

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament de Matemàtica Aplicada I

**COMPLEJIDAD DE ESTRUCTURAS
GEOMÉTRICAS Y COMBINATORIAS**

Autor: Maria del Carmen Hernando Martín

Directores: Ferran Hurtado Díaz

Marc Noy Serrano

1999

Capítulo 2

Tipos de orden circulares y triangulares

2.1 Introducción

Dado un conjunto P de puntos en el plano, para cada tres puntos p_i, p_j, p_k de P , se define $(i, j, k) = 0$ si los tres puntos son colineales; $(i, j, k) = +1$ si $p_i p_j p_k$ es un giro antihorario y, finalmente, $(i, j, k) = -1$ si $p_i p_j p_k$ es un giro horario. El conjunto de todos estos valores recibe el nombre de *tipo de orden* de P .

Este concepto fue introducido por Goodman y Pollack (véase [16], [17]) en el año 1983. El tipo de orden generaliza de forma natural la noción de orden que tenemos definida sobre la recta real. Concretamente, una ordenación de un conjunto de puntos en la recta real es dar una descripción de cómo están situados estos puntos, o lo que es lo mismo, saber decir para dos puntos cualesquiera si el segundo está o no a la izquierda del primero. En el plano el tipo de orden nos informa para cada terna de puntos si el tercero está o no a la izquierda de la recta orientada definida por los dos primeros.

El tipo de orden de una configuración de puntos, así como la sucesión permisible asociada a una configuración, fueron conceptos introducidos para estudiar la estructura combinatoria subyacente a la conjetura de Erdős-Szekeres (dados $2^{n-2} + 1$ puntos en el plano, en

posición general, contienen n puntos en posición convexa, véase [11]).

Aunque ninguna de las dos estructuras combinatorias que acabamos de nombrar dieron solución a este problema, surgieron de aquí como objetos de estudio interesantes por sí mismas. Después resultaron estar relacionadas con otras estructuras tales como las matroides orientadas y los arreglos de pseudorectas. Por su simplicidad combinatoria, así como por su intuitividad geométrica, han resultado útiles en la solución de otros problemas clásicos, y juegan también un papel importante en muchos algoritmos geométricos. Son muchas las aplicaciones del tipo de orden. Ha sido utilizado, por ejemplo, en problemas de transversalidad (véase [21]). También ha sido utilizado en el estudio de movimiento de sólidos, colisión de rígidos, etc., más concretamente, en la detección de intersecciones entre dos poliedros arbitrarios, como en los trabajos de E. Staffetti y F. Thomas ([68], [70]).

Un resultado interesante sobre tipos de orden es la representación compacta que muestran J. E. Goodman y R. Pollack en [16]. Reproducimos dicho resultado en la sección 2.2.

El trabajo realizado en este capítulo consiste en el estudio de una generalización del tipo de orden. Generalización que hacemos en dos direcciones: tipos de orden circulares (que estudiamos en la sección 2.3) y tipos de orden triangulares (que son motivo de estudio en la sección 2.4). Acabamos el capítulo en la sección 2.5 con una lista de problemas abiertos.

2.2 Tipos de orden y Teorema principal de ordenación geométrica

La definición del tipo de orden se generaliza a dimensiones superiores de la siguiente manera. Dada una configuración P de n puntos en \mathbb{R}^d , para cada secuencia p_0, p_1, \dots, p_d de $d + 1$ puntos de P , se nota

- $(0, \dots, d) = +1$ si se verifica que $\det(x_{ij}) > 0$, siendo $x_{i0} = 1$ para todo i y (x_{i1}, \dots, x_{id}) las coordenadas de p_i ;

- $(0, \dots, d) = -1$ si $\det(x_{ij}) < 0$;
- $(0, \dots, d) = 0$ si $\det(x_{ij}) = 0$.

A la colección de estos valores, para todas las posibles $(d+1)$ -uplas de puntos de P , es a lo que se llama *tipo de orden* de la configuración P .

En [16] (véase también [18]) Goodman y Pollack presentan una representación compacta del tipo de orden. Concretamente, notando

$$\begin{aligned} \Lambda(i_0, \dots, i_{d-1}) &= \{j \mid p_{i_0} \dots p_{i_{d-1}} p_j = +1\} \\ \lambda(i_0, \dots, i_{d-1}) &= |\Lambda(i_0, \dots, i_{d-1})| \end{aligned}$$

demuestran que del conocimiento de $\lambda(i_0, \dots, i_{d-1})$ para todos i_0, \dots, i_{d-1} puede deducirse el conocimiento de $\Lambda(i_0, \dots, i_{d-1})$ para todos i_0, \dots, i_{d-1} . Este resultado es llamado por sus autores "Teorema principal de ordenación geométrica".

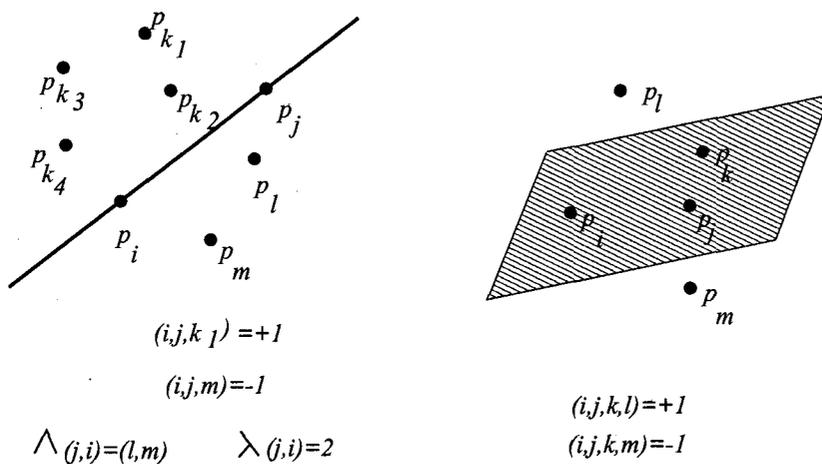


Figura 2.1: Tipo de orden en el plano y en el espacio.

Si P es un conjunto de puntos en el plano, este resultado nos dice que si sabemos cuántos puntos hay a la izquierda de la recta orientada r_{ij} determinada por dos puntos p_i, p_j para todo i, j , entonces sabemos determinar cuáles son exactamente los puntos que están a la izquierda de la recta r_{ij} para todo i, j .

En el caso $d = 3$ este resultado nos dice que si sabemos cuántos puntos hay a la izquierda (“ley del sacacorchos”) del plano orientado definido por tres puntos cualesquiera, entonces sabemos determinar cuáles son.

En general, tenemos compactificada en la matriz λ la información sobre los tipos de orden.

2.3 Tipos de orden circulares

Dado un conjunto P de puntos del plano, para cada cuatro puntos de P , notamos

- $\chi(p_i, p_j, p_k, p_l) = 0$ si los cuatro puntos son concíclicos;
- $\chi(p_i, p_j, p_k, p_l) = +1$ si $p_i p_j p_k$ es un giro antihorario y p_l está contenido en el círculo C_{ijk} determinado por p_i, p_j y p_k , o bien si $p_i p_j p_k$ es un giro horario y p_l está fuera del círculo C_{ijk} ; y, finalmente,
- $\chi(p_i, p_j, p_k, p_l) = -1$ en los casos restantes.

El conjunto de todos estos valores lo denominamos *tipo de orden circular* de P . Esta definición puede encontrarse en [3] como ejemplo de *matroide orientada* (véase también [49]).

A continuación fijaremos notaciones y definiciones que serán utilizadas más adelante. Salvo mención expresa de lo contrario, sólo consideraremos configuraciones de puntos P en las que no hay tres puntos colineales ni cuatro concíclicos. Para cada terna i, j, k , definimos $M(i, j, k)$ y $\mu(i, j, k)$ de la siguiente forma.

$$M(i, j, k) = \{m \mid \chi(p_i, p_j, p_k, p_m) = +1\}$$

y

$$\mu(i, j, k) = |M(i, j, k)|.$$

Es decir, μ indica cuántos puntos hay dentro o fuera de cada círculo orientado y M indica cuáles son dichos puntos.

