

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament de Matemàtica Aplicada I

**COMPLEJIDAD DE ESTRUCTURAS
GEOMÉTRICAS Y COMBINATORIAS**

Autor: Maria del Carmen Hernando Martín

Directores: Ferran Hurtado Díaz

Marc Noy Serrano

1999

Capítulo 5

Grafos de emparejamientos perfectos sin cortes

5.1 Introducción

Siguiendo en la misma línea que los capítulos precedentes, vamos a estudiar en este capítulo otro grafo geométrico asociado a una nube de puntos. Concretamente, dada una nube P_n con $n = 2m$ puntos en posición convexa, vamos a estudiar el grafo \mathcal{M}_m de los emparejamientos perfectos sin cortes de P_n .

El capítulo se distribuye como sigue. En el apartado 5.2 se empieza introduciendo las definiciones que serán básicas en todo el capítulo y se fijan las notaciones que se van a utilizar posteriormente. En los apartados siguientes se estudian diferentes propiedades combinatorias del grafo \mathcal{M}_m . En el apartado 5.3 se estudian los grados máximo y mínimo de este tipo de grafos. En el apartado 5.4 se demuestra que el diámetro de \mathcal{M}_m es $m - 1$; así como que todos los vértices de \mathcal{M}_m tienen excentricidad máxima. Observamos que la obtención de una igualdad de este tipo sobre el diámetro es un logro muy interesante; debemos tener presente que éste es un problema abierto –y largamente estudiado– en otros grafos geométricos, algunos de los cuales han sido mencionados, otros estudiados, en la presente memoria. Otra propiedad importante del grafo \mathcal{M}_m es que es bipartito, como se muestra

en el apartado 5.5. Después, pasamos a estudiar la hamiltonicidad de \mathcal{M}_m en el apartado 5.6, demostrando que \mathcal{M}_m es hamiltoniano si y sólo si m es par. En la construcción del ciclo hamiltoniano han jugado un papel clave los códigos de Gray en árboles binarios que F. Ruskey y A. Proskurowski presentan en [59].

Finalmente, en el apartado 5.7 se estudia la relación de los emparejamientos perfectos sin cortes con el lenguaje de permutaciones. Se cierra el capítulo con los problemas abiertos del apartado 5.8.

5.2 Definiciones y notaciones

En este capítulo vamos a estudiar los emparejamientos perfectos sin cortes de una nube P_n de $n = 2m$ puntos que están en posición convexa. Notamos μ_m al conjunto de todos los emparejamientos perfectos sin cortes de P_{2m} y \mathcal{M}_m el grafo cuyo conjunto de vértices es μ_m , y donde las adyacencias están definidas de la siguiente manera. Dos emparejamientos M_1 y M_2 de μ_m diremos que son adyacentes, y lo notaremos $M_1 \sim M_2$, si y sólo si existen dos segmentos (a, b) y $(c, d) \in M_1$ de forma que $M_2 = M_1 \setminus \{(a, b), (c, d)\} \cup \{(a, d), (b, c)\}$. Vemos un ejemplo de emparejamientos adyacentes en la siguiente figura.

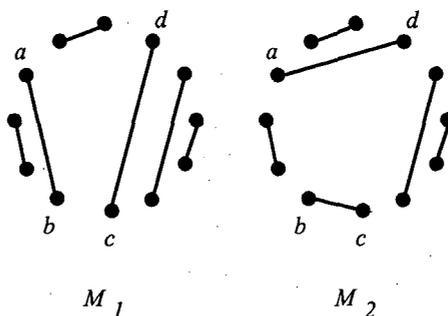


Figura 5.1: Emparejamientos adyacentes.

Es sabido que el cardinal de μ_m es $\frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}$. Si estudiamos \mathcal{M}_m para m pequeño, vemos que \mathcal{M}_1 se reduce a un punto, \mathcal{M}_2 es K_2 y \mathcal{M}_3 es isomorfo al grafo bipartito $K_{3,2}$.

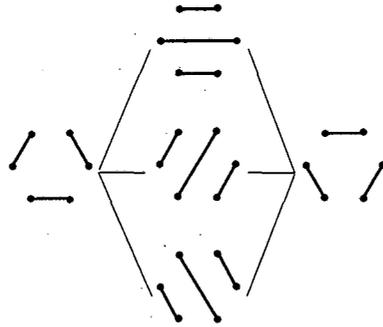


Figura 5.2: El grafo \mathcal{M}_3 .

Presentamos \mathcal{M}_4 en la figura 5.3. Observamos que \mathcal{M}_4 es conexo y que tiene un ciclo hamiltoniano. También observamos que no es un grafo regular. Concretamente, el grado mínimo es 3 y se alcanza en los emparejamientos del tipo $M = \{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)\}$ y sus posibles rotaciones. En cuanto al grado máximo, vemos que es 6 y que se alcanza en los dos emparejamientos que tienen todas sus aristas sobre $CH(P_{2m})$. Observamos que no para todo valor d comprendido entre $\delta(\mathcal{M}_4)$ y $\Delta(\mathcal{M}_4)$ existen emparejamientos con grado d en \mathcal{M}_4 . Concretamente, no hay ningún emparejamiento de grado 5. También se puede observar una propiedad interesante: al igual que \mathcal{M}_3 , \mathcal{M}_4 es un grafo bipartito, es decir, el conjunto de vértices blancos, al igual que el de los vértices negros, es un conjunto estable.

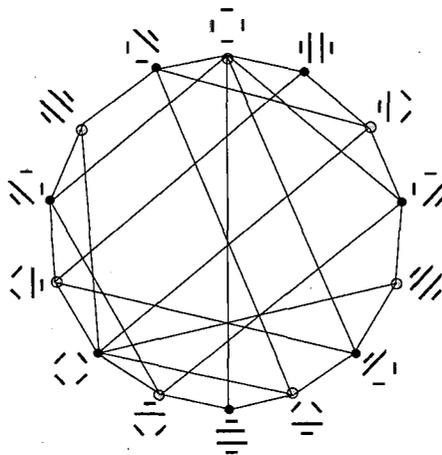


Figura 5.3: El grafo \mathcal{M}_4 .

En los siguientes apartados vamos a estudiar la generalización de estas propiedades en \mathcal{M}_m , para cualquier m . En los resultados y demostraciones que damos en el presente capítulo hay unos emparejamientos que juegan un papel destacado. Por ello fijamos a continuación una serie de notaciones que utilizaremos más adelante.

Notamos B_1 al siguiente emparejamiento perfecto de P_{2m} ,

$$B_1 = \{(1, 2), (3, 2m), (4, 2m - 1), \dots, (m + 1, m + 2)\}.$$

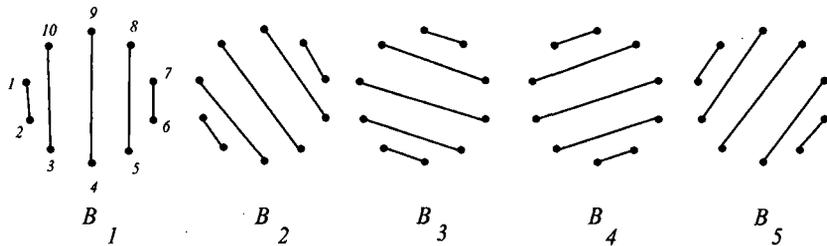


Figura 5.4: Emparejamientos tipo barras.

Los m emparejamientos del tipo que se muestran en la figura y que son las imágenes de B_1 por las aplicaciones

$$\begin{aligned} f_k : P_{2m} &\longrightarrow P_{2m} \\ i &\longrightarrow i + k \end{aligned}$$

para $k = 1, \dots, m$ los notamos como B_1, \dots, B_m ($B_k = f_{k-1}(B_1)$). Para abreviar, en ocasiones nos referiremos a ellos llamándolos “emparejamientos tipo barras”.

Finalizamos esta sección remarcando una propiedad que verifican todos los emparejamientos perfectos de una nube de puntos en posición convexa. Es una propiedad sencilla pero que ha sido muy útil en varias demostraciones.

Lema 5.1 *Todo emparejamiento $M \in \mu_m$ tiene al menos dos segmentos sobre $CH(P_n)$.*

5.3 Grado mínimo y grado máximo de \mathcal{M}_m

Proposición 5.1 $\delta(\mathcal{M}_m) = m - 1$ y sólo se alcanza en los m emparejamientos B_i , $i = 1, \dots, m$.

Demostración. Dado un emparejamiento arbitrario $M \in \mu_m$, notamos $GV(M)$ al grafo de visibilidad entre los segmentos de M . Esto es, $GV(M)$ es el grafo que tiene por conjunto de vértices los segmentos de M y dos vértices de $GV(M)$ son adyacentes si y sólo si los respectivos segmentos se ven en M .

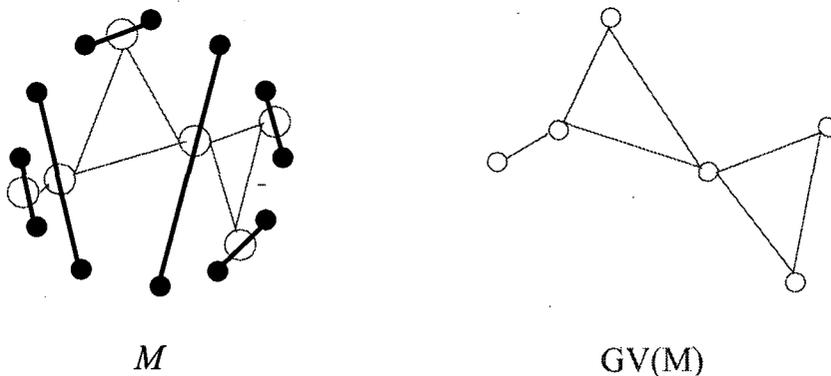


Figura 5.5: El grafo $GV(M)$ asociado a M .

Sea E_M el conjunto de aristas de $GV(M)$. Entonces el grado de M en \mathcal{M}_m es:

$$d_{\mathcal{M}_m}(M) = |E_M|.$$

Es obvio que $GV(M)$ es un grafo conexo con m vértices, por lo cual el cardinal mínimo de E_M es $m - 1$ y se obtiene cuando $GV(M)$ es un camino; cosa que sucede si y sólo si M es un emparejamiento barra. \square

El siguiente resultado nos determina el grado máximo de \mathcal{M}_m así como el tipo de emparejamientos en los que se alcanza.

Proposición 5.2 $\Delta(\mathcal{M}_m) = \binom{m}{2}$ y sólo se alcanza en los dos emparejamientos que tienen todas sus aristas sobre $CH(P_{2m})$.

Demostración. Cada par de segmentos da lugar a un intercambio; como hay m segmentos, el grado es a lo sumo $\binom{m}{2}$. Además sólo se alcanza si todos los pares son mutuamente visibles, esto es, si todos están sobre la frontera. \square

5.4 Diámetro de \mathcal{M}_m

En esta sección vamos a estudiar la distancia máxima entre dos emparejamientos de \mathcal{M}_m . En primer lugar, damos un resultado que nos permite obtener una cota superior sobre dicha distancia máxima, esto es, sobre el diámetro: $D \leq m - 1$. Más difícil será probar que se tiene la igualdad $D = m - 1$. Resaltamos aquí que obtener un resultado tan cerrado sobre el diámetro es algo que no ha sido posible hasta ahora en otros grafos geométricos. Concretamente, y como señalábamos en el capítulo anterior, éste es un problema abierto en el caso de grafos de árboles generadores sin cortes.

Teorema 5.1 Sean $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_m$, $M_1 \neq M_2$. Entonces

$$d(M_1, M_2) \leq m - k - 1,$$

siendo k ($k \leq m - 2$) el número de segmentos comunes que tienen M_1 y M_2 .

Demostración. La haremos por inducción sobre $c = m - k - 1$. Si $c = 1$, M_1 y M_2 difieren en dos aristas, que tienen que ser intercambiables. Por lo tanto, $M_1 \sim M_2$ y $d(M_1, M_2) = 1$. Supongamos ahora el enunciado cierto para $c - 1$. Distinguimos dos situaciones.

- **Caso 1.** Existe alguna arista $(i, i+1)$ de M_k (está sobre $CH(P_n)$) que no pertenece a M_j (donde $j, k \in \{1, 2\}$). Sin pérdida de generalidad, suponemos $j = 1$ y $k = 2$. En este caso, sea s la pareja de i en M_1 y r la de $i + 1$.

