Universitat Autònoma de Barcelona

LA BASE DE ORIENTACIÓN NO LINEAL
COMO INSTRUMENTO DE AUTORREGULACIÓN MATEMÁTICA

Alba Torregrosa Martínez

Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Programa de doctorat en educació: Àmbit I

TESIS DOCTORAL

LA BASE DE ORIENTACIÓN NO LINEAL COMO INSTRUMENTO DE AUTORREGULACIÓN MATEMÁTICA

Autoría: Alba Torregrosa Martínez

Dirigida por los doctores: Jordi Deulofeu Piquet y Lluís Albarracín Gordo

Bellaterra a 28 de noviembre de 2020

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Programa de doctorat en educació: Àmbit I

TESIS DOCTORAL

LA BASE DE ORIENTACIÓN NO LINEAL COMO INSTRUMENTO DE AUTORREGULACIÓN MATEMÁTICA

Doctoranda: Alba Torregrosa Martínez Firma:

Director: Jordi Deulofeu Piquet Firma:

Director: Lluís Albarracín Gordo Firma:

Bellaterra a 28 de noviembre de 2020

Jordi Deulofeu Piquet, Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor Titular en el Departamento de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

y

Lluís Albarracín Gordo, Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). Profesor Serra-Húnter en el Departamento de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB).

HACEN CONSTAR QUE:

La investigación realizada bajo la dirección de los firmantes por la autora Alba Torregrosa Martínez, con el título *"La base de orientación no lineal como instrumento de autorregulación matemática"*, reúne todos los requerimientos científicos, metodológicos y formales exigidos por la legislación vigente para su Lectura y Defensa pública ante la correspondiente Comisión, por la obtención del Grado de Doctor en Educación por la Universitat Autònoma de Barcelona, por tanto consideramos procedente autorizar su presentación.

Bellaterra, a 28 de noviembre de 2020.

Firmado: Jordi Deulofeu Piquet

Firmado: Lluís Albarracín Gordo

Cuando yo tenía 5 años, mi madre me decía

que la felicidad era la clave de la vida.

Cuando fui a la escuela, me preguntaron

qué quería ser cuando yo fuera grande.

Yo respondí "Feliz".

Me dijeron que yo no entendía la pregunta

y yo les respondí que ustedes no entendían la vida.

John Lennon (1940 – 1980)

Agradecimientos

Un golpe del destino me hizo emprender esta aventura tres años atrás. Me encontraba contigo, escuchando nuestras canciones y solucionando el mundo una vez más. Apenas nos conocíamos, pero tú ya sabías cuál era mi sueño. Deberías hacerlo – dijiste – puedes hacerlo y haré lo que esté en mi mano para que lo logres. Así empezó esta aventura, contigo de la mano, llenando libretas y pizarras por toda Europa planteando cuáles serían mis objetivos por cumplir. Por eso te dedico estas decenas de páginas a ti, Carles, mi apoyo incondicional día y noche, quien me hizo y me hace fuerte cada día y quién me demuestra que puedo conseguir sueños que parecen inalcanzables.

A mis directores, Jordi y Lluís, por confiar en mí y darme la autonomía y la confianza para desarrollar este proyecto. Gracias por darme buenos consejos y gracias por tranquilizarme en aquellos momentos en que sentía que nada encajaba. No olvidaré las reuniones que tenían una previsión inicial de treinta minutos y allí estábamos, dos horas más tarde divagando sobre proyectos que emprenderemos años más tarde. Para mí, no han sido tres años de trabajo exhaustivo, han sido once años de aprendizaje junto a vosotros. Os agradezco que me hagáis disfrutar de las matemáticas como lo hago.

A mi madre, que apostó para que fuera una gran maestra y me convirtiera en una gran investigadora. Nuestra vida es una montaña rusa, pero, aunque las subidas sean tediosas y aburridas, disfrutamos al máximo de las bajadas trepidantes. A mi abuela, que se siente orgullosa de los pasos que emprende su nieta y le brillan los ojos al hablar de ella. A mi abuelo, que con sus batallas de juventud nos hacía reír a todos. Te fuiste hace un año y siento mucho que no puedas disfrutar de este momento. A mi hermana, que siempre dice que hago un doctorado en “plastilina” aunque se siente tremendamente orgullosa de mí. Créeme, el orgullo es totalmente recíproco. Me has enseñado a ser quien soy y a sentirme pletórica con cada paso que doy. A mi cuñado, que resuelve mis problemas matemáticos una y otra vez, dándome nuevas perspectivas y proponiéndome retos. A mi pequeño sobrino, Ruxi, que nos has iluminado este año con tu gran sonrisa y amor. Eras la pieza que faltaba en mi vida.

A mi familia, mi segunda familia, a mis suegros Pep y Tina, cuñados Jordi y Mar, sobrinas Lia y Ona y a l’àvia María. Gracias por acompañarme en este viaje haciendo que fuera lo más ameno posible. He tenido suerte de haberos encontrado por el camino y que llenéis mis días como lo hacéis. Gracias por todas esas comidas y cenas llenas de risas y de buenos momentos que han amenizado mi viaje convirtiéndolo en un terreno un poco más llano.

A mis amigas, Grisel·la, Natàlia, Roser y la pequeña Mar que conocéis más de este proyecto que incluso yo misma. Siento todas las veces que os he explicado mis avances cuando ni siquiera entendíais lo que estaba diciendo. Me demostráis día a día vuestro apoyo y me escucháis incluso cuando estáis hartas de mis quejas, porque sabéis que todo acabará saliendo bien. Nuestras reuniones "familiares" de pasta con atún y pollo, de video llamadas eternas, de viernes noche en mi casa y de planes inesperados, ¡han inspirado muchas de mis ideas… eureka! Sin vosotras no habría llegado a ser quien soy ni habría llegado a ser como soy. Sois geniales.

A mis amigos y amigas, los que están cerca y también aquellos que viven lejos, Andreu, Marc, Irene, Carles, Dani, Berta, Luís, Núria, Eva, Silvia y Anna. Nuestras largas estancias de cervezas en el centro, de barbacoas, de charlas infinitas, de noches jugando a la consola y a juegos de mesa, de risas, bailes y momentos vividos, han convertido este trayecto en algo mucho más ameno y, sobre todo, mucho más divertido. Gracias por apoyarme durante estos tres años y por hacerme sentir que podía con todo esto, y más.

A mis compañeros doctorandos, por compartir alegrías y penas todos juntos, por compartir avances y retrocesos (necesarios), por compartir preocupaciones grupales que nos hacen sentirnos menos solos. Lo lograremos y aunque el fin parezca lejano, cada pequeño paso se acaba convirtiendo en un gran salto.

A los profesores y actuales compañeros de departamento, por darme buenos consejos y hacerme sentir que todos han pasado por la misma situación: "tú no eres la rara, todos somos los raros".

A cada uno de vosotros y vosotras, gracias por hacer posible este sueño.

Presentación

La presente tesis doctoral ha tenido una duración total de tres cursos lectivos y se presenta siguiendo el formato de compendio de publicaciones. Atendiendo a las directrices marcadas por el programa de Doctorado en Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona, se han elaborado un total de tres publicaciones que han sido aceptadas por tres revistas de investigación. Dos de las revistas se encuentran indexadas en *Scopus* (entre otras bases de indexación de revistas) y ambas publicaciones aparecen a nombre de la doctoranda acompañada de los directores de tesis. La tercera publicación se encuentra en una revista indexada en *Latindex* y evaluada en *CARHUS Plus+ 2018* donde la doctoranda aparece como única autora. Las referencias correspondientes a los tres artículos son las siguientes:

- Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (En prensa). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática.*
- Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa) Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.*
- Torregrosa, A. (2020). La base de orientación no lineal: estudio de tres grupos clase ante un ante un mismo ciclo de resolución de problemas de patrones. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, *104*, 7-23.

Durante el desarrollo de la presente tesis doctoral, se han realizado un total de 35 horas y media de formación en el campo de la didáctica de la matemática. A su vez, se han comunicado los progresos de la investigación en un total de tres congresos en ámbito nacional, que se indican a continuación:

- Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2019). Desarrollo de una herramienta metacognitiva: hacia la base de orientación no lineal. En J.M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 655). SEIEM.
- Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa). Estadios evolutivos de una base de orientación no lineal. En *19 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2019.* FESPM, AGAPEMA.

- Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa). Resolución e invención de problemas: La estrategia de resolución con relación al problema inventado. En *Investigación en Educación Matemática XXIV*. SEIEM.

Con la finalidad de presentar la investigación realizada de un modo coherente y comprensible, el presente documento está organizado en cinco secciones diferenciadas que detallamos a continuación:

<u>Sección I</u>: Introducción al tema de estudio y objetivos de la investigación

<u>Sección II</u>: Referentes teóricos y justificación metodológica

<u>Sección III</u>: Publicaciones que conforman el compendio

<u>Sección IV</u>: Resumen, discusión de resultados y conclusiones

<u>Sección V</u>: Referencias bibliográficas

Resumen

La presente tesis doctoral tuvo como objetivo general crear, desarrollar y aplicar una base de orientación no lineal como instrumento de apoyo a la metacognición matemática en resolución de problemas de patrones. Con el propósito de alcanzar dicho objetivo, se delimitaron tres objetivos específicos que pretenden, en primer lugar, identificar qué aspectos de una base de orientación de la acción no atienden a la naturaleza de los problemas matemáticos propuestos y, en segundo lugar, analizar el proceso de creación, aplicación y evaluación de una base de orientación de la acción. Las tres publicaciones que conforman el compendio de artículos pretenden responder a los tres objetivos específicos permitiendo finalmente, alcanzar el objetivo general descrito.

Inicialmente se desarrolló y aplicó una base de orientación de la acción con tres grupos de sexto de educación primaria durante la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. Dicha aplicación nos permitió, por un lado, analizar la potencialidad del instrumento en términos de apoyo metacognitivo y, por otro lado, observar qué limitaciones emergían al ser aplicado en procesos no lineales. Estas limitaciones son las que propiciaron la creación del instrumento base de orientación no lineal (BONL) que se presenta como la herramienta transversal del estudio. Con la finalidad de observar cómo actúa la base de orientación no lineal en términos metacognitivos, analizamos el papel que jugaba la autoevaluación y la coevaluación durante el proceso de aplicación y a su vez, caracterizamos qué naturaleza matemática presentaban las bases desarrolladas por tres nuevos grupos de sexto de educación primaria.

Nuestros resultados enfatizan que la base de orientación no lineal presenta grandes potencialidades como instrumento de apoyo metacognitivo durante la resolución de problemas de patrones. A su vez, el proceso de creación, aplicación y modificación del instrumento a partir de la autoevaluación y coevaluación permite al alumnado ser consciente de las fases de resolución de un problema haciendo hincapié en los procesos de revisión y justificación de la estrategia aplicada. En cuanto a la naturaleza matemática de las bases elaboradas, apreciamos que la presencia de ítems referentes a ayudas metacognitivas es mucho mayor que la presencia de destrezas matemáticas. Este aspecto nos muestra que el instrumento hace mayor referencia a procesos mentales de autorregulación que a procedimientos matemáticos que podemos aplicar al resolver un problema de patrones.

Esta tesis pretende servir de base a las investigaciones futuras centradas en la resolución de problemas, el pensamiento del alumnado y la evaluación en didáctica matemática.

Abstract

The main objective of the current doctoral thesis was to create, develop and apply a non-linear orientation base as a supporting tool for mathematical metacognition in pattern problem solving. To achieve this objective, three specific objectives were defined. Firstly, to identify which aspects of an action orientation base do not attend to the nature of the proposed mathematical problems and, secondly, to analyze the process of creation, application, and assessment of a non-linear orientation base. The compilation of articles in the three publications, aims to respond to these three specific objectives and to achieve the general objective described above.

An action-oriented approach was initially developed and applied with three groups of sixth graders during numbering and pattern problem solving. This implementation allowed us, on the one hand, to analyze the potential of the instrument in terms of metacognitive support and, on the other hand, to observe what limitations emerged when it was applied in non-linear processes. These limitations are the ones that led us to design the non-linear orientation base (BONL), which is presented as the transversal tool of the study. In order to observe how BONL acts in metacognitive terms, we analyzed the role played by self-assessment and peer-assessment during the application process and, at the same time, we characterized the mathematical nature of the bases developed by three new groups of sixth graders.

Our results emphasize that the non-linear orientation base has great potential as a metacognitive support tool during pattern problem solving. At the same time, the process of creation, application and modification of the instrument from self-assessment and peer-assessment, allows the students to be aware of the problem solving phases emphasizing the review and justification processes of the strategy applied. As for the mathematical nature of the bases, we appreciate that the presence of items referring to metacognitive aids is significantly greater than the presence of mathematical skills. This aspect shows us that the instrument makes major reference to mental processes of self-regulation that to mathematical procedures that we can apply in pattern problem solving.

This thesis aims to serve as a basis for future research focused on problem solving, student thinking and assessment in mathematical didactics.

Índice de contenidos

SECCIÓN III: PUBLICACIONES QUE CONFORMAN EL COMPENDIO

SECCIÓN IV: RESUMEN Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

SECCIÓN V: REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Índice de figuras

Índice de tablas

<u>Sección I</u>

1. Introducción al tema de estudio
2. Objetivos de la investigación

1. Introducción al tema de estudio

"Los encantos de esta ciencia sublime, las matemáticas, sólo se le revelan a aquellos que tienen el valor de profundizar en ella"

Carl Friedrich Gauss

En el presente apartado nos centramos en la resolución de problemas y la metacognición matemática. Específicamente, detallamos el problema de investigación que rige el presente estudio (apartado 1.1) junto con los antecedentes que se han realizado entorno a la aplicación de la base de orientación no lineal en resolución de problemas y metacognición matemática (apartado 1.2).

Finalmente, señalamos la relevancia de nuestra investigación para el campo de la didáctica matemática (apartado 1.3).

1.1 Planteamiento del problema de investigación

La resolución de problemas matemáticos como área de conocimiento ha sido estudiada por una gran masa de expertos a lo largo y ancho de la historia (Castro, 2008). En la presente investigación, entendemos el término problema como sinónimo de problema no rutinario (Mayer, 1985). Definiremos un problema como una actividad contextualizada en la cual el resolutor se enfrenta a una situación desconocida para la que no dispone de una respuesta inmediata y, por lo tanto, dicho resolutor debe desarrollar un proceso reflexivo de toma de decisiones y de diseño de estrategias. Cuando hablamos de estrategias nos referimos al conjunto de acciones mentales diseñadas para resolver un problema (Biddlecomb y Carr, 2011). Al hablar de resolución de problemas matemáticos, los trabajos de Pólya (1945) y Schoenfeld (1992) siguen enmarcando gran parte de las investigaciones actuales, y aunque el foco de los estudios recientes sea dispar, los grandes ejes que enmarcan la resolución de problemas continúan siendo vigentes hoy en día. Dada la gran cantidad de investigaciones que se han desarrollado en este campo de investigación durante los últimos cien años, puede parecer que cuando hablamos de resolver problemas de lápiz y papel en el aula "esté todo dicho". La realidad, es que continuamos encontrando una gran cantidad de docentes y alumnos que presentan dificultades al enfrentarse a la resolución de un problema matemático (Santos-Trigo, 2020). Este hecho se produce por distintos factores inseparables que influyen en el resolutor (Schoenfeld, 1992). Uno de estos factores es la gestión y control del proceso de resolución que atiende a un concepto más amplio llamado metacognición.

Flavell (1979) definió la metacognición como el conocimiento que tiene una persona sobre sus procesos y productos cognitivos, propiedades de la información y datos relevantes para el aprendizaje. En el ámbito de la matemática, el conocimiento metacognitivo se refiere a las ideas que tiene el estudiante sobre determinadas tareas matemáticas, así como el desarrollo y control de los procesos y técnicas que aplica (Özsoy y Ataman, 2009). Encontramos distintas investigaciones que examinan la metacognición matemática cuantitativamente (Artzt y Armour-thomas, 1992; Schraw y Sperling-Denison, 1994) pero pocas lo hacen cualitativamente dada la dificultad de examinar procesos que se producen de manera mental (Cavanaugh y Perlmutter, 1982).

Dada la complejidad a nivel metacognitivo que presenta el proceso de resolución de un problema, varios autores han tratado de analizar los procesos metacognitivos que lleva a cabo el alumnado durante la resolución de un problema (Clarke, 1989; Ericsson y Simon, 1980; Loh y Lee, 2019; Özsoy y Ataman, 2009; Wilson y Clarke, 2004). Todos ellos hacen hincapié en el gran papel que juegan los procesos metacognitivos durante la resolución de un problema, pero a su vez, encuentran dificultades al intentar que un resolutor verbalice y estructure más eficazmente sus procesos metacognitivos durante la resolución. Este último aspecto es precisamente la problemática que abordamos en el presente estudio a partir del uso de un instrumento de autorregulación matemática llamado base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996).

1.2 Antecedentes de la base de orientación de la acción

Jorba y Sanmartí (1996) crearon y desarrollaron la base de orientación de la acción como un instrumento estructurador y orientador de los modelos teóricos y prácticos de la ciencia y la matemática, aplicados a la práctica cercana del alumnado. La base de orientación de la acción es un instrumento lineal o secuencial en el cual se sintetizan de manera subjetiva o personal las acciones a realizar en un procedimiento científico o para explicar un constructo teórico. A medida que se producen nuevos aprendizajes, la base de orientación se amplía o reestructura adaptándose al proceso de autorregulación de quien la elabora. Los resultados obtenidos por Jorba y Sanmartí (1996) así como por García y Sanmartí (1998) muestran que dicho instrumento permite que el alumnado dé sentido a modelos teóricos y algorítmicos de la ciencia, y estructure eficazmente su proceso de explicación y justificación ante tareas que demandan la aplicación de dichos modelos.

Aunque la base de orientación de la acción no fue concebida para ser aplicada durante la resolución de un problema matemático, Villalonga y Deulofeu (2015) crearon y aplicaron el concepto de base de orientación de la acción a problemas matemáticos de numeración y patrones. Ambos autores, elaboraron una base de orientación de la acción previa que se basó en las fases de resolución de un problema matemático (Pólya, 1945). Dicha base fue usada y modificada por cuatro grupos de alumnos pertenecientes a sexto de educación primaria y primero de educación secundaria. Los resultados de su estudio muestran que la base de orientación de la acción promueve que el alumnado estructure y verbalice más eficazmente su proceso de resolución y autorregulación, y por ende, evite un posible atasco o bloqueo ante el desarrollo de estrategias erróneas. En contraposición, una de las conclusiones más relevantes a las que llegaron Villalonga y Deulofeu (2015) fue la dificultad del alumnado de comprender que el formato lineal de la base estructurada en pasos cronológicos o fases, actúa como guion y no como indicadores de seguimiento: “se confirma así que la resolución un problema es una dinámica compleja, en ningún caso lineal, que requiere de tiempo, reflexión y dedicación” (Villalonga, 2015, p. 279).

Atendiendo a los resultados hallados por Villalonga y Deulofeu (2015), en la presente investigación se desarrolla y aplica una base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996) con un total de 75 alumnos de sexto de educación primaria con la finalidad de observar las limitaciones que presenta dicho instrumento al ser usado durante la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. El análisis de los procesos metacognitivos que verbaliza el alumnado en sus producciones al usar dicho instrumento nos permitirá observar en qué momentos la base de orientación de la acción no se adapta a la naturaleza de un problema matemático (Mayer, 1985) tal y como apuntaron Villalonga y Deulofeu (2015). Dichas limitaciones, son las que nos permitirán crear y desarrollar el instrumento base de orientación no lineal (BONL) que será aplicado con un nuevo grupo de 75 alumnos de sexto de educación primaria que no están familiarizados con la resolución de problemas matemáticos ni con el uso de instrumentos de autorregulación.

1.3 Relevancia para el campo de investigación

Tal y como señala Sternberg (1998), una mayor capacidad de autorregulación metacognitiva conlleva una mayor efectividad en las resoluciones del alumnado. Aunque en la literatura hallamos, por un lado, distintos estudios que abordan la metacognición en resolución de problemas (Loh y Lee, 2019; Martínez, Sánchez y Pizarro, 2020; Özsoy y Ataman, 2009) y por otro lado, estudios que abordan el uso de instrumentos de autorregulación como es la base de orientación de la acción (García y Sanmartí, 1998; Jorba y Sanmartí, 1996; Villalonga y Deulofeu, 2015), no hallamos ningún estudio que examine el proceso de autorregulación del alumnado mientras usa una base de orientación de la acción. Este hecho propicia que las limitaciones señaladas por Villalonga (2017) derivadas del uso de dicho instrumento, no se hayan analizado a día de hoy y por ende, contemos con un instrumento potencialmente útil en resolución de problemas que presenta hándicaps notables. Por lo tanto, el desarrollo de un instrumento de autorregulación que potencie la verbalización de procesos metacognitivos complejos durante la resolución de problemas matemáticos es esencial en el campo de la didáctica matemática. En este sentido, consideramos que el desarrollo y análisis de la base de orientación no lineal, nos permitirá desarrollar una herramienta útil en términos metacognitivos que ayude al alumnado en su desarrollo de la competencia matemática en resolución de problemas.

2. Objetivos de la investigación

El objetivo general de nuestra investigación es crear, desarrollar y aplicar una base de orientación no lineal como instrumento de apoyo a la metacognición matemática en resolución de problemas de patrones. Para responder a este objetivo general, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

a) Identificar momentos en los que la base de orientación de la acción no se adapte al proceso de resolución de los problemas matemáticos, con la finalidad de desarrollar el instrumento base de orientación no lineal
b) Analizar el papel de la autoevaluación y la coevaluación como métodos de feedback durante la construcción y uso de una base de orientación no lineal
c) Caracterizar la naturaleza de una base de orientación no lineal elaborada por tres grupos de alumnos distintos ante un mismo ciclo de resolución de problemas

Sección II

3. Referentes teóricos

4. Justificación metodológica

3. Referentes teóricos

“Todos somos muy ignorantes. Lo que ocurre es que no todos ignoramos las mismas cosas”

Albert Einstein

El objetivo general que enmarca el presente estudio es crear, desarrollar y aplicar una base de orientación no lineal como instrumento de apoyo a la metacognición matemática en resolución de problemas de patrones. Nuestra perspectiva teórica se basa en tres enfoques distintos.

En primer lugar, detallaremos la definición de problema tomada en el presente estudio, así como los factores que intervienen en el resolutor de problemas. A su vez, definiremos y justificaremos la selección de los problemas de patrones como una de las herramientas que vertebran la investigación (apartado 3.1). A continuación, exploraremos la gestión y el control del resolutor enmarcada bajo un término más amplio al que llamamos metacognición y acotaremos distintos instrumentos de autorregulación metacognitiva con la finalidad de justificar la elección del instrumento que rige el presente estudio (apartado 3.2). Posteriormente, exploraremos el instrumento base de orientación de la acción, así como su aplicación durante la resolución de problemas matemáticos. Las características y definiciones de dicho instrumento nos permiten justificar la creación de la base de orientación no lineal usada en la presente investigación (apartado 3.3).

3.1 La resolución de problemas matemáticos

3.1.1 La Naturaleza de la resolución de problemas

Cuando hablamos de resolver problemas matemáticos en el aula nos encontramos con serie de posicionamientos, definiciones, miradas y aplicaciones muy amplia. La resolución de problemas, así como su aplicación y estudio ha ido cambiando a lo largo del tiempo adaptándose a las necesidades sociales, laborales e interdisciplinarias (English y Gaingsburg, 2016).

Durante la primera mitad del siglo veinte, los estudios vinculados a la resolución de problemas en matemáticas se realizaban desde un punto de vista psicológico (Kilpatrick, 1992). La psicología conductista (Wallas, 1926), la psicología de la Gestalt (Dunker, 1945), la teoría del procesamiento de la información (Ernst y Newell, 1969), la teoría de Piaget (Inhelder y Piaget, 1955) o el constructivismo (Vygotsky, 1978) son algunos de los ejemplos y corrientes predominantes sobre cómo se intentaba comprender la gestión y capacidad del resolutor de problemas.

A mediados de los años 50, siguiendo la corriente conductista y la de Gestalt, Pólya (1945) publica *How to Solve It*. Su estudio se centró en explorar las fases de resolución implicadas en un problema, así como las estrategias empleadas por el resolutor con la finalidad de mostrar cómo el profesorado puede ayudar a sus alumnos en matemáticas. Pólya (1945) diferencia cuatro fases principales durante la resolución de un problema: comprensión del problema, concepción de un plan de acción, ejecución del plan de acción y revisión del proceso realizado, así como de la solución. Para cada una de las fases, propone una serie de heurísticas que pueden ser útiles al resolutor (tabla 1).

Tabla 1. Fases del problema y heurísticas (Pólya, 1945)

Fases del problema	Heurísticas
Comprensión del problema	Releer el enunciado, replantearlo con tus propias palabras, distinguir los datos, distinguir el objetivo, seleccionar la información relevante, desechar información, relacionarlo con un problema similar

Concepción de un plan de acción	Ensayo-error, resolver un problema más simple / particularizar, hacer una figura, esquema, diagrama, tabla… buscar regularidades o patrones, trabajar hacia atrás, imaginar el problema resuelto, usar el álgebra para expresar relaciones, buscar un problema análogo, generalizar, parcializar la meta
Ejecución del plan de acción	Implementar la(s) estrategia(s) seleccionada(s), cambiar de estrategia o combinarlas, conceder tiempo suficiente para resolver el problema, volver a empezar
Revisión del proceso realizado	Revisar si la solución satisface lo establecido en el problema, advertir soluciones más simples o alternativas, generalizar

El estudio de Pólya tuvo mucha aceptación al ser uno de los primeros estudios en mostrar el potencial de la resolución de problemas y ofrecer heurísticas concretas para resolverlos. No obstante, no tardaron en llegar las diferentes críticas a lo largo de los años puesto que su estudio se consideró totalmente prescriptivo, postulado por un observador externo y aislado de los factores sociales y metacognitivos del resolutor (Groner, Groner y Bischof, 1983; Ericsson y Simon, 1980; Schoenfeld, 1989). En la presente investigación, el interés principal del estudio de Pólya (1945) no son tanto las heurísticas concretas que el resolutor puede desarrollar, sino la división del problema en cuatro fases interdependientes y la toma de consciencia del resolutor ante estas fases.

Como hemos apuntado anteriormente, las distintas corrientes en psicología se extendieron al ámbito de la didáctica y la importancia de la resolución de problemas fue percibiéndose en los currículos internacionales. En la década de los 60 se apreció una preocupación creciente por incorporar la resolución de problemas en el currículo de la matemática escolar y a su vez, aumentó el esfuerzo por sustentar las innovaciones curriculares sobre trabajos de investigación educativa (Castro, 2008). La tradición que se persigue hace décadas es potenciar que la resolución de problemas sea un eje principal en la educación obligatoria escolar. El NCTM con *An Agenda for Action* en la década de los 80, la ATM inglesa con el informe *Cockcroft,* los Estándares Curriculares del NCTM de 1989 al año 2000, son algunos de los ejemplos de la tradición y tendencia que la resolución de problemas sigue teniendo como eje central en la educación obligatoria y postobligatoria.

En España, el ministerio de Educación y Cultura ya en los años 80 apuntaba a señalar la resolución de problemas como práctica prioritaria, puesto que se considera un medio de aprendizaje y refuerzo de contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la interrelación entre los distintos bloques y las restantes áreas. La enseñanza en las ramas de ciencia tenía y tiene como fin alcanzar dos objetivos: "la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio" (Heyworth, 1999, p. 195).

En la actualidad, la resolución de problemas en sí misma es un contenido transversal en la educación escolar, más allá de concebirla sólo como la aplicación de contenidos matemáticos (Stanic y Kilpatrick, 1989). Por lo tanto, resolver problemas puede ser una meta u objetivo en sí mismo, como un proceso de aplicación de conocimientos o como una destreza básica (Yáñez, 1995). En el presente estudio entenderemos la tarea de resolución de problemas como una habilidad en sí misma en la que el aprendizaje de contenidos concretos queda en un segundo plano, relevante pero no primordial.

Tal y como hemos señalado al inicio del presente apartado, no sólo el foco de las investigaciones ha ido cambiando a lo largo de los años. El debate sobre qué consideramos que es un problema en matemáticas también ha sido uno de los puntos clave. En la literatura no existe un consenso sobre qué entendemos por resolución de problemas. Grugnetti y Jaquet (2005) sugieren que esta falta de consenso se debe a las diferentes visiones existentes sobre la naturaleza de la actividad matemática. En el presente estudio seguiremos la nomenclatura que proponen Kantowski (1977) y Mayer (1985). Por lo tanto, entenderemos el término problema como sinónimo de problema no rutinario.

> Un problema no rutinario aparece cuando un individuo se encuentra con una situación dada, tiene la intención de alcanzar lo que se le pide, pero no sabe un camino directo para acceder o realizar el objetivo. La principal característica de estos problemas es la ignorancia del resolutor del problema respecto al método de resolución (Mayer, 1985, p. 123).

Dado el desconocimiento inicial de un camino directo, el resolutor debe poner especial énfasis en el proceso de resolución y no sólo en el resultado final (Monje, Tyteca y Castro, 2012). Este hecho posibilita que la creatividad e imaginación sean dos componentes principales de la tarea de resolución de un problema.

En el polo opuesto de los problemas no rutinarios, encontramos los problemas rutinarios (Mayer, 1985) a los que llamaremos ejercicios. En este caso, el resolutor sólo necesita usar datos recordados o aplicar directamente algoritmos conocidos. Tanto ejercicios como problemas son tareas esenciales e imprescindibles en matemáticas. En palabras de Santos (1994, p. 6):

> Aún ejercicios o problemas rutinarios pueden ser un medio o vehículo importante para que los estudiantes transformen los enunciados iniciales en actividades que demanden el uso de diversos contenidos y procesos matemáticos como el uso de diversas representaciones, búsqueda de relaciones y el uso de distintos argumentos para sustentar y comunicar resultados.

La importancia de trabajar en base a la resolución de problemas en el aula puede ser justificada atendiendo a distintos argumentos. En primer lugar, permiten al alumnado desarrollar y valorar distintas estrategias del mismo modo que usamos esa habilidad en situaciones de la vida real (Schoenfeld, 1992). Por otro lado, ayudan a desarrollar el pensamiento crítico y creativo (Albarracín y Gorgorió, 2015; Mabilangan, Limjap y Belecina, 2011) puesto que los pensamientos y enfoques utilizados en el proceso de resolución son igual o más importantes que la respuesta precisa (Mayer, Sims y Tajika, 1995). Por último, involucran tanto el conocimiento específico del dominio (Chi y Glaser 1985; Voss y Post 1988; Voss, Wolfe, Lawrence y Engle, 1991) como el conocimiento estructural (Chi y Glaser 1985).

3.1.2 Factores que intervienen en el resolutor

Una vez definido y justificado qué entendemos que es un problema en matemáticas, en el presente apartado nos centraremos en exponer qué factores intervienen en el resolutor de problemas. En las últimas décadas, distintos estudios (Callejo, 1996; Callejo y Vila, 2003; De Corte, Verschaffel y Greer, 2000b) han observado que al proponer problemas matemáticos en el aula, el alumnado suele conocer los conceptos y algoritmos necesarios para dar una respuesta correcta pero un gran grupo de alumnos no logra hallarla satisfactoriamente. Por tanto, las causas de sus errores y atascos deben responder a otros aspectos no conceptuales que inciden en el proceso de resolución de un problema y que influyen directamente en el éxito o fracaso de la tarea.

Lester, Garofalo y Kroll (1989) distinguieron cinco categorías interdependientes que influyen en el resolutor de problemas: los conocimientos, el control, las emociones y actitudes, las creencias y las condiciones socioculturales. Posteriormente, Schoenfeld (1992) complementó y afinó las categorías establecidas por Lester, Garofalo y Kroll (1989) aportando un peso relevante a los aspectos relacionados con el control y considerando que las creencias y afectos pertenecían a una única categoría por su cercanía y alta conexión. Así pues, Schoenfeld redefinió los cinco aspectos que intervienen en el resolutor, a saber: el conocimiento de base, las estrategias de resolución, la gestión y el control, las creencias y afectos, y las prácticas (figura 1).

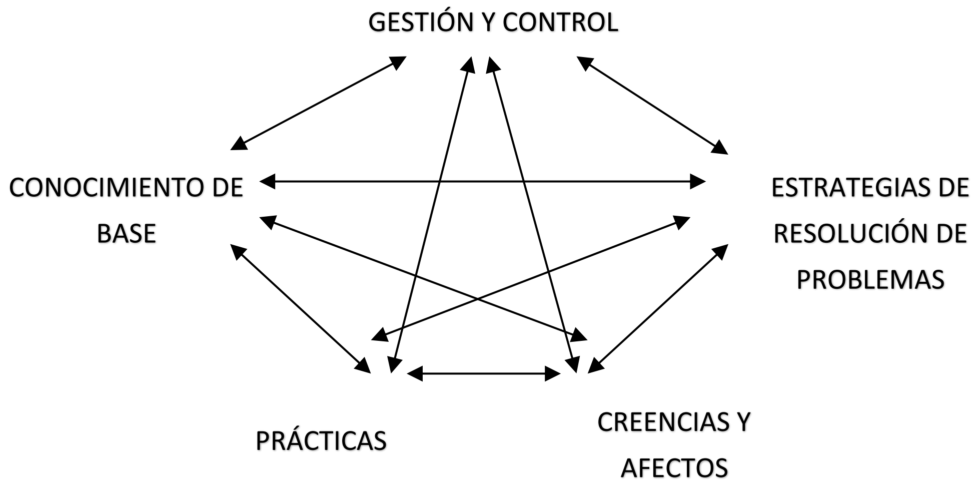


Figura 1. Aspectos influyentes en el resolutor de problemas (Schoenfeld, 1992)

<u>Conocimiento de base</u>

Entendemos como conocimiento base aquellos saberes matemáticos formales e informales que posee el resolutor de un problema. En palabras de Schoenfeld (1992, p.43), "podríamos definir el conocimiento base contestando a la siguiente pregunta: ¿Qué información es relevante para la situación matemática o el problema que se tiene a mano, y cómo se accede y se utiliza esa información?". Dentro de lo que consideramos conocimiento base encontramos los conocimientos informales e intuitivos sobre el dominio como podrían ser los hechos y definiciones, los procedimientos algorítmicos estándar, los procedimientos rutinarios propios de la matemática, las competencias pertinentes y el conocimiento sobre las reglas del discurso en este dominio.

Los conocimientos, como hemos advertido, se estructuran en la memoria. Diferenciamos entre memoria a corto plazo y memoria a largo plazo.

> A pesar de la enorme cantidad de información que los seres humanos pueden recordar en general, sólo pueden mantener alrededor de siete "fragmentos" de información en la memoria a corto plazo, y operar en ellos […]. Simon (1980, p.83) define un "fragmento" como cualquier configuración perceptiva (visual, auditiva, o no) que sea familiar y reconocible. Para aquellos de nosotros que conocemos el idioma inglés, las palabras habladas y las impresas son "fragmentos". Para una persona educada en escuelas japonesas, cualquiera de varios miles de ideogramas chinos es un solo fragmento (y no sólo una compleja colección de líneas y garabatos) (Schoenfeld, 1992, p. 48).

La memoria a largo plazo es un "repositorio" permanente de conocimientos donde encontramos nodos (trozos de la memoria) vinculados a otros nodos en forma de red. Es un conocimiento que permanece en la memoria a largo plazo – como su propio nombre indica –. Hay que ser cautelosos respecto a qué consideramos conocimiento base ya que, a veces, lo que nos parece ser la aplicación de una estrategia es en realidad un conocimiento base anclado en la memoria por similitud de contexto, forma o apariencia de la situación. Este hecho nos lleva a definir qué consideramos estrategias de resolución.

Estrategias de resolución

El término estrategia de resolución ha sido comprendido, estudiado y definido de distintos modos a lo largo del tiempo. Pólya (1945) entendía el término estrategia como una serie de heurísticas que se podían listar e incluso enseñar paso a paso para que el alumnado tuviera éxito durante el proceso de resolución de un problema. Schoenfeld (1992) y Begle (1979) afirmaban que las estrategias de resolución son tan complejas de analizar que incluso podríamos afirmar que parecen específicas y arraigadas tanto al problema a resolver, como al estudiante en sí mismo. Tanto Silver (1979) como Heller y Hungate (1985) entendían que las estrategias estaban relacionadas con el contexto general del problema y consideraban que el éxito de la resolución estaba estrechamente relacionado con el papel docente como guía del proceso.

En la presente investigación, entendemos una estrategia como un plan de acción diseñado para lograr un objetivo. Por lo tanto, entendemos una estrategia como un plan genérico de actuación para alcanzar una determinada meta. En palabras de Albarracín y Gorgorió (2014):

> Una estrategia es una forma general de proceder, por ejemplo, contando todos los objetos uno por uno o diseminando el problema en subproblemas más pequeños. Si nos centramos en los procedimientos aplicados a la resolución de una situación específica, consideramos dichas acciones o procedimientos concretos como la especificación de una estrategia aplicada a un problema concreto, por ejemplo, escribir los objetos de una lista o marcarlos mientras se cuentan (p. 86).

Gestión y control

Dichos conceptos se enmarcan en el término que conocemos como metacognición[1]. Monitorear y adaptar el proceso de pensamiento y acción mientras se realiza un determinado problema, es el corazón de lo que consideramos autorregulación. Uno de los ejemplos de autorregulación lo podemos encontrar en el estudio realizado por Karmiloff-Smith's (1979) donde se daba a los alumnos (de 4 a 9 años) piezas para construir un “loop” de una vía de tren sin que el tren se cayese. Los niños más pequeños se lanzaron de inmediato a colocar las piezas sin sentido ni orden. Los alumnos de 8 y 9 años planificaron extensamente la tarea antes de empezar a desarrollarla. El estudio mostró que “la capacidad y predilección de planificar, actuar según el plan y tomar en cuenta la retroalimentación durante la realización de un plan, parecen desarrollarse con la edad” (citado en Schoenfeld, 1992, p. 58-59).

Uno de los ejemplos más perceptibles sobre la eficacia de la gestión y el control, es el tipo de acción y temporización que desarrolla un resolutor novel al resolver un problema versus uno experto (Schoenfeld, 1989). En la figura 2 podemos observar la distinción a nivel temporal entre ambos resolutores. El resolutor novel dedica un minuto a leer el problema y los diecinueve minutos restantes los dedica a explorar posibles soluciones. En contraposición, el resolutor experto combina temporalmente las fases leer, analizar, explorar, planificar, implementar y verificar como una secuencia no lineal y combinándolas entre sí.

[1] Se procederá a hablar del término “metacognición” de manera extensa en el apartado 3.2 del marco teórico puesto que se considera uno de los pilares de la presente investigación y merece un apartado en sí mismo

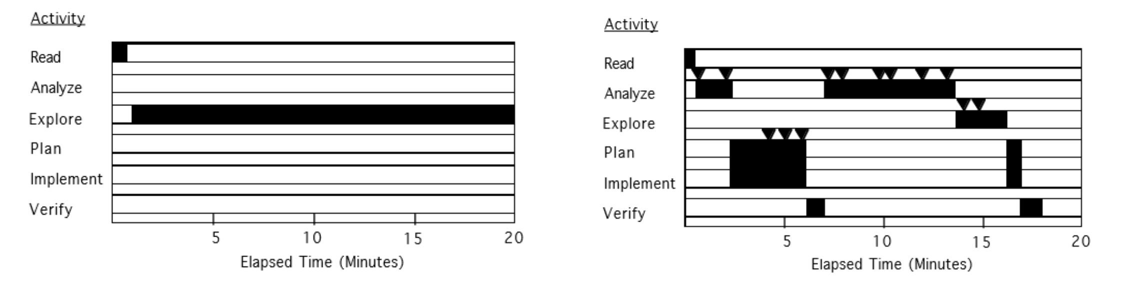


Figura 2. Acción y tiempo invertido en la resolución de un problema. Novel – izquierda – versus experto – derecha – (Schoenfeld, 1989)

En palabras de Schoenfeld (1992, p.67), "desarrollar las habilidades de autorregulación en dominios complejos de la materia, es difícil. A menudo implica la "modificación del comportamiento" desaprendiendo comportamientos de control inapropiados desarrollados a través de instrucción previa".

Creencias y afectos

Como hemos comentado al inicio del presente apartado, Lester, Gorfalo y Kroll (1989) consideraban que las creencias y los afectos pertenecían a dos grandes categorías separadas atendiendo a la taxonomía de Bloom. La línea entre estos dos conceptos cada vez está más difuminada y es por ese hecho que Schoenfeld (1992) las consideró como una simbiosis inseparable dentro de los aspectos que influyen en el resolutor.

Según McLeod (1992), diferenciamos cuatro tipologías de creencias: sobre la naturaleza de las matemáticas, sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas, sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el contexto social que rodea a las matemáticas. Estas cuatro tipologías de creencias hacen referencia a tres tipos de agentes, los estudiantes, los docentes y finalmente, la sociedad en sí misma. A continuación, detallaremos los aspectos propios, en términos de creencias y afectos, que afectan a cada uno de los agentes que intervienen en la actividad matemática.

En primer lugar, encontramos diferentes creencias altamente arraigadas en los estudiantes. Creencias tales como; los problemas sólo tienen una única y válida respuesta, la solución para resolver un problema es la que muestra el profesor o los estudiantes corrientes no esperan entender las matemáticas sino memorizarlas (Schoenfeld, 1992) son algunos de los ejemplos que hallamos habitualmente entre estudiantes en periodos obligatorios. Las creencias matemáticas son una componente del conocimiento subjetivo del individuo, basado en su experiencia sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje (Gil, Blanco y Guerrero, 2005). Aun teniendo en cuenta la negatividad matemática que rodea a algunos estudiantes, Monje, Tyteca y Martínez (2012) subrayan que si se producen situaciones similares repetidamente, las reacciones emocionales se "solidifican" en actitudes hacia las matemáticas que, a su vez, pueden modificar las creencias subyacentes del aprendiz. Así pues, el estudiante puede modificar sus creencias con el paso del tiempo y/o con el contacto y descubrimiento de nuevas experiencias mucho más positivas.

En segundo lugar, encontramos las creencias de los docentes. Está claro que el docente ha sido también un estudiante con sus propias creencias y estas directamente, afectan a su manera de desarrollarse en y con las matemáticas. Dependiendo de las creencias del docente acerca de esta área de conocimiento (y su relación con otras áreas y/o fuentes de conocimiento) transmitirá una idea, quehacer, ambiente, uso e importancia de la matemática en sí misma que afectará a la percepción personal del alumnado.