En este apartado se presentan resultados combinatorios sobre tipos de orden circulares análogos a resultados bien conocidos sobre tipos de orden ordinarios (o lineales). Concretamente se muestra cómo compactificar la información relativa al tipo de orden circular, de forma que una información de orden $O(n^4)$ se compactifica en espacio $O(n^3)$. También se proporcionan cotas superiores e inferiores sobre el número de tipos circulares distintos que pueden obtenerse en el plano.

2.3.1 Representación compacta de tipos de orden circulares

Veamos, antes que nada, que μ determina M . Esto es, si conocemos $\mu(i, j, k)$ (para todo i, j, k) tenemos determinado $M(i, j, k)$ (para todo i, j, k). Dicho de otro modo, si conocemos el número de puntos p_m de P que verifican $\chi(i, j, k, m) = +1$ entonces podemos calcular el conjunto de estos puntos.

Este resultado puede demostrarse utilizando resultados contenidos en [18]. Consideramos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y, x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Podemos interpretar f como la elevación del plano $z = 0$ sobre el paraboloido unidad

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\}.$$

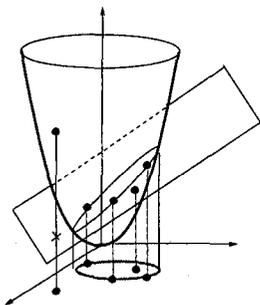


Figura 2.2: Elevación al paraboloido.

Se verifica que:

- Cuatro puntos del plano son concíclicos si y sólo si sus imágenes por la aplicación f son coplanarias.
- Notamos $f(i)$ la imagen por f del punto p_i e (i, j, k, m) el tipo de orden de cuatro puntos en el espacio definido por Goodman y Pollack en [16]. Entonces:

$$\chi(i, j, k, m) = +1 \iff (f(i), f(j), f(k), f(m)) = +1 .$$

- Dados p_i, p_j, p_k tres puntos del plano notamos $C_{i,j,k}$ al círculo que determinan. Un punto p_l está dentro de $C_{i,j,k}$ si y sólo si al proyectar p_l sobre el paraboloido unidad su imagen está por debajo del plano definido por las proyecciones de p_i, p_j, p_k .

Teniendo presente estas observaciones y utilizando el hecho de que λ determina Λ en dimensión tres, se obtiene directamente como corolario que μ determina M .

De lo anterior se desprende que μ codifica, en un espacio $O(n^3)$, toda la información de los $O(n^4)$ números almacenados en M .

Además, dada una configuración de puntos en el espacio, la matriz λ se puede calcular en tiempo $O(n^3)$ (véase [17]). Como podemos calcular μ de una configuración plana de puntos a partir de la matriz λ de las proyecciones de estos puntos sobre el paraboloido unidad (que consideramos como puntos del espacio), tenemos que μ se puede calcular en tiempo $O(n^3)$.

Pasando por el paraboloido $(d+1)$ -dimensional y utilizando el Teorema de ordenación geométrica de Goodman y Pollack, en dimensión $d+1$, se obtiene el siguiente resultado.

Dada una nube P de n puntos en \mathbb{R}^d , para cada $d+2$ puntos de P , se define:

- $\chi(i_1, \dots, i_{d+1}, i_{d+2}) = 0$ si $p_{i_{d+2}}$ está sobre la esfera $S_{i_1, \dots, i_{d+1}}$ determinada por los puntos $p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}$.

- $\chi(i_1, \dots, i_{d+1}, i_{d+2}) = 1$ si $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}) = 1$ y $p_{i_{d+2}}$ está dentro de la esfera $S_{i_1, \dots, i_{d+1}}$, o bien si $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}) = -1$ y $p_{i_{d+2}}$ está fuera de la esfera $S_{i_1, \dots, i_{d+1}}$.
- $\chi(i_1, \dots, i_{d+1}, i_{d+2}) = -1$ en los restantes casos.

Y para cada $d + 1$ puntos de P se define:

$$M(i_1, \dots, i_{d+1}) = \{m \mid \chi(i_1, \dots, i_{d+1}, m) = 1\},$$

$$\mu(i_1, \dots, i_{d+1}) = |M(i_1, \dots, i_{d+1})|.$$

Teorema 2.1 *Con las notaciones anteriores, del conocimiento de $\mu(i_1, \dots, i_{d+1})$ para todos i_1, \dots, i_{d+1} se deduce el conocimiento de $M(i_1, \dots, i_{d+1})$ para todos i_1, \dots, i_{d+1} .*

2.3.2 Número de tipos de orden circulares

Sea P una configuración de n puntos en el plano, no tres alineados ni cuatro concíclicos. El tipo de orden circular de P está determinado por el signo de los determinantes de las matrices

$$\begin{pmatrix} x_i & y_i & x_i^2 + y_i^2 & 1 \\ x_j & y_j & x_j^2 + y_j^2 & 1 \\ x_k & y_k & x_k^2 + y_k^2 & 1 \\ x_m & y_m & x_m^2 + y_m^2 & 1 \end{pmatrix}$$

para cualesquiera $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k), (x_m, y_m)$ puntos de P . Más concretamente, $\chi(i, j, k, m) = +1$ si dicho determinante es positivo, $\chi(i, j, k, m) = 0$ si el determinante es nulo y $\chi(i, j, k, m) = -1$ en caso contrario.

Así pues, el número de posibles tipos de orden circulares de una configuración de n puntos no puede ser mayor que el número de sucesiones distintas de signos de la secuencia de polinomios

$$p_1(x), \dots, p_{\binom{n}{4}}(x)$$

que definen los determinantes anteriores, siendo

$$x = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Una cota superior de este número se obtiene aplicando el siguiente resultado (véase [74]).

Teorema 2.2 *El número de sucesiones distintas de signos de m polinomios en n variables, cada uno de grado a lo sumo d , es menor o igual que*

$$\left(\frac{4edm}{n}\right)^n.$$

Aplicando el anterior teorema a los polinomios que estamos estudiando, obtenemos:

Teorema 2.3 *El número de tipos de orden circular de n puntos en el plano es a lo sumo $O(n^{6n})$.*

A continuación deduciremos una cota inferior para el número de tipos de orden circulares que, esencialmente, coincide con la cota superior anterior.

Consideremos el grafo plano (o disección plana) G que se obtiene al trazar todos los círculos $C_{i,j,k}$ con $1 \leq i < j < k \leq n$. El tipo de orden circular de los n puntos puede extenderse a uno con $n + 1$ puntos añadiendo un punto adicional en cualquiera de las regiones de G . Más aún, regiones distintas darán lugar a tipos de orden distintos.

Contrariamente a lo que ocurriría si consideráramos rectas en lugar de círculos, el número exacto de regiones de G puede depender de la configuración dada. Sin embargo, el lema siguiente nos permite demostrar que el orden de magnitud de este número es siempre $\Theta(n^6)$.

Lema 2.1 *Dados seis puntos en el plano en posición general existe una partición en dos conjuntos con tres puntos cada uno, de forma que los dos círculos determinados por las respectivas ternas se cortan.*

Demostración. Sea P el conjunto de los seis puntos y sea p_{k_1}, p_{k_2} un segmento de $CH(P)$. Sea r la recta que contiene dicho segmento. Todos los puntos de P están sobre uno de los semiplanos que define r .

