

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA**

*Departament de Matemàtica Aplicada I*

**COMPLEJIDAD DE ESTRUCTURAS  
GEOMÉTRICAS Y COMBINATORIAS**

Autor: Maria del Carmen Hernando Martín

Directores: Ferran Hurtado Díaz

Marc Noy Serrano

1999

## Capítulo 3

# Empaquetamiento de árboles y ciclos en grafos planos

### 3.1 Introducción

Se dice que los grafos  $H_1, H_2$  admiten un *empaquetamiento* en un grafo  $G$  cuando  $G$  contiene subgrafos isomorfos a  $H_1$  y  $H_2$  disjuntos en aristas. Existen numerosos resultados sobre este problema y sus generalizaciones, particularmente sobre el empaquetamiento de árboles. El problema se complica enormemente cuando a la estructura combinatoria se le añaden propiedades de la *representación*, tal como sucede en el área de *graph drawing* (véase [2], [69]). Por ejemplo, puede comprobarse personalmente que dado un árbol  $T$  con  $n$  vértices dibujado arbitrariamente de forma rectilínea y sin cortes sobre un conjunto de  $n$  puntos, no está nada claro si es posible o no hallar un camino generador sin cortes de los vértices de  $T$ , que no comparta aristas con  $T$ , ni las corte.

Resultados obtenidos sobre el empaquetamiento de árboles se recogen en el apartado 3.4 de este capítulo. Concretamente, mostraremos que, eligiendo un buen dibujo de un árbol  $T$ , sí es posible dibujar dos copias de  $T$  sobre un conjunto de  $n$  puntos, sin que se repitan aristas y sin que haya cortes. Y lo mismo cabe decir sobre  $T$  y un camino

generador.

El resto del trabajo se ha estructurado como sigue. En el segundo apartado se dan las definiciones básicas y los resultados previos sobre empaquetamientos de grafos. En el apartado 3.3 se desarrolla una técnica esencialmente geométrica que nos permitirá posteriormente demostrar resultados combinatorios anteriormente citados. En el apartado 3.5 se estudiará el empaquetamiento plano de ciclos y finalmente en el apartado 3.6 se plantean problemas abiertos, que son la continuación natural de este trabajo.

### 3.2 Definiciones y planteamiento del problema

Decimos que los grafos  $H_1, \dots, H_k$  admiten un empaquetamiento en un grafo  $G$ , si  $G$  contiene subgrafos isomorfos a  $H_1, \dots, H_k$  disjuntos en aristas. En el caso particular de que la reunión de estos subgrafos dé todo el grafo  $G$  se dice que tenemos una *descomposición* de  $G$ . El problema de empaquetamiento de grafos ha recibido una atención considerable en el caso en que  $G$  es el grafo completo. En [27] se demuestra que dos árboles de orden  $n$  pueden empaquetarse en  $K_n$  siempre que ninguno de ellos sea una estrella, siendo una estrella  $S_p$  el árbol cuyas aristas son todas incidentes en el vértice  $p$ . (Si  $T$  pudiese empaquetarse con  $S_p$ , como  $T$  no comparte ninguna arista con  $S_p$ , en particular  $p$  es un vértice aislado de  $T$  y, por lo tanto,  $T$  no sería un árbol). También hay estudios que caracterizan completamente los grafos con  $n$  vértices y  $n - 1$  aristas que son empaquetables en el grafo completo [27]. El empaquetamiento de tres árboles es más delicado, recientemente se ha probado (véase [52], [76]) que tres árboles de orden  $n$  y grado a lo sumo  $n - 3$  pueden empaquetarse en  $K_n$  salvo en ciertos casos bien determinados. Los problemas de descomposición de grafos completos es una línea de investigación muy activa en estos momentos. Resulta natural considerar empaquetamientos en grafos que no sean completos.

Decimos que los grafos  $H_1, \dots, H_k$  de orden  $n$  admiten un empa-

quetamiento plano si pueden empaquetarse en algún grafo plano de orden  $n$ . Observamos que en este caso, lo que se obtiene es un dibujo simultáneo de los grafos  $H_1, \dots, H_k$  con el mismo conjunto de vértices y donde no hay aristas repetidas ni aristas que se corten. Esto hace que si coloreamos cada grafo de un color diferente obtengamos la información que nos dan los  $k$  grafos por separado en un dibujo que lo integra todo. Observamos que empaquetar una familia de grafos planos  $H_1, \dots, H_k$  se reduce a dibujar simultáneamente los grafos en el plano sin cortes y sin aristas múltiples. Por supuesto esto es trivial si no se acota el número de vértices de  $G$ , pero no así en el caso  $|V(G)| = \max|V(H_i)|$ . Si esta condición se cumple, decimos que  $H_1, \dots, H_k$  admiten un *empaquetamiento plano ajustado*.

El estudio de este tipo de empaquetamiento es el objetivo de este trabajo. Más concretamente, vamos a estudiar el empaquetamiento plano ajustado de dos árboles; esto es, dados dos árboles  $T_1$  y  $T_2$ , ambos con  $n$  vértices, estamos interesados en saber si admiten un empaquetamiento plano en un grafo plano con  $n$  vértices. Tal como hemos dicho antes, sabemos que, si ninguno de los dos es una estrella, entonces  $T_1$  y  $T_2$  admiten un empaquetamiento en  $K_n$  pero dicho empaquetamiento no tiene por qué ser plano. También observamos que tres árboles con  $n$  vértices nunca admiten un empaquetamiento plano ajustado, ya que cada árbol tiene  $n - 1$  aristas y un grafo plano tiene a lo sumo  $3n - 6$  aristas.

En este capítulo presentamos un empaquetamiento plano ajustado de varias parejas de árboles. En el próximo apartado estudiamos un tipo de representación plana de un árbol cualquiera, que nos será de gran utilidad en los siguientes apartados.