Consideramos $M'_1 \in \mathcal{M}_m$ adyacente a M_1 , obtenido al cambiar $(i, s), (i + 1, r)$ por $(i, i + 1), (r, s)$. Observamos que, puesto que estamos suponiendo que $(i, i + 1)$ pertenece a M_2 , entonces $(i, s) \notin M_2$ e $(i + 1, r) \notin M_2$. Concluimos, pues, aplicando la hipótesis de inducción, que

$$\begin{aligned} d(M_1, M_2) &\leq d(M_1, M'_1) + d(M'_1, M_2) \\ &\leq 1 + m - (k + 1) - 1 = m - k - 1. \end{aligned}$$

- **Caso 2.** $CH(P_{2m}) \cap E(M_1) = CH(P_{2m}) \cap E(M_2)$.

En este caso, sea E dicha intersección. Consideramos

$$P^* = P_n \setminus \{\text{extremos de los segmentos incluidos en } E\}$$

$$M_1^* = M_1 \setminus E$$

$$M_2^* = M_2 \setminus E$$

Ahora P^* vuelve a ser una configuración de puntos en posición convexa. Si existe alguna arista no común de M_1^* y M_2^* que esté sobre $CH(P^*)$, procederíamos como antes. Si no, repetiríamos el proceso. \square

Para obtener un emparejamiento a partir de otro lo que hacemos es ir aumentando el número de segmentos comunes. A diferencia de lo que ocurría en el grafo de árboles geométricos, donde a lo sumo podíamos ganar un segmento en común en cada intercambio, en \mathcal{M}_m podemos conseguir hasta dos segmentos comunes en un solo intercambio. Así, por ejemplo, los dos emparejamientos que aparecen en la figura 5.6 no tienen ningún segmento en común, pero bastan $\frac{m}{2}$ intercambios para obtener uno a partir del otro.

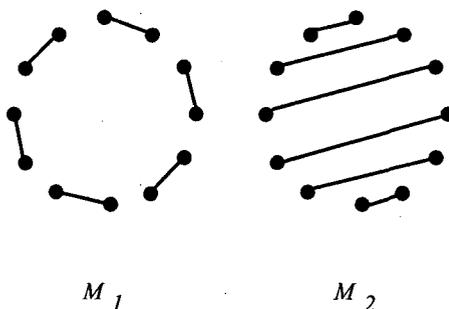


Figura 5.6: M_1 y M_2 no tienen segmentos comunes y su distancia es $\frac{m}{2}$.

Así, pues, si M_1 y M_2 tienen k aristas comunes, se verifica:

$$\frac{m-k}{2} \leq d(M_1, M_2) \leq m-k-1.$$

Basta considerar dos emparejamientos que no tengan ningún segmento en común para dar una primera acotación sobre el diámetro, concretamente: $\frac{m}{2} \leq D \leq m-1$. Al finalizar esta sección veremos que exactamente se verifica que $D = m-1$. Para ello basta encontrar dos emparejamientos tales que la distancia entre ambos es $m-1$. Pero vamos a demostrar un resultado mucho más fuerte. Vamos a ver que para cualquier $M \in \mathcal{M}_m$ siempre existe otro $M^* \in \mathcal{M}_m$ tal que su distancia a M es máxima, esto es, $d(M, M^*) = m-1$. Previamente mostramos un lema técnico que será básico en la demostración del resultado que se presenta a continuación. Tanto el lema como la definición a que aparece a continuación están inspiradas en el trabajo de Sleator, Tarjan y Thurston [67].

Dado un emparejamiento $M \in \mu_m$, construimos el emparejamiento *normalizado* de M con respecto al segmento (a, b) —que notaremos como $\mathcal{N}(M)$ — al emparejamiento que tiene los siguientes segmentos (véase figura 5.7):

- $\mathcal{N}(M)$ tiene el segmento (a, b) .
- $\mathcal{N}(M)$ contiene todos los segmentos de M que no intersecan (incluyendo los extremos) al segmento (a, b) .

- Si M contiene los segmentos (a, x) , (b, y) y los segmentos $(c_1, d_1), \dots, (c_r, d_r)$ que intersecan al segmento (a, b) , entonces pueden darse dos situaciones. Suponemos todos los c_i a un lado del segmento (a, b) , al mismo lado que x , y todos los d_i al otro lado, como muestra la figura 5.7.
 - Si x e y se encuentran al mismo lado del segmento (a, b) entonces $\mathcal{N}(M)$ contiene los segmentos $(x, c_1), (c_2, c_3), \dots, (c_r, y), (d_1, d_2), \dots, (d_{r-1}, d_r)$.
 - Si x e y están en lados diferentes del segmento (a, b) entonces $\mathcal{N}(M)$ contiene los segmentos $(x, c_1), (c_2, c_3), \dots, (c_{r-1}, c_r), (d_1, d_2), \dots, (d_r, y)$.

Observamos que esta construcción es posible, esto es, que la paridad de r en cada caso es la adecuada. Como partimos de la hipótesis de que (a, b) es un segmento de $M \in \mathcal{M}_m$, a cada lado de (a, b) sabemos que hay un número par de puntos. En el caso de que x e y estén al mismo lado del segmento (a, b) , en dicho lado están, además de x e y , un número par de puntos emparejados entre sí más los r nodos que se emparejan con algún punto del otro lado. Por lo tanto, en este caso r tiene que ser par. Si x e y están en lados diferentes del segmento (a, b) , entonces, por razonamientos análogos, obtenemos que r es impar.

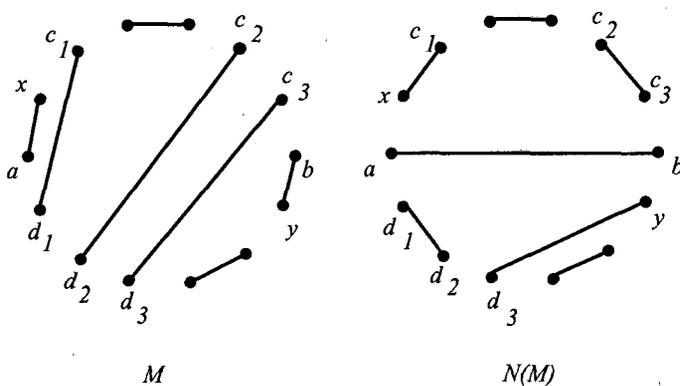


Figura 5.7: Normalizado de M respecto al segmento (a, b) .

Lema 5.2 Si N y $\tilde{N} \in \mathcal{M}_m$ tienen un segmento en común, entonces en todos los emparejamientos de cualquier camino de longitud mínima entre N y \tilde{N} en \mathcal{M}_m siempre aparece dicho segmento.

Demostración. Sea $d(N, \tilde{N}) = d$ y sea

$$N = M_0 \sim M_1 \sim \dots \sim M_d = \tilde{N} \quad (1)$$

un camino de longitud mínima. Queremos ver que si existe un segmento $(a, b) \in N$ y $(a, b) \in \tilde{N}$, entonces $(a, b) \in M_i$ para todo $i = 0, \dots, d$.

Vamos a construir una nueva secuencia de emparejamientos adyacentes (que demostraremos no tiene longitud mayor que d) que une N con \tilde{N} en \mathcal{M}_m y tal que la arista (a, b) aparece en todos los emparejamientos de la secuencia.

Consideramos ahora la secuencia de emparejamientos que son los normalizados de los que aparecen en el camino (1) entre N y \tilde{N} :

$$\mathcal{N}(N), \mathcal{N}(M_1), \dots, \mathcal{N}(\tilde{N}).$$

En primer lugar, es directo ver que si un emparejamiento M contiene el segmento (a, b) , entonces M coincide con su normalizado. En particular, como estamos suponiendo que (a, b) es un segmento común a N y \tilde{N} , tenemos que $\mathcal{N}(N) = N$ y $\mathcal{N}(\tilde{N}) = \tilde{N}$.

Si M y M^* son dos emparejamientos adyacentes en \mathcal{M}_m y tales que pasamos de uno a otro intercambiando los segmentos $(a, b), (c, d)$ por $(a, c), (b, d)$, entonces $M = \mathcal{N}(M) = \mathcal{N}(M^*)$. En caso de que M y M^* sean adyacentes pero el segmento (a, b) no sea uno de los intercambiados, entonces, con una sencilla discusión de casos, se demuestra que $\mathcal{N}(M)$ y $\mathcal{N}(M^*)$ son también adyacentes.

Así pues, tenemos el siguiente camino entre N y \tilde{N} :

$$N = \mathcal{N}(N) \sim \mathcal{N}(M_1) \sim \dots \sim \mathcal{N}(\tilde{N}) = \tilde{N}.$$

Si existe algún M_i en el cual no aparece el segmento (a, b) , consideramos M_{i_0} el primero en el cual no aparece. En particular, M_{i_0-1}

contiene el segmento (a, b) . En este caso, $\mathcal{N}(M_{i_0-1}) = \mathcal{N}(M_{i_0})$ con lo cual tendríamos un camino de N a \tilde{N} con menos de $d = d(N, \tilde{N})$ nodos, lo cual es absurdo. Luego $(a, b) \in M_i$ para todo M_i nodo de cualquier camino de longitud mínima entre N y \tilde{N} . \square

Teorema 5.2 Sea $M \in \mathcal{M}_m$. Consideramos $M^* \in \mathcal{M}_m$ el emparejamiento obtenido al girar M en una unidad. Entonces $d(M, M^*) = m - 1$.

Demostración. Hacemos la demostración por inducción sobre m . En \mathcal{M}_2 el enunciado es obvio. Suponemos el enunciado cierto para cualquier $M' \in \mathcal{M}_{m-1}$.

Sea $M \in \mathcal{M}_m$ y sea M^* el emparejamiento obtenido al girar M en una unidad. Sea $M = M_0 \sim M_1 \sim \dots \sim M_d = M^*$ un camino cuyo número de nodos es exactamente $d = d(M, M^*)$. Distinguiamos dos posibilidades.

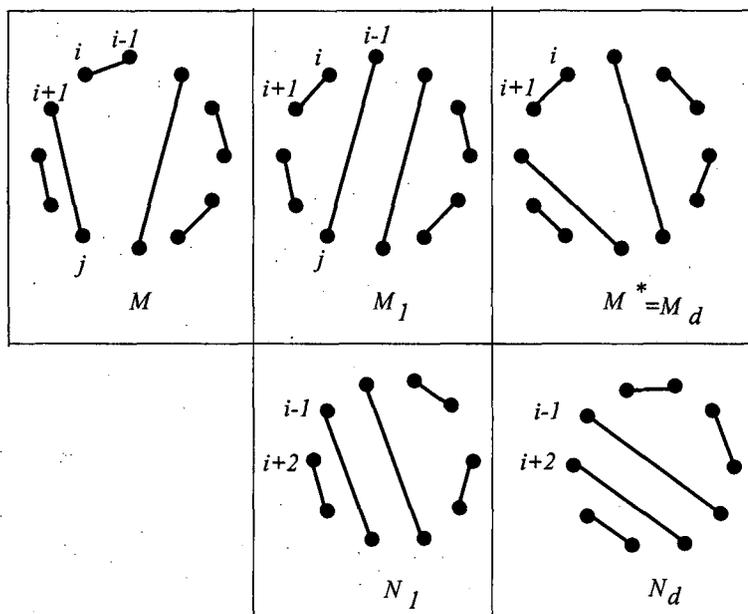


Figura 5.8: Ilustración de la demostración del teorema 5.2.

