UNIVERSITAT DE BARCELONA

Criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería en el Perú: el caso de la derivada

Walmer Garcés Córdova

TESIS DOCTORAL

Criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería en el Perú: el caso de la derivada

Walmer Garcés Córdova

UNIVERSITAT DE BARCELONA

2021

UNIVERSITAT DE BARCELONA

Criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería en el Perú: el caso de la derivada

Programa de doctorat en Didàctica de les Ciències, les Llengües, les Arts i les Humanitats

Línia de recerca: Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals

Facultat d'Educació

Doctorand: Walmer Garcés Córdova

Director i tutor: Dr. Vicenç Font Moll

Dedicatoria

A mi papá don Segundo Manuel, por enseñarme
el valor del trabajo y, a tirar siempre para arriba y no rendirme, jamás.

A mi mamá doña Ana Teodora, por darme la vida
y enseñarme la perseverancia y la constancia para enfrentar los problemas.

A mis hijos Halley Stephen Manuel y Ariana Carolina,
por ser el motor y motivo para seguir adelante.

A mis hermanos/as Dergi, Mirtha, Yony y Analy,
por todo el cariño, aprecio y por estar pendientes de mí.

A María Dilma Garcés y Asunción Pintado, por
motivarme, ayudarme y darme fuerzas para seguir adelante.

Agradecimientos

Al Dr. Vicenç Font Moll, por sus consejos, sugerencias, sus enseñanzas, dedicación, por su tiempo de largas horas de trabajo en la elaboración de artículos científicos, comunicaciones y reportes de investigación, y por ayudarme a solucionar muchos problemas tanto del ámbito académico, como del personal, durante mi estadía en Barcelona.

Al Estado Peruano, quien a través del Pronabec - Ministerio de Educación, me brindó el apoyo con la "Beca Presidente de la República", para realizar estudios de doctorado en el extranjero.

A Alicia Sánchez representante de los doctorandos del Programa de Doctorado de la Universitat de Barcelona, por su amistad, compañerismo, su tiempo, sus opiniones, y por su ayuda en cada uno de los trabajos de investigación individuales y grupales.

A la Universitat de Barcelona y su Escuela de Doctorado, a quien he aprendido a quererla como mi segundo hogar, a sus docentes y personal administrativo, a mis compañeros/as estudiantes: Viviane, Alicia, Carlos, Telésforo, Vahid, con quienes he compartido; por acogerme como un miembro más de esta gran familia UB.

A los Matemáticos y/o Profesores de Matemáticas del Perú: Javier Sayritupac, Gustavo Marca, Adelso Perdomo, Joel Ramírez, Paúl Luque, Jairo Esquivel, Edgar Ramírez, Mónika Lachira, Ernaldo Caruajulca, y Elías Mejía; por su predisposición, colaboración y tiempo, para con esta investigación.

Reconocimiento:

Este trabajo ha tenido el apoyo del Proyecto de Investigación en Formación del Profesorado de la Universitat de Barcelona: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Esta investigación fue financiada por la "Beca Presidente de la República" del Perú: RJ 168-2017-MINEDU-VMGI-PRONABEC-OBPOST.

Índice de Contenidos

Resumen

Desde hace aproximadamente un siglo, en la mayoría de los países se organizan las carreras de ingeniería con un ciclo de ciencias básicas en la base, entre las que se encuentran las Matemáticas. Actualmente han surgido dudas y dilemas sobre si esta es, o no, la mejor opción, por lo que la formación matemática que necesitan los ingenieros hoy en día, es una cuestión problemática. Con relación a esta problemática, son necesarias investigaciones sobre cómo es la enseñanza de las matemáticas en los ciclos de ciencias básicas en ingeniería, en particular, en el Perú, dada la escasez de investigaciones sobre esta temática previas a la búsqueda de alternativas. En esta línea, el objetivo de esta investigación es determinar los criterios que orientan la práctica del profesor en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería y, en concreto, para explicar las derivadas.

El marco teórico que soporta y justifica esta investigación es el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el cual propone un modelo de análisis didáctico (formado por cinco tipos de análisis) que permite describir, explicar y valorar los procesos de instrucción que diseñan e implementan los profesores de matemáticas.

Se trata de una investigación interpretativa de corte cualitativo, de estudio de caso individual y estudio de caso múltiple, que busca comprender la enseñanza de las matemáticas a través del análisis de las prácticas docentes y de la reflexión sobre su práctica. Los participantes del grupo de investigación son siete docentes universitarios, entre matemáticos y profesores de matemáticas, que enseñan cálculo diferencial en diversas carreras de ingeniería de universidades públicas y privadas en el Perú. Para el análisis de la información (clases videograbadas, sílabos, planes de clase, material docente, etc.) se usaron las herramientas teórico-metodológicas proporcionadas por el Enfoque Ontosemiótico, en particular, los criterios de idoneidad didáctica, usados como categorías a priori para inferir los criterios que orientan la práctica de los profesores; estos criterios se triangularon con aquellos que los profesores declararon seguir en una entrevista semiestructurada, en la que tenían que comentar su práctica docente con el investigador.

El primer resultado obtenido es que los participantes realizan una trayectoria didáctica en la que las configuraciones didácticas se sitúan más cerca de las configuraciones magistrales formalistas, que de otros modelos (por ejemplo, las configuraciones

didácticas de tipo realista). Esto es coherente con los resultados de la literatura previa sobre la enseñanza de las matemáticas en los ciclos básicos de ingeniería y, en particular, con la enseñanza del cálculo en los primeros cursos de universidad, los cuales evidencian que aún es dominante una enseñanza netamente algorítmica de aprendizaje de fórmulas, mecanicista y rutinaria, o bien, una enseñanza muy rigurosa y formalista, de manera tal que se deja de lado la comprensión significativa del concepto de derivada y sus aplicaciones inmediatas, que permitan al futuro ingeniero resolver problemas de su desempeño profesional. Ahora bien, al mismo tiempo se observan prácticas tales como, tener en cuenta los conocimientos previos, usar las nuevas tecnologías, proponer algún problema contextualizado con la profesión, etc. Se trata de prácticas didácticas que, si bien se pueden considerar marginales en su quehacer, darían pie a un posible cambio si la institución se lo plantea.

El segundo resultado sobre los principios que orientan la práctica docente, inferidos, sobre todo, a partir del análisis de sus clases, es que en general los principios que tienen más peso son el principio ecológico (en cuanto al cumplimiento del programa), el mediacional (respecto a ajustarse al tiempo disponible), el epistémico (referido a implementar una enseñanza sobre todo procedimental), y el cognitivo (en cuanto se adopta un modelo de enseñanza básicamente de tipo magistral). De todas maneras, estos pesos varían de un docente a otro.

El tercer resultado sobre los criterios que orientan su práctica, según los docentes, es que de entrada, los profesores declaran criterios que muestran más preocupación por los estudiantes como el cognitivo, el emocional o el uso de problemas relacionados con su profesión. Ahora bien, después de la entrevista docente, se concluye que dominan, sobre todo, el cumplimiento del sílabo y la adaptación al tiempo disponible; es decir, que asignan un peso alto a los criterios de idoneidad ecológico y mediacional, mientras que atribuyen un peso medio a los criterios interaccional y emocional, así como, dan un peso relativamente bajo a los criterios epistémico y cognitivo.

Estos resultados, los criterios que guían su práctica docente, explican por qué se están implementando las clases de las ciencias básicas en las carreras de ingeniería, de manera expositiva y procedimental, y por qué no se incorporan innovaciones.

Abstract

For about a century, engineering careers have been organised –in most countries– with a cycle of basic sciences at the base, which includes Mathematics. Currently, doubts and dilemmas have arisen about whether or not this is the best option, so the mathematical training that engineers need nowadays is a problematic question. Regarding this problem, research on how mathematics is taught in basic science cycles in engineering is needed, particularly in Peru, due to the lack of research on this subject prior to the search for alternatives. In this line, this research aims to determine the criteria that guide the teacher's practice in Peru to explain mathematics in a basic science course in engineering careers and, specifically, to explain the topic of derivatives.

The theoretical framework that supports and justifies this research is the Onto-Semiotic Approach to mathematical knowledge and instruction, which provides a didactic analysis model (consisting of five types of analysis) that allows describing, explaining, and assessing the instructional processes that are designed and implemented by mathematics teachers.

This is an interpretative research from a qualitative approach, consisting of both individual and multiple case study, which seeks to understand the teaching of mathematics through the analysis of teaching practices and the reflection on their practice. The participants of the research group are seven university professors, including mathematicians and mathematics teachers, who teach differential calculus in different engineering careers at public and private universities in Peru. For the analysis of the information (video-recorded lessons, syllables, lesson plans, teaching resources, etc.), the theoretical-methodological tools provided by the Onto-Semiotic Approach were used, particularly, the didactic suitability criteria, used as a priori categories to infer the criteria that guide the teachers' practice. There criteria were triangulated with those that the teachers declared in a semi-structured interview, in which they had to discuss with the researcher on their teaching practice.

The first result obtained is that the participants carry out a didactic trajectory in which the didactic configurations are located closer to the formalist magisterial configurations, than to other models (for instance, the realistic didactic configurations). This is consistent with the results of the previous literature on the teaching of mathematics in basic engineering cycles and, specifically, on the teaching of calculus at the first university grades, which

show that a mechanistic, routine, and purely algorithmic teaching of formulas is still dominant, or a very rigorous and formalistic teaching, in such a way that the significant understanding of the concept of derivative and its immediate applications, which allow the future engineer to solve problems of their professional performance, are left aside. However, at the same time, practices such as taking into account previous knowledge, using new technologies, proposing a problem contextualised with the profession, etc., are observed. Although these didactic practices can be considered marginal in the teachers' work, they would give rise to a possible change if the institution considers it.

The second result about, the principles that guide teaching practice, mostly, inferred from the analysis of their lessons, is that –in general terms– the principles that have more weight are the ecological (in terms of program compliance), mediational (regarding the adjustment of the available time), epistemic (regarding the implementation of mainly procedural teaching), and cognitive principles (since a basically magisterial teaching model is adopted). In any case, these weights vary from one teacher to another.

The third result, about the criteria that guide their practice according to the teachers, is that they mainly declare criteria that show more concern for students, as the cognitive and emotional criteria, or the use of problems related to their profession. Nevertheless, after the teachers' interview, it is concluded that the fulfilment of the syllabus and the adaptation to the available time are emphasized; that is, they assign a high weight to the ecological and mediational suitability criteria, while they assign a medium weight to the interactional and emotional criteria, and a relatively low weight to the epistemic and cognitive criteria.

These results, the criteria that guide the teaching practice, explain why basic science lessons are implemented in engineering careers in an expository and procedural way, and why innovations are not being added.

Listado de Abreviaturas

APOS	:	Actions, Process, Objects, and Schemas
ASIBEI	:	Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de Ingeniería
CI	:	Criterios de Idoneidad
CID	:	Criterios de Idoneidad Didáctica
CDM	:	Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas
CCDM	:	Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor
DIALNET	:	Base de datos de contenidos científicos hispanos
DOAJ	:	Directory of Open Access Journals
DSC	:	Didactical Suitability Criteria
EOS	:	Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática
ERIH PLUS	:	European Reference Index for the Humanities and Social Science
LATINDEX	:	Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal
MKT	:	Mathematical Knowledge for Teaching
MTSK	:	Mathematics Teacher's Specialised Knowledge
OSA	:	Onto-Semiotic Approach
PCK	:	Pedagogical Content Knowledge
REDIB	:	Red Iberoamericana de Innovación y Conocimiento Científico
SCOPUS	:	Base de datos de investigación mundial en Ciencia, Tecnología, Medicina, Ciencias Sociales, Artes y Humanidades
SJR	:	Scimago Journal & Country Rank
WOS	:	Web of Science

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Introducción general

Actualmente, la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la formación de los futuros ingenieros es un área que viene tomando, cada vez, mayor importancia en la investigación a nivel internacional, tal y como lo reportan las investigaciones realizadas, entre otros, en Europa y en Iberoamérica. Así por ejemplo, estudios hechos por la Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (2016), la cual agrupa a facultades de ingeniería de Iberoamérica, de la que forman parte las facultades de ingeniería del Perú, dan cuenta de que las tendencias en la formación de los ingenieros están relacionadas a la innovación, al uso de las tecnologías de la información y la comunicación, a la enseñanza por competencias, etc.

En esa línea, existe toda una problemática alrededor de la enseñanza y aprendizaje de los cursos de ciencias básicas para ingeniería, en especial, la del cálculo diferencial; y parte fundamental de esta problemática tiene que ver con el enfoque con que enseñan los docentes de matemáticas en las carreras de ingeniería, con su formación continua, así como con los conocimientos y competencias que debe tener el docente para desarrollar un proceso de instrucción que sea considerado como idóneo.

De otro lado, en el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Font, et al., 2013; Giacomone, 2018; Godino, 2009, 2012, 2013, 2018a, 2018b; Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero & Font, 2007 y 2019; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), se han formulado teorías (Teoría de la Idoneidad Didáctica), herramientas teórico-metodológicas (Criterios de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores; configuraciones epistémicas; configuraciones didácticas), y modelos de análisis didáctico (Modelo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor – modelo CDM; Modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas - modelo CCDM); que permiten investigar sobre los procesos de instrucción de temas específicos de matemáticas, así como orientar la formación de profesores de matemáticas, en formación y en servicio (formación continua), de todos los niveles educativos.

En esa línea de la investigación, el presente estudio se propone como objetivo determinar los criterios, las pautas o características que guían u orientan la práctica docente de los profesores de matemáticas peruanos que diseñan, implementan y valoran procesos de aprendizaje de las matemáticas en general, y del cálculo diferencial, en particular, en el ciclo de ciencias básicas en diversas carreras de ingeniería. Y como contexto de reflexión, se centra en la enseñanza de la derivada y sus aplicaciones. El marco teórico que soporta y justifica el proceso de investigación es el Enfoque Ontosemiótico (los criterios de idoneidad didáctica, sus componentes y descriptores; las configuraciones didácticas; y además, algunos constructos del Modelo CCDM).

En lo que respecta a la metodología, se trata pues de una investigación interpretativa de corte cualitativo, en la que se utilizan los métodos de estudio de caso individual, estudio de caso múltiple, así como la triangulación de fuentes (Bisquerra, 2009). Toda vez que lo que se pretende es describir qué está ocurriendo en los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial en el ciclo básico de las carreras de ingeniería, e inferir y/o determinar los criterios que guían la práctica de los docentes que los implementan. El grupo participante de la investigación son siete profesores de cálculo diferencial, - entre matemáticos y profesores de matemáticas – que se dedican a la enseñanza de las matemáticas en el ciclo básico de diversas facultades de ingeniería en Lima, Perú.

Esta memoria de tesis está estructurada en ocho capítulos y se trata de una tesis por compendio de artículos científicos (tres en total) publicados en revistas con índice de impacto en la base de datos bibliográficos Scopus y Web of Science, más un capítulo de libro aceptado para su publicación en el libro denominado “Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática: Investigaciones y Desarrollos en América Latina”. Las publicaciones son las siguientes:

- Garcés, W., Font, V., & Morales-Maure, L. (2021). Criteria that guide the Professor's practice to explain mathematics at basic sciences courses in engineering degrees in Peru. A case study. *Acta Scientiae, 23*(3), 1-33.
- Garcés, W. (2021). Análisis de las pautas que rigen la práctica del profesor en la enseñanza de derivadas en ciencias básicas en carreras de ingeniería. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 10*(3).

- Garcés-Córdova, W. y Font-Moll, V. (2022). Criterios que guían la práctica del profesor de matemáticas en cursos de ciencias básicas para ingeniería. *Uniciencia, 36*(1), 1-19.
- Garcés, W. y Font, V. (2021). Análisis de la práctica de un profesor en la enseñanza de derivadas para ingeniería en el Perú. En J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, M. Pochulu, y W. F. Castro (Eds.). *Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Investigaciones y desarrollos en América Latina* (en prensa).

En el capítulo 1, se abordan las investigaciones que sirven como antecedentes a este estudio: a) se describe la problemática por la que atraviesa actualmente el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, y del cálculo diferencial en particular; b) se realiza un tratamiento de la información acerca de los problemas que se presentan en el tránsito entre la educación secundaria y la universidad; c) se describen los problemas y dilemas relacionados con el ciclo de ciencias básicas en las facultades de ingeniería. Del mismo modo, se revisan ciertas investigaciones que dan cuenta de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de matemáticas, sobre todo, aquellos estudios relacionados con la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial. Además, se desarrolla un breve recorrido sobre la invención del cálculo diferencial, desde la matemática griega, pasando por Newton y Leibniz, hasta la forma como lo conocemos hoy en día, dicha revisión muestra la complejidad en términos de pluri significación de las nociones principales del cálculo diferencial.

En el capítulo 2, se presenta el Enfoque Ontosemiótico - EOS como marco teórico que soporta y justifica la investigación, las herramientas teóricas y metodológicas que nos proporciona el EOS, el modelo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, así como el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas. Seguidamente, se formula el problema general de investigación y su desglose en problemas específicos, se establece el objetivos general con su respectivo desglose en objetivos específicos; así como se precisa la metodología seguida a lo largo del proceso de investigación, el diseño metodológico, los métodos adoptados y los instrumentos que se utilizan en el recojo, análisis y síntesis de la información relacionada con este estudio. Además, se presenta información detallada del grupo de docentes de matemáticas participantes de esta investigación, que enseñan cálculo diferencial en carreras de ingeniería en diversas universidades de Lima, Perú.

En el capítulo 3, se presenta el primer artículo científico publicado en una revista de impacto por los autores Garcés, W., Font, V., and Morales-Maure, L. (2021), cuyo título ya se mencionó, y que trata sobre un estudio de caso de uno de los docentes universitarios participantes en la investigación.

En el capítulo 4, se presenta el segundo artículo científico publicado en una revista de impacto, cuyo autor es Garcés, W. (2021), que trata sobre el análisis de las pautas que rigen la práctica pedagógica del profesor cuando enseña derivadas en un curso de ciencias básicas; y que también, se trata de un estudio de caso de uno de los docentes universitarios participantes en la investigación.

Con respecto al capítulo 5, aquí se presenta un tercer estudio de caso de otro de los docentes universitarios participantes en la investigación. Se trata de un capítulo de libro aceptado para publicación en el libro denominado "*Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemática: investigaciones y desarrollos en América Latina*"; cuyos autores son Garcés, W. y Font, V. (2021).

En el capítulo 6 de esta memoria, se expone el contenido desarrollado en el tercer artículo científico publicado en una revista de impacto (tal como se especifica al inicio de este capítulo), cuyos autores son Garcés-Córdova, W. y Font-Moll, V. (2022), y que estudia globalmente los criterios didácticos que guían la práctica pedagógica de los profesores de matemáticas participantes, cuando diseñan e implementan clases de derivadas y sus aplicaciones en el ciclo de ciencias básicas en ingeniería. Los resultados encontrados se detallan en el respectivo capítulo y en las conclusiones de esta memoria.

Finalmente, en el capítulo 7 de esta memoria, se presenta una discusión general de los resultados parciales que se han ido obteniendo y/o publicando, donde se trata de vincular de una manera holística los estudios de caso individuales y el estudio de caso múltiple; luego se formulan las conclusiones a las que se ha arribado en todo el proceso de investigación; así como también, la conexión de este estudio con líneas de investigación que quedan abiertas para ser tratadas como continuidad inmediata de este proceso investigativo y en procesos futuros.

Con referencia al anexo 1, denominado resultados complementarios, aquí se da cuenta del análisis, tratamiento y síntesis de la información y de los resultados obtenidos para cada uno de los docentes participantes de este estudio, y que no están incluidos en los artículos científicos, ni en el capítulo del libro; pero que sin embargo, para arribar a esos resultados se ha seguido la misma metodología de trabajo que la que se sigue en los artículos publicados antes mencionados.

1

Realidad problemática y Antecedentes de la investigación

1.1. Introducción

En principio, se debe mencionar que implementar un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en ingeniería, que sea idóneo o de calidad, toma cada vez mayor relevancia en la actualidad. A nivel iberoamericano, hoy en día, son tendencias en la formación de ingenieros la incorporación de las nuevas tecnologías de la información en el aula de clase, el aseguramiento de la calidad de los programas académicos, el aporte social de la ingeniería, entre otras. Por lo que el futuro ingeniero debe ser proyectado con una formación continua y con una disponibilidad de infraestructura para la ciencia y tecnología suficiente, para que pueda liderar el desarrollo sustentable. A nivel europeo se considera que el éxito de los futuros ingenieros dependerá de que se adopte una formación basada en un proceso de aprendizaje continuo y en la innovación (ASIBEI, 2016).

En esta línea, los docentes de las carreras de ingeniería (dentro de los que se encuentran los docentes de ciencias básicas y de matemáticas) están directamente comprometidos con dichas tendencias, por lo que sus métodos de enseñanza y su actualización profesional deberá adaptarse y trascender a nuevas formas de enseñanza, deberán incluir el desarrollo de competencias en la formación de ingenieros, desarrollar habilidades para el uso de nuevas tecnologías, entre otros.

En este capítulo se aborda la problemática que viene atravesando el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sobre todo, del cálculo diferencial, en el ciclo de ciencias básicas en las carreras de ingeniería, tanto en el contexto mundial, latinoamericano y peruano; la problemática de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas; así como se hace un breve recorrido por la génesis y la invención del cálculo diferencial. La revisión de la literatura y las investigaciones nos brindan información que se presenta en la línea de los siguientes aspectos:

1) Qué está pasando (y por qué) en la enseñanza y en el aprendizaje del cálculo diferencial en el ciclo básico de las carreras de ingeniería.
2) Qué tipo de conocimientos y competencias debe poseer el profesor de matemáticas que enseña cálculo diferencial en diversas carreras de ingeniería.
3) Cuál es el devenir histórico en la invención del cálculo infinitesimal, en particular del cálculo diferencial, desde sus orígenes hasta la actualidad.

1.2. Realidad problemática de la enseñanza del cálculo diferencial en el ciclo de ciencias básicas en ingeniería

En esta sección, abordamos el problema de cómo se fueron gestando históricamente las ciencias básicas en general (las matemáticas, y en particular, el cálculo diferencial) en la estructura formativa de las carreras de ingeniería, hasta su incorporación definitiva; la problemática, dificultades, dudas y dilemas, por las que atraviesa actualmente el ciclo básico en la formación de los futuros ingenieros, en relación con la enseñanza del cálculo diferencial; la problemática sobre la brecha existente entre la etapa de la educación secundaria y la etapa universitaria; así como, analizamos diversas investigaciones sobre la situación actual de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en ingeniería, y en especial, del cálculo diferencial.

1.2.1. Incorporación de las ciencias básicas en la formación de ingeniería

A lo largo de la historia la enseñanza de las matemáticas para estudiantes de ingeniería se ha relacionado con la siguiente disyuntiva: unas matemáticas específicas para cada ingeniería, o bien, unas matemáticas más generales que se enseñan en los primeros ciclos formativos para varias carreras de ingeniería a la vez.

Antes del siglo XIX no había diferencia entre el ingeniero y el científico, toda vez que para los ingenieros de la época del Renacimiento y de la Ilustración, las matemáticas constituían una poderosa herramienta práctica y conceptual, cuyo progreso corría en paralelo con el de las realizaciones de la ingeniería y no se planteaba contradicción alguna entre, por ejemplo, el instrumento y quien lo utilizaba. Llegado el siglo XIX, aparece la diferenciación entre la actividad de los científicos (neologismo que naciera precisamente en esa centuria) y la de los ingenieros (desde el punto de vista institucional, esta separación ciencia-ingeniería se evidencia, en el caso de España, con la creación en 1857 de las facultades de ciencias).

Es así como, poco a poco se fue generando la estructura de las ciencias básicas como un ciclo común a varias ingenierías con argumentos de diferente tipo. El primero, se podría decir que tiene que ver con la economía que supone juntar en un solo centro a quienes teóricamente se les iba a impartir una misma formación científica. Así por ejemplo, en el preámbulo del Real Decreto del 18 de setiembre de 1858 sobre los programas generales de estudios de escuelas y facultades de España, esta idea se expresaba de la siguiente manera: “Las carreras facultativas son en su mayor parte aplicaciones de las ciencias exactas y experimentales; tienen, pues, los que a esas carreras se dedican la común necesidad de estar preparados con un mismo estudio abstracto y general” (Lusa-Monforte, 2011, p. 330).

Este argumento presuponía la creencia de que aprender un conocimiento abstracto y general de tipo científico en la base de la formación académica era suficiente para que el ingeniero lo aplicase cuando lo necesitase. Dicho en términos psicológicos, se presuponía que el contexto no era un elemento relevante a la hora de la aplicación del conocimiento matemático formal, es decir, se asumía que la respuesta a la siguiente pregunta: ¿Los conocimientos generales pueden ser aplicados por las personas a diferentes contextos con cierta facilidad?, era afirmativa.

El segundo argumento, tiene que ver con evitar la presentación de unas matemáticas degeneradas. Este argumento está relacionado con la ventaja de enseñar una ciencia pura con toda su riqueza y rigurosidad en lugar de dar una visión sesgada muy apegada a la ingeniería específica y con una visión muy utilitaria.

> Una vez organizada la Facultad de Ciencias, así en la Universidad Central como en las de distrito, donde convenga establecer la instrucción preparatoria para las carreras superiores, ofrecerá incontestables ventajas la enseñanza académica de las ciencias puras. Cuando se fuerzan los estudios especulativos para dirigirlos desde luego a una determinada aplicación, llegan a desnaturalizarse hasta el punto de que los alumnos, en vez de alcanzar la especialidad científica que apetecen, caen en lo empírico y exclusivo. (Lusa-Monforte, 2011, p.331)

Este segundo argumento está relacionado con la manera de enseñar las matemáticas. Es decir, si aceptamos, de acuerdo con Font (2011a) que básicamente hay tres maneras de enseñar matemáticas: la formalista, la mecanicista y la realista, se pretende optar por la primera manera, y se quiere evitar, sobre todo, la segunda forma.

De igual modo, en el siglo XX la estructura más habitual era que las ingenierías se organizasen mediante la creación de un ciclo inicial llamado básico o estudios generales según el país, que se suponía suministraba a los futuros ingenieros las herramientas matemáticas básicas que luego van a aplicar, primero, en las otras asignaturas de la carrera, y después, en su desempeño profesional. De esta manera, las ciencias básicas se incorporan en la formación de las diversas carreras de ingeniería aportando estrategias y mecanismos para que el futuro ingeniero analice los problemas a los que se enfrenta en el desempeño de su profesión y les dé solución. Según Álvarez de Sayaz (citado por Morales y cols, 2013), las ciencias básicas sin ser propias de la actividad del egresado aportan habilidades que se convierten en herramientas o medios imprescindibles para su modo de actuar futuro.

Por su parte, Capote et al. (2016) señalan, sobre la base de las tendencias internacionales actuales, que los rasgos esenciales que debe caracterizar a un ingeniero son, entre otros, poseer un conocimiento profundo de las ciencias básicas con una sólida formación teórica y científica general.

1.2.2. Problemas y dilemas relacionados con el ciclo de ciencias básicas en las carreras de ingeniería

Después de aproximadamente un siglo de organizar las carreras de ingeniería con un ciclo de ciencias básicas en la base, han surgido dudas y dilemas sobre si esta es, o no, la mejor opción de estructurar los planes curriculares o de formación de los futuros ingenieros. De acuerdo con lo señalado por Font (2019), algunos de los dilemas más importantes se relacionan con los siguientes aspectos:

1) El cuestionamiento de que un conocimiento general de base sea fácilmente aplicado a diferentes contextos.

2) El elevado número de estudiantes reprobados.

3) La presentación de unos contenidos que después en la práctica no se utilizan.

4) El enfoque actual que pone énfasis en una enseñanza que desarrolle competencias.

1.2.2.1. El cuestionamiento de que un conocimiento general de base sea fácilmente aplicado a diferentes contextos. La estructura de las carreras de ingeniería con un ciclo de ciencias básicas en la base suponía, implícitamente, que enseñar un conocimiento matemático de la manera más general y descontextualizada permitía al alumno usar este conocimiento en diferentes contextos cuando fuese necesario. Se trata pues de una creencia que durante mucho tiempo fue también asumida por la psicología cognitiva, donde uno de los ejemplos más paradigmáticos de este punto de vista es el trabajo de Piaget, en particular su teoría de las etapas.

De acuerdo con lo considerado por Piaget (Inhelder y Piaget, 1985), todas las personas desarrollan ciertas estructuras, siempre que mantengan una relación normal con el medio físico y social; la idea general es que las personas están conformadas biológicamente para interrelacionarse con su entorno de unas maneras determinadas y, a medida que se va produciendo esta interrelación se va formando una secuencia de estructuras del pensamiento cada vez más complejas.

Del mismo modo, Piaget contempla que las estructuras de conocimiento que hacen que las proposiciones de las matemáticas sean verdades necesarias son el resultado de un proceso, que comienza con la etapa sensoriomotriz, pasando por la etapa preoperatoria, la operatoria, y acaba en la etapa del pensamiento formal, la misma que tiene por objetivo la adaptación del sujeto al mundo que le rodea.

En su libro *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Inhelder y Piaget (1985) establecieron las características del pensamiento formal; dichos autores consideran que las operaciones formales surgen al comienzo de la adolescencia (11-12 años) a partir de las operaciones concretas precedentes y se desarrollan durante toda la adolescencia, de manera que, hacia el final de ésta, los alumnos tendrían el pensamiento estructurado como el de un científico ingenuo. Es decir, ante un problema, el alumno estará en condiciones de formular hipótesis, planificar experiencias, extraer conclusiones, entre otros.

En relación con el punto de vista piagetiano, lo que podemos esperar de un alumno que ha llegado a la etapa de las operaciones formales es lo siguiente: a) La abstracción reflexiva, esto es, la capacidad para razonar sin referencia a una experiencia concreta; b) Pensamiento proposicional, es decir, capacidad para pensar teóricamente en las consecuencias de los cambios sufridos por los objetos y sucesos; c) Lógica combinatoria, esto es, habilidad para razonar sobre la combinación de diferentes variables en un problema; d) Razonamiento inductivo, es decir, capacidad de construir modelos generales a partir de ejemplos particulares; y, e) Razonamiento deductivo, esto es, capacidad para extraer conclusiones particulares a partir de proposiciones generales. De acuerdo con Inhelder y Piaget (1985), en la resolución de tareas formales por parte de los alumnos influye, sobre todo, la estructura lógica del problema y no tanto el contenido o contexto al cual hace referencia el problema.

Los estudios posteriores a la publicación de la obra *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, acerca del desarrollo del pensamiento formal detectaron algunos desacuerdos con los trabajos de Piaget sobre el pensamiento formal, entre los que destacan: a) No todas las personas llegan a la fase del pensamiento formal; b) No todos los esquemas formales se adquieren simultáneamente, lo cual pone en duda la existencia de una estructura de conjunto en el pensamiento formal; y, c) En la resolución de tareas formales no solamente influye la estructura lógica del problema - tal como postula el modelo piagetiano - sino que también, el contenido al cual hace referencia el problema, y que esta influencia está mediatizada esencialmente por las ideas o concepciones previas que tiene el sujeto sobre el contenido (Inhelder y Piaget, 1985).

El último de estos tres aspectos ha conllevado a tener en cuenta que, actualmente, el contexto sea de mucha importancia. En esa misma línea, la importancia actual del contexto en el proceso de enseñanza y aprendizaje es consecuencia de: 1) Lo que los psicólogos han aprendido sobre el modo en que los humanos razonan, sienten, recuerdan, imaginan y deciden; 2) Lo que, por su parte, han aprendido los antropólogos sobre la manera en que el significado es construido, aprendido, activado y transformado. En palabras del antropólogo Geertz (2002):

> (...) supone el abandono de la idea de que el cerebro del homo sapiens es capaz de funcionar autónomamente, que puede operar con efectividad, o que puede operar sin más, como un sistema conducido endógenamente y que funciona con independencia del contexto. (p. 194)

Un ejemplo ilustrativo de lo que se acaba de comentar lo encontramos en la investigación de Ramos (2006), donde uno de los objetivos relacionado con la enseñanza de las matemáticas en el ciclo básico para una carrera de economistas, era problematizar una práctica cotidiana en la Facultad de Económicas de una universidad venezolana (la ausencia de problemas contextualizados) que hasta el momento no se había considerado como tal en la institución. Lo que estaba sucediendo en la institución estudiada, era que se impartía una matemática formalista y descontextualizada que no aseguraba la competencia del alumnado en la resolución de problemas contextualizados, en los que se tenía que aplicar el objeto matemático.

En Ramos (2006), se documenta un estudio de caso de un profesor de matemáticas que impartía la asignatura “Introducción a la Matemática” ubicada en el primer semestre del ciclo básico. Este profesor explicaba dicha asignatura de manera formal y descontextualizada, con la finalidad de facilitar a los alumnos las herramientas matemáticas básicas que ellos tendrán que utilizar en las demás asignaturas. En relación a la introducción de situaciones contextualizadas, el mencionado profesor considera que no son necesarias, ya que las aplicaciones de las matemáticas a situaciones de la vida real las encuentra el alumno en otras asignaturas no matemáticas de la carrera.

Además, considera que es relativamente fácil aplicar los conocimientos formales a las situaciones contextualizadas. Ahora bien, cuando se le propuso que resolviera algunos problemas contextualizados que, según él, los alumnos resolverían fácilmente, resultó que cometió errores derivados de su inadecuada interpretación del contexto del problema.

1.2.2.2. El elevado número de estudiantes reprobados. Diversas investigaciones en diferentes países han puesto de manifiesto el alto número de estudiantes reprobados en las asignaturas del ciclo de ciencias básicas en las carreras de ingeniería, (Acevedo, Torres y Jiménez, 2015; Aguilar, de las Fuentes, Iñiguez y Rivera, 2018; Amado, García, Brito, Sánchez y Sagaste, 2014; Morán, 2012; Ocampo, Martínez, de Las Fuentes y Zataraín, 2010; Tejada, Villabona y Ruiz, 2013), en particular en las asignaturas de matemáticas. Así por ejemplo, en una investigación realizada por Tejada, Villabona y Ruiz (2013), se encontró que en las asignaturas de ciencias básicas es donde se presenta la mayor repetición de los estudiantes, tanto por primera como por segunda vez; y de éstas, es en los cursos de matemáticas donde ocurre dicha problemática con mayor frecuencia.

Las razones que intentan explicar este elevado número de reprobación son diversas según los diferentes autores y, de entrada, se puede hacer una primera clasificación entre factores intrínsecos y extrínsecos. La reprobación de las asignaturas de matemáticas en los estudiantes de ingeniería, se debe a factores tanto intrínsecos tales como, la dimensión emocional donde destacan las actitudes, emociones y motivaciones de los estudiantes, hábitos de estudio, estrategias de aprendizaje, tiempo libre, etc.; así como, extrínsecos tales como, la explicación de los contenidos en clase, la organización de los materiales, la actitud de los profesores, la organización y dirección de las escuelas profesionales, factores socioeconómicos, integración de los estudiantes a la vida académica universitaria, la situación económica de las familias de donde provienen los estudiantes, entre otros (Buentello, Valenzuela y Juárez, 2013).

Algunos de estos factores, tanto extrínsecos como intrínsecos, se relacionan con el problema de la transición entre etapas educativas, nos referimos al choque que se genera en el paso de la educación secundaria a la educación superior, lo cual implica una mayor exigencia para los estudiantes que, además, en muchos casos, vienen con insuficientes conocimientos previos sobre matemáticas.

Por otra parte, hay que tener presente que algunas investigaciones sugieren que el alto número de estudiantes reprobados no es debido tanto a la materia, sino a un contrato didáctico “perverso” que lo que busca es reducir el número de posibles profesionales para mantener el estatus económico y social de la profesión (por ejemplo, en las clases se explican unos contenidos determinados y en los exámenes se preguntan contenidos no explicados). De otro lado, hay que matizar entre universidades públicas y privadas, ya que en estas últimas la tendencia, en algunos casos, puede ser la de procurar reducir el número de reprobados para evitar la deserción estudiantil.

1.2.2.3. La presentación de contenidos que después en la práctica no se utilizan. Otro de los aspectos problemáticos del ciclo básico consiste en la suposición de que se dan unos contenidos matemáticos que después son usados por los estudiantes en las otras asignaturas de las carreras y en la práctica profesional. Esta suposición colisiona con el hecho de que los contenidos matemáticos específicos de las ciencias básicas muchas veces se organizan de acuerdo con la disciplina, lo cual conduce a formularse la siguiente pregunta: ¿Los conocimientos de matemáticas que se enseñan en los primeros cursos de la universidad son realmente aplicados en las materias posteriores de la carrera y en la práctica profesional?

