Capítulo 6

K-descomposición de matrices de interpolación

6.1 Introducción

El objetivo de este capítulo es generalizar a la interpolación K-algebraica la descomposición normal de matrices de interpolación (Sharma y Prasad, 1968 [84]) y el Teorema de descomposición (Atkinson y Sharma, 1969 [10]; Ferguson, 1969 [36]).

En la Sección 6.2 se introduce el concepto de *par* (Q, K) *indescomponible* y de *índice de descomposición* y se extiende la *condición fuerte de Pólya* al problema de interpolación K-algebraico. Las definiciones se basan en el sistema de órdenes de derivación, este enfoque resalta el hecho de que las propiedades de descomposición dependen únicamente de la estructura de los órdenes de derivación y de los grados.

En la Sección 6.3 se presenta el concepto de matriz de *interpolación* K-*descomponible* y se define la K-descomposición

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2)$$

para matrices de interpolación E que cumplen la K-condición de Pólya. Las matrices que no verifican la K-condición de Pólya quedan excluidas de la definición (en este caso la descomposición puede estar mal definida), sin embargo, esto no supone ninguna limitación pues tales matrices son totalmente K-singulares.

En la Sección 6.4 se demuestra el *Teorema de descomposición*, según el cual la regularidad (regularidad ordenada) de (E, K) puede deducirse de la regularidad (regularidad ordenada) de los pares componentes (E_1, K_1) y (E_2, K_2).

En la Sección 6.5 se define y construye el *sistema de grados indescomponible mínimo* K_E^{**} correspondiente a una matriz de interpolación E. Dado un sistema de grados K, el par de Pólya (E, K) resulta ser indescomponible si y sólo si $K_E^{**} \leq K$.

Finalmente, en la Sección 6.6 se caracterizan las matrices de interpolación *totalmente indescomponibles*: matrices tales que el par (E, K) es indescomponible para todo sistema de grados respecto del cual E verifica la K-condición de Pólya. Si empleamos el sistema de Pólya mínimo K_E^* y el sistema de grados indescomponible mínimo K_E^{**}, las matrices totalmente indescomponibles quedan caracterizadas por la condición $K_E^{**} = K_E^*$.

6.2 Pares (Q, K) descomponibles

La siguiente definición presenta los conceptos de *par (Q, K) descomponible* y de *índices de descomposición.*

Definición 6.1 *Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ un sistema de órdenes de derivación y $K = (k_1, \ldots, k_n)$ un sistema de grados. Decimos que el par (Q, K) es indescomponible si se cumple*

$$q_{j+1} \leq k_j, \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n-1 \tag{6.1}$$

En caso contrario, esto es, cuando existe un índice $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ tal que

$$q_{j+1} > k_j \tag{6.2}$$

decimos que el par (Q, K) es descomponible. Si el par (Q, K) es descomponible, denominamos índices de descomposición a los índices j que cumplen (6.2). $I(Q, K)$ representa la secuencia creciente de los índices de descomposición del par (Q, K), que denominamos sistema de índices de descomposición de (Q, K).

Denominamos *condición de Birkhoff* o *condición fuerte de Pólya* al sistema de $(n-1)$ condiciones (6.1). Veremos más adelante que cuando el sistema de grados es $K = (0, 1, \ldots, n-1)$, las condiciones (6.1) son equivalentes a la *condición fuerte de Pólya* habitual. Cuando sea oportuno, emplearemos la expresión: *Q es K-descomponible,* o diremos que el sistema de órdenes Q *es descomponible respecto del sistema de grados* K para indicar que el par (Q, K) es descomponible. Análogamente, diremos que Q *es* K*-indescomponible* o que Q es *indescomponible respecto de* K cuando el par (Q, K) sea indescomponible. También emplearemos la expresión: (Q, K) es un *par de Pólya*, para indicar que el sistema de órdenes de derivación Q verifica la K-condición de Pólya.

Ejemplo 6.2.1 *Pares (Q, K) descomponibles; índices de descomposición.*

Consideramos el sistema de órdenes de derivación $Q = (1, 1, 3, 5, 7, 7)$ y el sistema de grados $K_1 = (1, 3, 4, 6, 7, 9)$. Si disponemos Q y K_1 como sigue

K_1	1	3	4	6	7	9
1	1	3	5	7	7	Q
$I(Q, K_1)$	1	2	3	4	5	6
			$*$	$*$		

es sencillo detectar dónde se cumple la condición (6.2) y determinar los índices de descomposición. En nuestro caso, el par (Q, K_1) es descomponible y su sistema de índices de descomposición es $I(Q, K_1) = (3, 4)$.

Si tomamos el sistema de grados $K_2 = (1, 3, 4, 7, 8, 9)$, la tabla correspondiente al par (Q, K_2) es

K_2	1	3	4	7	8	9
1	1	3	5	7	7	Q
$I(Q, K_2)$	1	2	3	4	5	6
			$*$			

El par (Q, K_2) es descomponible, pero el sistema de índices de descomposición se reduce a un único elemento $I(Q, K_2) = (4)$.

Para el sistema de grados $K_3 = (1, 3, 5, 7, 8, 9)$, obtenemos la tabla

K_3	1	3	5	7	8	9
1	1	3	5	7	7	Q
$I(Q, K_3)$	1	2	3	4	5	6

En este tercer caso, el par (Q, K_3) es indescomponible. □

La siguiente proposición muestra que el cumplimiento de la K-condición fuerte de Pólya implica el cumplimiento de la K-condición de Pólya.