### 3.3 Dibujar árboles en un polígono convexo

Decimos que un grafo  $H$  de orden  $n$  admite *una representación en el convexo* si se puede trazar  $H$  de forma rectilínea y sin cortes sobre un conjunto de  $n$  puntos en posición convexa de manera que las aristas

utilizadas en la representación sean diagonales internas o lados de la frontera del convexo.

En particular, todo árbol admite varias representaciones de este tipo. En los apartados siguientes nos serán de gran utilidad las representaciones de este tipo tales que las aristas dibujadas sobre la envolvente convexa verifiquen una serie de propiedades muy concretas.

Vamos a continuación a estudiar más detalladamente cierto tipo de representaciones en el convexo.

Se llama *hoja* de un grafo  $G$  a los vértices de  $G$  de grado uno. Haciendo un pequeño abuso del lenguaje llamaremos en ocasiones hojas a las aristas incidentes en vértices de grado uno. Recordamos que todo árbol tiene al menos dos hojas.

**Lema 3.1** *Sea  $T$  un árbol de  $n > 3$  vértices, y sea  $T'$  un árbol obtenido al añadir una hoja  $h$  a un vértice  $v$  de  $T$  de grado  $r \geq 2$ . Si  $T$  admite una representación en el convexo  $S$  que tiene  $m$  aristas sobre la frontera del convexo, entonces  $T'$  también admite una representación en el convexo con sólo  $m$  aristas en la frontera del convexo.*

*Demostración.* Sean  $T_1, \dots, T_r$  los subárboles que salen de  $v$  en  $T$  y sea  $n_i$  el número de vértices de cada uno de estos subárboles, para  $i = 1, \dots, r$ . Numeramos los vértices del convexo de 1 a  $n$  en sentido horario, comenzando en la posición que ocupa  $v$  en  $S$ . Necesariamente, los  $n_i$  vértices del subárbol  $T_i$  deben aparecer en posiciones consecutivas del convexo para no producir cortes en la representación de  $T$ . Supongamos que, a continuación del 1 aparecen en el convexo los vértices de  $T_1$ , luego los vértices de  $T_2$ , y así sucesivamente, hasta los de  $T_r$ , siempre avanzando en sentido horario. Notamos

$$p_1^i = 1 + \sum_{k=1}^i n_k \quad \text{y}$$

$$p_2^i = 2 + \sum_{k=1}^i n_k$$

y observamos que en la posición  $p_1^i$  hay un vértice de  $T_i$  y en la posición siguiente  $p_2^i$  hay un vértice de  $T_{i+1}$  para  $i = 1, \dots, r - 1$ . Entonces

entre cualquier pareja de vértices  $p_1^i$  y  $p_2^i$  se puede insertar el vértice  $h$  de forma que la arista  $vh$  no es un lado del convexo y no corta a ninguna arista de  $S$  (véase figura 3.1).  $\square$

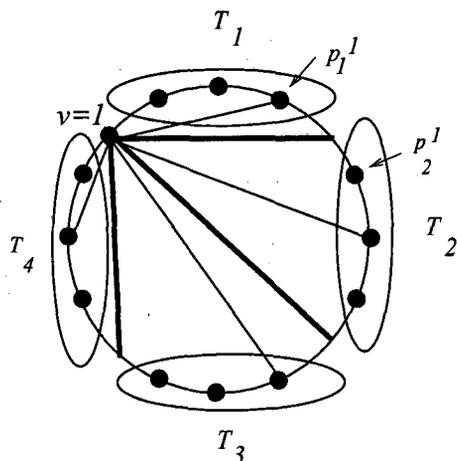


Figura 3.1: Posibles inserciones de una hoja en  $S$ .

Observamos que si  $T_1$  o  $T_r$  es una hoja, entonces  $h$  también se puede insertar entre las posiciones 1 y 2, o entre  $n$  y 1, pues el nuevo eje  $vh$  no incrementa en estos casos el número de lados de la frontera del convexo utilizados.

También observamos que si  $T'$  admite una representación en la frontera con  $m'$  lados del convexo, entonces al eliminar la arista  $vh$  obtenemos una representación de  $T$  en la frontera con menor o igual número  $m'$  de lados de la frontera.

Sea ahora  $T$  un árbol de  $n > 1$  vértices y que tiene  $m$  hojas a las que denotaremos por  $h_1, \dots, h_m$ . A partir de  $T$ , construimos otro árbol  $\bar{T}$  añadiendo una hoja nueva  $\bar{h}_i$  a cada una de las hojas  $h_i$  de  $T$  (véase figura 3.2). Obviamente, el número de vértices de  $\bar{T}$  es al menos cuatro y el número de hojas de  $T$  y  $\bar{T}$  es el mismo. Se cumple entonces el siguiente lema.

**Lema 3.2** *En cualquier representación  $S$  de  $\bar{T}$  en el convexo, las aristas  $h_i\bar{h}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ocupan necesariamente lados no consecutivos de la frontera. Además,  $\bar{T}$  puede representarse con exactamente esos  $m$  lados de la frontera.*

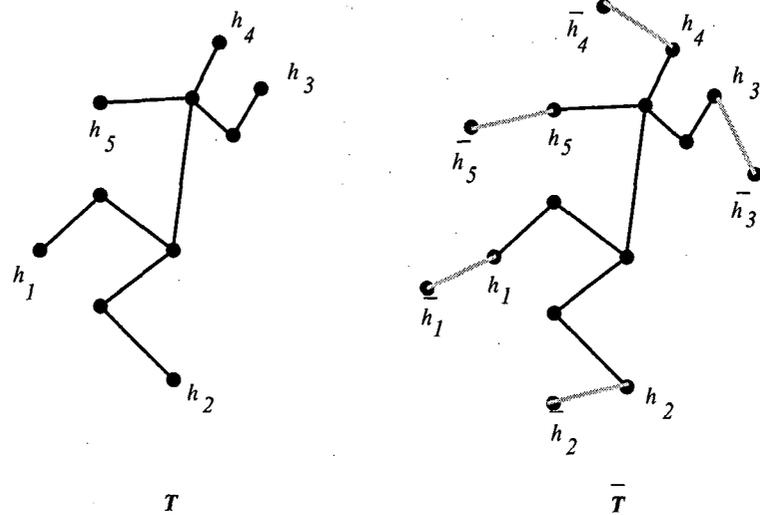


Figura 3.2: Construcción de  $\bar{T}$ .