Para algunos autores la respuesta es que no (Pochulu, 2018), toda vez que algunos estudios sobre el uso de matemáticas en las otras asignaturas y en la práctica profesional, muestran que realmente se utilizan muy pocos contenidos de las asignaturas de ciencias básicas. Resultados que nos obligan a reflexionar y a repensar sobre los contenidos matemáticos en general, y de cálculo diferencial, en particular, que se deben incluir en los planes de estudios y los sílabos de las carreras profesionales de ingeniería.

1.2.2.4. Cambios en la manera de enseñar las matemáticas - el enfoque actual que enfatiza en una enseñanza que desarrolle competencias. La incorporación del enfoque de competencias en el aprendizaje en la educación superior, se inició en Europa con la Declaración de La Sorbona en 1998, y fue ratificada por la Declaración de Bolonia en 1999 con la creación del Espacio Europeo de la Educación Superior (EEES), conocido como el Proceso de Bolonia que culminaría en el 2010 (López et al., 2016). La adopción de las competencias en la educación superior supone integrar y movilizar distintos tipos de aprendizajes, tales como conocimientos, habilidades y actitudes, que permitan afrontar situaciones y problemas en contextos determinados (Coll, 2007). Este enfoque de competencias implica, pues, cambios significativos en los planes curriculares de formación, acarrea que el estudiante sea protagonista de su propio proceso formativo, así como también, conlleva cambios en la cultura y actualización profesional del docente universitario.

Ahora bien, la Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI, 2016), de la que forma parte el Consejo Nacional de Facultades de Ingeniería del Perú, concibe al antiguo paradigma de formación de profesionales como simple esquema de transferencia de conocimientos que el estudiante debe abstraer y aplicar eficazmente. Sin embargo, la sociedad actual propone ver al egresado universitario como un ser competente (con un conjunto de competencias), capaz de ejercer su profesión en la realidad que lo rodea. La declaración de Valparaíso (2013) de la ASIBEI, señala que existe consenso para trabajar por competencias o integrar de manera intencional las competencias en la formación del ingeniero. En consecuencia, formula 10 competencias genéricas de egreso del ingeniero iberoamericano, las cuales se han clasificado en competencias tecnológicas, sociales, políticas y actitudinales.

En línea con esta tendencia, la enseñanza actual de los ingenieros se focaliza hacia el desarrollo de competencias profesionales, lo cual implica que hay que enseñar unas matemáticas de manera que los estudiantes sean competentes para usarlas en la resolución de problemas propios de cada carrera de ingeniería. No obstante, existen dudas actualmente, de que esto se pueda conseguir enseñando unas matemáticas formalistas y descontextualizadas, para que luego sean los futuros ingenieros quienes las apliquen a los problemas de su profesión, o bien, con unas matemáticas mecanicistas que se enfoquen a la aplicación de técnicas y fórmulas matemáticas.

Ante la duda de que la mejor opción sea enseñar las matemáticas antes de que los estudiantes las necesiten (lo que se hace actualmente en el ciclo de ciencias básicas), se han planteado diversas alternativas que proponen enseñarlas en el momento que se necesiten. Por ejemplo, organizar la enseñanza mediante la metodología "Aprendizaje Basado en Retos" tal y como se ha experimentado en el Instituto Tecnológico de Monterrey, México.

Los dilemas a los que se enfrentan los ciclos de ciencias básicas o estudios generales en las carreras de ingeniería, han generado una agenda de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en estos ciclos, y sobre sus posibles alternativas, tanto en el Perú como a nivel internacional (por ejemplo, González-Martín & Hernandes-Gomes, 2020). Por esta razón, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias y conocimientos de los profesores de matemáticas en estos ciclos, y también, sobre cómo es la enseñanza de las matemáticas en las asignaturas de estos ciclos. Muchas de estas investigaciones se han focalizado sobre los contenidos del cálculo diferencial e integral, de las cuales daremos parte en las secciones siguientes.

1.2.3. El problema de la transición entre etapas: la educación secundaria y la universitaria

El problema de la transición entre la educación secundaria y la universidad es un problema complejo e importante (hay que conseguir aunar las expectativas del nivel que debe exigir la universidad con las potencialidades y limitaciones que tienen los alumnos cuando inician los estudios universitarios) y no hay fórmula perfecta y unívoca para resolver con éxito la transición entre etapas. Se pueden dar algunos criterios, pero su aplicación exige un esfuerzo de adaptación a la realidad concreta de cada universidad.

Se han explorado diferentes maneras de afrontar el problema de la transición entre la educación secundaria y la etapa universitaria que se pueden resumir en las siguientes líneas de actuación: 1) sobre los conocimientos del alumno, 2) sobre aspectos socioculturales, 3) sobre las matemáticas que se enseñan, y 4) sobre la formación del profesorado que imparte clases en ambas etapas.

El primer tipo de actuación, presupone que el problema fundamentalmente es de los alumnos (falta de preparación). Ante la evidencia de que los alumnos llegan con carencia de los conocimientos previos y procedimientos básicos para abordar con éxito el aprendizaje de las materias de la universidad, se adopta como solución, primero, la superación de un examen de entrada llamado generalmente examen de admisión (en el caso peruano, en muchas universidades privadas de rango medio y bajo es simplemente un mero trámite administrativo, toda vez que no mide nada, sino que el objetivo es captar al estudiante); y una vez que ya han sido admitidos, la oferta de cursos iniciales de nivelación (llamados también ciclo cero, una especie de preparación previa al inicio de la carrera profesional) en los que los estudiantes deben aprender los conocimientos previos necesarios, - que no fueron aprendidos o enseñados durante la educación secundaria, - antes de empezar los estudios de la carrera en la universidad.

El segundo tipo de actuación, parte del hecho de que los centros o colegios de educación secundaria y la universidad son instituciones con normas muy diferentes. Por tanto, los alumnos que ingresan en la universidad se tienen que adaptar rápidamente a normas muy diferentes a las que están acostumbrados (mayor autonomía en los estudios, contrato didáctico diferente, en algunos casos, además, implica un cambio de residencia, cambio de región geográfica, migración del campo a la ciudad, entre otros). Ante esta problemática, la solución que suelen dar las universidades pasa por poner énfasis en la orientación tutorial, en técnicas de aprendizaje para aumentar la autonomía de los estudiantes, implementación de algún curso de metodología del estudio universitario, etc.

El tercer tipo de actuación, parte del hecho de que las matemáticas que se imparten en la universidad son muy diferentes a aquellas que se enseñan en la educación secundaria (son más mostrativas que demostrativas), y propone comenzar la nueva etapa con unas matemáticas que reduzcan la brecha con las de la etapa anterior (por ejemplo, unas matemáticas realistas a partir de problemas contextualizados).

El cuarto tipo de actuación, se orienta a desarrollar las competencias del profesorado para tratar más adecuadamente el problema de la transición entre etapas educativas. En el caso del sistema universitario peruano, la mayoría de profesores universitarios tanto de ciencias como de ingeniería, por lo general, no poseen una formación en docencia, por lo que desconocen de enfoques didácticos, técnicas y metodologías para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la educación superior; pueden tener cierta expertiz en su carrera profesional como ingenieros o en ciencias, sin embargo ello no garantiza que desarrollen procesos de enseñanza y aprendizaje con un grado de idoneidad didáctica aceptable.

1.2.4. Situación actual de la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial en el ciclo de ciencias básicas en ingeniería

En nuestra opinión, el concepto que sustenta el cálculo diferencial es el concepto de “la derivada” de una función, pero junto con él vienen asociados los conceptos de función, límite de una función y continuidad de una función. Con base en la experiencia en la docencia universitaria, podemos observar que en el caso del Perú, el proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial en las carreras de ingeniería presenta múltiples dificultades para su aprendizaje por parte de los estudiantes.

Estas dificultades se deben a diversos factores, entre los cuales destacan: 1) La falta de conocimientos previos de los estudiantes, toda vez que en la etapa de la secundaria éstos no llegan a estudiar las nociones de cálculo diferencial, aunque pueden llegar a tener un cierto dominio de las operaciones algebraicas que facilite el aprendizaje de las técnicas de derivación a nivel universitario; 2) La forma o el enfoque con el que los docentes enseñan la asignatura de cálculo diferencial en ingeniería; 3) El uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario; y, 4) La falta de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del docente que enseña cálculo diferencial e integral en las carreras de ingeniería; entre otros factores.

1.2.4.1. Dificultades relacionadas con la falta de conocimientos previos de los estudiantes para el aprendizaje del cálculo y con otras causas. La falta de conocimientos previos es una causa de las dificultades de los alumnos universitarios con las nociones del cálculo diferencial que no es específica de los estudiantes de ciencias básicas de ingeniería. Provenientes, en parte de la transición entre la secundaria a la universidad, las dificultades emergen en el inicio de la enseñanza del cálculo por la falta de conocimientos previos para afrontar el paso a un pensamiento matemático más avanzado y por el encuentro con la complejidad de las nociones clave del cálculo (funciones, límites, continuidad, derivadas, etc.); pero no solo por este aspecto ya que en algunos casos la falta de conocimientos previos del alumno está relacionada con una enseñanza errónea en la secundaria (por ejemplo, en Rodríguez-Nieto, Rodríguez-Vázquez & García-García, 2021, se comenta el caso de un estudiante al que le enseñaron que la derivada es la recta tangente).

La investigación sobre las dificultades de los estudiantes con las nociones clave del cálculo diferencial es amplia y no todas se explican por falta de conocimientos previos. Así por ejemplo: a) Berry and Nyman (2003) y Ubuz (2007) reportan que los estudiantes tienen dificultades para conectar la representación gráfica de la función y la de su derivada; b) dificultades para hacer la interpretación geométrica de la derivada (Ferrini-Mundy & Graham, 1991; Ubuz, 2001); c) dificultades para identificar la función derivada con la derivada en un punto (Amit & Vinner, 1990; Badillo, 2003; Orton, 1983; Özkan & Ünal, 2009; Ubuz, 2007); d) dificultades para relacionar tanto el crecimiento como el decrecimiento de la función f y el signo de f' y f'' (Fuentealba, Badillo, Sánchez-Matamoros & Cárcamo, 2018); entre otras.

Una de las dificultades recurrentes es identificar la función derivada con la derivada en un punto. Con relación a este aspecto, Badillo (2003) estudia el problema didáctico de las componentes del conocimiento profesional del profesor de matemáticas sobre el concepto de la velocidad y la derivada, con profesores en formación en Colombia. Encuentra que éstos confunden los objetos matemáticos $f'(x)$ y $f'(a)$, y que presentan dificultades en la comprensión y manejo de la simbología del cálculo diferencial, tales como $\frac{dy}{dx}$, dx , dy , Δx , Δy , δx , δy , entre otros símbolos.

Otra de las dificultades más relevantes está relacionada con el tránsito entre registros de representación e incluso en el mismo registro, por ejemplo, en el registro gráfico cuando se da la información sobre la función y sobre su derivada. De igual manera, se han encontrado dificultades para traducir la información de un lenguaje (simbólico, geométrico o extramatemático) a otro, en la resolución de problemas. (Artigue, 1995).

Por su parte, Tall (1994) afirma que los estudiantes universitarios muestran dificultades para relacionar la representación analítica con la gráfica de la derivada de una función, debido a que éstos no hacen la conexión entre el pensamiento analítico y el visual. Precisa que la visualización puede asumir un papel muy importante en la percepción global del concepto de derivada, así como en la comprensión de relaciones matemáticas que esta noción trae consigo.

Además, Tall (1996) considera como dificultades en la enseñanza y aprendizaje del cálculo aquellas vinculadas al estudio de las funciones, a la noción de límite, al uso de notaciones como la de Leibniz, a los procesos infinitos en derivadas e integrales, así como relacionadas al uso y selección de diferentes representaciones. Este autor también sostiene que el aprendizaje del cálculo diferencial se da, básicamente, entre dos mundos matemáticos del pensamiento del individuo: el mundo de los conceptos personificados (la percepción del mundo físico y mental de significados) y el mundo proceptual simbólico (el uso de símbolos para manipular y calcular).

A su turno Trigueros (2005), hace una investigación sobre la integración de conceptos en el cálculo diferencial bajo el marco de la teoría APOS, en el que presenta a los estudiantes que se encuentran en transición entre la secundaria y la universidad, el siguiente problema para que sea trabajado por ellos:

> Dibuja la gráfica de una función que satisface las siguientes condiciones:
>
> h es continua
>
> $h(0) = 2$, $h'(-2) = h'(3) = 0$ y $\lim_{x \to 0} h'(x) = \infty$
>
> $h'(x) > 0$ cuando $-4 < x < -2$, cuando $-2 < x < 0$ y cuando $0 < x < 3$
>
> $h'(x) < 0$ cuando $x < -4$ y cuando $x > 3$
>
> $h''(x) < 0$ cuando $x < -4$, cuando $-4 < x < -2$ y cuando $0 < x < 5$
>
> $h''(x) > 0$ cuando $-2 < x < 0$ y cuando $x > 5$
>
> $\lim_{x \to \infty} h(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} h(x) = -2$
>
> ¿La función que encontraste es la única que cumple con las condiciones dadas por el problema? ¿Qué sucede con la gráfica de esta función si quitamos la condición de continuidad? (Trigueros, 2005, p. 19).

Entre los resultados más importantes obtenidos del estudio, destacan: 1) Los estudiantes mostraron serias dificultades de interpretación de la segunda derivada de la función y su relación con la gráfica; 2) Los puntos de inflexión de la función y su relación con la gráfica son muy difíciles para los estudiantes; 3) La relación entre los conceptos de continuidad y diferenciabilidad es prácticamente nula en la mayoría de estudiantes; 4) Algunos estudiantes no integran propiedades y trabajan únicamente con la primera derivada, pero aún así, tienen dificultades al relacionarla con los intervalos en el dominio de la función; 5) Otros, trabajaron sólo con la información de la segunda derivada y no fueron capaces de explicar el comportamiento de la función con la primera derivada; 6) La existencia de puntos donde la derivada no está definida pero la función sí lo está, genera una fuerte confusión en los estudiantes; 7) Los estudiantes tienen dificultades con la unión e intersección de intervalos. El estudio muestra que el significado geométrico de la segunda derivada va más allá de la concavidad y que los estudiantes memorizan la concavidad y convexidad.

A su vez, Winsløw (2007) investiga sobre la naturaleza de los obstáculos para el aprendizaje del cálculo diferencial en el primer curso universitario, utilizando las representaciones semióticas bajo la teoría de situaciones didácticas y la teoría antropológica de lo didáctico, en aras de responder a cuestiones como: más allá de la transición secundaria-universidad, ¿en qué consiste este salto y estos obstáculos difíciles de superar? Dicho autor encuentra dos rupturas profundas u obstáculos en el paso del análisis concreto al análisis moderno, vinculados a: la falta de estrategias de rutina para la organización de los tratamientos que dan el resultado deseado, y la falta de representaciones no discursivas en la propiedad para comprobar (los objetos y sus propiedades tienen una única forma de representación sin rutinas de tipo algorítmico).

Artigue (1995) refiere también, que para hacer frente a estas dificultades y problemas en torno a la enseñanza y aprendizaje de nociones como la de la derivada, se implementó en Estados Unidos a partir de 1992 la denominada *Reforma del cálculo*, que se extendió por varios países, e introdujo una noción más intuitiva, experimental y con acceso a las tecnologías en el cálculo; dicha reforma tuvo como ventajas un análisis más accesible del cálculo, estudiantes en contacto con problemas de optimización y aproximación, mayor importancia al lenguaje numérico y gráfico, y uso de calculadoras gráficas. Asimismo, Artigue (2003) con base en investigaciones y evidencias previas, sostiene que el cálculo es percibido como un área que constituye la principal fuente de fracaso de los estudiantes universitarios, por lo que el aprendizaje matemático debe considerarse como un proceso que necesariamente incluye discontinuidades.

Actualmente, en la enseñanza en educación secundaria, la mayoría de los países, sobre todo en Latinoamérica entre los que incluye al Perú, no han introducido el cálculo diferencial formalmente en sus diseños curriculares en los últimos grados de este nivel.

En el caso particular del Perú, el Ministerio de Educación (2017) organiza los vigentes planes de estudio de la educación básica regular (educación inicial, primaria y secundaria) por áreas curriculares, donde para el área curricular de matemática incluye cuatro competencias, cada una a su vez dividida en cuatro capacidades. Estas competencias son: “1) Resuelve problemas de cantidad; 2) Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio; 3) Resuelve problemas de movimiento, forma y localización; y, 4) Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” (Currículo Nacional, 2017, p. 163).

Luego de hacer una revisión de estas competencias y capacidades que se trabajan actualmente en el área de matemática en la educación secundaria pública y privada peruana, se encuentra que la primera competencia desarrolla los contenidos aritméticos; la segunda, desarrolla los contenidos algebraicos; la tercera, trata sobre los contenidos de geometría en el plano, en el espacio, geometría analítica y trigonometría; en tanto que la cuarta competencia, aborda contenidos de probabilidad, estadística descriptiva y toma de decisiones. Al revisar de manera minuciosa la segunda competencia y sus cuatro capacidades relativas a los contenidos algebraicos, se determina que incluye ecuaciones, inecuaciones, etc.; y de cálculo diferencial solamente se abordan las funciones elementales y sus gráficas respectivas. Por lo tanto, se concluye que el currículo nacional de la educación básica peruana (secundaria) no contempla, en sus planes de estudios, las nociones de límites, continuidad de una función, y tampoco derivada de una función.

Ahora bien, en aquellos países que sí han introducido el cálculo diferencial en su educación básica, la enseñanza está basada en una concepción intuitiva de límite sobre exploraciones numéricas, gráficas, y en el uso y abuso de reglas, fórmulas y técnicas algebraicas. Sin embargo, en el nivel universitario los estudiantes transitan hacia aproximaciones más formalistas (por ejemplo, reconstruir el significado de igualdad y comprender que viene dada a partir de aproximaciones como en el límite o la derivada) lo cual representa una brecha muy grande a nivel conceptual y técnico, produciéndose efectos dramáticos para los estudiantes en el paso de la educación secundaria a la universidad (Artigue, 2003).

1.2.4.2. Enfoque docente en la enseñanza del cálculo diferencial en las carreras de ingeniería. Si bien se observa la tendencia a incorporar una enseñanza del cálculo menos formal tal es el caso de las propuestas innovadoras como las que se proponen en Camarena (2013) y Rodríguez (2017), podemos decir a partir de la revisión de la literatura que en la docencia universitaria, actualmente, aún es dominante una enseñanza netamente algorítmica de aprendizaje de fórmulas, mecanicista y rutinaria, o bien, una enseñanza muy rigurosa y formalista, de manera tal que se deja de lado la comprensión significativa del concepto de derivada y sus aplicaciones inmediatas, que permitan al futuro ingeniero resolver problemas de su desempeño profesional. Y que con base en la experiencia, la realidad peruana no es ajena a esta problemática en las facultades de ingeniería.

El dominio de estas dos tendencias lleva a que la enseñanza del cálculo diferencial siga normalmente un orden lógico: teoría de conjuntos, funciones reales, límite de funciones, continuidad de funciones, derivada de una función, y aplicaciones de la derivada, que no es el orden en el que ha evolucionado históricamente el cálculo; lo cual no le permite al estudiante comprender que las matemáticas tienen un estatus de actividad cultural inseparable de las otras actividades y prácticas humanas.

En esta línea de incorporar esta otra manera de enseñar el cálculo hay numerosas experiencias, entre ellas, queremos destacar la sugerida en Artigue (1995). Esta investigadora propone elaborar dispositivos de ingeniería didáctica que permitan manejar secuencias de enseñanza en el ciclo básico de la universidad, o bien, retomar después aquellos aprendizajes que se valoraban como inadecuados. Los resultados obtenidos por esta autora en la experimentación para comprender el sistema de enseñanza, dieron cuenta que los procedimientos diferenciales intervenían en el ciclo básico universitario en dos sentidos: 1) como una aproximación puramente local (cálculo de errores, estudio local de funciones, curvas, superficies), y 2) como una aproximación lineal en el paso de lo local a lo global (definición de magnitudes físicas y geométricas, leyes de variación, de determinación). No obstante, en la práctica, el campo de las aproximaciones es opacado por teoremas muy potentes que permiten algebrizar rápidamente el funcionamiento del cálculo diferencial e integral.

Por su parte, Trigueros (2005) con base en los resultados encontrados en su estudio empírico sobre cálculo diferencial, sugiere a los docentes de matemáticas poner mucha atención a la enseñanza de la función derivada y a su relación con el comportamiento de las funciones, sobre todo, trabajar con diferentes propiedades de la función y su incidencia en la subdivisión de los intervalos de su dominio. Refiere también, que es necesario brindar a los estudiantes la oportunidad de trabajar con funciones en distintos contextos de representación en aras de consolidar las relaciones entre conceptos. Además, afirma que se debe abordar con cuidado las implicaciones gráficas de la segunda derivada y su relación con la primera derivada; así como, indica que es fundamental en la clase introducir de manera paulatina cada uno de los conceptos analizando sus propiedades analítica y gráficamente, con el objeto de consolidar los conceptos de derivada en los estudiantes.

1.2.4.3. Uso de recursos tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario. Si bien hay una tendencia generalizada a incorporar las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas en las ciencias básicas, se observa aún que en muchos casos no se hace uso o no se implementa de manera generalizada y amplia los programas informáticos (software matemático) para ayudar a los estudiantes a entender intuitivamente los conceptos del cálculo, ya sea por razones de limitaciones en cuanto a infraestructura y disponibilidad de ambientes informáticos, por no estar contemplado en los sílabos, o porque la mayoría de docentes prefieren implementar una enseñanza en la pizarra.

La revisión de la literatura muestra que, en el caso del cálculo, si se usan adecuadamente las tecnologías informáticas (software) éstas pueden ser cruciales en la promoción de conexiones entre representaciones semióticas, gráficas, numéricas y simbólicas. No obstante, en muchas regiones aún no se le ha dado la importancia debida a la enseñanza de las matemáticas y del cálculo diferencial, asistida por la tecnología, de manera que pueda ayudar a revelar el carácter funcional y la aplicabilidad de la matemática en el desempeño profesional (Artigue, 2003).

El uso de las nuevas tecnologías como las calculadoras y los ordenadores en la enseñanza de las matemáticas es de gran utilidad, toda vez que minimizan los efectos no deseados de la falta de madurez en el cálculo algebraico por parte de los estudiantes; la visualización sirve para transmitir a los estudiantes una imagen de las matemáticas como ciencia que incorpora la observación, la experimentación y el descubrimiento; así como, el uso de las tecnologías pueden contribuir a mejorar la significatividad del aprendizaje de los estudiantes (Lucas, 2015).

Por su parte, Cantoral y Montiel (2003) sostienen que la manipulación de un dispositivo tecnológico puede favorecer la relación entre representaciones en un escenario de significados asociado a un concepto matemático específico; así por ejemplo, puede mostrar a los estudiantes ciertas aplicaciones de la derivada como calcular la velocidad de un cuerpo en movimiento.

Asimismo, Tellechea y Robles (2008) destacan la importancia de introducir las nociones matemáticas, no en términos estructurales, sino más bien a través de recursos gráficos para lograr el progreso en el aprendizaje del estudiante en la medida que el software lo permita.

En relación a la falta de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del docente para una enseñanza idónea del cálculo en ingeniería, por la importancia y extensión que esta temática conlleva hoy en día, se expone a continuación en la siguiente sección de esta memoria.

1.3. Sobre los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de matemáticas

En la presente sección presentamos la revisión de la literatura sobre los conocimientos y competencias que debe poseer el profesor que enseña matemáticas en general, y en particular, aquel profesor que enseña cálculo diferencial y/o integral en el ciclo básico de las facultades de ingeniería.

En esa línea, Shulman (1986) considera al *Conocimiento del contenido pedagógico* (PCK) como aquel conocimiento que va más allá de la materia ya que es el conocimiento de la materia para la enseñanza, por lo que propone tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular. Luego, Shulman (1987) amplía a siete las categorías del conocimiento base del profesor, siendo estas: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido, conocimiento de los estudiantes, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación.

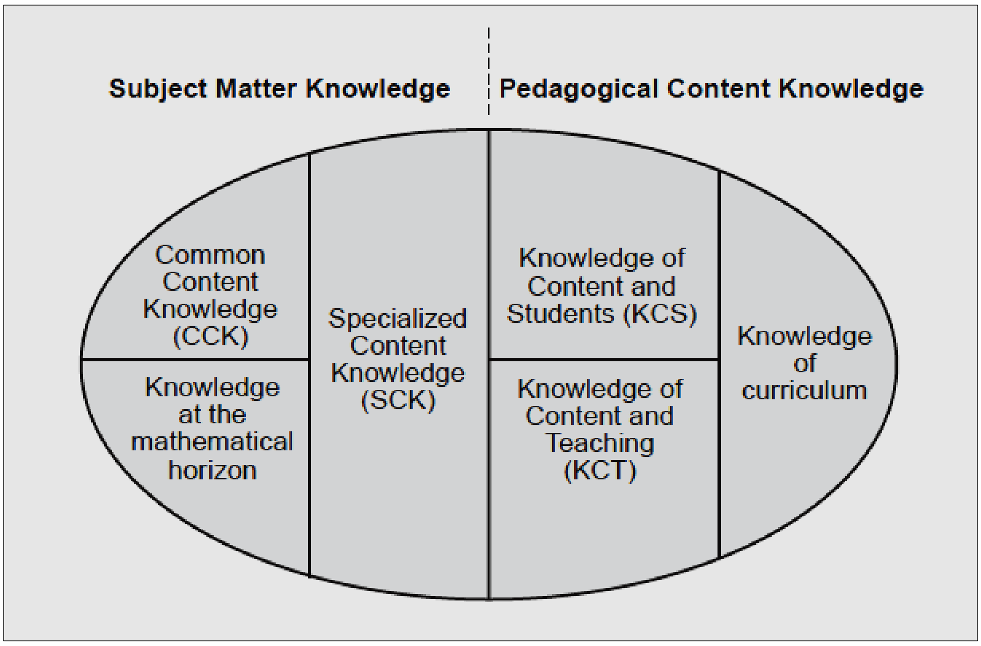
De otro lado, Grossman (1990) formula un modelo del *Conocimiento del profesor* estructurado con cuatro componentes, estos son: conocimiento pedagógico general, conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido, y conocimiento del contexto.

Por su parte, Ball et al. (2008) con base en la propuesta de Shulman, formulan el modelo del *Conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT – Mathematical Knowledge for Teaching) conformado por dos grandes categorías: 1) El conocimiento del contenido (cuyas subcategorías son el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido, y el conocimiento en el horizonte matemático); y, 2) El conocimiento pedagógico del contenido (integrado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del currículo).

Tal y como se aprecia en la Figura 1.1 el conocimiento común del contenido, incluye conocimientos y competencias que permiten al profesor resolver con éxito problemas matemáticos; el conocimiento especializado del contenido, abarca toda una red de conocimientos y habilidades para la enseñanza; el conocimiento en el horizonte matemático, está vinculado a la toma de conciencia del paisaje matemático sobre la base de la experiencia y la instrucción; el conocimiento del contenido y de los estudiantes, es aquel conocimiento ligado a la forma cómo los estudiantes aprenden, piensan y conocen; el conocimiento del contenido y la enseñanza, relaciona la comprensión matemática específica con la comprensión de aspectos pedagógicos presentes en el aprendizaje de los estudiantes.

Figura 1.1

Mapa de domino del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)



Nota: Extraída de Hill, Ball and Schilling (2008, p. 377).

Por otra parte, el modelo de C*onocimiento especializado del profesor de matemáticas* (MTSK) desarrollado por un grupo de investigación de la Universidad de Huelva-España, es un modelo que surge sobre la base del modelo MKT, postula que todo el conocimiento del profesor es especializado, y formula para cada categoría del MKT tres subcategorías (Escudero et al., 2015). Es decir: 1) Conocimiento matemático (conocimiento de los tópicos, conocimiento de la estructura de las matemáticas, y conocimiento de las prácticas matemáticas); y, 2) Conocimiento pedagógico del contenido (conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas, y conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas).

A su vez, Godino y colaboradores, desde el EOS, proponen un modelo que permite analizar de manera detallada los tipos de conocimientos que se ponen en juego en el proceso de instrucción de las matemáticas (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Burgos et al., 2017; Giacomone, 2018; Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2018). Se trata del modelo de *Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor* (CDM) estructurado en tres dimensiones: dimensión matemática; dimensión didáctica; y dimensión meta didáctico-matemática.

Una de las perspectivas de desarrollo de dicho modelo ha sido el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia. Además, en el marco del EOS, se han realizado investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (Font, Breda y Sala, 2015; Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Rubio, 2012; Seckel, 2016; Seckel y Font, 2015) las cuales han mostrado la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor para poder evaluar y desarrollar sus competencias. Estas dos agendas de investigación han confluido generando el modelo llamado Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas (modelo CCDM) (Breda, Pino-Fan y Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Pino-Fan, Font y Breda, 2017).

Si bien los participantes de la investigación de Rubio (2012) no eran profesores de ingeniería del Perú, sino profesores de secundaria peruanos, consideramos relevantes el resultado de su investigación. En ella se traza como objetivo, entre otros, determinar el nivel de competencia que manifiestan los profesores en la evaluación de las competencias matemáticas (propuestas en PISA 2003) de sus alumnos. Este estudio lo desarrolla bajo los cinco niveles del EOS y con profesores de secundaria en el Perú, encontrando como resultados, entre otros, los siguientes: los profesores participantes no coincidieron en las nociones de las competencias matemáticas; los profesores mostraron muchas dificultades para aplicar las matemáticas a contextos extramatemáticos, además manifestaron no estar preparados para evaluar competencias matemáticas.

Dicha autora concluye que, para poder evaluar competencias matemáticas, el profesor debe tener competencia matemática y también competencia en el análisis de la actividad matemática, una subcompetencia de la competencia de análisis e intervención didáctica.

Estas dos competencias después se han considerado las dos competencias clave del modelo CCDM. El desarrollo pormenorizado del modelo CCDM del profesor de matemáticas, se presenta en el capítulo 2 de esta memoria.

Por otra parte, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias y conocimientos de los profesores de matemáticas en el ciclo básico de las ingenierías (Arana, Ibarra y Font, 2020) y también sobre cómo es la enseñanza de las matemáticas, y del cálculo diferencial e integral, en estos ciclos (Camarena, 2013; Cooper, Levi Gamlieli, Koichu, Karsenty & Pinto, 2020; Juárez Ramírez, Chamoso Sánchez y González Astudillo, 2020; Rodríguez Gallegos, 2017). Por esto, existen diversas líneas de investigación que permiten inferir los conocimientos y competencias del profesor con base en el análisis de sus prácticas docentes y de sus reflexiones sobre estas.

Pepin, Gueudet y Trouche (2017) afirman que las consideraciones implícitas y tácitas del profesor en la selección, secuenciación e implementación de secuencias de tareas nos informan de los criterios que orientan su práctica e inciden en lo que llaman capacidad de diseño pedagógico, la cual, por otra parte, puede crecer a través de la reflexión en la acción (Schön, 1983).

Asimismo, Carlos-Guzmán (2018) desarrolla una investigación con profesores de carreras de ingeniería usando entrevistas en profundidad diseñadas a partir del marco teórico tomado como referente (las nociones de docencia efectiva y buenas prácticas para la enseñanza), donde se propone identificar las cualidades y formas de enseñar de un grupo de profesores que, a priori, se consideró que realizaban buenas prácticas de enseñanza, con el objetivo de que los criterios que orientaban su práctica permitiesen delinear sugerencias para la formación docente.

Las investigaciones antes descritas nos muestran la necesidad de profundizar en el análisis y desarrollo de competencias especializadas y conocimientos didáctico matemáticos que debe conocer y dominar el profesor de matemáticas, y en particular, el profesor de cálculo diferencial, así como también el profesor que enseña a alumnos que se encuentran en el paso entre la secundaria y la universidad. Esta problemática se vincula directamente con el problema general que nos proponemos responder en esta investigación: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica del profesor en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería? El caso de la derivada y sus aplicaciones, como contexto de reflexión.

En consecuencia, nuestro foco de atención es, sobre todo, el análisis de los diferentes criterios o pautas que orientan la práctica docente de aquellos profesores que se encuentran enseñando, actualmente, en el ciclo de ciencias básicas de las facultades de ingeniería, y que diseñan e implementan sesiones de clases de cálculo diferencial, en particular, de la derivada y sus aplicaciones.

1.4. Breve reseña histórica del cálculo diferencial

En esta sección realizaremos un breve recorrido histórico de cómo se ha ido construyendo el edificio denominado cálculo infinitesimal (diferencial e integral), desde sus orígenes hasta la forma en cómo se conoce y estudia hoy en día, el tipo de fenómenos y situaciones de la vida cotidiana que se resuelven con sus aplicaciones en diferentes campos del conocimiento, y en particular en la ingeniería.

Desde la génesis, el cálculo diferencial ha estado ligado como dos caras de una misma moneda al cálculo integral, y juntos conforman un cuerpo abstracto de conceptos fundamentales útiles para diversas ciencias: el cálculo infinitesimal. Es por esa razón que necesariamente tenemos que, en ocasiones, referirnos a ambos tipos de cálculo. El cálculo infinitesimal es una de las grandes creaciones del pensamiento científico donde se aborda desde la matemática el problema del infinito; el cálculo infinitesimal es pues un instrumento de cálculo por excelencia, razón por la cual se han publicado diversas investigaciones sobre sus orígenes y desarrollo en el tiempo (Areán-Álvarez, 2016 y 2017; Boyer, 1996 y 2007; Durán, 1996 y 2006; González, 1992, 2008, 2012 y 2017; Hawking, 2007, 2010a y 2010b; Martín-Suárez, 2008; Merzbach & Boyer, 2011; Pino-Fan, 2013; Simson, MDCCLXXIV; Westfall, 2006; entre otros).

A continuación, revisaremos de manera concreta los aportes hacia el cálculo por parte de las matemáticas del mundo griego, pasando por la edad media, la etapa empírica del cálculo, su invención (y polémica) por Isaac Newton y por Gottfried Wilhelm Leibniz, hasta quedar en una especie de producto final, tal y como lo conocemos en nuestros días; desde Euclides, Apolonio, Arquímedes, Oresme, Kepler, Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal, Roberval, Wallis, Barrow, hasta Newton, Leibniz, Lagrange, Bernoulli, Cauchy, Bolzano, Weierstrass, entre otros.

1.4.1. Aportaciones de la matemática griega al cálculo diferencial

Aproximadamente entre los siglos V y II a. C., tuvo lugar la denominada *Edad de Oro* de la matemática griega con las obras de los grandes matemáticos que sentaron las bases de todo el edificio de las matemáticas, entre otros, Pitágoras, Euclides, Arquímedes y Apolonio. Aunque no se sabe quién fue el que introdujo la noción de recta tangente, los matemáticos griegos sabían cómo trazar tangentes a diferentes curvas, toda vez que poseían un concepto de tangencia de tipo geométrico y estático.

Ante todo, *Euclides* considerado el primer gran matemático de la geometría griega, basándose en los trabajos de Platón y Aristóteles compiló, organizó y sistematizó, originalmente, trece libros en lo que hoy se les conoce como *Los Elementos*. Luego de hacer una revisión sobre el contenido de *Los Elementos* de Euclides, notamos que el Libro III contiene 11 definiciones sobre la geometría de la circunferencia, donde hace referencia a la recta tangente (Hawking, 2010b; Pla i Carrera, 2012; Simson, MDCCLXXIV).