Proposición 6.1 *Sea Q un sistema de n órdenes de derivación y K un sistema de n grados. Si el par (Q, K) es indescomponible, entonces (Q, K) es un par de Pólya.*

Demostración. Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ y $K = (k_1, \ldots, k_n)$. Siendo (Q, K) indescomponible, para $j = 1, \ldots, n-1$, se cumple $q_j \leq q_{j+1} \leq k_j$; para $j = n$, tenemos $q_n \leq k_{n-1} < k_n$. En definitiva, se cumple $Q \leq K$. □

En general, los elementos de un sistema de órdenes de derivación pueden estar repetidos. La siguiente proposición nos muestra que, si el par (Q, K) es de Pólya, tales repeticiones no se producen en los lugares indicados por los índices de descomposición (y el siguiente).

Proposición 6.2 *Sea $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ un sistema de órdenes de derivación y K un sistema de grados tal que Q es K-descomponible y verifica la K-condición de Pólya. Si j_0 es un índice de descomposición del par (Q, K), entonces se verifica $q_{j_0} < q_{j_0+1}$.*

Demostración. Si j_0 es un índice de descomposición, se cumple $q_{j_0+1} > k_{j_0}$. Por otra parte, Q verifica la condición de Pólya respecto de K, por lo tanto, es $q_{j_0} \leq k_{j_0}$ y, en consecuencia, se cumple $q_{j_0} < q_{j_0+1}$. □

Para finalizar esta sección, veamos que la condición fuerte de Pólya de un par (Q, K) es una extensión de la condición fuerte de Pólya (o condición de Birkhoff) que se emplea habitualmente en la interpolación algebraica clásica.

Proposición 6.3 *Sea E una matriz de interpolación normal con n unos y $K_{n-1} = (0, 1, \ldots, n-1)$. E verifica la condición fuerte de Pólya si y sólo si el par $(Q(E), K_{n-1})$ verifica la condición fuerte de Pólya.*

Demostración. Una matriz de interpolación normal E con n unos verifica la condición fuerte de Pólya si se cumple

$$M_r > r + 1, \quad \text{para } r = 0, \ldots, n-2 \tag{6.3}$$

donde M_r es el número de unos en la matriz E situados en la columna r o anteriores. En términos de órdenes de derivación, M_r representa el número de órdenes de derivación especificados por E que no superan r. Si el sistema de órdenes de derivación de E es $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$, entonces es

$$M_r = \text{card}\{j : q_j \leq r\}.$$

Supongamos que el par $(Q(E), K_{n-1})$ verifica la condición fuerte de Pólya (6.1). Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, se cumple

$$q_1 \leq \cdots \leq q_{j+1} \leq k_j = j - 1$$

y, de ahí, resulta

$$M_{j-1} = \text{card}\{i : q_i \leq j - 1\} > j \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n - 1.$$

Si hacemos $r = j - 1$, obtenemos $M_r > r + 1$ para $r = 0, 1, \ldots, n - 2$.

Supongamos ahora que se verifica (6.3) y sea $j \in \{1, \ldots, n - 1\}$. Como se cumple $M_{j-1} > j$, resulta que en $Q(E)$ existen al menos $j + 1$ órdenes que no superan a $j - 1$, en particular, los $j + 1$ primeros elementos de $Q(E)$ no superan a $j - 1$. Observando que es $k_j = j - 1$, obtenemos $q_{j+1} \leq k_j$ y, por lo tanto, el par $(Q(E), K_{n-1})$ verifica la condición fuerte de Pólya. $\square$

6.3 Descomposición de un par (E, K)

En esta sección introducimos la descomposición de una matriz de interpolación respecto de un sistema de órdenes de derivación K . El nuevo concepto generaliza la descomposición normal de una matriz de interpolación y sirve de base para extender a la interpolación K-algebraica el Teorema de descomposición (Teorema 2.2).

Definición 6.2 *Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de $|E|$ grados. Decimos que el par (E, K) es descomponible si el par $(Q(E), K)$ es descomponible, donde $Q(E)$ es el sistema de órdenes de derivación de E. Denominamos sistema de índices de descomposición del par (E, K) al sistema de índices de descomposición de $(Q(E), K)$, lo representamos por $I(E, K)$. El par (E, K) es indescomponible si $(Q(E), K)$ es indescomponible.*

Cuando sea conveniente, emplearemos la expresión: la *matriz de interpolación E es K-descomponible* o E es *descomponible respecto de K* para indicar que el par (E, K) es descomponible. Análogamente, emplearemos la expresión: *E es indescomponible respecto de K* o E es *K-indescomponible* para indicar que el par (E, K) es indescomponible.

Cuando un par (E, K) es descomponible, podemos realizar una descomposición de (E, K) en dos pares (E_1, K_1) y (E_2, K_2) dividiendo E tras la columna q_{j_0} y K después de la posición j_0, donde j_0 es un índice de descomposición. Veremos posteriormente que esta descomposición permite reducir el estudio de la regularidad de un par (E, K) al estudio de la regularidad de las componentes (E_1, K_1) y (E_2, K_2). La siguiente definición concreta el procedimiento de descomposición.