Por último, nos encontramos con las creencias de la sociedad. Como bien sabemos, cada sociedad con su propio currículo mirada política y estructura social, configura una serie de creencias que afectan directamente a la enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas y de las otras muchas áreas de conocimiento. La importancia de la resolución de problemas puede ser vital para una determinada sociedad mientras que, para otra, no lo es tanto. Incluso puede ser determinante para la enseñanza en un determinado territorio y momento, mientras que, en ese mismo momento en la otra punta del mundo, ni siquiera se hace hincapié en dicho contenido. Así pues, la creencia que se transmite en una determinada sociedad tanto verticalmente (de las máximas instituciones al pueblo) como horizontalmente (entre individuos del mismo estamento) influye en la manera de ver, pensar, entender y usar las matemáticas.

Prácticas

Entendemos las prácticas como la metodología o quehacer que se usa en un entorno matemático. Evidentemente, las prácticas irán acorde con la visión del docente de la matemática y sus creencias acerca de ella. No ejercen la misma práctica un docente transmisor de conocimiento explicando una teoría en la pizarra, que un docente dividiendo la clase en pequeños grupos para resolver un problema. Cada una de las prácticas que se desarrollan en el aula tendrán un objetivo, finalidad e impacto en el resolutor de un problema. Siguiendo a Resnick (1897, p.58):

> Convertirse en un buen resolutor de problemas matemáticos - o en un buen pensador en cualquier dominio - puede ser tanto una cuestión de adquirir los hábitos y disposiciones de interpretación y sentido, como de adquirir cualquier conjunto particular de habilidades, estrategias o conocimiento. Si esto es así, podemos hacer bien en concebir la educación matemática menos como un proceso instructivo (en el sentido tradicional de enseñar habilidades específicas, bien definidas o elementos de conocimiento) y más como como un proceso de socialización.

Por lo tanto, además de considerar las prácticas como metodologías docentes, también podemos considerar las prácticas como la adquisición paulatina por parte del resolutor, de lo que consideramos el hábito de hacer matemáticas. Dicho hábito, esperemos que se considere un proceso más de construcción que de instrucción.

3.1.3 La resolución de problemas de patrones

La búsqueda de patrones, la generalización y las relaciones son consideradas una parte esencial de la educación matemática puesto que permiten al alumnado hacer conexiones con el mundo que les rodea (Altay, Akyüz y Erhan, 2014). El trabajo con problemas de patrones en el aula promueve el pensamiento matemático relacionando conceptos de geometría, álgebra y numeración (McGarvey, 2012) y favorecen la versatilidad del alumnado en resolución de problemas entendida como la variabilidad de estrategias de distinto índole que pueden aplicar (Montenegro, Costa y Lopes, 2018).

En la literatura, el término patrón ha sido definido de distintos modos atendiendo al objeto al que hace referencia. Orton (2004) define un patrón como la búsqueda de un orden. Papic, Mulligan y Mitchelmore (2011) definen un patrón como cualquier cosa replicable.

Sarama y Clements (2009) definen un patrón como “la búsqueda de regularidades y estructuras matemáticas, para ordenar, cohesionar y prever situaciones aparentemente no organizadas y facilitar las generalizaciones más allá de la información dada” (p. 319). En la presente investigación, entenderemos el término patrón en palabras de McGarvey (2012), como “el acto de percibir o imponer regularidades estructurales en un fenómeno físico, de comportamiento, visual o simbólico” (p. 311 – 312).

Dentro de la resolución de problemas de patrones, encontramos dos tipologías de enunciados, los problemas de patrones numéricos y los problemas de patrones geométricos (Spangenberg y Pithmajor, 2020). En los problemas de patrones numéricos el resolutor debe hallar la relación entre los distintos términos numéricos que se le presentan. En cambio, en los problemas de patrones geométricos el resolutor debe hallar un patrón representado diagramáticamente. Esta representación diagramática revela la estructura interna del patrón. Aunque ambas tipologías de problemas permiten al alumnado trabajar en profundidad los patrones matemáticos, los problemas de patrones geométricos son los que tienden a trabajar con el alumnado la generalización de un patrón.

Radford (2010) distingue los conceptos de generalización e inducción haciendo hincapié en que “no toda simbolización es algebraica, así como no toda la actividad de patrones conduce al pensamiento algebraico […] entre las posibles formas de generalización, no todas son de naturaleza algebraica” (p. 40). Para diferenciar dichos conceptos el autor propone un caso real que se dio en una clase de matemáticas. En dicha clase, se propuso a los alumnos resolver la siguiente tarea en pequeños grupos (Figura 3).

Figura 3. Tarea de patrones propuesta por Radford (2010)

El alumnado aplicó dos tipologías de estrategias al resolver el problema. En primer lugar, hubo grupo de alumnos que aplicaron razonamientos de ensayo error como por ejemplo hallar la regularidad “2 x 2 + 1”, “2 x 3 + 1”, “2 x 4 + 1” validando unos pocos casos y llegando a simbolizar la figura como *n* x 2(+3). En segundo lugar, hubo grupos que buscaron el conjunto común en las figuras hallando regularidades como (*n*+1) + (*n* + 2) … Aunque los dos procedimientos conducían al alumnado al uso del simbolismo, en el primer caso la regla hallada por el alumnado se basaba en adivinanzas, mientras que en el segundo caso, el alumnado notaba ciertos rasgos comunes y los generalizaba. En ambos casos el alumnado usaba métodos inductivos puesto que se dejaban llevar por el contexto concreto y daban certeza a una manera de proceder, validando hipótesis que no eran necesariamente correctas. En contraposición, debemos aproximar al alumnado a la generalización algebraica:

> La generalización algebraica de un patrón se basa en la capacidad de captar una coincidencia observada en algunos elementos de una secuencia S, siendo conscientes de que esta coincidencia se aplica a todos los términos de S y pudiendo utilizarla para proporcionar una expresión directa de cualquier término de S (Radford, 2010a, p. 5).

Radford (2006a) distingue distintos tres tipos de generalización: factual, contextual y simbólica. La generalización factual es aquella en la cual "hay evidencia de una generalización de acciones en la forma de un esquema operacional, esquema que permanece ligado al nivel concreto de uso de los símbolos numéricos, a términos deícticos, gestos y actividad perceptual (Vergel, 2015). En las generalizaciones contextuales "se generalizan no solo las acciones numéricas sino también los objetos de las acciones" (Radford, 2003, p. 65). Estas generalizaciones "van más allá del dominio de las figuras específicas o particulares y tratan con objetos genéricos (como la figura) que no pueden ser percibidos por nuestros sentidos" (p. 65). La generalización simbólica es aquella que usa una relación funcional expresada mediante símbolos alfanuméricos.

A su vez, Radford (2010a) señala que podemos encontrar casos que no presentan las características de una generalización algebraica. "Si bien lo generalizado puede ser una comunidad local, observada en algunas figuras, esto podría no garantizar la utilización de dicha información para proporcionar una expresión que permita calcular cualquier término de la secuencia. En este sentido, estamos frente a una generalización aritmética" (Vergel, 2015, p. 198). La línea que divide la aritmética y la generalización algebraica se basa en lo que es calculable dentro de un dominio u otro. En el álgebra, una generalización conduce a resultados que no se pueden alcanzar dentro del dominio aritmético (Radford, 2008). Dada la baja edad de los resolutores presentes en la investigación llevada a cabo, así como su poca familiaridad con los problemas de patrones, en el presente estudio entenderemos la definición de generalización como un sinónimo de generalización aritmética.

3.2 La gestión y el control

3.2.1 La metacognición en resolución de problemas

Como hemos comentado anteriormente, los aspectos que influyen en el resolutor de problemas son interdependientes, es decir, todos ellos juegan un papel esencial durante la actividad matemática y la especificidad de uno de ellos puede marcar la dirección de otro. En el presente estudio nos centraremos en la gestión y el control del resolutor que pertenecen al ámbito metacognitivo. La metacognición se refiere a la capacidad de reflexionar, comprender y controlar el propio aprendizaje (Ullauri y Ullauri, 2018). Flavell (1979) acuñó este término por primera vez y lo definió como:

> El conocimiento sobre los propios procesos y productos cognitivos, así como el conocimiento sobre las propiedades de la información, datos relevantes para el aprendizaje o cualquier cosa relacionada con los procesos y productos cognitivos (citado en Campanario y Otero, 2000, p. 232).

La línea que separa los términos cognición y metacognición es sumamente fina. La mayoría de procesos mentales que desarrollamos, son de carácter metacognitivo pero necesitamos de los procesos cognitivos para que éstos se produzcan (Schoenfeld, 1989). Dentro de los procesos metacognitivos diferenciamos dos categorías (Callahan, 1987): el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición.

Cuando hablamos de conocimiento sobre la cognición nos referimos al conocimiento que tiene una persona de sus capacidades cognitivas. En Paris, Lipson y Wixson (1983) observamos tres tipos de conocimiento: declarativo, procedimental y condicional. Dentro del campo de la matemática y concretamente, de la resolución de problemas, podemos observar que un sujeto conoce una o varias estrategias (conocimiento declarativo) sabe aplicarlas en contextos concretos (conocimiento procedimental) y reconoce cuándo y cómo usarlas eficazmente (conocimiento condicional).

Cuando hablamos de la regulación de la cognición (Callahan, 1987) nos referimos a las decisiones que uno toma para:

- **Regular:** Tomar conciencia de las decisiones necesarias para planificar y usar los procesos de resolución
- **Tomar consciencia:** Monitorear dichas acciones atendiendo a su efectividad en términos de estrategias
- **Evaluar:** Valorar la situación y evaluar la solución

Las decisiones que toma el resolutor con la finalidad de regular la cognición son exactamente las mismas que toma al resolver un determinado problema. Cuando un resolutor se enfrenta a un problema planifica los procesos, monitorea su progreso y evalúa su situación y solución. Este proceso no tiene porqué ser necesariamente lineal y de hecho, en los resolutores expertos a menudo no lo es (Swanson, 1990).

Existen infinidad de procesos metacognitivos como pueden ser la identificación de las propias dificultades durante el aprendizaje y su explicitación como problema, la autoevaluación del grado actual de comprensión de un texto, la autocuestionamiento para comprobar en qué medida se domina un tema concreto o la evaluación de las probables dificultades al responder las preguntas de un examen (Campanario y Otero, 2000). Tal y como afirman diversos estudios previos (Rosenzweig, Krawec y Montague, 2011; Swanson, 1990; Veenman y Spaans, 2005) la metacognición se desarrolla junto a la capacidad cognitiva general y podría ser incluso más efectiva que la aptitud general para predecir el rendimiento matemático.

Teniendo en cuenta que los procesos metacognitivos se dan de manera mental y subjetiva, el análisis de la metacognición se presenta como una tarea compleja que presenta limitaciones en distintas investigaciones (Ericsson y Simon, 1980). Encontramos en la literatura varios estudios que analizan los procesos metacognitivos de manera cuantitativa (Artzt y Armour-Thomas, 1992; García, Rodríguez, González-Castro, González-Pienda y Torrance, 2016; Özsoy y Ataman, 2017; Schraw y Sperling-Dennison, 1994; Sperling, Howard, Miller y Murphy, 2002). Gran parte de estos estudios usan cuestionarios como el MSQL o el MAI para identificar las habilidades metacognitivas del alumnado. El cuestionario MSQL fue elaborado por Pintrich, Smith, García y Mckeachie (1993) y perseguía la finalidad de conocer aspectos ligados a la motivación y el aprendizaje. Aunque dicho cuestionario no fue creado para medir aspectos ligados a la metacognición, dentro del apartado de motivación encontramos ítems referentes a estrategias cognitivas y metacognitivas. El cuestionario MAI fue elaborado y validado por Schraw y Sperling-Dennison (1994). Este instrumento persigue la finalidad explícita de conocer el grado de consciencia metacognitiva incluyendo ítems pertenecientes al conocimiento de la cognición y a la regulación de la cognición. Los autores elaboraron el cuestionario con la intención de relacionar un alto grado de consciencia metacognitiva con el éxito durante el proceso de aprendizaje. Aunque los estudios cuantitativos permiten analizar la consciencia metacognitiva atendiendo a muestreos amplios, no atienden a procesos metacognitivos concretos de los estudiantes ni a contextos didácticos específicos. En investigaciones como la presente, los cuestionarios de este tipo se muestran como poco útiles dado el bajo número de participantes y la tipología de objetivos detallados anteriormente.

En cuanto a los estudios cualitativos en resolución de problemas, los protocolos en voz alta son los más usados por los investigadores (Cole, 2019; Geurten y Lemaire, 2019; Kuzle, 2013; Wilson y Clarke, 2004). En estos casos se pide al alumno que verbalice el proceso de resolución de un modo concurrente o retrospectivo, es decir, mientras realiza el problema o una vez lo ha finalizado. Aunque este método permite un análisis exhaustivo de los procesos metacognitivos, en los resolutores de baja edad puede tener distintas limitaciones a considerar (Ericsson y Simon, 1980) como propiciar que el alumnado se bloquee durante la explicación o incluso invente pasos durante su explicación retrospectiva.

Dada la complejidad a nivel metacognitivo que presenta el proceso de resolución de un problema, Clarke (1989) realizó un estudio en el cual pretendía observar que ciclo metacognitivo seguía el alumnado al resolver un problema matemático. Imprimió varias tarjetas con ítems referentes a los procesos de consciencia, regulación y evaluación, y pidió al alumnado que a medida que iba resolviendo un problema, ordenara las tarjetas según los procesos que consideraba que estaba realizando. Las tarjetas referentes a la consciencia metacognitiva incluían afirmaciones sobre conocimientos previos que el alumnado podía activar en el contexto de investigación propuesto. Las tarjetas referentes a evaluación incluían afirmaciones referentes a la revisión y/o bloqueo. Finalmente, las tarjetas referentes a regulación incluían afirmaciones referentes a la planificación, aplicación directa del plan de acción y cambios de estrategia durante el proceso de resolución. Una de las conclusiones más relevantes a las que llegó el autor fue la imposibilidad de determinar, ante un mismo problema, uno o varios ciclos metacognitivos estancos que caracterizaran procesos que siempre se dieran del mismo modo y en el mismo momento. Este hecho nos lleva a realizar dos afirmaciones relevantes. En primer lugar, el análisis de los procesos metacognitivos que lleva a cabo el alumnado durante la resolución de un problema puede ser una de las claves para comprender el éxito y/o el fracaso durante la resolución (Sternberg, 1998). En segundo lugar, analizar los procesos metacognitivos que lleva a cabo el alumnado requiere el uso de diversos instrumentos de recogida de datos, así como una minuciosa triangulación, puesto que la metacognición se da de manera mental, subjetiva y difícilmente se verbaliza con claridad (Godino y Llinares, 2000).

3.2.1 Instrumentos de autorregulación metacognitiva

Dentro del campo de la didáctica matemática, existen distintos instrumentos de autorregulación metacognitiva. En primer lugar, encontramos los diarios de clase en los que el alumnado anota individualmente aspectos referentes al proceso de enseñanza y aprendizaje realizado (Rodríguez y Jorba, 1998). Los diarios de clase son elaborados individualmente y pueden ser desarrollados una o varias veces por semana. Este instrumento es de gran utilidad a nivel metacognitivo puesto que permite al alumnado estructurar su pensamiento y reflexionar sobre las tareas matemáticas, pero al ser elaborados de manera individual, no permiten que el alumnado comparta con fluidez los procesos metacognitivos y reflexivos llevados a cabo durante las tareas que realizan. En términos de resolución de problemas, los diarios de clase se muestran como poco efectivos a nivel de autorregulación del proceso.

En segundo lugar, encontramos los mapas conceptuales que permiten estructurar conceptos y procedimientos complejos estableciendo una estructura jerárquica en una cierta área de conocimiento (Morales, 1999). En cuanto a la resolución de problemas, los mapas conceptuales pueden ser útiles en términos de relación entre conceptos y procedimientos matemáticos, pero no contemplan explícitamente la inclusión de procesos metacognitivos. Atendiendo a la definición de problema que enmarca la presente investigación (Mayer, 1985), los mapas conceptuales serían más propios de la ejecución de ejercicios que del desarrollo y resolución de un problema.

En tercer lugar, encontramos la V de Gowin (Escudero y Moreira, 1999). Este instrumento ayuda al alumnado a identificar la relación entre lo que conocen y el nuevo conocimiento que construyen. La forma de V permite que el alumnado parta de lo general a lo particular y relacione los conceptos con los procedimientos llevados a cabo. La V de Gowin está dividida en 3 dominios: el dominio conceptual, el dominio metodológico y el objetivo o acontecimiento (figura 4). Atendiendo a su aplicación en resolución de problemas, el instrumento sí que contempla la introducción de algunos procesos metacognitivos en el dominio metodológico, aunque no contiene una estructura interna que atienda a las fases de resolución de un problema (Pólya, 1945).

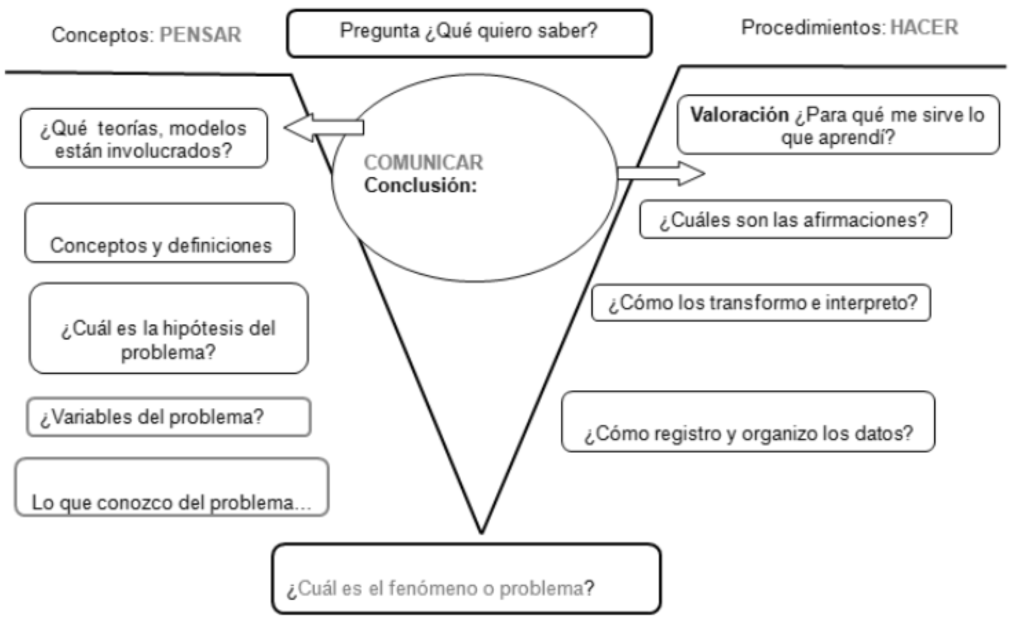


Figura 4. Diagrama V de Gowin adaptado (San Martín y Izquierdo, 2014)

Por último, encontramos la base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996). Este instrumento en formato diagrama permite al alumnado estructurar y orientar los modelos teóricos de la ciencia aplicados a la práctica. El constructo base de orientación puede contemplar tanto la inclusión de procesos metacognitivos como de destrezas matemáticas (Puig, 1996) propias de la resolución de problemas y además, puede ser estructurado atendiendo a las fases de resolución de un problema. Dada la investigación que nos ocupa y las características expuestas, la base de orientación de la acción se muestra como un instrumento propicio para fomentar la explicitación de los procesos metacognitivos del alumnado en resolución de problemas.

3.3 La base de orientación: Justificación y adaptación del instrumento

3.3.1 La base de orientación de la acción aplicada durante procesos lineales

Jorba y Sanmartí (1996) crearon y desarrollaron la base de orientación como un instrumento pensado específicamente en el área de ciencias naturales y matemáticas.

> Un instrumento ideado para promover que el alumnado desarrolle su capacidad de anticipar y planificar las operaciones necesarias para realizar una acción. A través de ella se pretende que explicite los procesos que se deben realizar o que se han realizado al ejecutar una tarea, o las características que permiten definir un modelo o un concepto. […] La base de orientación ayuda a desarrollar la habilidad de seleccionar las características relevantes y a anticipar un plan de acción (García y Sanmartí, 1998, p. 10-11).

Puesto que no existe en la literatura una definición que nos permita diferenciar la base de orientación de otro instrumento de autorregulación como los detallados en el apartado anterior, la definiremos para el propósito de esta investigación, como un instrumento secuencial paso a paso en el cual se sintetizan de manera subjetiva o personal las acciones a realizar durante un procedimiento científico o para explicar un constructo teórico (figura 5). La base de orientación se adapta al proceso de autorregulación y concepción de quien la elabora y se amplía o reestructura a medida que se producen nuevos aprendizajes. Dicho instrumento se puede concebir, del mismo modo que ocurre con la resolución de problemas, como un medio para planificar ciertas nociones científicas o matemáticas que queramos que el alumnado desarrolle o bien, como un fin en sí misma. En el presente estudio concebimos el uso de la base de orientación como un fin en sí mismo, es decir, como un medio para potenciar la explicitación y verbalización de los procesos metacognitivos en resolución de problemas, quedando el aprendizaje de conceptos y métodos concretos en un segundo plano. Por lo tanto, el interés principal que presenta dicho instrumento es la autorregulación del alumnado durante la resolución de un problema y no tanto el aprendizaje de un contenido o proceso matemático concreto tal y como plantean en su diseño Jorba y Sanmartí (1996).

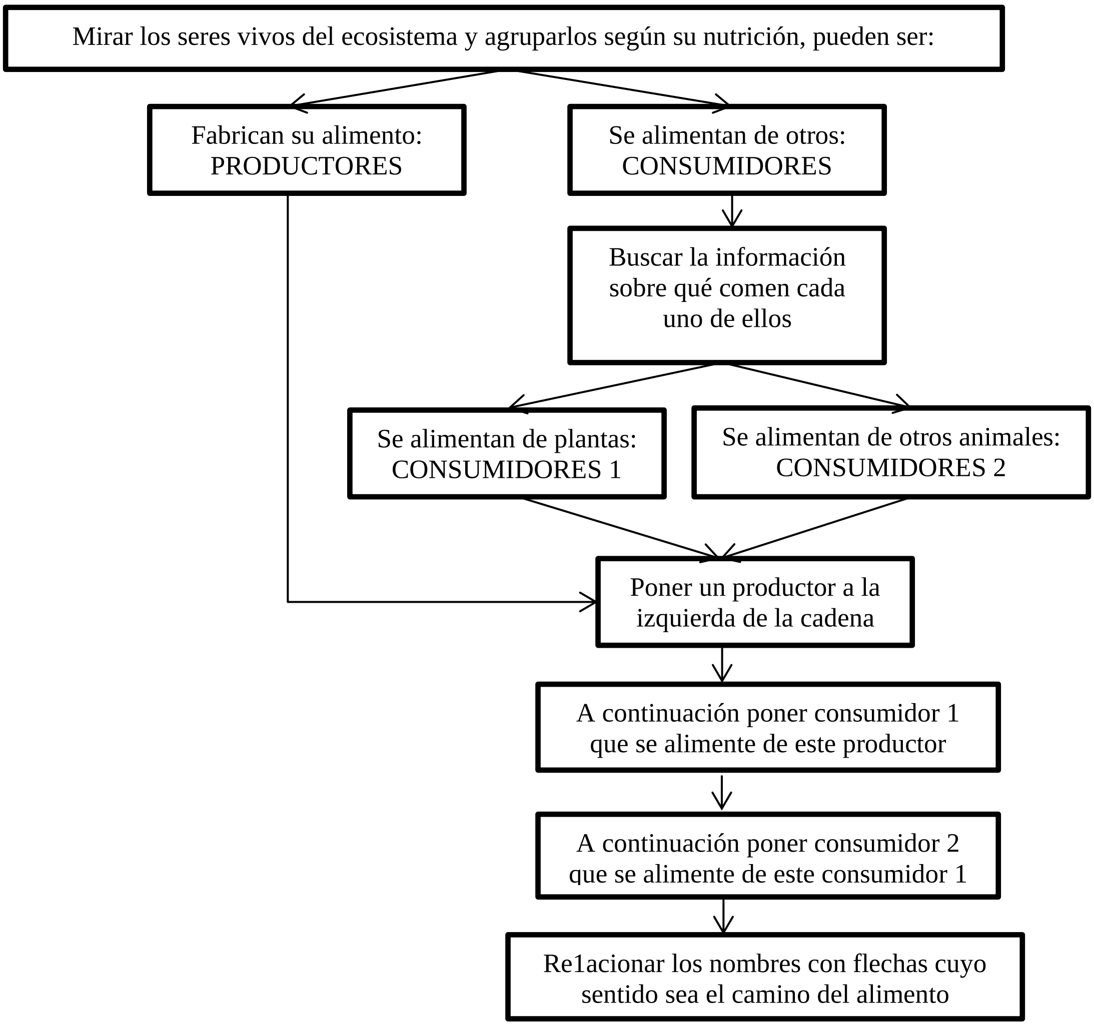


*Figura 5***.** Ejemplificación de una base de orientación de la acción de carácter general construida por una alumna de 1º de BUP; construcción de una cadena trófica (García y Sanmartí, 1998, p.12)

Para poder desarrollar una base de orientación de la acción debemos concretar previamente con el alumnado qué objetivo pretendemos alcanzar, determinar qué conocimientos hemos trabajado y qué conocimientos pretendemos desarrollar y por último, bajo qué condiciones la construiremos (Nunziati, 1990). Los distintos tipos de bases de orientación que podemos elaborar se caracterizan bajo cuatro parámetros distintos:

- **La forma de presentación:** Escrita, oral o pictórica
- **El nivel de generalización:** De lo particular y concreto a lo general
- **Nivel de completitud:** De muy completa a poco completa
- **Modo de acceso:** Dependiendo de si la construye el docente o el propio alumnado

Atendiendo a los cuatro parámetros anteriores, investigaciones previas han mostrado que la forma de presentación, al depender del nivel educativo y del grupo clase, no tiene un impacto altamente relevante en su aplicación (Jorba y Sanmartí, 1996). A nivel de completitud, las bases de orientación que son poco completas no reflejan completamente las necesidades de la actividad que orientan. Por lo tanto y teniendo en cuenta los indicadores anteriores, se pueden considerar cuatro tipos de bases de orientación (tabla 2):

Tabla 2. Tipos de bases de orientación (Jorba y Sanmartí, 1996, anexo IV.4)

Tipo	Completitud	Nivel de generalización	Modo de acceso
1	Completa	Particular	Elaborada por el docente
2	Completa	General	Elaborada por el docente
3	Completa	General	Elaborada por el alumno
4	Completa	Particular	Elaborada por el alumno

Tal y como podemos observar en el cuadro anterior, la base de orientación que se muestra como más efectiva es la de tipo 3, ejemplificada en la figura 4. En este ejemplo mostrado la base elaborada por la propia alumna le permite explicar un constructo científico general, como es la construcción de una cadena trófica, diferenciando aquellos seres que son productores de aquellos que son consumidores de plantas o animales. Si la base ejemplificada en la figura 1 hubiera sido elaborada por el docente en vez de por la alumna, nos encontraríamos ante una base de tipo 2, es decir, general pero preparada previamente. En este caso, el nivel de significatividad de la base sería menor puesto que no sería la propia alumna quien construyese el constructo científico y, por lo tanto, el proceso de elaboración del constructo teórico no estaría tan arraigado a la reflexión personal de la alumna. Finalmente, si la alumna en cuestión hubiera elaborado previamente una base que le permitiera identificar los tipos de seres vivos que son sólo productores, nos encontraríamos ante una base de tipo 4, es decir, particular y elaborada por la alumna. En este último caso, la alumna identificaría un aspecto particular – los productores de alimentos – dentro de un constructo más general – la cadena trófica –.

Cuando trabajamos con bases de orientación de tipología 3 y 4, es decir, elaboradas por el propio alumnado, podemos encontrar tantas bases de orientación distintas como alumnos tengamos en el aula; cuanto más personalizada, más comprensible y significativa será para el alumno. En estos casos, el papel del docente es primordial puesto que éste actúa como guía del proceso y su finalidad es elaborar actividades que permitan al alumnado poder construir el concepto o procedimiento a trabajar. Aunque por motivos temporales, por falta de conocimiento del instrumento o por tratarse de constructos conceptuales, la base de orientación puede ser elaborada por el profesor, lo idóneo es que sea construida por el alumnado (García y Sanmartí, 1998).

Atendiendo a los objetivos del estudio que nos ocupa, si pretendemos que la base de orientación propicie la aparición y explicitación de procesos metacognitivos y destrezas matemáticas, tiene sentido que sea el propio alumnado quien la elabore y modifique. Tal y como hemos señalado anteriormente, el papel del docente en este caso será de orientador. García y Sanmartí (1998) sugieren una serie de preguntas clave para propiciar que el alumnado identifique y reflexione sobre los aspectos esenciales del constructo o procedimiento a elaborar (tabla 3) sin olvidar que deben ser los mismos alumnos quienes le den forma y sentido.

Tabla 3. Preguntas clave para la creación de la base de orientación (izquierda) y finalidad de dichas preguntas (derecha) (García y Sanmartí, 1998)

Elementos estructurales de la acción	
¿A qué categoría pertenece la situación planteada?	Identificación del problema
¿Por qué se debe realizar esta tarea?	Motivo de la tarea
¿Qué se quiere conseguir con la realización de la acción que interviene como solución de la tarea?	Objetivo de la acción
¿Qué operaciones es necesario realizar para ejecutar la acción y por qué?	Operaciones de la acción
¿Qué conocimientos son necesarios para efectuar de manera consciente estas operaciones?	Contenidos de la base
¿En qué condiciones tenemos que realizar la tarea planteada?	Condiciones de realización
Anticipación de la acción	
¿Qué estrategia o estrategias se pueden adoptar para resolver la situación planteada?	Estrategias y orden de ejecución
¿Cuál es el resultado esperado de las operaciones proyectadas?	Posibles resoluciones
Planificación de la acción	
¿Cuál de las estrategias parece la más adecuada?	Elección de la estrategia
¿Cuál es el plan de ejecución que seguiremos?	Plan de trabajo

Finalmente cabe añadir, que las bases de orientación deben ser evaluadas y reguladas a partir de autoevaluación o coevaluación tal y como especificaremos más adelante. Aunque sea un instrumento basado en la propia percepción del constructo o procedimiento, debe tener criterio científico. Las bases y los ítems que en ella se encuentran no son aleatorios; hay unas premisas u otras a seguir dependiendo de la aplicación final de dicha base.

Aunque la base de orientación ayuda al alumno a planificar el proceso de resolución y lo dota de acciones y procedimientos que le son de ayuda al enfrentarse a una tarea, es el hecho de introducir instrumentos autorregulativos, como la autoevaluación y coevaluación, lo que promueve que el alumno desarrolle procesos reflexivos complejos. Por lo tanto, la finalidad de la evaluación en general no es realizar preguntas directas y estancas sobre el proceso de resolución sino realizar preguntas que permitan al alumno reflexionar sobre su propio pensamiento y sobre su propia práctica. Este hecho es el que permitirá emerger procesos metacognitivos complejos que se incorporarán en la base de orientación a medida que el alumnado la usa.

Por último, debemos tener en cuenta que la base de orientación no se crea y permanece inmutable, sino que se transforma a partir del aprendizaje paulatino del alumnado.

> Contribuyen a la elaboración progresiva de las bases de orientación todas aquellas situaciones didácticas que promuevan la reflexión de los estudiantes sobre aquello que están aprendiendo, cómo lo están aprendiendo y qué dificultades encuentran, así como aquellas situaciones que propicien el contraste de puntos de vista y opiniones (García y Sanmartí, 1998, p. 14).

3.3.2 La base de orientación de la acción aplicada durante la resolución de problemas

Siguiendo las directrices marcadas por Jorba y Sanmartí (1996) así como las ejemplificaciones y estudios posteriores realizados por García y Sanmartí (1998), tres años atrás Villalonga y Deulofeu (2017) elaboraron y aplicaron una base de orientación con alumnos de último curso de educación primaria y primer curso de educación secundaria durante un ciclo de resolución de problemas. Su objetivo principal era caracterizar la competencia matemática del alumnado a partir del proceso de creación y aplicación de una base de orientación no lineal. Teniendo en cuenta las limitaciones temporales de su estudio, la base de orientación propuesta por los autores estaba previamente elaborada (tabla 4) y a partir de su uso, los alumnos podían añadir, quitar o modificar aquellas concreciones que considerasen oportunas. Dicha base, se basa en las fases de resolución de un problema aportadas por De Corte, Verschaffel y Greer (2000b), De Corte y Verschaffel (2003) y las propuestas de Mason, Burton y Stacey (1982). Sus resultados enfatizan que la base de orientación permite al alumnado estructurar de un modo más eficaz su proceso de resolución, posibilita una mejor gestión ante un posible atasco o bloqueo y da sentido a las fases de resolución de un problema (Pólya, 1945) potenciando el trabajo de la competencia matemática. A su vez, las conclusiones de su estudio señalan que el instrumento puede ser aplicado durante procesos no algorítmicos, como es la resolución de un problema matemático, puesto que se obtienen múltiples beneficios didácticos.

Tabla 4. Base de orientación creada por Villalonga y Deulofeu (2017, p.266) aplicada a la resolución de problemas matemáticos

Resolución de problemas	
Dominios (D)	**Dimensiones (d)**
Comprendo el problema	d1 Distingo las preguntas que he de responder y entiendo todo aquello que se me pide que haga d2 Distingo los datos y me aseguro que los entiendo d3 Expreso el problema para entenderlo mejor haciendo un dibujo, esquema, diagrama… (lo que me parezca más adecuado) y hago pruebas si me es necesario
Para cada pregunta formulada	
Tengo un plan de acción	d4 Pienso alguna estrategia de resolución a partir de la representación y las pruebas o ejemplos que he hecho, y trato de aplicarlo d5 Encuentro los datos y los razonamientos y/o algoritmos que necesito para aplicar la estrategia
Reviso mi tarea	d6 Aplico la estrategia y escribo de manera que se entienda todo aquello que he pensado d7 Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite) d8 Una vez resuelto: -Investigo si hay otras soluciones y las encuentro. Si sólo hay una, razono por qué no hay más -Razono si se podría hacer de otras maneras d9 Releo lo que he hecho, y me aseguro que lo explico todo, que respondo de manera razonada y que se entiende. Relaciono si hace falta, con el resto de preguntas y tareas solicitadas

La principal diferencia del estudio de Villalonga y Deulofeu (2017) respecto al planteamiento y diseño de base de orientación que proponen Jorba y Sanmartí (1996) es que la base de orientación en resolución de problemas sintetiza y estructura distintas acciones y procedimientos que pueden ayudar al alumnado a resolver un problema. Por lo tanto, el propio alumno es quien elige cuáles de estas acciones y procedimientos le son útiles al resolver el problema que se le plantea. En cambio, las bases diseñadas para procesos algorítmicos de la ciencia y la matemática, tal y como proponen Jorba y Sanmartí (1996), sintetizan y conjugan teoría y práctica de tal modo que se deben seguir estrictamente para responder a la tarea planteada.

Al finalizar su estudio, Villalonga y Deulofeu (2015) señalaron que aunque la potencialidad del instrumento es evidente, el formato listado paso a paso dificulta su uso por parte del alumnado. Este hecho se produce dado que cuando resolvemos un problema, podemos usar multitud de caminos para hallar la solución y los procesos metacognitivos que entran en juego se configuran de manera distinta en cada resolutor. En la mayoría de los casos el proceso de resolución de un problema matemático no es secuencial o lineal, aunque la solución presentada al final proceso sí lo sea. “Se confirma así que la resolución un problema es una dinámica compleja, en ningún caso lineal, que requiere de tiempo, reflexión y dedicación” (Villalonga y Deulofeu, 2017, p. 279).

Atendiendo a la limitación señalada por Villalonga y Deulofeu (2017) respecto al formato lineal de la base, en la presente investigación se replanteó la creación y uso de la base de orientación con el objetivo de promover procesos metacognitivos (Clarke, 1989) y destrezas matemáticas (Puig, 1996) en resolución de problemas.

3.3.3 La base de orientación no lineal (BONL)

La base de orientación no lineal (BONL por sus siglas) es un instrumento de autorregulación matemática concebido y diseñado por los autores de la presente investigación. La concepción de dicho instrumento sigue las directrices principales marcadas por Jorba y Sanmartí (1996), la definición de regulación metacognitiva señalada por Clarke (1989) y salva las limitaciones señaladas por Villalonga y Deulofeu (2017) respecto la linealidad de la base de orientación de la acción en resolución de problemas.

Nos referirnos a él como instrumento de autorregulación puesto que persigue la finalidad de regular el uso de las destrezas matemáticas (Puig, 1996) así como los propios procesos metacognitivos durante la resolución de un problema. La base de orientación no lineal tiene una estructura de árbol ramificado con cuatro ramas principales que atienden a las fases de resolución de un problema (Pólya, 1945). En cada una de las ramas el alumnado añade las destrezas y procesos metacognitivos que puede usar para resolver un determinado tipo de problemas. El objetivo que persigue este instrumento es que el alumnado verbalice explícitamente el proceso de resolución de un problema y lo estructure por escrito haciendo emerger procesos metacognitivamente complejos (figura 6).

La base de orientación no lineal, siguiendo las directrices principales de Jorba y Sanmartí (1996), no es un instrumento que se crea y permanece inmutable, sino que evoluciona a medida que el conocimiento del alumnado y su uso también evolucionan. Una de las diferencias principales respecto a la base de orientación de la acción, es que es el propio alumnado quien debe elaborar el instrumento puesto que éste debe tener significado real para ellos. Por lo tanto, a diferencia de la base de orientación de la acción que puede ser elaborada por el docente, la base de orientación no lineal debe ser creada por el alumnado. El docente también juega un papel fundamental en el proceso de creación y desarrollo de la base de orientación no lineal puesto que, del mismo modo que ocurre en las bases de orientación de la acción, es él quien recopilará las ideas y percepciones del alumnado con la finalidad de realizar preguntas que les lleven a la reflexión matemática (Sanmartí, 2019).

Figura 6. Ejemplificación de base de orientación no lineal (BONL)

Para poder desarrollar una base de orientación no lineal debemos tener en cuenta distintos factores. En primer lugar, debemos plantear qué contenido matemático específico trabajaremos con el alumnado a partir de la resolución de problemas. Es evidente que algunas de las destrezas y procesos metacognitivos que el alumnado puede llevar a cabo en un problema de geometría, no son las mismas que en un problema de numeración. Es por ese motivo, que para cada tipología de problemas encontraremos bases que contendrán ítems comunes e ítems específicos del contenido matemático. Por lo tanto, el proceso óptimo para trabajar con la base de orientación no lineal a largo plazo, es generar una primera base entorno un contenido concreto y abstraer aquellos ítems que son comunes en el ámbito de resolución de problemas que usaremos para generar una nueva base entorno un contenido distinto (figura 7). De este modo, el alumnado traspasa de una base a otra aquellos ítems comunes entre los distintos problemas y añade en cada nueva base ítems específicos del contenido.

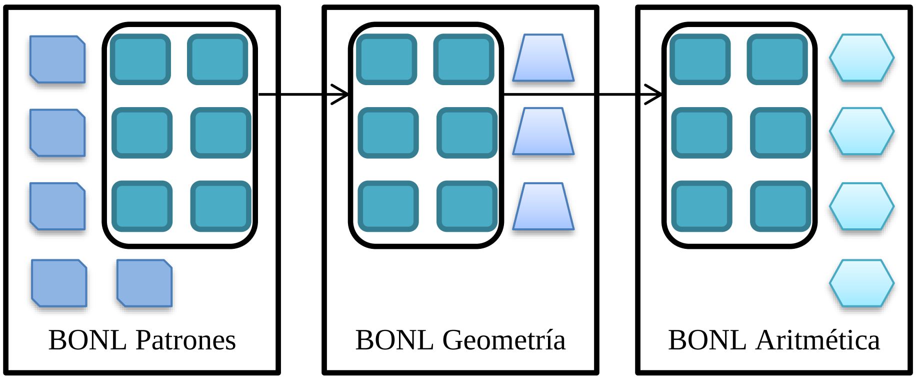


Figura 7. Distinción entre los ítems comunes y específicos de la BONL

En segundo lugar, debemos tener en cuenta cómo evaluamos el proceso de construcción y desarrollo del instrumento tanto para saber qué grado de apropiación de la base tiene el alumnado como para validar su pertinencia y adecuación a los problemas propuestos. Uno de los métodos más efectivos de feedback que podemos usar, es la evaluación entendida como evaluación formadora (Sanmartí, 2010). Los cuestionarios de autoevaluación y sobretodo, coevaluación, se han mostrado efectivos para conocer qué destrezas matemáticas y procesos metacognitivos ha llevado a cabo el alumnado en las distintas fases del problema (García y Sanmartí, 1998) que habitualmente no aparecen en sus producciones escritas (Villalonga y Deulofeu, 2015). Al diseñar dichos cuestionarios, debemos tener en cuenta el periodo educativo en el que se encuentra el alumnado. En el primer ciclo de educación primaria, podemos usar escalas numéricas de satisfacción, pictogramas, dianas, o rúbricas (Rosli, Goldsby y Capraro, 2013) y comentarlas en gran grupo. En los últimos cursos de educación primaria, los formularios escritos sirven al alumnado, y al propio profesorado, como instrumentos de detección de destrezas matemáticas y procesos metacognitivos y a su vez, sirven como fuente de detección de errores (Villalonga y Deulofeu, 2015). Al construir las preguntas de los cuestionarios, debemos tener en cuenta que nuestro objetivo principal será detectar qué destrezas y procesos metacognitivos ha llevado a cabo el alumnado que no ha explicitado por escrito durante la resolución del problema y que, por lo tanto, no podemos observar (tabla 5). La finalidad de sus respuestas es observar cuáles de estas destrezas y procesos clave debemos incluir en la base de orientación no lineal (Deulofeu y Villalonga, 2018).

