Capítulo 8

Conclusiones y futuras líneas de investigación

8.1 Conclusiones

En este trabajo se ha *completado un marco teórico adecuado para la interpolación de Birkhoff mediante polinomios lacunarios.* Más concretamente, podemos resumir los principales resultados particulares obtenidos como sigue:

1. Formulación de la *K-condición de Pólya,* que extiende a la interpolación K-algebraica la condición de Pólya de la interpolación algebraica clásica.

2. Caracterización de las matrices de interpolación *condicionalmente K-regulares.*

3. Determinación del *sistema de grados de Pólya mínimo* K_E^*.

4. Formulación de la *propiedad de inclusión* (*inclusión ordenada*). La propiedad de inclusión (inclusión ordenada) es condición necesaria de K-regularidad (K-regularidad ordenada) sobre $[0, 1]$.

5. Estudio completo de la *K-regularidad* para *problemas de un nodo.*

6. Estudio de la *K-regularidad ordenada* sobre $[0, 1]$ para *problemas de dos nodos.* Determinación de una condición necesaria y suficiente de K-regularidad ordenada sobre $[0, b]$ para problemas de dos nodos con $x_1 = 0$; extensión de la condición a intervalos de la forma $[a, 0]$.

7. Determinación de una condición necesaria y suficiente de K-regularidad ordenada sobre intervalos de la forma $[a, 0]$ y $[0, b]$ para *matrices de interpolación hermitianas.* Determinación de una condición necesaria y suficiente de regularidad ordenada sobre $[0, b]$ para *problemas de interpolación K-algebraicos casi-hermitianos* con $x_1 = 0$; extensión de la condición a intervalos de la forma $[a, 0]$.

8. Definición del concepto de *secuencia K-soportada* y obtención de *condiciones suficientes de K-regularidad ordenada* sobre $[0, b]$ que generalizan el *Teorema de Atkinson–Sharma*; extensión de las condiciones a intervalos de la forma $[a, 0]$.

9. Formulación de la *K-condición fuerte de Pólya,* que extiende a la interpolación K-algebraica la condición fuerte de Pólya (condición de Birkhoff) de la interpolación algebraica.

10. Extensión del concepto de *descomposición normal* y generalización del *Teorema de descomposición normal* a la interpolación K-algebraica.

11. Obtención del *sistema de grados indescomponible mínimo* K_E^{**} de una matriz de interpolación. Caracterización de las *matrices de interpolación totalmente indescomponibles.*

12. Construcción de una *forma estándar* para representar los pares (E, K) que permite eliminar las columnas iniciales nulas de E mediante una reducción de grados.

13. Construcción de una *descomposición canónica* para pares (E, K), donde cada componente es indescomponible y está en forma estándar. Formulación de un *Teorema de descomposición canónica* que permite caracterizar la regularidad de un par (E, K) mediante la regularidad de sus componentes canónicos.

14. Formulación de *condiciones suficientes de singularidad ordenada* sobre $[0, b]$ para pares (E, K) *indescomponibles en forma canónica.* Las condiciones extienden el concepto de *síngleton soportado* y generalizan la *condición suficiente de singularidad* de Lorentz y Zeller para matrices de interpolación de Birkhoff. Extensión de las condiciones suficientes de singularidad ordenada a intervalos de la forma $[a, 0]$.

En cuanto a la exploración de las posibilidades de los polinomios lacunarios como aproximantes, en el Apéndice adjunto se han construido los polinomios interpoladores para algunos casos simples de interpolación de Birkhoff K-algebraica sobre $[0,1]$. El espacio de interpolación $\mathcal{P}_K(\mathbb{R})$, se ha determinado mediante *condiciones adicionales* del tipo $D^{(j)}p(x_i) \simeq D^{(j)}f(x_i)$.

Los resultados obtenidos se han aplicado a la interpolación de funciones de *gran crecimiento*, en concreto, de funciones exponenciales del tipo

$$f(x) = e^{m\,x}, \quad m > 0,$$

y de funciones racionales del tipo

$$f(x) = \frac{1}{(x-1-\epsilon)^m}, \quad m > 0, \quad \epsilon > 0,$$

que poseen una asíntota vertical arbitrariamente próxima a $x = 1$.