Definición 6.3 *Sea E una matriz de interpolación con m filas y s columnas, K un sistema de $n = |E|$ grados respecto del cual E verifica la condición de Pólya y es descomponible y j_0 un índice de descomposición del par (E, K). La descomposición de índice j_0 del par (E, K) está formada por los pares $(E^{0,q_{j_0}}, K^{1,j_0})$ y $(E^{q_{j_0}+1,s}, K^{j_0+1,n})$, donde $E^{0,q_{j_0}}$ es la submatriz de E formada por las $q_{j_0} + 1$ primeras columnas de E (de índices $0, \ldots, q_{j_0}$) y $E^{q_{j_0}+1,s}$ es una matriz de interpolación de las mismas dimensiones que E (m filas, s columnas) cuyas primeras $q_{j_0}+1$ columnas son nulas y las restantes columnas (de índices $q_{j_0} + 1, \ldots, s$) coinciden con las de E, $K^{1,j_0} = (k_1, \ldots, k_{j_0})$ y $K^{j_0+1,n} = (k_{j_0+1}, \ldots, k_n)$.*

Observamos que la descomposición del par (E, K) se ha definido únicamente para los pares (E, K) descomponibles que verifican la condición de Pólya; en este caso, la Proposición 6.2 nos asegura que, para cada índice de descomposición j_0, se cumple $q_{j_0} < q_{j_0+1}$. Si $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ es el sistema de órdenes de derivación de E, podemos escribir

$$q_1 \leq \cdots \leq q_{j_0} < q_{j_0+1} \leq \cdots \leq q_n.$$

En consecuencia, la matriz de interpolación $E^{0,q_{j_0}}$ tiene exactamente j_0 unos y el par $(E^{0,q_{j_0}}, K^{1,j_0})$ es un par de interpolación; análogamente, la matriz de interpolación $E^{q_j+1,s}$ tiene exactamente $n - j_0$ unos y, por lo tanto, también el par $(E^{q_j+1,s}, K^{j_0+1,n})$ es un par de interpolación.

En el siguiente ejemplo vemos que si (E, K) es descomponible pero no cumple la condición de Pólya, entonces los pares componentes pueden estar mal definidos.

Ejemplo 6.3.1 *Descomposición y K-condición de Pólya.*

Tomemos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y el sistema de grados $K = (0, 1, 3, 6, 7)$. El sistema de órdenes de derivación de E es $Q(E) = (0, 0, 4, 4, 5)$. Si formamos la tabla de órdenes y grados

K	0	1	3	6	7
0	0	4	4	5	$Q(E)$
$I(E,K)$	1	2	3	4	
		$*$	$*$		

vemos que el par (E, K) tiene dos índices de descomposición. Para el índice de descomposición $j_2 = 3$, obtenemos $q_{j_2} = q_3 = 4$. En este caso, el par $(E^{0,q_{j_2}}, K^{1,j_2})$ es

$$E^{0,q_{j_2}} = E^{0,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad K^{1,j_2} = K^{1,3} = (0, 1, 3)\,.$$

Esta claro que el par $(E^{0,q_{j_2}}, K^{1,j_2})$ no está bien definido, pues $E^{0,4}$ es una matriz de interpolación con 4 unos, mientras que $K^{1,3}$ es un sistema de 3 grados. Si observamos $Q(E)$ y K es inmediato que E no cumple la K-condición de Pólya. Tal como se indica en el comentario precedente, la situación descrita en este ejemplo no se produce cuando el par (E, K) es de Pólya. □

Podemos simplificar la definición de la descomposición de un par (E, K) si definimos una composición de matrices de interpolación como sigue.

Definición 6.4 *Dada una matriz de interpolación E_1 con p filas y r columnas y una matriz de interpolación E_2 con p filas y $m = r + s$ columnas, cuyas primeras r columnas son nulas, definimos $E_1 \perp E_2$ como la matriz de interpolación cuyas primeras r columnas coinciden con las columnas de E_1 y cuyas s últimas columnas coinciden con las s últimas de E_2.*

Esto es, formamos $E_1 \perp E_2$ sustituyendo en E_2 las r primeras columnas (nulas) por E_1.

Ejemplo 6.3.2 *Composición de matrices de interpolación.*

Dadas las matrices de interpolación

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos

$$E_1 \perp E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dada la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

podemos realizar diversas descomposiciones, por ejemplo

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observamos que al realizar una descomposición, pueden aparecer filas totalmente nulas en alguna de las componentes. Esto no supone ningún problema, simplemente, la matriz correspondiente no fija condición alguna sobre el nodo cuya fila es nula. □

Notación Emplearemos la notación

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2) \tag{6.4}$$

para indicar que (E, K) es un par de Pólya y que los pares (E_1, K_1) y (E_2, K_2) son una descomposición de (E, K). La notación (6.4) indica que la matriz de interpolación E verifica la K-condición de Pólya, admite la descomposición $E = E_1 \perp E_2$, el sistema de grados K tiene la estructura de bloques $(K_1|K_2)$ y que el *número de elementos de* K_1 *es un índice de descomposición del par* (E, K).

Ejemplo 6.3.3 *Descomposición de un par* (E, K).

Tomemos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y el sistema de grados

$$K = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13).$$

El sistema de órdenes de derivación de E es

$$Q(E) = (2, 2, 3, 3, 4, 7, 7, 9, 11, 11, 11).$$

Como $Q(E) \leq K$, el par (E, K) es de Pólya. Para obtener los índices de descomposición de (E, K), construimos la tabla de grados, órdenes e índices correspondiente al par $(Q(E), K)$ como en el Ejemplo 6.2.1

K	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13
2	2	3	3	4	7	7	9	11	11	11	Q
$I(E, K)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
					*			*			

A la vista de la tabla, es inmediato que el par (E, K) es descomponible y que su sistema de índices de descomposición es $I(E, K) = (5, 8)$.