Tabla 5. Ejemplificación de preguntas referentes a procesos metacognitivos en resolución de problemas (Clarke, 1989)

Conciencia
• Pensé en lo que ya sé • Traté de recordar si alguna vez hubiera hecho un problema como este antes • Pensé en algo que había hecho en otro momento que me había sido útil • Pensé “sé qué hacer” • Pensé “conozco este tipo de problema”
Evaluación
• Pensé en cómo iba yendo el proceso • Pensé si lo que estaba haciendo estaba funcionando • Revisé mi trabajo • Pensé "¿es correcto?” • Pensé "no puedo hacerlo"
Regulación
• Hice un plan para resolverlo • Pensé en una forma diferente de resolver el problema • Pensé en lo que haría a continuación • Cambié la forma en que trabajaba

Una vez seleccionado el contenido específico que trabajaremos y elaborados los cuestionarios de autoevaluación y coevaluación, se debe proponer al alumnado un primer problema con la finalidad de que tengan una base de trabajo previa (Villalonga y Deulofeu, 2015). Una vez finalizado el problema, el alumnado se autoevalúa y coevalúa con la finalidad de conocer qué destrezas matemáticas (Puig, 1996) y procesos metacognitivos (Clarke, 1989) han llevado a cabo. Posteriormente, a partir de un proceso de conversación en gran grupo supervisado por el docente, el alumnado comparte las respuestas a sus cuestionarios y se dividen las destrezas y procesos destacados atendiendo a las fases de Pólya (1945) para tener una primera base de orientación no lineal. Esta primera base es la que el alumnado usa para resolver un segundo problema y se inicia de nuevo el ciclo de resolución – autoevaluación – coevaluación – modificación de la base (obteniendo así una segunda base de orientación no lineal). Cada ciclo que completemos y que por lo tanto desemboque en la introducción o modificación de las destrezas y procesos de la base, será designado como una fase de desarrollo (figura 8). El número de fases de desarrollo que se lleven a cabo dependerá de la profundidad y especificidad que se quiera dar a la base. Cuantas más fases de desarrollo llevemos a cabo, más específica y detallada será la base de orientación no lineal que obtendremos finalmente.

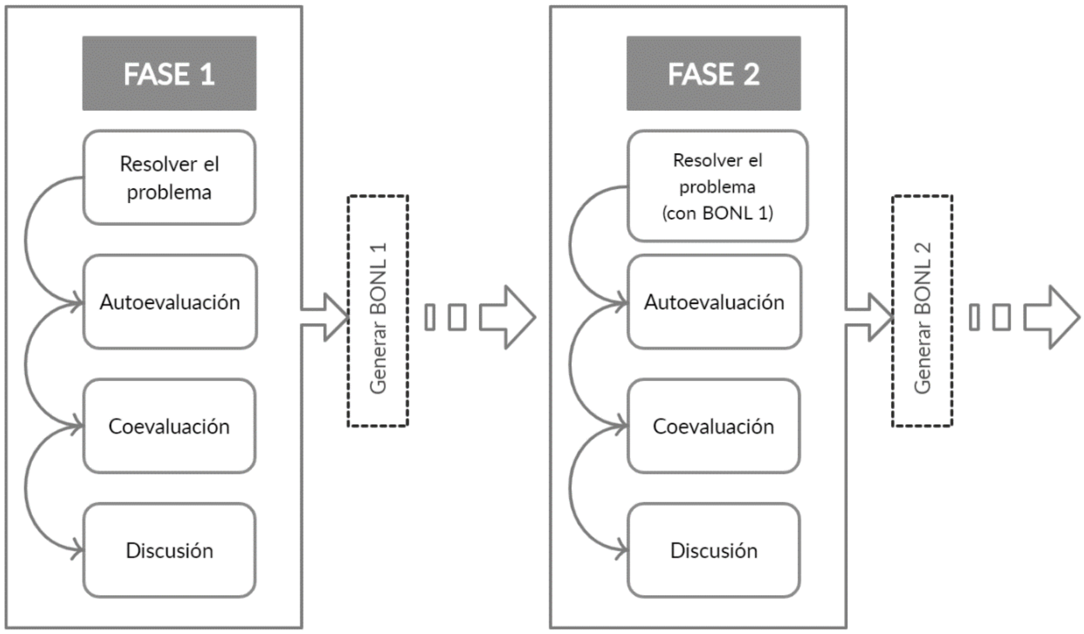


Figura 8. Fases de desarrollo de una base de orientación no lineal

4. Justificación metodológica

El diseño metodológico y la recogida de datos de la presente investigación tuvieron lugar en dos fases diferenciadas: una prueba piloto realizada durante el curso escolar 2017-2018 y una implementación definitiva llevada a cabo durante el curso 2018-2019. El presente apartado de justificación metodológica recogerá, en primer lugar, los aspectos más relevantes de ambas intervenciones (apartados 4.1 y 4.2). En segundo lugar, se resumirán los cambios realizados entre la prueba piloto y la implementación definitiva (apartado 4.3).

4.1 Prueba piloto

La prueba piloto llevada a cabo durante el curso escolar 2017-2018 pretendía responder al primer objetivo del estudio: *"Identificar momentos en los que la base de orientación de la acción no se adapte al proceso de resolución de los problemas matemáticos, con la finalidad de desarrollar el instrumento base de orientación no lineal".* Dados los antecedentes teóricos expuestos, nuestra pretensión era explorar el uso de una base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996) como herramienta para promover los procesos metacognitivos en resolución de problemas de patrones. Para ello, debíamos caracterizar los procesos metacognitivos del alumnado con la finalidad de observar cómo actuaba la base de orientación en términos de metacognición y en qué momentos observamos que su linealidad presentaba inconvenientes. Las características de estos momentos y su relación con los elementos metacognitivos son los que nos permitieron justificar la reconstrucción de la base de orientación de la acción y desarrollar la base de orientación no lineal (BONL).

4.1.1 Participantes y diseño de la prueba piloto

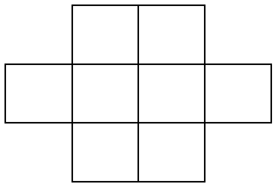
Los datos de la prueba piloto se recogieron en tres grupos de sexto de educación primaria correspondientes a tres centros distintos del área metropolitana de Barcelona a los que llamaremos centros A, B y C. Participaron un total de 75 alumnos con edades comprendidas entre los 11 y 12 años. La elección de los centros y por ende, de los grupos participantes, se hizo teniendo en cuenta que el alumnado debía tener experiencia previa en resolución de problemas matemáticos. Este hecho promueve que el alumnado esté familiarizado con la verbalización del proceso de resolución, hecho que es necesario para analizar en profundidad sus producciones escritas (Villalonga y Deulofeu, 2015). El alumnado de los tres centros participantes trabaja la resolución de problemas en formato taller una hora a la semana durante toda la educación primaria. Generalmente, el alumnado se agrupa individualmente o por parejas para resolver los problemas que propone el docente. Posteriormente, se realiza una puesta en común de las estrategias de resolución que ha llevado a cabo el alumnado. Ninguno de los centros ha trabajado anteriormente con el instrumento base de orientación, ni usa otro instrumento de autorregulación durante los talleres de matemáticas.

Con la finalidad de desarrollar una base de orientación de la acción, inicialmente delimitamos los parámetros de la base de orientación no lineal que el alumnado debía crear. Ésta sería escrita, concreta, medianamente completa y creada por el alumnado. El principal motivo que nos llevó a esta elección fue la nula familiarización del grupo clase con el instrumento. Por lo tanto, consideramos que debíamos partir de un objeto concreto – la resolución de una sola tipología de problemas– y que además, debía ser el propio alumnado quien elaborara la base en formato escrito, ya que facilitaría su revisión constante.

A continuación, seleccionamos dos problemas que trabajan esencialmente la numeración y los patrones matemáticos respectivamente (figura 9). Consideramos que los problemas de numeración y patrones permiten al alumnado aplicar distintos modos de visualización (McGarvey, 2012), favorecen la versatilidad del alumnado entendida como la variabilidad de estrategias que pueden aplicar (Montenegro, Costa y Lopes, 2018) y desarrollan progresivamente el pensamiento algebraico a partir de tareas de generalización inmediata y cercana (Jurdak y Mouhayar, 2014).

<u>Problema 1: Del 1 al 8</u>

Coloca los números del 1 al 8 en la tabla que ves aquí abajo de tal manera que no se toquen dos consecutivos, ni por un lado ni por un vértice. ¿Cómo lo has hecho?



Explícalo paso a paso.

<u>Problema 2: La tabla numérica</u>

Juliana ha escrito en una tabla numérica los números naturales 1, 2, 3, 4, 5... Poniéndolos de tal manera como se ve en el dibujo:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
12	13	16	17	20
21	24	25	28	29
22	23	...	...	...

Ha ido colocando los números hasta el 100 y se ha preguntado: ¿Cuánto suman los números de todas las casillas que tienen un lado en común con el 100? ¿Cómo lo has sabido? Explícalo paso a paso

Figura 9. Adaptación de dos problemas de lógica y patrones matemáticos obtenidos de FEEMCAT, SCM, Generalitat de Catalunya (2000-2018). Problemes a l'esprint. Recuperado de http://www.cangur.org/esprint/ [setiembre 2020]

Posteriormente, decidimos que la prueba piloto tuviera un carácter no interviniente en la cual fueran los propios docentes los que llevaran a cabo la metodología con el alumnado durante las horas de talleres matemáticos, sin presencia de la investigadora. Esta decisión se tomó puesto que nuestra pretensión era observar cómo el alumnado resolvía los problemas propuestos de manera natural, tal y como lo hacían habitualmente en el aula, sin encontrarse coaccionados por la presencia de observadores. Consideramos que este hecho promovía que las resoluciones del alumnado fueran más fidedignas a su cotidianidad y por ende, el análisis de los procesos metacognitivos y destrezas matemáticas escritas no estuviera sesgado. Previamente a la intervención, se realizaron tres reuniones con los respectivos docentes con la finalidad de presentar la estructura y utilidad de la base de orientación, así como la dinámica a seguir durante la resolución de los dos problemas propuestos. Se elaboró un documento resumen del presente marco teórico que sirvió como guion de discusión durante las reuniones con los docentes.

4.1.2 Aplicación en el aula

La implementación de la prueba piloto se llevó a cabo en dos sesiones de una hora de duración. En la primera sesión, se leyó y analizó el problema con el alumnado resolviendo aquellas dudas de comprensión que no afectaran directamente al proceso de resolución (Mayer, 1985). Posteriormente, el profesorado planteó al alumnado las preguntas clave (García y Sanmartí, 1998) que preceden a la elaboración de una base de orientación (ver tabla 3, apartado 3.3.1 marco teórico). Las respuestas del alumnado a cada pregunta planteada fueron anotadas en la pizarra y a partir de una discusión en gran grupo, el alumnado seleccionó de manera unánime aquellos procesos metacognitivos y destrezas matemáticas que consideraron relevantes y esenciales para proceder a la resolución del primer problema. Posteriormente, se listaron en la pizarra los procesos y destrezas seleccionados y se ordenaron de manera secuencial, es decir, por orden cronológico de inicio a fin coincidiendo con el desarrollo del proceso de resolución. A la derecha de cada uno de ellos se incluyó una columna para que el alumnado anotase con una cruz si usaba o no un determinado ítem. Una vez elaborada la base de orientación, el alumnado resolvió el primer problema individualmente. Se realizó una puesta en común sobre las posibles estrategias y soluciones encontradas.

En una segunda sesión, se pidió al alumnado si deseaba modificar la base de orientación atendiendo a las observaciones que habían realizado durante la resolución del primer problema y a los procesos y destrezas usadas y no usadas. Posteriormente, se procedió a resolver el segundo de los problemas con la base de orientación modificada y se pusieron en común las distintas resoluciones y estrategias.

4.2 Implementación definitiva

Las observaciones y resultados obtenidos durante la prueba piloto llevada a cabo durante el curso escolar 2017-2018, nos permitieron alcanzar el primer objetivo del estudio y por lo tanto, desarrollar la herramienta base de orientación no lineal. La implementación definitiva llevada a cabo durante el curso escolar 2018-2019 pretendía por lo tanto, responder al segundo y tercer objetivo del estudio: *"Analizar el papel de la autoevaluación y la coevaluación como métodos de feedback durante la construcción y uso de una base de orientación no lineal*" y "*Caracterizar la naturaleza de una base de orientación no lineal elaborada por tres grupos de alumnos distintos ante un mismo ciclo de resolución de problemas".*

4.2.1 Participantes y diseño de la implementación definitiva

Los datos de la implementación definitiva se recogieron en tres grupos de sexto de educación primaria correspondientes a dos centros distintos del área metropolitana de Barcelona, a los que llamaremos centros D y E. Participaron un total de 75 alumnos con edades comprendidas entre los 11 y 12 años. La elección de los centros y por ende, de los grupos participantes, se hizo teniendo en cuenta que el alumnado no debía tener experiencia previa en resolución de problemas matemáticos. Este hecho promueve que el alumnado no esté familiarizado con la verbalización del proceso de resolución y por lo tanto, nos permitiría observar de qué modo la base de orientación no lineal promueve el uso y verbalización escrita de procesos metacognitivos y destrezas matemáticas durante un ciclo de resolución de problemas de patrones.

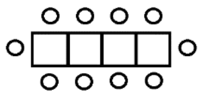
Durante el horario lectivo, ambos centros disponen de una hora semanal de resolución de problemas en la cual no realizan problemas matemáticos en palabras de Mayer (1985), sino que resuelven ejercicios de aplicación directa de algoritmos. Por lo tanto, el alumnado no está familiarizado con la resolución de problemas en sí misma y tampoco conoce ni ha trabajado anteriormente con ningún tipo de base de orientación ni otro instrumento de autorregulación matemática. A diferencia de la prueba piloto, la implementación definitiva tuvo un carácter interviniente, es decir, se diseñó y se llevó a cabo por los investigadores del presente estudio. Esta decisión se tomó puesto que no existen antecedentes del instrumento base de orientación no lineal dado que es una herramienta desarrollada por los autores del estudio. Por lo tanto, debíamos ser nosotros mismos los que gestionáramos las intervenciones del alumnado, así como el proceso de construcción y modificación del instrumento.

En cuanto al diseño de la implementación definitiva, consideramos que la base de orientación no lineal debía ser escrita, concreta, medianamente completa y creada por el alumnado, del mismo modo que se diseñó la construcción de la base de orientación de la acción desarrollada en la prueba piloto. A continuación, seleccionamos 4 problemas de patrones geométricos (Spangenberg y Pithmajor, 2020) organizados de más sencillo a más complejo ateniendo a la dificultad de hallar el patrón (Figura 10). Este hecho posibilita la aparición de destrezas matemáticas y procesos metacognitivos cada vez más complejos. El enunciado escrito de los problemas seleccionados, se complementaba con un dibujo que facilitaba su comprensión y su resolución en caso de no reconocer métodos aritméticos (Villalonga y Deulofeu, 2015).

<u>Problema 1: La cena</u>

Fuente: Arbona, Beltrán, Gutiérrez y Jaime (2017)

Queremos organizar una cena con nuestros amigos pero no sabemos a ciencia cierta cuantas mesas necesitamos. Lo que sí que sabemos es que queremos poner mesas en una sola hilera y que los amigos se sentaran tal y como se muestra en el dibujo.



Si somos 40 amigos, ¿cuántas mesas necesitaremos? ¿Y si somos 100?
A última hora nos han confirmado que en total, seremos 143 amigos. Cuando estemos todos sentados, ¿quedará algún sitio vacío en la mesa? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

<u>Problema 2: Los Palillos</u>

Fuente: Zapatera (2018)

Anna ha estado jugando a hacer figuras con palillos. Primero ha decidido hacer triángulos de la siguiente manera:

Se ha preguntado ¿cuántos palillos le hacen falta si quiere hacer 10 triángulos siguiendo el mismo patrón que en la figura? ¿Y si quiere hacer 20? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

Problema 3: La tabla numérica

Fuente: FEEMCAT, SCM, Generalitat de Catalunya (2000-2018). Problemes a l'esprint.

Juliana ha escrito en una tabla los números naturales 1, 2, 3, 4, 5… poniéndolos del tal manera como se muestra en el dibujo:

1	4	5	8	9
2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
12	13	16	17	20
21	24	25	28	29
22	23	…	…	…

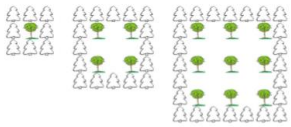
Ha empezado a mirar la tabla y ha decidido sumar los números que tienen un lado en común con el 10. Así pues, ha sumado 9+7+19=35. Luego ha pensado: "Haré lo mismo con otro número. Sumaré los números que tienen un lado en común con el 100". Pero… creo que no hace falta que dibuje todos los números.

¿Podrías explicar cómo lo ha hecho Juliana? ¿Qué resultado da la suma de los números que tienen un lado en común con el 100? ¿Y con el 1000? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

Problema 4: Los pinos y los naranjos

Fuente: Morera, Chico, Badillo y Planas (2012)

Un agricultor quiere plantar naranjos siguiendo una forma cuadrada y alrededor quiere plantar pinos. Se imagina el siguiente esquema para 1, 2 y 3 hileras de naranjos:



¿Cuántos pinos le harán falta si quiere plantar 4 hileras de naranjos? ¿Y si quiere plantar 10 hileras? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

Figura 10. Problemas de patrones matemáticos geométricos usados en la implementación definitiva

Una vez seleccionados los problemas, elaboramos dos cuestionarios, uno de autoevaluación y otro de coevaluación que el alumnado respondería una vez finalizado cada uno de los problemas seleccionados. Ambos cuestionarios disponían de una versión A y B (Tabla 6). La versión A fue diseñada para la evaluación del primer problema que el alumnado resolvería sin ningún tipo de base de orientación no lineal, tal y como veremos más adelante. La versión B fue diseñada para la evaluación de los problemas dos, tres y cuatro puesto que incluía preguntas referentes a la BONL creada y usada por el alumnado.

Tabla 6. Comparativa entre las versiones A y B de los cuestionarios de autoevaluación y coevaluación.

		Autoevaluación		**Coevaluación**	
		Versión A	*Versión B*	*Versión A*	*Versión B*
	Problemas	P1	P2, P3, P4	P1	P2, P3, P4
	Uso / no uso de la BONL	Sin BONL	Con BONL	Sin BONL	Con BONL
Preguntas referentes a la resolución	Verbalización del método de resolución	✓	✓	✓	✓
	Bloqueo / atasco y cambio de estrategia	✓	✓	✓	✓
	Puntos fuertes y aspectos para mejorar de la producción del compañero	✗	✗	✓	✓
	Identificación de procesos y destrezas de la base usados	✗	✓	✗	✓
	Nuevos procesos y destrezas de la base a añadir	✗	✓	✗	✗

La versión A de la autoevaluación constaba de dos preguntas diferenciadas. En primer lugar, se pedía al alumnado que explicitara el método de resolución que había llevado a cabo paso a paso. Esta primera pregunta respondía a la necesidad de verbalizar explícitamente el proceso de resolución una vez el problema está terminado, puesto que el alumnado tiende a verbalizar por escrito procesos que ha omitido durante la resolución del problema (Lester, 1987). En segundo lugar, se pedía al alumnado que indicara si en algún momento había sufrido un bloqueo o atasco durante la resolución y cómo lo había solucionado. Esta segunda pregunta respondía a la necesidad de detectar posibles cambios de estrategia (Villalonga y Deulofeu, 2015).

En la versión B de la autoevaluación se añadieron las preguntas tres y cuatro. En la pregunta tres se pedía al alumnado que marcara qué procesos metacognitivos y destrezas matemáticas de la base de orientación no lineal habían usado y que identificaran si los habían usado una vez o más de una vez. En la pregunta cuatro se pedía al alumnado que indicara si había aplicado algún proceso metacognitivo o destreza matemática que no aparecía en la base de orientación de la acción que habían elaborado y que por lo tanto, desearan añadir.

En la versión A de la coevaluación, aparecían tres grupos de preguntas. En primer lugar, se pedía al alumno que explicara cómo su compañero había resuelto el problema paso a paso y si consideraba que lo había resuelto correctamente. Esta primera pregunta respondía a la necesidad de observar qué nivel de detalle existe en la resolución del compañero y si ésta resulta comprensible y acertada. En segundo lugar, se pedía al alumnado si consideraba que su compañero había sufrido un bloqueo o atasco y cómo lo había detectado. Esta segunda pregunta, al igual que en la autoevaluación, responde a una necesidad de detectar cambios de estrategia y verbalización escrita de los procesos de autorregulación. Por último, se pedía al alumno que anotase puntos fuertes de la producción evaluada, así como aspectos a mejorar. Esta tercera pregunta responde a la necesidad de detectar destrezas y procesos que el compañero ha usado y que pueden ser útiles al resolutor o bien, pueden ser puntos de mejora cara a la resolución del siguiente problema. Esta tercera y última pregunta es en la que más hincapié se hace en la conversación final posterior a la realización y evaluación de cada problema junto con la identificación de nuevos ítems identificados durante la autoevaluación. Ambas preguntas nos sirven para modificar la base de orientación no lineal de un problema al siguiente.

Del mismo modo que sucedió en la autoevaluación, en la versión B de la coevaluación se añadió una pregunta referente al uso de los ítems de la base en la que se pedía al alumnado que marcara qué procesos metacognitivos y destrezas matemáticas de la BONL creía que había usado el compañero y que identificara si los habían usado una vez o más de una vez.

4.2.2 Implementación en el aula

Como hemos comentado al inicio del apartado, el alumnado resolvió un total de 4 problemas de lógica y patrones matemáticos con su correspondiente autoevaluación, coevaluación y conversación en gran grupo posterior a cada problema. Se llevaron a cabo un total de 4 sesiones de dos horas de duración dedicando, para cada sesión, una hora de explicación y resolución del problema y una hora más para responder a la autoevaluación, coevaluación y conversación final en gran grupo. Para llevar a cabo la coevaluación se establecieron parejas heterogéneas y aleatorias con la finalidad de que el alumnado pudiera observar, compartir y discutir distintas estrategias de resolución (Sanmartí, 2010). La conversación final desarrollada en cada una de las sesiones es la que permitía al alumnado modificar la base de orientación no lineal (BONL) a partir del proceso de resolución y evaluación llevado a cabo, haciendo especial énfasis en la última pregunta del cuestionario de autoevaluación y coevaluación. El papel del investigador presente en el aula, consistía en moderar las intervenciones del alumnado, recuperando las destrezas y procesos que señalaban y formular preguntas que permitieran al grupo decidir qué nuevos ítems añadían a la base de orientación no lineal. Así pues, atendiendo a los cuatro problemas planteados, la base sufrió tres modificaciones y nos referiremos a ellas como BONL 1, 2 y 3 (Figura 11).

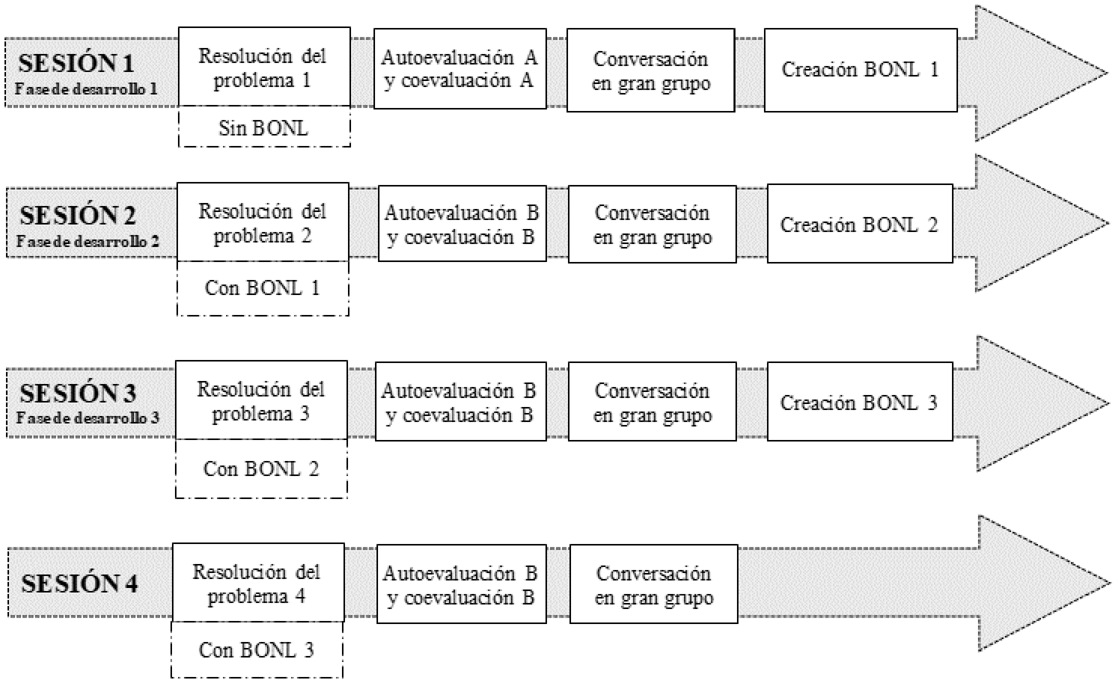


Figura 11. Esquematización de la metodología aplicada durante la implementación definitiva

4.3 Modificaciones entre intervenciones

La tabla 7 que mostramos a continuación, resume los aspectos esenciales de ambas intervenciones para permitir una comparación directa de los cambios que se han ido justificando durante los dos apartados anteriores.

Tabla 7. Comparación de las características esenciales entre ambas intervenciones

	Prueba piloto	**Implementación definitiva**
Tipo de intervención	No interviniente	Interviniente
Duración de la intervención	2 horas	8 horas
Centros	A, B, C	D, E
Experiencia del alumnado en resolución de problemas	Media	Nula
Muestra	75 alumnos	75 alumnos
Problemas seleccionados	Problema 1: Del 1 al 8 Problema 2: La tabla numérica	Problema 1: La cena Problema 2: Los palillos Problema 3: La tabla numérica Problema 4: Los pinos y los naranjos
Tipo de base usada	Base de orientación de la acción Fuente: Jorba y Sanmartí (1996)	Base de orientación no lineal (BONL) Fuente: Elaboración propia
Características de la base	Escrita, concreta, medianamente completa y creada por el alumnado	Escrita, concreta, medianamente completa y creada por el alumnado
Creación de la base	Anterior al problema 1	Posterior al problema 1
Autoevaluación	Ninguna	Versión A Versión B
Coevaluación	Ninguna	Versión A Versión B

<u>Sección III</u>

5. Publicaciones que conforman el compendio

5. Publicaciones que conforman el compendio

En la presente sección y apartado, presentamos las tres publicaciones que conforman el compendio de artículos de nuestra investigación. Las publicaciones se presentan organizadas atendiendo al orden establecido por los tres objetivos que estructuran la presente tesis doctoral:

1. Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (En prensa). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática.*
2. Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa) Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.*
3. Torregrosa, A. (2020). La base de orientación no lineal: estudio de tres grupos clase ante un ante un mismo ciclo de resolución de problemas de patrones. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, *104,* 7-23.

El formato original de las tres publicaciones, que atiende a una cuestión de diseño de cada una de las revistas, ha sido adaptado al formato y tipografía del presente documento con la finalidad de mantener una estética unánime hacia el lector.

La relación entre los artículos, los objetivos específicos, la metodología y el objetivo general de la presente investigación, se presenta en la figura 12 a modo esquemático.

OBJETIVO GENERAL

Crear, desarrollar y aplicar una base de orientación no lineal como instrumento de apoyo a la metacognición matemática en resolución de problemas de patrones

Prueba piloto

OBJETIVO 1: Identificar momentos en los que la base de orientación de la acción no se adapte al proceso de resolución de los problemas matemáticos, con la finalidad de desarrollar el instrumento base de orientación no lineal

ARTÍCULO 1

Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (En prensa). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática.*

Implementación definitiva

OBJETIVO 2: Analizar el papel de la autoevaluación y la coevaluación como métodos de feedback durante la construcción y uso de una base de orientación no lineal

ARTÍCULO 2

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa) Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.*

OBJETIVO 3: Caracterizar la naturaleza de una base de orientación no lineal elaborada por tres grupos de alumnos distintos ante un mismo ciclo de resolución de problemas

ARTÍCULO 3

Torregrosa, A. (2020). La base de orientación no lineal: estudio de tres grupos clase ante un ante un mismo ciclo de resolución de problemas de patrones. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, *104*, 7-23.

Figura 12. Relación entre los objetivos, la metodología y los artículos publicados

5.1 Publicación 1

La referencia de la publicación 1 transcrita en este apartado es la siguiente:

Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (En prensa). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática.*

El presente artículo pretende responder al primer objetivo de la presente tesis doctoral descrito en el apartado 2: *"Identificar momentos en los que la base de orientación de la acción no se adapte al proceso de resolución de los problemas matemáticos, con la finalidad de desarrollar el instrumento base de orientación no lineal".*

Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos

Characterization of metacognitive processes in number and pattern math problem solving

Alba Torregrosa[2]

Jordi Deulofeu[3]

Lluís Albarracín[4]

RESUMEN

En este trabajo exploramos el uso de una base de orientación (Jorba y Sanmartí, 1996) como herramienta para promover los procesos metacognitivos en resolución de problemas de patrones. Realizamos un análisis inductivo de las producciones del alumnado con el objetivo de caracterizar los procesos metacognitivos escritos derivados de la creación y aplicación de dicho instrumento. El estudio se realizó con 75 alumnos de sexto de primaria en tres centros del área metropolitana de Barcelona. El alumnado elaboró una Base de Orientación y la aplicó a dos problemas de numeración y patrones matemáticos. Nuestros resultados enfatizan que la Base de Orientación ayuda al alumnado a verbalizar y pautar los procesos metacognitivos durante la resolución de un problema, pero su linealidad actúa como hándicap dada la tipología de problemas trabajados. Así pues y a modo de conclusión, damos un nuevo formato al instrumento adaptándolo a la necesidad heurística no lineal de los problemas, creando un nuevo instrumento al que llamaremos Base de Orientación no Lineal.

PALABRAS CLAVE:

Base de Orientación, Metacognición, Resolución de problemas, Educación primaria, Patrones matemáticos.

---

2 Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, alba.torregrosa@uab.cat, orcid.org/0000-0001-7954-3507

3 Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, jordi.deulofeu@uab.cat, orcid.org/0000-0002-5834-0863

4 Universidad Autónoma de Barcelona, Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales, Facultad de Ciencias de la Educación, lluis.albarracin@uab.cat, orcid.org/0000-0002-1387-5573

ABSTRACT

In this paper we explore the use of an orientation base (Jorba y Sanmartí, 1996) as a tool to promote metacognitive processes in pattern problem solving. We carried out an inductive analysis of the students' productions with the aim of characterizing the written metacognitive processes derived from the creation and application of the instrument. This study has been carried out with 75 sixth grade students in three different centers into the metropolitan area of Barcelona. The students developed and applied an Orientation Base to solve two problems about numbering and mathematical patterns. Our results emphasize that the Orientation Base helps students to verbalize and guide the metacognitive processes during problem solving, but its linearity acts as a handicap given the nature of the problems. In conclusion, we redefine the instrument considering the non-linear heuristic need of problems. Therefore, we create a new instrument that we will call Non-Linear Orientation Base.

KEYWORDS:

Orientation basis, Metacognition, Problem solving, Elementary education, Mathematical patterns.

1. Introducción

Uno de los retos más importantes al que nos enfrentamos durante la educación científica y matemática es la resolución de problemas. Heyworth (1999), veinte años atrás, ya afirmaba que la enseñanza en las ramas de ciencia tiene generalmente como fin alcanzar dos objetivos: la adquisición de un cuerpo de conocimiento organizado en un dominio particular y la habilidad para resolver problemas en ese dominio. El NCTM (National Council Teacher of Mathematics) con “An Agenda for Action” en la década de los 80, la ATM (Association of Teachers of Mathematics) inglesa con el informe Cockcroft, los Estándares Curriculares del NCTM desde el año 1989 al 2000, son algunos de los ejemplos de la tradición y tendencia que la resolución de problemas matemáticos tiene como punto esencial en la educación obligatoria.

El debate sobre qué consideramos que es un problema en matemáticas y qué uso se le da a la resolución de problemas dentro del currículo educativo ha sido uno de los puntos clave que guio el presente estudio. En la literatura no existe un consenso sobre qué entendemos por resolución de problemas. Grugnetti y Jaquet (2005) sugieren que esta falta de consenso se debe a las diferentes visiones existentes sobre la naturaleza de la actividad matemática. En la presente investigación seguiremos la nomenclatura que proponen Kantowski (1977) y Mayer (1985). De aquí en adelante, consideraremos el término problema como sinónimo de problema no rutinario. Dichos problemas requieren de creatividad e imaginación para proceder a su resolución puesto que, ante una situación inicial, el resolutor no conoce *a priori* un camino directo para conseguir su objetivo. Además, permiten poner el énfasis en el proceso de resolución, dada su riqueza, y no sólo valorar el resultado final (Monje, Tyteca y Castro, 2012).

Dada la complejidad de la actividad de resolución de problemas, el dominio metacognitivo del resolutor es uno de los factores clave para su éxito. Diversos autores señalan que la metacognición es uno de los componentes básicos del aprendizaje autorregulado (Babbs y Moe, 1983; Novak y Gowin, 1988; Spring, 1985; Zimmerman, 1990; Zimmerman y Martínez-Pons, 1990) por eso, es por lo que es de especial interés dentro de la investigación que nos ocupa.

Existen diversos instrumentos de autorregulación matemática que contribuyen a estructurar los procesos metacognitivos del alumnado, uno de ellos es la base de orientación (Jorba y Sanmartí, 1996). Este instrumento fue diseñado inicialmente para guiar al alumnado durante el desarrollo y comprensión de procesos científicos y matemáticos de manera secuencial y lineal, es decir, paso a paso. La base de orientación conjuga conceptos y procedimientos algorítmicos concretos permitiendo al alumnado estructurar eficazmente su pensamiento. Las distintas bases de orientación desarrolladas y estudiadas por Jorba y Sanmartí (1996) nos muestran las potencialidades de autorregulación que presenta el instrumento a nivel matemático. Aunque la base de orientación no se diseñó inicialmente para ser usada durante la resolución de problemas, Villalonga y Deulofeu (2015) elaboraron y aplicaron una base de orientación con alumnos de último curso de educación primaria y primer curso de educación secundaria durante un ciclo de resolución de problemas. En sus conclusiones señalan que el instrumento puede ser aplicado durante procesos no algorítmicos, como es la resolución de un problema matemático, puesto que se obtienen múltiples beneficios didácticos. La principal diferencia respecto al planteamiento y diseño de Jorba y Sanmartí (1996) es que la base de orientación en resolución de problemas sintetiza y estructura distintas acciones y procedimientos que pueden ayudar al alumnado a resolver un problema. Por lo tanto, el propio alumno es quien elige cuáles de estas acciones y procedimientos le son útiles al resolver el problema que se le plantea. En cambio, las bases diseñadas para procesos algorítmicos de la ciencia y la matemática, sintetizan y conjugan teoría y práctica de tal modo que se deben seguir estrictamente para responder a la tarea planteada. Al finalizar su estudio, Villalonga y Deulofeu (2015) señalaron que aunque la potencialidad del instrumento es evidente, el formato listado paso a paso dificulta su uso por parte del alumnado. Este hecho se produce dado que cuando resolvemos un problema, podemos usar multitud de caminos para hallar la solución y los procesos metacognitivos que entran en juego se configuran de manera distinta en cada resolutor. En la mayoría de los casos el proceso de resolución de un problema matemático no es secuencial o lineal, aunque la solución presentada al final proceso sí lo sea.

Por lo tanto, la contribución principal de nuestro estudio es explorar el uso de una base de orientación como herramienta para promover los procesos metacognitivos en resolución de problemas de patrones. Para ello, caracterizamos los procesos metacognitivos del alumnado con la finalidad de observar cómo actúa la base de orientación en términos de metacognición y en qué momentos observamos que su linealidad presenta inconvenientes. Las características de estos momentos y su relación con los elementos metacognitivos son los que nos permitirán justificar la reconstrucción de la base de orientación.

2. Marco teórico

2.1 Resolución de problemas y metacognición

Tal y como apunta Castro (2008) la resolución de problemas matemáticos ha sido estudiada por una gran masa de expertos a lo largo y ancho de la historia. Lester, Garofalo y Kroll (1989) apreciaron cómo a medida que nos acercábamos a finales del siglo XX, los aspectos metacognitivos, sociales y afectivos empezaban a tomar una posición relevante en las investigaciones sobre resolución de problemas. A través de sus estudios, distinguieron cinco categorías interdependientes que intervienen en el resolutor de problemas: los conocimientos, el control, las creencias, los afectos y los factores contextuales. Posteriormente, Schoenfeld (1992) complementó y afinó las categorías antes descritas ya que consideraba que las creencias y afectos debían considerarse como una única categoría en el resolutor por su cercanía y alta conexión. Así pues, éste último autor redefinió los cinco aspectos que intervienen en el resolutor: conocimiento de base, estrategias de resolución, gestión y control, creencias y afectos, y prácticas. La gestión y el control, entendidas como autorregulación y monitoreo del resolutor, pertenecen a una categoría más amplia a la que llamamos metacognición. La metacognición se refiere a la capacidad de reflexionar, comprender y controlar el propio aprendizaje (Ullauri y Ullauri, 2018). Flavell (1979) acuñó este término por primera vez y lo definió como:

> El conocimiento sobre los propios procesos y productos cognitivos, así como el conocimiento sobre las propiedades de la información, datos relevantes para el aprendizaje o cualquier cosa relacionada con los procesos y productos cognitivos (citado en Campanario y Otero, 2000, p. 232).

Dentro del concepto de metacognición, Flavell (1979) diferenció dos categorías: el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición. Cuando hablamos de conocimiento sobre la cognición nos referimos al conocimiento que tiene una persona de sus capacidades cognitivas. En cambio, el estudio que nos ocupa se centra en la regulación de la cognición definida por Callahan (1987) y Clarke (1989) como aquellas decisiones que uno toma para:

- **Regular:** Tomar conciencia de las decisiones necesarias para planificar y usar los procesos de resolución
- **Tomar consciencia:** Monitorear dichas acciones atendiendo a su efectividad en términos de estrategias
- **Evaluar:** Valorar la situación y evaluar la solución

Teniendo en cuenta que los procesos metacognitivos se dan de manera mental y subjetiva, el análisis de la metacognición se presenta como una tarea compleja que presenta limitaciones en distintas investigaciones (Ericsson y Simon, 1980). Encontramos en la literatura varios estudios que analizan los procesos metacognitivos de manera cuantitativa (Artzt y Armour-Thomas, 1992; Schraw y Sperling-Dennison, 1994; Sperling et al., 2002). Gran parte de estos estudios usan cuestionarios como el MAI (Metacognitive Awareness Inventory) para identificar las habilidades metacognitivas del alumnado. Aunque dichos estudios permiten muestreos amplios, no atienden a procesos metacognitivos concretos de los estudiantes ni a contextos didácticos específicos. En cuanto a los estudios cualitativos, los protocolos en voz alta son los más usados por los investigadores (Wilson y Clarke, 2004). En estos casos se pide al alumno que verbalice el proceso de resolución de un modo concurrente o retrospectivo, es decir, mientras realiza el problema o una vez lo ha finalizado. Aunque este método permite un análisis exhaustivo de los procesos metacognitivos, puede propiciar que el alumnado de baja edad se bloquee durante la explicación o incluso invente pasos durante su explicación retrospectiva (Ericsson y Simon, 1980). Dadas las limitaciones aportadas y atendiendo a la etapa en la que nos encontramos, cursos superiores de educación primaria, las producciones escritas del alumnado pueden ser una herramienta eficaz para analizar y caracterizar los procesos metacognitivos (Martínez, Sánchez y Pizarro, 2020).

Dentro del campo de la didáctica matemática, existen distintos instrumentos de autorregulación metacognitiva. En primer lugar, encontramos los diarios de clase en los que el alumnado anota individualmente aspectos referentes al proceso de enseñanza y aprendizaje realizado (Rodríguez y Jorba, 2014). Los diarios de clase son muy útiles para explicitar y reflexionar sobre las tareas matemáticas, pero al ser elaborados individualmente, no permiten que el alumnado comparta con fluidez los procesos metacognitivos llevados a cabo. En segundo lugar, encontramos los mapas conceptuales que permiten estructurar conceptos y procedimientos complejos estableciendo una estructura jerárquica en una cierta área de conocimiento (Morales, 1998). En cuanto a la resolución de problemas, los mapas conceptuales pueden ser útiles en términos de relación entre conceptos y procedimientos matemáticos, pero no contemplan explícitamente la inclusión de procesos metacognitivos. En tercer lugar, encontramos la V de Gowin (Escudero y Moreira, 1999) dividida en 3 dominios: el dominio conceptual, el dominio metodológico y el objetivo o acontecimiento. En este caso, el instrumento sí que contempla procesos metacognitivos en el dominio metodológico, pero no contiene una estructura interna que atienda a las fases de resolución de un problema (Pólya, 1945). Por último, encontramos las bases de orientación (Jorba y Sanmartí, 1996) que contemplan tanto la inclusión de procesos metacognitivos como de destrezas matemáticas (Puig, 1996) y que, además, pueden ser estructuradas atendiendo a las fases de resolución de un problema. Dada la investigación que nos ocupa y las características expuestas, la base de orientación es el instrumento propicio para fomentar la explicitación de los procesos metacognitivos del alumnado.

2.2 La base de orientación

Aplicación en constructos teóricos y prácticos lineales

Jorba y Sanmartí (1996), crearon, desarrollaron y analizaron la base de orientación como instrumento estructurador y orientador de los modelos teóricos de la ciencia aplicados a la práctica cercana del alumnado. García y Sanmartí (1998) observaron que, aunque los alumnos sepan definir diferentes conceptos como "hongo, heterótrofo, saprófito y ser vivo, ello no presupone que al mostrarles un trozo de pan enmohecido puedan explicar este fenómeno" (p. 9). La base de orientación es un instrumento pensado específicamente en el área de ciencias naturales y matemáticas:

> Un instrumento ideado para promover que el alumnado desarrolle su capacidad de anticipar y planificar las operaciones necesarias para realizar una acción. A través de ella se pretende que explicite los procesos que se deben realizar o que se han realizado al ejecutar una tarea, o las características que permiten definir un modelo o un concepto. […] La base de orientación ayuda a desarrollar la habilidad de seleccionar las características relevantes y a anticipar un plan de acción (García y Sanmartí, 1998, p. 10-11).

Puesto que no existe en la literatura una definición que nos permita diferenciar la base de orientación de otro instrumento de autorregulación la definiremos, para el propósito de esta investigación, como un instrumento secuencial paso a paso en el cual se sintetizan de manera subjetiva o personal las acciones a realizar durante un procedimiento científico o para explicar un constructo teórico. A medida que se producen nuevos aprendizajes, la base de orientación se amplía o reestructura adaptándose al proceso de autorregulación de quien la elabora. En el presente estudio el uso de la base de orientación se concibe como un fin en sí mismo, es decir, como un medio para potenciar la explicitación y verbalización de los procesos metacognitivos en resolución de problemas, quedando el aprendizaje de conceptos y métodos concretos en un segundo plano. Por lo tanto, el interés principal del instrumento es la autorregulación del alumnado durante la resolución de un problema y no tanto el aprendizaje de un contenido o proceso matemático concreto tal y como plantean en su diseño Jorba y Sanmartí (1996).