*Demostración.* Si una arista  $h_i\bar{h}_i$  es una diagonal del convexo — esto es, una arista que no está en la frontera— en una representación cualquiera  $S$ , entonces la frontera queda dividida en dos zonas que no se pueden unir por el interior de la frontera sin cortar a dicha diagonal puesto que el grado de  $h_i$  en  $\bar{T}$  es dos. Por lo tanto, cada arista  $h_i\bar{h}_i$  ocupa un lado de la frontera y estos lados no pueden ser consecutivos pues dichas aristas no son nunca adyacentes.

Para ver que se puede realizar una representación de  $\bar{T}$  que tenga exactamente estos  $m$  lados de la frontera, utilizaremos inducción sobre el número de hojas  $m$ . Si  $m = 2$ , esto es, el árbol  $\bar{T}$  es un trayecto, entonces basta trazar el trayecto en forma de zig-zag, utilizando así sólo dos lados no consecutivos de la frontera que son las aristas  $h_1\bar{h}_1$  y  $h_2\bar{h}_2$  (recordamos que  $\bar{T}$  tiene al menos cuatro vértices).

Consideremos ahora la cadena  $c$  que comienza en  $\bar{h}_1$  y termina en el primer vértice  $v$  de grado mayor o igual que dos que se encuentre en  $\bar{T}$  (véase figura 3.3). En la cadena  $c$  se encuentran al menos los vértices  $h_1$  y  $\bar{h}_1$ . Eliminando  $c$  se obtiene un nuevo árbol  $T'$  que tiene  $m - 1$  hojas y que por inducción verifica el lema. Sea  $S$  una representación cualquiera de  $T'$  en la que sólo las aristas  $h_i\bar{h}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , ocupan lados de la frontera. Se está ahora en las mismas condiciones que en

el lema anterior, excepto que en lugar de tener que insertar en  $S$  una hoja hay que insertar la cadena  $c$ . Insertando  $c$  en forma de zig-zag (véase figura 3.3), como  $c$  tiene al menos dos vértices, se ocupa un lado de la frontera que es necesariamente la arista  $h_i\bar{h}_i$ .  $\square$

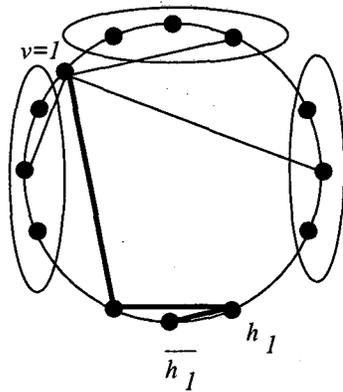


Figura 3.3: Inserción de la cadena que contiene a  $h_1$ .

Dado un árbol  $T$ , llamaremos operación *poda* de  $T$  al proceso de eliminar en  $T$  todas sus hojas. Notamos  $T^*$  el árbol resultante de este proceso, que llamaremos el *pelado* de  $T$ .

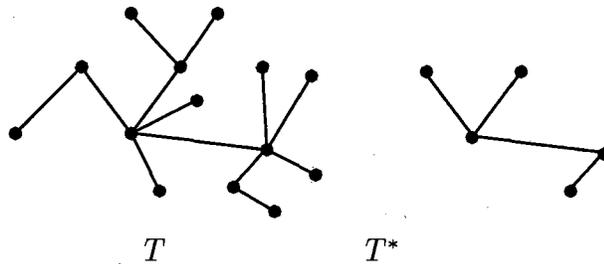
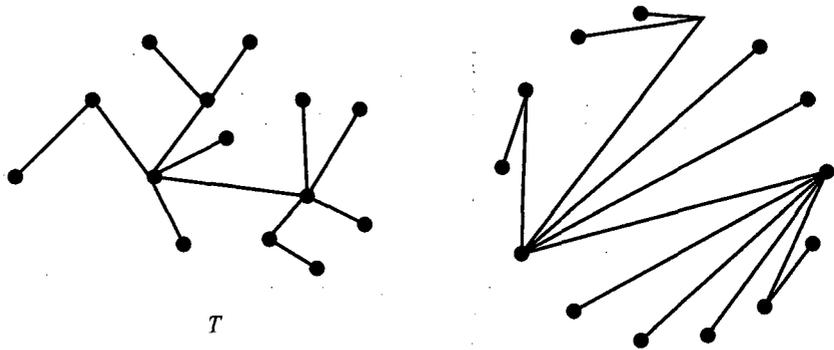


Figura 3.4: Poda de un árbol.

De los dos lemas previos, se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 3.1** *Sea  $T$  un árbol cualquiera distinto de una estrella, con  $n > 3$  vértices, y sea  $T^*$  el árbol obtenido tras podar  $T$ . Entonces  $T$  admite una representación en el convexo de forma que no hay dos aristas sobre dos lados consecutivos del convexo. Además, si el número de hojas de  $T^*$  es  $m$ , entonces el número mínimo de aristas sobre la frontera que usa cualquier representación de  $T$  en el convexo es  $m$ .*



**Figura 3.5:** Representación de  $T$  en el convexo con el mínimo número de aristas sobre la frontera del convexo.

### 3.4 Empaquetamiento plano de árboles

El problema que nos planteamos es el siguiente. Dados dos árboles de orden  $n$ , ninguno de ellos una estrella —condición que ya hemos visto que es necesaria—, ver que admiten un empaquetamiento plano ajustado. El siguiente lema justifica el estudio de representaciones de un grafo en el convexo hecho en el apartado anterior.

**Lema 3.3** *Dados dos grafos  $H_1$  y  $H_2$  de orden  $n$ , si existen  $S_1$  y  $S_2$  representaciones de ambos en el convexo tales que no comparten aristas, entonces  $H_1$  y  $H_2$  admiten un empaquetamiento plano ajustado.*

*Demostración.* Basta trazar  $S_1$  por dentro del convexo y  $S_2$  por fuera.