En este caso, podemos realizar dos descomposiciones. Para el índice de descomposición $j_1 = 5$, es $q_{j_1} = q_5 = 4$ y obtenemos

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2)$$

con

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1 = (2, 3, 4, 5, 6),$$

$$E_2 = \left(\begin{array}{ccccc|ccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$K_2 = (7, 9, 10, 11, 12, 13).$$

Para el índice de descomposición $j_2 = 8$, es $q_{j_2} = q_8 = 9$ y resulta

$$(E, K) = (E_1', K_1') \perp (E_2', K_2'),$$

donde E_1' está formada por las columnas de E correspondientes a los índices $0, \ldots, q_8 = 9$ y K_1' está formado por los 8 primeros grados de K

$$E_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K_1' = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10).$$

E_2' tiene inicialmente 9 columnas nulas y, a continuación, las dos últimas columnas de E

$$E_2' = \left(\begin{array}{cccccccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

K_2' está formado por los tres últimos grados, esto es, $K_2' = (11, 12, 13)$. □

6.4 Teorema de descomposición

El *Teorema de descomposición* nos permite reducir el estudio de la regularidad de un par descomponible al estudio de la regularidad de los pares componentes.

Proposición 6.4 *Sea K un sistema de grados, E una matriz de interpolación de m filas K-descomponible, $(E,K) = (E_1,K_1) \perp (E_2,K_2)$ una descomposición del par (E,K) y $X = (x_1,\ldots,x_m)$ un sistema de m nodos. La terna (E,K,X) es regular si y sólo si las ternas (E_1,K_1,X) y (E_2,K_2,X) son regulares.*

Demostración. Sea $K = (k_1,\ldots,k_n)$ y j_0 el índice de descomposición que determina la descomposición $(E,K) = (E_1,K_1) \perp (E_2,K_2)$. Tomamos la base de $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$

$$\frac{x^{k_1}}{k_1!},\ldots,\frac{x^{k_{j_0}}}{k_{j_0}!},\frac{x^{k_{j_0+1}}}{k_{j_0+1}!},\ldots,\frac{x^{k_n}}{k_n!},$$

y disponemos los elementos $e_{ij} = 1$ de E según el orden lexicográfico creciente de los pares (i,j) con prevalencia del índice j.

Siendo j_0 un índice de descomposición, se cumple $q_{j_0+1} > k_{j_0}$, por lo tanto, en la matriz de Vandermonde generalizada $V(E,K,X)$, las filas posteriores a la fila j_0-ésima tienen un orden de derivación mayor que k_{j_0}. En consecuencia, obtenemos para $V(E,K,X)$ la siguiente estructura triangular superior por bloques

$$V(E,K,X) = \left(\begin{array}{c|c} V(E_1,K_1,X) & M \\ \hline \mathbf{0}_{(n-j_0)\times j_0} & V(E_2,K_2,X) \end{array}\right),$$

donde M es una matriz con j_0 filas y $n-j_0$ columnas, $\mathbf{0}_{(n-j_0)\times j_0}$ es la matriz nula de dimensiones $(n-j_0)\times j_0$ y $V(E_1,K_1,X)$, $V(E_2,K_2,X)$ son, respectivamente, las matrices de Vandermonde generalizadas de las ternas (E_1,K_1,X) y (E_2,K_2,X) cuando tomamos las bases de $\mathcal{P}_{K_1}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_{K_2}(\mathbb{R})$

$$\frac{x^{k_1}}{k_1!},\ldots,\frac{x^{k_{j_0}}}{k_{j_0}!};\qquad \frac{x^{k_{j_0+1}}}{k_{j_0+1}!},\ldots,\frac{x^{k_n}}{k_n!},$$

y disponemos los elementos de E_1 y E_2 de forma conveniente. Finalmente, obtenemos

$$D(E, K, X) = D(E_1, K_1, X) \cdot D(E_2, K_2, X),$$

donde resulta evidente que $D(E, K, X)$ es no nulo si y sólo si $D(E_1, K_1, X)$ y $D(E_2, K_2, X)$ son no nulos. $\square$

Teorema 6.1 *Supongamos que el par* (E, K) *admite la descomposición*

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2) .$$

E es K-regular ordenada (regular) en $[a, b]$ si y sólo si E_1 es K_1-regular ordenada (regular) en $[a, b]$ y E_2 es K_2-regular ordenada (regular) en $[a, b]$.

Demostración. Sea m el número de filas de E y tomemos un sistema de nodos $X = (x_1, \ldots, x_m)$ con $a \leq x_1 < \cdots < x_m \leq b$. Supongamos que E es K-regular ordenada en $[a, b]$, entonces la terna (E, K, X) es regular y, observando la proposición anterior, también lo son las ternas (E_1, K_1, X) y (E_2, K_2, X). Por lo tanto, E_1 es K_1-regular ordenada y E_2 es K_2-regular ordenada. Recíprocamente, supongamos que E_1 es K_1-regular ordenada en $[a, b]$ y E_2 es K_2-regular ordenada en $[a, b]$. Entonces las ternas (E_1, K_1, X) y (E_2, K_2, X) son regulares y, observando la proposición anterior, E es K-regular ordenada en $[a, b]$. La demostración correspondiente a la regularidad es análoga, suprimiendo la condición $x_1 < \cdots < x_m$. $\square$

Proposición 6.5 *Si* $(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2)$, *entonces E_1 es K_1-regular condicionada y E_2 es K_2-regular condicionada.*