Podríamos asimilar la base de orientación a una rúbrica holística en la cual la descripción del máximo nivel de desempeño de cada criterio de evaluación se correspondería con cada una de las acciones que aparecen en la base de orientación. Cano (2015) define una rúbrica holística como una matriz de valoración que incorpora en un eje los criterios de evaluación y en otro eje una escala de valor donde se tipifica qué ejecución debería hacer el resolutor para considerarse dentro del nivel correspondiente a cada criterio. Según Alsina (2018) las rúbricas enuncian "criterios de logro y descriptivos […] permiten ser cambiadas y ajustadas durante la práctica para así encontrar el valor justo que se pretende que los alumnos alcancen" (p. 13). Este último apunte es aplicable del mismo modo a la definición de base de orientación.

Las premisas que nos define Sanmartí (2010) ante la gestión de la base de orientación, son diversas. En primer lugar, hace especial énfasis en el proceso de elaboración de la base. Aunque por motivos temporales, por falta de conocimiento del instrumento o por tratarse de constructos conceptuales, la base de orientación puede ser elaborada por el profesor, lo más idóneo es que sea construida por el alumnado (García y Sanmartí, 1998). Atendiendo al objetivo del estudio que nos ocupa, si pretendemos que la base de orientación propicie la aparición y explicitación de procesos metacognitivos propios, tiene sentido que sea el propio alumnado quien la elabore y modifique. En este caso, el proceso de creación será orientado y dirigido por el docente a través de preguntas clave (tabla 1) sin olvidar que deben ser los mismos alumnos quienes le den forma y sentido.

Tabla 1. *Preguntas clave para la creación de la base de orientación (izquierda) y caracterización / finalidad de dichas preguntas (derecha)*

Elementos estructurales de la acción	
¿A qué categoría pertenece la situación planteada?	Identificación del problema
¿Por qué se debe realizar esta tarea?	Motivo de la tarea
¿Qué se quiere conseguir con la realización de la acción que interviene como solución de la tarea?	Objetivo de la acción
¿Qué operaciones es necesario realizar para ejecutar la acción y por qué?	Operaciones de la acción
¿Qué conocimientos son necesarios para efectuar de manera consciente estas operaciones?	Contenidos de la base
¿En qué condiciones tenemos que realizar la tarea planteada?	Condiciones de realización
Anticipación de la acción	
¿Qué estrategia o estrategias se pueden adoptar para resolver la situación planteada?	Estrategias y orden de ejecución
¿Cuál es el resultado esperado de las operaciones proyectadas?	Posibles resoluciones

Planificación de la acción	
¿Cuál de las estrategias parece la más adecuada?	Elección de la estrategia
¿Cuál es el plan de ejecución que seguiremos?	Plan de trabajo

En segundo lugar, al tratarse de una construcción totalmente personal de la tarea a trabajar, puede haber tantas bases de orientación como alumnos se encuentren en el aula. Cada alumno da su propio formato a la estructuración y resolución de una misma tarea. En este punto, entra en juego la tercera premisa. Las bases de orientación deben ser evaluadas y reguladas a partir de autoevaluación o coevaluación. Aunque sea un instrumento basado en la propia percepción del problema o en la aplicación de un constructo teórico en el caso de procesos algorítmicos, debe tener criterio científico. Las bases y los ítems que en ella se encuentran no son aleatorios; hay unas premisas u otras a seguir dependiendo de la aplicación final de dicha base.

Aunque la base de orientación ayuda al alumno a planificar el proceso de resolución y lo dota de acciones y procedimientos que le son de ayuda al enfrentarse a una tarea, es el hecho de introducir instrumentos autorregulativos como la autoevaluación y coevaluación lo que promueve que el alumno desarrolle procesos metacognitivos complejos. Por lo tanto, la finalidad de la evaluación no es realizar preguntas directas y estancas sobre el proceso de resolución sino realizar preguntas que permitan al alumno reflexionar sobre su propio pensamiento y sobre su propia práctica. Este hecho es el que permitirá emerger procesos metacognitivos complejos que se incorporarán en la base de orientación a medida que el alumnado la usa.

Por último, debemos tener en cuenta que la base de orientación no se crea y permanece inmutable, sino que se transforma a partir del aprendizaje paulatino del alumnado.

> Contribuyen a la elaboración progresiva de las bases de orientación todas aquellas situaciones didácticas que promuevan la reflexión de los estudiantes sobre aquello que están aprendiendo, cómo lo están aprendiendo y qué dificultades encuentran, así como aquellas situaciones que propicien el contraste de puntos de vista y opiniones (García y Sanmartí, 1998, p. 14).

Jorba y Sanmartí (1996) nos plantean y ejemplifican diferentes bases de orientación creadas con el alumnado, por ejemplo: Cómo se calcula la densidad, cómo se caracteriza una especie animal, qué pasaría si desapareciera una especie de una red trófica, cómo se mide de manera indirecta, cómo se construye y lee un gráfico, y cómo se representa a escala.

Aplicación durante la resolución de problemas

Una vez examinada la funcionalidad de la base de orientación para la construcción, apropiación y aplicación de constructos teóricos en ciencias y matemáticas, Villalonga y Deulofeu (2017), la aplicaron al ámbito matemático durante la resolución de problemas. Teniendo en cuenta las limitaciones temporales de su estudio, la base de orientación propuesta por los autores estaba previamente elaborada (tabla 2) y a partir de su uso, los alumnos podían añadir, quitar o modificar aquellas concreciones que considerasen oportunas. Dicha base, se basa en las fases de resolución de un problema aportadas por De Corte, Verschaffel y Greer (2000), De Corte y Verschaffel (2003) y las propuestas de Mason, Burton y Stacey (1982).

Tabla 2. *Base de orientación creada por Villalonga y Deulofeu (2017, p.266) aplicada a la resolución de problemas matemáticos*

Resolución de problemas	
Dominios (D)	Dimensiones (d)
Comprendo el problema	^{d1}Distingo las preguntas que he de responder y entiendo todo aquello que se me pide que haga ^{d2}Distingo los datos y me aseguro que los entiendo ^{d3}Expreso el problema para entenderlo mejor haciendo un dibujo, esquema, diagrama… (lo que me parezca más adecuado) y hago pruebas si me es necesario
Para cada pregunta formulada	
Tengo un plan de acción	^{d4}Pienso alguna estrategia de resolución a partir de la representación y las pruebas o ejemplos que he hecho, y trato de aplicarlo ^{d5}Encuentro los datos y los razonamientos y/o algoritmos que necesito para aplicar la estrategia ^{d6}Aplico la estrategia y escribo de manera que se entienda todo aquello que he pensado ^{d7}Si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia (con todo lo que necesite)
Reviso mi tarea	^{d8}Una vez resuelto: -Investigo si hay otras soluciones y las encuentro. Si sólo hay una, razono por qué no hay más -Razono si se podría hacer de otras maneras ^{d9}Releo lo que he hecho, y me aseguro que lo explico todo, que respondo de manera razonada y que se entiende. Relaciono si hace falta, con el resto de preguntas y tareas solicitadas

Una de las conclusiones a las que llegaron los autores, fue la dificultad del alumnado de comprender que la linealidad de la base de orientación actúa meramente como guion y no como una pauta que se sigue de manera estricta: "se confirma así que la resolución un problema es una dinámica compleja, en ningún caso lineal, que requiere de tiempo, reflexión y dedicación" (Villalonga y Deulofeu, 2017, p. 279). Se justificó su formato listado de la siguiente manera:

> La linealidad establecida, cuyo orden se sustenta por las fuentes usadas y que describen los pasos de un resolutor experto, se convino para posibilitar un orden de aplicación, evitar dispersiones, y al mismo tiempo establecer de manera clara y precisa la relación entre dominios, dimensiones, y ambos (Villalonga y Deulofeu, 2017, p. 265).

Como hemos podido observar en la ejemplificación anterior referente a la base de orientación en resolución de problemas, este instrumento une por un lado, el ciclo de resolución de un problema y por otro, la regulación de la cognición atendiendo a ítems de consciencia y monitoreo como "si no lo consigo, detecto dónde me bloqueo o me equivoco y aplico una nueva estrategia" (tabla 2).

En el presente estudio se replanteará la creación y uso de la base de orientación como una unión de los dos planteamientos presentados a nivel estructural por Villalonga y Deulofeu (2017) y a nivel metacognitivo por Clarke (1989).

3. Objetivo y diseño del estudio

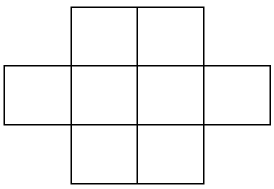
A la luz de las consideraciones teóricas expuestas y los antecedentes presentados, la finalidad del presente estudio es determinar cómo actúa la base de orientación como instrumento de verbalización escrita de los procesos metacognitivos durante la resolución de problemas. Así pues, nuestro objetivo es *caracterizar los procesos metacognitivos escritos derivados de la creación y aplicación de una base de orientación.* Identificar estos procesos nos debería permitir reelaborar el concepto de base de orientación para adaptarlo a la naturaleza de la resolución de problemas.

Los datos del estudio se recogieron en tres centros del área metropolitana de Barcelona. Participaron un total de 75 alumnos de sexto grado de educación primaria con edades comprendidas entre los 11 y 12 años. Cabe mencionar que en los tres centros se trabaja con problemas una hora a la semana en formato taller. Los alumnos se agrupan de manera individual o por parejas para proceder a la resolución de los problemas. Habitualmente, los docentes de aula presentan los problemas al alumnado, se procede a resolverlos y finalmente se realiza una puesta en común. Ninguno de los centros conocía ni trabajaba con la base de orientación.

En primer lugar, se seleccionaron dos problemas (figura 1) que originaban esencialmente la numeración y los patrones matemáticos. La selección de dichos problemas se realizó atendiendo a la flexibilidad que caracteriza los problemas de patrones, entendida como la variabilidad de estrategias de distinta complejidad que se pueden aplicar (Callejo y Zapatera, 2014). Puesto que se trató de un estudio no interviniente, se realizaron tres reuniones con los respectivos docentes con la finalidad de presentar la estructura y utilidad de la base de orientación, así como los dos problemas a trabajar.

PROBLEMA 1

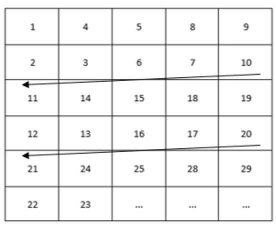
Coloca los números del 1 al 8 en la tabla que ves abajo de tal manera que no se toquen dos consecutivos, ni por un lado ni por un vértice. ¿Cómo lo has hecho?



Explícalo paso a paso.

PROBLEMA 2

Juliana ha escrito en una tabla numérica los números naturales 1, 2, 3, 4, 5... Poniéndolos de tal manera como se ve en el dibujo:



Ha ido colocando los números hasta el 100 y se ha preguntado: ¿Cuánto suman los números de todas las casillas que tienen un lado en común con el 100? ¿Cómo lo has sabido? Explícalo paso a paso

Figura 1. Adaptación de dos problemas de lógica y patrones matemáticos obtenidos de FEEMCAT, SCM, Generalitat de Catalunya (2000-2018). Problemes a l'esprint. Recuperado de http://www.cangur.org/esprint/ [enero 2020]

En la primera sesión, los docentes plantearon al alumnado las preguntas clave para proceder a la elaboración de la base de orientación que hemos concretado en la tabla 1. Las ideas del alumnado fueron anotadas en la pizarra y a partir de una conversación en gran grupo, se conformó un formato lineal de base de orientación con dos columnas: en la columna de la izquierda se anotaron los procesos metacognitivos y destrezas matemáticas para resolver estos problemas (ítems que conforman la base) y a la derecha de cada uno se incluyó una columna en la que el alumnado anotaría con una cruz qué ítems usaban o no usaban al aplicar la base. Una vez elaborada la base de orientación, el alumnado resolvió el primer problema individualmente. Se realizó una puesta en común sobre las posibles estrategias y soluciones encontradas.

En una segunda sesión, se pidió al alumnado si deseaba modificar la base de orientación atendiendo a las observaciones que habían realizado durante la resolución del primer problema y a los procesos y destrezas usadas y no usadas. Posteriormente, se procedió a resolver el segundo de los problemas con la base de orientación modificada y se pusieron en común las distintas resoluciones y estrategias.

4. Métodos de análisis

Los datos obtenidos se conforman a partir de la base de orientación creada, su modificación previa al segundo problema y las producciones escritas del alumnado.

El primer análisis de las producciones, por parte de los tres autores del estudio, se realizó elaborando una rúbrica holística de cuatro niveles (novel, intermedio, avanzado y experto) para cada ítem de la base de orientación creada. La diferenciación en cuatro niveles atiende a la carencia de posicionamiento central en caso de duda (Raposo y Martínez, 2011). La concreción de cada nivel elaborado corresponde a dos necesidades de análisis: observar el uso de un determinado ítem y la verbalización escrita y explícita del mismo. Así pues, el nivel novel hace referencia a un ítem no usado, el nivel intermedio se refiere a un ítem usado pero no verbalizado por escrito, el nivel intermedio a un ítem usado y verbalizado parcialmente y el nivel experto a un ítem usado y verbalizado exhaustivamente. La finalidad de dicha rúbrica no era obtener una visión global del nivel de desempeño de cada alumno, sino obtener una visión concreta sobre cada ítem con la finalidad de realizar la segunda fase de análisis. Por lo tanto, se procedió a evaluar individualmente las producciones de los dos problemas planteados, atendiendo al uso y verbalización escrita de cada ítem. Al realizar este primer análisis, observamos que en el segundo problema el alumnado mostraba un mayor conocimiento del uso de la base de orientación puesto que era la segunda vez que la usaban. Se decidió considerar para la segunda fase de análisis aquellas producciones referentes al segundo problema que mostraban niveles avanzados y/o expertos para cada uno de los ítems de la base.

En la segunda fase de análisis se procedió a caracterizar los procesos metacognitivos de las producciones seleccionadas en la primera fase. Realizamos un análisis inductivo de las producciones del alumnado tal y como realizan Kuzle (2013) y Magiera y Zawojewski (2011). En primer lugar, elaboramos una categorización externa identificando los procesos metacognitivos que aparecen en las producciones atendiendo a la definición de consciencia, evaluación y regulación de Clarke (1989). Una vez identificados estos procesos, se realizó una categorización interna de las producciones del alumnado basada en el contexto del problema que habían resuelto. Por lo tanto, se seleccionaron todos los procesos referentes a evaluación, consciencia y regulación respectivamente, y se establecieron similitudes y diferencias entre ellos. Este análisis nos permitió establecer nueve categorías derivadas de los distintos procesos metacognitivos. La tabla 3 muestra las nueve categorías elaboradas, así como la concreción observable en las producciones, es decir, qué acciones lleva a cabo el alumnado durante la resolución que nos refieren a cada una de las categorías. Cabe mencionar que la numeración ascendente de la tabla 3 no corresponde a un criterio de importancia u orden.

Tabla 3. *Concreción de los procesos metacognitivos, categorías y concreción observable en la producción (elaboración propia)*

Proceso metacognitivo	Categoría	Concreción
Consciencia	1. Explicitación del proceso de solución	Es consciente de los pasos que realiza de manera lineal
	2. Consciencia del patrón	Es consciente de que hay un patrón tras el dibujo y lo verbaliza
	3. Selección de la estrategia	Es consciente de que hay estrategias más rápidas y eficaces que otras
Evaluación	4. Revisión de la solución	Comprueba su resultado final en coherencia con el enunciado
	5. Revisión del proceso	Comprueba las operaciones aritméticas y el patrón del dibujo realizado
	6. Revisión doble	Busca otras razones o argumentos para comprobar su resultado final
Regulación	7. Planificación y ejecución	Planifica, reconoce la estrategia a usar y la verbaliza
	8. Relectura y verificación	Relee el enunciado en varios momentos para comprobar su proceso
	9. Adaptabilidad y regulación	Sufre un atasco o bloqueo, lo evalúa y lo supera adaptando su estrategia

5. Resultados: Verbalización de procesos metacognitivos[5]

Siguiendo el objetivo de nuestro estudio, mostraremos la caracterización de los procesos metacognitivos llevados a cabo por el alumnado.

En la primera categoría establecida: *explicitación del proceso de solución*, observamos producciones en las que se expresa una resolución paso a paso tal y como se presentan en la base de orientación. En primer lugar, notamos que se redactan los pasos realizados expresándolos en forma de párrafo escrito (tabla 4 – figura 2). En segundo lugar, encontramos producciones en las que incluso se numeran los pasos en formato listado obteniendo así una resolución del problema pautada como si de una receta se tratara (tabla 4 – figura 3). Observamos en ambos casos que el alumnado es consciente *grosso modo* de los pasos realizados desde la lectura del problema hasta su solución final o revisión.

[5] Con la finalidad de presentar los resultados de manera clara, se ha realizado una transcripción literal del catalán al castellano de cada uno de los fragmentos de las producciones estudiadas.

Además, ambos alumnos verbalizan procesos metacognitivos complejos (Montague, 2008) que van más allá de la mera descripción del proceso como puede ser “he buscado la lógica” (figura 2) o “he llenado la casilla como la de arriba pero con otros datos” (figura 3).

Tabla 4. *Explicitación del proceso de solución: transcripción al castellano (izquierda), producción original (derecha)*

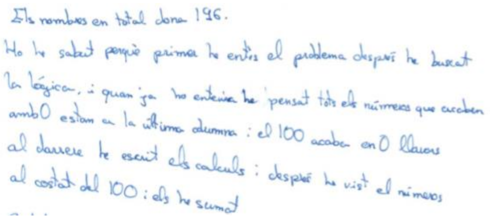
<table>
<tr><th>Transcripción literal al castellano</th><th>Fragmento original en catalán</th></tr>
<tr><td>Los números en total dan 196.
Lo he sabido porque primero he entendido el problema y luego he buscado la lógica, y cuando ya lo tenía he pensado todos los números que acaban en 0 están en la última columna y el 100 acaba en 0 entonces detrás he escrito los cálculos y después he visto los números al lado del 100 y los he sumado.</td><td>

Figura 2. Producción original (PPEP6_A27) explicitación en formato párrafo</td></tr>
<tr><td>1ro: He leído muchas veces el problema

2do: He marcado cosas en el enunciado

3ro: He dibujado la continuación de la casilla

4to: He llenado la casilla como la de arriba pero con otros datos

5to: He leído otra vez el enunciado

6to: Cuando he visto que tenía que hacer una operación (100+99+98+97 = 394)

7mo: He escrito la respuesta

8vo: Lo estoy explicando

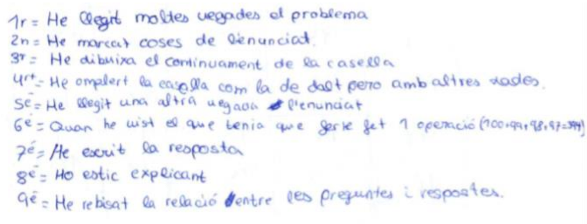
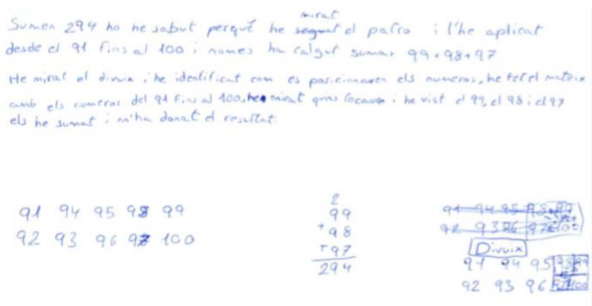
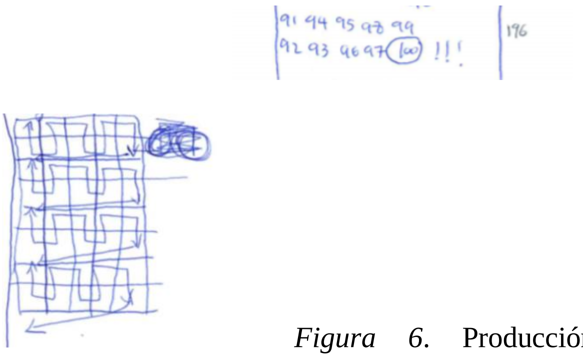
9no: He revisado la relación entre las preguntas y respuestas</td><td>

Figura 3. Producción original (PPSFP6_A4) explicitación en formato listado</td></tr>
</table>

En la segunda categoría establecida: *consciencia del patrón*, observamos producciones en las que se expresa por escrito el patrón oculto tras la tabla con expresiones y recursos distintos. En primer lugar, observamos el uso del dibujo como destreza matemática para verbalizar la consciencia del patrón. En este caso, el alumno añade como finalizaría el patrón de la tabla sin llegar a completarla por completo (tabla 5 – figura 4). En segundo lugar, observamos una estrategia sumamente distinta; en vez de realizar toda la tabla por completo, se reconoce el patrón al inicio y sólo se completa la tabla a partir del número 91 (tabla 5 – figura 5). Por último, observamos otra producción en la que el alumno nos explicita de manera gráfica qué patrón sigue la tabla, encontrando así, las dos últimas hileras que le sirven para resolver el problema (tabla 5 – figura 6). En los tres casos expuestos, observamos que el alumno es consciente de que hay un patrón tras el dibujo y que la finalización completa de la tabla no es una condición estricta para resolver el problema. Este hecho nos remite a la tercera categoría metacognitiva establecida, en la cual el alumno *selecciona una estrategia* siendo consciente en los tres casos de que es más rápida y eficaz que otras; por ejemplo, el ensayo-error durante la probatura de números o la finalización completa de la figura (Maclellan, 2014).

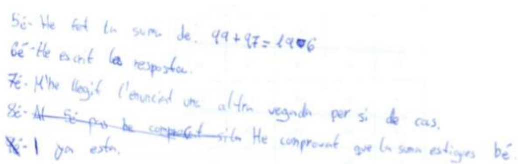
Tabla 5. *Consciencia del patrón y selección de la estrategia: transcripción/interpretación de la producción al castellano (izquierda), producción original (derecha)*

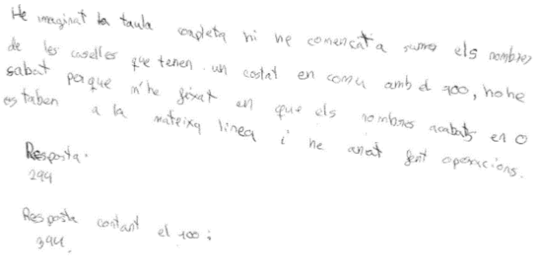
Transcripción literal al castellano / Interpretación	Fragmento original en catalán
Interpretación: El alumno es consciente del patrón que sigue la tabla y añade al dibujo inicial las décimas de la serie compuesta por el número 90 añadiendo el número 100 dónde se encontraba inicialmente el número 10 para así completar las condiciones del enunciado	 *Figura 4*. Producción original (PPEP6_A19) consciencia del patrón y selección de estrategia
Suman 294 lo he sabido porque he mirado el patrón y lo he aplicado desde el 91 hasta el 100 y sólo ha hecho falta sumar 99+98+97. He mirado el dibujo y he identificado cómo se posicionaban los números, he hecho lo mismo con los números del 91 hasta el 100. He mirado cuales tocaban y he visto el 99, 98, 97 los he sumado y me ha dado el resultado.	 *Figura 5*. Producción original (PPSFP6_A17) consciencia del patrón y selección de estrategia

Interpretación: El alumno nos muestra el patrón que sigue la tabla a partir de las flechas y encuentra la lógica que sigue la numeración poniendo por escrito la serie del 91 al 100	 *Figura 6.* Producción original (PPSFP6_A29) consciencia del patrón y selección de estrategia

En cuanto a la cuarta y quinta categorías establecidas: *revisión de la solución y revisión del proceso,* encontramos que en gran parte de las producciones analizadas los alumnos verbalizan explícitamente que han revisado la solución final obtenida rehaciendo la suma final o bien, a través del cálculo mental. Este proceso de revisión se realiza de dos modos distintos. Por un lado, encontramos alumnos que vuelven a leer el enunciado para confirmar su procedimiento y respuesta (tabla 6 – figura 7) y por otro lado, encontramos alumnos que al releer el enunciado y ante la duda de sumar (o no) el número 100, ofrecen dos soluciones posibles (tabla 6 – figura 8). Dicho proceso metacognitivo explícito muestra que éste último el alumno, ante la imposibilidad de comprender completamente el enunciado, opta por ofrecer dos soluciones viables dependiendo de la comprensión y enfoque que le da a la pregunta del problema (Van der Stel, Veenman, Deelen y Haenen, 2010).

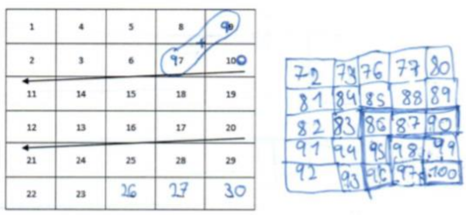
Tabla 6. *Revisión de la solución y revisión del proceso: transcripción de la producción al castellano (izquierda), producción original (derecha)*

Transcripción literal al castellano	Fragmento original en catalán
5to. He hecho la suma de 99+97=196 6to. He escrito la respuesta 7mo. Me he leído el enunciado otra vez por si acaso 8vo. He comprobado que la suma estuviera bien 9no. Y ya está	 *Figura 7.* Producción original (PPSFP6_A18) revisión de la solución

He imaginado la tabla completa y he comenzado a sumar los números de las casillas que tienen un lado en común con el 100, lo he sabido porque me he fijado que los números acabados en 0 estaban en la misma línea y he ido haciendo operaciones. Respuesta: 294 Respuesta contando el 100: 394	 *Figura 8*. Producción original (PPPDP6_A12) revisión de la solución y del proceso

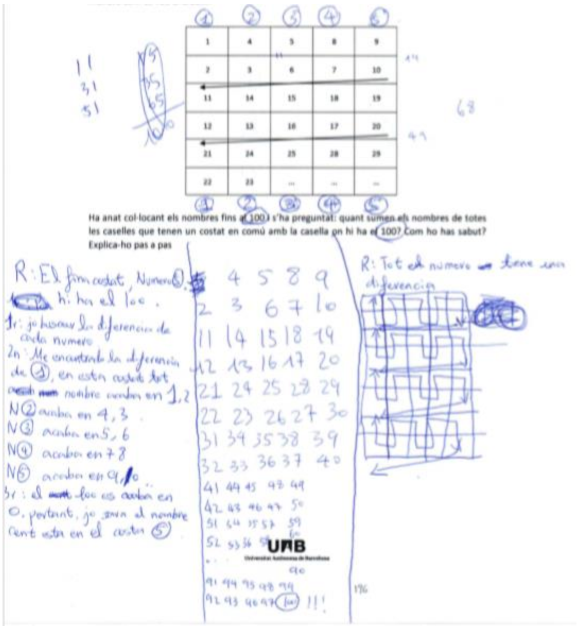
En cuanto a la sexta categoría: *revisión doble*, observamos producciones en las cuales el alumnado coteja la solución obtenida con una nueva comprobación a través de otro método o estrategia (tabla 7 – figura 9). Este hecho posibilita la seguridad por parte del alumno de que la solución obtenida es correcta y además, verbaliza su comprobación. Tal y como apunta Sanmartí (2010) se trata de una autoevaluación del proceso que se realiza en el momento de finalizar la tarea para corroborar la veracidad y satisfacción del procedimiento realizado, así como de su resultado.

Tabla 7. *Revisión doble: transcripción de la producción al castellano (izquierda), producción original (derecha)*

Interpretación en castellano	Fragmento original
Interpretación: El alumno toma consciencia del patrón al inicio y en vez de completar la tabla del 1 al 100, decide dibujar sólo del número 72 al 100 hallando así la solución al problema. Posteriormente, escribe el número 9 delante de los números 7 y 9 del dibujo, respectivamente, confirmando así que el dibujo realizado por ella misma casa con la figura inicial propuesta	 *Figura 9*. Producción original (PPEP6_A21) consciencia del patrón

En cuanto a la séptima categoría: *planificación y ejecución*, observamos producciones en las cuales el alumnado planifica meticulosamente la estrategia a usar observando detenidamente la tabla y analizando por columnas la similitud entre el orden de los números antes de proceder a la ejecución del plan (tabla 8 – figura 10). Observamos en este caso que el alumno numera las columnas y establece una leyenda para encontrar qué patrón sigue la tabla inicial. Una vez encontrado el patrón, completa la tabla para verificar que su hipótesis inicial era cierta y así poder finalizar la resolución del problema. Atendiendo a Pólya (1945) la planificación del plan de acción es una tarea tan o más importante que la ejecución del propio plan. Schoenfeld (1992) destaca esta habilidad como una propia del resolutor experto, en el cual, el tiempo de planificación de la estrategia a seguir así como la relectura de las condiciones originales, ocupa una posición central en la resolución de un problema.

Tabla 8. *Planificación y ejecución: transcripción de la producción al castellano (izquierda), producción original (derecha)*

Transcripción literal al castellano	Fragmento original en catalán
R: La fila número 5, hay el 100. 1ro: Yo buscar [he buscado] la diferencia de cada número 2do: He encontrado la diferencia en la 1 [refiriéndose a la columna 1] en ésta, todos los números acaban en 1, 2 N2 [refiriéndose a la columna 2] acaba en 4, 3 N3 [refiriéndose a la columna 3] acaba en 5, 6 N4 [refiriéndose a la columna 4] acaba en 7, 8 N5 [refiriéndose a la columna 5] acaba en 9, 0… 3ro: el 100 acaba en 0, por lo tanto, ya sabemos que el número 100 está en el lado 5 [refiriéndose a la columna 5]”	 *Figura 10*. Producción original (PPSFP6_A29) consciencia del patrón

En cuanto a la octava categoría: *relectura y verificación*, hemos observado tal y como muestra la tabla 4, que en ciertos momentos el alumnado dentro de la linealidad de sus explicaciones verbaliza explícitamente releer el enunciado para corroborar que su proceso y su estrategia siguen cumpliendo con los requisitos, datos y pregunta del problema. En conjunción con esta categoría, encontramos una alumna que, al releer y verificar el enunciado, se da cuenta de que ha cometido un error y pone en marcha la novena categoría caracterizada como *adaptabilidad y regulación* para poder superar el atasco que se produce (Villalonga y Deulofeu, 2017) y cumplir con las condiciones que explicita el enunciado (tabla 9 – figura 11).

Tabla 9. *Relectura, verificación, adaptabilidad y regulación: transcripción de la producción al castellano (izquierda), producción original (derecha)*

<table>
<tr><th>Transcripción literal al castellano</th><th>Fragmento original en catalán</th></tr>
<tr><td>

Primero he leído bastantes veces el problema para intentar entenderlo.

Después he buscado los datos que ponía en el enunciado y he dibujado más tablas para poder llegar al número 100, cuando he llegado, he marcado los números que tenían un lado en común con el 100.

Después he vuelto a leer el problema para saber qué me preguntaban y lo he arreglado [observamos que, al releer, tacha en la parte superior y corrige su error obteniendo una nueva selección de números].

Lo he sumado porque es lo que nos dicen que hagamos y he marcado la respuesta.

Después lo he revisado para asegurarme de que estaba bien.

</td><td>

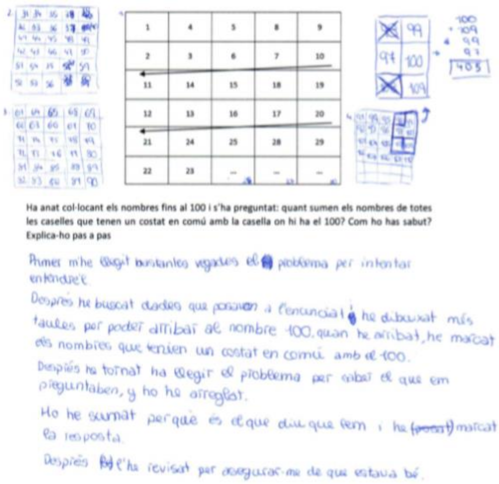


Figura 11. Producción original (PPSFP6_A9) relectura, verificación, adaptabilidad y regulación

</td></tr>
</table>

6. Discusión

Al inicio del estudio, nos planteamos como objetivo *caracterizar los procesos metacognitivos escritos derivados de la creación y aplicación de una base de orientación.* En la sección anterior, caracterizamos los procesos observados referentes a la consciencia, evaluación y regulación (Clarke, 1989) concretados en la tabla 3. En este apartado nos parece relevante discutir la importancia de su uso y verbalización.

En primer lugar, hemos observado tal y como apuntan Villalonga y Deulofeu (2017) que la explicitación detallada de la resolución en estas edades produce una mayor consciencia del proceso realizado y por ende, promueve que el alumnado se autorregule de manera más efectiva. Este hecho posibilita que el resolutor pueda evitar un posible atasco o bloqueo a partir de la relectura y reflexión de su propio proceso. Así pues, observamos una estrecha relación entre las categorías *explicitación del proceso de solución* (1) y *adaptabilidad y regulación* (9).

En segundo lugar, coincidimos con Lester (1994) al observar que la metacognición efectiva durante la resolución de problemas requiere saber no solo qué y cuándo monitorear, sino también cómo monitorear. Las categorías referentes a *planificación y ejecución* (7) así como *relectura y verificación* (8) nos muestran la importancia de explicitar por escrito la planificación del problema para poder verificar en varios momentos que dicha planificación se adapta a las condiciones dadas al inicio. Este hecho nos muestra una alta capacidad de autorregulación al resolver un problema, y dada la edad de los resolutores, es un indicador clave en su desarrollo hacia convertirse en resolutores expertos (Schoenfeld, 1989).

En tercer lugar, observamos la importancia que desempeña la fase de evaluación – en este caso, autoevaluación – en el proceso de resolución. Nos parece oportuno destacar que las categorías de *revisión de la solución* (4) y *revisión del proceso* (5) deberían ser inseparables al resolver un problema, aunque encontramos casos en los que o bien no se dan, o bien se da una sin la otra (tabla 6). El proceso de autoevaluación es una de las claves del éxito escolar (Sanmartí, 2010) así como del éxito en resolución de problemas. Observamos además que los casos en los que se realiza una *revisión doble* (6) – usando otro método para verificar la solución –, son los casos en los que no sólo se producen menos errores en la resolución y solución final sino que además, se evita la *selección de estrategias de resolución* erróneas (3).

Por último, encontramos una estrecha relación entre la *consciencia del patrón* (2), es decir, el modo en el que el alumnado percibe el patrón de la tabla, y la selección de *la estrategia de resolución* (3). En los casos en los que el alumnado percibe sólo el patrón pictórico – colocación específica de los números en la tabla a modo de cenefa – la estrategia seleccionada tiende a ser finalizar la tabla hasta llegar al número 100. En los casos en los que el alumnado percibe el patrón aritmético – la relación entre la distribución de los números por columnas – la estrategia seleccionada tiende a ser relacionar aritméticamente los números entorno al 100 sin llegar a finalizar la tabla. Así pues, observamos que esta última percepción aritmética del patrón conlleva a la selección de una estrategia de resolución más eficaz a nivel lógico-matemático y temporal.

7. Conclusiones

Corroboramos que la creación de la base de orientación por parte del alumnado ha producido una mayor apropiación de las fases de resolución de un problema matemático, así como de los procesos metacognitivos que se desarrollan durante la resolución (Jorba y Sanmartí, 1996). Al usar la base de orientación, las producciones son más estructuradas y el alumnado hace un mayor esfuerzo por redactar detalladamente el proceso seguido. Este hecho produce que no sólo se describa o explique el proceso matemático seguido sino que se llegue a justificar con procesos metacognitivos el porqué de determinadas elecciones (Godino y Llinares, 2000).

La caracterización de los procesos metacognitivos nos ha mostrado que la consciencia, evaluación y regulación son procesos que se producen de manera no lineal. Cuando nos referimos al término no lineal, hacemos referencia a que ante un mismo problema el alumnado conjuga los procesos metacognitivos de distinto modo para llegar a la solución. Por lo tanto, aunque la resolución escrita de un problema se presente de forma lineal, ya que cuenta con unos pasos de inicio a fin para hallar la solución, los procesos metacognitivos del alumnado para resolver el problema no son lineales y, por lo tanto, no existen dos resoluciones que cuenten con procesos mentales idénticos (Clarke, 1989). Tal y como hemos observado en el apartado de resultados, en diversas ocasiones el alumnado acata el hecho de "seguir la base de orientación" como una lista secuencial y cerrada e incluso resuelve el problema en formato listado numerando los pasos a seguir. Este hecho produce que en ocasiones, cuando se desarrollan procesos como releer, cambiar de estrategia o revisar continuamente, no se pongan por escrito de manera natural (Villalonga y Deulofeu, 2015). Coincidiendo con Swanson (1990) y Mayer (1985) el proceso de resolución de un problema no es lineal, sobretodo en resolutores expertos. Así pues, llegados a este punto, consideramos oportuno aportar un nuevo formato de base de orientación (figura 12) para que ésta se adapte al ciclo de resolución no lineal y además cuente con los procesos metacognitivos caracterizados en este estudio. Denominamos a este nuevo instrumento Base de Orientación No Lineal.

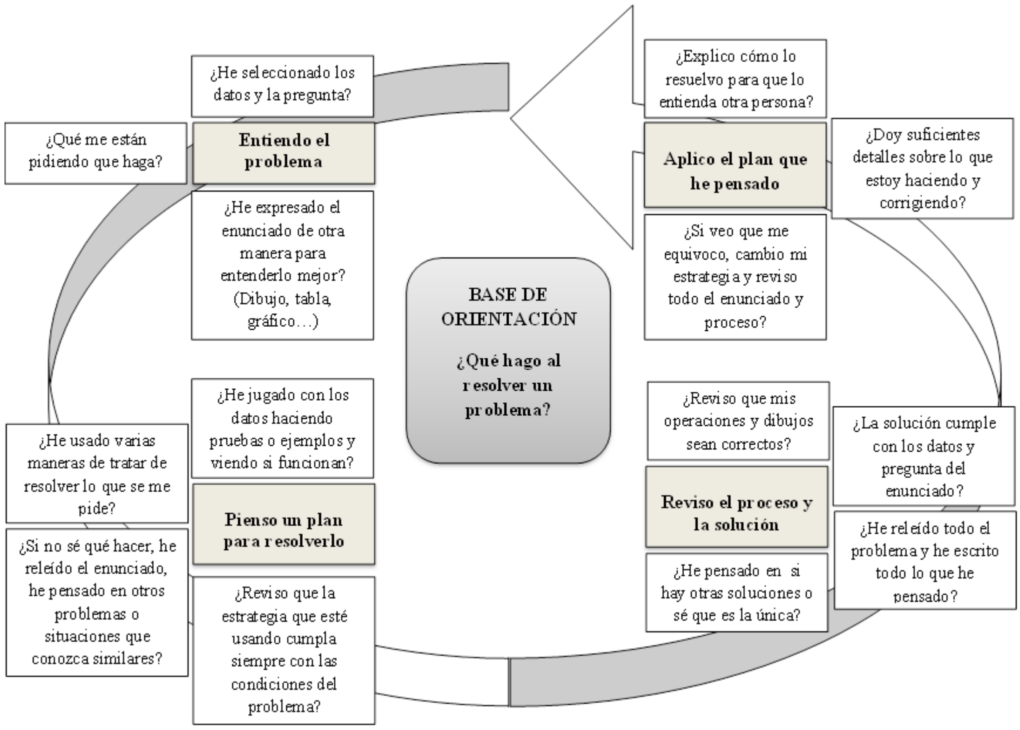


Figura 12. Base de Orientación No Lineal (elaboración propia)

Consideramos que la Base de Orientación No Lineal se adapta tanto a la realidad del proceso de resolución de un problema como a las aportaciones presentadas en esta investigación. Abrimos así una nueva línea de estudio en la que sería interesante observar si este nuevo formato se ajusta de manera más precisa al proceso de resolución.

A modo de cierre, señalamos la dificultad de examinar los procesos metacognitivos en resolutores de baja edad (Panaoura, Philippou y Christou, 2003). Compartimos con los autores que realizan investigaciones en metacognición, la idea de que en la educación elemental o primaria examinar la metacognición de manera oral puede ser una ardua tarea, puesto que las respuestas del alumnado pueden reflejar lo que dicen (o no) al investigador y no lo que realmente piensan o hacen. Así pues, el formato escrito promovido por el uso de la base de orientación (Jorba y Sanmartí, 1996) permite al resolutor sentirse menos coaccionado por el investigador al resolver el problema por escrito e individualmente, por lo que consideramos que ayuda al estudio en el campo de la metacognición.

Referencias

Alsina, Á. (2018). La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula. *Epsilon, 98*, 7-23.

Artz, A. F., y Armour-Thomas, E. (1992). Development of cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, *9*(2), 137-175.

Babbs, P. J., y Moe, A. J. (1983). Metacognition: A key for independent learning from text. *The Reading Teacher, 36*, 422-426.

Callahan, L. G. (1987). Metacognition and School Mathematics. *Arithmetic Teacher*, *34*(9), 22-23.

Callejo, M. L., y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 64-88.

Campanario, J. M., y Otero, J. (2000). Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de Ciencias. *Enseñanza de las ciencias*, *18*(2), 155-169.

Cano, E. (2015). Las rúbricas como instrumento de evaluación de competencias en Educación Superior: ¿Uso o abuso?. *Profesorado, 19*(2), 265-280.

Clarke, D. (1989). The Problems of the Problem Solving Classroom. *Australian Mathematics Teacher, 45*(3), 20-24.

De Corte, E., Verschaffel, L., y Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living* (p. 66-73). The National Center for Human Resource Development.

De Corte, E., y Verschaffel, L. (2003). El desarrollo de habilidades de autorregulación en la solución de problemas matemáticos. *Revista pensamiento educativo, 32*, 286-305.

Ericsson, K. A., y Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological review*, *87*(3), 215.

Escudero, C., y Moreira, M. A. (1999). La V epistemológica aplicada a algunos enfoques en resolución de problemas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *17*(1), 61-68.

FEEMCAT, SCM, Generalitat de Catalunya (2000-2018). Problemes a l'esprint. http://www.cangur.org/esprint/ [enero 2020]

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American psychologist*, *34*(10), 906.

García, M., y Sanmartí, N. (1998). Las bases de orientación: un instrumento para enseñar a pensar teóricamente en biología. *Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales*, *16*, 8-20.

Godino, J. D., y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática*, *12*(1), 70-92.

Grugnetti, L., y Jaquet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 373-384.

Heyworth, R. M. (1999). Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. *International Journal of Science Education*, *21*(2), 195-211.

Jorba, J., y Sanmartí, N. (1996). *Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación contínua: Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas*. Ministerio de Educación.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for research in mathematics education*, 163-180.

Kuzle, A. (2013). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 20-40.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education*, *25*, 660-660.

Lester, F. K., Garofalo, J., y Kroll, D. L. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Sever. Classes. Final Report.* Univ., Bloomington. Mathematics Education Development Center. National Science Foundation

Maclellan, E. (2014). Articulating' understanding': deploying mathematical metacognition. *Scottish Educational Review*, *46*(2), 73-89.