También se ha desarrollado una estrategia simple de *interpolación polinomial K-algebraica a trozos con partición homogénea* que se ha aplicado a la interpolación de funciones $f(x) = e^{m\,x}$ sobre intervalos $[a,b]$. Para funciones racionales del tipo $f(x) = 1/\left(x-1-\epsilon\right)^m$, se ha construido una estrategia de *interpolación polinomial K-algebraica a trozos con partición no homogénea* sobre intervalos $[1, x_n]$ con $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1+\epsilon$.

En todos los casos, se han estudiado ejemplos concretos que *confirman con toda claridad el potencial interés práctico de la interpolación K-algebraica.*

8.2 Resumen de resultados obtenidos

En los apartados siguientes, se detallan de forma sucinta los principales resultados obtenidos.

K-condición de Pólya y Teorema de regularidad condicionada

Denominamos *sistema de n grados* a una n-pla $K = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ que verifica $0 \le k_1 < \cdots < k_n$. El *sistema de órdenes de derivación* de una matriz de interpolación E con n unos es la n-pla $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$, que se obtiene ordenando de forma no decreciente (eso es: $q_1 \le \cdots \le q_n$) los órdenes de derivación especificados por E. Para la matriz de interpolación

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos el sistema de órdenes de derivación $Q(E) = (1, 2, 2, 4, 5, 7)$.

Una matriz de interpolación E verifica la *K-condición de Pólya* si se cumple $Q(E) \leq K$ ($\leq$ representa la mayoración uniforme de n-plas). Cuando el sistema de grados es $K_{n-1} = (0, 1, \ldots, n-1)$, la K-condición de Pólya es equivalente al cumplimiento de la *condición de Pólya* de la interpolación algebraica clásica.

La K-condición de Pólya nos permite extender la condición necesaria y suficiente de regularidad condicionada: Una matriz de interpolación E es condicionalmente K-regular si y sólo si E verifica la K-condición de Pólya (Teorema 4.1)

Sistema de grados de Pólya mínimo

En la interpolación algebraica clásica, si una matriz de interpolación E no verifica la condición de Pólya, entonces E es totalmente singular y no es apta para construir un problema de interpolación. En contraste, en la interpolación K-algebraica, dada una matriz de interpolación arbitraria, existen una infinidad de sistemas de grados que verifican $Q(E) \leq K$, respecto de los cuales, E es condicionalmente K-regular.

El sistema de grados de Pólya mínimo correspondiente a una matriz de interpolación, que representamos por K_E^*, es el menor de los sistemas de grados K que verifica $Q(E) \leq K$ (Proposición 4.11). Si el sistema de órdenes de derivación de E es $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$, podemos construir $K_E^* = (k_1^*, \ldots, k_n^*)$ mediante la expresión

$$K_E^* = \begin{cases} k_1^* = q_1, \\ k_j^* = \max\{k_{j-1}^* + 1, q_j\}, \quad \text{para} \quad j = 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Una forma práctica de obtener K_E^* consiste en formar la fila de fusión F^* de la matriz E. Entonces, los grados de K_E^* coinciden con los órdenes de derivación especificados en F^*.

Una matriz de interpolación E con n unos verifica la condición de Pólya de la interpolación algebraica clásica si y sólo si $K_E^* = (0, 1, \ldots, n-1)$ (Proposición 4.12).

La propiedad de inclusión

Dadas $Q = (q_1, \ldots, q_n)$ y $K = (k_1, \ldots, k_m)$, decimos que Q está incluida en K si se verifica $\{q_j : j = 1, \ldots, n\} \subset \{k_j : j = 1, \ldots, m\}$. En tal caso, escribimos $Q \subseteq K$.

Una matriz de interpolación E es K*-inclusiva* si se cumple $Q(E) \subseteq K$. Si $0 \in A$, la propiedad K-inclusiva es condición necesaria de K-regularidad sobre A (Proposición 5.1).

Representamos por $Q_1(E)$ al sistema de órdenes de derivación formado por los órdenes de derivación especificados en la *primera fila* de E. Una matriz de interpolación E es K*-inclusiva ordenada* si se verifica $Q_1(E) \subseteq K$. La propiedad K-inclusiva ordenada es condición necesaria de K-regularidad ordenada en $[0,1]$ (Proposición 5.2).