Demostración. Como el par (E, K) es de Pólya, según el Teorema de K-regularidad condicionada, obtenemos que E es K-regular condicionada. Por lo tanto, existe un sistema de nodos X tal que la terna (E, K, X) es regular. Aplicando la Proposición 6.4, obtenemos que las ternas (E_1, K_1, X) y (E_2, K_2, X) son regulares y, por lo tanto, E_1 es K_1-regular condicionada y E_2 es K_2-regular condicionada. $\square$

Proposición 6.6 *Si* $(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2)$, *entonces* (E_1, K_1) *y* (E_2, K_2) *son pares de Pólya.*

Demostración. Es inmediata a partir de la Proposición 6.5, teniendo en cuenta que la K-condición de Pólya es condición necesaria y suficiente de K-regularidad condicionada. $\square$

6.5 Sistema de grados indescomponible mínimo

Observando la formulación de la K-condición fuerte de Pólya (6.1), resulta claro que para una matriz de interpolación E dada, siempre es posible obtener sistemas de grados K tales que el par (E, K) sea indescomponible; para ello, basta con tomar valores de K suficiente grandes. En particular, si es $Q(E) = (q_1, \dots, q_n)$, dado un sistema de n grados $K = (k_1, \dots, k_n)$, es suficiente con exigir $k_1 \geq q_n$ para asegurarnos de que el par (E, K) es indescomponible. En esta sección, abordamos el problema de determinar el menor sistema de grados K tal que el par (E, K) es indescomponible.

Definición 6.5 *Sea $Q(E) = (q_1, \dots, q_n)$ el sistema de órdenes de derivación de una matriz de interpolación E con $|E| \geq 2$. Definimos el sistema de grados $K_E^{**} = (k_1^{**}, \dots, k_n^{**})$ como sigue*

$$K_E^{**} = \begin{cases} k_1^{**} = q_2, \\ k_j^{**} = \max\{k_{j-1}^{**} + 1, q_{j+1}\} \quad \textit{para} \quad j = 2, \dots, n-1, \\ k_n^{**} = k_{n-1}^{**} + 1 \end{cases} \tag{6.5}$$

Denominamos a K_E^{**} sistema de grados indescomponible mínimo de E.

La definición no contempla el caso $n = 1$, este caso es esencialmente indescomponible. Cuando $n = 2$, la parte central de (6.5) no es aplicable, y obtenemos

$$K_E^{**} = \begin{cases} k_1^{**} = q_2, \\ \\ k_2^{**} = q_2 + 1. \end{cases}$$

Ejemplo 6.5.1 *Sistema de grados indescomponible mínimo.*

Tomamos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo sistema de órdenes de derivación es

$$Q(E) = (1, 1, 1, 2, 3, 6, 6, 6, 10, 10).$$

Si seguimos la definición anterior, obtenemos

$$k_1^{**} = q_2 = 1,$$

$$k_2^{**} = \max\{k_1^{**} + 1, q_3\} = \max\{2, 1\} = 2,$$

$$k_3^{**} = \max\{k_2^{**} + 1, q_4\} = \max\{3, 2\} = 3,$$

$$k_4^{**} = \max\{k_3^{**} + 1, q_5\} = \max\{4, 3\} = 4,$$

$$k_5^{**} = \max\{k_4^{**} + 1, q_6\} = \max\{5, 6\} = 6,$$

$$k_6^{**} = \max\{k_5^{**} + 1, q_7\} = \max\{7, 6\} = 7,$$

$$k_7^{**} = \max\{k_6^{**} + 1, q_8\} = \max\{8, 6\} = 8,$$

$$k_8^{**} = \max\{k_7^{**} + 1, q_9\} = \max\{9, 10\} = 10,$$

$$k_9^{**} = \max\{k_8^{**} + 1, q_{10}\} = \max\{11, 10\} = 11,$$

$$k_{10}^{**} = k_9^{**} + 1 = 12.$$

El sistema de grados indescomponible mínimo correspondiente a E es

$$K_E^{**} = (1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12)\,.$$

Podemos obtener K_E^{**} de forma sencilla a partir de la tabla

K_E^{**}										
1	1	1	2	3	6	6	6	10	10	$Q(E)$

Para ello, basta con completar los grados de izquierda a derecha, colocando en cada casilla el menor entero que supera al grado situado a su izquierda y que supera o iguala al orden de derivación situado debajo.

K_E^{**}	1	2	3	4	6	7	8	10	11	12
1	1	1	2	3	6	6	6	10	10	$Q(E)$

$\square$

La siguiente proposición presenta una caracterización muy simple de los sistemas de grados K respecto de los cuales una matriz de interpolación E es indescomponible. Esta caracterización justifica la denominación dada a K_E^{**}.

Proposición 6.7 *Sea E una matriz de interpolación con $n \geq 2$ unos, K_E^{**} el sistema de grados indescomponible mínimo de E y K un sistema de n grados. El par (E, K) es indescomponible si y sólo si se cumple $K_E^{**} \leq K$.*

Demostración. Sea

$$K_E^{**} = (k_1^{**}, \ldots, k_n^{**})\,, \quad Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)\,, \quad K = (k_1, \ldots, k_n)$$

y supongamos que se verifica $K_E^{**} \leq K$. Veamos que, en tal caso, el par (E, K) es indescomponible. En efecto, en primer lugar se cumple $q_2 = k_1^{**} \leq k_1$, de donde obtenemos $q_2 \leq k_1$. Por otra parte, se verifica

$$k_j^{**} = \max\{k_{j-1}^{**} + 1, q_{j+1}\} \quad \text{para} \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

de donde obtenemos $q_{j+1} \leq k_j^{**} \leq k_j$ y, en consecuencia $q_{j+1} \leq k_j$. En definitiva, se cumple $q_{j+1} \leq k_j$ para $j = 1, \ldots, n-1$ y, por lo tanto, el par (E, K) es indescomponible.