Magiera, M. T., y Zawojewski, J. S. (2011). Characterizations of social-based and self-based contexts associated with students' awareness, evaluation, and regulation of their thinking during small-group mathematical modeling. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(5), 486-520.

Martínez, E. C. (2008). Resolución de problemas: ideas, tendencias e influencias en España. In *Investigación en educación matemática XII* (p. 6). Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Martínez, B. A., Sánchez, J. M., y Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Uniciencia*, *34*(1), 263-280.

Mason, J., Burton, L., y Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Upper Saddle River, Prentice Hall.

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In Silver, E. A. (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 123–138. Lawrence Erlbaum.

Monje, J., Tyteca, P., y Castro, E. (2012). Resolución de problemas y ansiedad matemática: profundizando en su relación. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, *32*, 45-62.

Montague, M. (2008). Self-regulation strategies to improve mathematical problem solving for students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, *31*(1), 37-44.

Morales, E. (1999). Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático los alumnos de 9º. grado de educación básica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *2*(1), 77-92.

Novak, J. D., y Gowin, D. B. (1988). Aprendiendo a aprender. Martínez Roca. Traducción al español del original Learning how to learn.

Panaoura, A., Philippou, G, I., y Christou, C. (2003). Young pupil's metacognitive ability in mathematics. *European Research in Mathematics Education*, *3*, 1-9.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Granada: Comares.

Raposo, M., y Martínez, M. E. (2011). La Rúbrica en la Enseñanza Universitaria: Un Recurso Para la Tutoría de Grupos de Estudiantes. *Revista Formación Universitaria*, *4*(4), 19-28.

Rodríguez, R. y Jorba, J. J. (2014). Los criterios de evaluación, un elemento esencial en el proceso de autorregulación del aprendizaje. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas, 67, 57-62.*

Sanmartí, N. (2010). *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.* Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Básica i el Batxillerat.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. En L.B. Resnick, B.L. Klopfer (Eds.) *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research*, Association for Supervision and Curriculum Development, p. 83-103.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-making Mathematics. Grouws, D. (Ed.). *Research on Mathematics Teaching and Learning:* 334-370. Macmillan, New York. USA.

Schraw, G., y Sperling-Dennison, R. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19*, 460-470

Sperling, R. A., Howard, B. C., Miller, L. A., y Murphy, C. (2002). Measures of children's knowledge and regulation of cognition. *Contemporary Educational Psychology, 27*, 51-79.

Spring, H. T. (1985). Teacher decision making: A metacognitive approach. *The Reading Teacher*, *39*(3), 290-295.

Swanson, H. L. (1990). Influence of metacognitive knowledge and aptitude on problem solving. *Journal of educational psychology*, *82*(2), 306.

Ullauri, J. I. U., y Ullauri, C. I. U. (2018). Metacognición: Razonamiento Hipotético y Resolución de Problemas. *Revista Scientific*, *3*(8), 121-137.

Van der Stel, M., Veenman, M. V., Deelen, K., y Haenen, J. (2010). The increasing role of metacognitive skills in math: A cross-sectional study from a developmental perspective. *ZDM*, *42*(2), 219-229.

Villalonga, J., y Deulofeu, J. (2015). La base de orientación en la resolución de problemas. En FESPM, SEMRM (Eds.) *Actas JAEM 2015. 17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 36 - 68. Pedro Ángel Sánchez Martínez, S.L.U.

Villalonga, J., y Deulofeu, J. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: "Cuando me bloqueo o me equivoco." *REDIMAT, 6(3),* 256-282.

Wilson, J., y Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 25-48.

Zimmerman, B. J. (1990). Self-regulated learning and academic achievement: An overview. *Educational psychologist*, *25*(1), 3-17.

Zimmerman, B. J., y Martinez-Pons, M. (1990). Student differences in self-regulated learning: Relating grade, sex, and giftedness to self-efficacy and strategy use. *Journal of educational Psychology*, *82*(1), 51.

Autora de correspondencia:

Alba Torregrosa - alba.torregrosa@uab.cat

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals Campus de la UAB, Edifici G5 - 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès) – Barcelona – España. Telf. +34 93 581 2649

5.2 Publicación 2

La referencia de la publicación 2 transcrita en este apartado es la siguiente:

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa) Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.*

El presente artículo pretende responder al segundo objetivo de la presente tesis doctoral descrito en el apartado 2: *"Analizar el papel de la autoevaluación y la coevaluación como métodos de feedback durante la construcción y uso de una base de orientación no lineal"*.

Orientation and peer assessment: Two key aspects for the evolution of the problem solving process

Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas

Alba Torregrosa*

https://orcid.org/0000-0001-7954-3507

Lluís Albarracín**

http://orcid.org/0000-0002-1387-5573

Jordi Deulofeu***

https://orcid.org/0000-0002-5834-0863

Abstract

The aim of this study is to compare and describe the different phases of development in a non-linear orientation base elaborated by 25 students in sixth grade when they solve four pattern mathematical problems. A qualitative analysis of the items that appear in the different phases of development in the non-linear orientation base is done based on the productions of the students and the peer assessment questionnaires that serve as a feedback method. Our results emphasize that, from one phase to another, the non-linear orientation base undergoes changes in terms of planning, reviewing and explaining the resolution process that help students to verbalize in a more comprehensive way both, the resolution method and the metacognitive processes carried out.

Keywords: Non-linear orientation base, assessment, pattern problems, elementary education, metacognition

* Doctoranda de Didáctica de las Matemáticas en la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). Profesora asociada en el Dpt. de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra, Barcelona, España E-mail: alba.torregrosa@uab.cat

** Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). Profesor Serra-Húnter en el Dpt. de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra, Barcelona, España E-mail: lluis.albarracin@uab.cat

*** Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad Autónoma de Barcelona (UAB). Profesor Titular en el Dpt. de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB), Bellaterra, Barcelona, España. E-mail: jordi.deulofeu@uab.cat

Resumen

El presente estudio toma como objetivo describir y comparar las distintas fases de desarrollo de una base de orientación no lineal elaborada por un grupo de 25 alumnos de sexto de primaria al resolver cuatro problemas de patrones matemáticos. Se realiza un análisis cualitativo de los ítems que aparecen en las distintas fases de desarrollo de la base de orientación no lineal a partir de las producciones del alumnado y de los cuestionarios de coevaluación que sirven como método de feedback. Nuestros resultados enfatizan que, de una fase a otra, la base de orientación no lineal experimenta cambios en cuanto a la planificación, revisión y explicación del proceso de resolución que ayudan al alumnado a verbalizar de un modo más exhaustivo tanto el método de resolución, como los procesos metacognitivos llevados a cabo.

Palabras clave: Base de orientación no lineal, evaluación, problemas de patrones, educación primaria, metacognición

1 Introducción

La resolución de problemas se encuentra en el núcleo de la actividad matemática y desde hace algunas décadas, ha sido una parte esencial de la educación matemática estando presente en todas las aulas de educación obligatoria y postobligatoria. En la literatura no existe un consenso sobre qué entendemos por resolución de problemas. Grugnetti y Jaquet (2005) sugieren que esta falta de consenso se debe a las diferentes visiones existentes sobre la naturaleza de la actividad matemática. En el presente estudio entendemos el término problema matemático como sinónimo de problema no rutinario. En palabras de Mayer (1985):

> Un problema no rutinario aparece cuando un individuo se encuentra con una situación dada, tiene la intención de alcanzar lo que se le pide, pero no sabe un camino directo para acceder o realizar el objetivo. La principal característica de estos problemas es la ignorancia del resolutor del problema respecto al método de resolución (p. 123).

Encontramos distintos factores que afectan al proceso de resolución de un problema. Éstos son los conocimientos, el control, las creencias y los afectos, y los factores contextuales (LESTER; GAROFALO; KROLL, 1994; SCHOENFELD, 2007). Cuando hablamos del control del resolutor, nos referimos a los procesos metacognitivos (SCHOENFELD, 1992) y en concreto, los procesos de regulación, evaluación y monitoreo (CLARKE, 1989). Estudios previos llevados a cabo en periodos educativos obligatorios, han señalado la importancia de verbalizar los procesos metacognitivos con la finalidad de desarrollar habilidades matemáticas complejas presentes en resolutores expertos (WILSON; CLARKE, 2004). Entendemos como procesos metacognitivos las acciones de regulación, evaluación y monitoreo que desarrolla un resolutor al resolver un problema matemático (CLARKE, 1989). Encontramos una amplia variedad de estudios que examinan la metacognición matemática en términos cuantitativos (ARTZT; ARMOUR-THOMAS, 1992; SCHRAW; DENISSON, 1994) pero pocos que lo hagan en términos cualitativos debido a la dificultad que comporta analizar un proceso mental, especialmente, en resolutores de baja edad (CAVANAUGH, PERLMUTTER, 1982).

Atendiendo a la importancia de verbalizar y evaluar cualitativamente el proceso metacognitivo durante la resolución de problemas, en Torregrosa, Albarracín, Deulofeu (2020) caracterizamos los procesos metacognitivos presentes durante la resolución de problemas de lógica y patrones matemáticos cuando el alumnado usaba un instrumento de autorregulación llamado base de orientación de la acción (JORBA; SANMARTÍ, 1996). Nuestros resultados mostraron que la base de orientación de la acción promovía que el alumnado pautara, estructurara y verbalizara por escrito procesos metacognitivos complejos. Encontramos por un lado, una estrecha relación entre la verbalización explícita de la resolución escrita y la regulación del proceso de resolución, entendida como la adaptabilidad en la elección y desarrollo de la estrategia de resolución. Así pues, aquellas producciones en las que el alumnado detallaba exhaustivamente el proceso de resolución añadiendo anotaciones referentes a procesos metacognitivos, eran las que mostraban más éxito tanto en hallar la solución correcta como en seleccionar la estrategia adecuada. Por otro lado, observamos que la linealidad de la base de orientación de la acción presentada como un listado paso a paso, dificultaba el proceso de resolución de un problema, ya que este proceso no se produce de manera lineal (MAYER, 1985). Así pues, desarrollamos un instrumento llamado base de orientación no lineal que mantenía las condiciones iniciales de la base de orientación de la acción (JORBA; SANMARTÍ, 1996) pero se estructura en un formato de diagrama no secuencial que sigue las fases de resolución de Pólya (1945).

En el presente estudio mostramos una experiencia llevada a cabo con un grupo de 6º grado de educación primaria al usar por primera vez una base de orientación no lineal en un ciclo de resolución y evaluación de cuatro problemas de lógica y patrones matemáticos. Nos planteamos como objetivo describir y comparar las distintas fases de desarrollo de una base de orientación no lineal elaborada por un grupo clase de sexto de primaria. La investigación que se presenta muestra, a nivel teórico, el proceso de creación, desarrollo, uso y evaluación de la base de orientación no lineal. A nivel práctico, se realiza un análisis de los cambios que introducen los alumnos en la base de orientación no lineal durante la secuencia matemática propuesta. Aunque se han hecho algunas aproximaciones en otras áreas de conocimiento, no existe en la literatura ningún estudio en el área de educación matemática que trabaje usando una base de orientación no lineal en resolución de problemas. Por lo tanto, nuestra investigación persigue una doble finalidad. En primer lugar, pretendemos señalar qué aspectos clave aparecen en las distintas fases de desarrollo de la base que nos muestran una evolución del pensamiento matemático derivado del proceso de resolución de un problema. En segundo lugar, pretendemos mostrar la importancia de la autoevaluación, y sobre todo la coevaluación, como métodos de feedback tanto en la construcción de la base de orientación no lineal cómo en el proceso de resolución de un problema.

2 Marco teórico

2.1 La metacognición en resolución de problemas

Cuando un resolutor se enfrenta a la resolución de un problema, activa una serie de mecanismos, tanto cognitivos como metacognitivos, y los encadena siguiendo procesos mentales sumamente complejos (SCHOENFELD, 1992). Flavell (1979) define la metacognición como "el conocimiento sobre los propios procesos y productos cognitivos, así como el conocimiento sobre las propiedades de la información, datos relevantes para el aprendizaje o cualquier cosa relacionada con los procesos y productos cognitivos" (en CAMPANARIO; OTERO, 2000, p. 232). La línea que separa los términos cognición y metacognición es sumamente fina. La mayoría de procesos mentales que desarrollamos, son de carácter metacognitivo pero necesitamos de los procesos cognitivos para que éstos se produzcan (SCHOENFELD, 1989). Dentro de los procesos metacognitivos diferenciamos dos categorías (CALLAHAN, 1987): el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición. Cuando hablamos de conocimiento de la cognición, nos referimos a: conocer qué o conocimiento declarativo, conocer cómo o conocimiento procedimental y conocer cuándo o conocimiento condicional. Cuando hablamos de regulación de la cognición, nos referimos a aquellos procesos referentes a la consciencia (toma de consciencia y uso efectivo de tales decisiones), la regulación (monitoreo y efectividad de aplicación de estrategias) y la evaluación (de la situación y solución).

Dada la complejidad a nivel metacognitivo que presenta el proceso de resolución de un problema, Clarke (1989) hizo especial hincapié en la categoría referente a la regulación de la cognición tratando de observar qué ciclo metacognitivo seguía el alumnado al resolver un problema matemático. Una de las conclusiones más relevantes a las que llegó el autor fue la imposibilidad de determinar, ante un mismo problema, uno o varios ciclos metacognitivos generalizables para todos los resolutores que caracterizaran procesos que siempre se dieran del mismo modo y en el mismo momento. Este hecho nos lleva a realizar dos afirmaciones relevantes para el presente estudio. En primer lugar, el análisis de los procesos metacognitivos que lleva a cabo el alumnado durante la resolución de un problema, puede ser una de las claves para comprender el éxito y/o el fracaso durante la resolución tal y como observamos en Torregrosa, Deulofeu, Albarracín (2019). En segundo lugar, analizar los procesos metacognitivos que lleva a cabo el alumnado requiere del uso de diversos instrumentos de recogida de datos, así como una minuciosa triangulación, puesto que la metacognición se da de manera mental, subjetiva y difícilmente se verbaliza con claridad (GODINO; LINARES, 2000).

2.2 La base de orientación como instrumento de autorregulación

La base de orientación no lineal (BONL) es un instrumento de autorregulación matemática (TORREGROSA; ALBARRACÍN; DEULOFEU, 2020) que parte de la base de orientación de la acción, un instrumento desarrollado por Jorba y Sanmartí (1996) que fue ideado para orientar al alumnado en su explicación de modelos científicos, teóricos y prácticos, de la ciencia y la matemática (figura 1). Nos referirnos a él como instrumento de autorregulación puesto que persigue la finalidad de regular los propios procesos metacognitivos matemáticamente relevantes en resolución de problemas. Las premisas que justifican la base de orientación no lineal, parten de la base de orientación de la acción. Así pues, concretaremos en primer lugar qué es una base de orientación de la acción para proceder a exponer qué cambios sustanciales encontramos respecto a la base de orientación no lineal.

La base de orientación de la acción:

> Es un instrumento ideado para promover que el alumnado desarrolle su capacidad de anticipar y planificar las operaciones necesarias para realizar una acción. A través de ella se pretende que explicite los procesos que se deben realizar o que se han realizado al ejecutar una tarea, o las características que permiten definir un modelo o un concepto. […] La base de orientación ayuda a desarrollar la habilidad de seleccionar las características relevantes y a anticipar un plan de acción (GARCÍA; SANMARTÍ, 1998, p. 10-11.)

Para poder desarrollar una base de orientación de la acción debemos concretar: qué objetivo pretendemos alcanzar, determinar qué conocimientos hemos trabajado con el alumnado y qué conocimientos pretendemos desarrollar, y por último, bajo qué condiciones la construiremos como ejemplificación de un caso particular hacia una categoría más general (NUNZIATI, 1990). La base de orientación se puede caracterizar mediante diversos parámetros relacionados con su contenido (TALIZINA, 1988) como puede ser la forma de la presentación (material, materializada, verbal externa…), el nivel de generalización (particular o general), la completitud (de muy completa a poco completa) y la manera en que los alumnos acceden a ella, dependiendo de si la elabora el docente o la elaboran los propios estudiantes a partir de un método general.

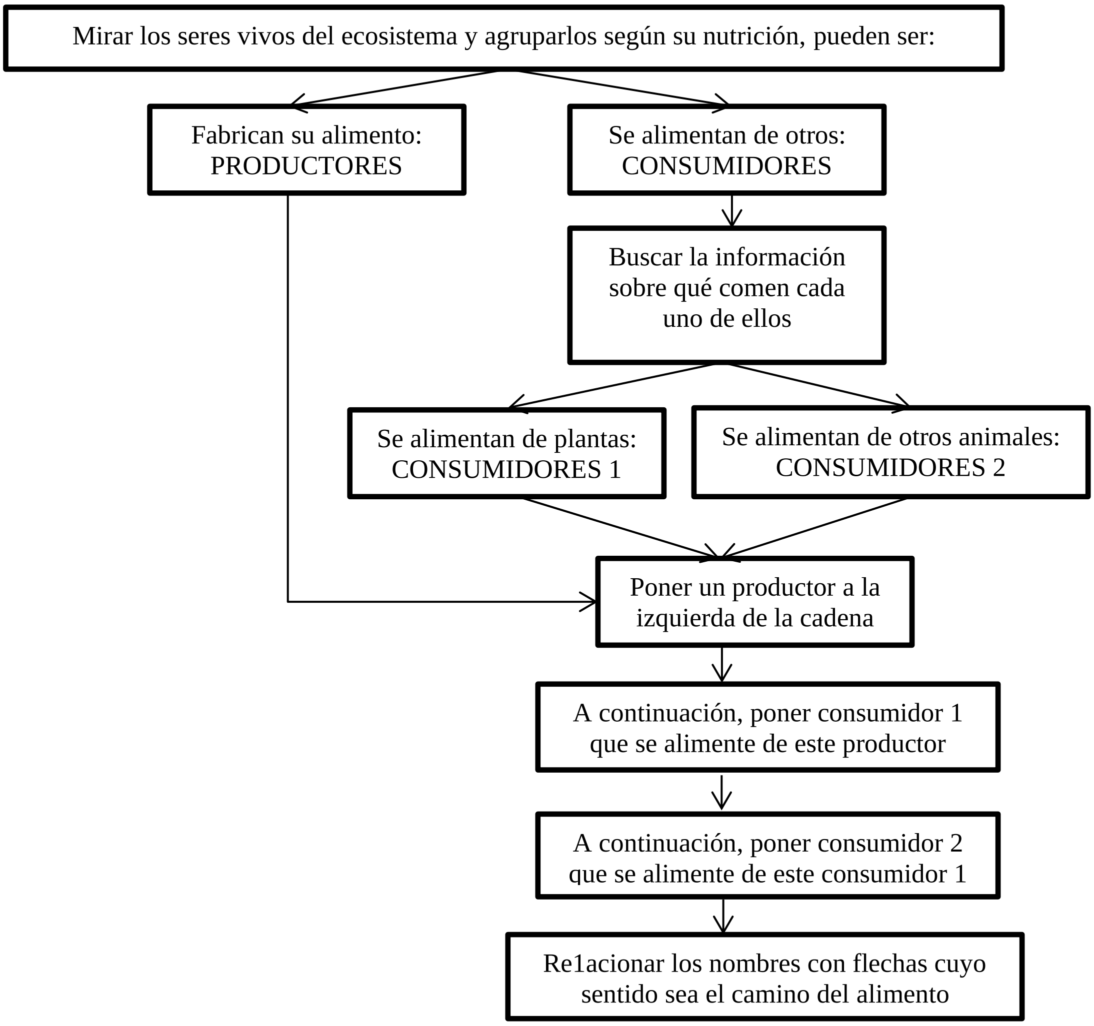


Figura 1 – Ejemplificación de una base de orientación de la acción de carácter general construida por una alumna de 1º de BUP; construcción de una cadena trófica
Fuente: García y Sanmartí (1998, p.12)

Atendiendo a los parámetros anteriores, las investigaciones previas han mostrado que la forma de presentación, al depender del nivel educativo y del grupo clase, no tiene un impacto altamente relevante en su aplicación (JORBA; SANMARTÍ, 1996). A su vez, las bases de orientación poco completas, no reflejan completamente las necesidades de la actividad que orientan. Teniendo en cuenta estos dos indicadores, se pueden considerar cuatro tipos de bases de orientación (cuadro 1):

Tipo	Completitud	Nivel de generalización	Modo de acceso
1	Completa	Particular	Preparada
2	Completa	General	Preparada
3	Completa	General	Elaborada por el alumno
4	Completa	Particular	Elaborada por el alumno

Cuadro 1 – Tipos de bases de orientación
Fuente: Jorba y Sanmartí (1996, anexo IV.4)

Tal y como podemos observar en el cuadro anterior y atendiendo a las premisas antes comentadas, la base de orientación de la acción que se ha mostrado más efectiva es la de tipo 3, ejemplificada en la figura 1. En este ejemplo la base es elaborada por la propia alumna – con lo que tiene un alto nivel de significatividad para ella – y, además, le permite explicar un constructo científico general, como es la construcción de una cadena trófica, diferenciando aquellos seres que son productores de aquellos que son consumidores de plantas o animales. Si la base ejemplificada en la figura 1 hubiera sido elaborada por el docente en vez de por la alumna, nos encontraríamos ante una base de tipo 2, es decir, general y preparada. En este caso, el nivel de significatividad de la base sería menor puesto que no es la propia alumna quien construye el constructo científico. Finalmente, si la alumna hubiera elaborado previamente una base que le permitiera identificar los tipos de seres vivos que son sólo productores, nos encontraríamos ante una base de tipo 4, es decir, particular y elaborada por la alumna. En este último caso, la alumna identificaría un aspecto particular – los productores – dentro de un constructo más general – la cadena trófica –. En el caso de las bases de tipo 3 y 4, elaboradas por el propio alumnado, podemos encontrar tantas bases de orientación distintas como alumnos tengamos en el aula; cuanto más personalizada, más comprensible y significativa será para el alumno. Siguiendo a Jorba y Sanmartí (1996), al planificar la creación de la base de orientación, debemos tener en cuenta procesos referentes a: elementos estructurales de la acción (motivo de la tarea, objetivo, condiciones de realización, operaciones de la acción...), anticipación de la acción (posibles estrategias y resultado esperado) y planificación de la acción (elección de la estrategia y plan de trabajo).

Villalonga y Deulofeu (2017) quisieron aplicar la base de orientación de la acción a procesos no lineales, como la resolución de un problema matemático. Una de las conclusiones más relevantes de su estudio fue que el alumnado tomaba la base de orientación como una serie de pasos a seguir y no como indicadores de planificación o sugerencia durante la resolución: “se confirma así que la resolución un problema es una dinámica compleja, en ningún caso lineal, que requiere de tiempo, reflexión y dedicación” (VILLALONGA; DEULOFEU, 2017, p. 279). Dadas las aportaciones de los autores anteriores, en un estudio previo (TORREGROSA; DEULOFEU; ALBARRACÍN, 2019) observamos que era posible usar la base de orientación de la acción eliminando su formato listado. En este momento, creamos la base de orientación no lineal (BONL, figura 2), siguiendo las fases de Pólya (1945), las premisas dadas por Jorba y Sanmartí (1996) y Villalonga y Deulofeu (2017) así como los procesos metacognitivos apuntados por Clarke (1989).

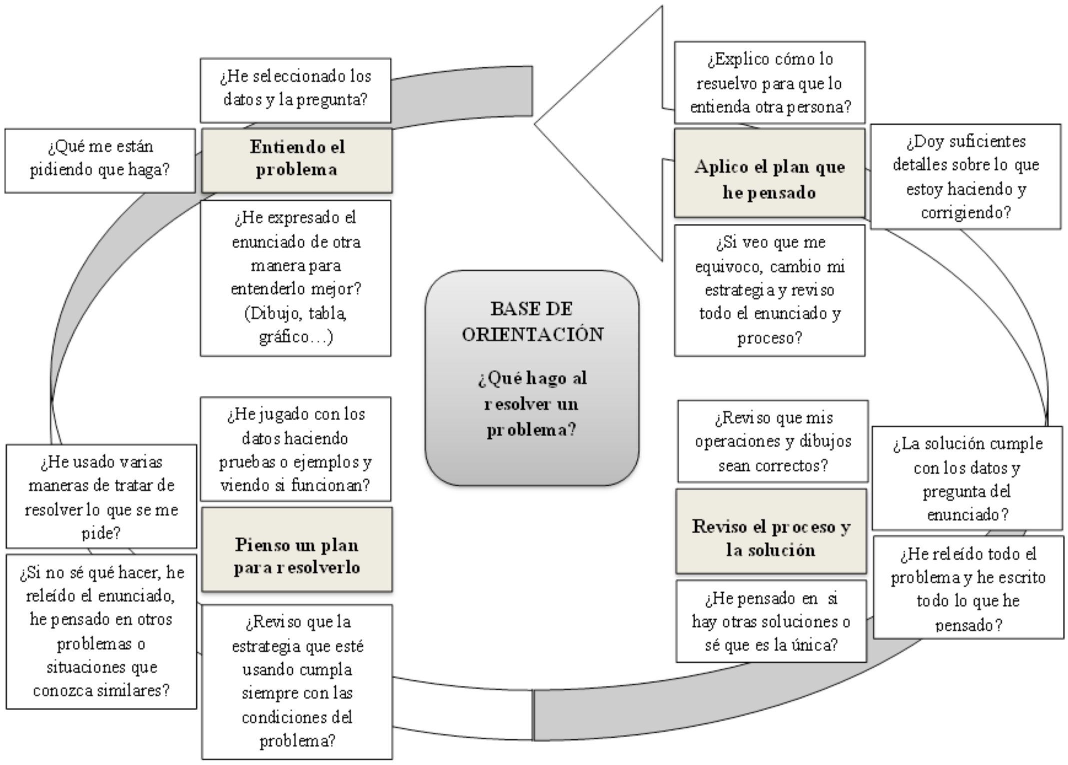


Figura 2 – Ejemplificación de base de orientación no lineal (BONL)
Fuente: Elaboración propia

Para iniciar la construcción de una BONL, se recomienda partir de la resolución de un primer problema con la finalidad de que el alumnado tenga una base de trabajo previa (VILLALONGA; DEULOFEU, 2015). Al finalizar la resolución, el alumnado debe compartir en gran grupo las destrezas matemáticas (PUIG, 1996) y los procesos metacognitivos llevados a cabo para conocer cómo han avanzado a medida que han ido resolviendo el problema y porqué han decidido hacerlo de un determinado modo. Este proceso se puede llevar a cabo de distintos modos dependiendo de la edad de los resolutores. En los últimos cursos de educación primaria, se recomienda que inicialmente el docente elabore un esquema con cuatro ramificaciones que corresponden a las cuatro fases de resolución de un problema (PÓLYA, 1945): comprensión del problema, elaboración del plan de acción, aplicación del plan de acción y revisión del proceso y solución. Posteriormente, el docente debe abrir una discusión con el alumnado cuestionando qué acciones han llevado a cabo en cada una de las fases de resolución. En la figura 2 se muestra un ejemplo de la tipología de preguntas que el docente puede formular para cada una de las fases de resolución del problema. El papel del docente en esta discusión consiste en recuperar las respuestas e ideas del alumnado, confrontarlas entre ellas y formular preguntas que permitan a los alumnos debatir la idoneidad de sus destrezas y procesos individuales en comparación a los de sus compañeros. La finalidad de esta discusión es recopilar en la base aquellas acciones que el grupo considere claves para poder resolver un problema como el presentado. A medida que el alumnado usa la BONL al resolver problemas, ésta debe ir ampliándose con nuevas destrezas matemáticas y procesos metacognitivos relacionados con la resolución. La base de orientación no lineal no es un instrumento que se crea y permanece inmutable, sino que evoluciona a medida que el conocimiento del alumnado y su uso también evolucionan. Con la finalidad de diferenciar cómo y cuándo la base se modifica, llamaremos fases de desarrollo a los momentos en los que la base sufre cambios sustanciales en su estructura debido a la introducción o modificación de las destrezas y procesos que en ella aparecen. El número de fases de desarrollo dependerá de la cantidad de veces que se revise el contenido de la base de orientación no lineal.

Uno de los puntos más relevantes al construir una BONL con el alumnado, es cómo evaluamos el proceso de construcción y desarrollo del instrumento tanto para saber qué grado de apropiación de la base tiene el alumnado, como para validar su pertinencia y adecuación a los problemas propuestos. La autoevaluación, como método de feedback, permite al alumnado cuestionar sus procedimientos y reflexionar sobre sus acciones. Por su parte, la coevaluación permite al alumnado reconocer sus potencialidades y errores a partir de identificarlos en las producciones de sus compañeros (SANMARTÍ, 2010). Los cuestionarios de autoevaluación y coevaluación se han mostrado efectivos para conocer qué destrezas matemáticas y procesos metacognitivos ha llevado a cabo el alumnado en las distintas fases del problema (SANMARTÍ, 2019) que habitualmente no aparecen ni en sus producciones escritas ni en la base de orientación no lineal. Al diseñar dichos cuestionarios, debemos tener en cuenta el periodo educativo en el que se encuentra el alumnado. En el primer ciclo de educación primaria, podemos usar escalas numéricas de satisfacción, pictogramas, dianas, o bien rúbricas y comentarlas en gran grupo. En los últimos cursos de educación primaria, los formularios escritos sirven al alumnado, y al propio profesorado, como instrumentos de detección de destrezas matemáticas y procesos metacognitivos y a su vez, sirven como fuente de detección de errores. En el cuadro 2 se ejemplifica la tipología de preguntas que se pueden incluir en los cuestionarios en relación con las fases de resolución de un problema (PÓLYA, 1945), que son las que estructuran la base de orientación no lineal. Las preguntas que planteamos al alumnado deben tener un carácter abierto puesto que nuestra pretensión es que expliciten al máximo los procesos y destrezas llevados a cabo que no han verbalizado por escrito durante la resolución del problema y que por lo tanto, no podemos observar en sus producciones. Sus respuestas nos permiten observar cuáles de estas destrezas y procesos clave no aparecen en la base de orientación no lineal y por lo tanto, se deben añadir antes de proceder a resolver un nuevo problema (DEULOFEU; VILLALONGA, 2018). Si nos encontramos en cursos inferiores o bien, ante grupos con dificultades de comprensión y expresión escrita, los cuestionarios pueden adoptar un formato oral y pueden ser comentados y discutidos tanto individualmente como en gran grupo. En este caso, al no contar con un formato escrito, se deben grabar las respuestas del alumnado en audio o vídeo.

PREGUNTA	**JUSTIFICACIÓN**
Imagina que tienes que explicar a un compañero de cuarto de primaria el problema que acabas de resolver. Él no ha visto el problema ni sabe de qué trata. Explícale que te pedía el problema y qué pasos has seguido desde el inicio al final para resolverlo.	Abstracción de las destrezas y procesos generales ha llevado a cabo el alumnado que no aparecen en las producciones escritas
Cuando has terminado de leer el problema por primera vez, ¿qué es lo primero que has pensado que podrías hacer para resolverlo? Basta que cuentes la primera idea que se te ha ocurrido.	Abstracción de los ítems referentes a la fase de planificación
Mientras resolvías el problema, ¿ha habido algún momento en que has cambiado la manera en la que la estabas resolviendo? ¿En qué momento ha sido y porque has cambiado lo que habías pensado?	Abstracción de los ítems referentes a la fase de planificación entorno la regulación y monitoreo metacognitivo

¿Qué conocimientos de matemáticas crees que has utilizado para resolver el problema?	Abstracción de los ítems referentes a la fase de aplicación del plan
¿Crees que has revisado el problema mientras el estabas haciendo, cuando has terminado o en todo momento? ¿Qué es lo que has revisado? (Las operaciones, los dibujos, el enunciado, lo que has escrito...). Cuéntalo.	Abstracción de los ítems referentes a la fase de revisión

Cuadro 2 – Ejemplificación de las preguntas que pueden aparecer en un cuestionario de autoevaluación. Fuente: Elaboración propia

4 Metodología

La metodología presentada en esta sección está diseñada para describir y comparar las distintas fases de desarrollo de una base de orientación no lineal elaborada por un grupo clase de sexto de primaria.

Los datos del estudio se recogieron en un centro de titularidad pública que pertenece al barrio de les Corts de Barcelona. Contamos con 25 participantes de sexto grado de educación primaria con edades comprendidas entre los 11 y 12 años. Durante el horario lectivo, el grupo dispone de una hora semanal llamada “resolución de problemas matemáticos” en la cual no realiza problemas matemáticos en palabras de Mayer (1985), sino que resuelve ejercicios de aplicación directa de algoritmos. Por lo tanto, el alumnado no está familiarizado con la resolución de problemas en sí misma y tampoco conoce ni ha trabajado anteriormente con ningún tipo de base de orientación.

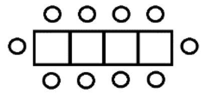
Con la finalidad de presentar la metodología de un modo claro, en primer lugar, presentaremos los instrumentos que se usaron en el presente estudio y justificaremos su elección y diseño. En segundo lugar, presentaremos cómo se usaron y configuraron temporalmente dichos instrumentos en el aula.

Inicialmente, delimitamos los parámetros de la base de orientación no lineal que el alumnado debía crear. Ésta sería escrita, concreta, medianamente completa y creada por el alumnado. El principal motivo que nos llevó a esta elección fue la nula familiarización del grupo clase con el instrumento. Por lo tanto, consideramos que debíamos partir de un objeto concreto – la resolución de una sola tipología de problemas– y que además, debía ser el propio alumnado quien elaborara la base en formato escrito, ya que facilitaría su revisión constante.

A continuación, seleccionamos 4 problemas de lógica y patrones matemáticos (figura 3). La selección de dichos problemas se realizó atendiendo a la flexibilidad que caracteriza los problemas de patrones, entendida como la variabilidad de estrategias de distinta complejidad que se pueden aplicar (CALLEJO; ZAPATERA, 2014). En todos ellos el enunciado escrito se complementaba con un dibujo que facilitaba su comprensión y su resolución en caso de no reconocer métodos aritméticos (VILLALONGA; DEULOFEU, 2015). Los problemas están organizados de más sencillo a más complejo ateniendo a la dificultad de hallar el patrón. Este hecho posibilita la aparición de destrezas matemáticas y procesos metacognitivos cada vez más complejos.

PROBLEMA 1: LA CENA

Queremos organizar una cena con nuestros amigos pero no sabemos a ciencia cierta cuantas mesas necesitamos. Lo que sí que sabemos es que queremos poner mesas en una sola hilera y que los amigos se sentaran tal y como se muestra en el dibujo.



Si somos 40 amigos, ¿cuántas mesas necesitaremos? ¿Y si somos 100?

A última hora nos han confirmado que en total, seremos 143 amigos. Cuando estemos todos sentados, ¿quedará algún sitio vacío en la mesa? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

PROBLEMA 2: LOS PALILLOS

Anna ha estado jugando a hacer figuras con palillos. Primero ha decidido hacer triángulos de la siguiente manera:

Se ha preguntado ¿cuántos palillos le hacen falta si quiere hacer 10 triángulos siguiendo el mismo patrón que en la figura? ¿Y si quiere hacer 20? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

PROBLEMA 3: LA TABLA NUMÉRICA

Juliana ha escrito en una tabla los números naturales 1, 2, 3, 4, 5… poniéndolos del tal manera como se muestra en el dibujo:

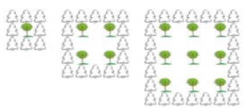
1	4	5	8	9
2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
12	13	16	17	20
21	24	25	28	29
22	23	…	…	…

Ha empezado a mirar la tabla y ha decidido sumar los números que tienen un lado en común con el 10. Así pues, ha sumado 9+7+19=35. Luego ha pensado: "Haré lo mismo con otro número. Sumaré los números que tienen un lado en común con el 100". Pero… creo que no hace falta que dibuje todos los números.

¿Podrías explicar cómo lo ha hecho Juliana? ¿Qué resultado da la suma de los números que tienen un lado en común con el 100? ¿Y con el 1000? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

PROBLEMA 4: LOS PINOS Y LOS NARANJOS

Un agricultor quiere plantar naranjos siguiendo una forma cuadrada y alrededor quiere plantar pinos. Se imagina el siguiente esquema para 1, 2 y 3 hileras de naranjos:



¿Cuántos pinos le harán falta si quiere plantar 4 hileras de naranjos? ¿Y si quiere plantar 10 hileras? ¿Cómo lo harías? Explícalo.

Figura 3 – Problemas de lógica y patrones matemáticos usados en la investigación
Fuente: Elaboración propia

Posteriormente, se elaboraron dos cuestionarios, uno de autoevaluación y otro de coevaluación que el alumnado respondería una vez finalizado cada uno de los problemas seleccionados. En la autoevaluación, se pedía al alumnado que explicitara el método de resolución que había llevado a cabo paso a paso, que indicara si en algún momento había sufrido un bloqueo o atasco durante la resolución y cómo lo había solucionado. La primera pregunta responde a una necesidad de verbalizar explícitamente el proceso de resolución una vez el problema está terminado, puesto que el alumnado tiende a verbalizar por escrito procesos que ha omitido durante la resolución del problema (TORREGROSA; DEULOFEU; ALBARRACÍN, 2019). La segunda pregunta responde a la necesidad de detectar posibles cambios de estrategia (VILLALONGA; DEULOFEU, 2015).

En la coevaluación, aparecían tres grupos de preguntas. En primer lugar, se pedía al alumno que explicara cómo su compañero había resuelto el problema paso a paso y si consideraba que lo había resuelto correctamente. Esta primera pregunta responde a la necesidad de observar qué nivel de detalle existe en la resolución del compañero y si ésta resulta comprensible y acertada. En segundo lugar, se pedía al alumnado si consideraba que su compañero había sufrido un bloqueo o atasco y cómo lo había detectado. Esta segunda pregunta, al igual que en la autoevaluación, responde a una necesidad de detectar cambios de estrategia y verbalización escrita de los procesos de autorregulación. Por último, se pedía al alumno que anotase puntos fuertes de la producción evaluada, así como aspectos a mejorar. Esta tercera pregunta responde a la necesidad de detectar destrezas y procesos que el compañero ha usado y que pueden ser útiles al resolutor o bien, pueden ser puntos de mejora cara a la resolución del siguiente problema. Esta tercera y última pregunta es en la que más hincapié se hace en la conversación final posterior a la realización y evaluación de cada problema, ya que nos sirve para modificar la base de orientación no lineal de un problema a otro.

Como hemos comentado al inicio del apartado, el alumnado resolvió un total de 4 problemas de lógica y patrones matemáticos con su correspondiente autoevaluación, coevaluación y conversación en gran grupo posterior a cada problema. Se llevaron a cabo un total de 4 sesiones de dos horas de duración dedicando, para cada sesión, una hora de explicación y resolución del problema y una hora más para responder a la autoevaluación, coevaluación y conversación final en gran grupo. Para llevar a cabo la coevaluación se establecieron parejas heterogéneas y aleatorias con la finalidad de que el alumnado pudiera observar, compartir y discutir distintas estrategias de resolución (SANMARTÍ, 2010). La conversación final desarrollada en cada una de las sesiones es la que permitía al alumnado modificar la base de orientación no lineal (BONL) a partir del proceso de resolución y evaluación llevado a cabo, haciendo especial énfasis en la última pregunta del cuestionario de coevaluación. El papel del docente en estas discusiones finales en gran grupo consistía en moderar las intervenciones del alumnado, recuperando las destrezas y procesos que señalaban y formular preguntas que permitieran al grupo decidir qué acciones añadían a la base. Así pues, atendiendo a los cuatro problemas planteados, la base sufrió tres modificaciones y nos referiremos a ellas como BONL 1, 2 y 3 (figura 4).

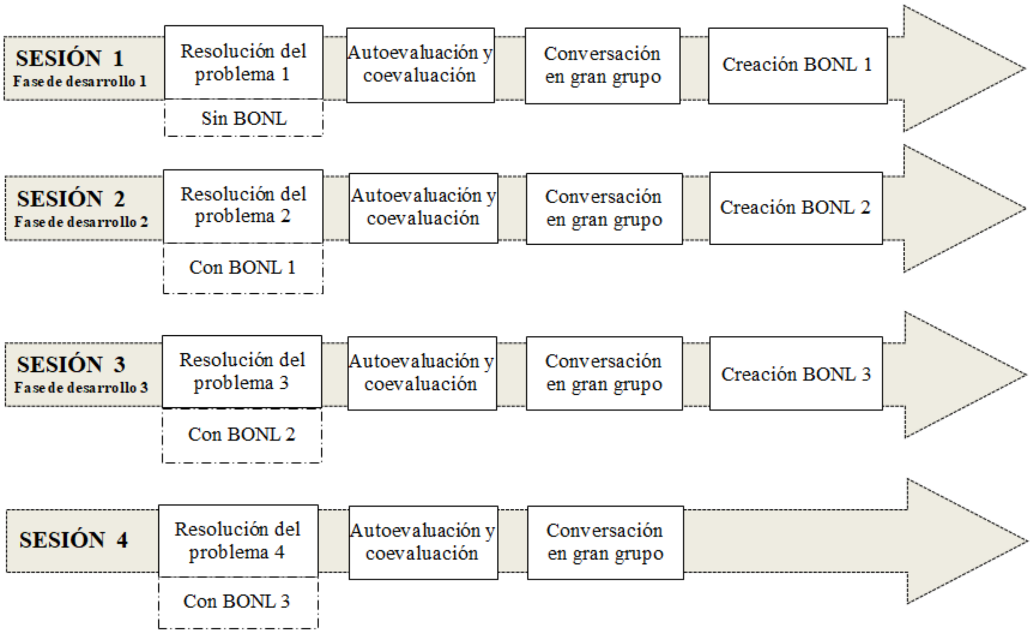


Figura 4 – Esquematización de la metodología llevada a cabo
Fuente: Elaboración propia

5 Análisis de datos

Los datos obtenidos los conforman las diferentes fases de desarrollo de la base de orientación no lineal elaborada por el grupo clase, las producciones escritas del alumnado de los cuatro problemas resueltos, así como los cuestionarios de coevaluación, que nos permiten justificar la aparición y/o cambio entre los ítems de las distintas fases.

Para poder responder a nuestro objetivo y por lo tanto, describir y comparar las tres fases de desarrollo de la BONL elaborada por el alumnado, en primer lugar organizamos en formato de tabla comparativa las destrezas y procesos que aparecen en las tres fases de desarrollo para poder visualizar correctamente los cambios y modificaciones entre fases. Así pues, elaboramos una tabla de doble entrada en la cual cada columna pertenece a una fase de desarrollo y cada hilera a una destreza o proceso concreto (tal y como se visualizará en el cuadro 3).