Llamemos H a este semiplano. Sea s la recta perpendicular a r y que pasa por el punto medio de p_{k_1} y p_{k_2} . Todas las circunferencias que pasan por p_{k_1} y p_{k_2} tienen su centro en s . Tomando $q \in s$ un punto de H suficientemente lejano de p_{k_1}, p_{k_2} , la circunferencia de centro q que pasa por p_{k_1} y por p_{k_2} contiene en su interior todos los otros puntos de P . Si deslizamos q sobre s en la dirección de r y seguimos considerando las circunferencias de centro q y que pasen por p_{k_1} y p_{k_2} llegará un momento en que estos círculos toparán con un primer punto, p_{k_6} , de P . Si seguimos deslizando q sobre s , estos círculos toparán con un segundo punto, p_{k_5} , luego un tercero, p_{k_4} y, finalmente, con p_{k_3} . Consideramos \mathcal{C}_1 el círculo determinado por p_{k_1}, p_{k_2} y p_{k_4} y \mathcal{C}_2 el círculo determinado por los tres puntos restantes. Por la construcción hecha p_{k_3} está en el interior de \mathcal{C}_1 y p_{k_5} y p_{k_6} están fuera, así pues, podemos afirmar que \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 se cortan. \square

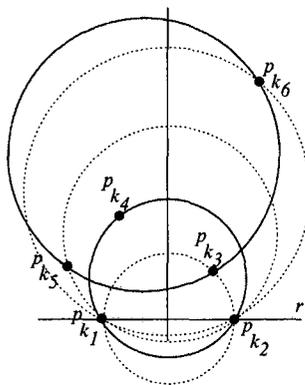


Figura 2.3: Dados 6 puntos siempre hay una partición de 3 y 3 de forma que los respectivos círculos se cortan.

Lema 2.2 *Dado un conjunto P de n puntos en el plano en posición general, el grafo plano obtenido trazando todos los círculos determinados por cada tres puntos de P tiene $O(n^6)$ regiones.*

Demostración. Dado que dos sextuplas diferentes dan lugar a parejas de aristas distintas, el número de aristas de G , y por lo tanto de regiones de G , es de orden $\Omega(n^6)$ (no puede ser mayor ya que el número de círculos es cúbico y dos círculos se cortan en dos puntos como máximo).

Finalmente, sea $\phi(n)$ el número de tipos de orden circulares con n puntos. El proceso indicado anteriormente de añadir un nuevo punto en cualquiera de las regiones de G nos da

$$\phi(n+1) \geq \phi(n)Cn^6,$$

donde C es una constante. Ignorando términos que crecen exponencialmente en n , se obtiene que $\phi(n)$ es esencialmente de orden n^{6n} . \square

2.3.3 Caso no orientado

Cabe considerar también una definición alternativa de tipo de orden circular en la que no se tenga en cuenta la orientación de los círculos, es decir, cada cuatro puntos la información es si el cuarto está contenido o no en el círculo determinado por los tres primeros. Esta definición, aunque es geoméricamente más intuitiva, no permite establecer un resultado análogo al Teorema de ordenación geométrica (versión circular). Vemos un contraejemplo en la siguiente figura.

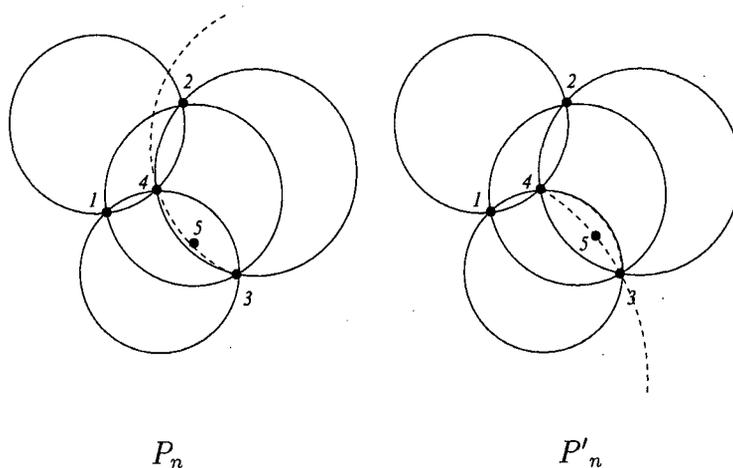


Figura 2.4: En el caso no orientado, saber cuántos puntos hay dentro de cada círculo no determina qué puntos son.

P_n		
C_{ijk}	#	Cuáles
123	2	{4,5}
124	0	-
125	1	{4}
134	1	{5}
135	0	-
145	0	-
234	1	{5}
235	0	-
245	0	-
345	1	{2}

P'_n		
C_{ijk}	#	Cuáles
123	2	{4,5}
124	0	-
125	1	{4}
134	1	{5}
135	0	-
145	0	-
234	1	{5}
235	0	-
245	0	-
345	1	{1}

Tabla 2.1

Las dos configuraciones de puntos que aparecen en la figura 2.4 tienen la misma μ (no orientada) y sin embargo no tendrían la misma M (no orientada). Esto es, si considero todos los posibles círculos que determinan cada tres puntos de la configuración y contamos cuántos puntos hay dentro, la tabla que obtenemos es la misma en ambas configuraciones y, sin embargo, si para cada configuración de puntos confeccionamos una tabla que nos diga cuáles son dichos puntos interiores a cada círculo, entonces esta tabla difiere de una configuración a otra (véase tabla 2.1).

A favor del caso no orientado podemos argüir que es geoméricamente más intuitivo. Más concretamente, en el caso orientado el tipo de orden no determina ni tan siquiera la envolvente convexa de la configuración. Por ejemplo, consideramos las configuraciones que aparecen en la figura 2.5.

Ambas configuraciones tienen el mismo tipo de orden circular y difieren, no sólo en su envolvente convexa, sino incluso en el número de vértices de ésta. El ejemplo se generaliza de forma sencilla para configuraciones de n puntos. Consideramos P una configuración de $n-1$ puntos. Sea G la disección plana anteriormente definida, esto es, la que resulta de trazar todos los círculos que determinan cada terna de puntos de la configuración.

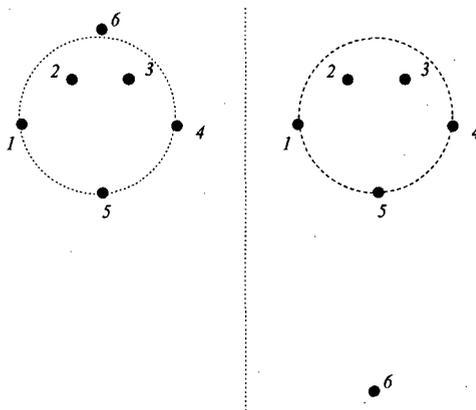


Figura 2.5: Configuraciones de puntos con igual tipo de orden circular (orientado) y distintas envolventes convexas.

Basta considerar dos configuraciones obtenidas a partir de añadir a P puntos adecuados de la región no acotada de G . Sean $Q = P \cup \{p_n\}$ y $Q' = P \cup \{p'_n\}$ las configuraciones obtenidas de la siguiente forma. Consideramos un punto $p \notin P$ del interior de la envolvente convexa de P . Trazamos un rayo de origen p y que pase por algún punto $p_i \in CH(P), p_i \in P$. Consideramos p_n un punto de dicho rayo que esté suficientemente lejos, esto es, que esté en la región no acotada de G . Análogamente, trazamos otro rayo desde p que pase por otro punto $p_j \in CH(P), p_j \in P$. Así construidas Q y Q' son configuraciones con el mismo tipo de orden circular. Si elegimos adecuadamente los puntos p_i y p_j tendremos que $p_i \notin CH(Q)$ y $p_j \in CH(Q)$ y por otra parte $p_j \notin CH(Q')$ y $p_i \in CH(Q')$ y, por tanto, dichas envolventes convexas no son iguales. Para que se verifique esto último basta elegir p_i y p_j del siguiente modo. Supongamos que p_1 y p_s son los puntos de P que minimizan y maximizan, respectivamente, la abcisa (de entre todos los puntos de P). Elegimos p_i y p_j de forma que estén en lados opuestos de la recta que une p_1 y p_s .