Veamos ahora que se cumple el recíproco, esto es, que si el par (E, K) es indescomponible, entonces se verifica $K_E^{**} \leq K$. De la condición $q_2 \leq k_1$, como $k_1^{**} = q_2$, obtenemos

$$k_1^{**} \leq k_1. \tag{6.6}$$

Para $j \in \{2, \ldots, n-1\}$, sabemos que es $k_j^{**} = \max\{k_{j-1}^{**} + 1, q_{j+1}\}$. Si sucede $k_j^{**} = q_{j+1}$, entonces, siendo (Q, K) indescomponible, se cumple $q_{j+1} \leq k_j$ y obtenemos $k_j^{**} \leq k_j$. En el subcaso $k_j^{**} = k_{j-1}^{**} + 1$, podemos comprobar que si suponemos $k_j^{**} > k_j$, obtenemos una contradicción. En efecto, en este caso sería $k_{j-1}^{**} + 1 > k_j$, de donde obtenemos $k_{j-1}^{**} > k_j - 1 \geq k_{j-1}$. No puede ser $k_{j-1}^{**} = q_j$, pues entonces se cumpliría $q_j = k_{j-1}^{**} > k_{j-1}$ y $j-1$ sería un índice de descomposición de par (E, K) contra hipótesis. Por lo tanto, debe cumplirse $k_{j-1}^{**} = k_{j-2}^{**} + 1$. De ahí obtenemos $k_{j-2}^{**} + 1 > k_{j-1}$ y luego $k_{j-2}^{**} > k_{j-1} - 1 \geq k_{j-2}$. En definitiva es $k_{j-2}^{**} > k_{j-2}$. Reiterando el razonamiento, llegamos a $k_1^{**} > k_1$. Pero esto nos lleva a $q_2 > k_1$, que contradice la hipótesis de que (E, K) es indescomponible; en consecuencia, se cumple

$$k_j^{**} \leq k_j, \quad \text{para} \quad j = 2, \ldots, n-1 \tag{6.7}$$

Finalmente, veamos que se cumple $k_n^{**} \leq k_n$. Sabemos que es $k_n^{**} = k_{n-1}^{**} + 1$, si suponemos que se cumple $k_n^{**} > k_n$, razonando de forma similar a como se ha hecho en el subcaso precedente, obtenemos $k_{n-1}^{**} > k_{n-1}$ y, reiterando el razonamiento, resulta una contradicción. En definitiva, también en este último caso, debe cumplirse $k_n^{**} \leq k_n$ y, observando (6.6) y (6.7), obtenemos $K_E^{**} \leq K$. $\square$

A partir de la proposición precedente, es inmediato que un par de Pólya (E, K) es descomponible si y sólo si se cumple $K_E^{**} \not\leq K$. Obviamente, en la mayoración uniforme de n-plas, la condición $K_E^{**} \not\leq K$ no implica que se cumpla $K_E^{**} > K$; el siguiente ejemplo ilustra esta circunstancia.

Ejemplo 6.5.2 *Par* (E, K) *descomponible con* $K_E^{**} \not> K$.

Consideramos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su sistema de órdenes de derivación es

$$Q(E) = (0, 0, 5, 5, 8)$$

y su sistema de grados indescomponible mínimo es

$$K_E^{**} = (0, 5, 6, 8, 9)\,.$$

Tomamos el sistema de grados

$$K = (0, 4, 7, 9, 10)\,.$$

Si formamos la tabla de grados, órdenes e índices

K	0	4	7	9	10
0	0	5	5	8	$Q(E)$
$I(E, K)$	1	2	3	4	5
		$*$			

podemos apreciar que $j = 2$ es un índice de descomposición del par (E, K). Sin embargo, no se cumple $K_E^{**} > K$, pues los sistema de grados K_E^{**} y K no son comparables. $\square$

Si un par (E, K) es descomponible, debe verificarse $K_E^{**} \not\leq K$. Esto es, para algún índice $j \in \{1, \ldots, n\}$, se cumple $k_j^{**} > k_j$. Es razonable esperar que exista alguna relación entre los índices para los que se cumple $k_j^{**} > k_j$ y los índices de descomposición del par (E, K). La siguiente proposición establece que la *primera ocurrencia* de $k_j^{**} > k_j$ se produce en un *índice de descomposición*.

Proposición 6.8 *Dada una matriz de interpolación* E *con* $n \geq 2$ *unos, sea* $K_E^{**} = (k_1^{**}, \ldots, k_n^{**})$ *el sistema de grados indescomponible mínimo de* E *y* $K = (k_1, \ldots, k_n)$ *un sistema de grados tal que el par* (E, K) *es descomponible. Si* j_0 *es el menor índice para el cual se cumple* $k_j^{**} > k_j$, *esto es*

$$j_0 = \min\{j : k_j^{**} > k_j\}; \tag{6.8}$$

entonces j_0 *es un índice de descomposición de* (E, K).

Demostración. Sea $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ el sistema de órdenes de derivación de E y recordemos que los índices de descomposición del par (E, K) son aquellos índices j para los que se verifica $q_{j+1} > k_j$.