En primer lugar, seleccionamos aquellas producciones que mostraran por escrito la aparición y/o modificación de los procesos y destrezas (ítems) de cada fase de la BONL. Así pues, elaboramos un check-list concretando, para cada ítem de las distintas fases (sea proceso o destreza), cuatro posibles opciones:

- **Ítem no usado:** No observamos el uso de un determinado ítem puesto que el alumno no lo verbaliza ni se intuye su uso en la resolución
- **Ítem usado y observable:** El alumnado usa un determinado ítem puesto que lo expresa por escrito o bien se visualiza su uso durante la resolución
- **Ítem usado pero no observable:** Intuimos que el alumno ha usado un determinado ítem de la base pero no podemos asegurar su uso puesto que no lo verbaliza con exactitud o no se intuye con claridad
- **No categorizado:** No podemos categorizar un determinado ítem por falta de información en la producción

Posteriormente, categorizamos todas las producciones del alumnado atendiendo a la fase de desarrollo en la que se encontrara la base de orientación. Una vez categorizadas las producciones, seleccionamos aquellas que mostraran ítems usados y observables que son las que nos ejemplificaban cómo el alumnado usaba la BONL en cada fase de desarrollo.

En segundo lugar, seleccionamos aquellos cuestionarios de coevaluación en los que el alumnado detallaba en la última pregunta (referente a puntos fuertes y débiles), procesos y destrezas que no aparecían en la fase actual de la BONL y que posteriormente, incluimos en la siguiente fase de desarrollo.

6 Resultados

Tal y como comentamos anteriormente, listar en formato tabla las diferentes fases de desarrollo de la BONL (cuadro 3)[6] nos permite, por un lado, organizar los ítems de manera clara y ordenada y por otro lado, analizar los cambios y modificaciones de las distintas destrezas y procesos en relación a cuatro categorías: el formato y distribución de la base, el razonamiento y la planificación del problema, el método de resolución y por último, la explicitación del proceso de resolución y revisión.

[6] El formato listado en cuadro corresponde a una necesidad comparativa, recordamos que la BONL mantiene su formato original en árbol ramificado.

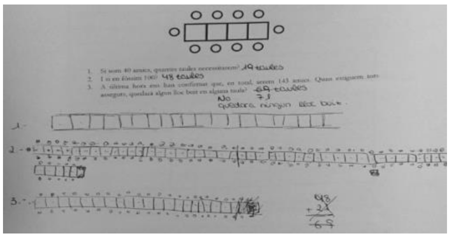
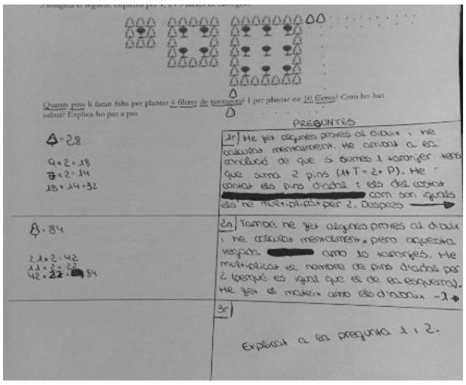
	Ítems fase 1	**Ítems fase 2**		**Ítems fase 3**
Entender	Leer las veces que haga falta	Leer las veces que haga falta		Leo las veces que haga falta
	Sacar del enunciado lo que me distrae	Sacar del enunciado lo que me distrae		Quito del enunciado lo que me distrae
	Coger los datos importantes	Coger los datos importantes		Selecciono los datos importantes
	Coger la pregunta	Coger la pregunta		Selecciono la pregunta
		Dibujar para entender		Dibujo para entender (si hace falta) y miro el dibujo de diferentes maneras (horizontal, vertical y entero)
				Organizo mentalmente la hoja (croquis)
				Hago pruebas
Razonar y resolver	Analizar y mirar con cuidado el problema	Analizar y mirar con cuidado el problema	**Razonar**	Reviso paso a paso antes de pasar al siguiente
	Razonar qué tengo que hacer	Razonar qué tengo que hacer		Razono qué tengo que hacer a partir de las pruebas que he hecho
	Hacer lo que me pide el problema	Hacer lo que me pide el problema		Busco un camino fácil o rápido para llegar a la solución
		Hacer cálculo mental	**Resolver**	Calculo mentalmente
		Dibujar para resolver		Explico el camino que he elegido para resolver el problema
				Explico las operaciones y dibujos
				Dibujo para resolver (si lo necesito)
Revisar	Revisar los datos del enunciado	Revisar los datos del enunciado		Reviso los datos del enunciado
	Revisar las operaciones	Revisar las operaciones		Reviso las operaciones
	Revisar la respuesta	Revisar la respuesta		Reviso la respuesta y la marco en otro color, con un recuadro o círculo
	Volver a leer el enunciado y lo que yo he hecho	Volver a leer el enunciado y lo que yo he hecho		Vuelvo a leer el enunciado y lo que yo he hecho
		Dibujar para revisar		Dibujo para revisar y corroborar el proceso y la solución y miro que el dibujo continúe igual que el del enunciado
				Reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso

Cuadro 3 – Comparativa de las tres fases de desarrollo de la BONL elaborada por el grupo clase
Fuente: Elaboración propia

6.1 El formato y la distribución de la base

El primer aspecto que queremos destacar es la conjugación verbal usada por el alumnado. En las dos primeras fases, el alumnado usa los verbos en indicativo y la fase 3, la conjugación verbal cambia a presente. Por otro lado, también observamos que los verbos de acción usados en un lenguaje más coloquial – sacar o coger – cambian en la fase 3 a favor de verbos más específicos como quitar o seleccionar.

El segundo aspecto destacable entre las diferentes fases es la división que experimentan los procesos razonar y resolver en la fase 3. Inicialmente, el alumnado concebía ambos procesos como uno solo. En la fase 1 observamos que los ítems incluidos en estos procesos son muy generales: analizar, razonar y hacer lo que me pide el problema. En la fase 2, se añaden destrezas matemáticas tales como hacer cálculo mental y dibujar, puesto que son las que el alumnado usa habitualmente. En la fase 3, observamos cómo los procesos revisar, razonar y buscar un camino, se diferencian de las destrezas referentes a ejecuciones concretas durante la resolución como: calcular mentalmente, explicar el camino elegido y las operaciones, y dibujar si lo necesitan. En el cuadro 4 mostramos la resolución del problema 1 (cuadro 4 - superior) y del problema 4 (cuadro 4 – inferior) de una misma alumna donde se aprecia la necesidad de dividir las fases razonar y resolver en la fase 3. Observamos que en el primer problema la alumna no verbaliza ningún tipo de planificación, simplemente, amplia el dibujo propuesto y realiza un recuento de mesas. En cambio, en el problema 4 la alumna explicita por escrito cómo ha planificado su resolución y cuál es la conclusión que obtiene al observar y analizar el dibujo antes de proceder a su resolución. Así pues, en el primer problema la alumna concibe las fases razonar y resolver como un único momento mientras que en el cuarto problema se aprecia una distinción clara del razonamiento o planificación respecto a la resolución en sí misma, hecho que se corresponde con la fase 3 de la base.

Interpretación: La alumna dibuja las mesas hasta llegar a 40 y 100 comensales respectivamente.	
[Para el caso de 4 hileras] He hecho algunas pruebas en el dibujo i he calculado mentalmente. He llegado a la conclusión de que si sumas 1 naranjo tienes la suma de dos pinos (1T = 2P) [encuentra la relación dos pinos por naranjo]. He contado los pinos de arriba y los de los lados y como son iguales [forma cuadrada] lo he multiplicado por dos [realiza dos operaciones, 7x2 y 9x2 y las suma]. [Para el caso de 10 hileras] También he hecho algunas pruebas en el dibujo y he calculado mentalmente pero esta vez con 10 naranjos [hileras]. He multiplicado el número de pinos de arriba por 2 porque es igual que el de la izquierda [se refiere al otro ejemplo elaborado]. He hecho lo mismo con los de abajo [realiza tres operaciones 21x2 y 11x2 + 11x2 y suma todos los resultados].	

Cuadro 4 – Problema 1 y problema 4 resueltos por la misma alumna
Fuente: Elaboración propia

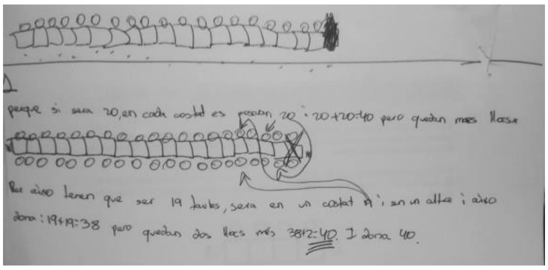
6.2 El razonamiento y la planificación del problema

Dentro de los procesos razonar y resolver de la fase 3, hay dos ítems que merece la pena destacar. El primero de ellos es el ítem *razono qué tengo que hacer a partir de las pruebas que he hecho.* Encontramos que en el primer y segundo problema que resolvió el alumnado, la planificación de la acción o la fase razonar, aunque aparece en la base de orientación, era prácticamente inexistente en las resoluciones escritas. El alumnado tiende a resolver directamente el problema ampliando el dibujo propuesto como hemos observado en el cuadro 4 (superior). En el primer problema, sólo 1 alumno de los 25 del grupo lo resuelve usando la aritmética. En el cuatro problema, en el cual la base de orientación se encontraba en la fase 3, 17 de los 25 alumnos planifican qué deben hacer para proceder a resolver el problema aritméticamente. Este hecho nos muestra que las pruebas a las que se refiere el alumnado en la fase 3 de la base de orientación, promueven que planifiquen con antelación el método más eficaz que los lleva a desarrollar el ítem *busco un camino fácil o rápido para llegar a la solución*.

6.3 El método de resolución

En segundo ítem que merece la pena destacar es el referente al dibujo. En la fase 1 de la BONL, no aparece el ítem *dibujar para resolver,* aunque 24 de los 25 alumnos usan el dibujo como método de resolución. La ausencia de este ítem nos muestra que el alumnado no concibe el dibujo como método de resolución al no estar familiarizado con la tipología de problemas que se les presenta (VILLALONGA; DEULOFEU, 2015). Posteriormente, en la fase 2, el ítem referente al dibujo aparece en indicativo – puesto que el alumnado ya lo ha usado en dos problemas como método de resolución –. El cambio más evidente se produce en la fase 3, donde aparece el condicional *dibujo para resolver (si lo necesito).* Este hecho se produce porque el dibujo está estrechamente relacionado con el ítem *busco un camino fácil o rápido para llegar a la solución.* El alumnado percibe que la resolución aritmética es más efectiva, rápida y eficaz que la ampliación del dibujo – que en muchos de los casos, es una ardua tarea, compleja y temporalmente costosa –. Como hemos comentado anteriormente, el uso del dibujo disminuye a medida que aumenta la familiarización del alumnado con los problemas de lógica y patrones matemáticos.

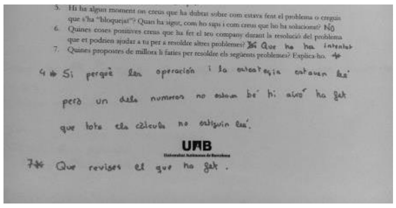
En el momento en el que aparecen los métodos aritméticos, el ítem referente al dibujo queda en un plano condicional sólo siendo usado en aquellos casos en los que el alumno no encuentra otro método de resolución más *fácil o rápido.* Además, observamos que el dibujo ya no sólo aparece en la fase de resolución, también aparece en la fase de comprensión y de revisión dado que el alumnado usa el dibujo para comprender el enunciado, para resolver el problema o para revisar la solución de otro modo (cuadro 5).

Interpretación: El alumno usa el dibujo para revisar el problema. Realiza un dibujo explicativo de los cálculos aritméticos que ha realizado. Traducción: Si fuesen 20 en cada lado se pondrían 20 personas (20+20=40) pero quedan más sitios [señala con asteriscos las puntas de las mesas] por eso tienen que ser 19 mesas.	

Cuadro 5 – Uso del dibujo en la fase de revisión
Fuente: Elaboración propia

6.4 La explicitación del proceso de resolución y revisión

Por último, cabe destacar que en las fases 1 y 2 no aparece ningún ítem en referencia a la calidad de la explicación del problema. En cambio, en la fase 3, aparecen cinco ítems en relación con la revisión y detalle del proceso de resolución que se derivan de las respuestas que el alumnado dio en la última pregunta del cuestionario de coevaluación. El alumnado expresa puntos de mejora como la organización, la presentación o la revisión (cuadro 6) dando lugar a la aparición de los ítems: *organizo mentalmente la hoja (croquis*), *explico el camino que he elegido para resolver el problema, explico las operaciones y dibujos, reviso la respuesta y la marco en otro color con un recuadro o círculo y reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso.*

Traducción (P: pregunta; R: respuesta) P7: ¿Qué propuestas de mejora le harías para resolver los siguientes problemas? Explícalas R7: Que revise lo que ha hecho	

Cuadro 6 – Propuestas de mejora explicitadas en los cuestionarios de coevaluación
Fuente: Elaboración propia

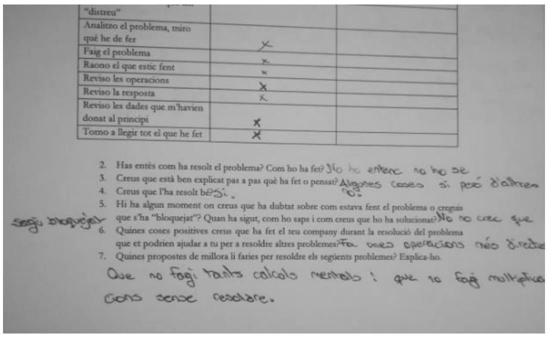
Encontramos que, generalmente, los alumnos expresan no comprender cómo el compañero ha resuelto el problema. A su vez, verbalizan sentirse perdidos durante la resolución a causa de no saber qué está pensando su compañero a medida que avanza en la resolución (cuadro 7). De ahí la aparición de ítems arraigados al detalle y la verbalización del proceso y no sólo de la solución final.

<table>
<tr>
<td>Traducción (P: pregunta; R: respuesta)

P1: ¿Has entendido como ha resuelto el problema? R1: No entiendo, no sé cómo lo ha hecho

P2: ¿Crees que está bien explicado paso a paso que ha hecho o pensado? R2: Algunas cosas las entiendo y otras no

P7: ¿Qué propuestas de mejora le harías para resolver los siguientes problemas? Explícalas

R7: Que no haga tantos cálculos mentales y que no haga multiplicaciones sin resolver</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

Cuadro 7 – Dificultades de comprensión expresadas en el cuestionario de coevaluación
Fuente: Elaboración propia

7 Conclusiones

Al inicio del estudio, nos planteamos como objetivo: describir y comparar las distintas fases de desarrollo de una base de orientación no lineal desarrollada por un grupo clase de sexto de primaria. Una vez realizada la descripción y comparación, nos parece relevante discutir qué apreciación merecen los resultados.

En cuanto al formato y distribución de la base, hemos observado en primer lugar, cambios sustanciales en cuanto al uso y terminología del vocabulario y conjugación verbal. Estos cambios nos muestran que a medida que el alumnado usa y evalúa la base de orientación no lineal, ésta toma significado para ellos (GARCÍA; SANMARTÍ, 1998). Al hacerla cada vez más propia, deciden cambiar la conjugación y uso de los verbos puesto que les ayuda a sentirse más identificados durante sus resoluciones. En segundo lugar, atendiendo al razonamiento y la planificación del problema, la división que experimentan las fases razonar y resolver en la fase 3 nos muestra una toma de consciencia sobre el proceso de planificación que no suele darse en resolutores noveles (SCHOENFELD, 1992). El alumnado toma consciencia de la importancia del proceso de autorregulación (SCHOENFELD, 1989) y diferencia los procedimientos que puede realizar antes de ejecutar el método de resolución; como realizar probaturas o valorar qué camino le parece más fácil o rápido antes de ejecutarlo.

En cuanto a la explicitación del proceso de resolución y revisión, encontramos que los cuestionarios de coevaluación son los instrumentos que han potenciado la aparición de los cinco ítems referidos a la explicación y revisión del proceso (SANMARTÍ, 2019). Como comentamos en el apartado de diseño y método del estudio, el grupo clase participante no trabaja habitualmente la resolución de problemas matemáticos ni la coevaluación en el aula. Al trabajar en base a ejercicios, el alumnado no suele redactar ni explicitar detalladamente un proceso complejo como es la resolución de un problema. Este hecho dificultó en los dos primeros problemas las coevaluaciones, puesto que en gran parte de los casos el alumnado no escribía cómo resolvía el problema y por lo tanto, el compañero no comprendía ni el proceso, ni el método, ni la justificación del resultado final. En el tercer y cuarto problema, el alumnado ya conocía la mecánica a seguir en la coevaluación y tomó consciencia de la importancia de explicitar detalladamente las destrezas y procesos durante la resolución. En la fase de desarrollo final, aparece el ítem *reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso*. Este ítem nos muestra la concepción final que tiene el alumnado del proceso de resolución, donde no sólo son explícitas las destrezas matemáticamente relevantes que realiza durante el proceso, sino también los procesos que tiene a nivel mental para justificar dichos pasos (GODINO; LINARES, 2000).

En cuanto al método de resolución, observamos una evolución evidente entre el primer y último problema. Tal y como hemos mencionado en el apartado de resultados, el método de resolución general en el primer problema era la ampliación del dibujo propuesto (DEULOFEU; VILLALONGA, 2018). En cambio, en el último problema, observamos hasta tres métodos aritméticos distintos, más rápidos y eficaces dado el contexto de los problemas propuestos. Este hecho muestra un aprendizaje dentro del proceso de resolución de problemas de patrones matemáticos y además, nos indica que la coevaluación actúa como instrumento efectivo para compartir distintos métodos de resolución y no sólo como apoyo a la modificación de la base de orientación no lineal (SANMARTÍ, 2010).

A modo de cierre, señalamos que la base de orientación no lineal no sólo salva la linealidad establecida por la base de orientación de la acción (VILLALONGA; DEULOFEU, 2017) sino que también actúa como instrumento de autorregulación potenciando que el alumnado estructure y verbalice procesos de resolución matemática y metacognitivamente complejos.

Agradecimientos

Agradecemos a los grupos de sexto de primaria del centro les Corts de Barcelona, así como a la dirección y respectivos docentes, su colaboración en el presente estudio.

Referencias

ARTZ, A. F.; ARMOUR-THOMAS, E. Development of a cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. **Cognition and instruction**, v.9, n.2, p. 137-175, 1992.

CALLAHAN, L.G. Research report: Metacognition and school mathematics. **Arithmetic Teacher**, v.34, n.9, p. 22-23, 1987.

CALLEJO, M. L.; ZAPATERA, A. Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. **Bolema: Boletim Educação Matemática,** v.28, n.48, p. 64-88, 2014.

CAMPANARIO, J. M.; OTERO, J. Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de Ciencias. **Enseñanza de las ciencias**, v.18, n.2, p. 155-169, 2000.

CAVANAUGH, J. C.; PERLMUTTER, M. Metamemory: A critical examination. **Child development**, v.53, p. 11-28, 1982.

CLARKE, D. The Problems of the Problem Solving Classroom. **Australian Mathematics Teacher**, v. 45, n.3, p. 20-24, 1989.

DEULOFEU, J.; VILLALONGA, J. Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. **Educatio Siglo XXI**, v. 36, n.3, p. 153-176, 2018.

DORUK, M.; DURAN, M.; KAPLAN, A. Assessment of the Effect of Argumentation-Based Probability Education on Mathematical Metacognition Awareness and Probabilistic Reasoning Skills of Middle School Students. **Necatibey Faculty of**

Education Electronic Journal of Science & Mathematics Education, v.12, n.1, p. 83-121, 2018.

FLAVELL, G. H. Metacognition and Cognitive Monitoring: A new area of psychological inquiry, **American Psychologist**, v.34, n.10, p. 906-911, 1979.

GARCÍA, P.; SANMARTÍ, N. Las bases de orientación: un instrumento para enseñar a pensar teóricamente en biología. **Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales**, n.16, p. 8-20, 1998.

GODINO, J. D.; LLINARES, S. El interaccionismo simbólico en educación matemática. **Educación matemática**, v.12, n.1, p. 70-92, 2000.

GRUGNETTI, L.; JAQUET, F. A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. **The Journal of Mathematical Behavior**, v.12, n. 3-4, p. 373-384, 2005.

JORBA, J.; SANMARTÍ, N**. Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación contínua: Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas**. Madrid: Ministerio de Educación, 1996.

JORBA, J.; SANMARTÍ, N. La función pedagógica de la evaluación. En PARCERISA, A.; ROVIRA, M. (Eds.) **Evaluación como ayuda al aprendizaje.** Barcelona, España: GRAÓ, 2004, p. 21-44.

LESTER, F. K.; GAROFALO, J.; KROLL, D. L. The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Sever. Classes. Final Report. Washington: Indiana: Univ., Bloomington. Mathematics Education Development Center. National Science Foundation, 1989.

MAYER, R. E. Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. En SILVER, E. A. (Ed.) **Teaching and learning mathematical problem solving**. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, 1985, p. 123–145.

NUNZIATI, G. Les objectifs d'une formation à/par l'évaluation formatrice. **Les cahiers pédagogiques**, n. 280, p. 47-65, 1990.

PÓLYA, G. **How to solve it.** Princeton: Princeton University Press, 1945.

PUIG, L. **Elementos de resolución de problemas.** Granada: Comares, 1996.

SANMARTÍ, N. **Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències**. Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Básica i el Batxillerat, 2010.

SANMARTÍ, N. **Avaluar y aprendre, un únic procés.** Barcelona: Octaedro, 2019.

SCHOENFELD, A. H. Teaching mathematical thinking and problem solving. En RESNICK, L.B.; KLOPFER, B.L. (Eds.) **Toward the thinking curriculum: Current cognitive research.** Association for Supervision and Curriculum Development: Washington D.C., 1989, p. 83-103.

SCHOENFELD, A. H. Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-making Mathematics. En GROUWS, D. (Ed.) **Research on Mathematics Teaching and Learning.** Macmillan: New York, 1992, p. 334-370.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. **ZDM**, v.39, n.5-6, p. 537-551, 2007.

SCHRAW, G.; DENNISON, R. S. Assessing metacognitive awareness. **Contemporary educational psychology**, v.19, n.4, p. 460-475, 1994.

TALÍZINA, N. **Psicología de la enseñanza**. Progreso: Moscú, 1988.

TORREGROSA, A.; DEULOFEU, J.; ALBARRACÍN, L. Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. **Educación matemática.** En prensa; 2020.

TORREGROSA, A., ALBARRACÍN, L., DEULOFEU, J. Estadios evolutivos de una base de orientación no lineal. **19 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2019.** FESPM, AGAPEMA: A Coruña. España. En prensa; 2020.

VILLALONGA, J.; DEULOFEU, J. La base de orientación en la resolución de problemas. En FESPM, SEMRM (Eds.) **Actas JAEM 2015. 17 Jornadas para el**

aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Pedro Ángel Sánchez Martínez, S.L.U: Cartagena. España, v.17, 2015, p. 36.

VILLALONGA, J.; DEULOFEU, J. La base de orientación en la resolución de problemas: "Cuando me bloqueo o me equivoco". **REDIMAT,** v.6, n.3, p. 256-282, 2017.

WILSON, J.; CLARKE, D. Towards the modelling of mathematical metacognition. **Mathematics Education Research Journal,** v.16, n.2, p. 25-48, 2004.

5.3 Publicación 3

La referencia de la publicación 3 transcrita en este apartado es la siguiente:

Torregrosa, A. (2020). La base de orientación no lineal: estudio de tres grupos clase ante un ante un mismo ciclo de resolución de problemas de patrones. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, *104*, 7-23.

El presente artículo pretende responder al tercer objetivo de la presente tesis doctoral descrito en el apartado 2: *"Caracterizar la naturaleza de una base de orientación no lineal elaborada por tres grupos de alumnos distintos ante un mismo ciclo de resolución de problemas"*.

La base de orientación no lineal: estudio de tres grupos clase ante un mismo ciclo de resolución de problemas de patrones

Alba Torregrosa
Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen: El presente estudio toma como objetivo caracterizar y comparar la última fase de desarrollo de una Base de Orientación No Lineal elaborada por tres grupos de sexto de educación primaria. Mostramos a nivel teórico, el proceso de justificación, creación y evaluación de la base de orientación no lineal, así como las destrezas y procesos metacognitivos que en ella aparecen. Se realiza un análisis cualitativo de las tres bases elaboradas atendiendo a su naturaleza matemática y a su dependencia del contenido matemático. Los resultados muestran que las bases elaboradas por los tres grupos contienen abundantes procesos metacognitivos de carácter genérico.

Palabras clave: Base de orientación no lineal, educación primaria, problemas de patrones, evaluación.

The non-linear orientation base: study of three class groups before the same pattern problem solving cycle

Abstract: This study aims to characterize and compare the last phase of development of a Non-Linear Orientation Base created by three groups of sixth graders. At the theoretical level, we show the process of justification, creation and evaluation of the non-linear orientation base, as well as the skills and metacognitive processes that appear in it. A qualitative analysis is made of the three bases elaborated, according to their mathematical nature and their dependence on the mathematical content. The results show that the bases elaborated by the three groups contain numerous metacognitive processes of generic character.

Keywords: Non-linear orientation base, primary education, pattern problems, assessment.

1. INTRODUCCIÓN

La competencia matemática, dentro del currículo catalán, está dividida en cuatro dimensiones: resolución de problemas, conexiones, razonamiento y prueba, y comunicación y representación (Departament d'Ensenyament, 2016). Seleccionar problemas no rutinarios permite al alumnado conectar dichas dimensiones y trabajarlas de manera transversal. Un problema no rutinario es una actividad contextualizada en la cual el resolutor se enfrenta a una situación para la que no conoce una respuesta inmediata y por lo tanto, no puede aplicar un algoritmo directo a partir de los datos seleccionados. Para resolver el problema, se requiere de un proceso reflexivo de toma de decisiones, con la finalidad de seleccionar y desarrollar eficazmente la estrategia y/o método a seguir (Mayer, 1985). La complejidad de trabajar dichos problemas con el alumnado reside en dos aspectos principales. En primer lugar, cómo el docente escoge y dinamiza los problemas en el aula. En segundo lugar, cómo el alumnado al resolver el problema, desarrolla y evalúa el desempeño en las dimensiones matemáticas y por ende, la competencia matemática en toda su complejidad. Es en este último aspecto donde enfocaremos el presente trabajo.

Entre los seis y los doce años, cuando el alumnado se enfrenta a la resolución de un problema "de lápiz y papel", encontramos poco orden en el proceso de resolución, falta de planificación y estructuración, así como abundante lenguaje matemático que no se explica, justifica, ni argumenta (Villalonga y Deulofeu, 2015). Gran parte del alumnado tiende a leer el enunciado, escoger la primera estrategia o método que le viene en mente, desarrollarlo y escribir la respuesta. Dentro de este proceso, encontramos producciones desordenadas, desestructuradas y con un vago proceso de reflexión, revisión y verbalización del pensamiento y la acción.

En el presente estudio exponemos y justificamos un instrumento llamado base de orientación no lineal (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, en prensa) que se ha mostrado efectivo ante las problemáticas antes expuestas. El estudio se divide en una primera parte teórica donde mostramos el proceso de creación, desarrollo y justificación de la base de orientación no lineal, y en una segunda parte donde mostramos tres bases de orientación desarrolladas por tres grupos de alumnos distintos al trabajar el mismo ciclo de resolución de problemas.

2. LA BASE DE ORIENTACIÓN NO LINEAL

Justificación del instrumento y características generales

La base de orientación no lineal es un instrumento de autorregulación matemática creado y desarrollado por Torregrosa, Deulofeu, Albarracín (en prensa) que parte de las directrices de la base de orientación de la acción de Jorba y Sanmartí (1996). La base de orientación no lineal (BONL a partir de este momento) pretende ser una guía de orientación que incluye destrezas matemáticas y procesos metacognitivos que el alumnado puede usar al resolver un problema. Cuando nos referimos a destrezas matemáticas, nos referimos a productos cognitivos, es decir, conceptos y procedimientos matemáticos que el alumnado ha aprendido en su educación obligatoria, como pueden ser los algoritmos de operaciones básicas, los procedimientos de construcción geométrica o las definiciones matemáticas (Puig, 1996). Cuando nos referimos a procesos metacognitivos, hablamos de aquellas acciones de regulación, evaluación y monitoreo que desarrolla un resolutor ante un problema matemático (Clarke, 1989).

Así pues, cuando el alumnado se enfrenta a la resolución de un problema matemático, usa y desarrolla tanto procesos cognitivos como metacognitivos. La línea que separa los términos cognición y metacognición es sumamente fina. La mayoría de procesos mentales que desarrollamos, son de carácter metacognitivo pero necesitamos de los procesos cognitivos para que se produzcan. Para ejemplificar la diferenciación entre un proceso cognitivo y uno metacognitivo, usaremos una situación ficticia; Paula se encuentra resolviendo ejercicios de matemáticas y se le plantea el siguiente enunciado: *He construido con mi hermano 4 torres de cubos y cada torre tiene 3 pisos. Cuando apile las torres, ¿Cuántos pisos tendré en total?* Posiblemente, si Paula ha aprendido las tablas de multiplicar, use el producto 4 x 3 para resolver el ejercicio. Que Paula retenga en su memoria a largo plazo el producto 4 x 3 = 12, es una destreza matemática y por lo tanto, un proceso cognitivo. Que Paula comprenda que tiene cuatro torres y que como cada torre tiene el mismo número de piezas, puede realizar el producto 4 x 3, es un proceso metacognitivo ya que está regulando, monitoreando y evaluando la situación que se le plantea.

La BONL difiere de la base de orientación de la acción de Jorba y Sanmartí (1996) en dos aspectos principales. En primer lugar, la base de orientación de la acción, se crea en un contexto de procedimientos teóricos y prácticos de la ciencia y la matemática tales como la construcción de una mediatriz, la caracterización de un ser vivo o la construcción de un gráfico de barras (figura 1). En cambio, la BONL se crea y aplica en la resolución de problemas matemáticos tal y como los hemos descrito anteriormente (Mayer, 1989). En segundo lugar, la BONL, tal y como su propio nombre indica, tiene un carácter no lineal, es decir, no se presenta en un formato listado paso a paso, sino que tiene un formato de árbol ramificado, dado que el proceso de resolución de un problema no es en ningún caso lineal. Este formato propicia que el alumnado no tome los pasos de la BONL como una receta o un guion que se debe seguir del paso inicial al paso final, sino que puede hacer uso de las destrezas y procesos metacognitivos a su placer usando ítems presentes en una fase de resolución o en otra (Pólya, 1945).

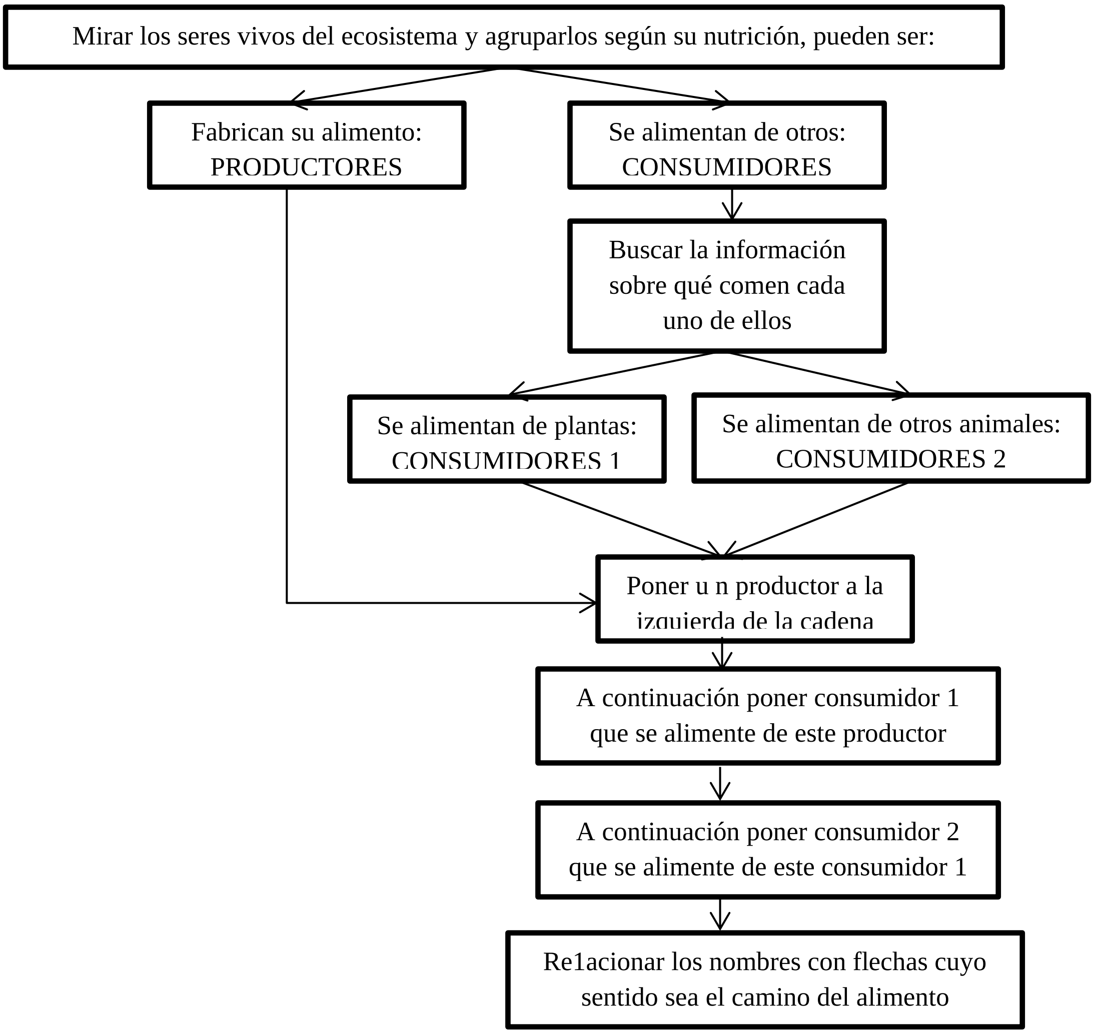


Figura 1. Base de orientación de la acción; construir una cadena trófica (García y Sanmartí, 1998, p. 12)

Construcción de una base de orientación no lineal

Como hemos comentado anteriormente, la base de orientación no lineal es un instrumento de autorregulación matemática (De Corte y Verschaffel, 2003) que tiene como objetivo orientar al alumnado en el proceso de resolución de un problema. Para que dicho instrumento tenga sentido para el alumnado, es de suma importancia que sea él mismo quien lo construya (Sanmartí, 2010). Estudios anteriores (Jorba y Sanmartí, 1996) han mostrado que las bases de orientación más efectivas son aquellas que el alumnado construye, evalúa, aplica y reconstruye al trabajar en actividades de un mismo contenido. Así pues, la primera premisa que debemos tener en cuenta, es que el instrumento debe ser construido por el alumnado con la supervisión del docente.

Para iniciar la construcción de una base de orientación no lineal, se recomienda que el alumnado resuelva un primer problema matemático, que le servirá como referente del contenido que aparecerá en la base (Villalonga y Deulofeu, 2017). A continuación, debemos tener en cuenta cómo validamos la utilidad y rigurosidad matemática de la base que estamos creando. Recordemos que la base de orientación no lineal no es un instrumento que se crea y permanece inmutable, sino que evoluciona a medida que el conocimiento del alumnado y su uso también evolucionan. En cualquier caso, el modo en el que evaluamos la construcción y desarrollo de la BONL nos servirá tanto para saber qué grado de apropiación del instrumento tiene el alumnado, como para validar su rigor científico. La evaluación formadora (Sanmartí, 2010) es uno de los métodos más efectivos para evaluar el uso de la base de orientación no lineal, ya que es el propio alumno quien realiza dicha evaluación. Dentro de la evaluación formadora, encontramos la autoevaluación y la coevaluación que son herramientas muy efectivas para autorregular la competencia matemática, e incluso lo son más aún si ante un mismo problema, se realizan las dos (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, en prensa).

Al construir cuestionarios de autoevaluación y coevaluación, debemos tener en cuenta la edad del alumnado. En los primeros cursos de educación primaria, recomendamos escalas numéricas de satisfacción, pictogramas, dianas, o bien, selección de ítems en formato rúbrica (Cano, 2015). En los últimos cursos de educación primaria, los formularios escritos sirven al alumnado, y al propio profesorado, como fuente de información, de detección de puntos de mejora y de visibilización de los procesos metacognitivos. Al construir dichos cuestionarios, debemos tener en cuenta que tienen como objetivo observar qué destrezas matemáticas y procesos metacognitivos ha llevado a cabo el alumnado en las distintas fases del problema, que no aparecen en sus producciones escritas y/o en la conversación en gran grupo. Así pues, las preguntas que se formulan deben perseguir dicha finalidad (tabla 1).

Tabla 1. Ejemplificación de las preguntas en el cuestionario de autoevaluación (elaboración propia)

PREGUNTA	JUSTIFICACIÓN
Imagina que tienes que explicar a un compañero de cuarto de primaria el problema que acabas de resolver. Él no ha visto el problema ni sabe de qué trata. Explícale que te pedía el problema y qué pasos has seguido desde el inicio al final para resolverlo	Abstracción de las destrezas y procesos generales ha llevado a cabo el alumnado que no aparecen en las producciones escritas

Cuando has terminado de leer el problema por primera vez, ¿qué es lo primero que has pensado que podrías hacer para resolverlo? Basta que cuentes la primera idea que se te ha ocurrido.	Abstracción de los ítems referentes a la fase de planificación
Mientras resolvías el problema, ¿ha habido algún momento en que has cambiado la manera en la que la estabas resolviendo? ¿En qué momento ha sido y porque has cambiado lo que habías pensado al principio?	Abstracción de los ítems referentes a la fase de planificación entorno la regulación y monitoreo metacognitivo
¿Qué conocimientos de matemáticas crees que has utilizado para resolver el problema?	Abstracción de los ítems referentes a la fase de aplicación del plan
¿Crees que has revisado el problema mientras el estabas haciendo, cuando has terminado o en todo momento? ¿Qué es lo que has revisado? (Las operaciones, los dibujos, el enunciado, lo que has escrito...). Cuéntalo.	Abstracción de los ítems referentes a la fase de revisión

Una vez el alumnado ha resuelto el problema, se ha comentado en gran grupo y han realizado la autoevaluación y coevaluación, se produce una lluvia de ideas en gran grupo entorno a la pregunta “qué destrezas matemáticas y procesos mentales hemos llevado a cabo al resolver el problema”. Dichas ideas deben anotarse en gran grupo y estructurase atendiendo a las fases de Pólya (1945): entender el problema, elaborar un plan de acción, ejecutar el plan de acción y revisar el proceso. En los primeros cursos de educación primaria, recomendamos que el formato escrito de la BONL esté acompañado de pictogramas y que las ideas que aparezcan sean esencialmente concretas. En cursos superiores, el formato escrito y justificado, se muestra como el más adecuado. Una vez finalizado el proceso de resolución, evaluación y lluvia de ideas, tendremos elaborada la primera fase de desarrollo de la BONL. Esta primera fase, será la que el alumnado usará para resolver el siguiente problema que se le proponga usando la base como guía de orientación y apoyo a la resolución. Una vez el alumnado termine este segundo problema y se evalúe de nuevo, se procederá a ampliar y/o modificar la base de orientación no lineal con nuevas destrezas y procesos metacognitivos que el alumnado haya llevado a cabo. De este modo, elaboraremos la segunda fase de la BONL. Este proceso debe repetirse tantas veces como el docente considere necesario atendiendo al nivel de concreción que se desee obtener en la base. Usamos el término “fase” al nombrar las modificaciones que sufre la base, puesto que dicho instrumento evoluciona a medida que el alumnado desarrolla nuevas destrezas y procesos. Por lo tanto, aparecen formatos de la base que pertenecen a un momento concreto dentro del proceso de enseñanza – aprendizaje – evaluación.

Atendiendo a la etapa educativa en la que nos encontramos, educación primaria, las bases de orientación más efectivas son aquellas de carácter específico, es decir, que contienen destrezas matemáticas y procesos metacognitivos propios de un contenido matemático concreto. A medida que el alumnado consolida la creación, evaluación y uso de la base de orientación no lineal, las bases específicas pueden ir ampliándose hasta volverse más generales, con la finalidad de abarcar problemas referentes a diversos contenidos matemáticos, así como procesos metacognitivos más complejos (figura 2).

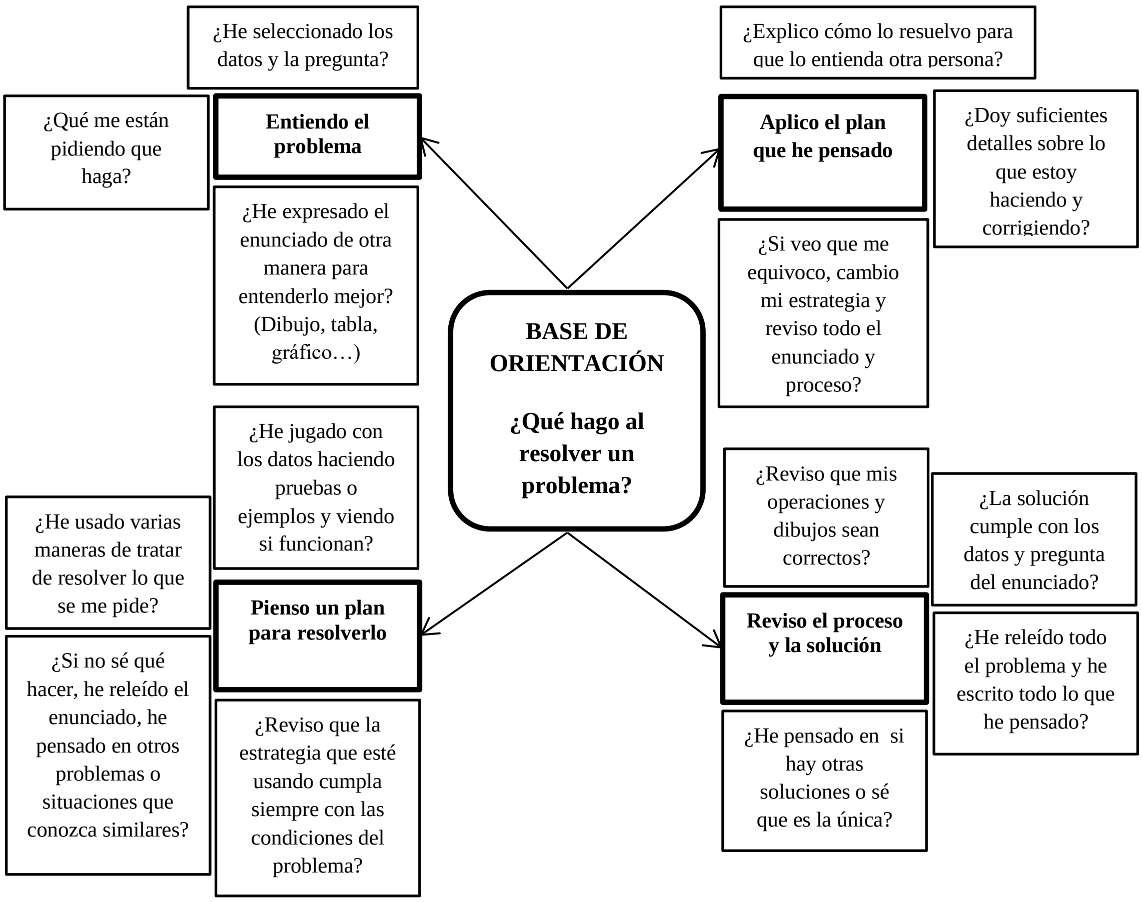


Figura 2. Ejemplificación de una base de orientación no lineal de carácter general (elaboración propia)

Al trabajar en el ámbito de resolución de problemas matemáticos, es evidente que al crear BONL específicas, aparecerán ítems que serán comunes entre las distintas bases, como, por ejemplo, seleccionar los datos relevantes, remarcar la pregunta o revisar la explicación escrita del proceso de resolución. En cambio, encontraremos ítems que serán específicos del contenido matemático, como, por ejemplo, continuar el patrón de una figura a partir del dibujo – en el caso de trabajar con problemas de patones –. Por lo tanto, el proceso óptimo para trabajar con la base de orientación no lineal es generar una primera base entorno un contenido concreto y abstraer aquellos ítems que son comunes en el ámbito de resolución de problemas, que usaremos para generar una nueva base entorno un contenido distinto (figura 3). De este modo, el alumnado mantiene ítems comunes a los distintos problemas, los cuales va traspasando de una base a la siguiente, y añade ítems específicos del contenido.