Sin embargo, el caso no orientado, esto es, el que nos da información sobre el número de puntos que hay dentro de cualquier círculo determinado por tres puntos de la configuración, determina, la triangulación de Delauney y, por lo tanto, la envolvente convexa.

La triangulación de Delaunay de una configuración de puntos P ,

$DT(P)$, se puede pensar como una lista de triángulos $p_i p_j p_k$ cuyos circuncentros no contienen ningún otro punto de P . Y $p_i p_j$ es una arista de $DT(P)$ si y sólo si existe algún k tal que C_{ijk} es un círculo que no contiene en su interior ningún punto de P . Más concretamente, en caso de existir solamente un tal k entonces $p_i p_j$ es una arista de $CH(P)$ y, en caso de existir dos posibles, k sería una arista interior de $DT(P)$.

Observamos que a partir del tipo de orden (ordinario) y el tipo de orden circular (orientado) obtenemos el tipo de orden circular no orientado, explícitamente tenemos que p_l está contenido en C_{ijk} si y sólo si

$$(i, j, k)\chi(i, j, k, l) = +1.$$

Utilizando lo visto en apartados anteriores tenemos compactificado en espacio $O(n^3)$ la información de si un cuarto punto está o no dentro del círculo orientado determinado por otros tres puntos.

2.3.4 Tipo de orden circular y razón doble

En esta sección no se introduce material nuevo, pero hemos creído conveniente dejar constancia aquí de cómo quedan los conceptos anteriormente introducidos expresados en términos de la razón simple y la razón doble. Nos mueven a ello razones estéticas, además de ser altamente gratificante la traducción de los conceptos aquí trabajados a un lenguaje distinto, antiguo en la matemática.

Dados tres puntos de la recta real, su razón simple se define de la siguiente manera:

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$$

La razón simple nos da información sobre si z_3 está o no en el intervalo $[z_1, z_2]$. Concretamente, la razón simple de tres puntos es positiva si y sólo si el tercero no está contenido en el intervalo determinado por los dos primeros.

Dados cuatro puntos sobre la recta real, su razón doble está defi-

nida así:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}$$

La razón doble nos da información sobre si los intervalos $[z_1, z_2]$ y $[z_3, z_4]$ están o no encajados.

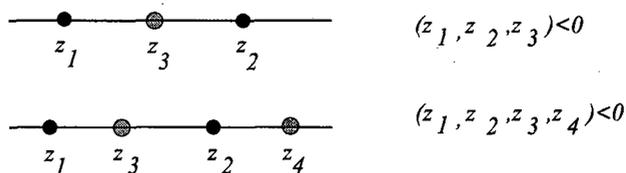


Figura 2.6: La razón simple y la razón doble nos dan información sobre la posición relativa de los puntos.

Estas definiciones podemos extenderlas a la recta compleja. En este caso, tanto la razón simple como la razón doble serán números complejos. Identificando los números complejos con puntos del plano real, a la luz de lo anterior, tiene sentido preguntarse sobre la información geométrica que nos dan, en este caso, la razón simple y la razón doble. Veremos a continuación que dicha información está muy estrechamente ligada con los tipos de orden.

Lema 2.3 *Notando $\text{Im}(z)$ a la parte imaginaria de un número complejo z tenemos el siguiente resultado: $\text{Im}(z_1, z_2, z_3)$ es nulo si y sólo si los tres puntos son colineales, es positiva en el caso en que z_1, z_2, z_3 sea un giro horario y negativa en caso contrario.*

Demostración.

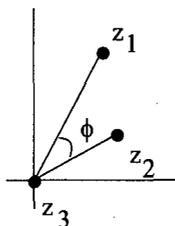


Figura 2.7: Razón simple y tipo de orden.

Basta considerar

$$\arg(z_1, z_2, z_3) = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_3 - z_2) = \phi$$

$$\operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3) = |(z_1, z_2, z_3)| \operatorname{sen}(\phi)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3) > 0 &\iff \operatorname{sen}(\phi) > 0 \iff 0 < \phi < 180^\circ \\ &\iff z_1, z_2, z_3 \text{ es un giro horario} \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 2.1 *La razón simple determina el tipo de orden ordinario de puntos en el plano.*

Lema 2.4 *$\operatorname{Im}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ es nulo si y sólo si los cuatro puntos son concíclicos, es positiva en el caso de que $\chi(1, 2, 3, 4) = +1$ y negativa en caso contrario.*

Corolario 2.2 *La razón doble determina el tipo de orden circular de puntos en el plano.*

2.4 Tipos de orden triangulares

Vamos a hacer un estudio análogo al hecho en círculos pero trabajando ahora con triángulos. Al final de este apartado veremos que parte de los resultados que se presentan para puntos en el plano se generalizan sin problemas a nubes de puntos en un espacio de dimensión d . No obstante, se ha creído conveniente tratar con detalle el caso de puntos en el plano porque el caso $d = 2$ sirve para ilustrar el caso general. Estudiamos también en este apartado la relación que guarda el tipo de orden triangular que aquí presentamos con otras estructuras asociadas a nubes de puntos en el plano, como son el grafo de intersección o el conjunto de todas las triangulaciones de la nube de puntos.

2.4.1 Caso orientado

Sea P una configuración de puntos en el plano. Para cada cuatro puntos de P , definimos $t(p_i, p_j, p_k, p_l) = 0$ si p_l está sobre el triángulo

definido por p_i, p_j, p_k ; $t(p_i, p_j, p_k, p_l) = +1$ si $p_i p_j p_k$ es un giro anti-horario y p_l está contenido en el triángulo T_{ijk} determinado por p_i, p_j y p_k , o bien si $p_i p_j p_k$ es un giro horario y p_l está fuera del triángulo T_{ijk} ; y, finalmente, $t(p_i, p_j, p_k, p_l) = -1$ en los casos restantes.

También definimos, para cada terna de puntos de P , los siguientes conceptos:

$$T(i, j, k) = \{m \mid t(p_i, p_j, p_k, p_m) = +1\}$$

$$\tau(i, j, k) = |T(i, j, k)|.$$

Es decir, τ indica cuántos puntos quedan a la izquierda de cada triángulo orientado y T indica cuáles son dichos puntos.

En esta sección demostramos el siguiente resultado: " τ determina T ". Esto es, si conocemos $\tau(i, j, k)$ (para todos i, j, k) tenemos determinado $T(i, j, k)$ (para todos i, j, k). Dicho de otro modo, si conocemos el número de puntos p_m de P que verifican $t(i, j, k, m) = +1$ para todos i, j, k, m , entonces podemos calcular el conjunto de estos puntos.

En primer lugar, vamos a mostrar que a partir del tipo de orden triangular no podemos obtener el tipo de orden (ordinario). El siguiente ejemplo muestra dos configuraciones de puntos con idéntico tipo de orden triangular y diferentes tipos de orden (ordinarios).

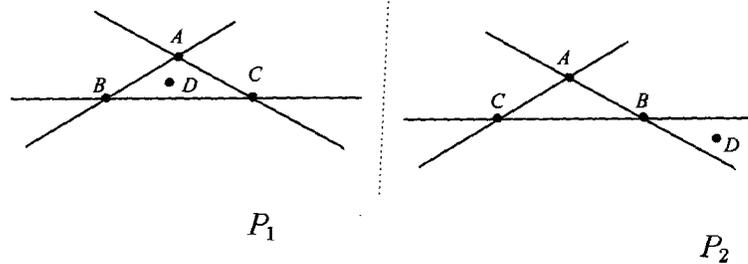


Figura 2.8: Configuraciones de puntos con distinto tipo de orden ordinario e igual tipo de orden triangular.