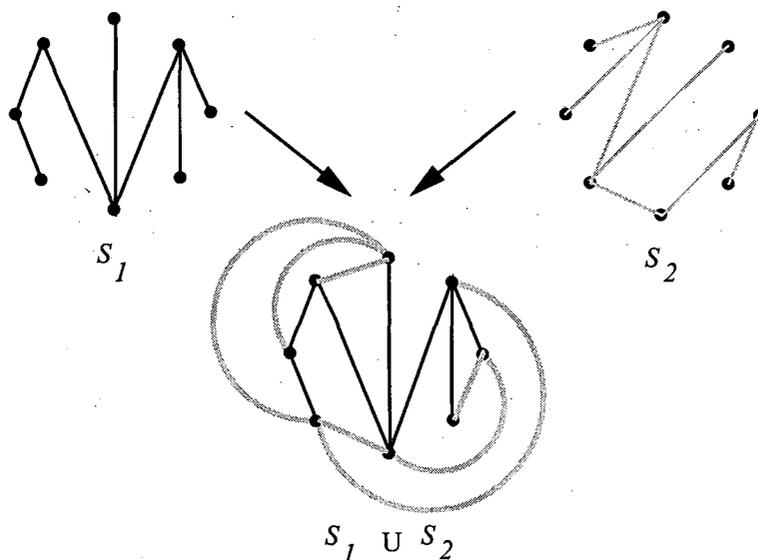
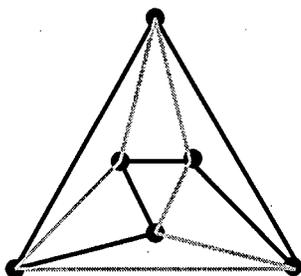


Figura 3.6: Empaquetado de dos árboles en el convexo.

O, visto de otra forma, podemos suponer que los vértices de un polígono convexo están en el ecuador de una esfera. Entonces podemos dibujar las aristas de  $H_1$  en un hemisferio y las aristas de  $H_2$  en el hemisferio opuesto. Puesto que los dos dibujos son planos y no comparten aristas, obtenemos un grafo plano en la esfera.  $\square$

A la vista del resultado anterior tenemos una condición suficiente para el empaquetamiento plano de dos árboles. Una ventaja de este tipo de representación es que nos permite tener  $S_1$  y  $S_2$  totalmente separados, lo cual facilita la visibilidad de los dos grafos. Es fácil ver, no obstante, que las hipótesis del lema anterior no son una condición necesaria para el empaquetamiento plano de dos grafos. Basta coger, por ejemplo, dos copias de  $C_6$ , ciclo de 6 vértices. En la figura 3.7 vemos un empaquetamiento plano de dos copias de  $C_6$  y se comprueba por exploración directa que no se puede empaquetar en el convexo sin repetir aristas.

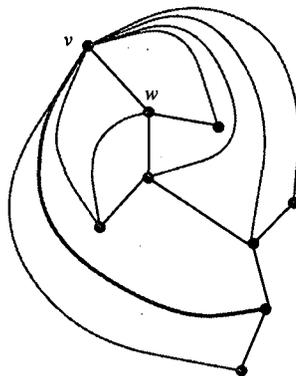


**Figura 3.7:** Empaquetado plano de dos ciclos  $C_6$ .

Se define la *cuasi-estrella* como el único árbol en que un vértice tiene grado  $n - 2$ .

**Teorema 3.2** *Dado un árbol  $T$  de orden  $n$  que no sea una estrella,  $T$  y una cuasi-estrella de orden  $n$  admiten un empaquetamiento plano.*

*Demostración.* Sea  $S$  una representación plana cualquiera de  $T$  y sea  $v$  una hoja de  $S$ . Siempre es posible identificar con  $v$  el vértice de la cuasi-estrella que tiene grado  $n - 2$ . Basta unir  $v$  con todos los vértices de  $S$  salvo con  $w$ , vértice adyacente a  $v$  en  $S$ . Esto siempre es posible dada la no existencia de ciclos en  $S$  que pudieran provocar obstrucciones. Sea  $G$  el grafo resultante de añadir a  $S$  todas estas aristas adyacentes a  $v$ . Finalmente, siempre existe algún vértice (diferente de  $v$ ) en  $G$  que ve  $w$ .  $\square$



**Figura 3.8:** Empaquetado plano de la cuasi-estrella y un árbol cualquiera.

Si intentamos una demostración como la anterior para dos copias de un árbol cualquiera, la cosa no resulta nada sencilla. Utilizando las herramientas desarrolladas en el apartado anterior, en éste vamos a mostrar cómo obtener un empaquetamiento plano de dos copias de un árbol.

**Teorema 3.3** *Dado un árbol  $T$  que no sea una estrella,  $T$  y una copia de  $T$  admiten un empaquetamiento en el convexo y, por lo tanto, un empaquetamiento plano ajustado.*

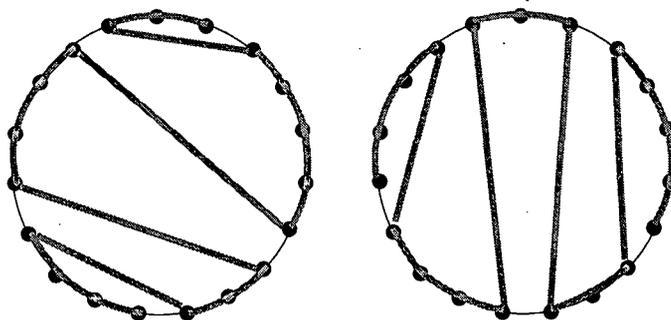
*Demostración.* Sea  $P$  un polígono convexo con vértices  $v_1, \dots, v_n$ , numerados tal como aparecen en la frontera del convexo (en sentido antihorario). Por el teorema 3.1, existe una representación de  $T$  que no utiliza dos lados consecutivos de la frontera del convexo. Una copia de esta representación se obtiene girando  $T$  en una unidad (en sentido antihorario). Por construcción, estas dos representaciones no tienen ningún par de aristas de la frontera en común. Por otra parte, ninguna arista  $v_i v_j$  con  $j \neq i + 1$  puede ser común, puesto que esto significaría que las aristas  $v_i v_j$  y  $v_{i-1} v_{j-1}$  estaban en la primera representación, lo cual es imposible ya que estas dos diagonales se cortan.  $\square$