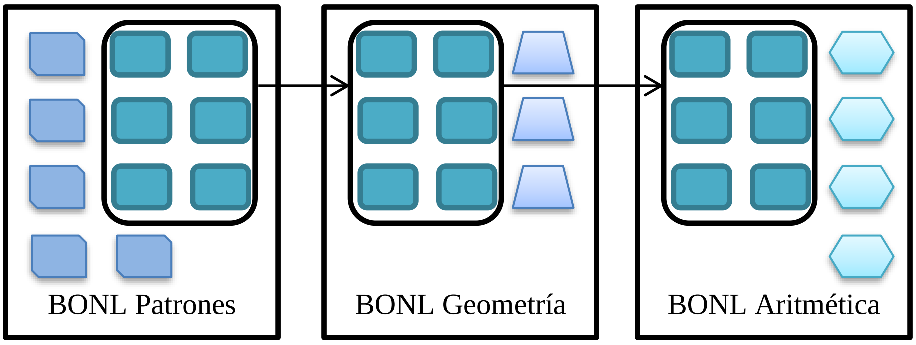


Figura 3. Distinción entre los ítems comunes y específicos de la BONL (elaboración propia)

3. OBJETIVO, DISEÑO Y MÉTODO DEL ESTUDIO

El objetivo del presente estudio es comparar y caracterizar tres bases de orientación no lineales, creadas a partir de un mismo ciclo de resolución de cuatro problemas de patrones matemáticos. Los datos del presente estudio se recogieron en tres centros del área metropolitana de Barcelona, con tres grupos de alumnos de sexto de educación primaria a los que llamaremos grupos A, B y C.

El grupo A pertenece a un centro concertado que trabaja la resolución de problemas una hora a la semana desde el curso 2017-2018. La docente elaboró una base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996) un curso antes de iniciar la recogida de datos del presente estudio. Dicha base, se entregó al alumnado para que tuviera una guía de los ítems principales que deben aparecer en las resoluciones escritas. Así pues, el alumnado conoce el instrumento base de orientación de la acción, pero nunca ha construido una base de orientación no lineal ni ha autoevaluado ni coevaluado sus producciones.

Los grupos B y C, pertenecen a un centro público que no trabaja la resolución de problemas como dimensión particular dentro del área de matemáticas. El alumnado habitualmente realiza ejercicios de matemáticas y problemas extraídos de las pruebas de competencias básicas de la Generalitat de Catalunya (Consell superior d'avaluació, 2013a). La resolución de problemas de patrones y lógica matemática, no se encuentra dentro de la tipología de problemas que trabajan. Además, no conocen el instrumento base de orientación de la acción ni por ende, la base de orientación no lineal.

Para proceder al diseño del estudio, en primer lugar, se seleccionaron cuatro problemas de lógica y patrones matemáticos que se presentarían de más sencillo a más complejo según la complejidad de hallar el patrón. Atendiendo a la extensión temporal del ciclo metodológico presentado, que tiene una duración de 8 horas por grupo, consideramos que la selección de cuatro problemas es un uso suficiente de la BONL para poder apreciar sus características básicas, así como su uso y reflexión. Todos los problemas contaban con un dibujo explicativo dentro del enunciado para facilitar la comprensión de este (Villalonga y Deulofeu, 2015). Antes de empezar cada sesión, se leía el enunciado en gran grupo y resolvíamos aquellas dudas que no afectaran al proceso de resolución. La finalidad que perseguíamos con este acto era evitar los errores o malentendidos con los conceptos implicados en el enunciado que pudieran dificultar el proceso de resolución (Mayer, 1985).

Como método de feedback de la BONL que el alumnado elaboraría entre un problema y el siguiente, creamos dos cuestionarios, uno de autoevaluación y otro de coevaluación. En la autoevaluación, se pedía al alumnado que expusiera detalladamente cómo había resuelto el problema (método o estrategia) y que indicara si en algún momento había sufrido un atasco durante el problema. Ésta pregunta responde a la necesidad de detectar posibles cambios de estrategia y visualizar, a partir de la construcción de la primera fase de la base, si los alumnos acuden a ella para solventar sus posibles dudas o bloqueos (Villalonga y Deulofeu, 2017). En la coevaluación, se pedía al alumno que detallara cómo creía que su compañero había resuelto el problema, si consideraba que su resolución era correcta y si observaba algún posible bloqueo en la producción escrita. Además, se pidió que anotasen puntos fuertes y aspectos a mejorar que pudieran ayudar al compañero en sus próximas resoluciones. A partir de la creación de la primera fase de la base de orientación no lineal (que se producía al resolver y evaluar el primer problema), añadíamos una pregunta a los cuestionarios de evaluación donde pedíamos al alumnado que indicara que ítems de la base había usado – tanto él mismo como su compañero – y si consideraba que los había usado una sola vez o más de una vez. Ésta pregunta fue formulada ante la necesidad de observar el uso de ítems referentes a procesos mentales que no se verbalizaban por escrito.

Para llevar a cabo el método expuesto que incluye resolución, evaluación y construcción/modificación de la base, se programaron un total de 4 sesiones de 2 horas de duración cada una y se siguió, con cada uno de los tres grupos clase, el mismo ciclo de resolución que observamos en la figura 4. En la primera sesión, el alumnado resolvía el primer problema propuesto y se autoevaluaba creando así la primera fase de la BONL. Esta primera fase, se usaba al resolver el segundo problema y posteriormente, el alumnado se autoevaluaba y coevaluaba de nuevo generando la segunda fase de la BONL. Este ciclo se repetía hasta llegar al último problema. Así pues, se obtenían un total de 3 fases de desarrollo.

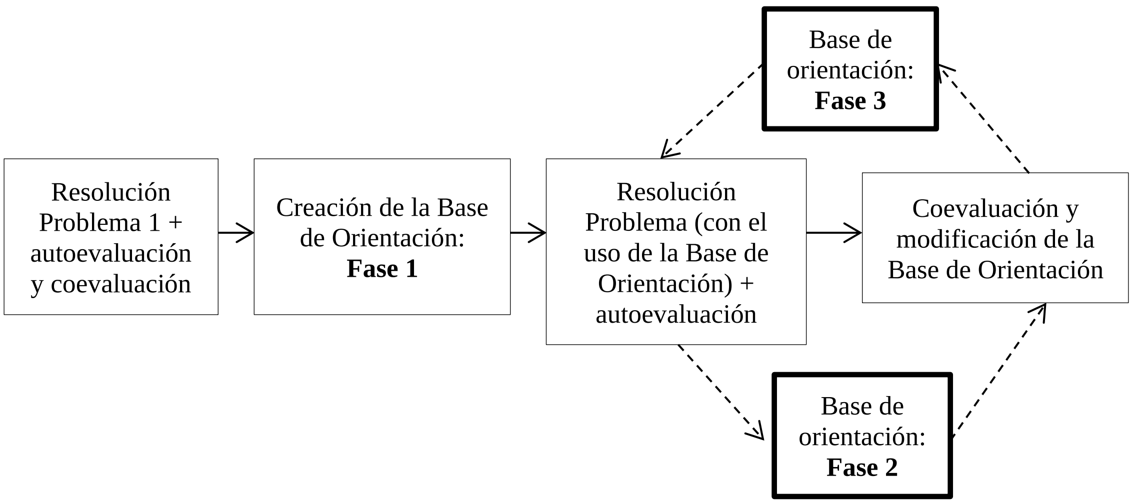


Figura 4. Ciclo metodológico llevado a cabo

4. ANÁLISIS DE DATOS

Los datos del presente estudio los conforman las tres bases de orientación no lineales elaboradas por los tres grupos clase participantes. Se ha decidido seleccionar sólo la tercera y última fase, puesto que es la más avanzada y consideramos que muestra de un modo completo las destrezas y procesos metacognitivos llevados a cabo durante todo el ciclo metodológico.

Con la finalidad de comparar y caracterizar las tres bases de orientación, se ha procedido a categorizar los ítems que pueden aparecer en las bases de dos modos distintos. El primer modo hace referencia a la distinción entre destrezas matemáticas y procesos metacognitivos tal y como se han descrito en el marco teórico. El segundo modo, hace referencia a la naturaleza matemática de estas destrezas y procesos. Se han establecido tres categorías:

a) Ítems independientes del contenido: Dichos ítems se encuentran en todas las actividades de resolución de problemas independientemente del contenido
b) Ítems específicos de problemas de patrones: Dichos ítems se encuentran específicamente en la resolución de problemas de patrones
c) Ítems dependientes del contenido: Dichos ítems pueden encontrarse en la resolución de problemas de patrones, pero pueden ser usados en otros problemas que traten distintos contenidos matemáticos

Así pues, cada ítem que aparece en la última fase de las tres BONL creadas, será categorizado atendiendo a su naturaleza matemática y a su dependencia del contenido.

4. RESULTADOS

"Un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica el tiempo a ejercitar a sus alumnos con operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si pone a prueba la curiosidad de sus alumnos, planteándoles problemas adecuados y les ayuda a resolverlos con preguntas estimulantes, podrá despertar el gusto por el pensamiento independiente, además de proporcionarles ciertos recursos".

George Pólya

Con la finalidad de mostrar los resultados de forma ordenada, se presentarán tres apartados distintos donde se mostrará la caracterización de la BONL de fase 3 para cada uno de los grupos participantes.

La caracterización de las bases se presentará en formato tabla para su mayor comprensión. Para cada uno de los ítems, se marcará con una cruz si corresponde a una destreza (D) o a un proceso metacognitivo (PM) y por otro lado, también se marcará si es independiente del contenido (IC), dependiente del contenido (DC) o específico de problemas de patrones (EC).

Caracterización de la fase 3 perteneciente al grupo A

Tal y como podemos observar en la tabla anterior, 9 de los 13 ítems que componen la base de orientación no lineal del grupo A, hacen referencia a procesos metacognitivos. En contraposición, sólo 4 de los 13 ítems hacen referencia a destrezas matemáticas. Un total de 7 de los 9 ítems referentes a procesos metacognitivos, indican que estos procesos se producen independientemente del contenido del problema. Por lo tanto, son procesos metacognitivos que pueden ser aplicados en otros contextos de resolución de

problemas sin perder su funcionalidad.

Tabla 2. Caracterización de los ítems pertenecientes a la fase 3 (Grupo A)

Fase	Ítems fase 3	D	PM	IC	DC	EC
Entender	Leer muchas veces para entender el problema		x	x		
	Leer entre líneas lo que me insinúa el problema		x	x		
	"Diseccionar" el problema		x	x		
	Coger los datos y la pregunta		x	x		
	Entender qué significa el dibujo del enunciado y buscar el patrón que sigue	x				x
Razonar y resolver	Pensar en la operación o dibujo que tengo que hacer		x		x	
	Seguir el patrón i dibujarlo	x				x
	Repasar el enunciado y palabras clave		x	x		
Revisar	Dibujar para comprobar que he hecho bien la operación o el patrón	x				x
	Revisar las operaciones		x		x	
	Rehacer las operaciones	x			x	
	Revisar que la solución tenga sentido, esté ordenada y con buena letra		x	x		
	Buscar otras maneras de resolver el problema		x	x		

En cuanto a las destrezas observadas, 3 de éstas 4 son específicas de problemas de patrones. Apreciamos que el alumnado hace referencia al dibujo o la continuación del patrón o serie como destreza básica para resolver un problema de patrones matemáticos. En contraposición, no observamos ningún ítem referente al trabajo de patrones a partir de modos aritméticos, por ejemplo, comparativa del crecimiento de la sucesión, en cada estadio, a partir de la organización de los números en formato tabla. Por lo tanto, apreciamos que el alumnado reconoce la ampliación dibujo como el método más efectivo en todas las fases del problema: entender, planificar y resolver, y revisar.

Podemos concluir que la fase 3 de la base construida por el grupo A, es una base de carácter generalmente metacognitivo, con ítems referentes al uso del dibujo como método para hallar el patrón. La BONL generada, se muestra a medio camino entre específica y general atendiendo al tipo de dependencia de algunos ítems respecto al contenido.

Caracterización de la fase 3 perteneciente al grupo B

Tal y como observamos en la tabla 3, 14 de los 20 ítems de la BONL generada por el grupo B, pertenecen a procesos metacognitivos. En contraposición, 6 de los 20 ítems pertenecen a destrezas matemáticas. Como en el caso del grupo A, dichas destrezas se relacionan con hallar el patrón mediante la ampliación del dibujo del problema, aunque observamos que el grupo B añade referencias a hallar el patrón a partir de métodos aritméticos (observar los ítems referentes a hacer pruebas con números, calcular mentalmente y operar con los números extraídos del dibujo). Es por este último motivo, que los ítems referentes al dibujo pasan a ser condicionales (sólo si se necesitan).

Tabla 3. Caracterización de los ítems pertenecientes a la fase 3 (Grupo B)

Fase	Ítems fase 3	D	PM	IC	DC	EC
Entender	Leo las veces que haga falta		x	x		
	Quito del enunciado lo que me distrae		x	x		
	Selecciono los datos importantes		x	x		
	Selecciono la pregunta		x	x		
	Dibujo para entender el patrón (si hace falta) y miro el dibujo de diferentes maneras (horizontal, vertical y entero)	x				x
	Organizo mentalmente la hoja		x	x		
	Hago pruebas	x		x		
Razonar	Razono qué tengo que hacer con las pruebas que he hecho		x	x		
	Busco un camino fácil o rápido para llegar a la solución		x	x		
	Reviso paso a paso antes de pasar al siguiente		x	x		
Resolver	Calculo mentalmente	x			x	
	Hago operaciones y las explico	x			x	
	Amplio el dibujo para resolver el problema (si lo necesito)	x				x
	Explico el camino que he elegido para resolver el problema		x	x		
Revisar	Reviso los datos del enunciado		x	x		
	Reviso las operaciones		x		x	
	Reviso la respuesta y la marco en otro color, con un recuadro o círculo		x	x		
	Vuelvo a leer el enunciado y lo que yo he hecho		x	x		
	Dibujo para revisar y corroborar el proceso y la solución y miro que el dibujo continúe igual que el del enunciado	x				x
	Reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso		x	x		

Un aspecto relevante de la BONL del grupo B es la división que experimentan las fases razonar y resolver. Inicialmente, estas dos fases se encontraban unidas pero el alumnado, a medida que resuelve los problemas propuestos, decide dividir dichas fases puesto que toma consciencia de que hay destrezas y procesos propios de la planificación que deben disgregarse del desarrollo propio del plan de acción (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, en prensa). Esta división nos muestra que el alumnado, a partir del ciclo metodológico elaborado, da especial relevancia a la planificación del problema, tal y como lo hacen los resolutores expertos (Schoenfeld, 1992).

Los procesos metacognitivos que aparecen en la base del grupo B son, de manera generalizada, aplicables a otra tipología de problemas. Por lo tanto, consideramos que el alumnado, aunque ha desarrollado una base de carácter general, hace referencias específicas a destrezas propias de los problemas de patrones, tanto a modo aritmético como a través del dibujo.

Caracterización de la fase 3 perteneciente al grupo C

Tal y como observamos en la tabla 4, 11 de los 15 ítems de la base, son referentes a procesos metacognitivos. En contraposición, 4 de los 15 ítems de la base hacen referencia a destrezas relacionadas principalmente con el dibujo. En el caso del grupo C, el alumnado reconoce que debe planificar la estrategia a seguir y ponerla en práctica. En caso de que la estrategia no surja efecto, aparece un ítem referente al cambio de estrategia. Este hecho nos muestra que el alumnado, como en el caso del grupo B, reconoce la importancia de la planificación. En este caso, el grupo C, añade importancia al cambio de estrategia al no llegar a una solución coherente con lo que pide el enunciado. Este proceso muestra una anticipación al bloqueo absoluto durante la resolución y una revisión constante del proceso llevado a cabo (Villalonga y Deulofeu, 2015).

Podemos concluir que la fase 3 de la base construida por el grupo C, es una base de carácter generalmente metacognitivo, con ítems referentes al uso del dibujo como método para hallar el patrón. La BONL generada, se muestra a medio camino entre específica y general atendiendo al tipo de dependencia de algunos ítems respecto al contexto.

Tabla 4. Caracterización de los ítems pertenecientes a la fase 3 (Grupo C)

Fase	Ítems fase 3	D	PM	IC	DC	EC
Entender	Leo las veces que haga falta		x	x		
	Quito del enunciado lo que me distrae		x	x		
	Selecciono los datos importantes		x	x		
	Selecciono la pregunta		x	x		
	Pongo los números en el dibujo del enunciado	x				x
Razonar y resolver	Analizo qué estrategia tengo que seguir		x	x		
	Hago lo que me piden con la estrategia que he elegido		x	x		
	Cambio la estrategia si la primera no me sale		x	x		
	Dibujo el patrón de la figura	x				x
	Cuento mentalmente	x			x	
Revisar	Dibujo para revisar que las operaciones “cuadren” con el dibujo del enunciado	x				x
	Reviso las operaciones		x		x	
	Reviso la respuesta		x	x		
	Reviso los datos del enunciado		x	x		
	Vuelvo a leer el enunciado y lo que he escrito		x	x		

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Una vez mostrada la caracterización de cada una de las bases en fase 3 elaboradas por cada grupo, nos parece interesante comparar, en primer lugar, tanto el formato general de dichas bases como las destrezas y procesos metacognitivos que en ellas aparecen.

En primer lugar, observamos, como punto en común, que las bases de orientación no lineales que ha generado el alumnado son de carácter genérico, pese a que el contenido del problema era específico de patrones y lógica. Este hecho nos muestra que iniciar la construcción de una BONL a partir de problemas de lógica y patrones matemáticos, puede ser un buen mecanismo para que el alumnado tome consciencia del proceso de construcción y uso de la base, puesto que este contenido no tiene especificidades y destrezas matemáticas tan definidas como podría ser la aritmética o la geometría (Torregrosa, Albarracín, Deulofeu, en prensa). Así pues, las tres bases caracterizadas se muestran como eminentemente generales y poco específicas atendiendo al contenido.

En segundo lugar, queremos resaltar que el proceso de resolución de un problema cuenta con multitud de procesos metacognitivos referentes al monitoreo, regulación y evaluación de la situación planteada (Clarke, 1989). Aproximadamente el 75% de los ítems que aparecen en las bases, hacen referencia a procesos metacognitivos que, además, pueden ser aplicados en multitud de problemas distintos. Así pues, el alumnado da suma importancia a los procesos de autorregulación del proceso (Schoenfeld, 1989) que son claves durante el proceso de resolución.

En tercer lugar, observamos que ante un mismo ciclo de resolución, alumnado de grupos y centros distintos, han elaborado bases de orientación de estructura y formato similar. Este hecho nos muestra que el alumnado tiene integradas las fases de resolución de Pólya (1945) durante la educación primaria y que, además, esta tipología de problemas les permite añadir ítems referentes a las cuatro dimensiones curriculares: resolución de problemas, conexiones, razonamiento y prueba, y comunicación y representación (Departament d'Ensenyament, 2016).

Como puntos diferenciales, observamos que la base elaborada por el grupo B, es la que presenta más detalle en los procesos metacognitivos que el alumnado ha desarrollado. Además, el uso del condicional en los ítems referentes al dibujo muestra que el alumnado ha percibido la importancia de buscar métodos aritméticos más efectivos a nivel temporal (Deulofeu y Villalonga, 2018). En el grupo C, aparece explícitamente la selección de una estrategia, así como el cambio de estrategia en caso de que la inicial no "funcione", es decir, no cumpla con los requisitos del enunciado o no desemboque en una respuesta coherente con lo que se pide. Este posible cambio de estrategia nos muestra que el alumnado revisa y autorregula su proceso en distintos momentos y no sólo al final del mismo (Sanmartí, 2010). En cuanto al grupo A, que era el único que había trabajado anteriormente con bases de orientación de la acción (García y Sanmartí, 1998), no encontramos diferencias significativamente relevantes en la BONL elaborada con respecto a los dos otros grupos de alumnos. La diferencia más significativa se halla en las producciones escritas del alumnado, ya que las resoluciones del grupo A, son más detalladas desde el primer problema, están mejor estructuradas, así como mejor planificadas.

Como conclusión final debo añadir la importancia que presenta examinar los procesos metacognitivos del alumnado durante la resolución de problemas matemáticos. Las destrezas (Puig, 1996) que el alumnado desarrolla en educación primaria son relevantes, pero sin los procesos metacognitivos (Wilson y Clarke, 2004), dichas destrezas no serían usadas eficazmente. Así pues, comprender cómo el alumnado regula y evalúa el proceso de resolución, en qué momento lo hace y cómo lo hace, potenciará que el docente pueda asesorar y orientar mejor al alumnado durante la resolución de problemas matemáticos. La base de orientación no lineal, así como la evaluación que actúa como método de feedback, ayuda al alumnado a verbalizar por escrito el proceso de regulación y evaluación, y permite, tanto al docente como al alumno, tomar consciencia del desarrollo de la competencia matemática.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a los grupos de sexto de primaria del centro les Corts de Barcelona y la escuela Sant Francesc de Sabadell, así como a la dirección de ambos centros y sus respectivos docentes, su colaboración en el presente estudio.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cano, E. (2015). Las rúbricas como instrumento de evaluación de competencias en Educación Superior: ¿Uso o abuso?. *Profesorado*, *19*(2), 265-280.

Consell superior d'avaluació (2013a). *L'avaluació de sisè d'educació primària 2013.* Quadern nº 26. Barcelona: Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya.

De Corte, E., y Verschaffel, L. (2003). El desarrollo de habilidades de autorregulación en la solución de problemas matemáticos. *Revista pensamiento educativo*, *32*, 286-305.

Departament d'Ensenyament (2016). Desplegament de les competències bàsiques. Currículum educació primària. Decret 142/2007, DOGC núm. 4915

Deulofeu, J. y Villalonga, J. (2018). Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. *Educatio Siglo XXI*, *36*(3), 153-176.

García, M., y Sanmartí, N. (1998). Las bases de orientación: un instrumento para enseñar a pensar teóricamente en biología. *Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales*, *16*, 8-20.

Jorba, J., y Sanmartí, N. (1996). *Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación contínua: Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. In Silver, E. A. (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*, 123–138. Lawrence Erlbaum: Hillsdale, NY.

Pólya, G.(1945). How to Solve it. Princeton: Princeton University Press.

Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Granada: Comares

Sanmartí, N. (2010). *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.* Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Básica i el Batxillerat.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition. En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*, 189- 215. Lawrence Erlbaum Associates. Hillsdale, NY.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. En L.B. Resnick, B.L. Klopfer (Eds.) *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research*, 83-103. Association for Supervision and Curriculum Development: Washington D.C.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-making Mathematics. Grouws, D. (Ed.), *Research on Mathematics Teaching and Learning,* 334-370, Macmillan: New York.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa). Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.*

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2019). Estadios evolutivos de una base de orientación no lineal. En *19 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2019*. A Coruña: FESPM, AGAPEMA.

Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (En prensa). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática.*

Villalonga, J., y Deulofeu, J. (2015). La base de orientación en la resolución de problemas. En FESPM, SEMRM (Eds.), *Actas JAEM 2015. 17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, 36 - 68. Pedro Ángel Sánchez Martínez, S.L.U: Cartagena, España.

Villalonga, J., y Deulofeu, J. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: "Cuando me bloqueo o me equivoco." *REDIMAT, 6(3),* 256-282.

Wilson, J., y Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 25-48.

Sección IV

6. Resumen y discusión de resultados

7. Conclusiones

6. Resumen y discusión de resultados

"La matemática es el alfabeto con el que Dios escribió el mundo"

Galileo Galilei

En la presente sección se presentan y discuten los resultados derivados de los tres artículos anteriormente presentados que se corresponden con cada uno de los objetivos señalados al inicio del presente documento.

Con la finalidad de presentar los resultados de un modo ordenado, en primer lugar, presentaremos los resultados derivados de la publicación 1 con la finalidad de discutir el uso de una base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996) como herramienta de autorregulación durante la resolución de problemas de patrones (apartado 6.1). Los resultados de esta primera publicación hacen referencia al grupo A participante en la prueba piloto del presente estudio. Posteriormente, en el apartado 6.2 discutiremos los resultados de las publicaciones 2 y 3 en las que mostramos la creación y aplicación de una base de orientación no lineal como instrumento de apoyo metacognitivo focalizándonos en el papel de la evaluación (apartado 6.2) y la naturaleza matemática de las bases generadas (apartado 6.3). Estos dos apartados de resultados hacen referencia a los grupos de los centros D y E participantes en la implementación definitiva.

6.1 La base de orientación de la acción como herramienta de autorregulación

El artículo 1 (Torregrosa, Deulofeu y Albarracín, *en prensa)* pretendía desarrollar y aplicar una base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996) durante la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos con la finalidad de observar los procesos metacognitivos que desarrolla el alumnado. Dicha observación, nos permitió analizar las potencialidades y limitaciones que presenta la base de orientación de la acción en resolución de problemas llegando a crear la base de orientación no lineal (BONL) de la que hablaremos más adelante. A continuación, explicitaremos y discutiremos las potencialidades y limitaciones observadas durante la aplicación del instrumento en resolución de problemas atendiendo a las nueve categorías metacognitivas diferenciadas en el grupo perteneciente al centro A.

En primer lugar, encontramos que el uso de la base de orientación de la acción promovió que gran parte del alumnado verbalizara exhaustivamente su proceso de resolución de inicio a fin incluyendo la descripción de procesos metacognitivos complejos (Montague, 2008). Consideramos que este hecho es de suma importancia puesto que, en resolutores noveles, la descripción explícita del proceso de resolución permite al alumnado recuperar de forma efectiva las decisiones tomadas y evitar un posible atasco o bloqueo (Villalonga y Deulofeu, 2015). En este sentido, consideramos que las categorías metacognitivas referentes a la explicitación del proceso de resolución (1), relectura y verificación (8) y adaptabilidad y regulación (9) están estrechamente vinculadas. En este sentido, los resultados mostrados en la publicación 1 señalan que el alumnado que tiende a ser exhaustivo durante la descripción del proceso de resolución y además, relee los pasos detallados en distintos momentos, son aquellos alumnos que muestran una mayor capacidad de regulación metacognitiva (Sternberg, 1998). Por lo tanto, nuestros resultados transversales muestran que la base de orientación de la acción contribuye significativamente a la autorregulación matemática durante la resolución de los problemas propuestos.

En segundo lugar, encontramos una estrecha relación entre las categorías consciencia del patrón (2) y selección de la estrategia (3). En este sentido y tal y como señalan Montenegro, Costa y Lopes (2018), el modo en que el alumnado visualiza el patrón mostrado en la imagen condiciona directamente la selección de la estrategia de resolución.

Los resultados muestran hasta tres estrategias distintas que permiten al alumnado hallar la solución al problema sin finalizar por completo la tabla ejemplificada en el enunciado. Encontramos que el alumnado justifica la selección de las tres estrategias como más rápidas atendiendo a las condiciones dadas en el problema (Maclellan, 2014). Este hecho se produce puesto que en la base de orientación de la acción que desarrolló el alumnado, incluyeron un ítem específico que hace referencia al desarrollo y justificación del plan de acción. Por lo tanto, el alumnado no sólo describió su plan de acción, sino que además, lo justificó por escrito. En este sentido, la base de orientación de la acción potencia que el alumnado ponga por escrito su toma de decisión.

Por último, queremos señalar los resultados obtenidos en torno a las categorías referentes a la planificación (7) y revisión del proceso de resolución (5). En cuanto a la planificación del problema, hallamos un grupo de alumnos que detalla las decisiones tomadas para proceder a resolver el problema. Generalmente, dichos alumnos realizan probaturas antes de proceder a ejecutar su plan de acción o bien, realizan operaciones relacionando los números de la tabla mostrada en el enunciado hasta que hallan el patrón tras la distribución de dichos números. En contraposición, encontramos otro grupo de alumnos que realiza la planificación del plan de acción de manera mental y posteriormente, sólo redacta la ejecución de dicho plan. Hemos observado que el hecho de que el alumnado redacte o no su plan de acción, se relaciona directamente con la tipología de revisión del proceso de resolución que realizan. El alumnado que tiende a redactar su plan de acción y por lo tanto, puede releerlo y revisarlo al finalizar el problema, tiende a cometer menos errores durante la ejecución del plan y por lo tanto, puede valorar tanto la adecuación de la estrategia seleccionada como la adecuación y corrección de los algoritmos aplicados.

En conclusión, nuestros resultados globales muestran que la base de orientación de la acción promueve que el alumnado redacte su proceso de resolución detalladamente, incluyendo por escrito procesos metacognitivos sumamente complejos. El alumnado que logra concebir la base de orientación en este sentido se autorregula de un modo más eficaz y por lo tanto, tiende a tener más éxito durante la resolución de los problemas propuestos. Por otro lado, el análisis de los procesos metacognitivos del alumnado nos permitió observar que la base de orientación de la acción presenta dos limitaciones principales. En primer lugar, la verbalización del proceso de resolución por parte del alumnado se suele dar en formato listado, e incluso enumerado, siguiendo el formato lineal que presenta la base de orientación de la acción. Este hecho, dificultó el uso del instrumento por parte del alumnado puesto que sus resoluciones no se desarrollan como un discurso explicativo o justificativo, más bien se asimilan a un listado de pasos realizados. En segundo lugar, el hecho de que el alumnado relacionara cada ítem específico que debía aparecer en la base con una de las fases de Pólya, rompe la dinámica de la resolución de un problema puesto que hay determinados procesos metacognitivos como pueden ser los referentes a la revisión del problema, que se dan en distintos momentos durante la resolución y no sólo al final. Estos dos aspectos derivados del análisis y caracterización de los procesos metacognitivos, fueron los que nos permitieron desarrollar la base de orientación no lineal, instrumento detallado extensamente en el apartado 3.3.2 del marco teórico.

6.2 Creación y aplicación de una base de orientación no lineal: el papel de la evaluación

Uno de los pilares esenciales durante la construcción, desarrollo y modificación de la base de orientación no lineal desarrollada por los tres grupos de alumnos pertenecientes a los centros D y E, ha sido el papel de la evaluación. La publicación 2 tomó como objetivo específico describir y comparar las tres fases de desarrollo de una base de orientación no lineal elaborada por uno de los grupos pertenecientes al centro E durante la implementación definitiva de la presente investigación. La comparativa realizada entre las tres fases de desarrollo, nos permitiría responder al segundo objetivo de la presente investigación que pretendía analizar el papel de la autoevaluación y la coevaluación como métodos de feedback durante la construcción y uso de una base de orientación no lineal. Por lo tanto, esta segunda publicación pretendía analizar qué cambios destacamos entre las distintas fases de desarrollo de una BONL que están directamente relacionados con los cuestionarios de evaluación que responde el alumnado.

Los resultados derivados de la segunda publicación nos muestran, en primer lugar, cambios sustanciales entre las tres fases de desarrollo de la base de orientación no lineal elaborada por el alumnado. En primer lugar, observamos que en las fases 1 y 2 el alumnado concebía la planificación y la ejecución del plan de acción como una sola fase de resolución. En cambio, en la fase 3 el alumnado decidió dividir las fases razonar y resolver. Observamos que este hecho se produce dado que en la última pregunta del cuestionario de coevaluación el alumnado expresa de manera general no comprender la planificación del compañero al que se está evaluando por falta de información que se produce de manera mental y no se detalla. Así pues, el alumnado destaca no comprender "qué está pensando el compañero" antes de empezar a realizar dibujos, operaciones o probaturas de distinto índole. Este hecho llevó al alumnado a diferenciar las fases de razonamiento previo a la ejecución del plan de acción, de la ejecución del mismo plan.

En segundo lugar, destacamos la selección de la estrategia que usa el alumnado entre el primer y el último problema propuestos. Mientras que, en el primer problema, sólo 1 alumno de los 25 tiende a la generalización aritmética, en el último problema 17 de los 25 alumnos resuelven el problema basándose en generalizaciones aritméticas. En relación con este hecho, observamos que en la fase 3 de la base de orientación no lineal desarrollada por el grupo, el ítem referente al dibujo como destreza de resolución aparece en condicional, "dibujo si lo necesito", mientras que en la fase 2 el ítem referente al dibujo aparecía como ítem clave "dibujar para resolver el problema". La formación de parejas heterogéneas durante las coevaluaciones propició que el alumnado compartiera y discutiera distintas estrategias de resolución anotando puntos fuertes y débiles de las mismas. Las conversaciones en gran grupo posteriores a la resolución y evaluación de los problemas propuestos fueron claves para discutir el desarrollo de las distintas estrategias seleccionadas y evaluadas por el alumnado llegando a determinar y desarrollar estrategias más complejas durante la resolución del último problema.

Por último, queremos destacar los seis ítems referentes a la revisión que encontramos en la última fase de desarrollo de la BONL. Tal y como mostramos en los resultados de la publicación 2, en los cuestionarios de coevaluación distintos alumnos tienden a señalar que sus respectivos compañeros deberían revisar mejor sus resoluciones para evitar errores tanto en sus explicaciones, como en la solución final. Este aspecto muestra la aparición de un ítem clave en la fase 3: "reviso que haya explicado con detalle lo que hago y pienso". Este ítem nos muestra que el alumnado expresa la necesidad de detallar los procesos metacognitivos complejos que se producen de manera mental para poder comprender con exactitud la resolución del compañero.

6.3 Naturaleza matemática de las bases de orientación no lineales elaboradas

La publicación 3 presentada anteriormente (Torregrosa, 2020), pretendía responder al tercer objetivo del presente estudio, a saber, caracterizar la naturaleza de una base de orientación no lineal elaborada por tres grupos de alumnos distintos ante un mismo ciclo de resolución de problemas. Cuando hablamos de la naturaleza de una base de orientación no lineal, nos referimos a la propia naturaleza matemática de los procesos y destrezas que en ella aparecen. Tal y como hemos señalado en el marco teórico del presente estudio, distinguimos inicialmente entre destrezas matemáticas (Puig, 1996) y procesos metacognitivos (Clarke, 1989). Dichas destrezas y procesos que el alumnado incluye en las distintas versiones de la base de orientación no lineal son caracterizadas posteriormente atendiendo a su relación con el contenido matemático. Así pues, podemos encontrar procesos y destrezas independientes del contenido matemático, dependientes del contenido matemático y específicos de problemas de patrones. El hecho de caracterizar las bases elaboradas por el alumnado atendiendo a la clasificación anterior, perseguía la una doble finalidad. En primer lugar, observar si el instrumento cuenta con suficientes apoyos metacognitivos que ayuden al alumnado durante su proceso de autorregulación matemática y en segundo lugar, valorar la adecuación de los problemas de patrones para elaborar una primera base de orientación no lineal con grupos de alumnos que nunca han oído hablar de dicho instrumento.

Los resultados derivados de dicha publicación nos muestran que en los tres grupos de alumnos pertenecientes a los centros D y E, un 75% de los ítems que aparecen en las bases de orientación no lineales elaboradas hacen referencia a procesos metacognitivos, mientras que el 25% de los ítems hacen referencia a destrezas matemáticas. En cuanto a los procesos metacognitivos destacados, observamos que la tendencia general es que éstos sean independientes del contenido matemático, es decir, procesos que pueden ser aplicados a otra tipología de problemas matemáticos que no sean específicamente de patrones. En cuanto a las destrezas matemáticas señaladas, encontramos que la mitad de dichas destrezas hacen referencia a procedimientos usados específicamente en problemas de patrones, mientras que la otra mitad hacen referencia a procedimientos que pueden ser usados en problemas de patrones pero que no están específicamente vinculadas a ellos.

Aunque observamos pequeñas diferenciaciones entre las bases elaboradas por los tres grupos, como puede ser su completitud o el uso de determinado vocabulario matemático concreto, las tres bases siguen la tendencia general anteriormente comentada. Este hecho nos hace observar que las bases elaboradas tienen un carácter general y por lo tanto, poco específico atendiendo al contenido de los problemas propuestos.

7 Conclusiones

Nuestra investigación tuvo como objetivo general crear, desarrollar y aplicar una base de orientación no lineal como instrumento de apoyo a la metacognición matemática en resolución de problemas de patrones. Este instrumento se fundamentó en la base de orientación de la acción de Jorba y Sanmartí (1996) y en los resultados obtenidos por Villalonga y Deulofeu (2015) derivados del uso de dicho instrumento en resolución de problemas. Con el propósito de responder a nuestro objetivo general, desarrollamos tres objetivos específicos. La respuesta al primer objetivo que pretendía identificar momentos en los que la base de orientación de la acción no se adaptara al proceso de resolución de un problema para proceder a la creación de la base de orientación no lineal, la describiremos en el apartado 7.1. El segundo objetivo que pretendía analizar el papel de la autoevaluación y la coevaluación como métodos de feedback durante la construcción y uso de la base de orientación no lineal, se responderá en el apartado 7.2. El tercer objetivo que pretendía caracterizar la naturaleza matemática de las bases elaboradas por tres grupos de alumnos distintos, será respondido en el apartado 7.3. Por último, dedicaremos una última sección, apartado 7.4., a realizar una breve comparativa entre la base de orientación de la acción y la base de orientación no lineal en términos de metacognición y autorregulación matemática.

Finalizaremos este capítulo con las aportaciones e implicaciones didácticas del estudio (apartado 7.4), las limitaciones de nuestra investigación (apartado 7.5) y las recomendaciones a futuras investigaciones (apartado 7.6).

7.1 De la base de orientación de la acción a la base de orientación no lineal

Los resultados expuestos en el apartado 6.1 derivados de la publicación 1, nos han mostrado que la base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996) presentaba distintos hándicaps al ser aplicada durante la resolución de un problema matemático. Estos hándicaps han podido ser observados gracias al análisis de los procesos metacognitivos que el alumnado desarrollaba durante la aplicación de una base de orientación de la acción en resolución de problemas. En primer lugar, expondremos las conclusiones obtenidas entorno a los aspectos positivos observados durante el uso de un instrumento de autorregulación como es la base de orientación de la acción en resolución de problemas. Posteriormente, expondremos los puntos de incongruencia que presentaba dicho instrumento y que nos llevó a la construcción de la base de orientación no lineal.

En primer lugar, el uso de la base de orientación de la acción permitió al alumnado verbalizar el proceso de resolución exhaustivamente poniendo por escrito procesos metacognitivos complejos que habitualmente, ocurren de manera mental y no se explicitan por escrito. Este hecho permite que el alumnado recupere su proceso en todo momento y evite un posible atasco o bloqueo (Villalonga y Deulofeu, 2017) puesto que puede releer y verificar su proceso de resolución. Dada la edad de los resolutores participantes en el presente estudio, la importancia de verbalizar por escrito procesos metacognitivos complejos es crucial para desarrollar una mayor capacidad de autorregulación ligada a una mayor gestión y control (Schoenfeld, 1992).

En cuanto a la construcción de la base de orientación de la acción, Jorba y Sanmartí (1996) señalan como escenario idóneo aquel en el cual el alumnado elabora su propia base para poder compartirla y discutirla con el resto de los alumnos. Dadas las limitaciones temporales del estudio, consideramos oportuno elaborar una base conjunta con cada uno de los grupos pertenecientes a los centros A, B y C. El hecho de construir la base en gran grupo ha promovido que el instrumento contemple distintas destrezas y procesos matemáticos derivados de las aportaciones que realiza cada uno de los alumnos. Así pues, la base creada por el mismo alumnado se vuelve mucho más completa permitiendo que cada alumno individualmente elija aquellos procesos y destrezas que le sean útiles en distintos momentos. Por lo tanto, aunque en la presente investigación la creación de la base de orientación de la acción no haya sido individual, consideramos que el hecho de que el alumnado comparta oralmente procesos, destrezas y estrategias de resolución hace que las bases elaboradas sigan tomando significado real para ellos.

En segundo lugar, la estructura de la base de orientación de la acción focalizada en las fases de Pólya (1945) pone en evidencia la importancia de las fases de planificación y revisión. El hecho de que el alumnado novel planifique su resolución es una de las tareas más costosas en el campo de la resolución de problemas (Schoenfeld, 1987) puesto que el alumnado tiende a fusionar la planificación de la resolución con la ejecución del plan de acción sin diferenciar hechos característicos de ambas fases. La base de orientación de la acción en resolución de problemas cuenta con un apartado específico dedicado a la planificación en el que se hacen explícitos procesos y destrezas que el alumnado puede usar antes de ejecutar su plan. Por lo tanto, el alumnado explicita por escrito aquellas ideas y/o probaturas que realiza y posteriormente, elije la que más le conviene y desarrolla su resolución. En cuanto a la revisión del proceso y solución, hemos observado que el alumnado tiende no sólo a revisar la coherencia de su resultado con los datos y preguntas aportados en el enunciado de los problemas, sino que, además, relee y verifica todo el proceso realizado. Este hecho es posible dado que, como hemos señalado anteriormente, el alumnado tiende a verbalizar exhaustivamente su proceso y, por lo tanto, puede finalmente releerlo y reajustarlo si es necesario. Por lo tanto, a una mayor verbalización del proceso de resolución, observamos una mayor consciencia del proceso realizado, una mayor autorregulación y explicitación de procesos metacognitivos complejos y una mayor revisión del proceso realizado que permite evitar errores de ejecución y/o comprensión.