- Si M_1 se obtiene a partir de añadir a M un segmento $(i, i+1) \in M^*$. Sea j la pareja de $i+1$ en M . En este caso, por el lema 5.1, sabemos que $(i, i+1) \in M_i$, $i = 1, \dots, d$. Consideramos $P_{n-2} = P_n \setminus \{i, i+1\}$ y $N_k = M_k \setminus (i, i+1)$, $k = 1, \dots, d$, $N_k \in M_{m-1}$. Observamos que eliminar primero y girar después es equivalente a girar y después eliminar.

$$\begin{aligned} N_1 &= M - \{(i, i-1), (i+1, j)\} + (i-1, j) \\ N_d &= M^* - (i, i+1) \end{aligned}$$

De donde obtenemos que N_d es el emparejamiento de M_{m-1} obtenido al girar N_1 en una unidad. Por hipótesis de inducción, $d(N_1, N_d) = m - 2$. Concluimos pues:

$$d = 1 + d(N_1, N_d) = 1 + m - 2 = m - 1.$$

- Supongamos que M_1 no se obtiene a partir de añadir a M un segmento $(i, i+1) \in M^*$. En este caso, consideramos la sucesión de normalizados de M_i , $i = 0, \dots, d$ con respecto al segmento $(i, i+1)$:

$$\mathcal{N}(M), \mathcal{N}(M_1), \dots, \mathcal{N}(M^*)$$

Observamos que $M \sim \mathcal{N}(M)$, $\mathcal{N}(M_i) \sim \mathcal{N}(M_{i+1})$, $i = 0, \dots, d-1$, y $\mathcal{N}(M^*) = M^*$. Sea k el primer subíndice en el cual se verifica que $(i, i+1) \in M_k$ ($k \leq d$). Entonces, por el lema 5.1, sabemos que para todo $j \geq k$, $(i, i+1) \in M_j$. De donde tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(M_{k-1}) &= \mathcal{N}(M_k) = M_k \\ \mathcal{N}(M_j) &= M_j \quad \forall j \geq k \end{aligned}$$

Así, pues, tenemos un camino

$$M \sim \mathcal{N}(M) \sim \mathcal{N}(M_1) \sim \dots \sim \mathcal{N}(M_{k-1}) \sim$$

$$\mathcal{N}(M_k) = M_k \sim M_{k+1} \sim \dots \sim M_d = M^*$$

Es este un camino de M a M^* del tipo anterior y de longitud d ; de donde concluimos que en este caso d vuelve a ser $m - 1$. \square

Consecuencias del resultado que acabamos de ver son las siguientes.

Teorema 5.3 *La excentricidad de todo emparejamiento de \mathcal{M}_m es $m - 1$ y, por lo tanto, el radio de \mathcal{M}_m es $m - 1$ y el centro de \mathcal{M}_m coincide con \mathcal{M}_m .*

Teorema 5.4 *El diámetro de \mathcal{M}_m es $m - 1$.*

5.5 \mathcal{M}_m es un grafo bipartito

Vamos a ver en esta sección una de las propiedades más interesantes que verifican los grafos de emparejamientos. Ya mostramos en la sección 5.1 que \mathcal{M}_3 era el grafo bipartito completo $K_{2,3}$. También observamos que \mathcal{M}_4 era bipartito. Para ver que ésta es una propiedad que verifican todos los grafos \mathcal{M}_m procederemos de la siguiente manera. Asociamos a cada emparejamiento $M \in \mu_m$ un árbol plano t_M y estudiaremos una aplicación

$$L : \{t_M | M \in \mu_m\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

tal que si M y M' son adyacentes en \mathcal{M}_m entonces $L(t_M)$ y $L(t_{M'})$ tienen distinta paridad, determinando de esta forma la bipartición de \mathcal{M}_m .

A cada emparejamiento $M \in \mu_m$ le asociamos un árbol plano de $m + 1$ nodos (y que notaremos t_M) de la siguiente forma.

Consideramos un nodo de t_M por cada segmento de M y un nodo extra p , que será la raíz de t_M , que colocamos fuera del convexo, junto a la arista $(1, 2m)$. Unimos a p todos los nodos procedentes de segmentos visibles desde p y procedemos de forma análoga en cada vértice adyacente a p , y así sucesivamente.

Vemos un ejemplo de árbol t_M en la siguiente figura.

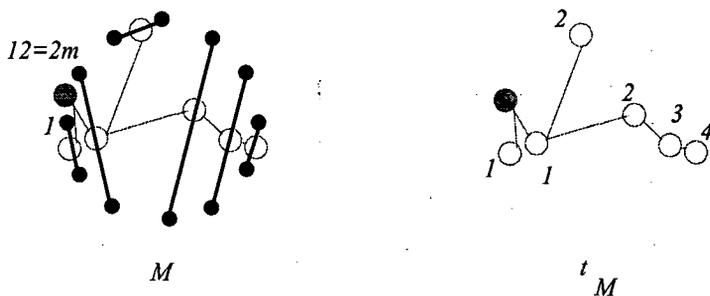


Figura 5.9: Árbol t_M asociado a M .

Dado un árbol t con raíz, se define la *longitud de caminos* o *longitud total* (“path-length”) de t como la suma de las distancias de cada nodo a la raíz. Notamos dicha magnitud como $L(t)$. En el ejemplo de árbol que se muestra en la figura anterior, $L(t_M) = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 = 13$.

Proposición 5.3 Sean M y M' emparejamientos adyacentes en \mathcal{M}_m . Entonces $L(t_M)$ y $L(t_{M'})$ tienen distinta paridad.

Demostración. A cada nodo de t_M y $t_{M'}$ le asignamos su altura. De esta forma, $L(t_M)$ es la suma de dichos pesos. Lo notaremos por $p_M(n) = d(n, p) \forall n \in t_M$, siendo p la raíz de t_M y $p_{M'}(n) = d(n, p') \forall n \in t_{M'}$, siendo p' la raíz de $t_{M'}$.

Suponemos que obtenemos M' a partir de M al intercambiar los segmentos $(a, b), (c, d)$ por $(a, d), (b, c)$.

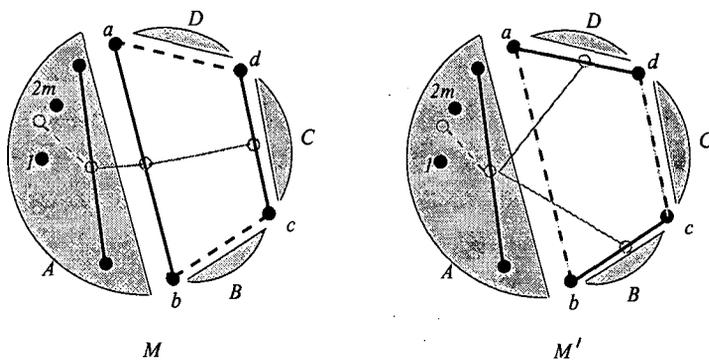


Figura 5.10: Dados dos emparejamientos adyacentes, M y M' , estudiamos los cambios existentes en t_M y $t_{M'}$.

Sin pérdida de generalidad, suponemos que la situación es la que se presenta en la figura 5.10.

Si k es la altura del nodo n_{ab} , asociado al segmento (a, b) , entonces tenemos:

$$L(t_M) = \sum_{n \in A} p_M(n) + p_M(n_{ab}) + p_M(n_{cd}) + \\ + \sum_{n \in B} p_M(n) + \sum_{n \in C} p_M(n) + \sum_{n \in D} p_M(n).$$

$$L(t_{M'}) = \sum_{n \in A} p_{M'}(n) + p_{M'}(n_{ac}) + p_{M'}(n_{db}) + \\ + \sum_{n \in B} p_{M'}(n) + \sum_{n \in C} p_{M'}(n) + \sum_{n \in D} p_{M'}(n),$$

donde

$$\begin{aligned} p_M(n) &= p_{M'}(n) & \forall n \in A \quad \forall n \in B \quad \forall n \in D \\ p_M(n) &= p_{M'}(n) + 2 & \forall n \in C \\ p_M(n_{ab}) &= k, & p_M(n_{cd}) = k + 1 \\ p_{M'}(n_{ac}) &= k, & p_{M'}(n_{bd}) = k \end{aligned}$$

siendo A, B, C, D las partes del cierre convexo determinadas por las aristas (a, b) , (b, d) , (d, c) y (c, a) , tal como se muestra en la figura anterior.

Resulta finalmente que

$$L(t_M) - L(t_{M'}) = 1 + 2|C|.$$

Luego $L(t_M)$ y $L(t_{M'})$ difieren en un número impar y, por lo tanto, son de diferente paridad. \square

El siguiente resultado es consecuencia directa de lo que acabamos de demostrar.

Teorema 5.5 \mathcal{M}_m es un grafo bipartito.

5.6 Hamiltonicidad de \mathcal{M}_m

En esta sección vamos a ver que \mathcal{M}_m es hamiltoniano si y sólo si m es par, $m > 2$. En caso que m sea impar probaremos que para $m > 3$ no

existe ni siquiera un camino hamiltoniano en \mathcal{M}_m . En la demostración de este resultado jugarán un papel muy importante ciertas funciones generadoras. Introducimos a continuación los conceptos que luego serán básicos.

5.6.1 Funciones generadoras de árboles planos

Dada una secuencia de números $u_n, n \geq 0$, se llama función generadora (ordinaria) de esta secuencia a la serie formal que tiene por coeficiente n -ésimo $u_n, \forall n \geq 0$. Es decir, es la expresión:

$$U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$$

Consideramos, por ejemplo, t_n el número de árboles planos de orden n . La función generadora de esta secuencia de números es:

$$T(z) = \sum_{n \geq 0} t_n z^n$$

En la figura 5.11 presentamos los diferentes árboles planos para $1 \leq n \leq 5$.

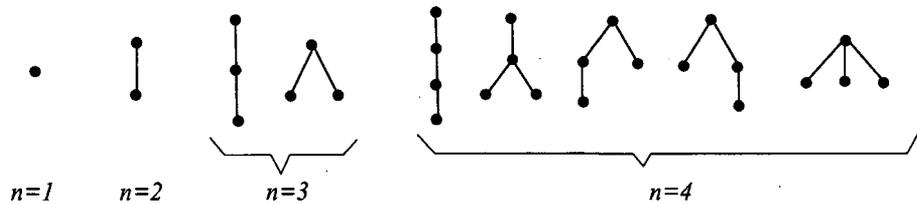


Figura 5.11: Árboles planos de orden $n \leq 4$.

Así pues, los primeros términos de la serie $T(z)$ son:

$$T(z) = z + z^2 + 2z^3 + 5z^4 + \dots$$

Consideramos ahora una función generadora de dos variables que es, en cierto modo, un refinamiento de la anterior. Una de las variables,

z , indicará el orden del árbol y la otra variable, u , hará referencia a la longitud total del árbol. Notamos $Q(u, z)$ a dicha función generadora:

$$Q(u, z) = \sum_{n,k \geq 0} t_{n,k} u^k z^n$$

donde $t_{n,k}$ es el número de árboles planos de n vértices y con longitud total k .

Observamos en la figura 5.11 que, de los dos árboles de orden $n = 3$, uno tiene longitud 3 y otro longitud 2; de los cinco árboles de orden $n = 4$, uno tiene longitud 6, otro longitud 5, dos tienen longitud 4 y el último tiene longitud 3. Así pues, los primeros términos de la serie $Q(u, z)$ son:

$$Q(u, z) = z + uz^2 + u^2z^3 + u^3z^3 + u^3z^4 + 2u^4z^4 + u^5z^4 + u^6z^4 + \dots$$

Dado un árbol T de orden n y longitud total k , sean T_1, \dots, T_ℓ los subárboles que “cuelgan” de la raíz de T (véase figura 5.12).

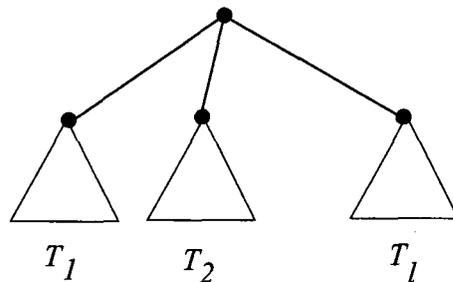


Figura 5.12: Subárboles del árbol T .

Sean n_i el orden de T_i y k_i la longitud total de T_i . Se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} n &= 1 + \sum_{i=1}^{\ell} n_i \\ k &= \sum_{i=1}^{\ell} (k_i + n_i) \end{aligned}$$

En estas condiciones (ver [65]) se verifica la siguiente relación:

$$Q(u, z) = \frac{z}{1 - Q(u, zu)}. \tag{5.1}$$

Introducimos ahora los números de Catalan que utilizaremos más adelante.