**Teorema 3.4** *Dado un árbol  $T$  de orden  $n$  que no es una estrella,  $T$  y un trayecto con  $n$  vértices admiten un empaquetamiento en el convexo.*

*Demostración.* Por el teorema anterior, se sabe que se puede representar un árbol  $T$  en el convexo utilizando sólo las aristas  $h_i \bar{h}_i$   $i = 1, \dots, m$ , como lados de la frontera, siendo  $\bar{h}_i$  una hoja de  $T$  y  $h_i$  una hoja del pelado de  $T$ . Observamos que en la representación del árbol  $T$  en el convexo los vértices  $\bar{h}_i$ , que son hojas de  $T$ , son adyacentes sólo a los vértices  $h_i$ . Por otra parte, dos vértices  $h_i$  y  $h_j$ , por ser hojas del pelado de  $T$  no pueden ser adyacentes entre sí, salvo en el caso en que  $T$  sea una biestrella (en este caso el pelado se reduce a una arista que une las dos hojas).

Consideramos ahora una representación de  $T$  en el convexo que tenga el mínimo número de lados de la frontera. Supongamos que

este mínimo es  $m$ . Recordamos que en una tal representación no hay dos lados consecutivos de la frontera. Así pues, los lados de la frontera no utilizados en la representación se distribuyen en  $m$  cadenas. Hay  $m$  maneras distintas de unir estas cadenas para obtener un trayecto generador. En todas estas uniones se enlazan vértices del tipo  $\bar{h}_i$  con  $\bar{h}_j$ , o  $h_i$  con  $\bar{h}_j$ , o  $h_i$  con  $h_j$ . Si  $T$  no es una biestrella, sabemos que ninguna de estas aristas aparecen en la representación de  $T$  y por lo tanto tenemos, de forma constructiva,  $m$  diferentes maneras de empaquetar  $T$  con el trayecto.



**Figura 3.9:** Dos posibles trayectos generadores que unen los lados del convexo no utilizados en  $T$ .

En caso que  $T$  sea una biestrella, utilizamos una representación de  $T$  en el convexo que sólo tenga dos lados de la frontera (que serán no consecutivos). Entonces el trayecto se puede empaquetar, por ejemplo, utilizando la diagonal que une las dos hojas de la biestrella que ocupan lados del convexo y el resto de lados del convexo no utilizados por la biestrella.  $\square$

Observamos que en el caso de tener una representación de  $T$  en el convexo que gaste  $k > m$  lados del convexo, pero que verifique que no contiene dos lados consecutivos del convexo, también podemos empaquetar el trayecto. Tendríamos ahora los lados del convexo que no son utilizados en la representación de  $T$  distribuidos en  $k$  cadenas. Como el número de aristas de esta nueva representación de  $T$  que

conectan extremos de las  $k$  cadenas es  $k - 1$  (por ser  $T$  un árbol) y hay  $k$  maneras diferentes y disjuntas de conectar estas cadenas para obtener un trazado plano de un trayecto generador, al menos uno de estos trazados ha de ser disjunto en aristas con la representación de  $T$ .

Finalizamos esta sección dando dos resultados que generalizan los que acabamos de presentar y cuyas demostraciones son análogas a las que acabamos de realizar.

**Teorema 3.5** *Sea  $H$  un grafo plano tal que se puede representar en el convexo sin utilizar lados consecutivos de su frontera. Entonces podemos empaquetar dos copias de  $H$  en el convexo. En particular, dicho empaquetamiento es un empaquetamiento plano ajustado.*

**Teorema 3.6** *Sea  $H$  un grafo plano tal que:*

1. *puede representarse en el convexo,*
2. *tiene  $k$  lados no consecutivos sobre la frontera,*
3.  *$H$  induce un subgrafo en las aristas que unen los lados que están dibujadas en la frontera del convexo que tiene a lo más  $k - 1$  aristas.*

*Entonces se puede empaquetar  $H$  y un trayecto en el convexo.*

Si  $H$  es un ciclo, entonces no verifica las hipótesis de los teoremas anteriores. Estudiamos este caso en el próximo apartado.

### 3.5 Empaquetamiento plano de ciclos

En el estudio de los empaquetamientos planos tiene sentido considerar otros grafos distintos a los árboles o el empaquetamiento de más de dos grafos. En esta sección presentamos algunos resultados sobre

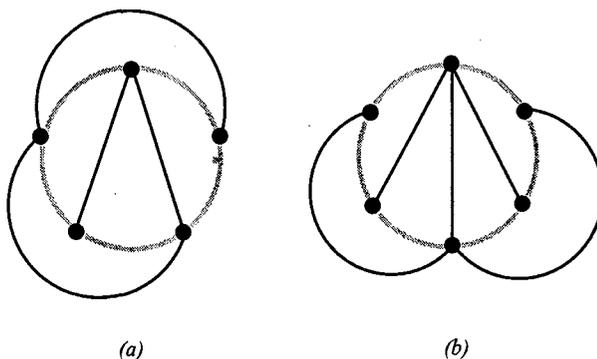
los empaquetamientos de ciclos y sobre los empaquetamientos de tres trayectos de la misma longitud.

Empezamos con la siguiente pregunta: dados dos ciclos de longitud  $n$ , ¿cuándo admiten un empaquetamiento plano ajustado, es decir, un empaquetamiento plano cuyo grafo tenga  $n$  vértices?