En la interpolación algebraica clásica, el cumplimiento de la condición de Pólya implica el cumplimiento de la condición K-inclusiva.

K-regularidad para problemas de un nodo

El siguiente cuadro resume los resultados de K-regularidad para problemas de un nodo. E representa una matriz de interpolación de una fila (Proposiciones 5.3 y 5.4).

- ▶ $x = 0$, $(E,(x))$ K-regular $\Leftrightarrow$ E es K-inclusiva.
- ▶ $x \neq 0$, $(E,(x))$ K-regular $\Leftrightarrow$ E verifica K-Pólya.

K-regularidad para problemas de dos nodos

El siguiente cuadro resume los resultados obtenidos para la K-regularidad ordenada sobre $[0,1]$. E representa una matriz de interpolación de dos filas y el sistema de nodos es $X = (x_1, x_2)$ con $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ (Proposición 5.8).

- ▶ E no K-Pólya $\rightarrow$ E totalmente K-singular.
- ▶ E K-Pólya
  - ▶ $x_1 = 0$ (E,X) es K-regular $\Leftrightarrow$ E es K-inclusiva ordenada.
  - ▶ $x_1 \neq 0$ $\rightarrow$ No se puede decidir.

Estos resultados contrastan con los correspondientes a la interpolación algebraica clásica, donde las matrices de dos filas de Pólya son regulares. En el

Ejemplo 5.4.2, puede verse un caso de matriz de interpolación de dos filas que verifica la K-condición de Pólya y es K-singular ordenada sobre $[0, 1]$.

Sobre intervalos de la forma $[0, b]$, valen los mismos criterios que sobre $[0, 1]$ (Proposición 5.9). Para intervalos de la forma $[a, 0]$, sea $\widehat{E}$ la matriz que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E y $X = (x_1, x_2)$ un sistema de nodos con $a \leq x_1 < x_2 \leq 0$. Cuando $x_2 = 0$, el par (E, X) es K-regular si y sólo si $\widehat{E}$ verifica la K-condición de Pólya y es K-inclusiva ordenada (Proposición 5.10). Si $x_2 \neq 0$, no podemos decidir la K-regularidad de (E, X).

K-regularidad ordenada para matrices de interpolación hermitianas y casi-hermitianas

Para matrices de interpolación hermitianas, podemos asegurar la K-regularidad ordenada sobre el intervalo $(0, 1]$, esto es, cuando el primer nodo no es nulo (Proposición 5.12). Sobre [0,1], obtenemos la siguiente caracterización: una matriz de interpolación hermitiana E es K-regular ordenada en $[0, 1]$ si y sólo si E es K-inclusiva ordenada (Proposición 5.14).

Para matrices de interpolación casi-hermitianas que verifican la K-condición de Pólya, la propiedad K-inclusiva ordenada sólo nos permite caracterizar la K-regularidad ordenada sobre $[0, 1]$ para los problemas de interpolación (E, K, X) con $0 = x_1 < \cdots < x_n \leq 1$ (Proposición 5.16).

Los resultados obtenidos sobre $[0, 1]$ se extienden directamente a intervalos de la forma $[0, b]$ (Proposiciones 5.15 y 5.17). Sobre intervalos $[a, 0]$, empleamos la matriz $\widehat{E}$, que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E. Una matriz de interpolación hermitiana E es K-regular ordenada en $[a, 0]$ si y sólo si $\widehat{E}$ es K-inclusiva ordenada (Proposición 5.15). Si E es una matriz casi-hermitiana que verifica la K-condición de Pólya y X es un sistema de nodos con $a \leq x_1 < \cdots < x_n = 0$, entonces el par (E, X) es K-regular si y sólo si $\widehat{E}$ es K-inclusiva ordenada (Proposición 5.18).

Condición suficiente de K-regularidad ordenada

Dada una matriz de interpolación $E = (e_{ij})$, hemos introducido la notación $S^r_{ij}(E)$ para representar una la *secuencia* de unos de E de longitud r cuyo primer elemento es $e_{ij} = 1$. En la interpolación algebraica clásica, la secuencia $S^r_{ij}(E)$ está *soportada* si existen en E dos elementos $e_{i_1,j_1} = 1$, $e_{i_2,j_2} = 1$, tales que $i_1 < i < i_2$ y $j_1, j_2 < j$.