> *Definición II*: Se dice que una recta es tangente de un círculo, cuando lo toca, pero prolongada no lo corta.
>
> *Definición III*: Dícese que dos círculos son tangentes, cuando tocándose no se cortan.
>
> *Proposición XVI*: La recta perpendicular al diámetro de un círculo en su extremo, cae fuera del círculo, y entre ella y la circunferencia no se puede tirar otra recta; o lo que es lo mismo, la circunferencia del círculo pasa entre la perpendicular, y otra recta, que con el diámetro forma un ángulo agudo, tan grande como se quiera; o la que forma con la perpendicular un ángulo, por pequeño que sea.
>
> *Proposición XVII*: Desde un punto dado fuera de un círculo dado, o en su circunferencia trazarle una tangente.
>
> *Proposición XVIII*: Si una recta toca a un círculo, y del centro al punto de contacto se traza otra recta (radio), ésta será perpendicular a la tangente.
>
> (Simson, MDCCLXXIV, pp. 59-76)

Luego en el Libro IV que contiene siete definiciones, Euclides, presenta la construcción, con regla y compás, de los polígonos regulares tales como: triángulo equilátero (también en el Libro I, proposición 1), cuadrado (proposiciones 6 y 7), pentágono (proposición 11), hexágono (proposición 15), y pentadecágono (proposición 16); donde vuelve a usar, implícitamente, las nociones de circunferencias y rectas tangentes.

Del mismo modo, *Arquímedes* amplió el patrimonio matemático heleno y es considerado el segundo gran matemático de la geometría griega, su brillante obra se orientó a la geometría de la medida, introduciendo la noción de "infinitésimo", destacó en matemáticas, física, astronomía, ingeniería, en cuestiones militares y políticas. Según lo señalado por Hawking (2007), "Los trabajos matemáticos de Arquímedes se dividen en tres grupos. 1) Los relacionados con áreas y sólidos circunscritos por curvas y superficies: *Sobre la esfera y el cilindro*, *Medida del círculo*, *y el Método*; 2) Aquellos que analizan geométricamente problemas sobre estática e hidrostática; y 3) Obras misceláneas que enfatizan en el hecho de contar: *El arenario"* (p. 121).

Por su parte, Fernández (2017) y González (2012), sostienen que la obra de Arquímedes representa un sólido punto de partida tanto para la configuración de la nueva física como para la invención del cálculo infinitesimal, entre las que destacan: *Sobre la esfera y el cilindro*; *Sobre la medida del círculo*; *Sobre conoides y esferoides*; *Sobre las espirales*; *Sobre el equilibrio de los planos*; *Sobre la cuadratura de la parábola*; *Sobre los cuerpos flotantes*; *El método sobre los teoremas mecánicos*.

Luego de hacer una revisión exhaustiva de las obras de Arquímedes, vemos que en cuanto al cálculo infinitesimal se dedicó, sobre todo, a cuestiones de cálculo de áreas y por esa razón hoy en día se considera que fue quien sentó los fundamentos para el nacimiento del cálculo integral, por lo que el mismo Ruffini, afirmara: "Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en la seguridad de los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII". Sin embargo, se dice que su memoria sobre *Las Espirales* es el tratado más antiguo sobre cálculo diferencial, toda vez que, Arquímedes, enfatizó en la determinación de las tangentes, donde escribió:

> Si una recta es tangente a la espiral en su extremo obtenido en último lugar, y si, sobre la recta que ha girado y vuelto a su lugar, se alza en su extremo fijo una perpendicular hasta que se encuentre con la tangente, digo que la recta así llevada hasta ese encuentro es igual a la circunferencia del [primer] círculo. (González, 2012, p. 67)

De igual manera, en el siglo III a.C., *Apolonio de Perga* fue el tercer gran matemático de la edad de oro de la geometría griega, en su obra cumbre *Las Cónicas*, bautizó a las secciones cónicas con el nombre que las conocemos hoy en día, introdujo sus elementos esenciales: ejes, diámetros, tangentes, asíntotas, segmentos máximos y mínimos; definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso (González, 2017). En su Libro I de *Las Cónicas*, Apolonio usó un diámetro y una tangente como equivalente de un sistema de coordenadas oblicuas; demostró que si se traza una recta por un extremo de un diámetro de una elipse o hipérbola, paralela a su diámetro conjugado, entonces dicha recta es tangente a la cónica.

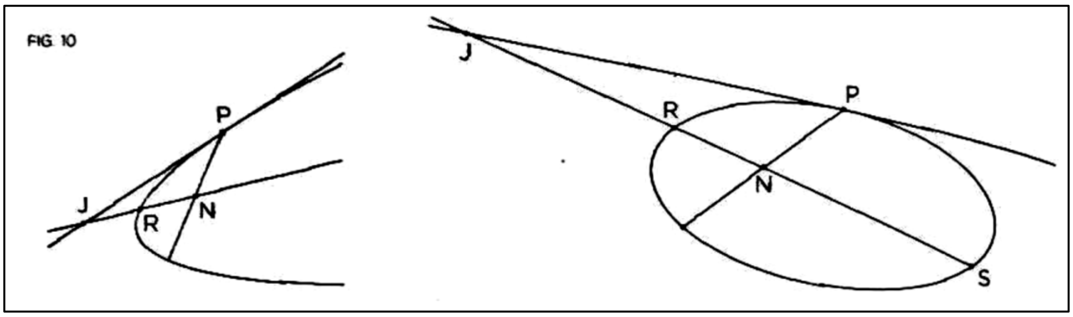
Teorema 34: Si desde un punto P de una elipse o una hipérbola se traza la ordenada PN sobre el diámetro RS, y se considera el punto J ≠ N sobre RS, tal que:

$$\frac{JR}{JS} = \frac{NR}{NS}$$

Entonces, la recta PJ es tangente a la curva dada tal como se aprecia en la Figura 1.2. (González, 2017, p. 74)

Figura 1.2

Tangente a una hipérbola o elipse, según Apolonio



Nota: Extraída de González (2017, p. 74).

En el Libro II, estudia las asíntotas de la hipérbola, y el problema de trazar una tangente que forme un ángulo con el diámetro que pasa por el punto de contacto. En el libro III aborda, entre otros, las propiedades de triángulos y cuadriláteros determinados por tangentes y otras propiedades de las tangentes. En su Libro IV presenta un método de trazar dos tangentes a una cónica desde un punto. Por su parte en el Libro V estudia máximos y mínimos pero de los segmentos, es decir, las rectas normales a una cónica.

Según Pappus, en una de sus obras perdidas *Los Contactos*, se aborda el histórico *Problema de Apolonio*: "Dados tres elementos los cuales pueden ser puntos, líneas rectas o círculos, dados en posición, se trata de trazar un círculo que sea tangente a los tres elementos dados, o que los contenga en el caso de los puntos" (González, 2017, p. 118). A partir de dichas combinaciones, resultaron 10 casos, de los cuales el último problema trata de: "Dadas tres circunferencias, construir una circunferencia que sea tangente a tres circunferencias dadas" (González, 2017, p. 119). Su solución tuvo que esperar hasta la época de Newton quien obtuvo la solución más general para el caso y la publicó en los

Principia, luego se encontraron una serie de soluciones analíticas por parte del marqués de L'Hôpital, Thomas Simpson, Giuseppe Torrelli, y Leonhard Euler.

En consecuencia, podemos afirmar que Euclides, Arquímedes y Apolonio fueron los que tuvieron influencia decisiva y sentaron las bases y los fundamentos matemáticos para el nacimiento del cálculo diferencial e integral. A continuación, analizaremos los aportes que se hicieron hacia el cálculo infinitesimal en la edad media de la historia.

1.4.2. El cálculo diferencial en la edad media

Terminada la denominada *Edad de Oro* de las matemáticas griegas, los aportes en la construcción del gran edificio denominado *cálculo infinitesimal* tuvieron que esperar hasta la época medieval para que se realizaran nuevas contribuciones. De acuerdo con la historia, la edad media se extendió desde la caída del Imperio Romano en el año 476 d.C., hasta el descubrimiento de América en 1492.

Durante el primer siglo de las conquistas árabes y el Imperio Musulmán (entre los años 650 y 750) debido a la confusión política e intelectual, no se produjo ningún avance científico, fue una especie de "nadir" en la construcción de la matemática en la historia de toda la humanidad; aunque también en esa época se fundó, en Bagdad, la *Casa de la Sabiduría* dirigida por el hoy considerado padre del álgebra, *Al-Khowarizmi*, quien publicara su obra cumbre, el *Al-jabr*, nombre árabe de donde se deriva la palabra álgebra.

Ahora bien, el siglo XII representa un punto de quiebre para el desarrollo intelectual de la humanidad, hubo una gran oleada de traducciones del árabe al latín entre las que destacan las principales obras de Arquímedes, además de la creación de las universidades más antiguas: Bolonia, París, Oxford y Cambridge. Sobre esa base, el siglo XIII representa un avance importante para los progresos matemáticos en Europa occidental con las obras de *Leonardo de Pisa*, *"Fibonacci"*. Hacia el año 1225, Jordanus Nemorarius fundador de la escuela medieval de mecánica y basado en el punto de vista aristotélico de la ciencia, escribió: "La continuidad es la imposibilidad de distinguir los puntos límites unida a la posibilidad de establecer un límite. [...]. El punto es lo que establece la continuidad simple" (González, 2012, p. 79). Este tipo de definiciones a pesar de sus deficiencias y contradicciones, demuestran cómo el cálculo infinitesimal iba abriéndose camino entre los escolásticos.

La ciencia de la mecánica (la estática de Arquímedes y la cinemática de Aristóteles), atrajo a los intelectuales del siglo XIII y XIV, donde uno de los temas favoritos era el estudio del cambio en general y del movimiento en particular, sobre todo, en las universidades de Oxford y París. En el Merton College de Oxford, los escolásticos dedujeron una formulación para la velocidad de cambio uniforme, conocida como la *regla del Merton College*:

> Si un cuerpo se mueve con un movimiento uniformemente acelerado, entonces la distancia recorrida será la misma que la que recorrería otro cuerpo moviéndose durante el mismo tiempo con un movimiento uniforme de velocidad igual a la del primer cuerpo, exactamente en el punto medio del intervalo de tiempo (la velocidad media como media aritmética de las velocidades inicial y final). (Boyer, 2007, p. 336)

Por otra parte, el filósofo, teólogo y matemático *Thomas Bradwardine*, en el año 1328, publica en su libro *Tractatus de proportionibus* su teoría de las proporciones en el que propuso una alternativa a la ley aristotélica del movimiento, en donde afirmaba:

> Para doblar la velocidad que se produce como consecuencia de una cierta razón o proporción entre la fuerza y la resistencia $\frac{F}{R}$, es necesario elevar al cuadrado la razón $\frac{F}{R}$; para triplicar la velocidad se debe elevar al cubo la razón $\frac{F}{R}$; y para multiplicar, en general, por n la velocidad, debe conseguirse la n-ésima potencia de la razón $\frac{F}{R}$. (Boyer, 2007, p. 337)

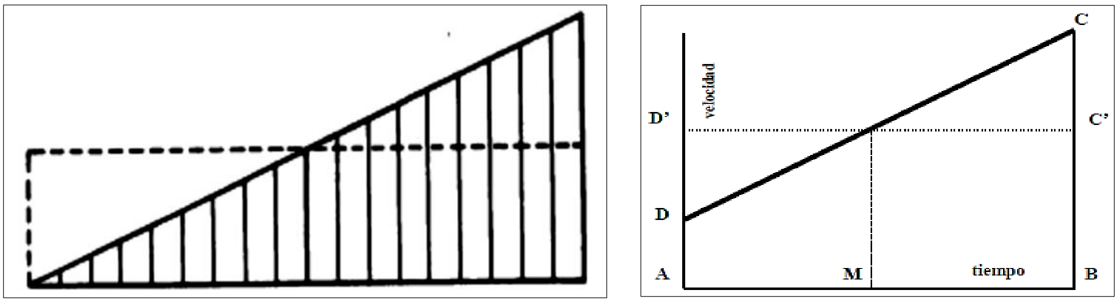
Tal como podemos observar, *Bradwardine*, estudió aunque de manera incipiente las derivadas a través del análisis de la velocidad, tal y como lo hiciera más tarde Isaac Newton; pero no logró una aceptación general de su formulación de velocidad, toda vez que, no intentó una confirmación experimental de dicha ley. Además, en su *Geometría especulativa* y en el *Tractatus de continuo*, afirmaba que las magnitudes continuas, aunque incluyen una cantidad infinita de indivisibles, no están formadas por tales átomos matemáticos, sino más bien por una cantidad infinita de continuos del mismo tipo.

Por su parte, el universitario parisino, *Nicole Oresme* vuelve a estudiar las velocidades y continuos desde un enfoque gráfico. Hacia 1361 propone su idea más original asociada al concepto de las potencias irracionales, y se pregunta, ¿por qué no hacer un dibujo o gráfica de la manera en que las cosas varían? Razonaba, todo lo que varía, se sepa medir o no, lo podemos imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo. Así pues:

> Para el caso de un cuerpo moviéndose con movimiento uniformemente acelerado, Oresme dibuja una gráfica velocidad-tiempo (ver Figura 1.3) en la que los puntos de una recta horizontal representan los sucesivos instantes de tiempo (o longitudes), y para cada uno de estos instantes traza un segmento (latitud) perpendicular a la recta de longitudes en dicho punto, cuya longitud representa la velocidad en ese instante. (Boyer, 2007, p. 339)

Figura 1.3

Gráficas de velocidad vs tiempo, según Oresme

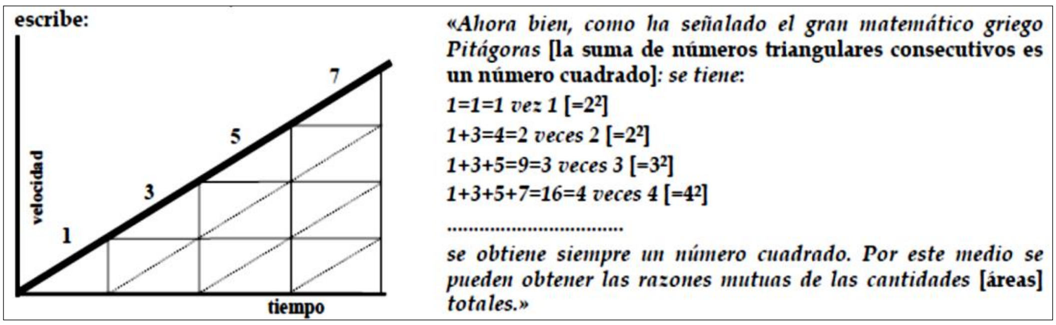


Nota: Extraída de Boyer (2007, p. 339).

Continuando con sus investigaciones, Oresme considera un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado en el que la velocidad inicial es cero (ver Figura 1.4), sobre el que, según González (2012, p. 83), escribe lo siguiente:

Figura 1.4

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado



Nota: Extraída de González (2012, p. 83).

Así pues, observamos que la representación gráfica, como instrumento básico de la Geometría Analítica ha empezado a dar su fruto: Oresme estableció la ley fundamental del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. La distancia recorrida es proporcional al cuadrado del tiempo.

En consecuencia, *Oresme* contribuyó a la construcción y desarrollo del cálculo infinitesimal a través de cinco ideas innovadoras, a saber: 1) La medida de diversas variables físicas por medio de segmentos; 2) La relación funcional entre variables; 3) Una aproximación a la introducción de las coordenadas mediante la representación gráfica de relaciones funcionales; 4) La constancia de la disminución de la variación en las proximidades de un extremo; y, 5) Una especie de integración o sumación continua para calcular la distancia como el área bajo el grafo velocidad-tiempo.

La peste negra que atacó a Europa, además de las guerras de los Cien Años y de las Dos Rosas del siglo XV, causaron la decadencia del saber matemático de la época y el ocaso del escolasticismo de Oxford y París; por lo que las universidades alemanas, italianas y polacas, tomarían la posta en el estudio de las matemáticas en el siglo XV, lo cual analizaremos en la siguiente sección.

1.4.3. Contribuciones empíricas al cálculo diferencial en la edad moderna

En esta parte de nuestro recorrido histórico presentamos a los principales matemáticos y astrónomos que en la primera mitad de la edad moderna, llegaron hasta la frontera y estuvieron a punto de alcanzar el descubrimiento del cálculo infinitesimal; aunque no lo hicieron, sin embargo, sus obras constituyeron los prolegómenos sobre los que se apoyaron los inventores del cálculo. La edad moderna para las matemáticas se suele considerar a partir de 1545 con la publicación de la obra *Ars Magna* por parte del -considerado - mejor algebrista de Europa de esa época, Jerónimo Cardano, quien basado en los resultados obtenidos por Tartaglia, Del Ferro y Ludovico Ferrari, divulgó la solución de la ecuación cúbica y la ecuación cuártica, lo que significó un fuerte impacto en el mundo de los algebristas.

Diversos astrónomos y matemáticos (profesionales y amateurs) de aquel entonces fueron haciendo aportes al cálculo infinitesimal, pero sobre todo al álgebra. Entre ellos destacan, François Viéte, John Napier, Galileo Galilei, Johann Kepler, Bonaventura Cavalieri, Pierre de Fermat, Blaise Pascal y René Descartes. Kepler razonó sobre los métodos utilizados en la época para calcular volúmenes de los toneles de vino, y con base en los métodos de Arquímedes, propuso un método general para calcular volúmenes de sólidos de revolución el cual consideraba un sólido como compuesto por una cantidad infinita de elementos de volumen infinitesimalmente pequeños. De donde podemos apreciar que Kepler estuvo, también, en el camino de descubrir el cálculo infinitesimal.

Normalmente se considera que la Geometría fue creada por Descartes (junto a Fermat). Esta rama de las matemáticas propició desde el año 1628 en adelante la unificación de los problemas infinitesimales, toda vez que, con sus técnicas y métodos, generó con el tiempo la sustitución de construcciones geométricas complejas de la Geometría Sintética por operaciones algebraicas más automáticas.

Según Font y Peraire (2001), la curva geométrica para Descartes es la traza que produce un punto que se mueve por un instrumento articulado compuesto por diversas reglas, de manera que el movimiento efectuado sobre una regla es trasmitido por las diferentes reglas del instrumento y hace que el punto se mueva trazando una determinada curva. Esta manera de entender la curva y la introducción implícita del sistema de coordenadas permite a Descartes hallar la expresión algebraica de la curva y le lleva a definir claramente el objeto de lo que posteriormente se llamó Geometría analítica: las curvas llamadas por él geométricas; y las técnicas que se han de utilizar para estudiarlas: la teoría de las ecuaciones (si bien Descartes considera que las curvas que se pueden dibujar de manera escalonada son algebraicas, no da ninguna demostración).

La manera que tiene Descartes de hallar la expresión algebraica que cumplen los puntos de la curva consiste en analizar las condiciones que determinan el movimiento del punto que describe la traza y, a partir de este análisis, busca la ecuación que cumplen los puntos de la curva, aunque admite la posibilidad de dibujar la curva a partir de dar valores en la ecuación implícita de la curva.

Fermat aplicó los métodos de Viéte a los problemas de lugares geométricos y en “Ad locos planos et solidos isagoge” (escrito aproximadamente en 1637) presenta con las notaciones de Vieta los principios fundamentales de la Geometría Analítica. En esta obra enuncia el principio fundamental de la geometría analítica: “Cuando una ecuación contiene dos cantidades desconocidas, hay un lugar correspondiente, y el punto extremo de cada una de estas cantidades describe una línea recta o una línea curva” (Collette 1985, vol. II, p. 23).

Esta proposición, además de ser la base de la geometría analítica, introduce la idea de variable algebraica. Fermat expone muy claramente la idea de que una ecuación con dos incógnitas es una expresión algebraica de las propiedades de la curva. Se puede considerar que, después de Descartes y Fermat, dada una ecuación de dos variables (función implícita) se tenía, aunque no de una manera demasiado explícita, la idea de gráfica de dicha función, representada en un sistema de ejes de coordenadas.

Respecto de las tangentes del cálculo diferencial, la Geometría Analítica actualmente permite sustituir la construcción geométrica de la tangente, que es singular para cada curva de acuerdo con su naturaleza geométrica, por una operación analítica única y universal: el cálculo de la derivada (Albertí-Palmer, 2017). En efecto, el procedimiento para hallar la recta tangente $y = mx + n$ a la gráfica de una función $f(x)$ en $x = a$ que se enseña actualmente a los alumnos consiste en:

1) Buscar $f'(a)$, que es la pendiente m de la recta tangente, utilizando la técnica de la derivación.

2) Buscar la segunda coordenada del punto de tangencia $(a\,, f(a))$ substituyendo x por a en la fórmula de la función.

3) Hallar n sabiendo que la recta tangente pasa por el punto de tangencia.

Ahora bien, en el siglo XVII, el problema de hallar la tangente se entendía de una manera muy diferente de cómo se explica actualmente. Dos de los problemas que más interesaron a los matemáticos del siglo XVII fueron: 1) El problema de las tangentes: hallar un método que permitiera construir la normal y la tangente en un punto de una curva dada, y 2) El problema inverso: determinar una curva a partir de una propiedad que cumplan todas las tangentes. La importancia que tuvo en el siglo XVII el problema de hallar métodos para construir la normal y la tangente en un punto de una curva se puede constatar en el párrafo siguiente de "La Géométrie":

> Por ello estimo haber expuesto cuanto se requiere en un estudio introductorio para realizar el análisis de las curvas, cuando haya desarrollado el procedimiento para trazar líneas rectas que formen ángulos rectos sobre cualesquiera de los puntos de aquellas que se elijan. Me atrevo a afirmar que éste es el problema cuyo conocimiento es más útil y no sólo el más general que yo conozco, sino también el que más he deseado llegar a conocer. (Descartes, 1981, pág. 316)

En relación con *Fermat*, en su juventud ya había dado con un método para encontrar valores máximos y mínimos. Escrito probablemente en 1629, *El Methodus* circulaba ya en París en 1636, que contenía la memoria de Fermat llamada *Método para hallar máximos y mínimos y tangentes a líneas curvas*, en la que junta dos corrientes de su pensamiento provenientes de su maestro Viéte, y de los clásicos Euclides y Pappus. En el *Methodus* aparece por primera vez la idea de incrementar una magnitud asimilable a nuestra variable independiente (esencia del cálculo diferencial). Esto es:

1) Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga el enunciado).

2) Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos que pueden ser de cualquier grado.

3) Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a + e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos que pueden ser de cualquier grado.

4) Se *"adigualará"* para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.

5) Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.

6) Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.

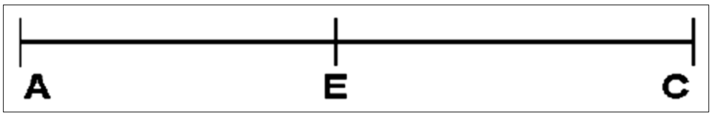
7) Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.

8) La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

Así por ejemplo: "Sea dividir una recta AC en E (Figura 1.5), de manera que $AE \cdot EC$ sea máximo". Supongamos que $AC = b$.

Figura 1.5

Recta para generar la idea de incremento de una magnitud



Nota: Extraída de González (2012, p. 127).

1. Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.

2. El producto del que se debe encontrar el máximo es $ab - a^2$.

3. Sea ahora $a + e$ el primer segmento de b, el segundo será $b - a - e$, y el producto de segmentos: $ab - a^2 + be - 2ae - e^2$.

4. Se debe "*adigualar*" al precedente: $ab - a^2$.

5. Suprimiendo términos comunes: $be \approx 2ae + e^2$.

6. Dividiendo todos los términos: $b \approx 2a + e$.

7. Se hace que e sea cero: $b = 2a$.

8. Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de b.

(Areán, 2017, pp. 144 - 145; González, 2012, p. 127)

De acuerdo con la apreciación de Areán (2017), estos planteamientos son muy parecidos a los que hacemos hoy en día para calcular la derivada, cuya definición fue dada en el siglo XIX por Cauchy, y si la igualamos a cero, entonces encontramos los máximos y mínimos. Esta similitud ha llevado a varios matemáticos como Lagrange, Laplace, Fourier e historiadores de la ciencia a afirmar que Fermat inventó el cálculo diferencial. Se trata de una opinión discutible, toda vez que Fermat no distinguió entre cantidades finitas e infinitesimales, nunca consideró que sus máximos y mínimos pudieran ser locales y no globales; aunque su método sí llegó a discernir si una solución era un máximo o un mínimo, lo que hoy conocemos como el "criterio de la segunda derivada". En consecuencia, si se aplica una mirada finalista, se puede decir que Fermat se estaba aproximando a los métodos del cálculo diferencial moderno.

De otro lado, en su *Methodus*, Fermat había propuesto la manera de encontrar la tangente a cualquier curva algebraica de la forma $y = f(x)$, que se derivaba de su método de máximos y mínimos, toda vez que éste servía por igual para maximizar o minimizar una razón o cantidad, por lo que hallar una tangente era una aplicación natural. En Boyer (2007), este método se formula de la siguiente manera:

Si P es un punto de la curva $y = f(x)$ en el que se desea hallar la tangente, y si las coordenadas de P son (a, b), entonces el punto próximo P' sobre la curva, de coordenadas $x = a + E$, $y = f(a + E)$, estará tan próximo a la tangente que podemos considerarlo, aproximadamente, situado sobre la tangente a la vez que sobre la curva. Por tanto, si la subtangente en el punto P es TQ $= c$, entonces los triángulos TPQ y TP'Q' los podemos considerar como semejantes aproximadamente, y de esta semejanza obtenemos la proporción,

$$\frac{b}{c} = \frac{f(a + E)}{c + E}$$

Por ser $b = f(a)$ y haciendo $E = 0$, se puede calcular la subtangente c que nos determina unívocamente, con el punto P, la tangente buscada (ver Figura 1.6).

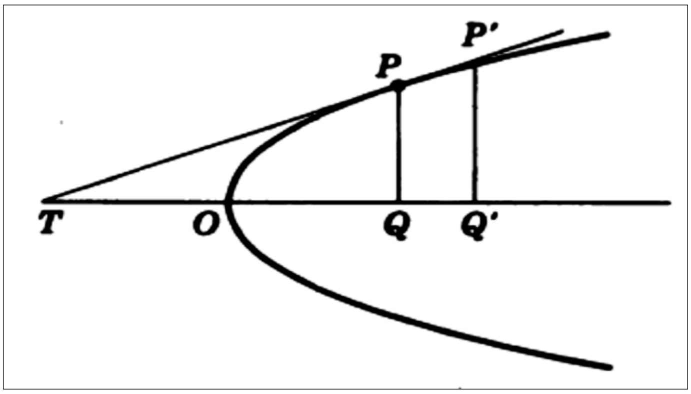
El método de Fermat, resulta equivalente a decir que el:

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(a + E) - f(a)}{E}$$

es la pendiente de la curva en el punto $x = a$, aunque Fermat no llegó a explicar este procedimiento, ya se limitó a decir simplemente que era análogo a su método para determinar máximos y mínimos. (pp. 440 - 441)

Figura 1.6

Tangente a una curva algebraica, según Fermat



Nota: Extraída de Boyer (2007, p. 440).

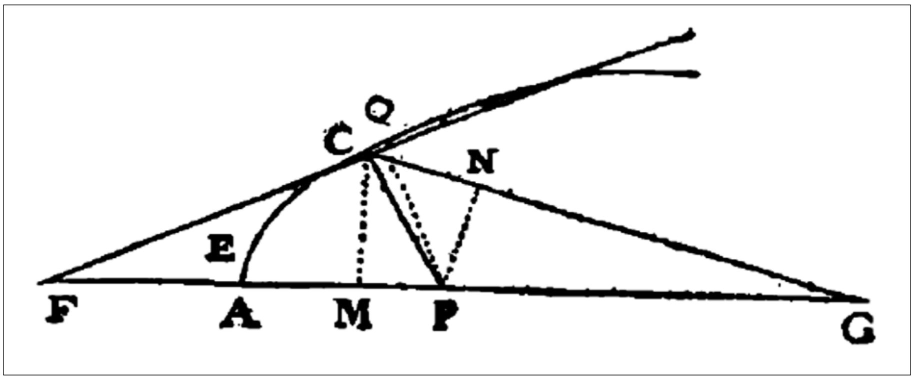
Posteriormente, hacia 1640, Fermat también abordó tres curvas geométricas: la cisoide, la concoide y el folio de Descartes, pero también una curva mecánica, la cicloide, que corresponde al movimiento de un punto en una rueda al desplazarse. En su análisis de la tangente a la cicloide, llegó al concepto de distancia arbitrariamente pequeña, quedándose de esta manera, para algunos historiadores, en el borde mismo del cálculo diferencial.

Descartes, en su Libro II de la *Geometría* presenta su *Método del círculo*, consistente en un método para trazar rectas tangentes a las líneas curvas, donde explica que para hallar las propiedades de las líneas curvas basta con saber la relación que tienen todos sus puntos con aquellos de las líneas rectas, descrita por la ecuación de la curva. El problema tratado por Descartes fue el del cálculo de la recta normal en un punto de una curva. Como señala Hawking (2007), el método precisa lo siguiente:

> Dada la curva CE (Figura 1.7), trácese a través de C una línea recta que forme ángulos rectos con CE. Suponga que el problema está resuelto y que la línea requerida sea CP. Prolongar CP hasta encontrar la línea recta GA, cuyos puntos deben estar relacionados con los de CE. Luego, sea $MA = CB = y$; y $CM = BA = x$. Debe encontrarse una ecuación que exprese la relación entre x e y.

Figura 1.7

Recta normal en un punto de una curva, según Descartes



Nota: Extraída de Hawking (2007, p. 322).

> Luego haciendo $PC = s$, $PA = v$, o bien $PM = v - y$. Puesto que PMC es un triángulo rectángulo, vemos que s^2, el cuadrado de la hipotenusa, es igual a $x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, la suma de los cuadrados de los dos lados. Es decir:
>
> $$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2} \quad \text{, o bien,} \quad y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$$
>
> Por medio de estas dos últimas ecuaciones, puedo eliminar una de las dos cantidades x e y de la ecuación que expresa la relación entre los puntos de la curva

CE y aquellos de la línea recta GA. Si se va a eliminar x, esto se puede hacer fácilmente reemplazando $\sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ en lugar de x, x^2 por el cuadrado de esta expresión, x^3 por su cubo, etc., mientras que si y va a ser eliminada, y deberá reemplazarse por $v - \sqrt{s^2 - x^2}$ e y^2, y^3,..., por el cuadrado de esta expresión, por el cubo, etc. El resultado será una ecuación con una sola cantidad desconocida x o y. (pp. 322-323)

De manera análoga, Descartes aplicó el método, la argumentación y el cálculo para la elipse, la parábola y para la concoide de Nicomedes. En términos generales, lo que se halla con el método de Descartes es la subnormal $v - x$ que permite encontrar la pendiente de la normal, esto es $-f(x)/(v - x)$; y a partir de ésta hallar la pendiente de la tangente $(v - x)/f(x)$, que es la derivada. Es así como Descartes, formula su método que va a servir de germen para la invención del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz.

Por su parte *Isaac Barrow*, quien tuviera como alumno destacado al joven *Isaac Newton* fue miembro de la Royal Society y el primero en ocupar la Cátedra Lucasiana de Matemáticas de Cambridge entre 1663 y 1669. Barrow, publica en 1670 su tratado *Lectiones Geometricae*, en el que anticipa muchos resultados del cálculo diferencial e integral desarrollados bajo un enfoque estricto de la geometría sintética. Siendo éstas:

a) Reglas para el trazado de las tangentes que son equivalentes a la derivación de funciones implícitas, y en las que se aplica con éxito el "Triángulo característico" o "Triángulo diferencial" (ver Figura 1.8).

b) Resultados similares a las reglas habituales de la derivación, es decir, el comportamiento de la derivación frente a las operaciones aritméticas de la suma, producto, cociente, potencias, etc.

c) Resolución de problemas de máximos y mínimos.

d) Proposiciones geométricas equivalentes a los conocidos ahora como métodos de "integración por partes" e "integración por cambio de variable".

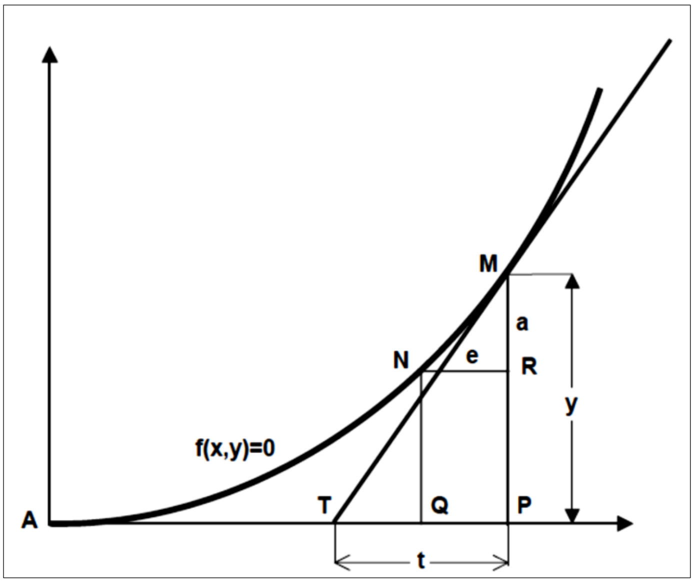
e) Teoremas geométricos correspondientes al reconocimiento de la relación entre las cuadraturas y las tangentes como el hecho de que la integración y la diferenciación son operaciones inversas: Teorema fundamental del cálculo.

f) Reglas para la diferenciación e integración de funciones potenciales, circulares, logarítmicas, exponenciales y otras.

g) Teoremas generales sobre rectificación de curvas y centros de gravedad de algunos sólidos. (Gonzáles, 2012, p. 210)

Figura 1.8

Triángulo característico o diferencial, según Barrow



Nota: Extraída de González (2012, p. 210).

Tal y como afirma Boyer (2007), de todos los matemáticos que se acercaron al cálculo diferencial e integral, ninguno se aproximó tanto como Barrow a dicho análisis, toda vez que, al parecer, Barrow reconoció el carácter inverso de los problemas relativos a tangentes y cuadraturas, pero, según este historiador, su enfoque conservador y estricto hacia los métodos geométricos clásicos le impidió que inventara el cálculo infinitesimal, cediendo la posta a Newton, de quien nos ocuparemos a continuación.

1.4.4. La invención del cálculo por Newton y Leibniz

Hasta este punto hemos hecho un recorrido concreto de los aportes más representativos que sentaron las bases para la invención del cálculo infinitesimal, desde la época de oro de la matemática griega, pasando por la era medieval, hasta pasada la primera mitad del siglo XVII. A lo largo de este recorrido histórico, hemos podido notar que ciertas nociones, tales como, cantidad infinitesimal y límite, han ido apareciendo cada vez con mayor frecuencia en las obras matemáticas. Llegado hasta este punto de la historia se plantea la necesidad de la unificación y generalización de los problemas y métodos infinitesimales, hecho que va a ser abordado por Isaac Newton y Gottfried Wilhem Leibniz. Diversos autores e historiadores refieren que Newton y Leibniz deben ser considerados los fundadores del cálculo, eso sí a partir del trabajo de varios predecesores (Boyer, 2007; Durán, 2006; González, 2012; Hawking, 2007; Muñoz, 2017a y 2017b; Westfall, 2006).

Por una parte, *Newton* (1642 - 1727), es considerado por muchos historiadores uno de los más, si no el que más, célebres y celebrados científicos de la historia. Como estudiante Newton, se enriqueció con *Los Elementos* de Euclides, la *Clavis* de Oughtred, la *Geometría* de Schooten, la *Óptica* de Kepler, pronto dominó las obras de Viète, la *Geometría* de Descartes, la *Arithmetica infinitorum* de Wallis, las obras de Galileo, Fermat, Pascal y Huygens, las clases del maestro lucasiano Barrow, entre otros, hasta alcanzar seguramente lo que se podrían considerar, metafóricamente hablando, las fronteras del conocimiento matemático hacia finales de 1664 (Westfall, 2006).

Según lo declarado por el mismo Newton, los años 1665 y 1666 constituyó el período de sus descubrimientos matemáticos más fecundos, destacando entre otros: 1) El teorema binomial; 2) El cálculo infinitesimal; 3) La ley de la gravitación universal; y 4) La naturaleza de los colores.

Entre sus obras publicadas, se encuentra el tratado científico considerado su obra cumbre de 1687, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* o *Los principia* (*Principios matemáticos de filosofía natural),* dividida en tres libros donde se enuncian las tres leyes del movimiento de Newton, la ley de la gravitación universal, el sistema del mundo sobre los movimientos de los cuerpos celestes, el método de la razones primeras y últimas entre cantidades, entre otros (Boyer, 2007; Hawking, 2007). Aunque se publicó antes, esta obra es posterior tanto a "De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas" (en el cual se utilizan los infinitesimales) como a "Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum" (en el cual se utiliza el método de las fluxiones). En los "Principia", Newton utiliza métodos de demostración geométricos, seguramente debido a que consideraba que este tipo de demostraciones era más comprensible para sus contemporáneos y expone un método alternativo a los infinitesimales y al método de las fluxiones: las cantidades divisibles evanescentes.