En este apartado demostramos en primer lugar que se puede empaquetar planarmente un ciclo de  $n$  vértices con cualquier árbol de orden  $n$  y grado a lo sumo  $n - 3$  (condición claramente necesaria). Esto nos da una demostración alternativa de que se pueden empaquetar planarmente un trayecto y un árbol, si bien aquí la demostración no es constructiva. Además, se deducen dos corolarios interesantes para los que la técnica del convexo parece insuficiente. Pasamos luego a dar resultados sobre el empaquetamiento plano de 2 y 3 ciclos.

**Teorema 3.7** *Dado un árbol  $T$  de orden  $n \geq 5$  y con grado máximo a lo sumo  $n - 3$ , se puede empaquetar planarmente junto con un ciclo  $C$  formado por los  $n$  lados de un convexo.*

*Demostración.* Demostraremos este resultado por inducción sobre  $n$ . Si  $n = 5$ , el único árbol  $T$  de grado a lo sumo  $n - 3$  es la cadena y entonces el resultado es cierto como muestra la figura 3.10a.



**Figura 3.10:** (a) El lema para  $n = 5$ .  
(b) El ciclo y la biestrella de 6 vértices.

Tomemos un árbol  $T'$  de orden  $n+1$  y con grado máximo a lo sumo  $n - 2$ .  $T'$  siempre contiene una hoja  $h$  de tal forma que al eliminar  $h$ ,

el nuevo árbol resultante  $T$  de orden  $n$  tiene grado máximo a lo sumo  $n - 3$ . Esta afirmación tiene una única excepción, que es el caso en que  $T'$  es la biestrella con  $n + 1 = 6$ , pero este árbol también verifica el lema como muestra la figura 3.10b. Sea  $S$  el empaquetamiento de  $T$  y el ciclo, que por inducción existe, y sea  $v$  el vértice de  $T$  al que hay que añadir  $h$  para reproducir  $T'$ . Sean  $v_i$  y  $v_d$  los dos vecinos de  $v$  en el ciclo y sea  $L$  la zona conexa del ciclo que no contiene  $v$  (véase figura 3.11).

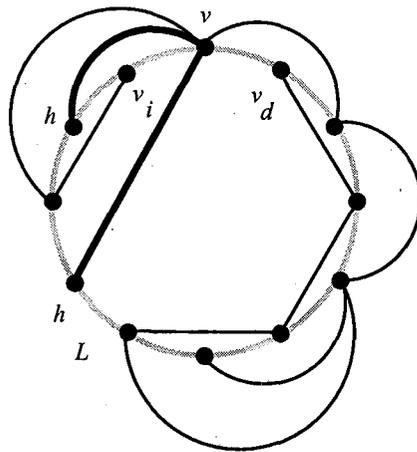


Figura 3.11: Unión  $vh$  por el interior o por el exterior.

Si en  $S$ ,  $v$  se puede conectar por el interior del ciclo a un punto  $x \in L$  sin producir cortes, de forma que  $x$  no es un vértice del árbol, entonces colocando  $h$  en  $x$  y trazando la arista  $vh$  se obtiene un empaquetamiento de  $T'$  que verifica el teorema. Si, por el contrario, no existe ese punto  $x$ , entonces, necesariamente hay un camino  $c$  por el interior del ciclo que une  $v_d$  con  $v_i$  utilizando aristas del árbol  $T$ .

Lo mismo sucede por el exterior del ciclo. Si no existiese una unión sin cortes y completamente externa entre  $v$  y un punto  $x' \in L$  distinto de un vértice del árbol, entonces necesariamente existiría un camino  $c'$  por el exterior del ciclo que uniría  $v_d$  con  $v_i$  utilizando aristas del árbol  $T$ . La no existencia de  $x$  y  $x'$  implica que existe un ciclo en  $T$  formado por  $c$  y  $c'$ , lo cual no es posible.  $\square$

Observamos que la condición de convexidad del ciclo no es necesaria y los razonamientos siguen siendo válidos para cualquier representación plana que se haga del ciclo.

**Corolario 3.1** *Dado un árbol  $T$  de orden  $n \geq 5$  y con grado máximo a lo sumo  $n - 3$ , se puede empaquetar planarmente  $T$  y un trayecto de forma que el trayecto tenga origen en cualquier vértice prefijado de  $T$ .*

*Demostración.* Basta empaquetar  $T$  con un ciclo y eliminar luego una arista.  $\square$

Observamos que, indistintamente, es el final del trayecto el que podríamos prefijar, pero no se puede al mismo tiempo prefijar el origen y el final.

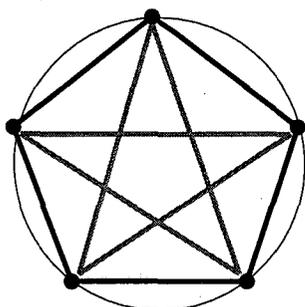
**Corolario 3.2** *Sea  $T$  un árbol de orden  $n \geq 5$  y grado máximo a lo sumo  $n - 3$ . Dada una inmersión plana cualquiera de  $T$ , existe un empaquetamiento de  $T$  y un camino que respeta la inmersión dada.*

*Demostración.* Con las notaciones de la demostración del teorema 3.7, por inducción  $T$  puede representarse con la inmersión deseada, y al añadir la hoja se respeta la inmersión.  $\square$

Un problema natural que no parece haber recibido atención es el del empaquetamiento de dos o más ciclos. En esta línea hemos obtenido los siguientes resultados.

**Teorema 3.8** *Dos ciclos de longitud  $n$  admiten un empaquetamiento plano en un grafo de  $n$  vértices si, y sólo si,  $n = 6$  o  $n > 7$ .*

*Demostración.* Si  $n = 3, 4$  entonces es obvio que no existe un empaquetamiento plano de dos ciclos porque  $2n > 3n - 6$  en estos casos. Si  $n = 5$ , la unión de dos  $C_5$  disjuntos es  $K_5$  que es un grafo no plano (véase figura 3.12).