Por último, queremos destacar, tal y como señalaron Villalonga y Deulofeu (2015), que la linealidad de la base de orientación de la acción es un hándicap al ser usada en resolución de problemas. Como hemos observado en los resultados derivados de la publicación 1, el alumnado tiende a seguir la base como si se tratara de un listado cronológico paso a paso. Aunque los alumnos elijen aquellos procesos y destrezas que le convengan según la situación que se les plantea, tienden a saltar de un paso a otro linealmente e incluso enumeran el proceso de resolución atendiendo a los pasos realizados. Aunque la resolución de un problema sí que pueda parecer lineal o secuencial, puesto que la producción final lo es, el proceso mental que desarrolla un resolutor al enfrentarse a un problema en ningún caso es lineal. Por lo tanto, la estructura de la base de orientación de la acción no se corresponde con la naturaleza de un problema (Mayer, 1985). Los resultados obtenidos en este sentido nos muestran dos aspectos esenciales a tener en cuenta. En primer lugar, cuando el alumnado anota una destreza o proceso en una de las fases, no lo vuelve a incluir en otra. Por lo tanto, si el alumnado afirma “realizar probaturas atendiendo al dibujo dado” dichas probaturas debían ser incluidas en una de las fases y generalmente, se incluían en la fase de planificación, aunque también podían realizar probaturas para revisar y verificar el proceso realizado. El hecho de que el alumnado relacionara cada destreza o proceso con una fase concreta rompía con el desarrollo habitual de los procesos de autorregulación en resolución de problemas (Clarke, 1987). En segundo lugar, la estructura lineal de base complica su uso en resolución de problemas, aunque las fases de resolución de Pólya (1945) siguen teniendo sentido dado el contexto expuesto.

Atendiendo al primer objetivo de la presente investigación, los dos aspectos anteriormente destacados fueron los que nos permitieron cambiar el paradigma de la base de orientación de la acción, creando y desarrollando la base de orientación no lineal. Tal y como hemos especificado en el marco teórico, la base de orientación no lineal tiene forma de árbol ramificado atendiendo a las fases de resolución de Pólya (1945) y contempla la inclusión de procesos y destrezas idénticos en distintas fases del problema.

7.2 La evaluación como método de feedback

Los resultados derivados del apartado 6.2 nos permitieron analizar el papel de la autoevaluación y la coevaluación como métodos de feedback durante la construcción y uso de una base de orientación no lineal.

El diseño de los cuestionarios de autoevaluación y coevaluación, aunque hacían referencia tanto a la propia resolución como a la del compañero respectivamente, pretendían una única finalidad, la de hacer reflexionar al alumnado sobre su propio proceso de autorregulación. El cuestionario de autoevaluación fue diseñado como herramienta para propiciar que el alumnado analizara su proceso de resolución desde una visión retrospectiva, es decir, una vez finalizado el problema. El hecho de que el alumnado se cuestione su propio proceso de autorregulación es una de las claves del éxito en cualquier tarea (Sanmartí, 2019), por lo tanto, dicho cuestionario no sólo pretendía que el alumnado explicitara aquellos procesos y destrezas que había llevado a cabo sino aquellos que la base no contemplaba y que le habían sido de ayuda durante su resolución. Consideramos que la última pregunta del cuestionario de autoevaluación referente a la identificación de ítems que no aparecían en la base fue una de las claves de la modificación del instrumento.

El cuestionario de coevaluación que inicialmente suele diseñarse para evaluar a un compañero perseguía la finalidad de hacer reflexionar al alumno evaluador de su propio proceso a partir del análisis de la resolución de un compañero. Por lo tanto, la coevaluación no fue inicialmente diseñada como herramienta de evaluación de otra producción, sino como herramienta de reflexión del propio proceso. Las preguntas de dicho cuestionario iban encaminadas en dos sentidos. En primer lugar, que el alumnado observara la necesidad de explicitar el proceso de resolución dado que gran parte de los procesos metacognitivos que desarrollamos, no suelen redactarse. Este hecho produce que el evaluador no comprenda algunas de las decisiones y procesos llevados a cabo por el resolutor y por lo tanto, no comprenda el desarrollo del problema. En segundo lugar, la coevaluación pretendía que el evaluador detectara destrezas y procesos que el compañero había llevado a cabo que le pudieran ser de ayuda en sus futuras resoluciones y que, además, pudieran ser incluidos en la base de orientación no lineal. El diseño de la autoevaluación y coevaluación en este sentido nos permitió tanto observar de un modo más exhaustivo el proceso de autorregulación que llevaba a cabo el alumnado, como modificar la base de orientación no lineal con aquellos procesos y destrezas que el alumnado consideraba esenciales. Así pues, coincidimos con Sanmartí (2010) en considerar la evaluación como un motor de autorreflexión y no como un proceso de certificación.

Los resultados obtenidos derivados del uso de ambos cuestionarios por parte del alumnado nos muestran un cambio de paradigma entre el primer y último problema resueltos. En cuanto a la autoevaluación, inicialmente se pedía al alumnado explicitar el proceso de resolución llevado a cabo. Encontramos en los dos primeros problemas resueltos, que el alumnado replicaba el proceso de resolución que había desarrollado durante la ejecución del problema sin introducir apenas nuevas explicaciones o justificaciones. En cambio, en el tercer y cuarto problema, el alumnado explicitaba su proceso de resolución añadiendo procesos y destrezas que en la resolución principal había omitido y justificando su elección. Este hecho nos muestra que inicialmente, cuando se pedía al alumnado explicar cómo había resuelto el problema, consideraban que la explicación era la propia resolución en sí misma mientras que en los últimos dos problemas resueltos, el alumnado exponía su resolución de un modo retrospectivo como si le explicara a un compañero el proceso llevado a cabo detallando cada una de las elecciones que había tomado. Así pues, observamos que generalmente el alumnado fue capaz de diferenciar el desarrollo de la resolución en sí misma, de la explicación posterior del problema que contempla la justificación y argumentación de tomas de decisiones.

En cuanto a la coevaluación, encontramos que inicialmente el alumnado solía responder que no comprendía la resolución del compañero por falta de información y verbalización del proceso de resolución. Como hemos comentado en el apartado anterior, la base de orientación no lineal permite al alumnado hacer explícito el proceso de resolución y verbalizarlo de un modo completo y comprensible. Por lo tanto, en los dos primeros problemas resueltos por el alumnado observamos una falta de detalle respecto a las decisiones y procesos llevados a cabo mientras que en los dos últimos problemas, las resoluciones se vuelven más detalladas y precisas. Este hecho causa un cambio significativo en las coevaluaciones puesto que el alumnado puede valorar la producción del compañero cuando ésta es detallada y justificada. Así pues, las coevaluaciones iniciales se muestran pobres dada la falta de información que tiene el evaluador, mientras que en las coevaluaciones finales el alumnado puede valorar el proceso del compañero, detectando aquellos procesos y destrezas usados, y valorando su adecuación. Así pues, la coevaluación depende directamente del detalle contemplado en la producción del compañero y por ende, del uso de la base de orientación no lineal.

El hecho de que el alumnado elaborara los cuestionarios por escrito, consideramos que ha tenido aspectos positivos, así como limitaciones. En cuanto a los aspectos positivos, ha permitido que el alumnado tenga que detallar información compleja realizando un esfuerzo de síntesis y reflexión muy elevado, y a su vez, ha permitido a los investigadores del estudio tener un referente a analizar de todos los alumnos que conforman los grupos participantes. En cuanto a las limitaciones, el hecho de que el alumnado tenga que redactar exhaustivamente tanto su proceso de resolución y autorregulación como las observaciones realizadas en la producción del compañero, se convierte en una ardua tarea con una gran extensión a nivel temporal. Por lo tanto, aunque los resultados obtenidos entorno el diseño y aplicación de la autoevaluación y coevaluación sean satisfactorios, valoramos positivamente poder realizar las evaluaciones oralmente grabando a las parejas participantes obteniendo un discurso más fluido y concreto.

7.3 La naturaleza de una base de orientación no lineal en problemas de patrones

Los resultados obtenidos expuestos en el apartado 6.3, nos muestran que las tres bases elaboradas por los grupos de alumnos pertenecientes a los centros D y E son bases con un alto número de apoyos metacognitivos y una baja inclusión de destrezas matemáticas. Este hecho nos lleva a dos sub-resultados relevantes para la presente investigación. En primer lugar, la base de orientación no lineal es elaborada por el alumnado como un instrumento de apoyo a la metacognición en resolución de problemas. Por lo tanto, el alumnado no la concibe como un listado de pasos a seguir para resolver un problema, ni como un conjunto de procedimientos y/o algoritmos matemáticos que le pueden ser útiles durante sus resoluciones. Este aspecto nos muestra una clara diferenciación respecto a la base de orientación de la acción (Jorba y Sanmartí, 1996) que contempla un gran número de destrezas matemáticas pero un bajo número de aspectos referentes a la autorregulación. Por lo tanto, y siguiendo con los aspectos destacados en la segunda publicación, los cambios introducidos en la base de orientación no lineal respecto la base de orientación de la acción, han sido adecuados atendiendo a la pregunta de investigación planteada en el presente estudio, así como a la naturaleza de los problemas matemáticos.

En segundo lugar, el hecho de que el número y tipología de destrezas incluidas en las bases tengan un peso inferior respecto a los apoyos metacognitivos, nos muestra la adecuación de los problemas de patrones para desarrollar una primera base de orientación no lineal. Tal y como señalamos en el marco teórico del presente estudio, encontramos aspectos comunes entre BONL referentes a contenidos matemáticos distintos, como puede ser revisar la solución, seleccionar los datos relevantes, revisar un paso antes de proceder al siguiente o releer el enunciado y el procedimiento que el resolutor ha desarrollado. En cambio, encontramos procesos y sobre todo destrezas, que son diferenciales dependiendo del contenido matemático que trabajemos. Así pues, consideramos que las destrezas que el alumnado desarrollaría e incluiría en la BONL en un problema de geometría o estadística, tendrían un papel más algorítmico y procedimental que las que desarrollan en un problema de patrones matemáticos como los aplicados en la presente investigación. Consideramos que el hecho de que los problemas de patrones sean versátiles (Montenegro, Costa y Lopes, 2018) y permitan aplicar estrategias de distinta índole sobre todo cuando se acompañan de ayudas pictóricas en sus enunciados (Villalonga y Deulofeu, 2015), promueven que el alumnado se focalice en la construcción de la base y en su proceso de autorregulación más que en los procesos algorítmicos propios de otros contenidos matemáticos. Así pues, consideramos que los problemas de patrones se muestran como un contenido matemático idóneo para desarrollar una primera base de orientación no lineal con alumnos no habituados a la resolución de problemas ni al uso de instrumentos de autorregulación matemática.

7.4 La base de orientación no lineal como instrumento de apoyo metacognitivo

Las publicaciones 2 y 3 derivadas de la implementación definitiva nos permitieron crear, desarrollar, usar y modificar una base de orientación no lineal con tres grupos de alumnos de sexto de educación primaria. Aunque ambas publicaciones pretendían responder al segundo y tercer objetivo de la presente investigación respectivamente, uno de los resultados transversales de ambos artículos hace referencia al uso del instrumento durante la autorregulación en resolución de problemas.

En primer lugar, hemos observado que la base de orientación no lineal salva las limitaciones observadas durante la aplicación de una base de orientación de la acción. Las producciones del alumnado continúan siendo explícitas y verbalmente exhaustivas contando con la aparición de procesos y destrezas cada vez más complejos, aunque en este caso, el alumnado no enumera el proceso realizado ni omite procesos mentales usados en más de una fase. Las producciones del alumnado son altamente estructuradas y se presentan como más naturales y fidedignas a los procesos mentales que han ido desarrollando. El hecho de que el alumnado pueda incluir distintos procesos y destrezas en más de una fase permite que puedan seleccionarlos, identificarlos y ejecutarlos en distintos momentos a demanda de sus necesidades.

En contraposición a la base de orientación de la acción que se desarrolló en base a dos problemas de numeración y patrones, la base de orientación no lineal se aplicó en un ciclo de cuatro problemas matemáticos con su correspondiente resolución, evaluación, discusión y modificación del instrumento. El hecho de focalizar la BONL en una sola tipología de problemas, así como ampliar la cantidad de problemas seleccionados, promovió que el alumnado comprendiera mejor el uso y desarrollo del instrumento en resolución de problemas. Así pues, hemos podido observar que las bases iniciales elaboradas por los distintos grupos tienen un carácter general, contemplando destrezas y procesos muy básicos y contienen un vocabulario matemático poco preciso y muy coloquial. En cambio, la última base que ha desarrollado cada uno de los grupos, es mucho más precisa y cuenta con un vocabulario matemático concreto y adecuado al contexto de los problemas resueltos. Coincidimos con Sanmartí y Jorba (1996) en afirmar que cuanto más uso da el alumnado al instrumento, más significativo se vuelve para ellos y más completo es atendiendo a la actividad planteada. Las modificaciones que ha introducido el alumnado en las BONL des de la resolución del primer problema hasta la resolución del cuarto problema, nos muestran que el instrumento ha ido tomando sentido real para ellos y les ha permitido reflexionar sobre su propia práctica matemática desarrollando procesos metacognitivos altamente complejos.

En cuanto a las fases de planificación y revisión, que fueron las fases que más cambios experimentaron con el uso de la base de orientación de la acción, encontramos que el uso de la base de orientación no lineal potencia su explicitación y reflexión de un modo más exhaustivo y natural. En el primer problema resuelto por el alumnado, la cantidad de producciones donde se observa un proceso de planificación detallado es casi inexistente. En cambio, en el último problema resuelto observamos que más de la mitad del alumnado detalla su plan de acción antes de proceder a ejecutarlo. La diferencia más evidente entre el uso de la base de orientación de la acción y la base de orientación no lineal, la encontramos en la tipología de destrezas y procesos que el alumnado describe durante la planificación del problema. Cuando el alumnado usaba la base de orientación de la acción, describía su proceso de planificación atendiendo a los ítems que aparecían en la base ordenados secuencialmente, en cambio, con la base de orientación no lineal observamos que el alumnado planifica su resolución alternando y conjugando aquellos procesos y destrezas que le son útiles e incluso usando ítems pertenecientes a otras fases de resolución. Por lo tanto, el hecho de que la base de orientación no lineal no sea tan estanca ni pautada favorece que el alumnado planifique contando con todas las herramientas que le son útiles dentro del mapa general de resolución que ofrece el instrumento.

En cuanto al proceso de revisión, consideramos que es la fase donde más evolución hemos podido observar con el uso de la base de orientación no lineal. Durante la aplicación de la base de orientación de la acción, la fase de revisión se encontraba al final del instrumento y el alumnado tendía a revisar su proceso y solución una vez finalizado el problema. La estructura en árbol ramificado que contempla la base de orientación no lineal favorece que el alumnado revise su proceso en todo momento y no sólo cuando lo está finalizando. A medida que la BONL sufre modificaciones, observamos que el alumnado incluye destrezas y procesos propios de la revisión no sólo en dicha fase, sino en otras fases como la de comprensión del problema. Por lo tanto, encontramos que los ítems pertenecientes a la revisión del proceso y solución no sólo se presentan y desarrollan al final del problema, sino durante toda la resolución tal y como ocurre en el proceso que desarrollan resolutores expertos (Schoenfeld, 1987).

Así pues, consideramos que los cambios introducidos en la base de orientación de la acción que nos permitieron desarrollar la base de orientación no lineal, han sido adecuados dada la naturaleza de los problemas propuestos y han permitido adaptarse al proceso de autorregulación del alumnado de un modo más coherente y matemáticamente relevante.

7.5 Aportaciones e implicaciones didácticas del estudio

Tal y como señalamos en la introducción del presente estudio, la organización de la competencia matemática en cuatro dimensiones dentro del currículo catalán de educación otorga un gran peso a la resolución de problemas en el aula (Departament d'Ensenyament, 2016). Habitualmente, hallamos alumnos que presentan grandes dificultades al resolver problemas matemáticos por diferentes motivos, dos de las cuales se han puesto en relieve en la presente investigación. La primera de ellas hace referencia a la autorregulación ante escenarios complejos como es la resolución de los problemas propuestos. El segundo motivo hace referencia a la tipología de problemas que se trabajan en el aula y que, en algunos casos, se asimilan más a ejercicios que a problemas. En cuanto a la autorregulación efectiva, consideramos que es uno de los pilares esenciales del proceso de resolución de un problema. Tal y como señala Sternberg (1998), una mayor capacidad de autorregulación metacognitiva conlleva una mayor efectividad en las resoluciones del alumnado. En cuanto a la tipología de problemas que el alumnado trabaja en el aula, hemos podido observar que el alumnado habituado a trabajar en base a ejercicios muestra un buen dominio de conceptos y procedimientos matemáticos aunque también presenta deficiencias entorno al desarrollo y gestión de problemas matemáticos como los propuestos, que requieren de procesos reflexivos y creativos complejos. En este sentido, consideramos que la base de orientación no lineal acompañada de los problemas de patrones seleccionados, atacan directamente estas dos dificultades observadas promoviendo que el alumnado sea más efectivo en sus resoluciones. A continuación, expondremos las implicaciones didácticas del estudio entorno a dos niveles diferentes: el desarrollo y creación del instrumento en sí mismo y el uso del instrumento durante la resolución de problemas de patrones.

En cuando a la creación y desarrollo del instrumento, nuestros resultados han puesto en relieve la importancia de que sea el propio alumnado quien comparta y consensue las destrezas y procesos que aparecen en la base de orientación no lineal. El hecho de que sea el propio alumnado quien decida qué ítems aparecen en la base a partir de la reflexión posterior a los problemas resueltos, dota al instrumento de coherencia y significado. Consideramos esencial que la base de orientación no lineal vaya acompañada de una evaluación concebida como método de feedback, puesto que tal y como hemos señalado en el apartado 6.2 de resultados, la autoevaluación y la coevaluación son las herramientas que han permitido al alumnado dar sentido no sólo a sus resoluciones sino al instrumento en sí mismo (Jorba y Sanmartí, 1996). Por lo tanto, la efectividad de la base de orientación no lineal en términos de autorregulación matemática va estrechamente ligada a la tipología de construcción del instrumento que hacemos con el alumnado. Consideramos, por lo tanto, que el proceso de construcción y reflexión de la base es tan o más importante a nivel de autorregulación matemática, que las resoluciones que desarrolla el alumnado.

En cuanto al uso del instrumento en resolución de problemas de patrones, la base de orientación no lineal propicia que el alumnado verbalice exhaustivamente su proceso de resolución desarrollando y especificando procesos metacognitivos complejos. Este hecho no sólo permite al alumnado tomar consciencia del proceso de resolución, sino que además le permite recuperar su proceso en todo momento para que éste tenga sentido y coherencia. Tal y como sucede con la construcción del instrumento, los cuestionarios de autoevaluación y coevaluación han sido las herramientas que han permitido al alumnado detallar y justificar al máximo sus resoluciones. En este sentido, el alumnado concibe detallar la resolución no sólo para él mismo, sino para que el compañero comprenda el desarrollo de la estrategia seleccionada.

Por último, queremos señalar la idoneidad de los problemas de patrones matemáticos para construir una primera base de orientación no lineal. Tal y como señalan Montenegro, Costa y Lopes (2018) la versatilidad de los problemas de patrones permite su adaptabilidad a distintos niveles educativos. El hecho de que los problemas de patrones no cuenten con tantas especificidades arraigadas a conceptos y procedimientos particulares, como podrían ser los geométricos, permiten que el alumnado focalice, tanto el desarrollo del instrumento como su resolución, en el proceso de autorregulación. Por lo tanto, consideramos idóneo a nivel didáctico elaborar una primera BONL entorno a problemas de patrones matemáticos y posteriormente, adaptar dicha base a otros contextos como podrían ser la geometría, aritmética o estadística. De este modo, el alumnado inicialmente daría mayor peso a los procesos de autorregulación matemática y posteriormente, trabajaría destrezas y procesos concretos de distintos contenidos matemáticos.

7.6 Limitaciones de la investigación

Tal y como señalamos al inicio del estudio, analizar los procesos de autorregulación del alumnado y por ende, los procesos metacognitivos, es una actividad compleja puesto que estos mecanismos se dan de manera mental y difícilmente se verbalizan (Cavanaugh y Perlmutter, 1982). Aunque los protocolos en voz alta son los más usados por los investigadores (Cole, 2019; Wilson y Clarke, 2004), encontramos que, ante resolutores jóvenes, se suelen producir bloqueos durante la explicación (Ericsson y Simon, 1980). Este fue el principal motivo que nos llevó a analizar los procesos metacognitivos contando con un soporte escrito. Por un lado, esta decisión nos permitió contar con un muestreo amplio y a su vez, nos llevó a realizar un análisis inductivo (Kuzle, 2013) muy completo. Por otro lado, consideramos que el hecho de analizar los procesos de autorregulación de manera escrita provoca una pérdida de información importante a causa de dos motivos. El primero de ellos hace referencia a la naturalidad de las explicaciones del alumnado, dado que oralmente, pueden explicar y justificar sus procesos de resolución de un modo más ameno. El segundo motivo hace referencia a la calidad y cantidad de justificaciones y procesos que el alumnado pone por escrito, que suelen ser más imprecisas que si se realizaran oralmente. Dados estos dos factores, consideramos que hemos obtenido una pérdida de información al analizar los procesos metacognitivos del alumnado, aunque los procesos que si han podido ser analizados han contado con una amplia muestra de producciones.

En segundo lugar, las limitaciones temporales del estudio no han permitido que la base de orientación no lineal fuera aplicada en más sesiones de resolución de problemas de patrones, ni en otros contextos matemáticos. Recordamos que el presente estudio ha tenido una duración total de tres años. Este hecho ha limitado tanto la cantidad de sesiones dedicadas a la recogida de datos, como el poder refinar nuevamente los instrumentos de evaluación. Aun y así, tal y como hemos señalado en el apartado de conclusiones, la ampliación de horas dedicadas a la implementación definitiva (8 horas) respecto a la prueba piloto (2 horas), ha permitido al alumnado concebir el funcionamiento de la BONL así como familiarizarse con la resolución de problemas de patrones.

Por último, una de las limitaciones que presenta la creación de la base de orientación no lineal respecto a las directrices originales señaladas por Jorba y Sanmartí (1996), es la creación del instrumento individualmente. Los resultados hallados por los autores señalan una mayor concepción y significatividad del instrumento cuando éste es construido de manera individual y posteriormente, es compartido en pequeño o gran grupo. La temporalidad del estudio no nos ha permitido desarrollar el instrumento a modo individual puesto que este acto requería de un coste temporal muy elevado. En cambio, queremos señalar que la construcción de la BONL en gran grupo ha permitido al alumnado compartir destrezas y procesos en todo momento, reflexionar sobre ellos y analizar y comprender tanto los procesos de autorregulación propios como los de los compañeros pertenecientes al grupo clase.

7.7 Prospectiva de la investigación

Llegados a este punto, consideramos que se necesitan futuros estudios sobre la creación y uso de la base de orientación no lineal en resolución de problemas matemáticos. Nuestra investigación se puede extender y reforzar en tres sentidos distintos.

El primero de ellos hace referencia a los aspectos del resolutor sobre los que incide la base de orientación no lineal. Tal y como señala Schoenfeld (1992), las dificultades del alumnado en resolución de problemas pueden estar relacionadas con uno o varios aspectos que intervienen en el resolutor de problemas. Aunque la base de orientación no lineal está focalizada en la gestión y el control, es decir, en la metacognición, nuestros resultados señalan que el uso prolongado de dicho instrumento también puede incidir en otros aspectos que intervienen en el resolutor. Así pues, sería interesante estudiar cómo el uso de la BONL promueve que el alumnado conozca e introduzca nuevos conceptos y procedimientos matemáticos en otros contextos matemáticos. A su vez, también consideramos relevante estudiar si el uso de la BONL promueve que el alumnado modifique sus creencias matemáticas respecto a la dificultad que presentan la resolución de problemas en el aula.

En segundo lugar y tal y como señalamos en el marco teórico del presente estudio, sería interesante conocer y comparar la tipología de bases de orientación no lineales que el alumnado desarrolla en distintos contextos matemáticos al propuesto. Los resultados y conclusiones de nuestro estudio apuntan a que las BONL desarrolladas por el alumnado, cuentan con una gran cantidad de ítems que hacen referencia a procesos y destrezas que pueden ser aplicados en otros contextos matemáticos. En este sentido, sería interesante conocer cómo el alumnado adapta una primera BONL a otro contexto matemático y hasta qué punto el alumnado necesita el instrumento durante su proceso de autorregulación matemática.

En tercer lugar, consideramos que nuestro estudio podría continuarse al concebir la BONL no sólo como herramienta de autorregulación aplicada a la resolución de problemas, sino también a la invención de problemas o *problem posing* (Silver, 1994). En este sentido, sería interesante analizar de qué modo usa el alumnado la base de orientación no lineal y cómo actúa dicho modo en la invención de problemas matemáticos. Esta tipología de investigación nos permitiría observar si una mayor capacidad de autorregulación metacognitiva (Sternberg, 1998) también se traduce en una mayor capacidad de inventar nuevos problemas.

Sección V

8. Referencias bibliográficas

8 Referencias bibliográficas

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics, 86*(1), 79-96.

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2015). On the role of inconceivable magnitude estimation problems to improve critical thinking. In U. Gellert, J. Giménez, C. Hahn y S. Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics* (pp. 263-277). Springer.

Alsina, Á. (2018). La evaluación de la competencia matemática: ideas clave y recursos para el aula. *Epsilon*, *98*, 7-23.

Altay, M. K., Akyüz, E. Ö. y Erhan, G. K. (2014). A study of middle grade students' performances in mathematical pattern tasks according to their grade level and pattern presentation context. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 116*, 4542-4546.

Artz, A. F. y Armour-Thomas, E. (1992). Development of cognitive-metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction, 9*(2), 137-175.

Babbs, P. J. y Moe, A. J. (1983). Metacognition: A key for independent learning from text. *The Reading Teacher, 36*, 422-426.

Biddlecomb, B. y Carr, M. (2011). A longitudinal study of the development of mathematics strategies and underlying counting schemes. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(1), 1-24.

Callahan, L. G. (1987). Metacognition and School Mathematics. *Arithmetic Teacher*, *34*(9), 22-23.

Callejo, M. L. (1996). Evaluación de procesos y progresos de alumnado en resolución de problemas. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 8,* 53-64.

Callejo, M. y Vila, A. (2003). Origen y formación de creencias sobre la resolución de problemas. Estudio de un grupo de alumnos que comienzan la educación secundaria. *Boletín de la Asociación matemática Venezolana*, *10*(2), 173-194.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *28*(48), 64-88.

Campanario, J. M. y Otero, J. (2000). Más allá de las ideas previas como dificultades de aprendizaje: las pautas de pensamiento, las concepciones epistemológicas y las estrategias metacognitivas de los alumnos de Ciencias. *Enseñanza de las ciencias, 18*(2), 155-169.

Cano, E. (2015). Las rúbricas como instrumento de evaluación de competencias en Educación Superior: ¿Uso o abuso?. *Profesorado, 19*(2), 265-280.

Castro, E. (2008). Resolución de Problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. *Investigación en Educación Matemática, 12*, 113-140.

Cavanaugh, J. C. y Perlmutter, M. (1982). Metamemory: A critical examination. *Child Development*, *53*, 11–28.

Chi, M. T. H. y Glaser, R. (1985). Problem solving ability. En R.J. Sternberg (Ed.), *Human abilities: An information processing approach* (p. 227-250). W.H. Freeman.

Clarke, D. (1989). The Problems of the Problem Solving Classroom. *Australian Mathematics Teacher*, *45*(3), 20-24.

Cole, N. L. (2019). Effects of think-aloud protocol on the mathematical problem-solving skills of seventh- and eighth- grade students with learning disabilities. *Doctoral Dissertations*. 501. https://repository.usfca.edu/diss/501 [setiembre 2020]

De Corte, E. y Verschaffel, L. (2003). El desarrollo de habilidades de autorregulación en la solución de problemas matemáticos. *Revista pensamiento educativo*, *32*, 286-305.

De Corte, E., Verschaffel, L., y Greer, B. (2000). Connecting mathematics problem solving to the real world. En A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Education into the 21st Century: Mathematics for living* (p. 66-73). The National Center for Human Resource Development.

Departament d'Ensenyament (2016). Desplegament de les competències bàsiques. Currículum educació primària. Decret 142/2007, DOGC núm. 4915.

Deulofeu, J. y Villalonga, J. (2018). Resolución de problemas y regulación del aprendizaje. *Educatio Siglo XXI*, *36*(3), 153-176.

Duncker, K. (1945). On Problem-Solving. *Psychological Monographs, 58(5)*, 1-112.

Ericsson, K. A. y Simon, H. A. (1980). Verbal reports as data. *Psychological review*, *87*(3), 215.

Ernst, G. W. y Newell, A. (1969). *GPS: a case study in generality and problem solving*. Academic Press.

Escudero, C. y Moreira, M. A. (1999). La V epistemológica aplicada a algunos enfoques en resolución de problemas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *17*(1), 61-68.

English, L. D. y Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., p. 313–335). Taylor & Francis.

FEEMCAT, SCM, Generalitat de Catalunya (2000-2018). Problemes a l'esprint. http://www.cangur.org/esprint/ [setiembre 2020]

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American psychologist*, *34*(10), 906.

García, M. y Sanmartí, N. (1998). Las bases de orientación: un instrumento para enseñar a pensar teóricamente en biología. *Alambique: Didáctica de las Ciencias Experimentales*, *16*, 8-20.

García, T., Rodríguez, C., González-Castro, P., González-Pienda, J. A. y Torrance, M. (2016). Elementary students' metacognitive processes and post-performance calibration on mathematical problem-solving tasks. *Metacognition and Learning*, *11*(2), 139-170.

Geurten, M. y Lemaire, P. (2019). Metacognition for strategy selection during arithmeticproblem-solving in young and older adults. *Aging Neuropsychology and Cognition*, *26*(3), 424–446.

Gil, N., Blanco, L. J. y Guerrero, E. (2005). El dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. Una revisión de sus descriptores básicos. *Unión. Revista Iberoamericana de educación matemática*, *2*, 15-32.

Godino, J. D. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación matemática*, *12*(1), 70-92.

Groner, R., Groner, M. y Bischof, W. F. (1983). *Methods of heuristics*. Lawrence Erlbaum.

Grugnetti, L. y Jaquet, F. (2005). A mathematical competition as a problem solving and a mathematical education experience. *The Journal of Mathematical Behavior*, *24*(3-4), 373-384.

Heller, J.I. y Hungate, H.N. (1985). Implications for mathematics instruction of research on scientific problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (p. 83-112). Lawrence Erlbaum.

Heyworth, R. M. (1999). Procedural and conceptual knowledge of expert and novice students for the solving of a basic problem in chemistry. *International Journal of Science Education*, *21*(2), 195-211.

Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent.* Presses Universitaires de France.

Jorba, J. y Sanmartí, N. (1996). *Enseñar, aprender y evaluar: un proceso de regulación contínua: Propuestas didácticas para las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas*. Ministerio de Educación.

Jurdak, M. E. y El Mouhayar, R. R. (2014). Trends in the development of student level of reasoning in pattern generalization tasks across grade level. *Educational Studies in Mathematics*, *85*(1), 75-92.

Kantowski, M. G. (1977). Processes involved in mathematical problem solving. *Journal for research in mathematics education, 8*, 163-180.

Karmiloff-Smith, A. (1992). Beyond Modularity: A Developmental Perspective on Cognitive Science. *Behavioral and Brain Sciences, 17,* 693–745.

Kilpatrick, J. (1992). Some issues in the assessment of mathematical problem solving. En J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos y D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice* (p. 37-44). Springer-Verlag.

Kuzle, A. (2013). Patterns of metacognitive behavior during mathematics problem-solving in a dynamic geometry environment. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 20-40.

Leikin, R. y Grossman, D. (2013). Teachers modify geometry problems: from proof to investigation. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(3), 515-531.

Lester, F. K. (1994). Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education*, *25*, 660-660.

Lester, F. K., Garofalo, J. y Kroll, D. L. (1989). *The Role of Metacognition in Mathematical Problem Solving: A Study of Two Grade Sever. Classes. Final Report.* Univ., Bloomington. Mathematics Education Development Center. National Science Foundation.

Loh, M. Y. y Lee, N. H. (2019). The Impact of Various Methods in Evaluating Metacognitive Strategies in Mathematical Problem Solving. En P. Liljedahl y M. Santos-Trigo (Eds.). *Mathematical Problem Solving* (p. 155-176). Springer.

Mabilangan, R. A., Limjap, A. A. y Belecina, R. R. (2011). Problem solving strategies of high school students on non-routine problems: A case study. *Alipato: A Journal of Basic Education*, *5,* 23-46.

Maclellan, E. (2014). Articulating' understanding': deploying mathematical metacognition. *Scottish Educational Review*, *46*(2), 73-89.

McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, *1*, 575-596.

Magiera, M. T. y Zawojewski, J. S. (2011). Characterizations of social-based and self-based contexts associated with students' awareness, evaluation, and regulation of their thinking during small-group mathematical modeling. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*(5), 486-520.

Martínez, B. A., Sánchez, J. M. y Pizarro, N. (2020). La representación en la resolución de problemas matemáticos: un análisis de estrategias metacognitivas de estudiantes de secundaria. *Uniciencia*, *34*(1), 263-280.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Addison Wesley.

Mayer, R. (1985). Implications of cognitive psychology for instruction in mathematical problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (p.123–138). Lawrence Erlbaum.

Mayer, R. E., Sims, V. y Tajika, H. (1995). Brief note: A comparison of how textbooks teach mathematical problem solving in Japan and the United States. *American Educational Research Journal*, *32*(2), 443-460.

McGarvey, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310-337.

Monje, J., Tyteca, P. y Castro, E. (2012). Resolución de problemas y ansiedad matemática: profundizando en su relación. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, *32*, 45-62.

Montague, M. (2008). Self-regulation strategies to improve mathematical problem solving for students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly*, *31*(1), 37-44.

Montenegro, P., Costa, C. y Lopes, B. (2018). Transformations in the visual representation of a figural pattern. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(2), 91-107.

Morales, E. (1999). Efecto de una didáctica centrada en la resolución de problemas empleando la técnica heurística V de Gowin y mapas conceptuales en el razonamiento matemático los alumnos de 9º. grado de educación básica. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *2*(1), 77-92.

Novak, J. D. y Gowin, D. B. (1988). Aprendiendo a aprender. Barcelona: Martínez Roca. Traducción al español del original *Learning how to learn* (1984).

Nunziati, G. (1990). Pour construire un dispositif d'évaluation formatrice. *Cahiers pédagogiques (Cannes), 280*, 47-64.

Orton, A. (2004). Pattern in the teaching and learning of mathematics. London: Continuum.

Ozsoy, G. y Ataman, A. (2017). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education, 1*, 67-82.

Panaoura, A., Philippou, G, I. y Christou, C. (2003). Young pupil's metacognitive ability in mathematics. *European Research in Mathematics Education, 3*, 1-9.

Papic, M. M., Mulligan, J. T. y Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237–268.

Paris, S. G., Lipson, M. Y. y Wixson, K. K. (1983). Becoming a strategic reader. *Contemporary educational psychology*, *8*(3), 293-316.

Pintrich, P. R., Smith, D. A., Garcia, T. y McKeachie, W. J. (1993). Reliability and predictive validity of the Motivated Strategies for Learning Questionnaire (MSLQ). *Educational and psychological measurement*, *53*(3), 801-813.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Comares.

Radford, L. (2003). On culture and mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from greek mathematical thought. En M. Anderson, A. Sáenz-Ludlow, S. Zellweger, y V. V. Cifarelli (Eds.), *Educational perspectives on mathematics as semiosis: From thinking to interpreting to knowing* (p. 49-79). Legas Publishing.

Radford, L. (2006a). Algebraic thinking and the generalization ofpatterns: a semiotic perspective. En J. L. C. S. Alatorre, M. Sáiz y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of theInternational Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Vol. 1, p. 2–21). Mérida.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. En L. Radford, G. Schubring, y F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, history, classroom, and culture* (p. 215-234). Sense Publishers.

Radford, L. (2010a). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37–62.

Raposo, M. y Martínez, M. E. (2011). La Rúbrica en la Enseñanza Universitaria: Un Recurso Para la Tutoría de Grupos de Estudiantes. *Revista Formación Universitaria, 4*(4), 19-28.

Resnick, L. (1987). *Education and learning to think*. National Academy Press.

Rodríguez, R. y Jorba, J. (1998). Los criterios de evaluación, un elemento esencial en el proceso de autorregulación en el aprendizaje. *Aula de Innovación Educativa, 67*, 57-62.

Rosenzweig, C., Krawec, J. y Montague, M. (2011). Metacognitive strategy use of eighth-grade students with and without learning disabilities during mathematical problem solving: A think-aloud analysis. *Journal of Learning Disabilities, 44*, 508-520.

Rosli, R., Goldsby, D. y Capraro, M. M. (2015). Using manipulatives in solving and posing mathematical problems. *Creative Education*, *6*(16), 1718.

Sanmartí, N. (2010). *Avaluar per aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.* Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General de l'Educació Básica i el Batxillerat.

Sanmartí, N. (2019). ¿Es posible una evaluación gratificante y útil para aprender?. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas*, (86), 43-49.

San Martín, E. H. y Izquierdo, M. (2014). Indagación guiada con diagrama uve para un aprendi-zaje significativo en primaria. *Investigações em Ensino de Ciências, 19*(3), 643-656.

Santos, T. M. (1994). *La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* Cinvestav-IPN. Departamento de didáctica educativa.

Santos-Trigo, M. (2020). Problem-solving in mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 686-693.

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research; learning trajectories for young children*. Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1987). "What's All the Fuss About Metacognition?" En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (p. 180-215). Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1989). Teaching mathematical thinking and problem solving. En L.B. Resnick y B.L. Klopfer (Eds.), *Toward the thinking curriculum: Current cognitive research* (p. 83-103). Association for Supervision and Curriculum Development.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-making Mathematics. En D. Grouws (Ed.), *Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-370). Macmillan.

Schraw, G. y Sperling-Dennison, R. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19*, 460-470.

Silver, E.A. (1979). Student perceptions of relatedness among mathematical verbal problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 10*(3), 195-210.

Silver, E.A. (1981). Recall of mathematical problem information: Solving related problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(1), 54-64.

Silver, E.A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28.

Spangenberg, E. D. y Pithmajor, A. K. (2020). Grade 9 Mathematics Learners' Strategies in Solving Number-Pattern Problems. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *16*(7), 18-62.

Sperling, R. A., Howard, B. C., Miller, L. A. y Murphy, C. (2002). Measures of children's knowledge and regulation of cognition. *Contemporary Educational Psychology, 27,* 51-79.

Spring, H. T. (1985). Teacher decision making: A metacognitive approach. *The Reading Teacher, 39*(3), 290-295.

Stanic, G. M. A. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspective on problem solving in the mathematics curriculum. En R.I. Charles y E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (p. 1-22). Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Sternberg, R. J. (1998). Metacognition, abilities, and developing expertise: What makes an expert student?. *Instructional science*, *26*(1-2), 127-140.

Swanson, H. L. (1990). Influence of metacognitive knowledge and aptitude on problem solving. *Journal of educational psychology*, *82*(2), 306.

Torregrosa, A. (2020). La base de orientación no lineal: estudio de tres grupos clase ante un ante un mismo ciclo de resolución de problemas de patrones. *Épsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, *104*, 7-23.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (2019). Desarrollo de una herramienta metacognitiva: hacia la base de orientación no lineal. En J.M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (p. 655). SEIEM.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa). Estadios evolutivos de una base de orien-tación no lineal. En *19 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2019.* FESPM, AGAPEMA.

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa) Orientación y coevaluación: Dos aspectos clave para la evolución del proceso de resolución de problemas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática.*

Torregrosa, A., Albarracín, L. y Deulofeu, J. (En prensa). Resolución e invención de problemas: La estrategia de resolución con relación al problema inventado. En *Investigación en Educación Matemática XXIV*. SEIEM.

Torregrosa, A., Deulofeu, J. y Albarracín, L. (En prensa). Caracterización de procesos metacognitivos en la resolución de problemas de numeración y patrones matemáticos. *Educación matemática.*

Ullauri, J. I. U. y Ullauri, C. I. U. (2018). Metacognición: Razonamiento Hipotético y Resolución de Problemas. *Revista scientific*, *3*(8), 121-137.

Van der Stel, M., Veenman, M. V., Deelen, K. y Haenen, J. (2010). The increasing role of metacognitive skills in math: A cross-sectional study from a developmental perspective. *ZDM*, *42*(2), 219-229.

Veenman, M. V. J. y Spaans, M. A. (2005). Relation between intellectual and metacognitive skills: Age and task differences. *Learning & Individual Differences, 15*(2), 159–176.

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA, 9(3),* 193-215

Vygotsky, L. S. (1978). Mind in society: The development of higher psychological functions. Harvard Press.

Villalonga, J. y Deulofeu, J. (2015). La base de orientación en la resolución de problemas. En FESPM, SEMRM (Eds.) *Actas JAEM 2015. 17 Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (p. 36-68). Pedro Ángel Sánchez Martínez, S.L.U.

Villalonga, J. y Deulofeu, J. (2017). La base de orientación en la resolución de problemas: "Cuando me bloqueo o me equivoco." *REDIMAT*, *6(3)*, 256-282.

Voss, J.F. y Post, T.A. (1988). On the solving of ill- structured problems. En M.T.H. Chi, R. Glaser, y M.J. Farr (Eds.), *The nature of expertise* (p. 261-285). Lawrence Erlbaum Associates.

Voss, J.F., Wolfe, C.R., Lawrence, J.A. y Engle, R.A. (1991). From representation to decision: An analysis of problem solving in international relations. En R.J. Sternberg y P.A. Frensch (Eds.), *Complex problem solving: Principles and mechanisms* (p. 119–158). Lawrence Erlbaum Associates.

Wallas, G. (1926). *Art of Thought*. New York: Harcourt Brace Jovanvich.

Wilson, J. y Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 25-48.

Yañez, J. C. (1995). La resolución de problemas en matemáticas: ¿cómo abordar su evaluación?. *Investigación en la Escuela*, *25*, 79-86.

Zimmerman, B. J. (1990). Self-regulated learning and academic achievement: An overview. *Educational psychologist*, *25*(1), 3-17.

Zimmerman, B. J. y Martinez-Pons, M. (1990). Student differences in self-regulated learning: Relating grade, sex, and giftedness to self-efficacy and strategy use. *Journal of educational Psychology*, *82*(1), 51.