Para ver que ambas configuraciones tienen el mismo tipo de orden triangular, basta con ver que en ambos casos hay coincidencia en las

cuaternas que aparecen en la tabla siguiente, ya que las restantes veinte permutaciones se deducen directamente de estas cuatro.

	P_1	P_2
$t(A, B, C, D)$	1	1
$t(D, A, B, C)$	-1	-1
$t(D, B, C, A)$	-1	-1
$t(D, C, A, B)$	-1	-1

Tabla 2.2

Para comprobar que no hay coincidencia en el tipo de orden ordinario, basta observar que la recta determinada por A y D separa los puntos B y C en la configuración P_1 , cosa que no ocurre en P_2 .

Teorema 2.4 *Sea P una configuración de n puntos en el plano de forma que no hay tres alineados. Sean T y τ como las hemos definido antes. Entonces τ determina T .*

Demostración. Sean P, P' dos configuraciones de n puntos etiquetados en el plano, queremos ver que si para cualquier terna de puntos de P y de P' se verifica que

$$\tau(i, j, k) = \tau(i', j', k')$$

entonces

$$\ell \in T(i, j, k) \iff \ell' \in T(i', j', k').$$

Esto último lo notaremos $T(i, j, k) \equiv T(i', j', k')$.

Supongamos que no es así y llegaremos a contradicción.

Elegimos de entre las ternas tales que $T(i, j, k) \not\equiv T(i', j', k')$ una tal que $(i, j, k) = +1$ y $\tau(i, j, k)$ sea mínimo de entre las que verifican esto.

Puesto que $T(i, j, k)$ y $T(i', j', k')$ tienen el mismo cardinal tenemos que existen unos ciertos m, h, m' y h' tales que:

$$m \in T(i, j, k) \text{ y } m' \notin T(i', j', k')$$

y

$$h \notin T(i, j, k) \text{ y } h' \in T(i', j', k').$$

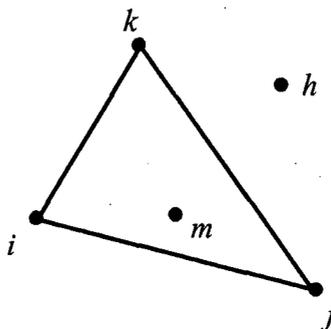


Figura 2.9: Ilustración de las hipótesis de trabajo.

Observamos que, dado que suponemos que $(i, j, k) = +1$ y $m \in T(i, j, k)$, tenemos que m está en el interior del triángulo T_{ijk} . Además se verifica que $(i, j, m) = +1$, $(j, k, m) = +1$ y $(k, i, m) = +1$, de donde tenemos que un punto l verifica que $t(i, j, m, l) = +1$ si y sólo si l está dentro del triángulo T_{ijm} , y análogamente con las otras ternas. Concluimos, pues, que se tiene la siguiente relación.

$$\tau(i, j, k) = \tau(i, j, m) + \tau(j, k, m) + \tau(k, i, m) + 1$$

De donde:

$$\tau(i, j, m) < \tau(i, j, k)$$

$$\tau(j, k, m) < \tau(i, j, k)$$

$$\tau(k, i, m) < \tau(i, j, k)$$

y, como hemos elegido la terna (i, j, k) de forma que $\tau(i, j, k)$ fuera mínimo de entre todas las ternas donde $T(i, j, k) \not\equiv T(i', j', k')$, obtenemos:

$$T(i, j, m) \equiv T(i', j', m')$$

$$T(j, k, m) \equiv T(j', k', m')$$

$$T(k, i, m) \equiv T(k', i', m')$$

Pueden presentarse dos situaciones:

- Supongamos $(i', j', k') = +1$. Recordamos que estamos suponiendo que $m' \notin T(i', j', k')$ y $h' \in T(i', j', k')$. Así pues, en este caso, como $(i', j', k') = +1$, tenemos que h' está dentro del triángulo $T_{i'j'k'}$ y m' está fuera m' (véase figura 2.10).

Si m' está a la derecha de la recta determinada por i', j' , entonces $(i', j', m') = -1$ y h' está fuera del triángulo $T_{i'j'm'}$ de donde concluimos

$$h' \in T(i', j', m') \Rightarrow h \in T(i, j, m) \Rightarrow h \in T(i, j, k).$$

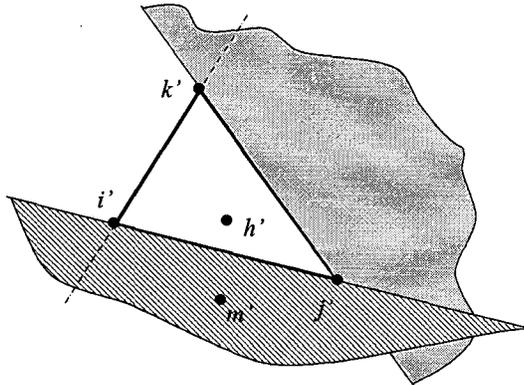


Figura 2.10: Distinción de zonas a estudiar.

Razonando análogamente, en caso de estar m' a la derecha de la recta determinada por j', k' o de la recta determinada por k', i' concluimos que $h \in T(i, j, k)$.

Así pues, en cualquier caso llegamos a una contradicción con las hipótesis de partida.

- Supongamos que $(i', j', k') = -1$. En este caso m' está en el interior del triángulo $T_{i'j'k'}$ y h' está fuera de dicho triángulo.

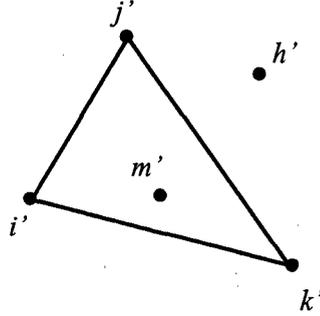


Figura 2.11: Situación actual.

En este caso k', h' están fuera del triángulo $T_{i'j'm'}$, en cuyo caso -como $(i', j', m') = -1$ -, tendríamos que $k', h' \in T(i', j', m')$ y, por lo tanto, $k, h \in T(i, j, m)$. Como además $(i, j, m) = +1$, tenemos que k, h están en el interior del triángulo T_{ijm} , contradicción con lo que suponíamos. \square

2.4.2 Caso no orientado

Vamos a hacer un estudio análogo a lo hecho anteriormente pero trabajando ahora con triángulos no orientados. Para evitar complicar las notaciones, utilizaremos las mismas que las que hemos utilizado en el caso orientado, siempre que no haya posibilidad de confusión.

Sea P una configuración de puntos en el plano. Para cada cuatro puntos de P , definimos $t(p_i, p_j, p_k, p_l) = 0$ si p_l está sobre el triángulo definido por p_i, p_j, p_k , $t(p_i, p_j, p_k, p_l) = +1$ si p_l está contenido en el triángulo T_{ijk} cuyos vértices son p_i, p_j y p_k , y, finalmente, $t(p_i, p_j, p_k, p_l) = -1$ en los casos restantes.

También definimos

$$T(i, j, k) = \{m \mid t(p_i, p_j, p_k, p_m) = +1\}$$

y

$$\tau(i, j, k) = |T(i, j, k)|.$$

Es decir, τ indica cuántos puntos hay dentro o fuera de cada triángulo y T indica cuáles son dichos puntos.

A diferencia de lo que pasaba con los círculos, en esta sección demostramos el siguiente resultado: “ τ determina T ”, aún en el caso en que los triángulos no estén orientados. La línea de la demostración es muy similar a la que se ha visto en el caso orientado.

Teorema 2.5 *Sea P una configuración de n puntos en el plano de forma que no hay tres alineados. Sean T y τ como las hemos definido antes. Entonces τ determina T .*

Demostración. Sean P y P' dos configuraciones de n puntos etiquetados en el plano, queremos ver que, si para cualquier terna de puntos de P y de P' se verifica que

$$\tau(i, j, k) = \tau(i', j', k'),$$

entonces

$$\ell \in T(i, j, k) \iff \ell' \in T(i', j', k').$$

Esto último lo notaremos $T(i, j, k) \equiv T(i', j', k')$.