**Figura 3.12:** Dos copias disjuntas de  $C_5$ .

Si  $n = 6$  pueden empaquetarse dos  $C_6$  disjuntos en el grafo del octaedro, que es igual a  $K_6$  menos un emparejamiento perfecto (véase figura 3.7). Para ver que no es posible para  $n = 7$ , recordamos que un grafo contráctil a  $K_5$  no es plano. Supongamos que  $G$  es plano y tiene 7 vértices, y sus lados son unión disjunta de dos ciclos  $C_7$ . Entonces  $G$  es 4-regular y el grafo complementario  $\overline{G}$  es 2-regular y, por lo tanto, igual a  $C_3 \cup C_4$  o a  $C_7$ . Si  $\overline{G} = C_3 \cup C_4$  entonces claramente  $G$  contiene  $K_{3,3}$  como subgrafo y no es plano. Si  $\overline{G} = C_7 = v_1 v_2 \dots v_7$ , entonces  $G$  contiene un grafo contráctil a  $K_5$  que tiene como vértices  $v_1, v_2, v_4, v_6$  y la contracción de  $v_3 v_7$ , donde el trayecto que une  $v_1$  y  $v_2$  se realiza vía  $v_5$ .

Finalmente, si  $n \geq 8$  la siguiente construcción, distinguiendo los casos en que  $n$  es par o impar, produce un empaquetamiento de dos copias  $C_n$  consigo mismo (véase figura 3.13). Consideramos un convexo como la primera copia de  $C_n$ . Suponiendo los vértices ordenados, en el caso  $n$  par tomamos la segunda copia como sigue:

$$1, n-1, 2, n-2, 3, n-3, \dots, \frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}+1, n, \frac{n}{2}.$$

Y en el caso  $n$  impar:

$$1, n-1, 2, n-2, 3, \dots, \frac{n-5}{2}, \frac{n+5}{2}, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}, n, \frac{n+1}{2}, \frac{n-3}{2}. \square$$

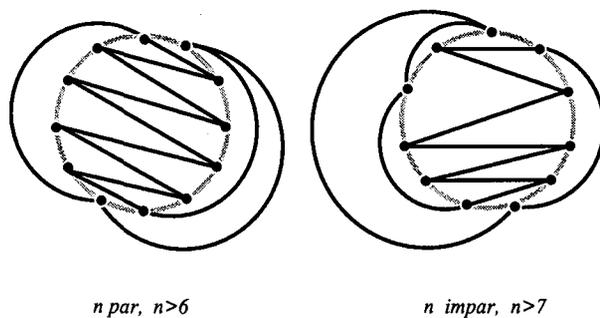


Figura 3.13: Empaquetado plano de dos ciclos.

Damos a continuación representaciones planas rectilíneas de los dos grafos anteriores.

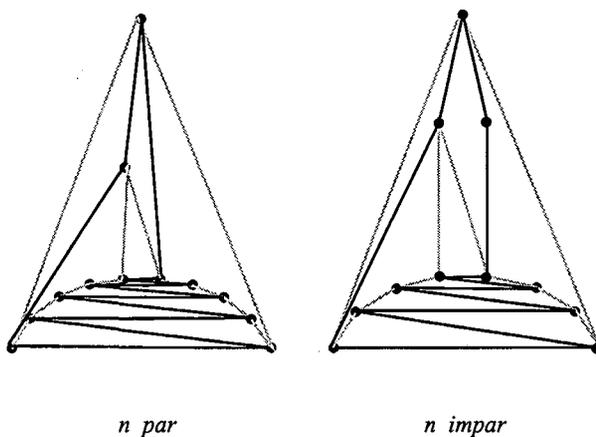


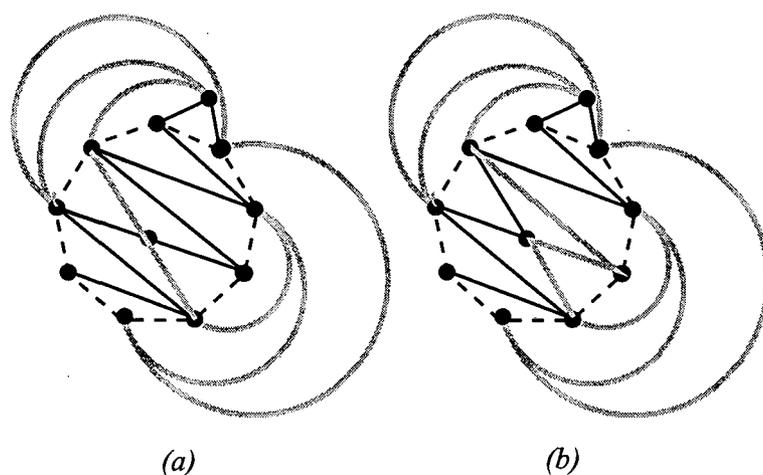
Figura 3.14: Representaciones planas rectilíneas de los dos grafos anteriores.

En un grafo plano de orden  $n$  no se pueden empaquetar tres ciclos de longitud  $n$ , ya que a lo sumo tiene  $3n - 6$  aristas. A lo más podemos empaquetar tres ciclos de longitud  $n - 2$ . Más en general podemos preguntarnos por posibles empaquetamientos planos de ciclos  $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_r}$ , cada uno de longitud  $i_k$  con  $k = 1, \dots, r$ , de forma que  $i_1 + \dots + i_r = 3n - 6$ . No siempre son posible estos empaquetamientos. Por ejemplo, con razonamientos análogos a los dados en la demostración anterior se comprueba que no se pueden empaquetar tres copias de  $C_5$  en un grafo plano de siete vértices, ni tampoco tres ciclos de longitudes

4, 5 y 6. Resultados positivos que se han obtenido en esta línea son los siguientes.