Si es $j_0 = 1$, como $k_1^{**} = q_2$, obtenemos $q_2 > k_1$ y j_0 es un índice de descomposición.

Para $j_0 \in \{2, \ldots, n-1\}$, consideramos dos subcasos, según sea $k_{j_0}^{**} = q_{j_0+1}$ o $k_{j_0}^{**} = k_{j_0-1}^{**} + 1$. En el primer subcaso, resulta directamente $q_{j_0+1} > k_{j_0}$. En el segundo subcaso obtenemos $k_{j_0-1}^{**} + 1 = k_{j_0}^{**} > k_{j_0}$, de donde resulta $k_{j_0-1}^{**} > k_{j_0} - 1 \geq k_{j_0-1}$, lo que contradice (6.8). Por lo tanto, este caso no sucede.

Finalmente, si suponemos $j_0 = n$, teniendo en cuenta que es $k_n^{**} = k_{n-1}^{**} + 1$, razonamos de forma análoga a como se ha hecho en el subcaso precedente y resulta la contradicción $k_{j_0-1}^{**} > k_{j_0-1}$. Por lo tanto, este caso tampoco sucede. □

Ejemplo 6.5.3 *Índices de descomposición y mayoración $k_j^{**} > k_j$.*

Consideramos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo sistema de órdenes de derivación es

$$Q(E) = (1, 1, 5, 5, 7, 7)\,.$$

Para obtener el sistema de grados indescomponible mínimo de E, procedemos como en el Ejemplo 6.5.1 y formamos la tabla

K_E^{**}	1	5	6	7	8	9
1	1	5	5	7	7	$Q(E)$

de donde resulta

$$K_E^{**} = (1, 5, 6, 7, 8, 9)\,.$$

Si tomamos el sistema de grados

$$K = (1, 3, 5, 7, 8, 9)\,,$$

observamos que se cumple $k_2^{**} > k_2$ y $k_3^{**} > k_3$. El menor índice para el cual se cumple $k_j^{**} > k_j$ es $j_0 = 2$. Si formamos la tabla de grados, órdenes e índices

K	1	3	5	7	8	9
1	1	5	5	7	7	$Q(E)$
$I(E,K)$	1	2	3	4	5	6
		$*$				

podemos ver que, tal como se afirma en la proposición precedente, $j_0 = 2$ es un índice de descomposición del par (E, K). Sin embargo, para $j = 3$ se cumple $q_4 \leq k_3$ a pesar de ser $k_3^{**} > k_3$. $\square$

6.6 Matrices totalmente indescomponibles

Hemos visto que, en principio, el carácter descomponible o indescomponible de una matriz de interpolación depende del sistema de grados considerado. En esta sección estamos interesados en caracterizar las matrices de interpolación que son *esencialmente* indescomponibles, esto es, aquellas matrices de interpolación E tales que el par (E, K) es indescomponible para cualquier elección del sistema de grados K. Tales matrices pueden caracterizarse mediante una condición simple: $K_E^* = K_E^{**}$, donde K_E^* es el sistema de grados de Pólya mínimo que hemos estudiado en la Sección 4.6.

Definición 6.6 *Sea E una matriz de interpolación con $n \geq 2$ unos. Decimos que E es totalmente indescomponible si el par (E, K) es indescomponible para toda elección del sistema de grados K respecto del cual E verifica la condición de Pólya. Cuando E no sea totalmente indescomponible, diremos que E es descomponible.*

La siguiente proposición presenta la relación de mayoración que existe entre el sistema de grados de Pólya mínimo K_E^* y el sistema de grados indescomponible mínimo K_E^{**} de una matriz de interpolación.

Proposición 6.9 *Sea E una matriz de interpolación con $|E| \geq 2$, entonces se verifica $K_E^* \leq K_E^{**}$.*

Demostración. El par $(Q(E), K_E^{**})$ es indescomponible, por lo tanto, según la Proposición 6.1, resulta que $(Q(E), K_E^{**})$ es un par de Pólya. Sabemos además que todo sistema de grados de un par de Pólya mayora uniformemente al sistema de grados de Pólya mínimo (Proposición 4.11), en consecuencia, se cumple $K_E^* \leq K_E^{**}$. $\square$

Proposición 6.10 *Sea E una matriz de interpolación con $|E| \geq 2$. E es totalmente indescomponible si y solo si se verifica $K_E^* = K_E^{**}$.*

Demostración. Supongamos que se verifica $K_E^* = K_E^{**}$ y sea K un sistema de grados tal que el par (E, K) es de Pólya. Entonces se cumple (Proposición 4.11) $K_E^* \leq K$, de donde resulta $K_E^{**} \leq K$ y, en consecuencia (Proposición 6.7), el par (E, K) es indescomponible.

Para demostrar el recíproco, veamos que si se cumple $K_E^* \neq K_E^{**}$, entonces podemos obtener un sistema de grados K tal que el par $(Q(E), K)$ es de Pólya y descomponible. En efecto, nos basta con tomar $K = K_E^*$. En primer lugar, sabemos (Proposición 4.10) que E verifica la condición de Pólya respecto de K_E^*. Según la Proposición 6.9, debe cumplirse $K_E^* \leq K_E^{**}$, además, como por hipótesis es $K_E^* \neq K_E^{**}$, obtenemos $K_E^{**} \nleq K_E^*$ y, por lo tanto (Proposición 6.7), el par (E, K_E^*) es descomponible. □

Cuando una matriz de interpolación E es descomponible, existen sistemas de grados K que dan lugar a pares (E, K) de Pólya descomponibles. En la siguiente proposición se indica que podemos recurrir al sistema de grados de Pólya mínimo K_E^* para verificar la descomponibilidad de E.