Sea $K = (k_1, \ldots, k_n)$, $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ y $K^* = (k_1^*, \ldots, k_r^*)$ formado por los grados de $K_{k_n} = (0, 1, \ldots, k_n)$ que no están en K. Decimos que la *secuencia* $S_{ij}^r(E)$ *está* K*-soportada* si se cumple: (i) existe un elemento $e_{i_2,j_2} = 1$ que verifica $i_2 > i$ y $j_2 < j$, (ii) o bien existe un elemento $e_{i_1,j_1} = 1$ que verifica $i_1 < i$ y $j_2 < j$, o bien, se cumple $k_1^* < j$.

El concepto de secuencia K-soportada nos permite extender el Teorema de Atkinson–Sharma a la interpolación K-algebraica en los siguientes términos: Sea K un sistema de grados y E una matriz de interpolación que verifica la K-condición de Pólya y es K-inclusiva ordenada. Si E carece de secuencias impares K-soportadas, entonces E es K-regular ordenada en $[0, b]$ (Teorema 5.1, Proposición 5.21).

Sobre intervalos $[a, 0]$, si la matriz $\widehat{E}$ (que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E) es K-inclusiva ordenada y que carece de secuencias impares K-soportadas, entonces E es K-regular ordenada sobre $[a, 0]$ (Proposición 5.21).

K-condición fuerte de Pólya y Teorema de descomposición

Sea E una matriz de interpolación de n unos, $K = (k_1, \ldots, k_n)$ un sistema de n grados y $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ el sistema de órdenes de derivación de E. Decimos que la matriz E es K*-indescomponible* (o que el *par* (E, K) *es indescomponible*) si se verifica

$$q_{j+1} \leq k_j, \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n-1 \tag{8.1}$$

Si el índice $j_0 \in \{1, \ldots, n-1\}$ verifica $q_{j_0+1} > k_{j_0}$, decimos que E es K-*descomponible* y que j_0 es un *índice de descomposición del par* (E, K).

Hemos denominado *condición fuerte de Pólya* del par (E, K) (K-condición fuerte de Pólya para E) al sistema de condiciones (8.1). Cuando el sistema de grados es $K = (0, 1, \ldots, n-1)$, las condiciones (8.1) son equivalentes a la *condición fuerte de Pólya* de problema algebraico clásico.

Sea E una matriz de interpolación con m filas, s columnas y n unos, K un sistema de n grados respecto del cual E verifica la condición de Pólya y es descomponible y j_0 un índice de descomposición del par (E, K). La *descomposición de índice* j_0 del par (E, K) está formada por los pares $(E^{0,q_{j_0}}, K^{1,j_0})$ y $(E^{q_{j_0}+1,s}, K^{j_0+1,n})$, donde:

- $E^{0,q_{j_0}}$ es la submatriz de E formada por las $q_{j_0} + 1$ primeras columnas de E (de índices $0, \ldots, q_{j_0}$).

- $K^{1,j_0} = (k_1, \ldots, k_{j_0})$.
- $E^{q_{j_0}+1,s}$ es una matriz de interpolación de las mismas dimensiones que E (m filas, s columnas) cuyas primeras $q_{j_0}+1$ columnas (de índices $0, \ldots, q_{j_0}$) son nulas y las restantes columnas (de índices $q_{j_0}+1, \ldots, s$) coinciden con las de E.
- $K^{j_0+1,n} = (k_{j_0+1}, \ldots, k_n)$.

Empleamos la notación

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2)$$

para indicar que (E, K) puede descomponerse en los pares (E_1, K_1), (E_2, K_2). Si el par (E, K) es descomponible, se puede reducir el estudio de la regularidad de (E, K) al estudio de la regularidad de sus pares componentes: Si el par (E, K) admite la descomposición

$$(E, K) = (E_1, K_1) \perp (E_2, K_2)\,,$$

entonces E es K-regular ordenada (regular) en $[a, b]$ si y sólo si E_1 es K_1-regular ordenada (regular) en $[a, b]$ y E_2 es K_2-regular ordenada (regular) en $[a, b]$ (Teorema 6.1).