Notamos C_n al n -ésimo número de Catalan. Como es bien sabido, dichos números —que aparecen en muchos problemas de enumeración— satisfacen la ecuación de recurrencia:

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

Sea $C(z)$ la función generadora de los números de Catalan,

$$C(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + \dots$$

También es conocido que $C(z)$ satisface la ecuación:

$$z((C(z))^2 - C(z) + 1) = 0. \quad (5.2)$$

Las funciones generadoras $Q(u, z)$ y $C(z)$, así como las relaciones que acabamos de presentar en 5.1 y 5.2 jugarán un papel clave en la demostración, que presentamos en la siguiente sección, sobre la inexistencia de caminos hamiltonianos en \mathcal{M}_m para m impar, $m \geq 5$.

5.6.2 \mathcal{M}_m no es hamiltoniano, m impar

Hemos demostrado en la sección anterior que \mathcal{M}_m es un grafo bipartito, para cualquier m . Esto demuestra, en particular, que si $m = 2^K - 1$ (índices para los cuales el orden de \mathcal{M}_m es impar) no existe ningún ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_m .

Queda la pregunta de si existe un ciclo hamiltoniano en el resto de los casos, o de si siempre hay un camino hamiltoniano. A continuación vamos a demostrar que si m es impar no existe un camino hamiltoniano, salvo en el caso $m = 3$. Si m es par, construiremos un ciclo hamiltoniano de forma inductiva.

Partiendo de la bipartición de \mathcal{M}_m , diremos que M es un emparejamiento par si $L(t_M)$ es par y diremos que M es emparejamiento

impar en caso contrario. Sea e_m el número de emparejamientos pares de \mathcal{M}_m y o_m el número de los impares.

Notamos ε_ℓ al número de árboles planos de orden ℓ y longitud total par y θ_ℓ al número de árboles planos de orden ℓ y longitud total impar.

Observamos que si $M \in \mathcal{M}_m$, entonces t_M es un árbol de orden $m + 1$, y, por tanto, se verifica que $e_m = \varepsilon_{m+1}$ y $o_m = \theta_{m+1}$.

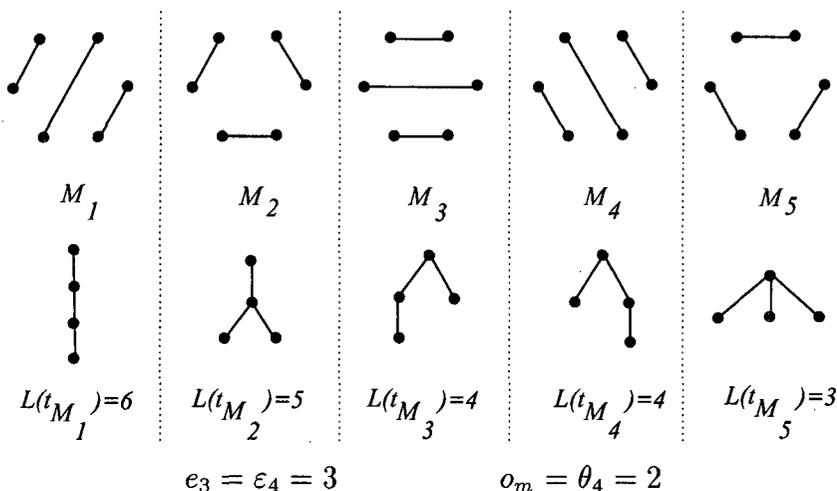


Figura 5.13: Paridad en emparejamientos y árboles planos.

Teorema 5.6 *Se verifica que:*

- (a) $\varepsilon_m - \theta_m = 0$ si y sólo si m es impar, $m \geq 3$.
- (b) Si m es par, entonces $\varepsilon_m - \theta_m$ es un número de Catalan alternado: $\varepsilon_m - \theta_m = (-1)^{\frac{m}{2}} C_{\frac{m}{2}-1}$.

Demostración. Consideramos la función generadora $Q(u, z)$ introducida anteriormente,

$$Q(u, z) = \sum_{m, k \geq 0} t_{m, k} u^k z^m.$$

Estamos interesados en:

$$\varepsilon_m = \sum_{k \text{ par}} t_{m, k}, \quad \theta_m = \sum_{k \text{ impar}} t_{m, k}.$$

Si tomamos valores $u = 1$ y $u = -1$ en $Q(u, z)$ tenemos:

$$\begin{aligned} Q(1, z) &= \sum_{m, k \geq 0} t_{m, k} z^m, \\ Q(-1, z) &= \sum_{m, k \geq 0} (-1)^k t_{m, k} z^m. \end{aligned}$$

Sumando estas expresiones desaparecen los términos con k impares, de donde

$$\frac{Q(1, z) + Q(-1, z)}{2} = \sum \varepsilon_m z^m. \quad (5.3)$$

Análogamente, restando:

$$\frac{Q(1, z) - Q(-1, z)}{2} = \sum \theta_m z^m. \quad (5.4)$$

Notamos $E(z)$ y $O(z)$, respectivamente, a estas dos series formales.

Estamos interesados en la diferencia:

$$E(z) - O(z) = \sum \varepsilon_m z^m - \sum \theta_m z^m = \sum (\varepsilon_m - \theta_m) z^m.$$

Notamos $D(z) = E(z) - O(z)$, esto es,

$$D(z) = \sum_{m \geq 0} d_m z^m$$

donde $d_m = \varepsilon_m - \theta_m$.

Queremos ver que $d_m = 0$ si m es impar y que si m es par entonces d_m es un número de Catalan, apareciendo de forma alternada el signo.

Por una parte, de restar 5.4 a 5.3 se obtiene:

$$D(z) = Q(-1, z).$$

Por otra parte, sustituyendo $u = 1$ y $u = -1$ en 5.1 se obtiene:

$$\begin{aligned} Q(1, z) &= \frac{z}{1 - Q(1, z)}, \\ Q(-1, z) &= \frac{z}{1 - Q(-1, z)}. \end{aligned}$$

Y, por lo tanto:

$$Q(1, z)^2 - Q(1, z) + z = 0. \quad (5.5)$$

$$Q(-1, z)Q(-1, -z) - Q(-1, z) + z = 0. \quad (5.6)$$

Si se sustituye z por $-z$ en las anteriores ecuaciones se obtiene:

$$Q(1, -z)^2 - Q(1, -z) - z = 0, \quad (5.7)$$

$$Q(-1, -z)Q(-1, z) - Q(-1, -z) - z = 0. \quad (5.8)$$

Sustituimos en 5.6 y 5.8 $D(z) = Q(-1, z)$ y $D(-z) = Q(-1, -z)$:

$$D(z)D(-z) - D(z) + z = 0, \quad (5.9)$$

$$D(-z)D(z) - D(-z) - z = 0. \quad (5.10)$$

Restando las ecuaciones 5.9 a 5.10 obtenemos:

$$D(z) - D(-z) = 2 \sum_{m \text{ impar}} d_m z^m = 2z.$$

Así pues, $d_1 = 1$ y $d_m = \varepsilon_m - \theta_m = 0 \quad \forall m \geq 3, m \text{ impar}$.

Sumando las ecuaciones 5.9 y 5.10:

$$D(z) + D(-z) = 2 \sum_{m \text{ par}} d_m z^m = 2D(z)D(-z).$$

Consideramos $P(z) = D(z)D(-z) = \frac{1}{2}(D(z) + D(-z)) = \sum_{m \text{ par}} d_m z^m$.

Estudiando los primeros términos de $P(z)$ tenemos:

$$P(z) = D(z)D(-z) = Q(-1, z)Q(-1, -z) = -z^2 + z^4 - 2z^6 + 5z^8 + \dots$$

Queremos obtener una relación de $P(z)$ con la sucesión generadora de los números de Catalan:

$$C(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + \dots$$

Consideramos $K(z) = zC(z) = z + z^2 + 2z^3 + 5z^4 + \dots$

Multiplicando por z la ecuación 5.2 que satisface $C(z)$, obtenemos:

$$z^2C(z)^2 - zC(z) + z = 0.$$

De donde tenemos que $K(z)$ satisface la ecuación:

$$K(z)^2 - K(z) + z = 0.$$

Hacemos el siguiente cambio de variable:

$$K(-z^2) = -z^2 + z^4 - 2z^6 + 5z^8 + \dots$$

Observamos que los primeros términos de $K(-z^2)$ y los de $P(z)$ coinciden. Vamos a ver que $P(z) = K(-z^2)$. Para ello, lo que demostramos es que $P(z)$ satisface la misma ecuación que $K(-z^2)$.

La ecuación que satisface $K(-z^2)$ es:

$$K(-z^2)^2 - K(-z^2) - z^2 = 0.$$

Vamos a ver que

$$P(z)^2 - P(z) - z^2 = 0.$$

Sustituyendo y despejando z en 5.9 y 5.10:

$$\begin{aligned} z &= -P(z) + D(z), \\ z &= P(z) - D(-z). \end{aligned}$$

De donde:

$$\begin{aligned} z^2 &= (-P(z) + D(z))(P(z) - D(-z)) \\ &= -P(z)^2 + P(z)P(-z) + P(z)D(z) - D(z)D(-z) \\ &= -P(z)^2 + P(z)(D(-z) + D(z)) - P(z) \\ &= -P(z)^2 + P(z)(2P(z)) - P(z) \\ &= P(z)^2 - P(z). \end{aligned}$$

Así pues, efectivamente, $P(z) = K(-z^2)$ y, por lo tanto, para m par, la sucesión $d_m = \varepsilon_m - \theta_m$ son los números de Catalan con signo alternado. \square

Teorema 5.7 *Si m es impar, entonces \mathcal{M}_m no tiene ningún camino hamiltoniano si $m > 3$.*

Demostración. Basta pensar que una condición necesaria para la existencia de un ciclo hamiltoniano en un grafo bipartito es que el número de elementos en las dos clases de la bipartición coincidan. En el caso de \mathcal{M}_m , para que exista un ciclo hamiltoniano es necesario que $e_m - o_m = 0$. Condición necesaria para que exista un camino hamiltoniano es que $0 \leq |e_m - o_m| \leq 1$. Pero como $|e_m - o_m| = |\varepsilon_{m+1} - \theta_{m+1}|$, el teorema anterior nos demuestra que esta diferencia es siempre estrictamente mayor que uno para m impares, $m \geq 3$. \square

Un primer intento para estudiar la existencia de ciclos hamiltonianos en \mathcal{M}_m con m par es proceder de modo similar a lo hecho en el capítulo anterior para árboles o a lo hecho en [39] para triangulaciones. Esto es, construir una estructura jerárquica, en la cual cada nodo es un emparejamiento. A cada emparejamiento $M \in \mu_m$ le añadimos de forma natural cuatro puntos y generaremos una serie de emparejamientos en μ_{m+2} . Obtenemos así un árbol de emparejamientos de forma similar a como obteníamos en el capítulo anterior el árbol de árboles. Lamentablemente, este tipo de construcción no funciona en este caso para obtener, de forma inductiva, un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_m .

5.6.3 Códigos de Gray en árboles binarios

En esta sección vamos a estudiar las secuencias binarias de longitud $2m$, con m unos y m ceros, bien equilibradas, esto es, que satisfacen la propiedad de que en cualquier prefijo el número de ceros no excede el número de unos. En lo que sigue, notaremos T_m al conjunto de tales secuencias. Veremos la relación existente entre este tipo de secuencias y los emparejamientos de μ_m . También analizaremos ciertos códigos de Gray dados por F. Ruskey y A. Proskurowski en [58] y [59] que nos ayudarán en la construcción de un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_m , si m es par.

Como es sabido, cada secuencia binaria bien equilibrada representa un árbol binario con m nodos internos. Los unos que aparecen en la secuencia representan los nodos internos del árbol y los ceros representan las hojas (el cero correspondiente a la última hoja lo suponemos implícitamente y no aparece de forma explícita), el lugar que ocupan los dígitos en la sucesión se debe a que recorremos el árbol en preorden (véase figura 5.14).

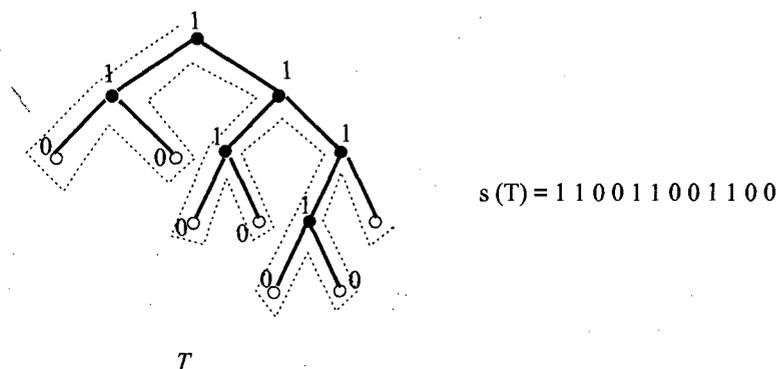


Figura 5.14: Secuencias binarias y árboles binarios.