Ahora bien, en el *De analysi* publicado en 1669, Newton enfocó su cálculo a partir del área encerrada por una función, considerando una cantidad infinitesimal o, denominada momento de la variable, como el incremento de la abscisa x.

Partía de un área inicial de la forma:

$$A(x) = \frac{2}{3}\, x^{3/2}$$

la cual se incrementa en el rectángulo curvilíneo de vértices $x, x + o, y(x + o), y(x)$. Tómese luego el rectángulo (ver Figura 1.9) de lados o y v, de donde se obtenía la expresión: $A(x + o) = A(x) + ov$, de la cual se lograba:

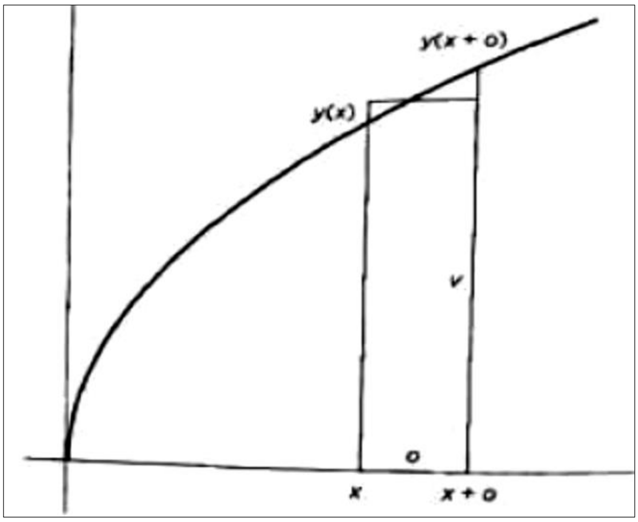
$$\frac{2}{3}\,(x + o)^{3/2} \;=\; \frac{2}{3}\, x^{3/2} \;+\; ov$$

Elevando al cuadrado se obtenía:

$$\frac{4}{9}\,(x + o)^{3} \;=\; \left(\frac{2}{3}\, x^{3/2} \;+\; ov\right)^{2}$$

Figura 1.9

Rectángulo curvilíneo de Newton del área encerrada por una función



Nota: Extraída de Muñoz (2017a, p. 146).

Desarrollando las potencias y dividiendo por o resulta:

$$\frac{4}{9}\,(3x^2 + 3xo + o^2) = \frac{4}{3}\, x^{3/2}\, v + ov^2$$

Considerando el incremento o igual a cero por ser tan pequeño, además $v = y$, se obtenía:

$$\frac{4}{3}\,x^2 \;=\; \frac{4}{3}\,x^{3/2}\,y \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{y = x^{1/2}}$$

(Muñoz, 2017a, pp. 145-147).

Posteriormente, en la segunda gran obra sobre cálculo escrita en 1671 y titulada *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, Newton se basó en una concepción mecánica del movimiento continuo e introdujo la noción de *fluentes* para las variables x e y como cantidades que van fluyendo, y *fluxiones* para las velocidades de cambio respecto del tiempo, que equivalen a las actuales derivadas de las variables. Según Muñoz (2017a, p. 147), en palabras del propio Newton, explicaba:

> Llamaré cantidades fluentes a estas cantidades que considero aumentadas gradual e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z. Representaré con las mismas últimas letras coronadas por un punto las velocidades $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones.

En este libro, Newton considera que el problema fundamental del cálculo es el siguiente: dada una relación entre fluxiones, obtener una relación entre sus respectivas fluentes y recíprocamente. Así por ejemplo, derivar la expresión implícita:

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0.$$

Se sustituyen las variables: x por $x + \dot{x}o$ e y por $y + \dot{y}o$, lo cual resulta:

$$(x + \dot{x}o\,)^3 - a(x + \dot{x}o\,)^2 + a(x + \dot{x}o)(y + \dot{y}o) - (y + \dot{y}o)^3 = 0$$

Primero, se desarrolla la expresión anterior, y después se elimina la ecuación inicial. Luego, se divide todos los términos por o, lo que queda:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x - 3\,\dot{y}y^2 + 3(\dot{x})^2 \cdot ox - a(\dot{x})^2 \cdot o + a\dot{y}x +$$
$$+ a\dot{x}y - 3(\dot{y})^2 \cdot oy + (\dot{x})^3 \cdot o^2 + a\dot{x}\dot{y}o - (\dot{y})^3 \cdot o^2 = 0$$

Eliminando todos los términos que tienen o, se obtiene la derivada de la función implícita inicial:

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + 3\,\dot{y}y^2 + a\dot{y}x + a\dot{x}y = 0$$

(Muñoz, 2017a, p. 148).

En una tercera exposición de su cálculo titulada *De quadratura curvarum* de 1676, Newton procuró evitar las cantidades infinitamente pequeñas y las fluentes, y las reemplazó por las razones primeras y últimas. Esto es:

> Newton calculaba la *razón primera de incrementos nacientes* o la *razón última de incrementos evanescentes*, a saber:
>
> Supongamos que se quiere hallar la razón entre las variaciones de x y x^n ; llamemos o a un incremento dado de la variable x, y sea $(x+o)^n - x^n$ el incremento correspondiente a x^n.
>
> Entonces la razón de estos incrementos será:
>
> $$\frac{1}{nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}\,ox^{n-2} + \cdots}$$
>
> Y para hallar la razón primera y última se debe dejar *desvanecerse* a o, con lo que la razón buscada resultará:
>
> $$\frac{1}{nx^{n-1}}$$
>
> (Boyer, 2007, pp. 499-500).

Se puede considerar que, en este último resultado, Newton estuvo muy próximo de arribar al concepto de límite, aunque no esclareció la existencia, o no, de una razón entre incrementos que pudieran desvanecerse. Y para el caso de las fluentes y las fluxiones, la formulación de Newton equivale, en el cálculo actual, a determinar las derivadas y las integrales de las funciones.

Otra aportación importante de Newton fue considerar que la expresión simbólica de una función se podía transformar en una serie infinita. El desarrollo del cálculo infinitesimal y el de la teoría de series son simultáneos, resultando estas últimas un instrumento imprescindible para el avance del cálculo. Los principales científicos del siglo XVIII efectuaron importantes contribuciones en el campo de las series, pero fue Isaac Newton quien realizó un siglo antes la mayor aportación al tema; de hecho, los desarrollos en serie son esenciales en el cálculo de Newton y simultáneamente, el cálculo le permite aplicar nuevas técnicas de desarrollo en serie. En el siglo XVIII aparecen nuevas y relevantes contribuciones a este campo entre las que destacan las de Euler. La fórmula de Taylor proporciona un método general para el desarrollo en serie de una función, la cual también permite aproximar la función $f(x)$ por un polinomio $p_n(x)$ de grado n.

De otro lado, *Leibniz* (1646 - 1716), fue un historiador, ingeniero de minas, poeta, diseñador, geólogo, diplomático, músico, alquimista, político, agricultor, inventor y bibliotecario alemán, lo que le llevó a ser escritor de libros, cartas y memorándums; aunque sin duda fueron sus trabajos en filosofía y ciencia, en particular en matemáticas, los que lo catapultaron a la fama.

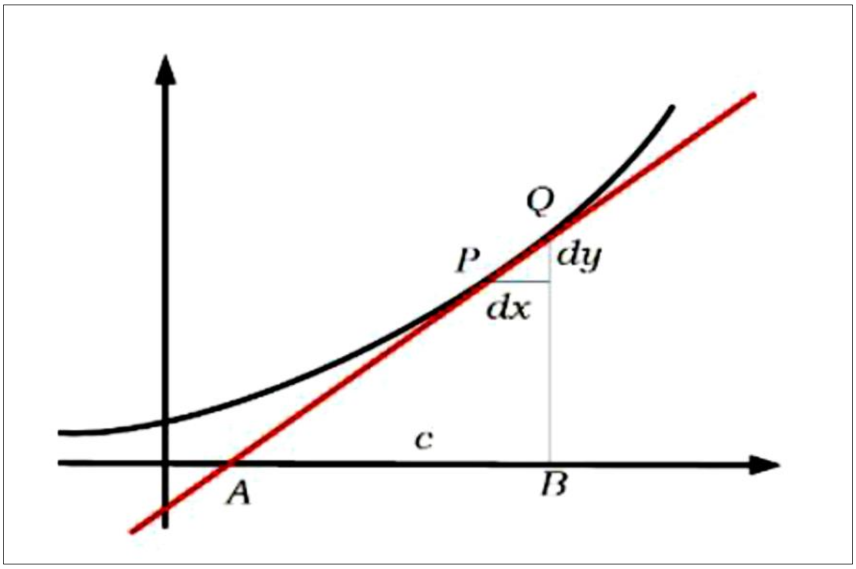
El paradigma geométrico adoptado por Barrow y Pascal, así como su rechazo por las fórmulas y el simbolismo algebraico, según algunos historiadores, no les permitió descubrir el cálculo diferencial que luego Leibniz descubriera. Para muchos historiadores, la genialidad y virtuosidad de Leibniz en la creación del simbolismo, le facilitó convertir en fórmulas los resultados obtenidos y en un cuerpo de algoritmos eficaces los métodos existentes y descubiertos por él, ya que logró independizar el discurso matemático del geométrico, y con ello, establecer los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal como un potente instrumento de investigación para resolver todo tipo de problemas complejos (González, 2012).

La formulación de cálculo de Leibniz se caracteriza por su enfoque más analítico y simbólico, toda vez que está fundamentado sobre bases de diferencias infinitesimales (el cálculo diferencial), y sobre la suma de infinitamente pequeños (el cálculo integral); lo que le permitió descubrir el vínculo entre tangentes y cuadraturas y, al mismo tiempo, reducir los problemas de cuadratura hacia una antiderivación. Para Leibniz, las curvas estaban formadas por infinitos segmentos rectilíneos, infinitesimales que darían lugar a las tangentes de la curva, luego de varios intentos representó las diferencias pequeñas o diferenciales de las variables x e y por dx y dy, así como los signos $\int y$, y luego $\int y\,dx$ para representar la suma de ordenadas bajo la curva.

El primer artículo sobre cálculo diferencial publicado por Leibniz en 1684 en la revista *Acta Eruditorum*, se tituló: *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, que nec fractas nec irrationales quantitates moratur* (Un nuevo método para máximos y mínimos, y también para tangentes, que no se ve obstruido por las cantidades fraccionarias ni por cantidades irracionales); en éste, Leibniz utilizó el triángulo característico de catetos dx y dy, e hipotenusa a uno de los segmentos infinitesimales que componían la curva, tal y como se aprecia en la Figura 1.10.

Figura 1.10

Triángulo característico de Leibniz con tangente y subtangente a una curva



Nota: Extraída de Muñoz (2017b, p. 132).

De donde por semejanza de triángulos, puesto que ABQ es semejante el triángulo característico, se cumple que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{c}$$

Integrando en ambos miembros y despejando la incógnita y, se obtiene la expresión para las curvas de la subtangente constante, o sea, las exponenciales:

$$\ln(y) = \frac{x}{c} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{y = e^{x/c}}$$

Además, Leibniz presentó la deducción de las fórmulas de la derivada de un producto, un cociente y de las potencias, a saber:

$$d(x \cdot y) = x\,dy + y\,dx \;\; ; \quad d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} \quad ; \quad d(x^n) = n\,x^{n-1}dx$$

Estas fórmulas se obtienen despreciando los infinitésimos de orden superior. Por ejemplo, si las diferencias mínimas de x e y son respectivamente dx y dy , entonces $d(x \cdot y)$, es decir, la diferencia mínima de $x \cdot y$ es:

$$(x + dx)(y + dy) - x \cdot y$$

Y como tanto dx como dy son infinitamente pequeños, el término $dx\,dy$ será "infinitamente infinitamente pequeño" y puede despreciarse, con lo que el resultado para el producto será:

$$d(x \cdot y) = x\,dy + y\,dx$$

(Boyer, 2007, p. 507).

Para el descubrimiento final del cálculo infinitesimal se necesitaba confrontar y contrastar la tradición cinemática y la atomista de las matemáticas, esto es, los métodos geométricos de Barrow y Cavalieri con los método analíticos de Fermat, Descartes, y Walis, con los métodos aritméticos de Roberval, Fermat y Wallis, y con los métodos cinemáticos de Torricelli, Roberval y Barrow; así como, valorar la importancia del Teorema Fundamental del Cálculo como algoritmo universal aplicable a todos los problemas infinitesimales.

A pesar de la disputa y la polémica en que se vieron envueltos por la primacía en la invención del cálculo, en la actualidad, la mayoría de los historiadores de la ciencia creen que tanto Newton como Leibniz, de hecho, llegaron a sus ideas de manera independiente y que la disputa y las acusaciones fueron inútiles (Durán, 2006; Gonzáles, 2012; Hawking, 2007).

Para Leibniz, al igual que para Newton, la función es una herramienta fundamental que se usa, pero que no es objeto de estudio en sí misma. Ahora bien, Leibniz a diferencia de Newton, considera la gráfica de una función como un agregado de segmentos infinitesimales más que como la trayectoria de un punto que se mueve. Mientras Newton, en su libro "Methodus fluxionum et Serierum Infinitarum", considera las variables como generadas por el movimiento continuo de puntos, rectas y planos, más que como agregados estáticos de infinitesimales.

1.4.5. La fundamentación y rigurosidad del cálculo diferencial

Luego de la fundación o invención del cálculo infinitesimal por parte de Newton y Leibniz, surgieron algunas críticas y ataques por parte de la comunidad matemática de finales del siglo XVII sobre el uso y rigor de las cantidades infinitamente pequeñas, las fluxiones, las diferenciales, los incrementos evanescentes, entre otros. Por lo que se hizo necesario desarrollar todo un proceso que dotara de rigurosidad matemática y fundamentación al concepto de derivada, clarificara y generalizara los nuevos conceptos, o lo que es lo mismo una reformulación sobre bases rigurosas del nuevo análisis infinitesimal, lo que hoy se conoce como la *Aritmetización del Análisis*.

Así por ejemplo, George Berkeley, en 1734 critica que al calcular o bien las fluxiones o las razones de las diferenciales, los matemáticos suponen que se les da ciertos incrementos no nulos a las variables, para luego eliminarlos asumiéndolos iguales a cero. Además, condena la explicación que hizo Newton de las fluxiones en términos de razones primeras y últimas, negando la posibilidad de una velocidad instantánea, en la que los incrementos de la distancia y del tiempo se han desvanecido para dejar en su lugar el cociente $0/0$ carente de sentido. En palabras del mismo Berkeley, cuestionaba:

> ¿Y qué son las fluxiones? Las velocidades de incrementos evanescentes. ¿Y qué son esos mismos incrementos evanescentes? No son ni cantidades finitas ni cantidades infinitamente pequeñas, ni tampoco se reducen a la nada. ¿No podríamos llamarlos los fantasmas de cantidades desaparecidas?
> (Merzbach & Boyer, 2011, pp.378-379).

Fueron los hermanos *Jacques y Jean Bernoulli,* los que tomaron la posta y se interesaron por el cálculo diferencial e integral, a través del estudio y resolución de diversos problemas famosos no resueltos en esa época, - tales como: encontrar las ecuaciones de la catenaria, la tractriz, la isócrona, la braquistócrona, entre otros, - que descubrieron la potencia del cálculo. Según refieren Merzbach and Boyer (2011) y Boyer (2007), una de las contribuciones principales de Jean Bernoulli hacia el cálculo en 1694, fue la hoy conocida regla de L'Hôpital para límites indeterminados. Bernoulli, había encontrado que si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables en $x = a$, donde se cumple que $f(a) = g(a) = 0$, y que además existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

entonces, se cumple que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla fue publicada en París en 1696 por el marqués L'Hôpital en su libro sobre cálculo diferencial titulado *Analyse des infiniment petits,* y se basó en dos postulados: 1) Se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña, y 2) Una curva puede ser considerada como formada por segmentos de línea recta infinitamente pequeños que determinan la curvatura de la curva; las fórmulas diferenciales básicas para funciones algebraicas se obtienen bajo el enfoque de Leibniz, y se aplican al cálculo de tangentes, máximos y mínimos, puntos de inflexión, curvaturas, cáusticas y límites indeterminados.

A su vez, *Brook Taylor* en su tratado *Methodus incrementorum directa et inversa* de 1715, publicó la serie:

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)x + f''(a)\frac{x^2}{2!} + f'''(a)\frac{x^3}{3!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{x^n}{n!} + \ \ldots$$

Serie general que hoy en día la conocemos como serie de Maclaurin, luego de sustituir a por 0. Dicho tratado contenía además, soluciones singulares de ecuaciones diferenciales, una ecuación para la cuerda vibrante, así como fórmulas que relacionan las derivadas de una función con las derivadas de la función inversa, por ejemplo:

$$\frac{d^2x}{dy^2} = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$$

Por otra parte, *Leonhard Euler*, quien tuvo una gran producción en publicación de textos y artículos matemáticos, contribuyó – para algunos historiadores, como ningún otro matemático a lo largo de la historia – a nuestro sistema de notaciones matemáticas. Euler tomó el cálculo diferencial de Newton y Leibniz, así como el método de fluxiones, y los integró a una rama más general de la matemática sobre el estudio de los procesos infinitos, *El Análisis*, en su obra cumbre titulada *Introductio in analysin infinitorum* de 1748, la cual tuvo a la noción de función como idea fundamental del análisis; por esa razón, Euler es considerado, dentro de la fundamentación del cálculo, como el fundador del análisis.

En esa línea, Euler concebía el cálculo como un método para determinar el cociente de la forma $\frac{dy}{dx}$ cuando los incrementos se desvanecen en el sentido de Newton. En sus propias palabras, Euler expresa: “Un método para determinar la proporción de los incrementos evanescentes, estos que las funciones toman cuando la variable de la función se modifica por uno de tales incrementos” (Durán, 1996, p. 168). Podemos apreciar que en el análisis que hace Euler está como trasfondo el cociente de incrementos que luego tomaría Cauchy para definir la derivada de una función, y que tiene la forma:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Asimismo, Euler estudió las ecuaciones diferenciales, a tal punto de que una de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables lleva su nombre, a saber:

$$f(x) = x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_n y^{(0)}$$

La teoría de las ecuaciones diferenciales parciales era un campo abierto en aquella época, Euler también incursionó en dicho campo, donde para la ecuación más general de la cuerda vibrante de la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

encontró como solución la expresión: $u = f(x+at) + g(x-at)$. (Boyer, 2007, Hawking, 2010b).

Por otro lado, *D'Alembert* quien contribuyó también en establecer los fundamentos del cálculo, era de la opinión que la verdadera metafísica del cálculo había que encontrarla basada en una idea de límite, que la diferenciación de ecuaciones consiste simplemente en hallar los límites de las razones de diferencias finitas de dos variables incluidas en la ecuación. En su artículo la *Encyclopédie* sobre la diferencial, interpreta las expresiones "razones primeras y últimas" de Newton, como límites, más no como una primera o última razón de dos cantidades que están surgiendo o desvaneciéndose; al poner fuera de la ley los infinitésimos, definía lo infinitamente grande en términos de límites. También, dedicó tiempo al estudio del problema de la cuerda vibrante formulando la ecuación en términos de derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

encontrándole una solución, en 1747, de la forma: $u = f(x+t) + g(x-t)$, donde f y g hacen las veces de funciones arbitrarias.

En esta misma línea, de los aportes hacia los fundamentos del cálculo y la búsqueda del rigor matemático, surge una de las figuras más importantes de todos los tiempos entre los matemáticos, *Giuseppe Luigi Lagrangia*, quien con la publicación de su libro *Théorie des fonctions analytiques* junto al *Réflexions* de Sadi Carnot, en 1797, marcaron el año del renacimiento del rigor matemático. Lagrange representó la cúspide de una serie de desarrollos matemáticos, en particular, en el cálculo de variaciones, en la teoría de funciones de variable real y en ecuaciones diferenciales (Areán, 2016; Merzbach & Boyer, 2011). Las notaciones para las derivadas sucesivas de una función $f(x)$ (primera, segunda, tercera, n-ésima derivada) que introdujo Lagrange, son las que utilizamos universalmente en la actualidad, toda vez que resultan más sucintas que la de Leibniz, pero más general y expresivas que la de Newton:

$$f'(x)\,, f''(x),\ \ f'''(x), \dots, f^{(n)}(x)$$

A pesar de que Lagrange se mostró confiado en que con su método había logrado erradicar la necesidad de utilizar infinitesimales y límites, lamentablemente esto no fue así, ya que, de un lado, no toda función se puede desarrollar de esta manera; y del otro, el problema de la convergencia de series infinitas hace inevitable el recurrir al concepto de límite. Asimismo, formuló el método de variación de las constantes en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, es decir:

> Dada la ecuación $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, cuya solución general es de la forma $c_1 u_1 + c_2 u_2$, donde u_1 y u_2 son funciones de x, entonces Lagrange sustituía las constantes c_1 y c_2 por nuevas variables v_1 y v_2, funciones indeterminadas de x, que se determinaban imponiendo precisamente la condición de que $v_1 u_1 + v_2 u_2$ sea una solución de la ecuación no homogénea dada $f(x) = y'' + a_1 y' + a_2 y$. (Merzbach & Boyer, 2011, p. 432)

Hacia finales de la segunda mitad del siglo XVIII imperaba una especie de entusiasmo generalizado, debido a los resultados del cálculo infinitesimal obtenidos hasta ese momento; no obstante, la confusión sobre la rigurosidad y los principios básicos del cálculo seguía vigente, toda vez que ninguno de los planteamientos – excepto el de las fluxiones de Newton, el de diferenciales de Leibniz, y el de los límites de D'Alembert - resultaba del todo satisfactorio. Hasta que entraron en escena en el ambiente científico, a inicios del siglo XIX, *Agustin-Louis Cauchy* y *Bernhard Bolzano*, quienes se encargarían de establecer la rigurosidad y la fundamentación del cálculo infinitesimal, y en particular, del concepto de derivada (Boyer, 2007; Hawking, 2007; Merzbach & Boyer, 2011).

Por otra parte, *Cauchy* en sus libros el *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821), el *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823) y las *Leçons sur le calcul différentiel* (1829), se encargó de establecer unas definiciones muy precisas y detalladas de los conceptos, que presentaba en ese momento el análisis, tanto de variable real como de variable compleja, por lo que terminó dándole al cálculo infinitesimal elemental la forma que conocemos hoy. Cauchy prescindió de la formulación de Lagrange basada en la serie de potencias de Taylor, de los infinitésimos, de las velocidades de cambio y de la geometría, para enfocarse en la noción de límite de D'Alembert, llegando a formular la definición de límite tan precisa, casi como la conocemos en la actualidad.

> Cuando los sucesivos valores que toma una variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de manera que termina por diferir de él en tan poco como queramos, este último valor se llama el límite de todos los demás.

Además, Cauchy define con toda claridad a un infinitésimo como una variable, más no como un número constante muy pequeño. De la siguiente manera:

> Diremos que una cantidad variable se hace infinitamente pequeña cuando su valor numérico disminuye indefinidamente, de manera que converge hacia el límite cero. (Merzbach & Boyer, 2011, p. 455)

En la formulación del cálculo de Cauchy, las nociones de función y de límite de una función son conceptos fundamentales, por lo que define la derivada de una función $y = f(x)$ con respecto a x, asignando a la variable independiente un incremento de la forma $\Delta x = i$, estableciendo el siguiente cociente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

En tanto que, al límite de este cociente de diferencias cuando i tiende a cero, lo define como la derivada de y con respecto a x, $f'(x)$. Si dx es una cantidad finita, entonces la correspondiente diferencial dy de la función $y = f(x)$, se definirá como $f'(x)\,dx$. En el caso de la definición de continuidad de una función dada por Cauchy, es casi completamente similar a la que conocemos hoy en día: "La función $f(x)$ es continua entre límites dados de la variable x, si entre estos límites un incremento infinitamente pequeño i de la variable x, siempre da lugar a un incremento infinitamente pequeño $f(x+i) - f(x)$ de la función misma" (Boyer, 2007, p. 648).

Así pues, la definición de derivada de Cauchy, estableció claramente que la derivada de una función en un punto anguloso de la curva (pico) o en un punto en que la función es discontinua, no existe. También, Cauchy necesitaba encontrar una relación que vincule la integral con la antiderivada, toda vez que había definido la integral de una forma totalmente independiente de la diferenciación, por lo que con base en el teorema de Rolle, formuló el teorema del valor medio.

Si $f(x)$es una función que satisface las hipótesis siguientes (ver Figura 1.11):

1. f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$
2. f es derivable sobre el intervalo abierto (a, b)

Entonces existe un número c en (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

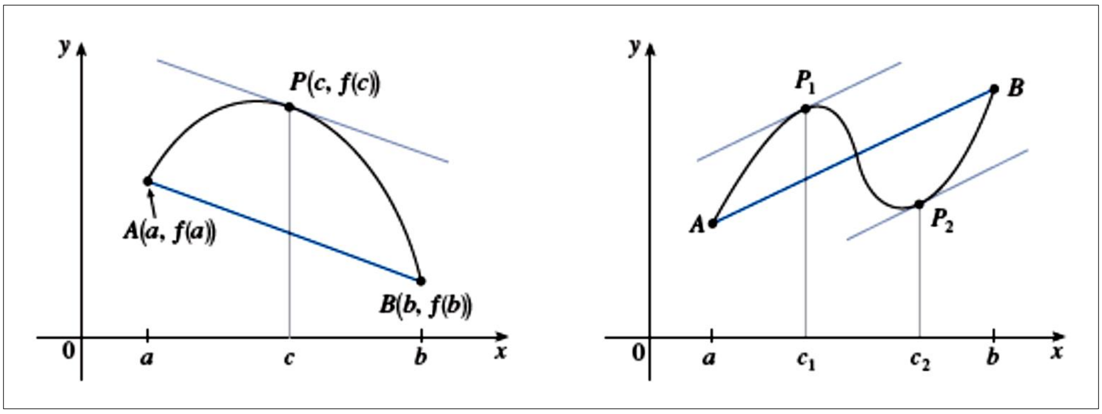
o en forma equivalente,

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$$

(Stewart, 2018, p. 288).

Figura 1.11

Gráfica de dos funciones derivables del teorema del valor medio.



Nota: Extraída de Stewart (2018, p. 288).

En la actualidad, se suele conocer como el teorema del valor medio de Cauchy a la forma más general que viene dada por:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

con ciertas restricciones sobre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

De otro lado, *Bolzano* considerado por algunos historiadores como el *padre de la aritmetización*, se había mostrado ya hacia 1817 totalmente consciente de la necesidad del rigor en el análisis, por lo que realizó también aportes en los fundamentos del cálculo diferencial al definir la derivada de una función de una forma equivalente al cociente dado por,

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

cuando Δx se aproxima a cero, entonces el resultado se aproxima a la cantidad $f'(x)$. Resultado que es muy parecido al encontrado por Euler, pero que Bolzano se encargó de hacer la vinculación categórica entre el cociente de diferencias cuando el incremento tiende a cero y la primera derivada de la función $f(x)$.

Por último, el matemático alemán *Karl Weierstrass* (1815-1897), considerado por varios historiadores de la ciencia como el *padre del análisis moderno*, fue el encargado de cerrar el proceso de fundamentación del cálculo al formular, entre otros, la definición de límite tal como la conocemos en la actualidad. Éste retomó la obra de Bolzano de hacía 50 años, al punto de que hoy tenemos un teorema en honor a ellos que ya había demostrado Bolzano, se trata del teorema de Bolzano-Weierstrass: "Todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos (tales como puntos o números) tiene al menos un punto de acumulación o punto límite" (Merzbach & Boyer, 2011, p. 534).

Hacia la década de 1860, Weierstrass presentó varios resultados que clarificaron de una manera considerable diversas nociones fundamentales del análisis matemático y le otorgaron la solidez y rigor necesarios. Ahora bien, la definición de Cauchy sobre límites hacía uso de expresiones tales como, valores sucesivos, aproximarse indefinidamente, o tan pequeño como uno quiera; sin embargo le faltaba algo más de precisión, por lo que tuvo que llegar Weierstrass para que la teoría de límites se expresara con rigor matemático y se constituyera como base del análisis matemático (Boyer, 2007; Hawking, 2007; Merzbach & Boyer, 2011; Sepulcre, 2017).

En los *Elemente* de Heine publicado en 1872, Weierstrass, definía el límite de una función $f(x)$ en x_o de la siguiente manera: "Si, dado cualquier ε, existe un η_o tal que para $0<\eta<\eta_o$, la diferencia $f(x_o \pm \eta)-L$ es menor en valor absoluto que ε, entonces se dice que L es el límite de $f(x)$ para $x=x_o$" (Boyer, 2007, p. 696). Así como también, formuló la definición final para las funciones continuas: "La función $f(x)$ es continua en x_o, si para cualquier valor positivo $\varepsilon>0$, existe una cantidad también positiva $\delta > 0$, tal que para todo punto del intervalo $|x - x_o| < \delta$ donde $f(x)$ esté definida, se cumple que $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ ” (Hawking, 2007, p.1063).

Podemos notar que en estas definiciones se ha eliminado del análisis la idea de variabilidad continua y se han desechado las cantidades infinitésimas, por el contrario, la definición de límite, por ejemplo, está expresada en términos de números reales, la operación de adición y sustracción y la relación “menor que”. Actualmente, la letra griega η ha sido reemplazada por la letra griega δ, pero nada más, por lo que el cálculo del siglo XIX alcanzó su perfección clásica con las épsilons y deltas numéricas del análisis riguroso de Weierstrass, lo que en el argot matemático se le conoce como demostraciones de tipo $\varepsilon - \delta$.

Fue así como, en las primeras tres décadas del siglo XIX, las matemáticas se convirtieron en algo muy notablemente diferente de lo que habían sido en la época posterior a Newton y Leibniz del siglo XVIII, el cambio radicó en la dirección de adquirir una mayor rigurosidad en los procesos de demostración, el hecho de dotarle de generalidad y la libertad de creatividad sin precedentes; había llegado la *Edad del Rigor*, sustituyendo las ideas intuitivas por la crítica precisión lógica.

En consecuencia, la definición de derivada en términos de límites quedó expresada de la siguiente manera:

DEFINICIÓN **La derivada de la función $f(x)$ con respecto a la variable x es la función f' cuyo valor en x es**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

siempre que el límite exista.

(Thomas, 2010, p. 106).

Y así de esta manera, finalizamos nuestro breve recorrido por la historia de la invención y fundamentación del cálculo diferencial, desde la génesis hasta el establecimiento definitivo de los fundamentos y la rigurosidad matemática, tal y como lo estudiamos hoy en día.

1.5. La reflexión sobre la historia de las matemáticas permite explicitar la complejidad asociada a la emergencia de los objetos matemáticos

La revisión de la historia de las matemáticas juega un rol importante en los estudios de tipo epistemológico que se interesan por indagar sobre la complejidad de los objetos matemáticos y su emergencia a partir de las prácticas, así como por las implicaciones que tiene dicha complejidad para la enseñanza de una determinada noción matemática.

Tal como se explica en Font, Sala, Breda y Seckel (2017), en el caso de las funciones, varios trabajos −Arenzana (1997); Azcárate y Deloufeu (1990); Bos (1984); Font (2000); Font, Vanegas, Ferreres, Carvajal y Adán (2012); Lacasta y Pascual (1998); Youschkevitch (1976) − ponen de manifiesto que el objeto matemático función es el resultado de una emergencia que se ha producido a lo largo de mucho tiempo. La reflexión sobre esta complejidad aporta sugerencias importantes para la enseñanza de las funciones, como es la importancia de utilizar diferentes significados parciales y diferentes representaciones de este objeto en su enseñanza.

En Font, Sala, Breda y Seckel (2017) se resume la complejidad de algunas nociones del cálculo por medio de la noción de configuración epistémica que se han estudiado en investigaciones realizadas en el marco del Enfoque Ontosemiótico. Para el objeto matemático límite, Contreras, García y Font (2012); García (2008), caracterizan su complejidad (resultado de su evolución histórica) por medio de las siguientes configuraciones epistémicas: geométrica, preinfinitesimal, infinitesimal, numérica, métrico-analítica y topológica.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones epistémicas: a) Tangente en la matemática griega; b) Variación de la tasa media; c) Métodos algebraicos para encontrar tangentes; d) Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; e) Ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; f) Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; g) Cálculo de fluxiones; h) Cálculo de diferencias y, i) Derivada como límite. En Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones epistémicas para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículum de

Bachillerato de México (a partir de las configuraciones epistémicas activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de este nivel).

Con relación a la complejidad del objeto integral, Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y Ordóñez (2011) consideran las siguientes configuraciones epistémicas: a) Geométrica, b) Resultado de un proceso de cambio, c) Inversa de la derivada, d) Aproximación al límite, e) Generalizada: (Lebesgue, Riemann, etc.), f) Algebraica, g) Métodos numéricos. Crisóstomo (2012), en su tesis doctoral considera, basándose en la red de configuraciones epistémicas propuesta por Ordóñez (2011), útil distinguir ocho tipos diferentes de configuraciones que designa con los nombres de: intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada, extra matemática, acumulada y tecnológica, situando el Teorema Fundamental del Cálculo como un objeto primario central de la configuración epistémica llamada primitiva, aunque también aparece en la geométrica, la sumatoria, la extra matemática y la tecnológica.

En Gordillo y Pino-Fan (2016) la complejidad de la antiderivada se caracteriza mediante cuatro configuraciones de objetos primarios relacionadas con cuatro problemas fundamentales: a) el problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; b) el problema de la relación fluxiones - fluentes; c) el problema sobre la relación de los diferenciales y las sumatorias; y d) el problema de la identificación de funciones elementales. La caracterización de dicha complejidad permite tener elementos para diseñar cuestionarios que permiten caracterizar la comprensión de los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio, sobre la antiderivada.

Según el EOS, el objeto matemático derivada (por ejemplo) hay que situarlo en el segundo nivel de emergencia. Se trata de la emergencia de una referencia global asociada a diferentes configuraciones de objetos primarios, las cuales permiten realizar prácticas matemáticas en diferentes contextos − en los cuales, por ejemplo, la derivada se ha interpretado como límite, como pendiente de la recta tangente o como velocidad instantánea, además como un operador que transforma una función en otra–, lo cual lleva a entender que la derivada se puede definir de diversas formas, representar de formas diferentes, etc. El resultado, según el EOS, es que se considera que hay un objeto, llamado derivada, que juega el papel de referencia global de todas las configuraciones de objetos primarios.

Ahora bien, dicha referencia global, en la actividad matemática, se concreta en una configuración de objetos primarios determinada. Por tanto, lo que se puede hacer con este objeto de segundo nivel está determinado por esta configuración. En el EOS, el objeto que juega el papel de referencia global se puede considerar como único por razones de simplicidad y, a la vez, como múltiple ya que, metafóricamente, se puede decir que estalla en una multiplicidad de objetos primarios agrupados en diversas configuraciones.

La mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos que tiene el EOS permite reformular la visión ingenua de que hay un mismo objeto matemático con diferentes representaciones. Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las cuales el objeto matemático no aparece directamente, aquello que sí aparece son representaciones del objeto, diferentes definiciones, proposiciones y propiedades del objeto, procedimientos y técnicas que se aplican al objeto y argumentos sobre el objeto matemático (configuraciones epistémicas de objetos primarios en términos del EOS). Dicho de otro modo, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas de objetos primarios para el estudio del objeto matemático, algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes.

Tal como se explica en Font, Pino-Fan y Breda (2020), en estas investigaciones acabadas de comentar sobre la complejidad de los objetos matemáticos clave del cálculo, se llegó a la conclusión de que los profesores deben tener en cuenta la complejidad de los objetos matemáticos que enseñan para conseguir una enseñanza más eficaz. En particular, esta convicción llevó a desarrollar el constructo idoneidad didáctica de un proceso de instrucción. Dicho constructo se compone en seis criterios de idoneidad parciales, uno de los cuales es el criterio de idoneidad epistémica, desglosados en componentes e indicadores; siendo uno de los componentes del criterio de idoneidad epistémica tener en cuenta una muestra representativa de la complejidad del objeto que se quiere enseñar (Breda, Font y Pino-Fan, 2018; Breda, Pino-Fan y Font, 2017).