Sistema de grados indescomponible mínimo. Matrices totalmente indescomponibles

Observando la condición fuerte de Pólya para el par (E, K) dada en (8.1), está claro que, para toda matriz de interpolación E, existen sistemas de grados K tales que el par (E, K) es indescomponible.

Dada una matriz de interpolación E con $n \geq 2$ unos, existe un sistema de grados K_E^{**} que es el menor de los sistemas de grados (para la mayoración uniforme de n-plas) respecto de los cuales E es indescomponible. Lo hemos denominado *sistema de grados indescomponible mínimo.*

Si $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ y $K_E^{**} = (k_1^{**}, \ldots, k_n^{**})$, resulta

$$K_E^{**} = \begin{cases} k_1^{**} = q_2, \\ k_j^{**} = \max\{k_{j-1}^{**}+1, q_{j+1}\}, \quad \text{para} \quad j = 2, \ldots, n-1, \\ k_n^{**} = k_{n-1}^{**} + 1. \end{cases}$$

Hemos denominado matrices de interpolación *totalmente indescomponibles* a aquellas matrices de interpolación tales que el par (E, K) es indescomponible para todo sistema de grados respecto del cual E verifica la condición de Pólya. Observemos que toda matriz de interpolación que verifique la condición fuerte de Pólya (esto es, indescomponible en la interpolación algebraica clásica) es totalmente indescomponible.

Podemos caracterizar las matrices de interpolación totalmente indescomponibles empleando el sistema de grados de Pólya mínimo K_E^* y el sistema de grados indescomponible mínimo K_E^{**}: Sea E una matriz de interpolación con $n \geq 2$ unos, E es totalmente indescomponible si y solo si se verifica $K_E^* = K_E^{**}$ (Proposición 6.10).

Si nos apoyamos únicamente en el sistema de grados de Pólya mínimo, podemos establecer una interesante condición necesaria para que una matriz sea totalmente indescomponible: Dada E una matriz de interpolación con $n \geq 2$ unos, sea $K_E^* = (k_1^*, \ldots, k_n^*)$ su sistema de grados de Pólya mínimo. Si E es totalmente indescomponible, entonces K_E^* esta formado por grados consecutivos, esto es, para $j = 2, \ldots, n$, se verifica $k_j^* = k_{j-1}^* + 1$ (Proposición 6.12).

Forma estándar de un par (E, K). Teorema de traslación de órdenes y grados

Hemos denominado *forma estándar de una matriz de interpolación E* a la matriz de interpolación $\bar{E}$ que se obtiene cuando eliminamos en E la filas totalmente nulas, las columnas iniciales nulas y las columnas finales nulas.

Sea E una matriz de interpolación que verifica la K-condición de Pólya, $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ su sistema de órdenes de derivación, $\bar{E}$ la forma estándar de E y $\bar{K} = K - q_1$ (sistema de grados con elementos $\bar{k}_j = k_j - q_1$). Decimos que $(\bar{E}, \bar{K})$ es la *forma estándar del par (E, K)*.

La regularidad de los pares (E, K) de Pólya se reduce a la regularidad de su forma estándar: Sea E una matriz de interpolación y K un sistema de grados tal que el par (E, K) es de Pólya. El par (E, K) es regular (regular ordenado) si y solo si su forma estándar $\left(\bar{E}, \bar{K}\right)$ es regular (regular ordenado) (Teorema 7.1).

Descomposición canónica

Sea E una matriz de interpolación, $Q(E) = (q_1, \ldots, q_n)$ su sistema de órdenes de derivación, $K = (k_1, \ldots, k_n)$ un sistema de grados tal que (E, K) es un par de Pólya descomponible y $I(E,K) = (i_1,\ldots,i_r)$ el sistema de los índices de descomposición del par (E,K) (se verifica $i_1 < \ldots < i_r$).