Supongamos que no es así, esto es, supongamos que las τ son iguales en ambas configuraciones pero que las T no. Queremos llegar a una contradicción.

Cogemos de entre las ternas tales que $T(i, j, k) \not\equiv T(i', j', k')$ una tal que $\tau(i, j, k)$ sea mínimo de entre las que verifican esto.

Puesto que $T(i, j, k)$ y $T(i', j', k')$ tienen el mismo cardinal tenemos que existen unos ciertos m, h, m' y h' tales que:

$$m \in T(i, j, k) \text{ y } m' \notin T(i', j', k')$$

y

$$h \notin T(i, j, k) \text{ y } h' \in T(i', j', k').$$

Aquí la situación es análoga a la que se presenta en las figuras 2.11 y 2.12.

Observamos que

$$\tau(i, j, k) = \tau(i, j, m) + \tau(j, k, m) + \tau(k, i, m) + 1$$

de donde:

$$\tau(i, j, m) < \tau(i, j, k)$$

$$\tau(j, k, m) < \tau(i, j, k)$$

$$\tau(k, i, m) < \tau(i, j, k)$$

y, por como hemos elegido la terna (i, j, k) , tenemos:

$$T(i, j, m) \equiv T(i', j', m')$$

$$T(j, k, m) \equiv T(j', k', m')$$

$$T(k, i, m) \equiv T(k', i', m')$$

En este caso, sea cual sea la posición de m' , podemos asegurar que h' está contenido en alguno de los siguientes triángulos: $T_{i'k'm'}$, $T_{i'j'm'}$ o $T_{j'k'm'}$. En el primer caso concluiríamos que $h \in T_{ikm}$, en el segundo que $h \in T_{ijm}$ y en el tercero que $h \in T_{jkm}$. En cualquier caso, $h \in T_{ijk}$, contradiciendo las hipótesis de partida. \square

Estudiaremos a continuación la información geométrica que obtenemos a partir del tipo de orden triangular, tanto en su versión orientada como en la no orientada, así como la relación que guarda con el grafo de intersecciones de P , y con el conjunto de todas las posibles triangulaciones de P y todos sus posibles árboles generadores.

2.4.3 Tipo de orden triangular, grafo de intersección, triangulaciones y árboles generadores

Vamos a estudiar ahora qué información, sobre la configuración de puntos, nos da el tipo de orden triangular.

Dados cuatro puntos, el tipo de orden triangular no orientado, esto es, el saber si el cuarto punto está o no dentro del triángulo que forman los tres primeros, nos informa de si los cuatro puntos están o no en posición convexa.

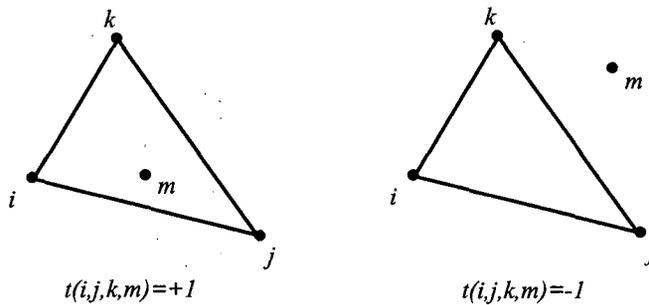


Figura 2.12: Posibles situaciones.

Ahora bien, el caso no orientado no nos informa sobre si hay o no corte entre la arista que une los dos primeros puntos y la arista que une los dos últimos. En particular, no diferencia los dos casos que aparecen en la figura siguiente.

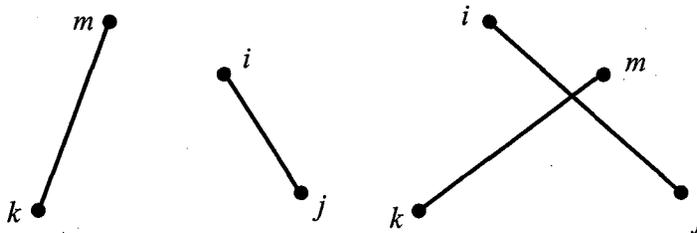


Figura 2.13: Corte o no de dos segmentos.

Vamos a ver a continuación la información que sobre todo esto nos da el tipo de orden triangular en el caso orientado.

Teorema 2.6 *El tipo de orden triangular orientado determina si cuatro puntos están o no en posición convexa.*

Demostración. Concretamente, vamos a ver que los puntos i, j, k , y m no están en posición convexa si y sólo si se da una de las dos circunstancias siguientes:

$$\text{a) } t(k, m, i, j) = -1, t(k, i, j, m) = -1 \text{ y } t(k, j, m, i) = -1$$

$$\text{b) } t(k, m, i, j) = +1, t(k, i, j, m) = +1 \text{ y } t(k, j, m, i) = +1$$

Empezamos por demostrar la implicación directa. Supongamos que i, j, k y m son cuatro puntos que no están en posición convexa. En tal caso uno de los puntos estará en el interior del triángulo determinado por los otros tres.

Posibilidades		Situación
$m \in T_{ijk}$	$(i, j, k) = +1$	b
	$(i, j, k) = -1$	a
$k \in T_{ijm}$	$(i, j, m) = +1$	a
	$(i, j, m) = -1$	b
$j \in T_{ikm}$	$(i, k, m) = +1$	b
	$(i, k, m) = -1$	a
$i \in T_{jkm}$	$(j, k, m) = +1$	a
	$(j, k, m) = -1$	b

Tabla 2.3

La tabla 2.3 nos muestra los diferentes casos que pueden darse y refleja que siempre se verifica el enunciado del teorema.

Veamos ahora la implicación en sentido contrario. Supongamos que los puntos i, j, k , y m están en posición convexa. En este caso ningún punto puede estar en el interior del triángulo determinado por los otros tres.

$$\text{Caso 1: } t(k, m, i, j) = -1$$

Recordamos que esta hipótesis equivale a decir que $(k, m, i) = +1$ y j fuera de T_{kmi} o bien $(k, m, i) = -1$ y j dentro de T_{kmi} . Por lo tanto, por estar los puntos en posición convexa, este caso equivale a imponer $(k, m, i) = +1$. Análogamente, imponer $t(k, i, j, m) = -1$ es equivalente a imponer que $(k, i, j) = +1$.

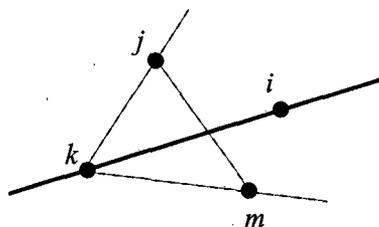


Figura 2.14: Ilustración de la situación.

Pero en tal caso no puede suceder que $(k, j, m) = -1$ ya que ello obligaría a que k estuviera en el interior de T_{mij} . Así pues, $(k, j, m) = -1$ y, como i está fuera del triángulo T_{kjm} , concluimos que $t(k, j, m, i) = +1$.

Caso 2: $t(k, m, i, j) = +1$

Con razonamientos análogos a los expuestos en el caso anterior obtendríamos que si se verifica que $t(k, m, i, j) = +1$ y $t(k, i, j, m) = +1$ entonces debe verificarse $t(k, j, m, i) = -1$. \square

Teorema 2.7 *El tipo de orden triangular orientado determina si existe o no corte entre dos segmentos i, j y k, m .*

Demostración. Concretamente, vamos a ver que los segmentos i, j y k, m se cortan si y sólo si los puntos i, j, k, m están en posición convexa y, además, $t(k, m, j, i)t(k, m, i, j) = -1$.

Fijadas las posiciones de i, j y k estudiamos las posibles posiciones de m .