Es fácil ver que este tipo de sucesiones son también representaciones de los emparejamientos de μ_m . Basta considerar, para un emparejamiento $M \in \mu_m$, la representación lineal que ilustramos en la figura 5.15. En esta representación los vértices están situados en línea recta y se une cada uno con su pareja vía un arco curvo.

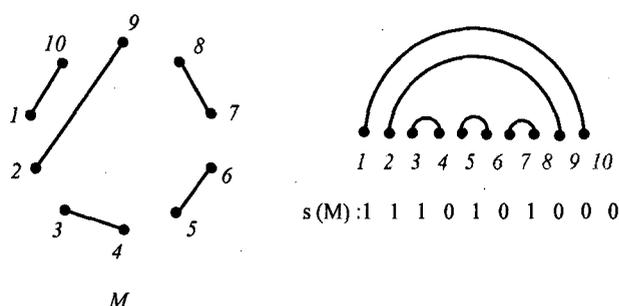


Figura 5.15: Sucesión binaria asociada a un emparejamiento.

Construimos la secuencia $s(M)$ asociada a M de la siguiente manera. Ponemos un 1 cada vez que sube un arco y ponemos un 0 cada

vez que el arco baja. Dados dos emparejamientos M_1 y M_2 de μ_m y dadas sus respectivas sucesiones binarias asociadas, $s(M_1), s(M_2) \in T_m$, nos interesa saber qué tipo de cambio en $s(M_1)$ y $s(M_2)$ refleja el hecho de que M_1 y M_2 sean o no adyacentes en \mathcal{M}_m .

En la figura 5.16 se muestra un emparejamiento N adyacente al emparejamiento presentado en la figura 5.15 y vemos que $s(M)$ y $s(N)$ difieren sólo en la permutación de un 1 y un 0 consecutivos.

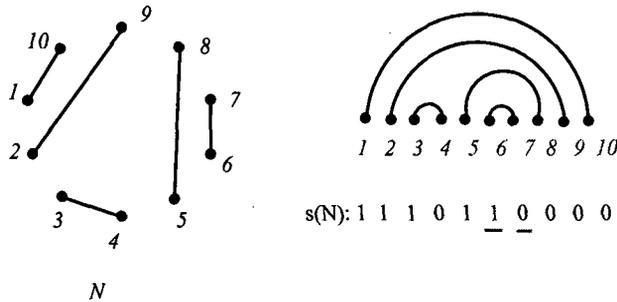


Figura 5.16: Intercambio de un uno y un cero consecutivos.

Sin embargo, no cualquier permutación de un 1 por un 0 en las sucesiones binarias produce emparejamientos adyacentes en \mathcal{M}_m . En la siguiente figura vemos una sucesión s obtenida a partir de $s(N)$ vía permutar el 1 y el 0 que se indica. También aparece en la figura 5.17 el emparejamiento L asociado a dicha sucesión binaria, esto es, $s = s(L)$, y podemos comprobar que N y L no son adyacentes en \mathcal{M}_m .

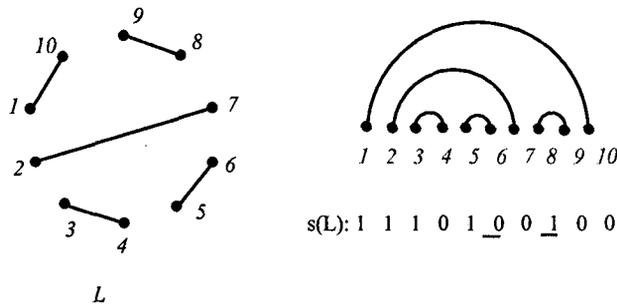


Figura 5.17: Intercambio de un uno y un cero no consecutivos.

Concretamente, lo que falla en este último ejemplo es que la subsucesión comprendida entre el 1 y el 0 que han cambiado de lugar (con respecto a $s(N)$) no es una subsucesión bien equilibrada.

Lema 5.3 Sean $M, N \in \mu_m$ y sean $s(M)$ y $s(N)$ sus respectivas sucesiones binarias. Entonces M y N son adyacentes en \mathcal{M}_m si y sólo si $s(M)$ y $s(N)$ verifican una de las dos condiciones siguientes:

- (a) $s(M) = x10t$ y $s(N) = x01t$ para algunas subsucesiones binarias x, t .
- (b) $s(M) = x1y0t$ y $s(N) = x0y1t$ siendo y una sucesión binaria bien equilibrada.

En [58], F. Ruskey y A. Proskowski, interesados en algoritmos de generación de árboles binarios, estudian dos tipos de intercambios (de un 1 por un 0) en sucesiones binarias bien equilibradas. Concretamente, estudian:

- 1) $x1y0t \sim_1 x0y1t$ con y una subsucesión binaria cualquiera.
- 2) $x10t \sim_2 x01t$.

Observamos que el primer tipo de intercambio es más general que el que nos interesa a nosotros y el segundo es más restrictivo que el nuestro.

Observamos que el conjunto T_m de sucesiones binarias bien equilibradas de longitud $2m$ con las adyacencias del tipo \sim_2 , no puede ser un grafo hamiltoniano para ningún m . Concretamente, la sucesión $1^m 0^m$ tiene grado uno en dicho grafo. Así pues, la pregunta que cabe hacerse es: para m par, ¿existe algún camino hamiltoniano en (T_m, \sim_2) ? F. Ruskey y A. Proskowski resuelven afirmativamente esta pregunta en [59]. Ellos construyen un camino en (T_m, \sim_2) con origen en la sucesión $10101^{m-2}0^{m-2}$ y final en $1^m 0^m$.

En la siguiente sección mostraremos la construcción de un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_m , modificando adecuadamente el camino dado en [59].

5.6.4 \mathcal{M}_m es hamiltoniano, m par

En esta sección mostramos la construcción de un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_m para $m \geq 4$, número par. En lo que sigue identificamos un

emparejamiento cualquiera de μ_m con su sucesión binaria asociada (véase apartado anterior).

Empezamos estudiando un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_4 . En la figura 5.18 se muestra (T_4, \sim_2) que es un subgrafo de \mathcal{M}_4 . Toda sucesión s de T_4 tiene cuatro unos, de los cuales uno debe ser el primer dígito de la sucesión. Quedan pues tres unos libres. Los vértices de (T_4, \sim_2) están dibujados en una construcción tridimensional. El sistema de coordenadas es el siguiente. La dirección i -ésima indica el movimiento del i -ésimo ($i = 1, 2, 3$) 1 libre de la sucesión.

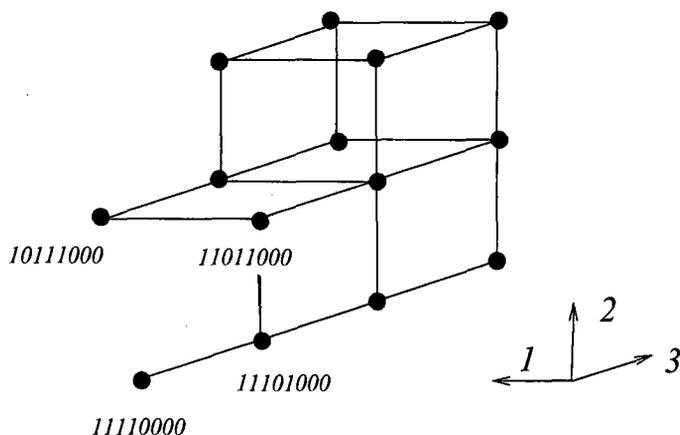


Figura 5.18: El grafo (T_4, \sim_2) .

En la figura 5.19A mostramos el camino hamiltoniano que F. Ruskey y A. Proskurowski dan en [59], así como una posible variante (figura 5.19B) que nos da un camino hamiltoniano tal que la primera y última sucesión son adyacentes en \mathcal{M}_4 .

La idea de la construcción del camino hamiltoniano de (T_m, \sim_2) a partir de uno de (T_{m-2}, \sim_2) dada en [59] es la siguiente. Se substituye cada una de las sucesiones que aparecen en (T_{m-2}, \sim_2) por un conjunto de sucesiones de elementos de T_m . Se elaboran caminos hamiltonianos entre pares de dichos conjuntos y se acaban comprobando que todos estos caminos empalman bien en T_m . De esta forma se pueden obtener diversos caminos hamiltonianos en (T_m, \sim_2) . Conseguir un camino

tal que su origen y final sean adyacentes en \mathcal{M}_m será un poco más elaborado.

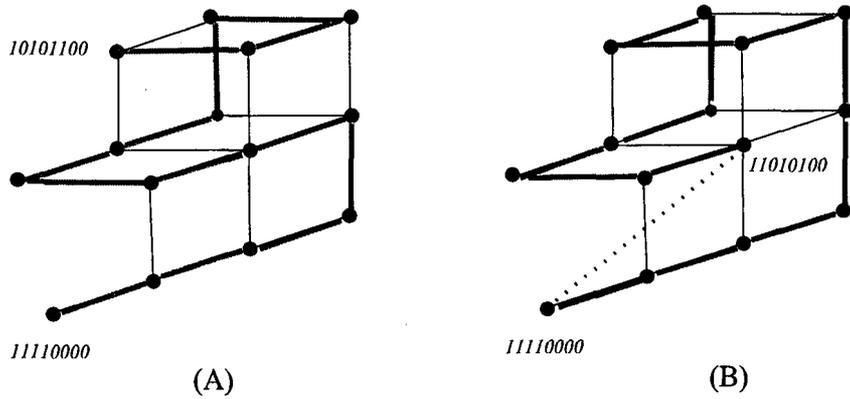


Figura 5.19: Caminos en T_4 .

Para motivar el proceso general, vamos a ilustrar la obtención de un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_6 .

Dada una sucesión $s = x1^i0^{i+j} \in T_m$ notamos $x\underline{1^i0^{i+j}}$ al conjunto de todas las sucesiones de T_m que empiezan por la subsucesión x . Dada $s \in T_m$, que es del tipo $x10^k$, añadimos dos unos y dos ceros después del último 1 de s , obteniendo así $x1110^{k+2} \in T_{m+2}$. Notamos $\bar{s} = x\underline{1110^{k+2}}$ al conjunto de sucesiones de \mathcal{M}_{m+2} que empiezan por $x1$ y lo llamaremos *vértice generalizado* de s . Podemos sustituir cada sucesión $s \in \mathcal{M}_m$ por el correspondiente \bar{s} y consideramos pares adyacentes de vértices generalizados. En la figura 5.20 se muestran dos vértices generalizados, concretamente $1^4\underline{110^6}$ y $11101\underline{110^5}$, así como las adyacencias que se obtienen en cada uno de ellos si sólo se permite intercambiar un 1 y un 0 consecutivos.

En la figura 5.21 se muestran, en una construcción tridimensional, las adyacencias del tipo \sim_2 entre los dos vértices generalizados de la figura 5.20. La obtención de un camino hamiltoniano en dicho par de vértices generalizados se muestra en la figura 5.22.