Dados $i < i'$, la notación $E(q_i, q_{i'})$ representa a la submatriz de E formada por sus columnas $q_i, q_{i+1},\ldots,q_{i'}$. Consideremos las $r+1$ matrices de interpolación

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = E(q_1, q_{i_1}), \\ \bar{E}_j = E(q_{i_{j-1}+1}, q_{i_j}), \quad \text{para} \quad j = 2,\ldots,r, \\ \bar{E}_{r+1} = E(q_{i_r+1}, q_n). \end{cases}$$

y los $r+1$ sistemas de grados

$$\begin{cases} \bar{K}_1 = (k_1,\ldots,k_{i_1}), \\ \bar{K}_j = (k_{i_{j-1}+1},\ldots,k_{i_j}), \quad \text{para} \quad j = 2,\ldots,r, \\ \bar{K}_{r+1} = (k_{i_r+1},\ldots,k_n). \end{cases}$$

Para $j = 1,\ldots,r+1$, sea E_j la forma estándar de $\bar{E}_j$, $K_1 = \bar{K}_1 - q_1$ y $K_j = \bar{K}_j - q_{i_{j-1}+1}$ para $j = 2,\ldots,r+1$. Decimos que los pares (E_j, K_j), $j = 1,\ldots,r+1$ son la *descomposición canónica* de (E,K), lo representamos por

$$(E,K) = (E_1,K_1) \oplus \cdots \oplus (E_{r+1},K_{r+1}).$$

Cada *componente canónica* (E_j,K_j) es un par de Pólya indescomponible en forma estándar. El estudio de la regularidad de un par (E,K) de Pólya descomponible se reduce al estudio de la regularidad de sus componentes canónicas: Si el par (E,X) admite la descomposición canónica

$$(E,K) = (E_1,K_1) \oplus \cdots \oplus (E_{r+1},K_{r+1}),$$

entonces, el par (E,K) es regular (regular ordenado) en $[a,b]$ si y sólo si los pares (E_j,K_j), $j = 1,\ldots,r+1$, son regulares (regulares ordenados) en $[a,b]$ (Teorema 7.4).

Condición suficiente de K-singularidad ordenada

Para (E,K) indescomponible y en forma estándar, podemos establecer la siguiente condición suficiente de singularidad: Sea (E,K) un par indescomponible en forma estándar. Si la matriz E tiene una fila que contiene exactamente una secuencia impar K-soportada (las restantes secuencias de esa fila, de existir, son pares o no están K-soportadas), entonces E es K-singular ordenada en $[0,1]$ (Teorema 7.6).

Según hemos visto, la descomposición canónica produce componentes (E_j, K_j) indescomponibles y en forma estándar. En consecuencia, la condición suficiente de K-singularidad ordenada es especialmente apta para aplicarse en combinación con la descomposición canónica. Destaquemos que la condición suficiente de singularidad no es cierta cuando el par (E, K) no está en forma estándar.

La condición suficiente de K-singularidad ordenada se extiende directamente a intervalos de la forma $[0, b]$ (Proposición 7.10). Para intervalos $[a, 0]$, empleamos la matriz $\widehat{E}$ que se obtiene invirtiendo el orden de las filas de E: *Sea* (E, K) un par indescomponible en forma estándar. Si la matriz $\widehat{E}$ tiene una fila que contiene exactamente una secuencia impar K-soportada (las restantes secuencias de esa fila, de existir, son pares o no están K-soportadas), entonces E es K-singular ordenada en $[a, 0]$ (Proposición 7.11).

8.3 Futuras líneas de investigación

Una vez establecido un marco teórico que nos permite movernos cómodamente en los problemas de interpolación K-algebraica de Birkhoff, parece natural abordar las siguientes cuestiones:

1. Determinar una cota superior del error de interpolación para problemas particulares de interpolación K-algebraica (Interpolación de Lagrange, Taylor, Hermite, etc.)

2. Determinación de una cota superior del error de interpolación para la interpolación K-algebraica de Birkhoff.

3. Estudio de fórmulas de cuadratura basadas en la interpolación K-algebraica.

4. Construcción de splines con tramos $p_j(x) \in \mathcal{P}_K(\mathbb{R})$.

5. Estudio sistemático de la Interpolación K-algebraica de Birkhoff con condiciones adicionales de Birkhoff, esto es, determinación del espacio de interpolación imponiendo el cumplimiento aproximado de condiciones del tipo $D^{(j)}p(x_i) = D^{(j)}f(x_i)$.

6. Estudio rigurosos de la interpolación de Birkhoff K-algebraica para familias particulares de funciones.