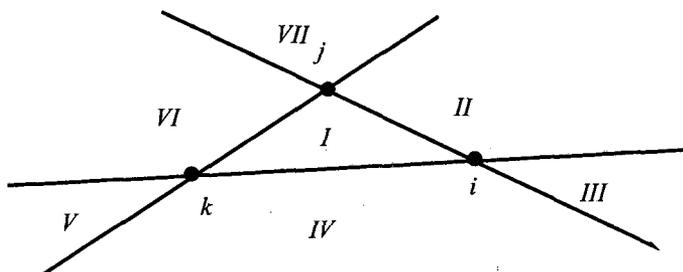


Figura 2.15: Zonas a estudiar.

Los segmentos i, j y k, m se cortan si y sólo si m está situado en la zona II. Observamos que los cuatro puntos están en posición convexa si y sólo si m está en la zona II, o en la zona IV, o en la zona VI. Esta información acabamos de ver en el resultado anterior que la podemos obtener a partir del tipo de orden triangular orientado. Sólo falta ver cómo diferenciar la zona II de las otras dos. La diferenciación es sencilla, basta darse cuenta de que $t(k, m, j, i) = t(k, m, i, j)$ en las zonas IV y VI y que $t(k, m, j, i) = -t(k, m, i, j)$ en la zona II. Este último dato es independiente de la situación en que se encuentren los puntos i, j y k . Esto es, éste es un resultado que sigue siendo válido si el punto k , en vez de estar a la izquierda de la recta determinada por i, j (como muestra la figura), está a la derecha de dicha recta, o si los puntos i y j intercambian sus papeles. \square

Dada una configuración de puntos $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ se llama *grafo de intersección de P* , y lo notaremos $GI(P)$, al grafo que tiene por vértices las diagonales de P , esto es: $p_1p_2, p_1p_3, \dots, p_{n-1}p_n$ y cuyas adyacencias corresponden a diagonales que se cortan.

A la vista de las proposiciones anteriores concluimos el siguiente resultado.

Teorema 2.8 *El tipo de orden triangular orientado determina $GI(P)$.*

Veamos ahora la relación que todo esto guarda con las posibles triangulaciones de una nube de puntos.

Teorema 2.9 *$GI(P)$ determina —y está determinado por— el conjunto de todas las posibles triangulaciones de P .*

Demostración. La demostración se apoya en el resultado básico de que dado un conjunto de diagonales que no se cortan siempre se puede completar a una triangulación.

Dados dos vértices de $GI(P)$ (diagonales de P) queremos saber si son adyacentes o no (esto es, si son diagonales que se cortan o no). Miramos, para ello, la lista de todas las triangulaciones de P . Pueden ocurrir dos cosas:

- No existe ninguna triangulación de P que contenga simultáneamente estas dos diagonales. En este supuesto las dos diagonales se cortan y, por lo tanto, pensadas como vértices de $GI(P)$ son adyacentes.
- Existe alguna triangulación de P que contiene simultáneamente las dos diagonales. En este caso las dos diagonales no se cortan y, por lo tanto, no tenemos adyacencia en $GI(P)$.

Por otra parte, dar una triangulación de P es dar un conjunto maximal de puntos independientes de $GI(P)$. \square

De forma análoga se demuestra el siguiente resultado para árboles generadores de P .

Teorema 2.10 *$GI(P)$ determina el conjunto de todos los posibles árboles generadores sin cortes de P .*

Corolario 2.3 *El tipo de orden triangular orientado determina el conjunto de todas las posibles triangulaciones de la nube de puntos, así como el conjunto de todos los posibles árboles generadores sin cortes.*

2.4.4 Tipos de orden simpliciales en dimensión d

En este apartado vamos a generalizar el estudio realizado en la sección anterior con triángulos del plano a símlices en un espacio de dimensión d arbitraria.

Sea P una configuración de n puntos en el espacio de dimensión d . Para cada $d + 2$ puntos de P , definimos

- $t(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}, p_{i_{d+2}}) = 0$ si $p_{i_{d+2}}$ está sobre el símplex $\Delta_{i_1, \dots, i_{d+1}}$ cuyos vértices son $p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}$.

- $t(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}, p_{i_{d+2}}) = 1$ si $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}) = 1$ y $p_{i_{d+2}}$ está dentro del símlice $\Delta_{i_1, \dots, i_{d+1}}$, o bien, $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}) = -1$ y $p_{i_{d+2}}$ está fuera del símlice $\Delta_{i_1, \dots, i_{d+1}}$,
- $t(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}, p_{i_{d+2}}) = -1$ en los restantes casos.

El conjunto de todos estos valores lo denominamos *tipo de orden simplicial* de la configuración P .

También definimos para cada $(d+1)$ -upla de puntos de P :

$$T_d(i_1, \dots, i_{d+1}) = \{m \mid t(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}, p_m) = +1\}$$

y

$$\tau_d(i_1, \dots, i_{d+1}) = |T_d(i_1, \dots, i_{d+1})|.$$

Es decir, τ indica cuántos puntos hay dentro o fuera de cada símlice orientado y T_d indica cuáles son dichos puntos.

En este apartado demostramos el resultado siguiente, que es la generalización natural del presentado en el apartado 2.4.1.

Teorema 2.11 *Sea P una configuración de n puntos en posición general en el espacio d -dimensional. Sean T_d y τ_d como las hemos definido antes. Entonces τ_d determina T_d .*

Demostración. Sean P, P' dos configuraciones de n puntos etiquetados en el plano, queremos ver que si para cualquier $(d+1)$ -upla de puntos de P y de P' se verifica que

$$\tau_d(i_1, \dots, i_{d+1}) = \tau_d(i'_1, \dots, i'_{d+1})$$

entonces

$$l \in T_d(i_1, \dots, i_{d+1}) \iff l' \in T_d(i'_1, \dots, i'_{d+1}).$$

Esto último lo notaremos $T(i_1, \dots, i_{d+1}) \equiv T(i'_1, \dots, i'_{d+1})$.

Supongamos que no es así, esto es, suponemos que todas las τ coinciden y sin embargo no todas las T coinciden, y llegaremos a contradicción.

Elegimos de entre las $(d + 1)$ -uplas con $T(i_1, \dots, i_{d+1}) \neq T(i'_1, \dots, i'_{d+1})$ una tal que $(p_{i_1}, \dots, p_{i_{d+1}}) = +1$ y $\tau_d(i_1, \dots, i_{d+1})$ sea mínimo de entre las que verifican esto.

Puesto que $T(i_1, \dots, i_{d+1})$ y $T(i'_1, \dots, i'_{d+1})$ tienen el mismo cardinal, tenemos que existen unos ciertos m, h, m' y h' tales que:

$$m \in T(i_1, \dots, i_{d+1}) \text{ y } m' \notin T(i'_1, \dots, i'_{d+1})$$

y

$$h \notin T(i_1, \dots, i_{d+1}) \text{ y } h' \in T(i'_1, \dots, i'_{d+1}).$$

Observamos que, dado que suponemos que $(i_1, \dots, i_{d+1}) = +1$ y $m \in T(i_1, \dots, i_{d+1})$, tenemos que m está en el interior del simplexe $\Delta_{i_1, \dots, i_{d+1}}$. Además se verifica que

$$\begin{aligned} (i_1, \dots, i_d, m) &= +1, \\ (i_2, \dots, i_{d+1}, m) &= +1, \\ (i_3, \dots, i_{d+1}, i_1, m) &= +1, \\ &\dots \\ (i_d, i_{d+1}, i_1, \dots, i_{d-2}, m) &= +1, \\ (i_{d+1}, i_1, \dots, i_{d-1}, m) &= +1. \end{aligned}$$

