regular ordenada sobre todo intervalo de la forma $[0, b]$. Para intervalos del tipo $[a, 0]$, formamos la matriz de interpolación

$$\widehat{E} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos $Q_1(\widehat{E}) = (5) \subseteq K$, por lo tanto, $\widehat{E}$ es K-inclusiva ordenada. No obstante, como $k_1^* = 0$, la secuencia $S_{15}^1(\widehat{E})$ está K-soportada y no se puede asegurar la K-regularidad ordenada de E sobre intervalos de la forma $[a, 0]$. De hecho, E es K-singular ordenada sobre todo intervalo $[a, 0]$. Sobre $[-1, 0]$ podemos tomar, por ejemplo, el sistema de nodos $x_1 = -1$, $x_2 = -1/2$ y $x_3 = -49/170$ y resulta $D(E, K, X) = 0$. $\square$