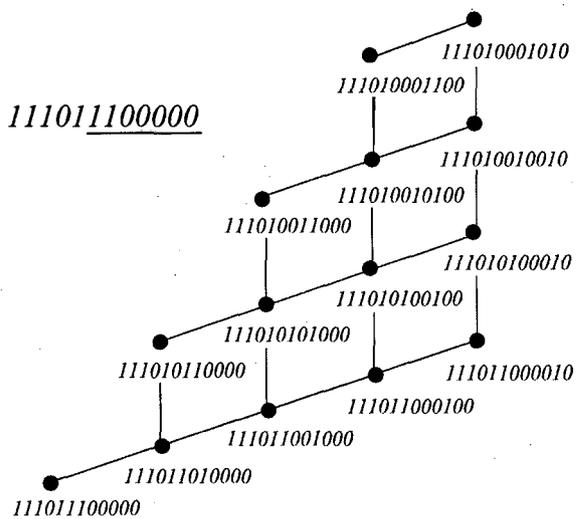
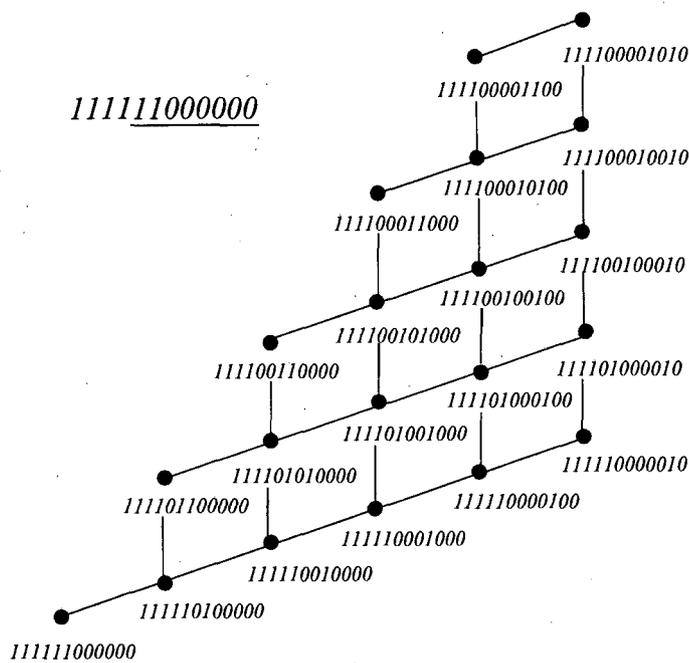


Figura 5.20: Vértices generalizados.

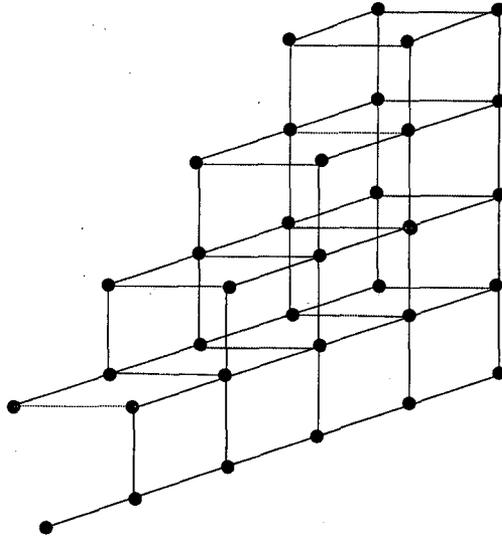


Figura 5.21: Adyacencias del tipo \sim_2 entre dos vértices generalizados.

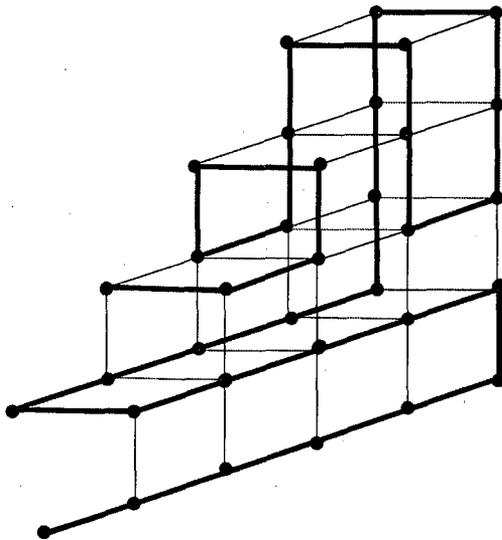


Figura 5.22: Camino hamiltoniano entre dos vértices generalizados.

Si construimos caminos hamiltonianos en cada par de vértices generalizados de forma que empalmen bien, obtendremos un camino hamiltoniano de \mathcal{M}_6 . Desgraciadamente, si seguimos el orden que nos induce el camino de la figura 5.19B (que nos daba un camino hamiltoniano cuyos extremos 110101100 y 1^40^4 son adyacentes en \mathcal{M}_4 y por tanto da lugar a un ciclo hamiltoniano de \mathcal{M}_4) nunca obtendremos un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_6 . Ello se debe a que ninguna de las sucesiones que aparecen en el vértice generalizado de 11010100 , esto es, $110101\underline{110000}$, es adyacente a ninguna de las sucesiones que aparecen en el vértice generalizado de 1^60^6 en \mathcal{M}_6 . De hecho, de los tres vértices adyacentes a 1^40^4 en \mathcal{M}_4 , sólo el vértice generalizado de 11101000 contiene vértices adyacentes a 1^60^6 .

La solución para obtener un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_m pasará por construir recursivamente un camino hamiltoniano adecuado en \mathcal{M}_m de forma que una pequeña modificación en el último tramo nos dé el ciclo deseado. En lo que sigue, notaremos \mathcal{P}_m dicho camino. En la figura 5.23 se muestra la construcción de \mathcal{P}_6 .

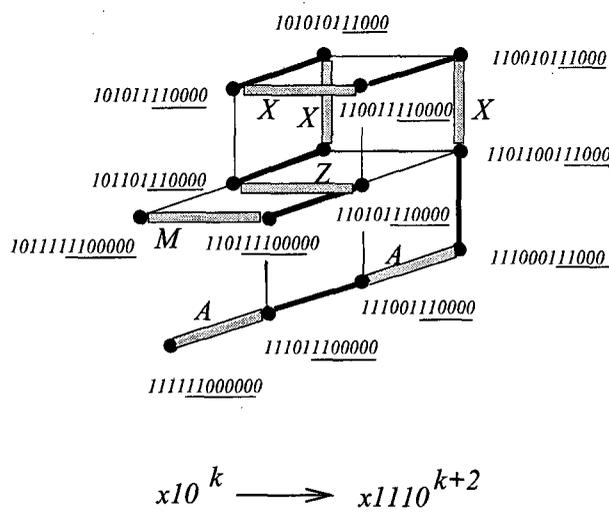


Figura 5.23: Camino \mathcal{P}_6 .

Las bandas sombreadas indican caminos en los pares de vértices generalizados y la letra que aparece encima indica el tipo de camino. En la figura 5.22 se muestra un camino existente en el par $(\underline{111111000000} - -111011100000)$.

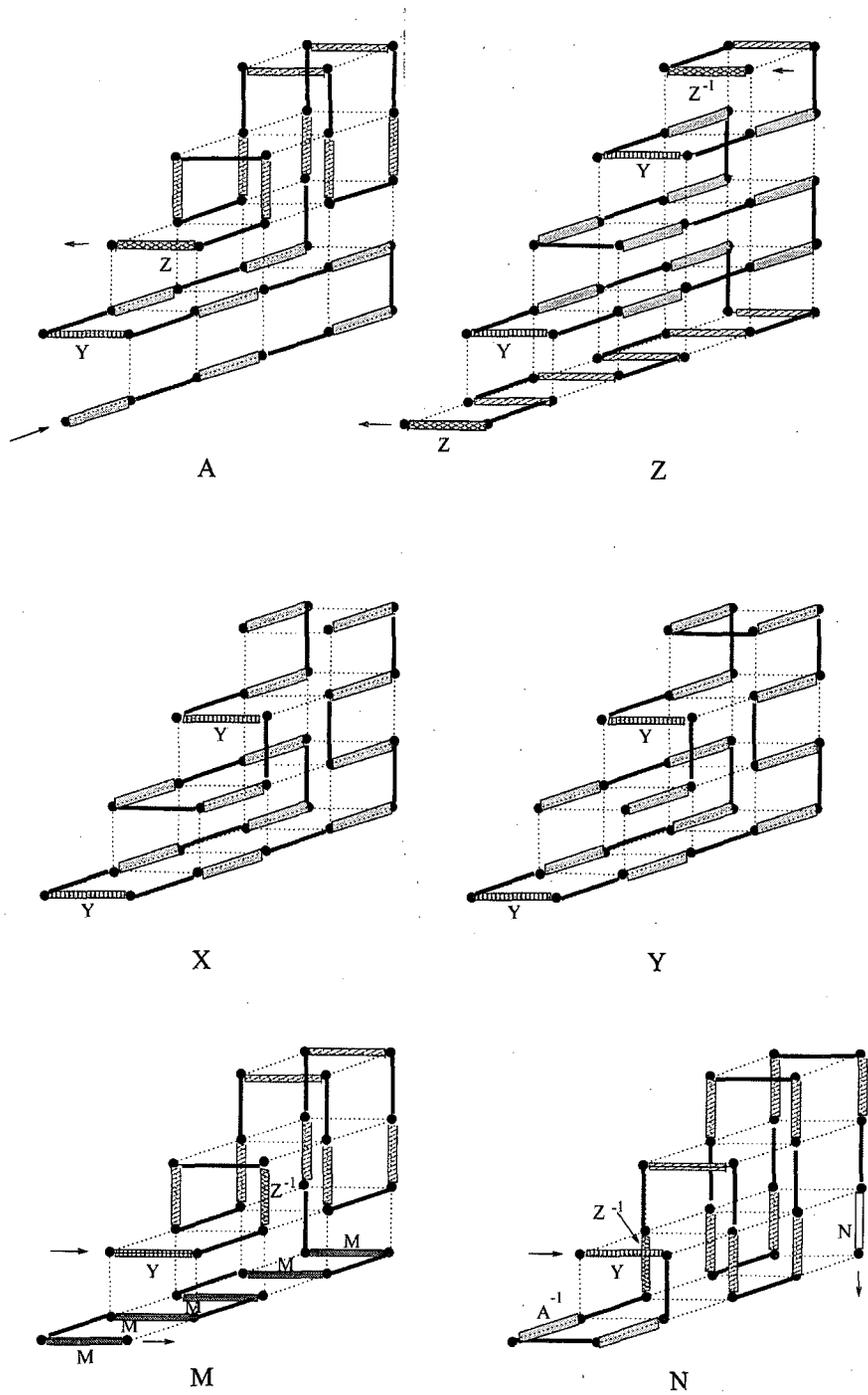


Figura 5.24: Distintos caminos entre pares de vértices generalizados.

En la figura 5.24 se muestra cómo obtener recursivamente los caminos hamiltonianos entre pares de vértices generalizados que vamos a utilizar. Para evitar explicitar en cada caso el camino empleado en cada par de vértices generalizados, se ha coloreado cada uno de forma diferente. En la figura 5.25 se detalla la distinción de cada uno de estos caminos.

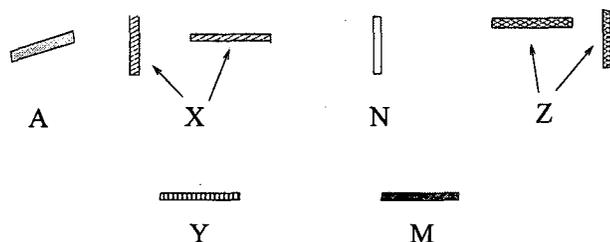


Figura 5.25: Distinción de los caminos que aparecen recursivamente en la figura 5.24.

En la tabla 5.1 se muestra \mathcal{P}_6 de forma explícita. Basta cambiar el último tramo de \mathcal{P}_6 , el tramo indicado por M (y que es el camino hamiltoniano en el par de vértices generalizados $(101111100000 - -110111100000)$) por el camino que hemos notado por N . El camino así obtenido $\mathcal{P}_6 - M + N$ sí que cierra en \mathcal{M}_6 . En la tabla 5.2 se muestra este ciclo hamiltoniano de \mathcal{M}_6 .

Para obtener un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_8 procederíamos de la siguiente forma. Sustituiríamos cada vértice de los que aparecen en la tabla 5.1 por su vértice generalizado. Todos los vértices de la primera columna están distribuidos en un camino del tipo A (véase figura 5.24). Construiríamos recurrentemente los caminos hamiltonianos entre vértices generalizados (tal como se indica en la figura 5.24). Y así obraríamos con las siguientes columnas, obteniendo el camino \mathcal{P}_8 . Finalmente, cambiando el camino de tipo M por otro del tipo N entre los dos últimos vértices generalizados que aparecen –esto es, entre 1101111110^7 y 1011111110^7 – se obtiene un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_8 .