de donde tenemos que un punto l verifica que $t(i_1, \dots, i_d, m, l) = +1$ si y sólo si l está dentro del simplexe $\Delta_{i_1, \dots, i_d, m}$, y análogamente con las otras d diferentes $(d + 1)$ -uplas. Concluimos, pues, que se verifica la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \tau_d(i_1, \dots, i_{d+1}) &= \tau_d(i_1, \dots, i_d, m) + \tau_d(i_2, \dots, i_{d+1}, m) + \\ &+ \dots + \tau_d(i_{d+1}, i_1, \dots, i_{d-1}, m) + 1. \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} \tau_d(i_1, \dots, i_d, m) &< \tau_d(i_1, \dots, i_d, i_{d+1}) \\ \tau_d(i_2, \dots, i_{d+1}, m) &< \tau_d(i_1, \dots, i_d, i_{d+1}) \\ &\dots \\ \tau_d(i_{d+1}, i_1, \dots, i_{d-1}, m) &< \tau_d(i_1, \dots, i_d, i_{d+1}) \end{aligned}$$

y, por el carácter minimal de la $(d+1)$ -upla $(i_1, \dots, i_d, i_{d+1})$, obtenemos:

$$\begin{aligned} T(i_1, \dots, i_d, m) &\equiv T(i'_1, \dots, i'_d, m') \\ T(i_2, \dots, i_{d+1}, m) &\equiv T(i'_2, \dots, i'_{d+1}, m') \\ &\dots \\ T(i_{d+1}, i_1, \dots, i_{d-1}, m) &\equiv T(i'_{d+1}, i'_1, \dots, i'_{d-1}, m'). \end{aligned}$$

- $(i'_1, \dots, i'_d, i'_{d+1}) = +1$

Recordamos que estamos suponiendo que $m' \notin T(i'_1, \dots, i'_d, i'_{d+1})$ y $h' \in T(i'_1, \dots, i'_d, i'_{d+1})$. Así pues, en este caso, como $(i'_1, \dots, i'_d, i'_{d+1}) = +1$ tenemos que h' está dentro del símplice $\Delta_{i'_1, \dots, i'_d, i'_{d+1}}$ y m' está fuera.

Sea π el hiperplano soporte del símplice $\Delta_{i'_1, \dots, i'_d, i'_{d+1}}$ tal que separa el espacio en dos regiones, una de las cuales contiene al símplice y la otra la que contiene a m' .

Sea c la cara del símplice que está sobre π . Supongamos que c es la cara que tiene por vértices i'_1, \dots, i'_d . (El proceso es análogo en caso de ser cualquiera de las otras). Como estamos suponiendo que $(i'_1, \dots, i'_d, i'_{d+1}) = 1$, y i'_{d+1} y m' están en lados diferentes de π , concluimos que $(i'_1, \dots, i'_d, m') = -1$, y por estar h' fuera del símplice $\Delta_{i'_1, \dots, i'_d, m'}$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} h' \in T(i'_1, \dots, i'_d, m') &\Rightarrow h \in T(i_1, \dots, i_d, m) \\ &\Rightarrow h \in T(i_1, \dots, i_d, i_{d+1}) \end{aligned}$$

lo cual contradice las hipótesis iniciales.

- $(i'_1, \dots, i'_d, i'_{d+1}) = -1$.

En este caso m' está en el interior del símplice $\Delta_{i'_1, \dots, i'_d}$ y h' está fuera. También se verifica que $(i'_1, \dots, i'_d, m') = -1$ y h' y i'_{d+1} están fuera del símplice $\Delta_{i'_1, \dots, i'_d, m'}$ de donde obtenemos que i'_{d+1} y $h' \in T(i'_1, \dots, i'_d, m')$ y por lo tanto $i_{d+1}, h \in T(i_1, \dots, i_d, m)$. Como se verifica que $(i_1, \dots, i_d, m) = 1$ concluimos que i_{d+1} y h están en el interior del símplice $\Delta_{i_1, \dots, i_d, m}$, contradiciendo las hipótesis. \square

La demostración de este resultado en el caso no orientado es la generalización directa de la presentada para el plano en la sección 2.4.2.

2.5 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo se ha introducido el concepto de orden circular y triangular, en las versiones orientada y no orientada. Se han demostrado resultados combinatorios análogos a resultados bien conocidos sobre tipos de orden ordinarios, como es el llamado Teorema de ordenación geométrica. Se ha estudiado también, de una forma bastante exhaustiva, la información geométrica que nos proporciona cada uno de estos conceptos.

Las posibles líneas de trabajo a seguir son muchas y todas ellas interesantes. Un primer objeto de estudio podría ser lo que hemos llamado *tipos de orden generalizados*, que generalizarían el tipo de orden triangular (no orientado) introducido en este capítulo, de la forma siguiente. Dada una nube de puntos P en el plano, para cada subconjunto (p_1, \dots, p_k) de k puntos, el k -ésimo tipo de orden nos informaría de si el punto p_k está o no en el interior de la envolvente convexa de los $k - 1$ primeros puntos. Es obvio que, para todo k , el k -ésimo tipo de orden así definido determina el siguiente. En particular el tipo de orden triangular (que no es sino el 4-ésimo tipo de orden) determina todos los demás. También es fácil ver que, si n es el cardinal de P , entonces la información que nos da el n -ésimo tipo de orden es exactamente la envolvente convexa de P . Falta estudiar qué información geométrica concreta nos dan los tipos de orden intermedios.

Otra generalización posible arranca de lo hecho aquí sobre los tipos de orden circulares.

Sea K un conjunto compacto y convexo del plano euclídeo, con interior no vacío. Podemos considerar la familia S de todos los conjuntos del plano que se obtienen a partir de K mediante homotecias y traslaciones.

Observamos que en el caso particular de ser K un círculo, S sería el conjunto de todos los círculos del plano. En general, los elementos de S son las bolas de una distancia definida a partir de K . Una propiedad importante que verifican los círculos es que dados tres puntos distintos y no alineados p_i, p_j, p_k existe un único círculo C tal que p_i, p_j, p_k están en la frontera de C .

Si K es un conjunto compacto y convexo cualquiera no se verifica esta propiedad. Esto es, dados tres puntos no alineados no existe, en general, una copia obtenida de K por homotecia o traslaciones tal que su frontera pase por dichos tres puntos y, en caso de existir una tal copia, no tiene por qué ser única. Las restricciones que hay que imponer a K para que S verifique la propiedad que anteriormente hemos citado de los círculos es que K sea *estrictamente convexo y suave* (véase [53] o [64]). Una vez estemos en estas condiciones, el problema a abordar es el mismo que nos hemos planteamos aquí para círculos.

Dada una nube de puntos y definiendo $\chi_K(i, j, k, m)$, μ_K y M_K de forma similar a como habíamos definido $\chi(i, j, k, m)$, μ y M , el problema fundamental consiste en demostrar que μ_K determina M_K . En el caso de los círculos dábamos una demostración que pasaba por la elevación al paraboloides unidad. La propiedad fundamental de este levantamiento es que la intersección del paraboloides con un plano no vertical se proyecta sobre una circunferencia de \mathbb{R}^2 . Además, la parte del paraboloides por debajo del plano se proyecta sobre el interior de la circunferencia y la parte por encima del plano se proyecta sobre el exterior de la circunferencia. Recíprocamente, cualquier circunferencia de \mathbb{R}^2 , al levantarla al paraboloides es una elipse, es decir, la intersección del paraboloides con un plano no vertical. Esta es una propiedad muy específica de los círculos y que no tiene traducción posible para conjuntos compactos y convexos, ni siquiera en el caso de que sean estrictamente convexos y suaves. Véase [64] para más información sobre este particular.

Se trataría, pues, de estudiar una demostración de lo hecho para círculos que no pase por la elevación al paraboloides unidad sino basada en las propiedades propias de los círculos que son traducibles a los

conjuntos estrictamente convexos y suaves.

En esta misma línea, atendiendo a que el tipo de orden circular aquí presentado es un ejemplo de matroide orientada y que este nuevo tipo de orden "convexo" también lo es, cabe plantearse un resultado general para matroides orientadas.