1.6. Caracterización del cálculo diferencial que se enseña en ingeniería para efectos de esta investigación

Tal y como se ha visto en la sección previa, el cálculo diferencial se fundó como consecuencia inmediata del cálculo integral, por lo que en la evolución histórica del cálculo infinitesimal los matemáticos se enfocaron principalmente en el problema de cálculo de áreas más que en el problema de la tangente a una curva. Sin embargo, en la actualidad se suele enseñar en las aulas universitarias en general (y en la carreras de ingeniería, en particular), primero, el cálculo diferencial y después el cálculo integral, hecho que no se corresponde con la evolución histórica del cálculo infinitesimal.

Actualmente, en los planes curriculares de ingeniería en el caso peruano y también en el contexto latinoamericano, el orden lógico que sigue la programación y enseñanza de contenidos del cálculo diferencial está generalmente en la misma línea de lo que proponen diversos autores de texto de los Estados Unidos, de Latinoamérica y del Perú (entre otros, Larson y Edwards, 2010 y 2016; Stewart, 2012 y 2018; Thomas, 2006, 2010 y 2016; Zill y Wright, 2011a y 2011b). Por consiguiente, y de acuerdo con los sílabos de asignatura y los planes de clase de los docentes participantes en esta investigación, el orden de contenidos es el siguiente:

- ✓ Funciones reales, gráficas y modelos matemáticos
- ✓ Funciones exponenciales, logarítmicas e inversas
- ✓ Límite de una función y definición precisa de límite
- ✓ Cálculo analítico de límites mediante leyes de los límites
- ✓ Límites laterales o unilaterales
- ✓ Continuidad y discontinuidad de una función
- ✓ Límites al infinito y asíntotas horizontales y verticales
- ✓ Razones de cambio
- ✓ La derivada de una función y el problema de la recta tangente
- ✓ Reglas básicas de derivación, suma, resta, producto y cociente
- ✓ Derivada de funciones polinomiales exponenciales, trigonométricas
- ✓ Regla de la cadena y derivación implícita
- ✓ Derivadas de funciones logarítmicas
- ✓ Teorema del valor medio

- ✓ Funciones crecientes, decrecientes y valores máximos y mínimos
- ✓ Criterio de la primera derivada de una función
- ✓ Concavidad y criterio de la segunda derivada de una función
- ✓ Formas indeterminadas y regla de L'Hôpital
- ✓ Problemas de optimización.

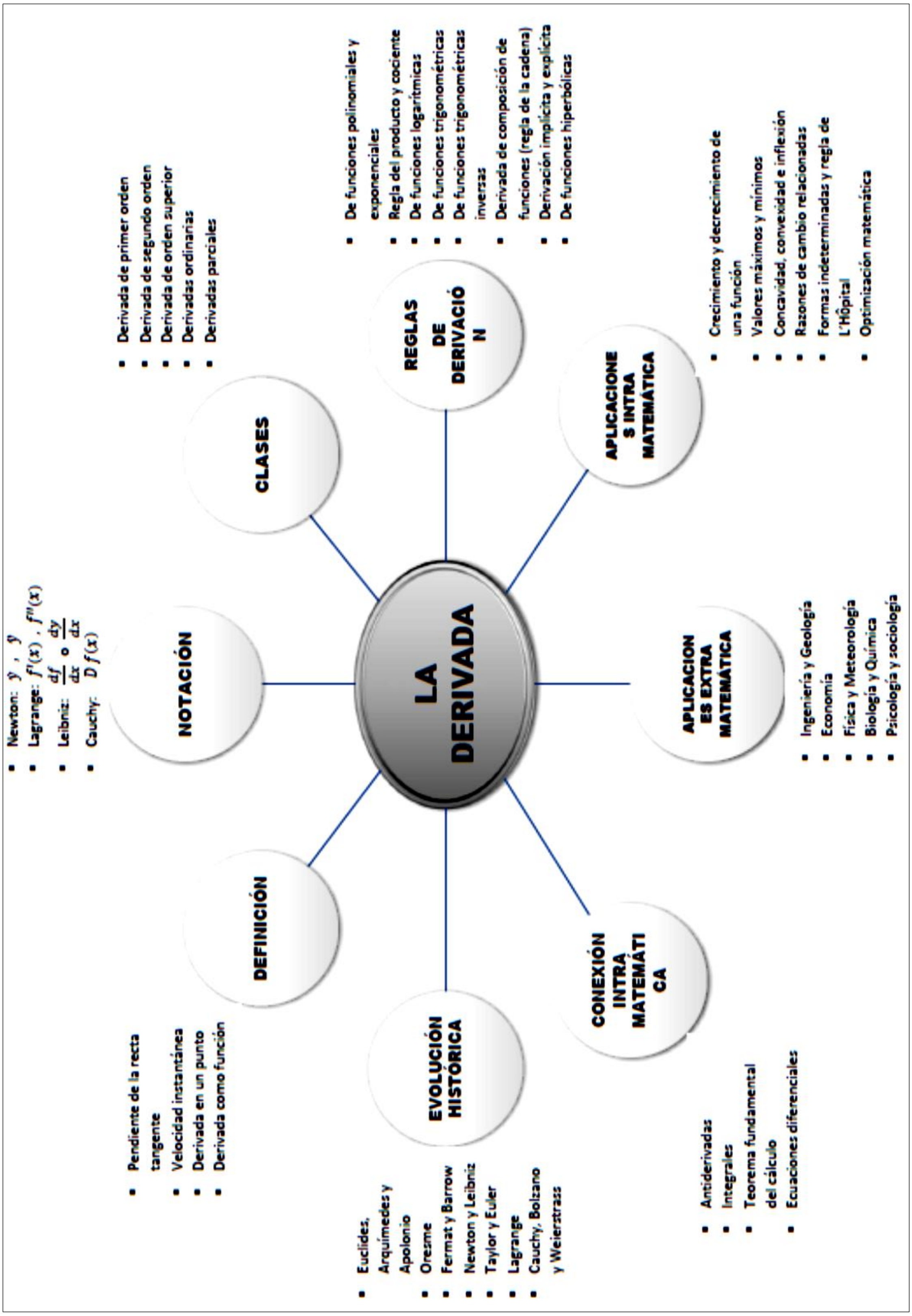
En consecuencia, con base en los antecedentes descritos, en la problemática actual del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en el recorrido de la evolución histórica del cálculo diferencial, en el orden lógico en la que se desarrollan los contenidos de esta materia, consideramos *a priori* que el docente debe tener la competencia y los conocimientos matemáticos y didáctico-matemáticos necesarios, para conjugar adecuadamente el entramado de objetos y procesos matemáticos intervinientes y emergentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones. Y de esta manera diseñar e implementar un proceso de instrucción idóneo o adecuado, teniendo en cuenta las necesidades e intereses de los estudiantes, así como el contexto de la profesión futura de ingeniería.

En ese sentido, en la Figura 1.12 se presenta un esquema de la complejidad de la derivada y sus aplicaciones, que intenta sintetizar el entramado que trae consigo este tema matemático en una clase; y en la Figura 1.13 se muestra el desglose de las aplicaciones extramatemáticas de la derivada a los distintos campos del conocimiento, en particular, a la ingeniería.

En el siguiente capítulo, se aborda el marco teórico que soporta y justifica toda la investigación, se formula el problema de investigación, se precisan los objetivos de este estudio, así como se especifica el enfoque y el diseño metodológico adoptado en la investigación; además de las herramientas teórico-metodológicas y los instrumentos utilizados para la recogida, el análisis y el procesamiento de la información.

Figura 1.12

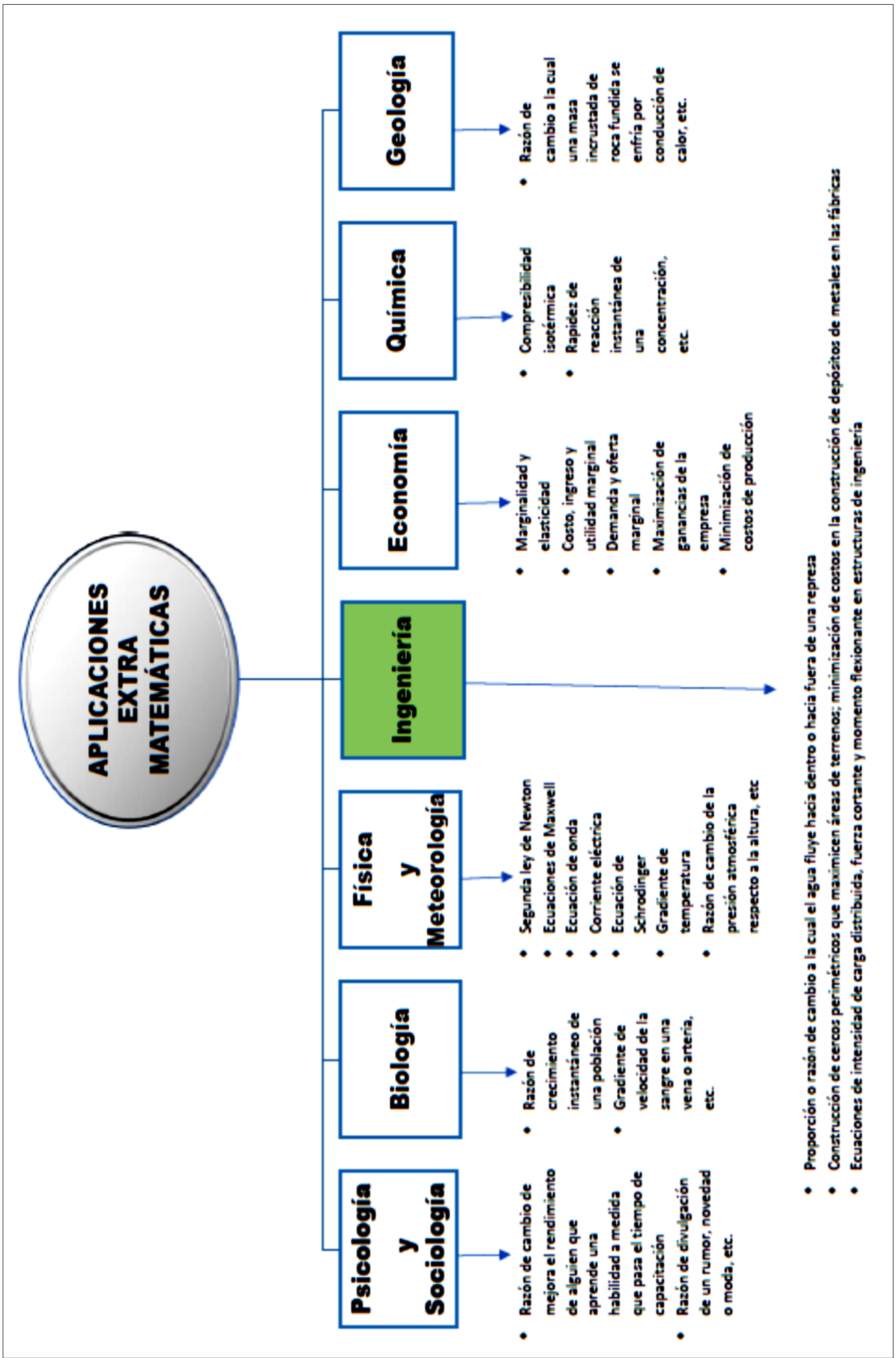
Esquema de complejidad de la derivada en una clase



Nota: Fuente propia de la investigación.

Figura 1.13

Esquema de complejidad de las aplicaciones extramatemáticas de la derivada



Nota: Fuente propia de la investigación.

2

Marco teórico, formulación del problema, objetivos y metodología de la investigación

2.1. Introducción

Primeramente, una vez realizada (en el capítulo 1 de la presente memoria) la descripción de la realidad problemática por la que atraviesa actualmente el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, y del cálculo diferencial e integral, en particular, en el ciclo de ciencias básicas de diversas carreras de ingeniería, tanto a nivel internacional como en el caso del Perú; visto los problemas y dilemas actuales sobre la incorporación y funcionamiento del ciclo básico en la formación de ingeniería; también, el problema de la transición entre etapas educativas secundaria-universitaria; y además, revisada la problemática de la falta de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de los docentes que enseñan cálculo en ingeniería. Surge la necesidad de adoptar una postura teórica que nos brinde las herramientas teórico-metodológicas de análisis y síntesis, con las cuales poder vincular las diferentes aristas de la problemática descrita, para tener resultados sólidos sobre los que plantear alternativas de solución desde la investigación en didáctica de las matemáticas.

En esa línea, en este capítulo presentamos una síntesis del marco teórico que sustenta y justifica cada paso que damos en nuestra investigación, se trata del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) como marco general (Font, Godino y Gallardo, 2013; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, 2012; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; entre otros). Y de manera específica: los criterios de idoneidad didáctica; las herramientas teóricas y metodológicas para el análisis didáctico, que nos proporciona el EOS; así como, el modelo de Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor de matemáticas – CCDM.

Se trata de un enfoque teórico que nos permita analizar y sintetizar la información recopilada, y arribar a conclusiones sobre los criterios didácticos que orientan la práctica docente de los profesores de matemáticas que imparten cálculo diferencial en diversas carreras de ingeniería de universidades públicas y privadas.

De igual modo, en este capítulo presentamos también, la formulación del problema general de investigación y su desglose en problemas específicos, el objetivo general del estudio y su desglose en objetivos específicos, así como la metodología y método utilizados en todo el proceso de esta investigación.

2.2. Enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos

El Enfoque Ontosemiótico (EOS) es un marco teórico que nace en el seno de la Didáctica de las Matemáticas como respuesta a las teorías epistémicas y cognitivas en torno a un problema central de éstas: de un lado tenemos el *Problema epistemológico*: referido al objeto matemático como entidad cultural o institucional, ¿Qué es un objeto matemático? O equivalentemente, ¿Cuál es el significado de un objeto matemático (fracción, límite, integral, derivada, etc.) en un contexto o marco institucional determinado?; y de otro lado, el *Problema cognitivo*: referido al objeto matemático como entidad personal o psicológica, ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias determinadas?

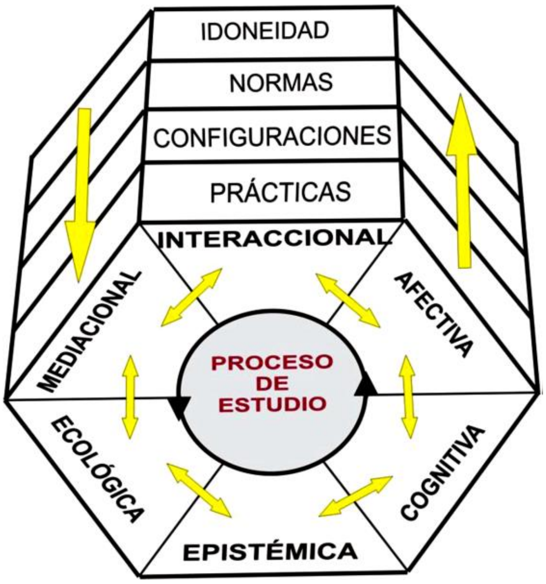
El sistema teórico conocido como EOS emergió con el propósito de articular diversas nociones teóricas y puntos de vista acerca del conocimiento matemático, su enseñanza y aprendizaje. Ahora bien, en el EOS se asume que la naturaleza del conocimiento generado en el área de la educación matemática tiene doble carácter: científico y tecnológico (Godino, Batanero & Font, 2019). Es decir, por el lado del componente científico se abordan problemas ontológicos, epistemológicos y semióticos de los procesos de enseñanza y aprendizaje (situaciones descriptivas, explicativas y predictivas); y por el lado del componente tecnológico, se incide en la intervención de dichos procesos para hacerlos lo más efectivos posibles (cuestiones prescriptivas y valorativas).

A lo largo del tiempo, la construcción de las herramientas del EOS ha pasado por tres etapas: la primera, entre 1993 – 98, donde se desarrollaron las nociones de significado institucional y personal de un objeto matemático; la segunda, entre 1998 – 2006, donde se desarrolló una ontología y una semiótica específicas que estudiasen los sistemas de signos matemáticos que participan en la interacción didáctica; y en la tercera fase, desde el 2006 a la actualidad, se desarrollaron modelos teóricos sobre la instrucción matemática, nuevas herramientas, y la relación con otros marcos teóricos en aras de describir las interacciones que ocurren en el aula de matemáticas (Godino, 2012 y 2013; Godino y Batanero, 1994).

Actualmente, el conjunto de nociones teóricas que integran el EOS, se clasifican en cinco dimensiones (ver Figura 2.1), cada uno de los cuales permite realizar análisis detallados en cualquier momento del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Font, et al., 2013; Giacomone, 2018; Godino, 2012, 2013, 2018a y 2018b; Godino, Batanero & Font, 2007 y 2019; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Rubio, 2012). Estas dimensiones son las siguientes:

Figura 2.1

Facetas y niveles de análisis didáctico del Enfoque Ontosemiótico



Nota: Extraída de Godino (2013, p. 115).

2.2.1. Sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas

En este enfoque teórico se adopta como elemento central en la construcción del conocimiento matemático a la actividad de resolución de problemas. La noción de sistema de prácticas personales e institucionales para resolver estos problemas se usa para introducir, desde una perspectiva pragmatista, las nociones de significado personal e institucional de los objetos matemáticos, para los cuales se consideran diferentes tipos: significado de referencia u holístico, significado planificado, implementado y evaluado (significados institucionales) y significado global, declarado y logrado (significados personales). La noción de significado institucional de referencia de un objeto se articula en un significado global u holístico, del cual se seleccionarán las situaciones problemas para los procesos de instrucción que se pretenden diseñar. Se trata de reconstruir un significado holístico de un objeto mediante la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y los sistemas de prácticas que se ponen en juego para su solución. De este significado holístico se derivan los otros tipos de significados.

2.2.2. Configuración de objetos y procesos matemáticos emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas

La realización de una práctica con la finalidad de resolver un problema matemático es algo complejo que moviliza diferentes elementos, a saber, un agente (institución o persona) que realiza la práctica, un medio en el que dicha práctica se realiza (en este medio puede haber otros agentes, objetos, etc.). Puesto que el agente realiza una secuencia de acciones, sujetas a reglas matemáticas , orientadas a la resolución de un tipo de situaciones problemas, es necesario considerar también, entre otros aspectos, fines, intenciones, valores, objetos y procesos matemáticos.

La práctica se realiza para resolver un determinada tarea o problema y se realizan mediante símbolos, notaciones ostensivas, etc. (lenguajes). En la práctica explícita o implícitamente hay algún tipo de argumento que sirve para resolver el problema; por otra parte, en estas prácticas se usan procedimientos, definiciones y proposiciones. Dicho de manera metafórica: la célula de la actividad matemática es una configuración de objetos primarios (problema, definición, lenguaje, proposición, procedimiento y argumento) que se activan en la práctica que resuelve el problema; a estas configuraciones se las puede mirar desde la perspectiva institucional (configuraciones epistémicas) y desde la perspectiva personal (configuraciones cognitivas). Por otra parte, los objetos primarios se relacionan entre sí mediante funciones semióticas, por lo que también se llaman configuraciones ontosemióticas.

Se adopta una noción pragmática del significado e interaccionista del objeto que articulan la concepción antropológica (Wittgenstein) con posiciones realistas (no platónicas) de las matemáticas. La noción de configuración ontosemiótica contribuye a la identificación de objetos y procesos que participan en las prácticas matemáticas, las mismas que pretenden desarrollar en los estudiantes, de manera competente, la resolución de situaciones-problemas. Los lenguajes, que son diversos medios de expresión, hacen el papel de instrumentos del trabajo matemático, así como, de representación de los restantes objetos matemáticos.

2.2.3. *Configuración didáctica*

En el EOS, la noción de configuración didáctica se constituye como la herramienta fundamental para el análisis de los procesos de instrucción (Godino, Contreras y Font, 2006). Se define como cualquier segmento de actividad didáctica (enseñanza y aprendizaje) comprendido entre el inicio y fin del proceso de resolución de una situación – problema. Incluye, por tanto, las acciones de los estudiantes y del profesor, así como los medios planificados o usados para abordar la tarea. Se consideran cuatro tipos de configuraciones teóricas que se designan como configuración magistral, adidáctica, personal y dialógica. La configuración adidáctica se concreta en una secuencia de situaciones adidácticas de acción, formulación, validación, y la situación didáctica de institucionalización.

La manera tradicional o clásica de enseñar matemáticas basada en la presentación magistral, seguida de ejercicios de aplicación caracteriza la configuración magistral. Cuando la resolución de la tarea se realiza por el estudiante sin una intervención directa del docente (por ejemplo, resolver ejercicios propuestos por el profesor fuera del aula) se trata de un tipo de configuración didáctica en la que básicamente predomina el estudio personal. Otro tipo de configuración puede definirse respetando el momento de exploración por parte de los alumnos, pero asumiendo el profesor básicamente la validación y la institucionalización mediante un diálogo contextualizado entre el docente y los alumnos.

Las configuraciones didácticas empíricas que acontecen están más o menos próximas a estas configuraciones teóricas, la secuencia de configuraciones didácticas constituye una trayectoria didáctica. Por tanto, en el EOS, se considera que la metodología para investigar los procesos de instrucción consiste en realizar el análisis de la secuencia de configuraciones didácticas(trayectoria didáctica).

En toda configuración didáctica se puede diferenciar tres componentes: a) una configuración epistémica (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos institucionales requeridos en la tarea), b) una configuración instruccional (sistema de funciones docentes, discentes y medios instruccionales que se utilizan, así como las interacciones entre los distintos componentes), y c) una configuración cognitiva - afectiva (sistema de prácticas, objetos y procesos matemáticos personales que describe el aprendizaje y los componentes afectivos que le acompañan).

2.2.4. *Dimensión normativa*

El EOS considera que las normas se infieren de regularidades observadas en el aula y son reglas o principios que regulan las prácticas de la misma. La tipología de normas y metanormas que considera el EOS que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, generalizan las nociones de contrato didáctico y normas socio-matemáticas estudiadas por la literatura. Por otra parte, se considera, que uno de los principales factores explicativos de los fenómenos didácticos observados está ligado al efecto que producen las normas y meta-normas intervinientes que regulan los procesos de instrucción matemática.

2.2.5. *Idoneidad didáctica*

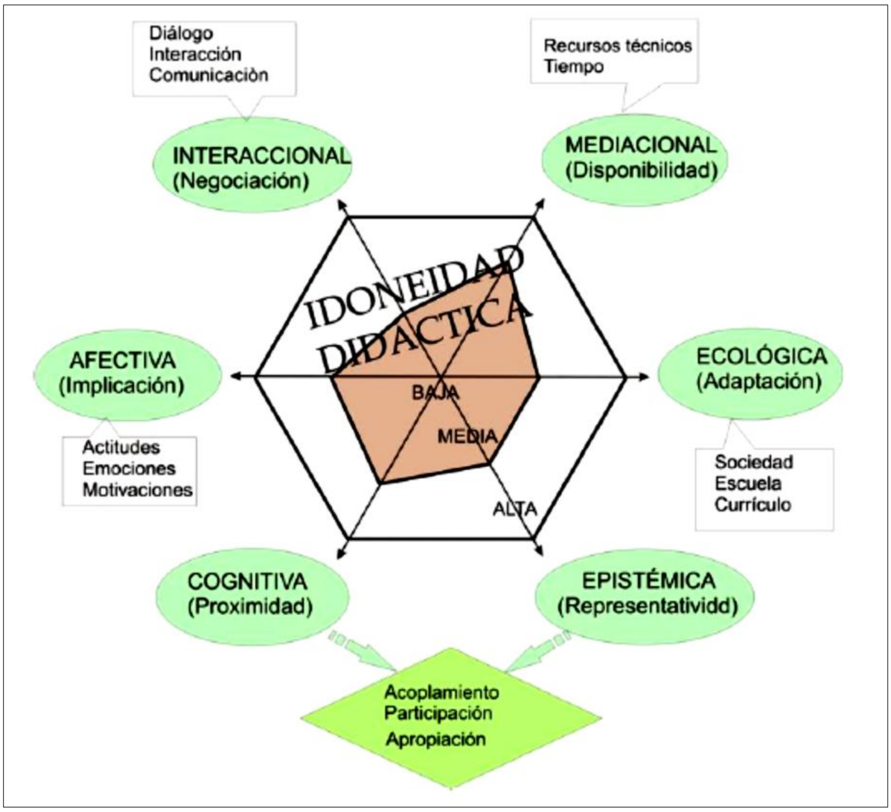
En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste (o una parte del mismo), reúne determinadas características que permiten calificarlo como óptimo, idóneo o adecuado, de manera tal que en el desarrollo de este proceso, se pueda lograr una adaptación coherente entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y los recursos disponibles (entorno). Se trata, pues, de un constructo multidimensional que se puede descomponer en seis idoneidades parciales, sus componentes e indicadores (ver Figura 2.2). Estos criterios de idoneidad didáctica del EOS, de acuerdo con Breda, Font y Pino-Fan (2018) se definen como:

- *Idoneidad epistémica,* se refiere a que las matemáticas enseñadas sean unas buenas matemáticas. Para ello, además de tomar como referencia el currículum prescrito, se trata de tomar como referencia a las matemáticas institucionales que se han transpuesto en el currículum.
- *Idoneidad cognitiva,* expresa el grado en que los aprendizajes pretendidos/ implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos, así como la proximidad de los aprendizajes logrados a los pretendidos/implementados.
- *Idoneidad interaccional,* grado en que los modos de interacción permiten identificar y resolver conflictos de significado y favorecen la autonomía en el aprendizaje.

* *Idoneidad mediacional,* disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
* *Idoneidad emocional,* grado de implicación (interés, motivación) del alumnado en el proceso de estudio.
* *Idoneidad ecológica,* grado de adaptación del proceso de enseñanza y aprendizaje al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social, etc. (pp. 269-270)

Figura 2.2

Criterios de idoneidad didáctica



Nota: Extraída de Godino (2013, p. 116).

Los criterios de idoneidad de acuerdo con Godino et al. (2009), permiten responder a la pregunta: ¿sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas? Ahora bien, los CID deben ser entendidos como normas de corrección emanadas del discurso argumentativo de la comunidad científica, en aras de arribar a consensos sobre lo que se puede considerar como mejor, en dos momentos: 1) a priori, los CID son principios que orientan cómo se deben hacer las cosas, y 2) a posteriori, los CID sirven para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje efectivamente implementado (Breda, Font y Pino-Fan, 2018).

En consecuencia, los CID juegan un papel central en el diseño e implementación de las clases de los profesores de matemáticas, de manera que son útiles para justificar las decisiones y criterios generales que éstos toman en el diseño, implementación y rediseño del proceso de enseñanza y aprendizaje, tal como lo apreciamos en los siguientes capítulos con la aplicación de los CID a las clases de cálculo diferencial en ingeniería, desarrolladas por los docentes participantes de esta investigación.

2.3. Modelo de Conocimientos Didáctico–Matemáticos del profesor de matemáticas

En principio, con base en la problemática descrita en el primer capítulo, surge de manera natural la interrogante: ¿qué conocimientos necesarios deberían tener los profesores para la enseñanza de las matemáticas? Queda claro que el profesor debe conocer y tener la capacidad de resolver los problemas matemáticos a los que se enfrentan los estudiantes de un determinado nivel educativo, así como saber articularlos con el siguiente nivel. Ahora bien, todo este conocimiento no es suficiente para el diseño, implementación y evaluación de un proceso de enseñanza y aprendizaje significativo e idóneo, sino que además, el profesor de matemáticas debe poseer un conocimiento especializado del contenido matemático, de las transformaciones e interacciones que condicionan los procesos de instrucción.

De este modo, sobre la base de los desarrollos del EOS, de los aportes del modelo MKT y de otros modelos del conocimiento del profesor, a partir de resultados empíricos obtenidos en diversas investigaciones (Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan, Godino y Font, 2013; Pino-Fan, Godino, Font y Castro, 2012/2013; Pino-Fan et al., 2018), nace el modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (Modelo CDM) que caracteriza e interpreta los conocimientos del profesor de matemáticas en torno a tres dimensiones y seis facetas: matemática, didáctico-matemática y meta didáctico-matemática.

2.3.1. *Dimensión matemática*

A su vez se divide en conocimiento común del contenido y conocimiento ampliado del contenido. De un lado, se refiere al conocimiento que permite a los profesores resolver problemas o tareas matemáticas propias del nivel educativo en el que impartirán clase o aquel conocimiento que es compartido entre el profesor y los estudiantes (conocimiento común). Y por otro lado, vincular los objetos matemáticos de dicho nivel educativo con objetos matemáticos que se estudiarán en niveles posteriores (conocimiento ampliado). Este conocimiento proporciona al profesor las bases matemáticas necesarias para plantear a los estudiantes nuevos retos matemáticos y encaminarlos en las nociones matemáticas subsecuentes.

2.3.2. *Dimensión didáctico-matemática*

Para que el profesor organice, implemente y evalúe los procesos de enseñanza-aprendizaje, los conocimientos puramente matemáticos resultan insuficientes, por lo que se hace imprescindible los conocimientos acerca de la enseñanza de las matemáticas, los cuales son diferentes de aquellos que adquieren los alumnos. Esta dimensión agrupa seis facetas para el conocimiento didáctico-matemático. Estas son:

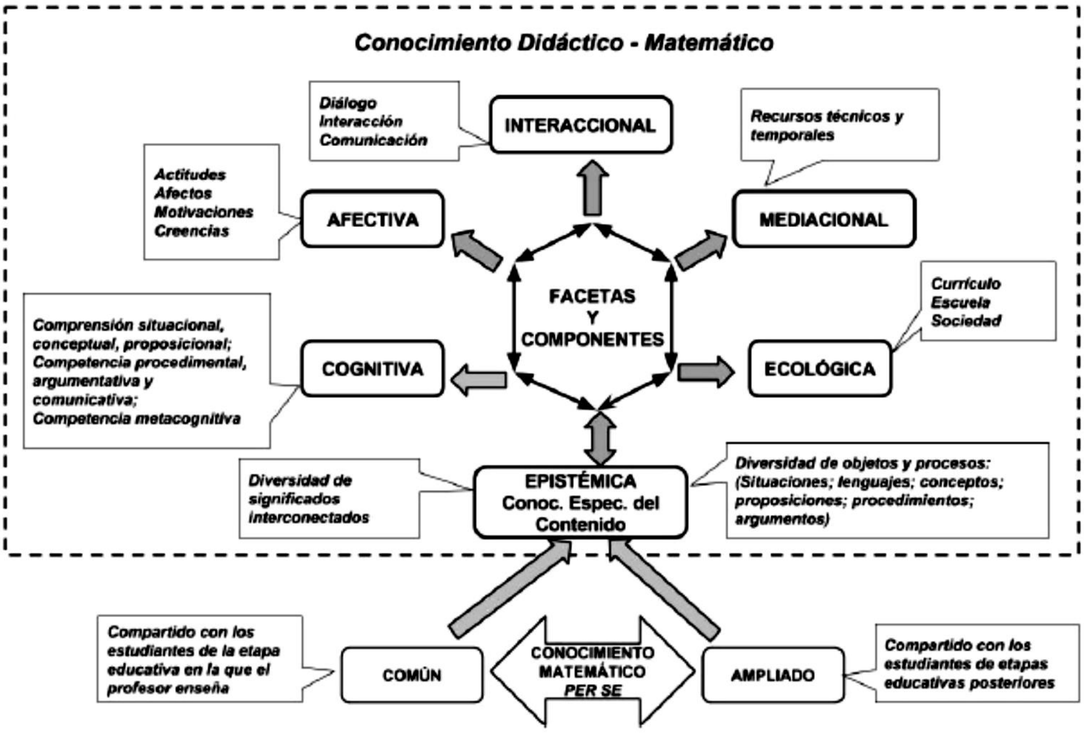
- *Faceta epistémica,* es la manera singular en que el profesor comprende y conoce las matemáticas, esto es, el conocimiento especializado del contenido matemático.
- *Faceta cognitiva,* relacionada con el conocimiento de cómo los estudiantes entienden y aprenden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.
- *Faceta interaccional,* referida al conocimiento sobre la organización de las tareas, las interacciones surgidas en aula y la solución de las dificultades de los alumnos.
- *Faceta mediacional,* es el conocimiento de los recursos materiales, tecnológicos y temporales adecuados para potenciar el aprendizaje de los alumnos.
- *Faceta afectiva,* referida al conocimiento de los aspectos emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes respecto de los objetos matemáticos.
- *Faceta ecológica,* son las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas y con aspectos curriculares, económicos, políticos, socio-profesionales que condicionan los procesos de instrucción matemática.

Estas facetas mostradas en la Figura 2.3 forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la medida en que los procesos de instrucción ponen en juego cierto contenido matemático, ya sea común (del nivel que se enseña) o ampliado (niveles superiores). Además, tal como se precisa en Godino et al. (2017, p. 97):

> Todas ellas se relacionan entre sí; por ejemplo, dada una tarea matemática determinada, el profesor debe ser capaz de movilizar la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y también debe poder resolver la tarea, utilizando distintos procedimientos, mostrar diversas justificaciones y explicaciones, o bien variarla para adaptarla a los conocimientos de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva).

Figura 2.3

Facetas y componentes del conocimiento del profesor



Nota: Extraída de Godino, Batanero, Font y Giacomone (2016, p. 292).

Consideramos que el modelo de conocimientos del profesor de matemáticas, mostrado en la Figura 2.3, no sólo genera otro modelo sobre los conocimientos del formador de profesores de matemáticas, sino que también, del capacitador de docentes en servicio. Este modelo aplicado al profesor, implica que los conocimientos se refieren a un proceso de instrucción matemática en el que dicho profesor está involucrado y participa activamente, en consecuencia, las facetas cognitiva y afectiva se refieren a estudiantes de matemáticas.

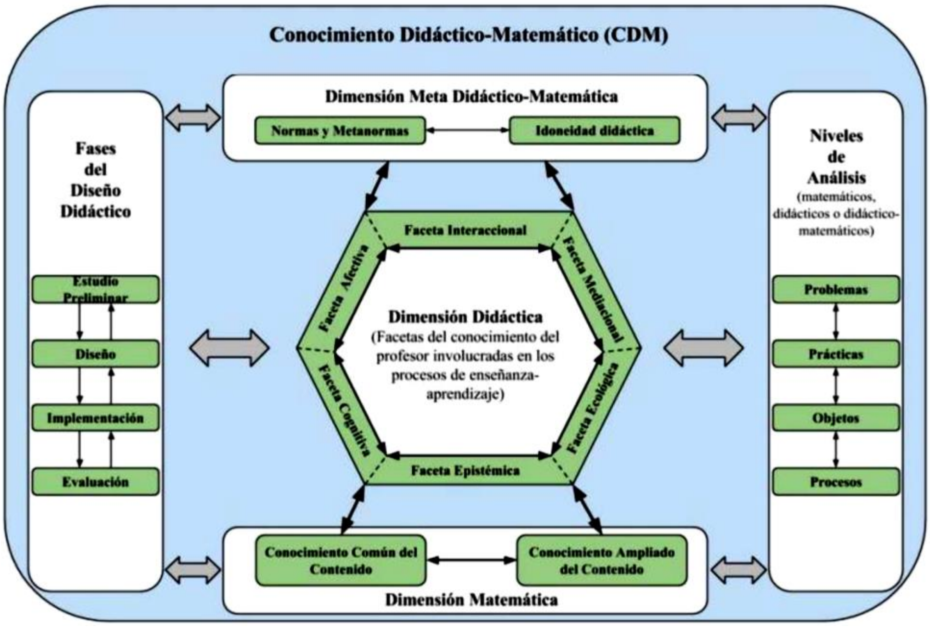
Ahora bien, en el caso del capacitador o formador de profesores, se trata de un proceso de instrucción donde los estudiantes son docentes de matemáticas en actividad, a los que se refieren las facetas afectiva (creencias del docente de matemáticas) y cognitiva (procesos cognitivos y metacognitivos del docente de matemáticas), que deben ser tenidas en cuenta por el formador. Del mismo modo, la preparación de profesores en formación y en servicio, debe tener en cuenta el conocimiento matemático *per-se*, que en el sentido del EOS, se trata del conocimiento común y ampliado, toda vez que los conocimientos didácticos involucran, al mismo tiempo, al contenido matemático.

2.3.3. Dimensión meta didáctico-matemática

Implica el conocimiento necesario que debe tener el profesor de matemáticas para que pueda reflexionar de manera sistemática sobre su propia práctica, así como también, pueda emitir juicios de valor sobre la práctica propia y ajena. En consecuencia, el profesor debe conocer los criterios de idoneidad didáctica, las normas y metanormas, las condiciones y restricciones del contexto (ver Figura 2.4).