Camino hamiltoniano \mathcal{P}_6						
A	A	X	X	X	Z	M
111111000000	111001110000	110100101100	101010101100	101010101100	101101001100	110110110000
111110100000	111001101000	110100101010	101010101010	101010101010	110101001100	101110110000
111110010000	111001100100	110100110010	101010110010	101010110010	110101001010	101110101000
111110001000	111001100010	110100110100	101010110100	101010110100	101101001010	101110011000
111110000100	111001010010	110100111000	101010111000	101010111000	101101010010	110110011000
111110000010	111001010100	110010111000	101100111000	101100111000	101101010100	110110101000
111101000010	111001011000	110010110100	101100110100	101100110100	101101011000	110110100100
111101000010	111000111000	110010110010	101100110010	101100110010	110101011000	110110010100
111101000100	111000110100	110010101010	101100101010	101100101010	110101010100	110110001100
111101001000	111000110100	110010101100	101100101100	101100101100	110101010010	101110001100
111101010000	111000101010				110101100010	101110010100
111101100000	111001001010				101101100010	101110100100
111011100000	111001001100				101101100100	101110100010
113011010000	111000101100				110101100100	101110010010
111011001000					110101101000	101110001010
111011000100					101101101000	110110001010
111011000010					101101110000	110110010010
111010100010					110101110000	110110100010
111010010010						110111000010
111010001010						101111000010
111100001010						101111000100
111100010010						110111000100
111100100010						110111001000
111100100100						101111010000
111100001010						110111010000
111100001100						110111100000
111010001100						101111100000
111010010100						
111010100100						
111010101000						
111010011000						
111100011000						
111100101000						
111100110000						
111010110000						

Tabla 5.1

Camino hamiltoniano \mathcal{P}_6						
A	A	X	X	X	Z	M
111111000000	111001110000	110100101100	101010101100	101010101100	101101001100	110110110000
111110100000	111001101000	110100101010	101010101010	101010101010	110101001100	101110110000
111110010000	111001100100	110100110010	101010110010	101010110010	110101001010	101110101000
111110001000	111001100010	110100110100	101010110100	101010110100	101101001010	101110011000
111110000100	111001010010	110100111000	101010111000	101010111000	101101010010	110110011000
111110000010	111001010100	110010111000	101100111000	101100111000	101101010100	110110101000
111101000010	111001011000	110010110100	101100110100	101100110100	101101011000	110110100100
111101000010	111000111000	110010110010	101100110010	101100110010	110101011000	110110010100
111101000010	111000110100	110010101010	101100101010	101100101010	110101010100	110110001100
111101001000	111000110100	110010101100	101100101100	101100101100	110101010010	101110001100
111101010000	111000101010				110101100010	101110010100
111101100000	111001001010				101101100010	101110100100
111011100000	111001001100				101101100100	101110100010
111011010000	111000101100				110101100100	101110010010
111011001000					110101101000	101110001010
111011000100					101101101000	110110001010
111011000010					101101110000	110110010010
111010100010					110101110000	110110100010
111010010010						110111000010
111010001010						101111000010
111100001010						101111000100
111100010010						110111000100
111100100010						110111001000
111100100100						101111010000
111100010100						110111010000
111100001100						110111100000
111010001100						101111100000
111010010100						
111010100100						
111010101000						
111010011000						
111100011000						
111100101000						
111100110000						
111010110000						

Tabla 5.2

En general, para obtener un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_m , con m par, se procede del siguiente modo. Se sustituye en \mathcal{P}_{m-2} cada vértice $s = x10^t$ por su vértice generalizado $\bar{s} = x1110^{t+2}$ y se construyen de forma recurrente los caminos hamiltonianos entre los pares de vértices generalizados, obteniendo de esta forma \mathcal{P}_m , camino hamiltoniano de \mathcal{M}_m . Basta cambiar el último tramo de \mathcal{P}_m , concretamente, cambiar el camino del tipo M por otro del tipo N en el último par de vértices generalizados para obtener un ciclo hamiltoniano en \mathcal{M}_m . Concluimos pues, el siguiente resultado.

Teorema 5.8 *Si m es par, \mathcal{M}_m es un grafo hamiltoniano.*

5.7 Emparejamientos y permutaciones

En este apartado, dado un emparejamiento M de \mathcal{M}_m vamos a asociarle dos tipos diferentes de permutaciones. Por una parte demostramos de nuevo, con el lenguaje de las permutaciones, varias de las propiedades de \mathcal{M}_m presentadas en las secciones anteriores. Por otra parte, mostramos la obtención de una familia de permutaciones contadas por los números de Catalan, diferente de las conocidas hasta el momento.

5.7.1 \mathcal{M}_m y permutaciones de m elementos

Cualquier segmento $(a, b) \in M \in \mu_m$ tiene que verificar que deja un número par de puntos a cada lado. Por ello podríamos reenumerar P_{2m} de la siguiente manera: empezando por el punto de menor abcisa, etiquetamos alternativamente m números y esos mismos números con primas, como muestra la figura 5.26.

De esta forma, dado un emparejamiento $M \in \mu_m$, cualquier vértice del conjunto $A = \{1, \dots, m\}$ está emparejado con uno del conjunto $A' = \{1', \dots, m'\}$ y, por lo tanto, todo emparejamiento perfecto sin

cortes es una biyección del conjunto A en A' (véase figura 5.26).

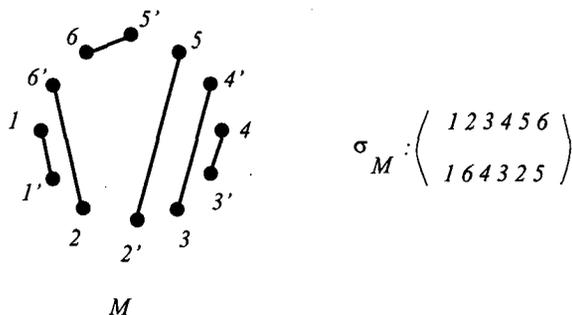


Figura 5.26: Emparejamientos perfectos sin cortes y permutaciones.

Así visto, cada emparejamiento $M \in \mu_m$ tiene asociada una permutación σ_M de m elementos. Llamamos \mathcal{S}_m al conjunto de todas estas permutaciones. Las adyacencias que hemos considerado en \mathcal{M}_m se traducen en que las respectivas permutaciones difieren en una transposición. Así pues, el grafo \mathcal{M}_m de emparejamientos perfectos geométricos es un subgrafo del grafo de permutaciones \mathfrak{S}_m (grafo que tiene por conjunto de vértices el conjunto de permutaciones de m elementos y dos son adyacentes si difieren en una transposición).

Esta forma de ver el problema nos permite recuperar fácilmente parte de la información que ya hemos estudiado en los apartados anteriores de este capítulo. Por ejemplo, la bipartición que hemos demostrado que existe en \mathcal{M}_m se reduce ahora a considerar la clase de los emparejamientos que se corresponden con permutaciones pares y la clase de los emparejamientos producidos por permutaciones impares.

También es fácil ver, desde este prisma, que los dos emparejamientos C_1, C_2 que tienen todos sus segmentos sobre la envolvente convexa de P_{2m} distan $m - 1$, y, por lo tanto, el diámetro de \mathcal{M}_m tiene que ser al menos $m - 1$. Concretamente, las permutaciones asociadas a C_1 y C_2 son:

$$\sigma_{C_1} = I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m \\ 1 & 2 & 3 & \dots & m \end{pmatrix}, \quad \sigma_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & m-1 & m \\ 2 & 3 & 4 & \dots & m & 1 \end{pmatrix}$$

y es imposible transformar una en otra con menos de $m - 1$ transposiciones.

Más trabajoso será calcular la diferencia entre el número de permutaciones pares y las impares. A continuación reescribimos el teorema 5.6 en términos de permutaciones.

Teorema 5.9 *Sea e_m el número de permutaciones pares de \mathcal{S}_m y o_m el número de permutaciones impares de \mathcal{S}_m . Entonces se verifica:*

- $e_m - o_m = 0$ si m es par,
- $e_m - o_m = -C_t$ si $m = 2t + 1$, siendo C_t el t -ésimo número de Catalan.

Demostración. Para valores pequeños de m tenemos $e_1 = 1$, $o_1 = 0$, $e_2 = 1$, $o_2 = 1$, $e_3 = 2$, $o_3 = 3$. Así pues, para $m \leq 3$ se verifica el enunciado. Suponemos cierto el enunciado para $m - 1$. Vamos a calcular $e_m - o_m$. Para hacer este cálculo, clasificamos las permutaciones de \mathcal{S}_m en m familias.

$$\begin{aligned} F_1 &= \{\sigma : A \rightarrow A' \mid \sigma(1) = 1'\} \\ F_2 &= \{\sigma : A \rightarrow A' \mid \sigma(1) = 2'\} \\ &\vdots \\ F_m &= \{\sigma : A \rightarrow A' \mid \sigma(1) = m'\} \end{aligned}$$

Las permutaciones de la familia F_k se corresponden con emparejamientos que contienen el segmento $(1, k')$.

Sea $\sigma \in F_k$, esto es, σ es una permutación del siguiente tipo,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k & k+1 & \dots & m \\ k & s_2 & s_3 & \dots & s_k & s_{k+1} & \dots & s_m \end{pmatrix}$$

Observamos que, puesto que σ está asociada a algún emparejamiento M que contiene el segmento $(1, k')$ y donde no hay cortes entre segmentos, los elementos de $\{2, \dots, k\}$ forzosamente tienen que estar emparejados con los del conjunto $\{1', \dots, (k-1)'\}$, esto es, $\{s_2, s_3, \dots, s_k\} = \{1', \dots, (k-1)'\}$ (salvo orden). Análogamente, los elementos de $\{k+1, \dots, m\}$ tienen que emparejarse con los de $\{(k+1)', \dots, m\}$, esto es, salvo orden, $\{s_{k+1}, \dots, s_m\} = \{(k+1)', \dots, m\}$.

Consideramos las siguientes permutaciones:

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ k & s_2 & \dots & s_k \end{pmatrix} \quad \sigma_* = \begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \dots & m \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_m \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & k-1 & k \\ k & 1 & 2 & \dots & k-2 & k-1 \end{pmatrix}$$

$$\tau^* = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k \\ s_2 & \dots & s_k & k \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k-1 \\ s_2 & s_3 & \dots & s_{k-1} \end{pmatrix}$$

Observamos que $\sigma^* = \tau^* \circ \rho$. También observamos que $\sigma^*, \rho, \tau^* \in \mathcal{S}_k$, $\sigma_* \in \mathcal{S}_{m-k}$ y $\tau \in \mathcal{S}_{k-1}$. Si notamos $N(\gamma)$ el número de inversiones de la permutación γ , se verifican las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} N(\sigma) &= N(\sigma^*) + N(\sigma_*) \\ N(\tau) &= N(\tau^*) \\ N(\rho) &= k-1 \\ N(\sigma^*) &= N(\tau^*) + N(\rho) \end{aligned}$$

De donde, finalmente:

$$N(\sigma) = k-1 + N(\tau) + N(\sigma_*).$$

La permutación σ es par si y sólo si k es impar y τ y σ_* son permutaciones de diferente signo, o bien si k es impar y τ y σ_* son del mismo signo.

Análogamente, para que σ sea una permutación impar, en caso de ser k par es necesario que τ y σ_* sean del mismo signo y si k es impar entonces τ y σ_* deben ser permutaciones de distinto signo.

Notamos:

$e(F_i)$ = número de permutaciones pares de F_i

$o(F_i)$ = número de permutaciones impares de F_i

El número de permutaciones pares de cada familia F_i es:

$$e(F_1) = e_{m-1}$$

$$e(F_2) = o_{m-2}$$

$$e(F_k) = e_{k-1}o_{m-k} + o_{k-1}e_{m-k} \quad \text{si } k \text{ es par}$$

$$e(F_k) = e_{k-1}e_{m-k} + o_{k-1}o_{m-k} \quad \text{si } k \text{ es impar, } k \geq 3$$

$$e(F_{m-1}) = \begin{cases} e_{m-2} & \text{si } m \text{ es par} \\ o_{m-2} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

$$e(F_m) = \begin{cases} o_{m-1} & \text{si } m \text{ es par} \\ e_{m-1} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

El número de permutaciones impares en cada familia F_i es el siguiente:

$$o(F_1) = o_{m-1}$$

$$o(F_2) = e_{m-2}$$

$$o(F_k) = e_{k-1}e_{m-k} + o_{k-1}o_{m-k} \quad \text{si } k \text{ es par}$$

$$o(F_k) = e_{k-1}o_{m-k} + o_{k-1}e_{m-k} \quad \text{si } k \text{ es impar, } k \geq 3$$

$$o(F_{m-1}) = \begin{cases} o_{m-2} & \text{si } m \text{ es par} \\ e_{m-2} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

$$o(F_m) = \begin{cases} e_{m-1} & \text{si } m \text{ es par} \\ o_{m-1} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

Estudiamos ahora las diferencias $e(F_i) - o(F_i)$. Distinguimos según m sea o no par.