Proposición 6.11 *Sea E una matriz de interpolación con $|E| \geq 2$. E es descomponible si y sólo si el par (E, K_E^*) es descomponible.*

Demostración. Según la proposición precedente, E es descomponible si y sólo si se verifica $K_E^* \neq K_E^{**}$. Como se cumple $K_E^* \leq K_E^{**}$ (Proposición 6.9), obtenemos que E es descomponible si y solo si se verifica $K_E^{**} \nleq K_E^*$ y esto equivale a que el par (E, K_E^*) sea descomponible (Proposición 6.7). □

Ejemplo 6.6.1 *Matrices de interpolación descomponibles y totalmente indescomponibles.*

Consideramos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A partir de la tabla

K_E^*	2	3	4	5	8
$Q(E)$	2	2	3	3	8

obtenemos que su sistema de grados de Pólya mínimo es

$$K_E^* = (2, 3, 4, 5, 8).$$

Seguidamente, formamos la tabla

K_E^{**}	2	3	4	8	10
2	2	3	3	8	$Q(E)$

de donde obtenemos el sistema de grados indescomponible mínimo

$$K_E^{**} = (2, 3, 4, 8, 10)\,.$$

Como que K_E^* y K_E^{**} no coinciden, la matriz E es descomponible. Si formamos la tabla de grados, ordenes e índices para el par (E, K_E^*)

K_E^*	2	3	4	5	8
2	2	3	3	8	$Q(E)$
$I(E, K_E^*)$	1	2	3	4	5
				$*$	

podemos apreciar que, tal como se indica en la Proposición 6.11, el par (E, K_E^*) es descomponible. Para la matriz de interpolación

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema de grados de Pólya mínimo

$$K_{E_1}^* = (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)\,.$$

Si formamos la tabla de grados y órdenes del par $(E_1, K_{E_1}^*)$

$K_{E_1}^*$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	2	3	3	3	5	5	6	$Q(E_1)$

obtenemos que el par $\left(E_1, K_{E_1}^*\right)$ es indescomponible y, en consecuencia, la matriz E_1 es totalmente indescomponible. $\square$

En la siguiente proposición se establece una interesante condición necesaria para que una matriz de interpolación sea totalmente indescomponible: su sistema de grados de Pólya mínimo K_E^* debe estar formado por grados consecutivos.

Proposición 6.12 *Sea E una matriz de interpolación con $|E| \geq 2$. Si E es totalmente indescomponible, entonces $K_E^* = (k_1^*, \ldots, k_n^*)$ esta formado por grados consecutivos; esto es, se verifica $k_j^* = k_{j-1}^* + 1$ para $j = 2, \ldots, n$.*

Demostración. Para demostrar esta proposición, veamos que si existen dos grados no consecutivos en K_E^*, entonces el par (E, K_E^*) es descomponible. Sea j_0 un índice tal que

$$k_{j_0}^* > k_{j_0-1}^* + 1 \tag{6.9}$$

Según la definición de los elementos del sistema de grados de Pólya mínimo, se cumple $k_{j_0}^* = \max\{k_{j_0-1}^* + 1, q_{j_0}\}$. De la condición (6.9), resulta $k_{j_0}^* = q_{j_0}$; ahora bien, los grados son enteros estrictamente crecientes, por lo tanto, obtenemos $q_{j_0} = k_{j_0}^* > k_{j_0-1}^*$ y, en consecuencia, podemos afirmar que $j_0 - 1$ es un índice de descomposición del par (E, K_E^*). $\square$

Obviamente, de esta condición necesaria de indescomponibilidad se deriva una condición suficiente de descomponibilidad: *si el sistema de grados de Pólya mínimo contiene grados no consecutivos, entonces E es descomponible; en particular, el par (E, K_E^*) es descomponible.* El siguiente ejemplo aplica esta condición suficiente para determinar la descomponibilidad de una matriz de interpolación. Sin embargo, es preciso hacer notar que la condición no es necesaria, pues existen matrices descomponibles cuyo sistema de grados de Pólya mínimo está formado por grados consecutivos.

Ejemplo 6.6.2 *Condición suficiente de matriz descomponible.*

Consideramos la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su sistema de órdenes de derivación es

$$Q(E) = (3, 3, 3, 4, 4, 11, 11, 13)\,.$$

El sistema de grados de Pólya mínimo de E es

$$K_E^* = (3, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13)\,.$$

Vemos que K_E^* no está formado por grados consecutivos, por lo tanto, podemos afirmar que la matriz de interpolación E es descomponible. En particular, el par (E, K_E^*) es descomponible. La tabla de grados, órdenes e índices

K_E^*	3	4	5	6	7	11	12	13
3	3	3	4	4	11	11	13	$Q(E)$
$I(E, K_E^*)$	1	2	3	4	5	6	7	8
					*			

muestra que, en efecto, (E, K_E^*) es descomponible. Por otra parte, si consideramos la matriz de interpolación de Abel

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Obtenemos $K_E^* = (0, 1, 2)$ y $K_E^{**} = (1, 2, 3)$. A pesar de que K_E^* está formado por grados consecutivos, obtenemos $K_E^* \neq K_E^{**}$ y, por lo tanto, E es descomponible. $\square$