Figura 2.4

Dimensiones y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático



Nota: Extraída de Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan (2018, p. 67).

En la siguiente sección, se presenta el modelo CCDM, en el que se articula la noción de competencia con las nociones de conocimiento didáctico-matemático desarrolladas en el modelo CDM del profesor de matemáticas.

2.4. Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas del profesor de matemáticas

En el marco del EOS, por una parte, se ha desarrollado un modelo teórico de conocimientos didáctico-matemáticos (CDM) del profesor de matemáticas (Godino, 2009; Pino-Fan, Assis & Castro, 2015; Pino-Fan, Godino & Font, 2018), donde una de las perspectivas de desarrollo de dicho modelo ha sido el encaje de la noción de conocimiento con la noción de competencia. Por otra parte, también, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias del profesor de matemáticas (Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Font, Breda & Sala, 2015; Giacomone, 2018; Giacomone, Godino y Beltrán-Pellicer, 2018; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Rubio, 2012; Seckel, 2016; Seckel y Font, 2015), las cuales han mostrado la necesidad de contar con un modelo de conocimientos del profesor que permita poder evaluar y desarrollar sus competencias.

Estas dos agendas de investigación han confluido generando el modelo llamado *Conocimientos y Competencias Didáctico–Matemáticas del profesor de matemáticas* (modelo CCDM), el cual está integrado por cinco competencias específicas vinculadas a los cinco niveles del EOS, y a sus respectivas herramientas conceptuales y metodológicas (Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Giacomone, 2018; Godino, 2017; Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017; Godino, Giacomone, Font y Pino-Fan, 2018). Estas sub-competencias son: competencia de análisis de significados globales; competencia de análisis ontosemiótico de las prácticas; competencia de gestión de configuraciones y trayectorias didácticas; competencia de análisis normativo; competencia de análisis de la idoneidad didáctica.

2.4.1. La noción de competencia y competencias clave

Se parte de la idea más o menos consensuada de que el profesor de matemáticas debe estar capacitado para abordar problemas didácticos en la enseñanza de esta materia, para lo cual necesita una serie de competencias específicas. Sobre esa base, aparecen dos cuestiones clave para desarrollar el modelo CCDM: ¿cómo se entiende la noción de competencia?, y ¿cuáles son las competencias clave que debe tener el profesor de matemáticas? De este modo, pues, la competencia en el modelo CCDM se entiende desde la perspectiva de la acción competente, considerándola como el conjunto de conocimientos, disposiciones, etc., que permite el desempeño eficaz en los contextos propios de la profesión de las acciones citadas en su formulación. Se trata de una potencialidad que se actualiza en el desempeño de acciones eficaces (competentes).

Ahora bien, esta formulación de la competencia, para ser operativa, necesita una caracterización de su desarrollo (definición, niveles de desarrollo e indicadores). De acuerdo con Seckel y Font (2015), se considera que el punto de partida para el desarrollo y/o evaluación de una competencia del profesor, es una tarea que produce la percepción de un problema profesional que se quiere resolver, para lo cual el profesor (o futuro profesor) moviliza habilidades, conocimientos y actitudes, para realizar una práctica que intente solucionar el problema. Por otra parte, es de esperar que dicha práctica se realice con más o menos éxito (logro), el cual se considera una evidencia de que la persona puede realizar prácticas similares a las que están descritas por alguno de los indicadores de la competencia, que a su vez se asocia a un cierto nivel de desarrollo de la competencia.

En el modelo CCDM se considera que las dos competencias clave del profesor de matemáticas son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. En esta investigación nos interesa, sobre todo, la segunda competencia.

2.4.2. Competencia de análisis e intervención didáctica

En las prácticas didácticas llevadas a cabo en la resolución de problemas de un proceso de enseñanza y aprendizaje, intervienen objetos matemáticos y didácticos específicos (conocimientos), por lo que el profesor de matemáticas debe conocer y estar capacitado para abordar adecuadamente dicha problemática. En ese sentido, el EOS aporta herramientas teóricas y metodológicas para desarrollar tales competencias en el profesor, desglosándolas en cinco sub-competencias (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), tal y como se aprecia en la Figura 2.5.

Además, de acuerdo con lo señalado por Font (2011) y en Breda, Pino-Fan and Font (2017), esta competencia tiene como núcleo fundamental: diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje propias y de otros, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora. Y sus sub-competencias son:

2.4.2.1. Competencia de análisis de significados globales. Se corresponde con la noción de sistema de prácticas matemáticas operativas y discursivas, enfocadas en la identificación de aquellas situaciones-problemas que brindan los significados parciales y las prácticas operativas y discursivas puestas en juego en su resolución. Esta competencia específica facilita al profesor el dar respuesta a cuestiones, tales como: ¿Cuáles son los significados de los objetos matemáticos implicados en el estudio del contenido pretendido?, y ¿cómo se articulan entre sí?

2.4.2.2. Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas. El profesor debe conocer y comprender la configuración de objetos y procesos matemáticos intervinientes y emergentes en las prácticas matemáticas, así como, tener la capacidad de usar dicha configuración de manera competente en los procesos de diseño didáctico, a efectos de comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los procesos de institucionalización, y evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes. Por lo tanto, el profesor deberá poder responder a cuestiones del tipo: ¿Cuáles son las configuraciones (epistémicas) de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados de los contenidos pretendidos?, y ¿cuáles son las configuraciones (cognitivas) de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de problemas?

2.4.2.3. Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas. El profesor de matemáticas debe conocer y comprender las diferentes configuraciones didácticas, personales y materiales, generadas en un proceso de estudio matemático, así como también, el efecto que éstas producen en el aprendizaje de los alumnos. En esa línea, el profesor debe estar capacitado para responder a la problemática de cómo enseñar un contenido matemático específico, en términos de las siguientes cuestiones: ¿Qué tipo de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias respecto del aprendizaje?, y ¿cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje?

2.4.2.4. Competencia de análisis normativo. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar la trama compleja de normas y meta-normas de distinta naturaleza y ser capaz de usarlas de manera competente en los procesos de estudio matemático, a fin de conducirlos hacia niveles idóneos u óptimos. En síntesis, el profesor deberá responder a cuestiones como: ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales?, ¿quién, cómo y cuándo se establecen las normas?, y ¿cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?

2.4.2.5. Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar la noción de idoneidad didáctica y su desglose en aspectos cognitivos, interaccionales, epistémicos, ecológicos, afectivos y mediacionales, la misma que ha sido propuesta como herramienta para la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva. En consecuencia, el profesor deberá desarrollar competencia para usar de manera pertinente dicha herramienta, y poder responder a: ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza-aprendizaje implementado sobre un tema matemático específico?, y ¿qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación de dicho proceso para incrementar su idoneidad didáctica en un próximo ciclo de experimentación?

Figura 2.5

Competencia de análisis e intervención didáctica y sus componentes

Nota: Extraída de Godino, Giacomone, Batanero y Font (2017, p. 103).

2.5. Planteamiento del problema de investigación

En el capítulo 1 se ha abordado y presentado la problemática que viene atravesando el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral, como parte constituyente del ciclo de ciencias básicas y de los planes curriculares de las diversas carreras de ingeniería en las universidades, ya sea en el contexto mundial, latinoamericano, así como en el contexto peruano. Como consecuencia de dicho tratamiento y luego de haber descrito la realidad problemática, se ha concluido que en el caso del Perú, son necesarias investigaciones que den cuenta y nos brinden información en la línea de los siguientes aspectos:

1) Qué está pasando (y por qué) en la enseñanza del cálculo diferencial en el ciclo básico de las carreras de ingeniería.
2) Cómo inferir los criterios, patrones o regularidades que orientan la práctica del profesor cuando imparte cálculo diferencial a estudiantes de ingeniería, con base en el análisis de sus prácticas docentes y de sus reflexiones sobre estas.
3) Cómo inferir los conocimientos y las competencias del profesor de matemáticas que diseña e implementa clases de cálculo diferencial en diversas carreras de ingeniería.
4) Sobre esta base, poder elaborar y brindar orientaciones para la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial en las carreras de ingeniería.

Por tanto, después de haber descrito la problemática de la enseñanza de las matemáticas, y del cálculo diferencial e integral, en particular, en el ciclo de ciencias básicas de las ingenierías en el contexto latinoamericano y en el peruano, se plantea el siguiente problema general de investigación.

2.5.1. Problema general

¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica del profesor en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería? (Para contestar esta pregunta se ha tomado el caso de la derivada y sus aplicaciones, como contexto de reflexión).

2.5.2. Problemas específicos

El problema general se ha desglosado en las siguientes preguntas específicas:

* PE_1: ¿Cuáles son las prácticas que realiza el profesor de matemáticas cuando explica la derivada en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería?
* PE_2: ¿Qué principios orientan las prácticas del profesor de matemáticas al explicar la derivada en un curso de ciencias básicas en ingeniería?
* PE_3: ¿Cuáles son los principios que orientan las prácticas del profesor, según lo que declaran los propios profesores, cuando explican la derivada en ciencias básicas en ingeniería?

2.6. Objetivos de la investigación

Con base en el problema general y específicos de investigación, se formulan los siguientes objetivos general y específicos:

2.6.1. Objetivo general

Determinar los criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería. En particular, cuando explican la derivada y sus aplicaciones.

2.6.2. Objetivos específicos

* OE_1: Describir las prácticas que realiza el profesor de matemáticas cuando explica la derivada en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería.
* OE_2: Inferir los principios que orientan las prácticas del profesor de matemáticas al explicar la derivada en un curso de ciencias básicas en ingeniería.
* OE_3: Determinar los principios que orientan la práctica didáctica del profesor de matemáticas cuando explica derivadas en un curso de ciencias básicas de ingeniería, según el profesor.

2.7. Metodología de la investigación

En esta sección dedicada a la metodología empleada en el presente estudio, se presenta una descripción general de la metodología de investigación; una descripción de la triangulación de datos o de fuentes; el diseño utilizado en el proceso de la investigación y sus respectivas fases; así como, los instrumentos usados para el recojo y análisis de la información, ya sean instrumentos diseñados, como las herramientas metodológicas proporcionadas por el EOS.

2.7.1. Descripción general de la metodología de investigación

La presente investigación corresponde a un estudio con enfoque interpretativo de corte cualitativo (Bisquerra, 2009), toda vez que, según lo planteado por Sandín (2003), la investigación cualitativa es: “una actividad sistemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también hacia el descubrimiento de un cuerpo organizado de conocimiento” (p. 123). En esta línea, en esta investigación entendemos la realidad de manera holística, ya que se observa el contexto en su forma natural, atendiendo sus diferentes ángulos y perspectivas, lo cual exige el uso de diversas técnicas interactivas, flexibles y abiertas que permitan captar la realidad en todas sus dimensiones posibles.

Del mismo modo, la investigación cualitativa tiene por finalidad sumergirse en el mundo subjetivo de las personas para comprender el significado de las situaciones en el contexto de estudio, por lo que es clave el papel que desempeña el investigador, quien tiene como función la interpretación, la comprensión o la transformación, a partir de las percepciones, creencias y significados de los protagonistas. De acuerdo con Eisner (1998, citado por Bisquerra, 2009), en el ámbito de la investigación educativa:

> Los métodos cualitativos reivindican la vida cotidiana y el contexto natural de los acontecimientos como escenario básico para comprenderlos, interfiriendo lo menos posible con ellos: se estudian las situaciones normales del aula de tal escuela, de tal grado, con determinados escolares y maestros, y dentro de un momento y espacio determinados. Se trata de estudios intensivos “naturalistas” en

pequeña escala, donde el investigador adopta una perspectiva holística y abarca los fenómenos en su conjunto, globalmente. (p. 278)

Asimismo, el enfoque interpretativo es la investigación cualitativa orientada a la comprensión del contexto de estudio y tiene como objetivo describir e interpretar la realidad educativa desde dentro. Por tanto, en la línea de nuestra investigación, este enfoque es considerado, pues el propósito no es explicar, controlar o predecir, ni se pretende transformar la realidad, más bien lo que se busca es comprender y describir la enseñanza de las matemáticas en el ciclo básico de las ingenierías, a través del análisis de las prácticas de los participantes de la investigación.

Dada esa intención de describir, comprender e interpretar la realidad, aquí se considera pertinente una investigación de corte cualitativo, esto significa estudiar las cosas en su entorno natural (en el sentido de Bisquerra, 2009), tratando de interpretar los fenómenos en términos de los significados que las personas les aportan. Además, se trata de construir un trabajo que favorezca un conocimiento cualificado, pertinente y significativo de la compleja y dinámica realidad de las clases de matemáticas (y del cálculo diferencial), más no, un conocimiento que excluya muchas de las dimensiones de dicha realidad.

Ahora bien, en la investigación cualitativa no interesa la representatividad y la generalización, por lo que una investigación puede ser valiosa si se realiza en un solo caso (estudio de caso), en una familia o en un grupo de pocas personas (Álvarez-Gayou, 2003). El método del estudio de casos se ha utilizado ampliamente para comprender en profundidad la realidad social y educativa, cuya particularidad es el estudio intensivo y profundo de un solo caso o de múltiples casos, según las unidades de análisis. Así por ejemplo, en educación puede considerarse como un caso: un aula, la forma de intervención del profesorado, un alumno, un programa de enseñanza, la sala de profesores, las creencias, prácticas e interacciones de una comunidad educativa, etc.

En esa línea, y desde el punto de vista de la extensión, nuestra investigación sigue la metodología de estudio de caso múltiple de diez docentes universitarios de matemáticas (ocho matemáticos y dos profesores de matemáticas) cuando imparten el tema de la derivada y sus aplicaciones, en los primeros ciclos académicos de diversas carreras de ingeniería, en universidades públicas y privadas de Lima, Perú.

Con respecto al registro de la información se utilizan técnicas de recogida y análisis de datos propios de una investigación cualitativa, tales como, la observación no participante, la entrevista semiestructurada, el análisis documental, y estrategias de análisis de datos proporcionadas por el EOS.

2.7.2. Triangulación de fuentes o de datos

En la investigación cualitativa, los investigadores participan de la investigación, filtran la realidad de acuerdo a su criterio, la interpretan y le dan sentido, así como realizan un análisis profundo del comportamiento y significado de la interacción social que ocurre en el aula de clases entre el docente y los estudiantes. Como consecuencia de este proceso, los resultados de la investigación pueden ser subjetivos. Para eludir dicha subjetividad, los investigadores utilizan la "triangulación" como estrategia fundamental para la recogida de datos y análisis de la información (Bisquerra, 2009). Es decir, se obtienen datos de la realidad desde distintas perspectivas (del investigador y de los participantes), y a través de diferentes fuentes de información, tales como, documentos oficiales, instrumentos, personas o la combinación de todas estas.

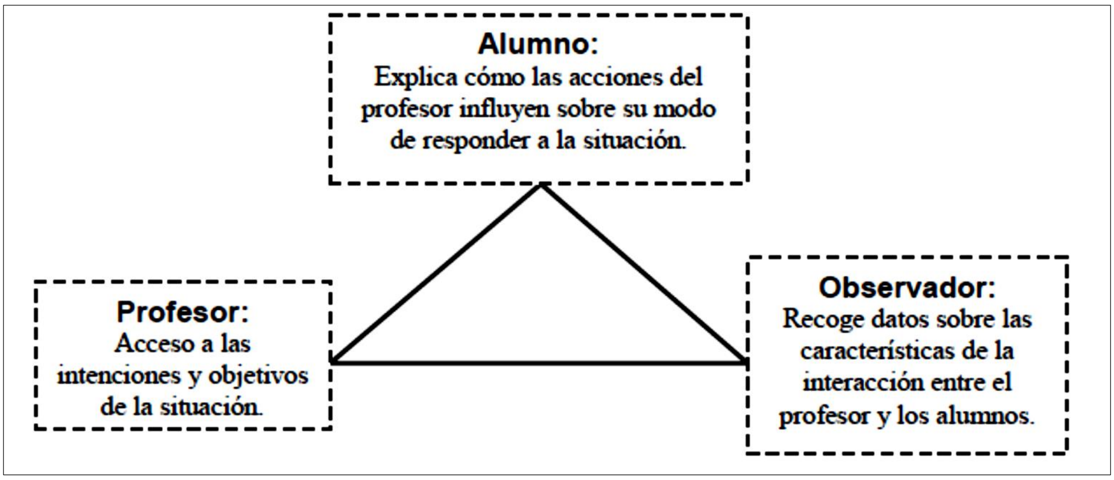
Por otra parte, la triangulación de datos en las investigaciones cualitativas, en propias palabras de Elliott (2000) implica:

> La obtención de relatos acerca de una situación de enseñanza desde tres puntos de vista bastante distintos: los correspondientes al profesor, a los alumnos y a un observador participante (Figura 2.6). La determinación de quien obtiene la información, de cómo se presentan los relatos y de quién la compara, depende considerablemente del contexto. El proceso de recabar los relatos desde tres puntos de vista diferentes tiene una justificación epistemológica. Cada vértice del triángulo se sitúa en una posición epistemológica singular con respecto al acceso a los datos relevantes sobre una determinada situación de enseñanza. La persona ubicada en la mejor posición para tener acceso a las intenciones y objetivos de la situación, vía introspección, es el profesor. Los alumnos ocupan la mejor posición para explicar cómo las acciones del profesor influyen sobre su propio modo de responder a la situación. El observador participante se encuentra en la mejor participación para recoger datos sobre las características de la interacción entre el profesor y los alumnos. Al compartir su relato con los precedentes de los dos otros

puntos de vista, la persona que ocupa uno de los vértices del triángulo tiene la oportunidad de comprobar y revisar, quizá, su propia perspectiva al contar con datos más completos. (p. 150)

Figura 2.6

La triangulación en una investigación cualitativa, según Elliott



Nota: Extraída de Porres-Tomé (2011, p. 125).

En esta investigación se ha utilizado el método de *triangulación de fuentes* para la recogida de los datos de campo, así como para el posterior análisis de la información, siendo los observadores, en el sentido de lo señalado por Elliott (2000), los investigadores integrados por el director y el autor de la tesis; el profesor, cada uno de los docentes de cálculo diferencial para ingeniería participantes de la investigación; y el alumno, los estudiantes de las diversas carreras de ingeniería cuyas clases fueron videograbadas, de forma indirecta mediante sus producciones e intervenciones en clase (es decir, se entrevistó a los docentes, pero no a los estudiantes). Es preciso señalar también, que el observador estuvo presente en cada aula de ingeniería para observar (sin intervenir en el proceso) cada una de las clases de derivadas impartidas por los docentes, así como para registrar en material fílmico las interacciones didácticas ocurridas en el aula entre el docente y los estudiantes.

En la triangulación de datos de este estudio, se toman como fuentes de información las siguientes: las clases videograbadas de derivadas (entre dos o tres clases según docente), los documentos curriculares (sílabos de la asignatura y planes de clases), material académico de la asignatura proporcionado por cada docente (presentaciones en power point, separatas del tema, prácticas calificadas de desarrollo, exámenes parcial y final, talleres de aula, etc.), la entrevista semiestructurada a cada docente (registrada en videograbación y su respectiva transcripción), y las radiografías de las clases de cada docente. En consecuencia, se realiza la triangulación entre lo que dice el profesor en la entrevista y lo que se ha observado que hace realmente en el aula de clases, para cada uno de los docentes participantes, y teniendo en cuenta las fuentes antes mencionadas.

2.7.3. Diseño de la investigación

Existen diversos modelos que ilustran cómo planificar y estructurar un diseño de investigación cualitativa, así, por ejemplo, una de las propuestas de diseño para investigaciones de corte cualitativo es la que presenta Latorre et al. (1996, citado por Bisquerra, 2009), y consta de seis fases con diversas actividades:

1) *Fase exploratoria y de reflexión*: identificación del problema, cuestiones de investigación, revisión documental, y perspectiva teórica.
2) *Fase de planificación*: selección del escenario de investigación, selección de la estrategia de investigación, redefinir el problema y cuestiones de investigación.
3) *Fase de entrada en el escenario*: negociación del acceso, selección de los participantes, papeles del investigador, y muestreo intencional.
4) *Fase de recogida y de análisis de la información*: estrategias de recogida de información, técnicas de análisis de la información, rigor del análisis.
5) *Fase de retirada del escenario*: finalización de recogida de información, negociación de la retirada, análisis intensivo de la información.
6) *Fase de elaboración del informe*: tipo de informe, elaboración del informe.
   (pp. 285-286).

En este estudio se plantea un diseño de investigación estructurado en diez fases, el mismo que está en la línea del modelo de diseño propuesto por Latorre et al. (1996) que se acaba de describir, de acuerdo a nuestra realidad investigativa, a los agentes participantes del estudio, a las actividades desarrolladas, entre otras características. Por lo tanto, el método para reconstruir las consideraciones implícitas y tácitas en la selección, secuenciación y ejecución de tareas del profesor de cada estudio de caso consta de las siguientes fases (ver Figura 2.7):

Fase 1: Selección de los participantes. Se contactó con un grupo de diez docentes de amplia experiencia en la enseñanza de las matemáticas en el ciclo básico de ingeniería, siendo ocho de ellos graduados en matemáticas y dos graduados en educación con mención en matemática. Se trata de un grupo de profesores que imparten clases de cálculo diferencial e integral en facultades de ingeniería de diversas universidades públicas y privadas en Lima, Perú. Después de presentarles los objetivos de la investigación, se les solicitó su participación en la misma, y se les pidió su consentimiento para ingresar en sus aulas y registrar en videograbaciones el desarrollo de sus clases (entre dos y tres según el profesor) sobre la derivada y sus aplicaciones; así como, para que nos facilitaran su material académico de trabajo y, también, su disposición a participar en una entrevista semiestructurada.

Asimismo, se hicieron las gestiones necesarias con las autoridades académicas de la universidad donde labora cada docente, y se logró obtener la autorización respectiva para el ingreso en las aulas de ingeniería y poder realizar las videograbaciones de las clases de derivadas y sus aplicaciones de cada docente.

Fase 2: Recopilación de documentos curriculares, materiales elaborados por el profesor para su implementación en el aula, etc. Se solicitó el material académico de cálculo diferencial y se logró que todos los docentes participantes de la investigación nos proporcionaran, para su análisis, los documentos curriculares como el sílabo de la asignatura, los cronogramas del ciclo académico, los planes de clase, las presentaciones usadas en el tema de derivadas, las separatas de ejercicios propuestos y desarrollados, material de consulta del tema matemático para los estudiantes, las pruebas de desarrollo y prácticas calificadas, así como el material de los talleres para trabajo de equipo en aula.

Fase 3: Grabación de las clases. Antes del inicio de la clase seleccionada y previa coordinación con cada docente, el investigador estuvo en el aula para instalar los equipos de filmación, por lo que se videograbaron las clases impartidas por estos profesores (entre dos y tres clases para siete profesores, y con tres de ellos no fue posible realizar la grabación por razones de cruce de horarios, entre otras) sobre la derivada y sus aplicaciones para estudiantes de carreras de ingeniería. Las sesiones de clase de cálculo diferencial tienen una duración promedio de 100 minutos, las mismas que fueron a su vez observadas por el investigador, sin llegar a intervenir en su desarrollo.

Fase 4: Elaboración del instrumento para la realización de la entrevista. En esta fase y con base a: 1) los criterios de idoneidad didáctica (referente teórico de esta investigación), y 2) una primera observación de las clases videograbadas, se diseñó un cuestionario que sirviese como base para una entrevista semiestructurada; con dicho cuestionario se realizó una entrevista piloto a uno de los 10 profesores. Luego, con esa información, este primer cuestionario se revisó teniendo en cuenta: a) las dificultades de comprensión y las redundancias de algunas preguntas, b) la opinión de un experto en el uso de las herramientas del EOS para la investigación de los criterios de idoneidad didáctica, y los conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas.

De esta manera, se reformuló y elaboró un segundo cuestionario de 46 preguntas en total (ver sección 2.7), con tres preguntas iniciales de tipo general y 43 formuladas sobre la base de los seis criterios de idoneidad didáctica (epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional y ecológico), sus componentes y descriptores. En seguida, este cuestionario se aplicó a los 10 profesores del grupo de investigación con pequeñas variaciones derivadas de la observación de las clases impartidas por cada uno de ellos (por ejemplo, con relación al uso de algún recurso informático, se variaba la pregunta según el docente lo hubiese usado, o no).

Fase 5: Radiografía de las clases e inferencia de criterios que orientan la práctica del profesor. Para cada uno de los profesores, en primer lugar, se realizó un análisis experto de las clases videograbadas con los cuatro primeros niveles propuestos en el modelo de análisis didáctico basado en los constructos del EOS, tal como se hace en Breda, Hummes, da Silva y Sánchez (2021), y en Pochulu y Font (2011); para de esa manera poder determinar las prácticas, los objetos y procesos matemáticos, las funciones del profesor y del alumno, las configuraciones didácticas, los conflictos semióticos, patrones, y las normas intervinientes y emergentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada y sus aplicaciones, en las aulas de ingeniería. (ver la radiografía de la clase en la sección 2.7.4).

En segundo lugar, con la información obtenida, se determinaron los criterios que sigue cada uno de los profesores - cuyas clases fueron videograbadas - en el diseño e implementación de sus sesiones de clase utilizando como categorías, a priori, los indicadores y componentes de los criterios de idoneidad didáctica, – sin llegar a realizar la valoración experta de la idoneidad didáctica (quinto nivel del modelo de análisis didáctico basado en constructos del EOS), – para que sirvieran como referencia para su triangulación con los criterios que cada profesor dice seguir.

Fase 6: Selección del estudio de caso. En esta investigación se seleccionó como estudio de caso a cada uno de los siete profesores de los cuales se tiene sus clases videograbadas, así como también, se realizó un estudio de caso múltiple con todo el grupo de docentes. En estas clases (entre dos y tres según docente) cada profesor explicó el tema de las derivadas y sus aplicaciones; es decir, explicó la noción de derivada como pendiente de la recta tangente y como límite de las tasas medias de variación, después aplicó la definición de derivada a algunas funciones y para encontrar la derivada de la suma y producto de dos funciones, luego presentó la lista completa de las reglas básicas de derivación, que después se mecanizaron mediante su aplicación en la resolución de diferentes ejercicios.

Por último, el docente presentó los criterios de la primera y segunda derivada y su aplicación para determinar intervalos de crecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad (hacia arriba y hacia abajo) y puntos de inflexión (ver los temas específicos de las clases en el anexo del artículo científico 3). A cada uno de los profesores participantes se les ha etiquetado con las primeras letras mayúsculas del alfabeto y se les denomina docente A, B, C, D, E, F, G, H, I, J; no obstante, de los que se hace el estudio de caso, es de los siete primeros docentes.

Fase 7: Entrevista al profesor para que explique cuáles son, según él, los criterios que orientan su práctica docente. En esta fase se realizó la entrevista semiestructurada a cada uno de los diez profesores de cálculo diferencial participantes del estudio, la cual fue videograbada con la finalidad de determinar los criterios que, según cada docente, orientaban su práctica pedagógica. Cada entrevista tiene una duración en promedio de 1 hora y 45 minutos, y consta de dos partes claramente diferenciadas. En la primera parte, se formularon tres preguntas generales (la primera sobre la formación profesional del docente, la segunda sobre cuáles son los criterios que orientan su práctica pedagógica, y la tercera sobre el modelo de profesor con el que se identifica). En la segunda parte, se formularon preguntas más específicas relacionadas con los componentes y descriptores de los criterios de idoneidad didáctica (ver el cuestionario en la sección 2.7.4).

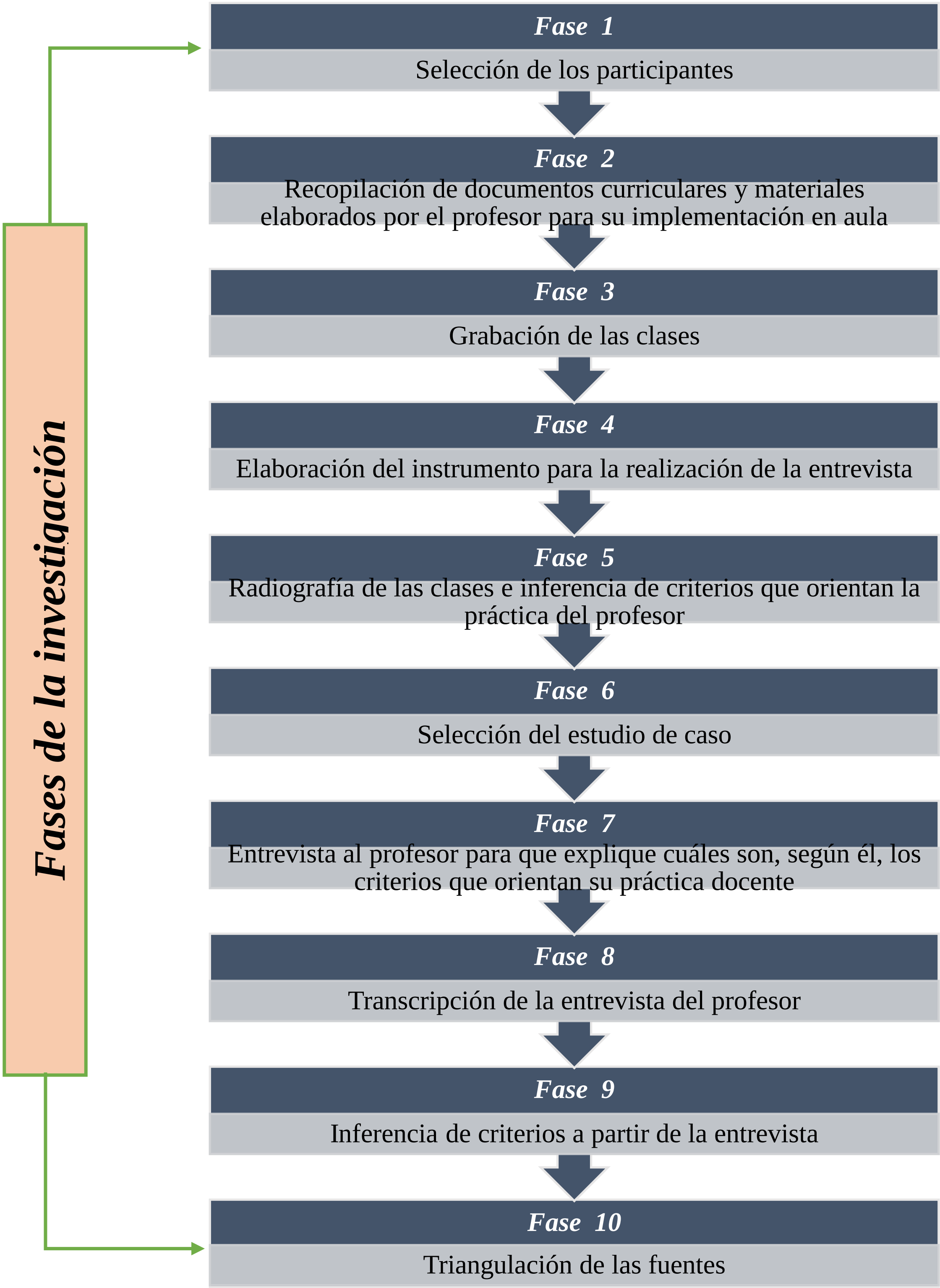
Fase 8: Transcripción de la entrevista del profesor. En esta fase se realizó la transcripción literal de la entrevista semiestructurada hecha a cada uno de los diez docentes participantes del estudio, a partir del material videograbado.

Fase 9: Inferencia de criterios a partir de la entrevista. En esta parte, se hizo el análisis del contenido de la entrevista para determinar los criterios que según el profesor orientan su práctica docente, de manera similar a como se hace en Breda (2020) y en Seckel, Breda, Sánchez y Font (2019).

Fase 10: Triangulación de las fuentes. En esta fase se realizó la triangulación de todas las fuentes obtenidas en el análisis y procesamiento de la información (sobre todo, entre los resultados de la fase 5 sobre clases observadas y las respuestas a la entrevista docente), con la finalidad de determinar los resultados de la investigación. Esta estrategia de triangulación de fuentes, se aplicó a cada estudio de caso, como también al estudio de caso múltiple, en el sentido propuesto por Bisquerra (2009).

Figura 2.7

Diseño metodológico del proceso de investigación



Nota: Fuente propia de la investigación.

2.7.4. Instrumentos y herramientas utilizados en la investigación

Los instrumentos aplicados para el recojo y análisis de datos, tanto los diseñados para este propósito como aquellos tomados del Enfoque Ontosemiótico, son los que se detallan a continuación:

2.7.4.1. Criterios, componentes e indicadores de idoneidad didáctica

Como categoría a priori para inferir pautas que orientan la práctica de los profesores se tuvieron en cuenta los criterios de idoneidad, sus componentes e indicadores:

Tabla 2.1

Criterios de idoneidad didáctica, sus componentes y descriptores

CI	Componentes	Descriptores
Idoneidad epistémica	(IE1) Errores	◆ No se observan prácticas que se consideren incorrectas desde el punto de vista matemático
	(IE2) Ambigüedades	◆ No se observan ambigüedades que puedan llevar a la confusión a los alumnos: definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen; adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen, uso controlado de metáforas, etc.
	(IE3) Riqueza de procesos	◆ La secuencia de tareas contempla la realización de procesos relevantes en la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, conexiones, etc.)
	(IE4) Representativi_ dad de la complejidad de la noción a enseñar	◆ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar contemplada en el currículo. ◆ Los significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.) son una muestra representativa de la complejidad de la noción matemática que se quiere enseñar. ◆ Para uno o varios significados parciales, muestra representativa de problemas. ◆ Para uno o varios significados parciales, uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico…), tratamientos y conversiones entre los mismos

CI	Componentes	Descriptores
Idoneidad cognitiva	(IC1) Conocimientos previos (Componentes similares a la I. epistémica)	◆ Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se han estudiado anteriormente o el profesor planifica su estudio). ◆ Los significados pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
	(IC2) Adaptación curricular a las diferencias	◆ Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo
	(IC3) Aprendizaje	◆ Los diversos modos de evaluación muestran la apropiación de los conocimientos / competencias pretendidas o implementadas
	(IC4) Alta demanda cognitiva	◆ Se activan procesos cognitivos relevantes (generalización, conexiones intra-matemáticas, cambios de representación, conjeturas, etc.) ◆ Promueve procesos meta-cognitivos
Idoneidad Interaccional	(II1) Interacción docente-discente	◆ El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien organizada, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos clave del tema, etc.) ◆ Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) ◆ Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento ◆ Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. ◆ Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión
	(II2) Interacción entre discentes	◆ Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes ◆ Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión
	(II3) Autonomía	◆ Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación)
	(II4) Evaluación formativa	◆ Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos
Idoneidad mediacional	(IM1) Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, computadoras)	◆ Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. ◆ Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones
	(IM2) Número de estudiantes, horario y	◆ El número y la distribución de los alumnos permiten llevar a cabo la enseñanza pretendida. ◆ El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora).

CI	Componentes	Descriptores
	condiciones del aula	◆ El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido
	(IM3) Tiempo (de enseñanza y aprendizaje colectivo/ tutoría)	◆ Adecuación de los significados pretendidos /implementados al tiempo disponible (presencial y no presencial). ◆ Inversión del tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema. ◆ Inversión del tiempo en los contenidos que presentan más dificultad
Idoneidad emocional	(IA1) Intereses y necesidades	◆ Selección de tareas de interés para los alumnos. ◆ Proposición de situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional
	(IA2) Actitudes	◆ Promoción de la implicación en las actividades, la perseverancia, responsabilidad, etc. ◆ Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice
	(IA3) Emociones	◆ Promoción de la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. ◆ Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas
Idoneidad ecológica	(IEC1)Adaptación al currículo	◆ Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares
	(IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares	◆ Los contenidos se relacionan con otros contenidos matemáticos (conexión de matemáticas avanzadas con las matemáticas del currículo y conexión entre diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo) o bien con contenidos de otras disciplinares (contexto extramatemático bien con contenidos de otras asignaturas de la etapa educativa)
	(IEC3) Utilidad sociolaboral	◆ Los contenidos son útiles para la inserción socio-laboral
	(IEC4) Innovación didáctica	◆ Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva (introducción de nuevos contenidos, recursos tecnológicos, formas de evaluación, organización del aula, etc.)

Nota: Elaborada con base en Font (2015) y Morales-López y Font (2019).