Caso m par: En este caso, o bien $k - 1$ o bien $m - k$ es par.

$$e(F_1) - o(F_1) = e_{m-1} - o_{m-1}$$

Si k es impar, $k \geq 3$,

$$\begin{aligned} e(F_k) - o(F_k) &= e_{k-1}e_{m-k} + o_{k-1}o_{m-k} - (e_{k-1}o_{m-k} - o_{k-1}e_{m-k}) \\ &= e_{k-1}(e_{m-k} - o_{m-k}) - o_{k-1}(e_{m-k} - o_{m-k}) \\ &= (e_{k-1} - o_{k-1})(e_{m-k} - o_{m-k}) = 0. \end{aligned}$$

Si k es par,

$$e(F_2) - o(F_2) = o_{m-2} - e_{m-2} = 0$$

y, para $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} e(F_k) - o(F_k) &= e_{k-1}o_{m-k} + o_{k-1}e_{m-k} - (e_{k-1}e_{m-k} - o_{k-1}o_{m-k}) \\ &= -e_{k-1}(e_{m-k} - o_{m-k}) - o_{k-1}(e_{m-k} - o_{m-k}) \\ &= -(e_{k-1} - o_{k-1})(e_{m-k} - o_{m-k}) = 0. \end{aligned}$$

Y para las familias F_{m-1} y F_m :

$$e(F_{m-1}) - o(F_{m-1}) = e_{m-2} - o_{m-2} = 0$$

$$e(F_m) - o(F_m) = o_{m-1} - e_{m-1}.$$

Resumiendo, hemos obtenido:

$$\begin{aligned} e(F_i) - o(F_i) &= 0 \quad \forall i = 2, \dots, m-1, \\ e(F_1) - o(F_1) &= -(e(F_m) - o(F_m)). \end{aligned}$$

Finalmente calculamos la diferencia $e_m - o_m$:

$$e_m = \sum_{i=1}^m e(F_i), \quad o_m = \sum_{i=1}^m o(F_i),$$

$$e_m - o_m = \sum_{i=1}^m e(F_i) - \sum_{i=1}^m o(F_i) = \sum_{i=1}^m (e(F_i) - o(F_i)) = 0.$$

Caso m impar. Operando análogamente al caso anterior,

$$e(F_1) - o(F_1) = e_{m-1} - o_{m-1} = 0.$$

Si $k \geq 3$ es impar:

$$e(F_k) - o(F_k) = \dots = (e_{k-1} - o_{k-1})(e_{m-k} - o_{m-k}) = 0.$$

Si k es par, entonces $k - 1 = 2j + 1$ para un cierto j , y

$$e(F_2) - o(F_2) = o_{m-2} - e_{m-2} = -(e_{m-2} - o_{m-2}) = (-1)^t c_{t-1},$$

$$\begin{aligned} e(F_k) - o(F_k) &= \dots = -(e_{k-1} - o_{k-1})(e_{m-k} - o_{m-k}) \\ &= (-1)(-1)^j c_j (-1)^{t-j-1} c_{t-j-1} = (-1)^t c_j c_{t-j-1}. \end{aligned}$$

Y para las familias F_{m-1} y F_m :

$$\begin{aligned} e(F_{m-1}) - o(F_{m-1}) &= o_{m-2} - e_{m-2} = (-1)^t c_{t-1}, \\ e(F_m) - o(F_m) &= e_{m-1} - o_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Resumiendo, hemos obtenido:

$$\begin{aligned} e(F_k) - o(F_k) &= 0 \quad \forall k \geq 1 \text{ impar}, \\ e(F_k) - o(F_k) &= (-1)^t c_j c_{t-j-1} \quad \forall k \geq 2 \text{ par}. \end{aligned}$$

donde $m = 2t + 1$ y $k - 1 = 2j + 1$.

Así pues,

$$\begin{aligned} e_m - o_m &= \sum_{i=1}^m (e(F_i) - o(F_i)) = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ par}}}^{m-1} (e(F_i) - o(F_i)) \\ &= \sum_{j=0}^{t-1} c_j c_{t-j-1} = (-1)^t c_t. \end{aligned}$$

□

5.7.2 Nueva familia de permutaciones contada por los números de Catalan

Un problema muy interesante es caracterizar la familia de permutaciones \mathcal{S}_m .

$$\mathcal{S}_m = \{\sigma \in \mathfrak{S}_m \mid \exists M \in \mathcal{M}_m : \sigma = \sigma_M\}$$

Es bien sabido que existen familias de permutaciones, cuyo cardinal son los números de Catalan, tales que la caracterización se hace por una única subsecuencia prohibida. Es natural preguntarse si es éste un criterio válido en \mathcal{S}_m . Vamos a ver que la respuesta es negativa.

La única permutación prohibida en \mathcal{S}_3 es

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

y, sin embargo, existen permutaciones permisibles que contienen a σ como subsecuencia. Basta considerar $\tau \in \mathcal{S}_m$ definida de la siguiente manera.

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & m \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 7 & \dots & m \end{pmatrix}$$

En la figura 5.27 se muestran los emparejamientos perfectos M_τ y M_σ asociados a las permutaciones τ y σ , respectivamente.

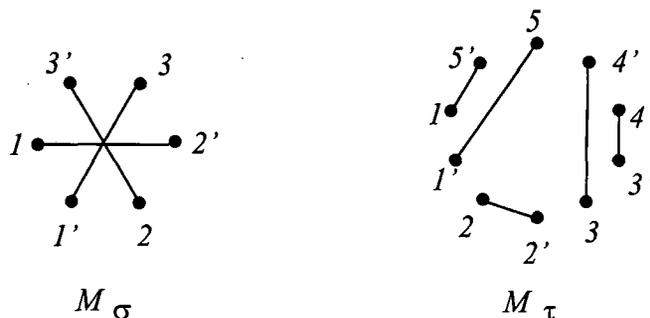


Figura 5.27: La caracterización de permutaciones permisibles no es por una única subsecuencia prohibida.

Damos a continuación una caracterización de las permutaciones asociadas a emparejamientos perfectos sin cortes.

Sea $M \in \mu_m$ y sea σ_M la permutación asociada a M . Evitar que haya cortes entre los segmentos de M equivale a evitar que, para cualquier i , los puntos $i, \sigma_M(i)$ estén separados por algún par $j, \sigma_M(j)$. Y esto, expresado en términos de la razón doble, es equivalente a decir que ésta es positiva.

Así pues, notando $(i, j; k, m)$ la razón doble de cuatro puntos, tenemos la siguiente caracterización de las permutaciones de \mathcal{S}_m :

$$\mathcal{S}_m = \{ \sigma \in \mathfrak{S}_m \mid (i, \sigma(i); j, \sigma(j)) > 0 \ (i \neq j) \}.$$

5.7.3 \mathcal{M}_m y permutaciones de $2m$ elementos

En este apartado estudiamos la relación de \mathcal{M}_m con otro tipo de permutaciones. En este caso son permutaciones de $2m$ elementos y que ya han sido estudiadas en [9]. Aunque no damos aquí material nuevo sobre estas permutaciones hemos creído conveniente incluirlas por la relación que guardan con \mathcal{M}_m .

Dado un emparejamiento $M \in \mathcal{M}_m$, también podemos asignarle una permutación de $2m$ elementos de la siguiente manera. Consideramos σ_M la permutación de P_{2m} , tal que a todo punto $i \in P_{2m}$ le asigna el punto con quien está emparejado i en M . Esto es si (i, j) es un segmento de M , entonces $\sigma_M(i) = j$.

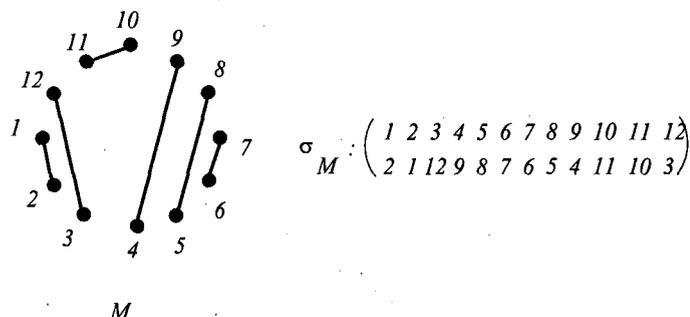


Figura 5.28: Permutación de $2m$ elementos asociada a M .

Este tipo de permutaciones verifican que $\sigma_M(i) = j$ si y sólo si $\sigma_M(j) = i$, es decir, $\sigma_M^2 = I$. También es obvio que son permutaciones sin puntos fijos. Así pues, una caracterización aritmética de estas permutaciones es la siguiente. Notamos \mathcal{S}_{2m} al conjunto de este tipo de permutaciones:

$$\mathcal{S}_{2m} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{2m} \mid \sigma^2 = I, \sigma(i) \neq i \ (i, \sigma(i); j, \sigma(j)) > 0 \ (i \neq j)\}.$$

Otra posible forma de caracterizar esta familia de permutaciones es la obtención por forma recursiva. Consideramos:

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observamos que, por el lema 4.6, para todo $\sigma \in \mathcal{S}_{2m}$ se verifica que existe un i tal que $\sigma(i) = i+1$ (y entonces $\sigma(i+1) = i$). Entonces

tenemos que $\sigma \in \mathcal{S}_{2m}$ si y sólo si existe un i tal que $\sigma(i) = i + 1$ y $\sigma|_{P_{2m} \setminus \{i, i+1\}}$ es una permutación de \mathcal{S}_{2m-2} .

5.8 Conclusiones y problemas abiertos

En este capítulo hemos introducido el grafo \mathcal{M}_m de emparejamientos perfectos sin cortes de una nube de puntos en posición convexa. Se han estudiado muchas de las propiedades combinatorias que verifica \mathcal{M}_m : el grado máximo y mínimo, el diámetro y la hamiltonicidad. También se ha estudiado la relación entre \mathcal{M}_m y el conjunto de sucesiones binarias bien equilibradas, así como la interpretación de \mathcal{M}_m en el lenguaje de las permutaciones. Muchos son los problemas abiertos relacionados con lo hecho aquí. Exponemos a continuación algunos de ellos.

Siguiendo con nubes de puntos en posición convexa, una propiedad combinatoria importante de \mathcal{M}_m que queda por estudiar es su vértice-conectividad. Otro estudio por realizar es la determinación del grupo de automorfismos de \mathcal{M}_m . También es problema interesante el profundizar en el estudio de las dos familias de permutaciones introducidas en el apartado 5.7, dando una caracterización más combinatoria de ellas que la aquí presentada.

Otra continuación natural de lo aquí hecho es el estudio del grafo $\mathcal{M}(P_n)$ de emparejamientos perfectos sin cortes de P_n , siendo P_n una nube de puntos en posición general, y las adyacencias las mismas que hemos considerado en el caso convexo.

Finalmente, otro tipo de problema a considerar, tanto en el caso convexo como en el caso general, es introducir una variante métrica como se muestra a continuación. Sea $\ell(M)$ la longitud de un emparejamiento perfecto y sin cortes M , esto es, la suma de las longitudes de los segmentos de M , y llamamos emparejamiento mínimo a aquél que minimiza la longitud. Considerando solamente adyacencias que optimizan localmente la longitud, esto es, pasamos de M_1 a M_2 si y sólo si $M_1 \sim M_2$ en $\mathcal{M}(P_n)$ y $\ell(M_2) < \ell(M_1)$, ¿es posible llegar con este tipo de adyacencias desde un emparejamiento $M \in \mathcal{M}(P_n)$ al

emparejamiento mínimo? En caso de ser afirmativa la respuesta sería interesante estudiar algoritmos eficientes para calcular caminos cortos en este digrafo.