**Teorema 3.9** *Tres ciclos de longitudes  $n-1, n-2, n-3$  admiten un empaquetamiento plano, si y sólo si,  $n = 6$  o  $n > 7$ .*

*Demostración.* La demostración es análoga a la del teorema 3.8, siendo ahora la construcción explícita que prueba este resultado la que se muestra en la figura 3.15a.  $\square$



**Figura 3.15:** Empaquetado plano de: (a)  $C_{n-1} \cup C_{n-2} \cup C_{n-3}$ ,  
(b)  $3C_{n-2}$ .

La construcción explícita ha dado ahora más trabajo, ya que al empaquetar los tres ciclos resulta un grafo triangulado -siendo por tanto un resultado no mejorable-, llamémosle  $G_n$ . Es fácil ver que, coloreando sobre las aristas de  $G_n$  los ciclos anteriores, uno de los triángulos tiene dos aristas de  $C_{n-1}$  y una de  $C_{n-3}$ . Invertiendo en dicho triángulo los colores (véase figura 3.15b) obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.10** *Tres ciclos de longitud  $n-2$  admiten un empaquetamiento en un grafo plano de orden  $n$  si, y sólo si,  $n = 6$  o  $n > 7$ .*

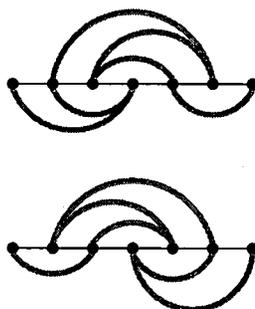
Con el mismo tipo de técnicas se demuestra que también caben tres caminos de longitud  $n-2$ , y esta vez sin excepciones.

**Teorema 3.11** *Para todo  $n \geq 3$ , pueden empaquetarse tres caminos de longitud  $n - 1$  en un grafo plano de orden  $n$ .*

Para finalizar este apartado, dado un ciclo  $C_n$  dibujado en el plano, podemos preguntarnos cuántas permutaciones (circulares) de  $[n]$  pueden dibujarse de forma disjunta con el ciclo y sin cortes.

**Teorema 3.12** *Dado un ciclo  $C_n$  dibujado en el plano, con  $n = 7N$  para cierto  $N$ , entonces al menos hay  $2^{n/7}$  posibles permutaciones (circulares) de  $[n]$  que pueden dibujarse de forma disjunta con el ciclo y sin cortes.*

*Demostración.* Una construcción explícita nos da la cota inferior anterior.



**Figura 3.16:** Dos caminos disjuntos con  $P$ , con el mismo origen y el mismo final.

Dado un camino  $P$  con siete vértices, en la figura 3.16 se muestran otros dos caminos disjuntos con  $P$  y que tienen todos ellos el mismo origen y el mismo final. Basta ahora dividir los vértices de  $C_n$  en subconjuntos de siete vértices. En cada uno de estos subconjuntos se puede representar cualquiera de los dos caminos de la figura 3.16, y el resultado en cada caso será otro ciclo sin cortes con  $C_n$  y disjuntos en aristas. Los ciclos así obtenidos son todos distintos.  $\square$

### 3.6 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo se han presentado varios resultados sobre el empaquetamiento plano de árboles y ciclos. Concretamente, para árboles que no sean estrellas, se ha estudiado el empaquetamiento plano de dos copias de un árbol cualquiera, un árbol y un camino, un ciclo y un árbol y, finalmente, el empaquetamiento plano de dos o tres ciclos. La principal herramienta que se ha utilizado ha sido la representación de un árbol en un polígono convexo con propiedades muy concretas.

Una posible línea de trabajo es caracterizar los grafos  $H$  que verifican el enunciado de los teoremas 3.4 y 3.5. Concretamente, estudiar qué grafos planos pueden dibujarse en el convexo de forma que no tengan aristas sobre lados consecutivos del convexo. Observamos que si  $H$  se puede representar en el convexo, en particular estamos hablando de grafos extraplanos.

Otro campo de trabajo es continuar con el estudio del empaquetamiento plano de ciclos. En el caso de tres ciclos  $C_{n-2}$ , su empaquetamiento da lugar a un grafo plano triangulado  $G_n$ . Cabe preguntarse si es único. Es fácil ver que  $G_n$  debe tener seis vértices de grado cuatro y el resto de grado seis. Concretamente,  $G_6$  ha de ser el octaedro, que es  $C_4 + N_2$ ,  $G_8$  ha de ser  $C_6 + N_2$  y, teniendo en cuenta que hay vértices de grado seis, se ve que  $G_9$  también es único.

También cabe preguntarse por la unicidad del grafo plano triangulado resultante de empaquetar tres caminos  $P_{n-1}$ .

También se ha estudiado el empaquetamiento plano de tres ciclos  $C_{n-1} \cup C_{n-2} \cup C_{n-3}$ . Una línea de investigación sería estudiar el empaquetamiento plano de ciclos  $C_{i_1} \cup \dots \cup C_{i_k}$  tales que  $i_1 + \dots + i_k = n$ . Que existen excepciones lo muestra el hecho de que no se puedan empaquetar tres ciclos  $C_5$  en un grafo plano de orden siete.

Finalmente, un problema abierto y muy interesante, sería probar la conjetura siguiente:

**Conjetura.** Todo par de árboles que no sean estrellas admite un empaquetamiento plano ajustado.

Estudiando los diferentes casos, se ve que la conjetura es cierta para  $n \leq 7$ . Otra pregunta a hacerse es si toda pareja de árboles que no sean estrellas admiten representaciones en el convexo disjuntas en aristas. Ante la dificultad de estos problemas, caben plantearse líneas de acción diferentes. La primera es demostrar que dos árboles pertenecientes a ciertas familias admiten un empaquetamiento plano. En esta línea, en [15] se demuestra que dos grafos *caterpillar* (que son aquellos que su pelado es un camino) cualesquiera admiten un empaquetamiento plano. Otra línea de trabajo consistiría en estudiar ciertos debilitamientos del problema, como sería empaquetar dos árboles de orden  $n$  en nubes de  $n + k$  puntos con  $k > 0$ . En esta línea se trabaja en [5], donde, con el mismo tipo de técnicas que las que se han utilizado aquí, se muestra cómo empaquetar dos árboles binarios de orden  $n$  en un convexo de  $\frac{3n}{2}$  puntos.