2.7.4.2. Modelo de configuración didáctica o radiografía de una clase

El EOS (Font, Planas y Godino, 2010), considera cinco tipos de análisis sobre los procesos de instrucción: 1) identificación de prácticas matemáticas; 2) elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; 4) identificación del sistema de normas y metanormas; y 5) valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

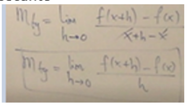
El primer tipo de análisis explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción matemático. El segundo se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. El tercer tipo de análisis didáctico está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas. El cuarto tipo de análisis se focaliza en las normas que regulan el proceso de instrucción. El quinto tipo se basa en los cuatro análisis previos y está orientado a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

En esta investigación se ha realizado el análisis de la trayectoria didáctica de las clases videograbadas mediante la aplicación de los primeros cuatro tipos de análisis acabados de comentar a cada configuración didáctica en la que se ha segmentado la trayectoria didáctica. A continuación, sigue un ejemplo de este tipo de análisis de la primera clase del profesor A. Se trata de un análisis similar al realizado en Breda, Hummes, da Silva y Sánchez (2021) y en Pochulu y Font (2011), y en Rodríguez-Nieto, Font, Borji and Rodríguez-Vásquez (2021).

Figura 2.8

Esquema de configuración didáctica de una clase de matemáticas

TIEMPO (min)	LÍNEAS DE TRANSCRIPCIÓN (párrafo)	PRÁCTICAS MATEMÁTICAS	OBJETOS PRIMARIOS	PROCESO PRINCIPAL	FUNCIONES DEL PROFESOR	FUNCIONES DEL ALUMNO	TIPO DE CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA	NORMAS	CONFLICTOS SEMIÓTICOS
CD1									
CD2	No se ha grabado (durante los 5 primeros minutos no funcionó la grabación)	P2: Representa gráficamente una recta secante a la gráfica de la función que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) P3: Cálculo simbólico de la pendiente de la recta secante P4: Tratamiento de representaciones (transforma la expresión de la pendiente de la recta secante)	R4: Representación gráfica de la secante  R5: representación simbólica de la pendiente de la recta secante a la gráfica de la función que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) $m_{sec} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Pr1: Cálculo de la pendiente Pr2: Transposición de términos en una igualdad R6: $\frac{f(a+h)-f(a)}{}$	Representación Algoritmización Tratamiento	Explicar	Escuchar y entender la explicación del profesor	Magistral		

5m 2”	L1: Nos aprovechamos de la secante para obtener la pendiente de la recta tangente. ¿De acuerdo?	P5: Aproximación de la recta secante a la recta tangente	R7: Simula con la mano el proceso de aproximación D1: Interpretación de la recta tangente como límite de las rectas secantes	Significación					Posible confusión entre la derivada en un punto y la función derivada
5m 10”	L2: Entonces bueno, copien esto, si lo van a copiar, pero de velocidad porque vamos a trabajar con esta formulita que está aquí abajo	P6: Expresa simbólicamente la pendiente de la recta tangente en x= a como límite de las pendientes de las rectas secantes	D1: Interpretación de la pendiente de la recta tangente como límite de las pendientes de las rectas secantes						
5m 20”	L3: Vamos a ver cómo se digiere esto que está ahí (señala la fórmula R8). Vamos a tratar de colocar en el piso, en el suelo lo que significa esto.		R8: expresión simbólica de la pendiente de la tangente como limite de las pendientes de la secante 						
5m 30”	L4: Ella es la derivada de la función en cualquier punto de la gráfica; ojo, y esto es importante hacerlo saber, ella es la derivada de la función en cualquier punto de la curva (mientras hace este comentario escribe en R8 “Derivada de f(x)”	P7: Representa gráficamente una recta tangente a la gráfica de la función f(x) en un punto de abscisa x	R9: 	Significación					
5m 38”	L5: Yo lo tomé acá (en R9 señala el punto de abscisa x representado en la gráfica) pero puede haber sido en cualquier punto de esa curva (Hace el gesto de seguir la gráfica con el dedo)	P8: Representar dos puntos en la gráfica muy próximos: (x, f(x)) y (x +h, f (x +h))							

Nota: Fuente propia de la investigación.

2.7.4.3. Cuestionario para la entrevista semiestructurada a los docentes

Este instrumento se elaboró con base en los criterios de idoneidad didáctica, sus componentes y descriptores, ya explicados en la Tabla 2.1, de manera tal que las tres primeras preguntas son preguntas de tipo general, en tanto que a partir de la pregunta 4, éstas se corresponden con los seis CID: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional y ecológico. Además, el contenido matemático tenido en cuenta para la elaboración de las preguntas es la derivada y sus aplicaciones, en la enseñanza del cálculo diferencial para estudiantes de carreras de ingeniería. Se debe precisar también, que por la naturaleza de la investigación, a los docentes entrevistados no se les explicó los criterios de idoneidad didáctica.

Instrucciones:

Estimado(a) docente, a continuación se presenta un listado de preguntas directamente relacionadas con el diseño e implementación de sus sesiones de clase en aula, sobre la derivada y sus aplicaciones en la ingeniería, se solicita responda a cada una de ellas reflexionando sobre su quehacer docente-matemático.

Preguntas generales

1) ¿Podría explicar cuál ha sido su formación inicial y su trayectoria profesional? (licenciatura, grados académicos, experiencia como profesor, formación continua, entre otros).
2) ¿Podría explicar cuáles son los criterios principales que tiene en cuenta al diseñar e implementar sus clases en esta facultad de ingeniería?
3) ¿Qué modelo de profesor(a) considera que es usted?, (desde la perspectiva didáctica: magistral, dialógico, constructivista; desde el tipo de matemáticas que explica: formalista, mecanicista, matemáticas realistas, etc.).

Preguntas específicas

4) ¿Procura que sus clases de derivadas y sus aplicaciones sean rigurosas?
   a) De ser así, ¿considera usted que no comete errores matemáticos cuando implementa sus sesiones de clase de derivadas?
   b) Si la respuesta es negativa, ¿podría dar algunos ejemplos de dichos errores?
5) En algún momento en su clase de derivadas hace explicaciones que pretenden ser intuitivas. ¿Podría precisar qué papel asigna a este tipo de explicaciones en sus clases? (algún comentario puntual, procura hacerlo siempre que lo considera necesario, considera que puede afectar al rigor de sus clases hacerlo, etc.).
6) Con respecto a las reglas de derivación, ¿considera que conozcan las fórmulas y las sepan aplicar es suficiente, es decir, dar la lista de fórmulas de derivación y practicarlas, o considera necesaria las demostración de las fórmulas en clase? Si es así, ¿por qué?
   a) Más en general, ¿considera importante trabajar la demostración con los alumnos, o plantea los temas matemáticos de una manera más instrumental?
7) En los vídeos que se han observado se puede decir que se desarrollan, sobre todo, ejercicios de aplicación, y que hay poco espacio para la modelización y la resolución de problemas extra matemáticos. ¿Por qué?
   a) En el desarrollo de sus sesiones de clase de la derivada, ¿cuáles de los procesos relevantes de la actividad matemática (modelización, argumentación, resolución de problemas, etc.) considera que trabaja, y cuáles no?
   b) En el caso de los procesos que no trabaja, ¿podría decir por qué?

8) En su sesión de clase, ¿define la derivada como velocidad instantánea y como pendiente de recta tangente?

   a) ¿Considera importante presentar diferentes significados de la derivada, o bien, considera que no es necesario para la enseñanza de este tópico?

9) ¿Incluye una variedad de problemas de derivadas en los que los alumnos pueden aplicar las definiciones, argumentos, procedimientos, propiedades, etc., que ha explicado? (por ejemplo, propone problemas donde el cálculo se haga por límites y otros por reglas de derivación, o bien todos son por reglas de derivación; propone problemas en los que se usa el criterio de la primera derivada, y en otros, el criterio de la segunda derivada, o bien en casi todos usan el criterio de la segunda derivada).

10) En sus sesiones de clase de la derivada, ¿hay problemas extramatemáticos y otros intramatemáticos, o bien, casi todos son intramatemáticos?

   a) Si hay problemas extramatematicos, ¿tienen una variedad de contextos, o no? (por ejemplo, todos son de Física).

   b) ¿Considera que presentar una variedad de problemas es importante para desarrollar la competencia matemática de los alumnos, o bien, no es indispensable para conseguirlo?

11) En el desarrollo de sus sesiones de clase, ¿hace uso de diferentes modos de expresión y representación de la derivada tales como verbal, gráfico, simbólico, gestual, y la traducción entre ellos?

12) ¿Considera importante enseñar diferentes formas de representación de la derivada? Y si es así, ¿por qué?

13) Los contenidos matemáticos que explica (definiciones, propiedades, argumentos, situaciones-problema) en las sesiones de clase de derivadas y la forma de hacerlo, ¿están condicionados por el sílabo de las asignaturas de estudios generales de las carreras de ingeniería? Dicho de otra manera, ¿el sílabo determina los contenidos que imparte y la forma de enseñarlos?

   a) ¿Considera que los sílabos con los que trabaja se deberían modificar? Si es así, ¿en qué dirección?

14) Cuando planifica e implementa sus clases, ¿tiene en cuenta los conocimientos previos de los alumnos?

15) Si considera que los estudiantes de ingeniería no tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio de la derivada y sus aplicaciones, ¿cómo actúa usted?

16) Cuando planifica e implementa sus clases, ¿tiene en cuenta que los contenidos que enseña (y la profundidad con la que lo hace) se hallen a cierta distancia de lo que ya saben, tal que permiten ser aprendidos?

    Dicho de otra manera, la distancia entre lo que ya saben los estudiantes y lo que va a enseñar ¿es alcanzable?

17) ¿Tiene en cuenta la diversidad de los alumnos? Por ejemplo, incluye actividades matemáticas de ampliación y refuerzo en sus sesiones de clase de la derivada o en sus aplicaciones.

18) ¿Cómo sabe usted que sus alumnos han aprendido los contenidos enseñados?

19) ¿Cuál es el porcentaje aproximado de alumnos reprobados que le lleva a usted a considerar que el proceso de enseñanza no ha funcionado bien?

20) ¿Considera que los instrumentos de evaluación que usa le informan de las dificultades de aprendizaje de los alumnos, y le permiten tener evidencias de sus aprendizajes?

21) Cuando constata que sus alumnos no le siguen (no han aprendido) ¿qué decisiones toma?

22) ¿Considera usted que las tareas que propone en su clase de derivadas activan en los estudiantes procesos cognitivos relevantes tales como: generalización, argumentación, cambios de representación, conexiones intra-matemáticas, conjeturización, procesos metacognitivos, etc.?

23) ¿Considera que hace una presentación adecuada de la definición de derivada, de las reglas de derivación y de sus aplicaciones? Es decir, pone el énfasis en conceptos clave, la presentación es clara y ordenada, etc.

24) En el desarrollo de las sesiones de clase la interacción que tiene con sus alumnos ¿le permite reconocer las dudas que presentan sobre la derivada? (por el tipo de pregunta que hacen, por sus expresiones faciales, silencios, etc.).

    a) Cuando reconoce estas dudas, dificultades o falta de aprendizaje, ¿qué tipo de interacción realiza para resolverlas?

25) ¿Hace uso de diferentes recursos argumentativos que le permitan captar la atención de los estudiantes e implicarlos en la sesión de clase de derivadas? (uso de

metáforas, método socrático, explicación magistral, contar historias de personajes históricos, etc.).

26) ¿Considera que facilita la inclusión, y no la exclusión, de los estudiantes en la dinámica de la clase de derivadas y sus aplicaciones?

27) En la ejecución de sus sesiones de clase de derivadas, ¿favorece el diálogo y la comunicación entre los estudiantes?

28) En el desarrollo de sus sesiones de clase de derivadas, ¿asigna a los estudiantes momentos para la exploración, formulación y validación de sus conjeturas?

29) En el desarrollo de sus sesiones de clase de derivadas, ¿hay momentos en los que fomenta la autonomía en los alumnos?

30) ¿Considera que la interacción que tiene con sus alumnos le permite observar en éstos el aprendizaje de la derivada y sus diversas aplicaciones?

31) ¿Utiliza algún software matemático que le permita facilitar el aprendizaje de derivadas a los alumnos? Si es así, ¿qué ventajas le encuentra?

32) ¿Usa algún tipo de material concreto, modelo, etc., para enseñar el tema de derivadas?

33) ¿Cree que el número de estudiantes en aula le permite ejecutar la enseñanza de la derivada que pretende?

34) ¿Considera que el aula y la distribución de los estudiantes en ella es adecuada para el desarrollo del proceso de instrucción de la derivada, que pretende?

35) ¿Cómo realiza la distribución de contenidos y tiempos entre la fase presencial y la virtual?

36) ¿Invierte el tiempo disponible para la clase en los contenidos más importantes de la derivada?

    a) ¿Y en los contenidos que presentan mayor dificultad para los estudiantes?

37) ¿Selecciona las tareas de la derivada y sus aplicaciones de manera que sean de interés para los estudiantes?

38) En sus sesiones de clase, ¿propone situaciones que permitan valorar la utilidad de la derivada en la vida cotidiana y profesional de los estudiantes de ingeniería?

39) ¿Qué hace para implicar a los estudiantes en las actividades matemáticas que les propone?

40) ¿Considera que la manera en la que organiza sus clases de derivadas fomenta la perseverancia y la responsabilidad en los alumnos?
41) ¿Cree que favorece la argumentación de los estudiantes de manera equitativa cuando ejecuta sus sesiones de clase sobre la derivada?
42) Cuando implementa sus clases de derivadas y sus aplicaciones, ¿promociona en los estudiantes la autoestima evitando el rechazo, el miedo o la fobia hacia las matemáticas?
43) ¿Considera que los contenidos, su implementación y evaluación de la derivada y sus aplicaciones, se corresponden con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería?
44) ¿Cree que los contenidos que enseña de derivadas tienen conexión con diferentes contenidos matemáticos contemplados en el currículo, o con temas de otras asignaturas del plan curricular de las carreras de ingeniería?
45) ¿En qué medida considera que los contenidos de la derivada y sus aplicaciones que imparte en clase son útiles para la inserción socio-laboral de los futuros ingenieros?
46) ¿Realiza innovaciones basadas en su propia práctica reflexiva relacionadas a recursos tecnológicos, nuevos contenidos de derivadas, formas de evaluación, entre otros?

Los ítems de este cuestionario han sido estructurados de la siguiente manera: a) Desde la pregunta 1 a la 3, corresponden a cuestiones generales vinculadas con la formación del docente; b) De la pregunta 4 a la 13, se corresponden con la idoneidad epistémica; c) De la pregunta 14 a la 22, están vinculadas al criterio de idoneidad cognitivo; d) A partir de la pregunta 23 hasta la 30, están relacionadas con los componentes del criterio interaccional; e) Desde la pregunta 31 a la 36, son cuestiones ligadas al criterio mediacional; f) Entre la pregunta 37 y la 42, tienen que ver con los componentes del criterio emocional; y, g) A partir de la pregunta 42 hasta la 46, son cuestiones ligadas a los componentes e indicadores del criterio ecológico.

2.7.5. Tratamiento de los objetivos de esta investigación

Los problemas y los objetivos generales y específicos que se han formulado en este capítulo para dar respuesta a la problemática expuesta al principio de esta memoria, son abordados de la siguiente manera:

Para alcanzar el objetivo específico 1 se usan las herramientas proporcionadas por el EOS con la finalidad de obtener una descripción exhaustiva de las prácticas realizadas por cada uno de los profesores, las mismas que se plasman en los estudios de caso individual y múltiple. Las clases implementadas por los docentes se han grabado y transcrito, luego se han analizado usando el modelo de análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (Font et al., 2010), considerando sólo cuatro de los cinco niveles o tipos de análisis sobre los procesos de instrucción, tal y como se ha detallado en la sección del marco teórico de esta memoria.

Se ha optado por el modelo de análisis propuesto por el EOS, puesto que consideramos que integra aspectos del llamado enfoque epistemológico y de las teorías socioculturales. Por una parte, el análisis de las prácticas, objetos y procesos matemáticos permite describir las matemáticas del proceso de instrucción analizado, mientras que, el análisis de las interacciones y de la dimensión normativa permite describir la interacción producida en el proceso de instrucción y las normas que la regulan.

Para alcanzar los objetivos específicos 2 y 3 se utiliza un referente teórico con unas categorías a priori (los criterios de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores), herramienta con la que se hace un análisis del contenido de las transcripciones de las clases grabadas y de sus respuestas a las entrevistas docente semiestructuradas. En otras palabras, se realiza un análisis en el que ciertos párrafos son considerados evidencias que permiten inferir el uso de un determinado indicador, componente o criterio de idoneidad didáctica. Del mismo modo, se hace un análisis temático de tipo inductivo para determinar algún criterio no contemplado en las categorías tomadas a priori.

En relación con la entrevista, se diseña un protocolo con preguntas sobre una selección de episodios de su clase, que permiten al profesor retomar y discutir los criterios empleados en su práctica pedagógica desarrollada en las aulas de ingeniería, con la finalidad de generar una reflexión sobre su propia práctica. Cabe mencionar que para lograr la validez de la entrevista docente semiestructurada, se ha realizado un plan piloto y se ha pasado por juicio de expertos; el cuestionario final se muestra en el apartado anterior de este capítulo.

A continuación, desde el capítulo 3 en adelante, se presentan los siete estudios de caso individual, más el estudio de caso múltiple, realizado con el grupo de docentes de matemáticas que enseñan en ingeniería, y que se han plasmado en los tres artículos científicos, en el capítulo de libro, y en los resultados complementarios de esta investigación del anexo 1. Tal y como se expone en lo que sigue de este documento.

3

ARTÍCULO CIENTÍFICO 1

Criteria That Guide the Professor's Practice to Explain Mathematics at Basic Sciences Courses in Engineering Degrees in Peru: A Case Study

Este artículo ha sido publicado como investigación original en la Revista de Ensino de Ciencias y de las Matemáticas *Acta Scientiae*, *23*(3), 1-33, por los autores: Walmer Garcés Córdova ; Vicenç Font Moll ; y Luisa Morales-Maure (2021).

DOI: https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6389

Indicios de calidad:

a) Base de datos de indexación: SCOPUS - SJR. Scimago Journal & Country Rank.
b) Índice de impacto: 0.216; año: 2020
c) Categoría: Multidisciplinary
d) Posición que ocupa la revista en el área: 64 / 135 ; Tercil: T2 ; Cuartil: Q2
e) Número de citas: 1 (1 en JCR)
f) Otros indicios de calidad: Revista indexada en Latindex, Edubase, Redib, Google Scholar, Sumarios.org, Qulais-Capes. Esta revista también está indexada en Scopus-SJR. Scimago Journal & Country Rank, en la categoría de educación ha ocupado la posición 961 de 1543 (Q3) en el año 2020.

Citar como: Garcés, W., Font, V., & Morales-Maure, L. (2021). Criteria that guide the Professor's practice to explain mathematics at basic sciences courses in engineering degrees in Peru. A case study. *Acta Scientiae*, *23*(3), 1-33. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6389

ACTA SCIENTIAE

ISSN: 2178-7727
DOI: 10.17648/acta.scientiae.6389

Criteria That Guide the Professor's Practice to Explain Mathematics at Basic Sciences Courses in Engineering Degrees in Peru: A Case Study

Walmer Garcés[a]
Vicenç Font[a]
Luisa Morales-Maure[b]

[a] Universitat de Barcelona, Facultat d'Educació, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Barcelona, España
[b] Universidad de Panamá, Facultat de Ciencias Naturales , Exactas y Tecnología, Departamento de Matemática, Ciudad de Panamá, Panamá.

Received for publication 6 Jan. 2021. Accepted after review 24 Mar. 2021
Designated editor: Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Abstract

Background: Research on mathematics teaching in basic science classes within Peruvian engineering degrees was required prior to the identification of alternatives. **Objective**: To identify the criteria that guide the practice of professors in Peru when explaining mathematics in basic science classes within engineering degrees, with specific reference to derivatives. **Design**: Qualitative case-study research that seeks to understand current mathematics teaching through an analysis of and reflection on the participants' practices. **Setting and participants**: Professors who give classes within engineering faculties in Lima. One of these was selected as a case study. **Data collection and analysis**: The classes taught by these professors were filmed and the criteria they follow in the design and implementation of their classes were inferred by means of the didactic suitability criteria, which were also used to design a questionnaire to interview the teachers; triangulation was then performed between their words and their actions. **Results**: This professor was guided by ecological criteria (syllabus and profession) and mediational criteria (time available for classes), although he felt that his practice was based primarily on cognitive criteria (previous knowledge) and ecological criteria (future profession). **Conclusion**: The criteria that guided his practice help explain why basic science classes within engineering degrees are taught with a lecture-based and procedural approach, and why innovations are not included.

Keywords: Didactic suitability criteria, Derivatives, Mathematics teaching, Engineering, Reflection on practice.

Critérios que orientam a prática de um professor quando explica matemática nas disciplinas de Ciências Básicas pertencentes aos cursos de engenharia no Peru: um estudo de caso

Resumo

Contexto: Com a finalidade de buscar alternativas para melhorar a formação de futuros engenheiros no Peru, são necessárias pesquisas sobre o ensino da matemática nas disciplinas de ciências básicas relacionadas aos cursos de engenharia. **Objetivo**: identificar quais são os critérios que norteiam a prática de um professor no Peru quando explica matemática nas disciplinas de ciências básicas dos cursos de engenharia e,

especificamente, quando explica a derivada. **Metodologia**: Pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso que busca compreender o ensino de matemática realizado, por meio da análise das práticas dos participantes e da reflexão sobre sua prática. **Ambiente e participantes**: Professores que ministram aulas nos cursos de engenharia na cidade de Lima, Peru. Um professor foi selecionado como estudo de caso. **Coleta e análise de dados**: A partir da filmagem e gravação das aulas desses professores, utilizando os critérios de adequação didática, identificaram-se os critérios que eles seguiam ao planejar e implementar suas aulas, critérios estes que também foram utilizados para elaborar um questionário para entrevistá-los. Após isso, realizou-se uma triangulação dos dados para contrastar o que o professor diz (no questionário) e faz (na implementação da aula). **Resultados**: Este professor orienta-se pelo critério ecológico (currículo e profissão) e pelo critério mediacional (tempo disponível para as aulas), embora, segundo ele, seja o critério cognitivo (conhecimentos prévios) e o critério ecológico (futura profissão) que orientam, acima de tudo, sua prática. **Conclusão**: Os critérios que norteiam sua prática explicam por que as aulas de ciências básicas estão sendo implementadas nos cursos de engenharia de forma expositiva e procedimental e por que as inovações não estão sendo incorporadas.

Palavras-chave: Critérios de adequação didática, Derivada, Ensino da matemática, Engenharia, Reflexão sobre a própria prática.

3.1. Introduction

Historically, mathematics teaching for engineers has been underpinned by the following dilemma: should classes be tailored to each branch of engineering, or should they address more general mathematics during the early stages of several different engineering degrees at the same time? The basic sciences have gradually been structured around a programme common to several branches of engineering, for a number of reasons. One argument, for example, is based on the assumption that context is not relevant when it comes to applying formal mathematical knowledge; in other words, it assumes that the answer to the question “Can people apply general knowledge to different contexts with relative ease?” is yes. The second argument seeks to avoid presentation of mechanistic or behavioural mathematics; in other words, based on the assumption that there are essentially three methods of teaching mathematics (formalist, mechanistic and realistic), it attaches considerable weight to formalist mathematics and, above all, avoids the second approach in the design of basic science programmes.

In the 20th century, the different branches of engineering were most commonly structured around an initial stage, called basic or general studies, which was designed to provide engineers with basic mathematical tools that they would then go on to apply in the other subjects in the degree and, later on, in their professional careers. Thus, the basic sciences were incorporated into engineering training such that, in theory at least, engineering students would acquire the strategies and knowledge they would need to tackle and resolve the challenges that would arise in their professional activity (Monforte, 2011).

After about a hundred years of this approach, however, doubts and dilemmas have arisen about whether this is the best option. Based on international trends in higher education engineering teaching, Capote et al. (2016) pointed out that, although engineers require in-depth knowledge of the basic sciences, today's society also demands engineering training that shapes professionals with the ability to respond to the requirements of contemporary development; this requires that teaching and learning processes and curricular models be organized in such a way that they are interactive, collaborative and student-centred and allow students to engage in lifelong learning.

Some of the key dilemmas concerning the role of the basic sciences, especially mathematics, in engineering training concern the following aspects (Font, 2019):

1) The question of whether basic general knowledge can be applied to different contexts with ease.
2) The high number of students who fail.
3) The teaching of content that is not subsequently used in practice.
4) The current approach to teaching, which focuses on skills development.

The dilemmas posed by basic science and general studies classes within engineering degrees have given rise to a research agenda on how to teach mathematics at this stage, and the possible alternatives. For this reason, a number of studies have explored the skills and knowledge of mathematics teachers at this stage, how mathematics is taught within the subjects included, and the possible alternatives. With respect to the approach to teaching differential and integral calculus as part of engineering degrees in Peru, the following statements reveal a somewhat vague consensus: a) students encounter many difficulties in the learning process; b) these difficulties are due to the fact that teachers clearly use an algorithmic, mechanistic and routine approach to teaching formulas and that the teaching method is highly rigorous and formalistic, among other factors; c) in both cases, the teaching method prevents students from acquiring an in-depth understanding of the basic notions of calculus and its applications, which means that these future engineers lack the skills to use mathematics to solve problems encountered in their professional lives.

However, there is insufficient research on mathematics teaching in basic science classes within Peruvian engineering degrees to support this consensus. Based on the literature review carried out, we concluded that research is needed to shed light on the state of mathematics teaching in basic science classes within engineering degrees. Such studies are required prior to the identification of alternatives for mathematics teaching at this stage.

In this regard, our research addresses the case study of a teacher who gives differential calculus classes in a Peruvian engineering faculty. We filmed three classes on the subject of derivatives and their applications, we compiled information on his course materials and the curricular materials he was required to follow, and we conducted a semi-structured interview; these sources were triangulated with a view to answering the following question: What criteria guide the practice of this Peruvian professor and help him explain mathematics in basic science classes taught as part of engineering degrees, with specific reference to derivatives?

This introduction, which outlines the research question and its relevance, is followed by a review of the literature and the theoretical reference used, i.e. the didactic suitability criteria (DSC) proposed by the Onto-Semiotic Approach (OSA) to Mathematical Cognition and Instruction. The qualitative methodology used to conduct the case study is then presented, followed by triangulation of the sources. Next, the data are analysed and the results presented. The paper concludes with a discussion of the results and possible aspects to address in future research.

3.2. Review of the literature

This section briefly outlines the literature review we carried out, which explored two aspects: 1) The teaching of differential calculus in engineering degrees, especially in Peru; and 2) Inference of the criteria that guide teachers' practice based on an analysis of their practices and their reflections on these.

With respect to the first aspect, several studies on mathematics teaching in engineering degrees have indicated that the high number of students who fail basic science subjects in these degrees is directly related, among other aspects, to the way in which teachers approach and teach mathematics, especially differential calculus, at the early stages of university. Based on a review of the literature on differential calculus, García (2013) stated that the learning and teaching of mathematics in general, and of calculus in particular, present one of the greatest challenges for university students, including engineering students.

According to the author, precise and effective solutions to this problem remain elusive, since the tendency to reduce algebra, which supports the calculus learning process, to arithmetic and algorithmic processes has further complicated the situation given that it leads to decontextualization of the discipline. This author also highlighted one of the dilemmas posed by calculus teaching within engineering degrees (previously mentioned by Artigue, 1995). He argued that, although it constitutes the foundation for future engineers' professional development, it has been taught through the use and abuse of algebra and mechanization, and an absence of modelling processes.

García (2013) claimed that the algebrization and arithmetization of calculus have lost sight of its origin and its role in engineering and resulted in learning without understanding by encouraging students to obtain mechanistic solutions and overlooking other aspects, such as cognitive, social, emotional and contextualization factors, in the teaching process.

A number of studies have been conducted on the skills and knowledge of mathematics teachers in these programmes (e.g. Arana, Ibarra & Font, 2020), the way mathematics is taught in the subjects within these programmes, and the possible alternatives (e.g. Camarena, 2013; Cooper, Levi Gamlieli, Koichu, Karsenty & Pinto, 2020; Juárez Ramírez, Chamoso Sánchez & González Astudillo, 2020; Rodríguez

Gallegos, 2017). Much of this research has focused on the content of differential and integral calculus.

In the case of Peru, the literature review we carried out on research on mathematics teaching in engineering degrees revealed that such studies are in short supply. With respect to differential calculus, we came across proposals for innovative approaches to teaching mathematics to future engineers, but we found virtually no research on the subject. Villanueva (2019) carried out research on the teaching of derivatives in the first year of a telecommunications engineering degree at a Peruvian public university and found that one of the problems faced by students in their first year is that they fail to acquire meaningful learning of derivatives due to the traditional methods used, which are based on a highly procedural approach.

After expanding our search to the countries bordering Peru, we found that a study carried out by Vargas (2010) to assess the quality of mathematics teaching and learning processes in engineering classrooms at Chilean universities found that the lecture method predominated due to the high number of students; that tutorials were considered merely as a complement to teaching; and that the type of course, class sizes and the relationship between the teachers and students all influenced the methodology.

With respect to the second aspect, although mathematics teachers are not always able to clearly explain the reasons behind their teaching practice, various lines of research have inferred teachers' knowledge and skills based on an analysis of their teaching practices and their reflections on these, since this method can offer an insight into certain patterns or regularities that guide their teaching practices. Pepin, Gueudet and Trouche (2017) argued that teachers' implicit, unspoken considerations in the selection and implementation of task sequences can help shed light on the criteria that guide their practice and shape what the authors called "teacher design capacity", which, in turn, can grow through reflection-in-action (Schön, 1983).

Carlos Guzmán (2018) presented the results of three studies (one of which was carried out with teachers in engineering degrees) whose objective was to conduct in-depth interviews that were designed based on the theoretical framework used as a reference (i.e. the notions of effective teaching and good teaching practices). This was designed to identify the qualities and teaching methods of a group of teachers considered a priori to engage in good teaching practices and aimed to identify the criteria that guided their practice and, based on these, define suggestions for teacher training.

A number of studies have been carried out within the framework of the OSA and have revealed the following phenomenon with some regularity: the components of the didactic suitability criteria proposed by the OSA (see Section 3) function as regularities in teachers' discourse when they assess an episode or explain why a teaching proposal represents an improvement, or when they reflect on their practice, without ever having been taught how to use this tool to guide their thinking (Breda, 2020; Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Seckel, Breda, Sánchez & Font, 2019).

In other words, their comments can be considered evidence of the implicit use of certain components of the didactic suitability criteria as a guide to inform their teaching practice.

In line with the study by Carlos Guzmán (2018), we developed and applied a semi-structured interview to identify the criteria that guide the practice of the case-study teacher. However, in accordance with the abovementioned phenomenon, the didactic suitability criteria tool was used as a theoretical reference to design the interview questionnaire.

3.3. Theoretical framework

The Onto-Semiotic Approach (OSA) to Mathematical Cognition and Instruction considers five types of analysis in instructional processes: 1) Identification of mathematical practices; 2) Development of the configurations of mathematical objects and processes; 3) Analysis of didactic trajectories and interactions; 4) Identification of the system of norms and meta-norms; and 5) Assessment of the didactic suitability of the instruction process (Font, Planas & Godino, 2010; Breda, Pino-Fan & Font, 2017).

The first type of analysis explores the mathematical practices carried out within a mathematical instruction process; the second focuses on the mathematical objects and processes involved in the execution of the practices, in addition to those that arise from said practices; the third type is based primarily on a description of interaction patterns, didactic configurations and their sequential expression in didactic trajectories (these configurations and trajectories are supported by a system of norms and meta-norms); the fourth type of analysis examines this system.

The first four types of analysis are tools for descriptive and explanatory didactics, while the fifth focuses on assessing didactic suitability. This latter is based on the four previous teaching analyses and offers a synthesis to identify potential improvements in the instructional process through new implementations.

In the OSA, the didactic suitability of a teaching and learning process is understood as the extent to which said process (or part of it) features certain characteristics that justify its categorization as suitable (optimal or appropriate) to achieve alignment between the personal meanings derived by the students (learning) and the intended or implemented institutional meanings (teaching), with due regard for the circumstances and the resources available (environment). It is a multidimensional construct that is broken down into criteria of partial suitability. The didactic suitability criteria can help, firstly, to guide mathematics teaching and learning processes and, secondly, to assess the implementation of these processes (Breda, Font & Pino-Fan, 2018).

The OSA includes six criteria of partial suitability: 1) Epistemic suitability, which assesses whether the mathematics taught is "good mathematics"; 2) Cognitive suitability, which assesses, prior to the instructional process, whether there is a reasonable gap between what is to be taught and what the students already know and, after the process, whether the learning outcomes are aligned with the teaching objective; 3) Interactional suitability, which assesses whether the interactions successfully address the students' queries and problems; 4) Mediational suitability, which assesses the appropriateness of the resources, in terms of materials and time, used in the instructional process; 5) Affective suitability, which assesses the students' involvement, in terms of interests and motivations, during the instructional process; and 6) Ecological suitability, which assesses the extent to which the instructional process is aligned with aspects such as the centre's educational project, curricular guidelines, and the conditions of the social and professional environment (Font, Planas & Godino, 2010).

For the implementation of the didactic suitability criteria, a set of observable indicators, components and descriptors serves as a guide for the analysis and assessment of instructional processes at any stage of education (Breda, Pino-Fan & Font, 2017). Table 1 below details the didactic suitability criteria and components for the abovementioned proposal (the indicators have not been included due to space limitations).

The notion of didactic suitability is a tool that is widely used, firstly, to analyse didactic sequences (and their redesigns) that have been designed and implemented by teachers with a view to improving mathematics teaching (Breda, 2020; Morales-López & Font, 2019; Sousa, Gusmão, Font & Lando, 2020), and, secondly, to organize the reflections of future or active teachers on their own practice in teacher training programmes (Esqué & Breda, 2021; Giacomone, Godino & Beltrán-Pellicer, 2018; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya & Bustamante, 2019; Seckel & Font, 2020), since it allows teachers to engage in systematic reflection on the complexity of the mathematical objects they teach and the factors involved in studying these.

This tool has also been used for the analysis and assessment of textbook lessons (Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer & Godino, 2020) and for the design and assessment of mathematical tasks (Gusmão & Font, 2020).

Table 3.1

Didactic suitability criteria and components.

Criterion	Component
Epistemic	(ES1) Errors, (ES2) Ambiguities, (ES3) Diversity of processes, (ES4) Representativeness of the complexity of the notion to be taught.
Cognitive	(CS1) Previous knowledge, (CS2) Adaptation of the curriculum to individual differences, (CS3) Learning, (CS4) High cognitive demand.
Interactional	(IS1) Teacher-learner interaction, (IS2) Interaction between learners, (IS3) Autonomy, (IS4) Formative assessment.
Mediational	(MS1) Material resources, (MS2) Number of students, timetable and classroom conditions, (MS3) Time.
Affective	(AS1) Interests and needs, (AS2) Attitudes, (AS3) Emotions.
Ecological	(ECS1) Alignment with the curriculum, (ECS2) Intra/interdisciplinary connections, (ECS3) Social-professional usefulness, (ECS4) Teaching innovation.

Note: Taken from Morales-López and Font (2019, p. 5).

We used the didactic suitability criteria as a theoretical tool to address the question raised in this research, i.e. what criteria guide this Peruvian professor's practice when he explains mathematics in basic science classes, with specific reference derivatives, taught as part of engineering degrees?

3.4. Methodology

The approach used in this research is qualitative and interpretative, since our purpose was not to explain, control or predict, nor to transform reality; rather we sought to understand the criteria that guide the teaching practice of the mathematics professor we chose as our case study during the basic stages of engineering degrees through an analysis of his teaching practices and his reflection on these.

3.4.1. Research stages

The method used to reconstruct the case-study professor's implicit, unspoken considerations in the selection, sequencing and execution of tasks consisted of the following phases:

Phase 1: Selection of participants. We contacted a group of 10 professors with extensive experience of teaching mathematics at the basic stage of engineering; eight graduated in mathematics and two graduated with a degree in education with a mathematics specialization. This group of professors give classes in differential and integral calculus in engineering faculties at various public and private universities in Lima, Peru. After we had presented the research objectives, we asked them to participate in the study and sought their consent to enter their classrooms and film their classes (between two and three, depending on the professor) on derivatives and their applications; they were also asked to provide us with course materials and to participate in a semi-structured interview.

Phase 2: Collation of curricular documents, materials prepared by the professor to be implemented in the classroom, etc. All professors who participated in the research provided us with curricular materials such as the syllabus for the subject, timetables for the academic year, lesson plans, presentations used to teach derivatives, handouts on exercises, reference material on the subject for students, objective tests and graded practices, as well as material from workshops that involved teamwork in the classroom.

Phase 3: Filming of classes. The classes on derivatives and their applications given by these professors were filmed (between two and three classes for seven professors; for three professors, filming was not possible for various reasons). Classes had an average duration of 100 minutes.

Phase 4: Preparation of the tool for conducting the interview. Based on: 1) the didactic suitability criteria (the theoretical reference for this research); and 2) an initial observation of the classes that were filmed; a questionnaire was designed to serve as the basis for a semi-structured interview. This questionnaire was used to conduct a pilot interview with one of the 10 professors. This first questionnaire was revised based on the following: a) comprehension problems and the redundancy of some questions; b) the opinion of an expert in the use of the OSA tools for researching the knowledge and skills of mathematics professors. This resulted in a second questionnaire of 46 questions, with three initial questions of a general nature and 43 based on the six didactic suitability criteria (epistemic, cognitive, interactional, mediational, affective and ecological), as well as their components and descriptors. This questionnaire was conducted with the 10 professors, with minor variations based on our observations of their classes (for example, a question was adapted depending on whether or not they had used a certain computer resource).

Phase 5: In-depth analysis (radiography) of the classes and identification of the criteria that guide the professor' practice. For each of the professors, an initial expert analysis of the filmed classes was carried out using the first four analysis types proposed in the didactic analysis model based on the OSA constructs, as in Breda, Hummes, da Silva and Sánchez (2021) and Pochulu and Font (2011), with a view to determining mathematical practices, objects and processes, teacher and student functions, didactic configurations, semiotic conflicts, patterns and norms.

The information obtained was used to infer the criteria followed by the filmed professors when designing and implementing their classes; the categories were based on the indicators and components of the didactic suitability criteria, although an expert assessment of the suitability didactic was not carried out (fifth analysis type in the didactic analysis model based on OSA constructs). This would serve as a reference for triangulating the data with the criteria the professor claimed to follow.

Phase 6: Selection of the case study. To prepare this document, one of the seven professors whose classes were filmed was selected as a case study. In these classes (three in total), the teacher explained the subject of derivatives and their applications. This consisted of explaining the notion of derivative as the slope of the tangent line and as the limit of the average rate of change, then applying the definition of derivative to certain functions to find the derivative of the sum and product of two functions; he then handed out the complete list of basic derivative rules, which were then mechanized through application in different exercises, and finally he presented the criteria of the first and second derivatives and their application to determine growth intervals, relative minimums and maximums, intervals of concavity (upwards and downwards) and points of inflection. The professor selected for this case study will be referred to as "Professor A" from now on.

Phase 7: Interview with the professor in which he described the criteria that, in his opinion, guide his teaching practice. The interview was carried out with Professor A and was filmed to determine the criteria that, in his opinion, guide his teaching practice. The interview lasted two hours and was divided into two clearly differentiated parts. In the first part, he was asked three general questions (about his training, the criteria that guide his teaching practice and a teaching model he identifies with). In the second part, he was asked more specific questions related to some of the components of the didactic suitability criteria.

Phase 8: Transcription of the interview with Professor A. In this phase, the interview was transcribed verbatim.

Phase 9: Inference of criteria from the interview. The content of the interview was analysed to infer the criteria that, according to the professor, guide his practice, in line with Breda (2020) and Seckel, Breda, Sánchez and Font (2019).

Phase 10: Triangulation of sources. In this last phase, the sources were triangulated (especially the results of phase 5 on the classes observed and the interview responses) to draw conclusions.

3.4.2. Data analysis

Phase 5 started with the first four analysis types proposed in the didactic analysis model based on the OSA constructs (identification of mathematical practices, identification of primary objects and processes, analysis of didactic interactions and conflicts, and, finally, analysis of the norms that regulate the teaching process). The first analysis type explores the mathematical practices carried out within a mathematical instructional process. This can be understood as the narrative a teacher uses to explain to another teacher what has happened from a mathematical viewpoint. The second analysis type focuses on the mathematical objects and processes involved in those practices, as well as those that arise from the processes. The third type of didactic analysis aims primarily to describe interaction patterns, didactic configurations and their sequential expression in didactic trajectories. The fourth level of analysis studies the system of norms that regulate the instructional process.

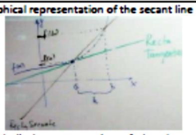
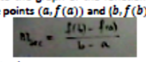
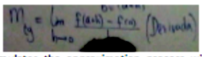
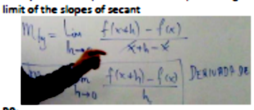
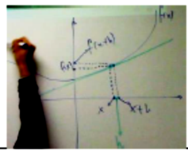
The tools of the first four levels of analysis proposed by the OSA are used to divide the transcript of a class session into a trajectory of didactic configurations and to study different aspects of each configuration. For example, the second didactic configuration (DC2) (see Figure 1) occurred just after the beginning of the first class and after DC1, when the professor recapped the meaning and calculation of the slope of a line, and ended when the professor began explaining the notion of derived function, which was institutionalized in DC3.

DC2 began when the professor drew the graph of a function and a secant line that passes through points $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$, and the calculation of its slope, and ended when he began explaining the notion of derived function. It ran from line 1 to line 5 of the transcript (see Figure 1). We considered a line to be a complete paragraph that made sense as a whole.

The didactic suitability criteria tool was then applied to identify some of the criteria that guide the professor's practice. For example, the in-depth analysis (radiography) in Figure 1 allowed us to conclude that the teacher takes into account the existing knowledge needed to understand the notion of derivatives.

Figure 3.1

Didactic configuration 2 of the radiography of Professor A's classes.

TIME (min)	TRANSCRIPT LINES (paragraph)	MATHEMATICAL PRACTICES	PRIMARY OBJECTS	MAIN PROCESS	FUNTIONS OF THE PROFESSOR	FUNCTIONS OF THE STUDENT	DIDACTIC CONFIGURATION	NORMS	SEMIOTIC CONFLICTS
DC1									
		P2: Represent, graphically, a secant line to the graph of the function that passes through the points $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$.	R4: Graphical representation of the secant line 	Representation					
DC2	It has not been videotaped (During the first 5 minutes, the recording did not work)	P3: Symbolical calculation of the slope the secant line	R5: Symbolical representation of the slope of the secant line to the graph of the function that passes through the points $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$. 	Algorithmization					
		P4: Treatment of representations (transform the expression of the slope of the secant line)	Pr1: Calculate slope Pr2: Transposition of terms into an equality R6: 		Explain	Listen and understand the Professor's explanation	Magistral		
05' 02''	L1: We take advantage of the secant to obtain the slope of the tangent line. Do you agree?	P5: Approximation of the secant line to tangent line	R7: Simulates the approximation process with the hand.	Treatment					
05' 10''	L2: So, well, copy this if you are going to copy it, but speed because we are going to work with this formula that is here below.		D1: Interpretation of the tangent line as the limit of secant lines						
05' 20''	L3: Let's see how this is digested that is there (He shows the formula R8). Let's try to place on the floor, on the ground, what this means.	P6: Express, symbolically, the slope of the tangent line in $x = a$, as limit of the slopes of the secant lines.	D2: Interpretation of the tangent line slope as limit of secant lines slopes R8: Symbolical expression of the slope of tangent as limit of the slopes of secant 	Signification					
05' 30''	L4: It is the derivative of the function at any point on the graph; and this is important to let you know, this is the derivative of the function at any point on the curve (He writes in R8 "Derivative of $f(x)$")	P7: Represent graphically a tangent line to the curve of the function f(x), at a point on the abscissa x.	R9: 	Signification					Possible confusion between the derivative at a point and the derivative function
05' 38''	L5: I considered it here (In R9 indicates the abscissa point x represented in the graph), but, it could have been at any point on that curve (He gestures with his finger to follow the graph)	P8: Represent two very close points on the graph: $(x, f(x))$ and $(x + h, f(x + h))$.							

Phase 8 consisted of transcribing the interview with the professor, and phase 9 involved identifying the criteria that, in the professor's opinion, guide his teaching practice. For example, the following transcript allowed us to infer, among other things, that the professor considers it important to take the students' previous knowledge into account:

> I: Could you describe the main criteria you take into account when designing and implementing your classes in this engineering faculty?
>
> Professor A: (02'32") Regarding my criteria for designing class sessions, I really try to start by making sure the students feel comfortable with the topic. I mean, I try to make some kind of comment to establish a conversation with the students to avoid just diving straight in. My intention at the beginning is to create a fairly familiar environment for the students, so that the subject doesn't feel alien to them and they feel a connection with the teacher. Once

> I've managed to establish that rapport, I ask the students what they know about the concepts we're going to study and perhaps also about why it's important to study this subject. Then we start the purely mathematical part, development of the concepts, explanation of theorems, some proofs and then the application.

Finally, triangulation of sources was performed between the professor's statements in the interview and our class observations. Unlike other cases, there was some coherence in the example provided between the professor's words and his actions. This allowed us to infer that taking the students' previous knowledge into account is a valuable principle for the professor when it comes to designing and implementing his classes.

3.5. Results and analyses

Table 2 presents a summary of the criteria that, in his own opinion, guide the professor's practice. They have been arranged primarily according to the didactic suitability criteria. This table was created based on the transcript of the interview, as explained in the data analysis section.

Table 3.2

Analysis of Professor A's responses in the interview

SC	COMPONENTS	ANALYSIS OF THE PROFESSOR'S RESPONSES
General questions	Initial training	▪ Professor with undergraduate and postgraduate training in mathematics education, with teaching experience at secondary school, college and university levels, and undergoing regular on-the-job training.
	Criteria for designing and implementing classes	▪ He takes existing knowledge into account; he creates a familiar atmosphere and transmits confidence to students; he follows a logical order in the sequence of content; he explains why this subject is taught rather than a different one.
	Teaching model	▪ A dialogic approach that seeks to build knowledge through dialogue and to teach mathematics through real-world applications.

SC	COMPONENTS	ANALYSIS OF THE PROFESSOR'S RESPONSES
Epistemic	Errors	▪ He accepts that he makes mathematical errors in his classes on derivatives (although he confuses mathematical error with didactic error).
	Ambiguities	▪ He considers intuitiveness to be necessary in mathematics because it serves as the basis for developing the subject. He admits that, by resorting to intuition, he sacrifices formality and rigour and that this can lead to ambiguity.
	Diversity of processes	▪ He approaches the subject of derivatives and their applications in an instrumental way since he believes that engineers should have, above all, procedural knowledge. He places emphasis on the resolution of exercises and the use and algebraic manipulation of the table of basic derivative rules. ▪ He only teaches proofs once in a while, since he is restricted by time and the problems associated with using the limit definition of the derivative. He rarely focuses on problem solving and does not work on modelling due to time restraints and a lack of knowledge. He focuses, above all, on algorithmization. ▪ He focuses on the resolution of exercises in an intra-mathematical context by applying derivation rules. The few contextualized problems he poses relate to physics and economics and are not cognitively demanding for students. He uses few extra-mathematical contexts in his classes.
	Representative sample of the multiple meanings of the mathematical object to be taught	▪ In accordance with the syllabus, he gives the limit definition and geometric definition of the derivative. He addresses the interpretation as instantaneous velocity at the end, in applications, but only very occasionally. ▪ He considers that different modes of expression and representation of the derivative should be used. In his classes, he addresses conversion of the graphic register to the symbolic register, in addition to different symbolic expressions. He feels that it is important to teach different forms of representing the derivative because of the students' different learning rates, among other reasons. ▪ He considers that the content of derivative classes and the way he teaches it are conditioned by the syllabus. In his view, it should be modified to accommodate a variety of application problems in different contexts.
Cognitive	Previous knowledge	▪ He takes students' existing knowledge into account when planning and implementing his derivatives classes. However, if the students lack prior knowledge, he does not modify his plan to explain the topic to them due to a lack

SC	COMPONENTS	ANALYSIS OF THE PROFESSOR'S RESPONSES
	Adaptation of the curriculum to individual differences	of time. In such cases, he accepts that these students are lagging behind. ▪ He feels that he manages to ensure that most (if not all) students bridge the gap between what they already know and the new concepts of derivatives he intends to teach. ▪ He strives to embrace the diversity of students in the classroom by proposing reinforcement activities to do outside of class hours. For enhanced learning, he proposes both algebraic and geometric scenarios to facilitate visualization. He knows the extent of the students' understanding based on their comments, questions and observations.
	Learning	▪ The summative assessment tools he uses (tests common to all groups) prevent him from being certain about whether the students have learned or not. When he realizes that students are not learning properly, he seeks to create an affective environment to facilitate communication with them.
	High cognitive demand	▪ He points out that the tasks he proposes to his students have been prepared in advance by the subject coordinators; these are derivative tasks that prioritize algebraic practice and manipulation with derivation rules and, therefore, in his opinion, do not activate the students' key cognitive processes.
Interactional	Teacher-learner interaction	▪ He strives to teach the content on derivatives in class so that it follows a logical order. Through interaction, he can spot when students have queries, even by their facial expressions; in the event that he observes queries, he tries to clarify them. ▪ He uses argumentative resources such as questions, follow-up questions, metaphors, stories and anecdotes to engage, include and involve most students in his derivative classes.
	Interaction between learners	▪ He states that, in his classes on derivatives and their applications, he seeks to ensure that there is dialogue and communication between the students.
	Autonomy	▪ Through teamwork, he creates moments to foster student autonomy and moments for exploring, formulating and validating their conjectures on derivatives.
	Formative assessment	▪ He observes whether students understand derivatives based on the interaction generated in the classroom when he presents examples, counterexamples and conjectures, and also when the students struggle to back up their statements.

SC	COMPONENTS	ANALYSIS OF THE PROFESSOR'S RESPONSES
Mediational	Material resources Number of students, timetable and classroom conditions Time (for group teaching, tutoring, learning)	▪ He uses free-to-access mathematical software such as Desmos and GeoGebra in his classes on derivatives. ▪ He feels that the number of students in the classroom is a decisive factor in good teaching, which he cannot do because there are more than 40 students. ▪ The classroom elements and student distribution within it are neither adequate nor motivational for derivative teaching. He suggests that it is necessary to consider more innovative spaces. ▪ In the face-to-face phase, he focuses on the core, most important part of derivatives, and leaves complementary tasks and activities for the virtual phase. ▪ Through his many years of experience teaching in engineering degrees, he is clear that a lot of time has to be spent on the algebraic manipulation of the derivation rules, on the procedural part. He also feels that he spends time on derivative content that implies more difficult conceptual problems for students.
Affective	Interests and needs Attitudes Emotions	▪ The subject coordinator provides him with a list of exercises, and he tries to include those he thinks will be of interest to the students. He also tries to include exercises to encourage reflection and critical thinking. ▪ In the optimization part, he says he proposes situations that allow the students to assess how the derivative works in the workplace. ▪ To involve students in the mathematics activities he proposes, he assigns grades for tasks completed outside of class hours (extrinsic motivation). ▪ He states that the mathematics tasks he proposes to his students have worked well for him, as he has noticed how they encourage responsibility and engagement in most students. ▪ He creates moments for participation, reasoning and critical thinking, although he says that not all students are involved in these. ▪ He seeks to enhance student self-esteem by creating an environment of familiarity and confidence to help them lose their fear, rejection and phobia of mathematics.
Ecological	Alignment with the curriculum	▪ He believes that there is a relationship between the content, assessment and implementation of derivatives, and the curricular guidelines for engineering degrees, but he also believes that the assessment method should be modified.

SC	COMPONENTS	ANALYSIS OF THE PROFESSOR'S RESPONSES
	Intra/interdisciplinary connections	▪ He states that the derivative content he teaches is widely used in other subjects taught as part of engineering degrees and that, in addition, it will serve them in their professional careers.
	Social-professional usefulness	▪ He strives to ensure that the future engineers are competent and that they can solve problems using derivatives, and he considers that this skill will serve them when they are in the labour market.
	Teaching innovation	▪ He has been introducing technological resources such as GeoGebra and tools to gamify the assessment of derivatives such as Quizizz and Kahoot, but he feels that he has not been able to change the assessment method since it is established by the subject coordinator and is the same for all teachers.

Table 3 presents the results of the triangulation of the teacher's answers in the interview and the authors' conclusions based on observations of his classes.

Table 3.3

Triangulation between Professor A's answers in the interview and our observations of his classes.

SC	COMPONENTS	CLASS OBSERVATIONS
General questions	Criteria for designing and implementing classes	▪ It was evident that, to some extent, he does follow the criteria he says he follows (he starts the class by connecting with the students' existing knowledge; he creates a familiar atmosphere and transmits confidence to students; he follows a logical order in the sequence of content; and he explains why this subject is taught rather than a different one).
	Teaching model	▪ Although he involves the students to some extent, his classes are lecture-based rather than dialogic, since transmission of knowledge was observed above all. Similarly, according to our observations, he does not attempt to teach mathematics through real-world applications (i.e. the model he claims to follow is not consistent with our observations).

SC	COMPONENTS	CLASS OBSERVATIONS
Epistemic	Errors	▪ He makes some errors in his explanations, but he realizes and corrects these.
	Ambiguities	▪ He engages in dynamic discourse (metaphors, gestures, etc.) and also relates the notion of slope to the students' experiences.
	Diversity of processes	▪ He prioritizes mechanization and the algebraic resolution of exercises and gives two initial demonstrations of basic derivation rules. ▪ He engages in little reasoning, gives intra-mathematical examples, a lot of algorithmization but does not cover modelling. ▪ In each of his classes, it was noted that he prioritizes the resolution of intra-mathematical exercises.
	Representative sample of the multiple meanings of the mathematical object to be taught	▪ It was observed that he uses the different meanings of derivative (limit of the average rate, slope of the tangent line and instantaneous velocity). ▪ He uses various modes of expression, conversion and treatment. ▪ He uses different ways to represent the derivative, but not the table form. ▪ It is evident that he implements his classes in accordance with the syllabus.
Cognitive	Previous knowledge	▪ He does not carry out an initial assessment of the students' existing knowledge; he assumes that they already know it. However, he starts the topic with a recap (the slope). ▪ He proposes achievable content within the students' zone of proximal development.
	Adaptation of the curriculum to individual differences	▪ He uses geometric graphics to accompany the algebraic resolution of derivatives exercises to enhance student visualization. He proposes tasks to be completed outside of class hours. When he thinks a student hasn't understood some aspect, he tries to explain it again, but in a different way.
	Learning	▪ It was evident that the assessments that carry most weight are summative tests common to all groups. It was noted that if the teacher detects that a student is struggling to learn something, he approaches the student and speaks to or helps him/her at any time in an attempt to create a familiar environment.
	High cognitive demand	▪ He follows a guide of tasks common to all groups, which mainly contains exercises for mechanization and application of basic derivative rules. These tasks promote mechanization and are not cognitively demanding.

SC	COMPONENTS	CLASS OBSERVATIONS
Interactional	Teacher-learner interaction	▪ From the classes that were observed, it was clear that he makes an effort to ensure that the students understand his explanations, which are organized in a logical way. In addition, it was clear that he helps the students with any queries they have. ▪ He uses a range of argumentative resources, but uses a lecture-based approach in his explanations.
	Interaction between learners	▪ The class is fundamentally lecture-oriented; only occasionally does he encourage dialogue between the students.
	Autonomy	▪ He creates work teams to resolve some tasks in class (called workshops), which count towards the students' grades. Given that these are tasks that count towards assessments, the groups work autonomously. Students work autonomously in these workshops and in assignments completed outside of class hours. However, given that the classes are basically lectures, most of the time the teacher does not encourage student autonomy.
	Formative assessment	▪ It was evident in the classes that the teacher interacts with the students when he feels that they have not understood him; he uses questions and follow-up questions.
Mediational	Material resources	▪ The use of software was not observed in the classes that were filmed (although we were able to infer that he uses it in other classes).
	Number of students, timetable and classroom conditions	▪ The number of students in the classes is very high. ▪ The classroom conditions are reasonable, although the whiteboard is small and reflects light. The quality of the multimedia projector is also low. However, there is enough space for students to work in collaborative groups in the workshops.
	Time (for group teaching, tutoring, learning)	▪ He works on the core content in his classes. The content students work on in tasks completed outside of class hours has already been covered in class. ▪ The teacher spends a lot of time on solving procedural exercises and focusing on aspects of derivatives that pose the biggest problems for students.
Affective	Interests and needs	▪ The list of tasks he follows consists mainly of procedural exercises. We noted that just one contextualized task based on derivatives was included in this list. ▪ Although the teacher claimed that, in the optimization part, he presents situations that allow students to see how

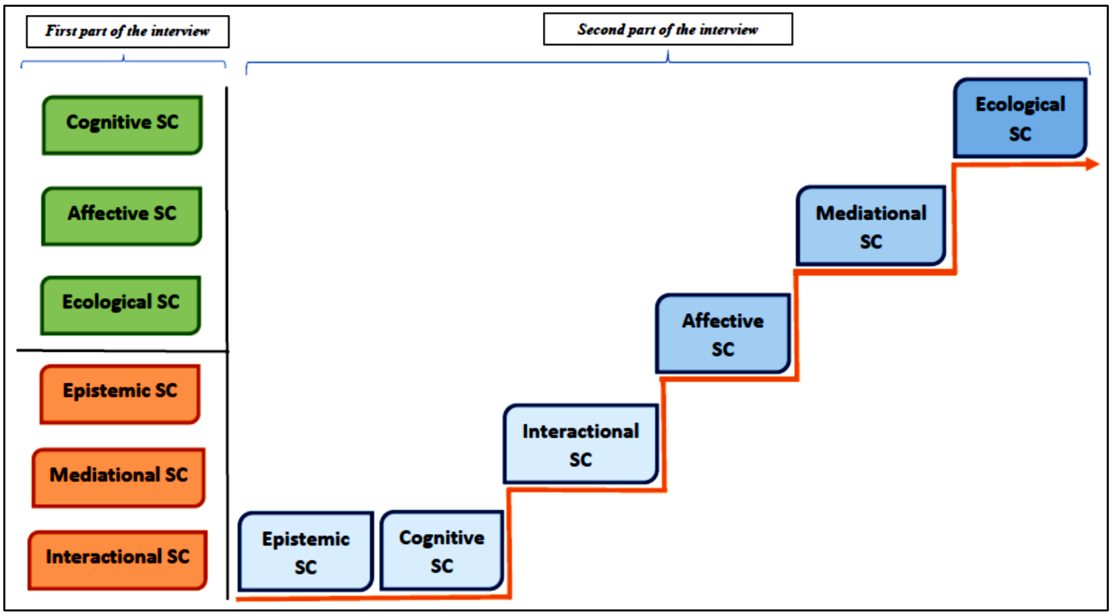
SC	COMPONENTS	CLASS OBSERVATIONS
		derivatives function in the workplace, there was no evidence of this in the classes we filmed.
	Attitudes	▪ He applies extrinsic motivation when he includes tasks for completion outside of class hours in the assessment of the subject. ▪ The students complete the tasks proposed by the teacher to carry out outside of class hours.
	Emotions	▪ Within lecture-based classes, the teacher makes an effort to encourage student participation (he asks them to approach the whiteboard to solve tasks, asks them questions and follow-up questions, etc.). ▪ Indeed, he was friendly, attentive and kind to students in all classes we filmed.
Ecological	Alignment with the curriculum	▪ The content he implements on derivatives and his assessments are consistent with the curricular guidelines for the degrees.
	Intra/interdisciplinary connections	▪ He makes statements about the future applicability of content relating to derivatives, but these are general comments about applicability to other subjects in the degree.
	Social-professional usefulness	▪ There was no evidence that he focuses on developing his students' mathematical competence in such a way that they can apply derivatives to solve a variety of problems.
	Teaching innovation	▪ There was no evidence that he uses the technological resources he claimed to use.

3.6. Conclusions

Our results allowed us to answer the question we sought to address in this article, i.e. what criteria guide the practice of this Peruvian professor and help him explain mathematics in basic science classes taught as part of engineering degrees, with specific reference to derivatives? In addition, the triangulation we performed between his own words and his actions, as observed in the classroom, allowed us to conclude that these criteria do indeed play a major role in his practice (Figure 2).

Figure 3.2

Scheme of the suitability criteria that guide the practice of Professor A



The top part of the left-hand column of the diagram in Figure 2 shows the didactic suitability criteria mentioned in Professor A's answer to the question about the criteria that guide his teaching practice (cognitive, affective and ecological), while the bottom part reveals the didactic suitability criteria that were not mentioned in his answers (epistemic, mediational and interactional) (first part of the interview).

The column on the right contains the suitability criteria mentioned in his answers to more specific questions related to some of the components of the didactic suitability criteria (second part of the interview). As expected, given the questions asked, the six criteria appear in this column. Professor A did not attribute equal importance to all of these when he reflected on and explained his practice. A step diagram has been used to represent the different degrees of importance of the criteria in guiding the teacher's practice; the most important criteria appear on the upper steps and the least important on the lower steps. In addition to indicating the level of importance attached to the criteria, the way they have been arranged on the steps is also intended to represent how some suitability criteria were subordinated to others. The order in which the criteria appear on the steps is the result of the triangulation performed between the professor's answers and our conclusions from observing his classes.

In the initial interview, Professor A explained that his practice is guided by cognitive, affective and ecological criteria. However, when more specific questions were asked about cognitive criteria in the second part of the interview, we were able to conclude that: 1) Although he takes previous knowledge of a topic into account, he does not spend time teaching the topic if students are not up to speed; 2) Similarly, he does not address diversity in the classroom; 3) He does not propose scenarios involving a high cognitive demand, etc., which he justifies by having to follow the syllabus and the lack of time. These findings, together with the triangulation of our observations of his classes, show that cognitive criteria are subordinated to mediational and ecological criteria in Professor A's classes.

Moreover, epistemic criteria, which this professor initially did not mention in his answers to specific questions, gained importance as he considered different meanings of derivatives, the use of different representations, etc.; at the same time, however, he said that he does not ask students to carry out relevant mathematical processes such as problem solving and modelling, since he presents the subject in a very procedural way, which he blamed on a lack of time and compliance with the syllabus. In other words, although the second part of the interview indicated that epistemic criteria play a certain role in guiding his practice, these are subordinated to mediational criteria (especially lack of time) and ecological criteria (compliance with the syllabus); even the fact that he explains different interpretations of the derivative is justified by its inclusion in the syllabus.

Although interactional criteria are not mentioned in professor A's initial responses, our observations of his classes and the answers he gave when asked specifically about these aspects allowed us to conclude that they play a role in the implementation of his classes. For example, we observed that he used different argumentative resources (questions, follow-up questions, metaphors, stories and anecdotes) to engage, include and involve most students in his classes and encourage them to participate. In addition, he created moments to promote student autonomy through teamwork. However, his interaction was also limited by the classroom conditions, the number of students and the need to follow the syllabus within a set timeframe. In other words, these criteria are also subordinated to mediational and ecological criteria.

The Professor attached some importance to affective criteria in his initial responses, and his answers to specific questions in the second part of the interview also indicated that he takes these into account; this was corroborated by our observations of his classes. For example, he tries to build students' self-esteem by creating an environment of familiarity and confidence to help them lose their fear, rejection and phobia of mathematics, and he proposes tasks he thinks may be of interest to them because they relate to their future profession. Nevertheless, this is carried out within a lecture-based model and without actually focusing on the modelling of tasks related to the profession. We were able to conclude that these criteria are also subordinated to mediational and ecological criteria.

Although media' criterion did not feature in professor A's initial responses, our observations of his classes and the answers he gave when asked specifically about this aspect reveal that it plays a major role in guiding the implementation of his classes. For example, he uses software such as Demos and GeoGebra in his classes, although this was not observed in the classes we filmed. He does not cover modelling due to a lack of time, etc. Moreover, he considers the classroom conditions and the number of students to be detrimental to good teaching of the subject.

By contrast, ecological criteria did appear in his initial responses and the triangulation performed showed that they play a major role in guiding his practice, which he justified primarily by the need to comply with the syllabus, although in his reflections he also explained it in terms of his students' future careers. The triangulation performed between the professor's answers in the interview and our observations of his classes reveal that these two criteria (ecological and mediational) carry the greatest weight in guiding his practice and relegate the other criteria (epistemic, cognitive, interactional and affective) to lower positions, although interactional and affective criteria play a more significant role than cognitive and epistemic criteria.

With respect to ecological criteria, it should be noted that the teacher uses the "Social-professional usefulness" component to justify his highly mechanical, somewhat irrelevant presentation, but not his failure to include modelling processes. In other words, the effect of including these criteria is to reduce epistemic suitability (i.e. diversity of processes), when the effect could be to increase this if his classes included modelling. This finding is consistent with that of García (2013); on the one hand, he considers that the students are future engineers who will need mathematics but, on the other hand, he implements his teaching through the use and abuse of algebra and mechanization and a disregard for modelling processes.

The diagram showing the importance the professor attributes to the different didactic suitability criteria in guiding his practice could provide a plausible explanation as to why basic science classes taught as part of engineering degrees are implemented in line with the findings of Villanueva (2019) and Vargas (2010) (i.e. lecture-based with an emphasis on procedural aspects) and also why innovations such as those proposed by Camarena (2013) and Rodríguez Gallegos (2017) are not included.

Finally, the analysis method used for Professor A is also being carried out with the other participants, which will allow us to perform a cross-sectional analysis of the data in the future. In particular, it will allow us to study how the level of importance attached to the different suitability criteria in guiding teaching practice varies from professor to professor.

Acknowledgements

This work was carried out within the framework of the research project on teacher training: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Authors' contributions statements

The first author, W. G. C., carried out the field work and participated in all other phases involved in preparation of the article. The second author, V. F. M., participated in all phases except the field work. The third author, L. M. M., participated in the analysis of the results.

Data availability statement

Anyone who makes a reasonable request to the first author of the article will be provided with the data that support the results of the study.

References

Arana-Pedraza, R. A., Ibarra, S. y Font, V. (2020). Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas en ingeniería: un primer acercamiento. In Y. Morales-López y A. Ruiz, *Educación Matemática en las Américas 2019* (928-935). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en la educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema*, *35*(69), 263-288. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico, *Bolema, 34*(66), 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Camarena, P. (2013). A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. *Innovación Educativa*, *9*(46), 17-44.

Cooper, J., Levi Gamlieli, H., Koichu, B., Karsenty, R., & Pinto, A. (2020). Instructional innovation in mathematics courses for engineering programs – a case study. En Inprasitha, M., Changsri, N. & Boonsena, N. (Eds). (2020). *Interim Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Khon Kaen, Thailand: PME.

Capote, G., Rizo, N. y Bravo, G. (2016). La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. *Revista Universidad y Sociedad, 8*(1), 21-28.

Carlos Guzmán, J. (2018). Buenas prácticas de enseñanza de los profesores de educación Superior. *REICE. Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación, 16*(2), 133-149. https://doi.org/10.15366/reice2018.16.2.008

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia, 35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Font, V. (2019). Dilemas sobre las matemáticas entendidas como una materia general (ciencia básica) para diferentes carreras (profesiones). En Arango, A. J., Sánchez, O., Vargas, H., Ariza, M. X., Díaz, S. y Canoles, J. C. (Eds.), *Memorias III Congreso ciencias básicas en un mundo globalizado. Investigación experimental y simulación matemática*. Tunja, Colombia: Ediciones Usta-Universidad Santo Tomás.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje, 33*(1), 89-105.

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37*(1), 29-42.

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa, 44*, e172011. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Gusmão, T. C. R. S., & Font, V. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. *Educação Matemática Pesquisa, 22*(3), 666-697.

Juárez Ramírez, J. A., Chamoso Sánchez, J. M. y González Astudillo, M. T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(3), 161-178. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041

Monforte, G. L. (2011). Debates sobre el papel de las matemáticas en la formación de los ingenieros civiles decimonónicos. In *Técnica e ingeniería en España* (pp. 255-298). Zaragoza, El Ochocientos: de los lenguajes al patrimonio.

Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, *45*, e189468. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C. y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM*, *49*(5), 799-812. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0870-8

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*.

Rodríguez Gallegos, Ruth. (2017). Repensando la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros: actualidades y desafíos. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, *8*(15), 69-85. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.55

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books.

Seckel, M. J., Breda, A., Sánchez, A. y Font, V. (2019). Criterios asumidos por profesores cuando argumentan sobre la creatividad matemática. *Educação e Pesquisa, 45*, e211926. http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201945211926

Seckel, M. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. *Magis*, *12*(25), 127-144. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp

Sousa, J.R., Silva Gusmão, T.C.R., Font, V., & Lando, J.C. (2020). Task (Re)Design to Enhance the Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers. *Acta Scientiae, 22*(4), 98-120. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5711

Vargas Muñoz, D. (2010). *Evaluación de la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje en las aulas de ingeniería de las universidades derivadas chilenas*. (Tesis Doctoral inédita, Universidad de Sevilla). idUS. https://idus.us.es/handle/11441/24043

Villanueva, I. Z. (2019). *Sistema de tareas docente en el aprendizaje de la derivada en los estudiantes del primer año de la escuela profesional de ingeniería en telecomunicaciones, UNSA-2018.* (Tesis Doctoral, Universidad Nacional de San Agustín, Arequipa). Archivo digital. http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/10328

4

ARTÍCULO CIENTÍFICO 2

Análisis de las Pautas que Rigen la Práctica del Profesor en la Enseñanza de Derivadas en Ciencias Básicas en Carreras de Ingeniería

Este artículo ha sido aceptado para su publicación como investigación original en la Revista *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, por el autor: Walmer Garcés Córdova.

DOI: https://doi.org/10.17583/redimat.7657

Indicios de calidad

a) Base de datos de indexación: Indexada en: Emerging Sources Citation Index de WoS, con un Journal Citation Indicator de WoS (JCI 2020) = 0,26, Research Areas: Education & Educational Research; Web of Science Categories: Education, Scientific Disciplines - ESCI, 62/78 (Q4).
b) Otras bases de indexación: Educational Research Abstracts, Education Resources Information Center, DOAJ, DIALNET.
c) Índice MIAR: MIAR (ICDS 2020 = 9,4).
d) Evaluada en: Sello de calidad FECYT (2016); DOAJ; ERIHPlus; LATINDEX. Catálogo.

Citar como: Garcés, W. (2021). Análisis de las Pautas que Rigen la Práctica del Profesor en la Enseñanza de Derivadas en Ciencias Básicas en Carreras de Ingeniería. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 10*(3). https://doi.org/10.17583/redimat.7657

Resumen

El objetivo es inferir los criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en carreras de ingeniería, en concreto, para explicar derivadas. Se trata de una investigación cualitativa que busca comprender la enseñanza de las matemáticas a través del análisis de las prácticas de un profesor y de su reflexión sobre ellas, que fue seleccionado como estudio de caso. Con base en los criterios de idoneidad didáctica, se diseñó un cuestionario para entrevistarlo y se infirieron los criterios que sigue en el diseño e implementación de sus clases, las mismas que fueron videograbadas; después se realizó la triangulación entre lo que este docente dice y lo que hace. Este profesor se guía por el criterio ecológico (sílabo) e interaccional (trabajo en equipo), aunque según él son, sobre todo, el cognitivo, el mediacional y el ecológico (profesión futura) los que orientan su práctica. Los criterios que guían su práctica explican por qué se están implementando las clases de ciencias básicas en ingeniería de manera expositiva y procedimental, y por qué no se incorporan innovaciones.

Palabras clave: Criterios de Idoneidad Didáctica, Derivadas, Enseñanza de las Matemáticas, Ingeniería, Reflexión sobre su práctica.

Analysis of the Guidelines Governing the Teacher's Practice in the Teaching of Derivatives in Basic Sciences in Engineering Careers

Abstract

The objective is to infer the criteria that guide the teacher's practice to explain mathematics in engineering careers, in particular, to explain derivatives. It is a qualitative research that seeks to understand the teaching of mathematics through the analysis of a teacher's practices and his reflection on them, which was selected as a case study. Based on the didactic suitability criteria, a questionnaire was designed to interview him and the criteria he follows in the design and implementation of his classes were inferred, the same ones that were videotaped; then the triangulation between what he says and what he does was carried out. This teacher is guided by the ecological criteria (syllabus) and interactional (teamwork), although according to him it is, above all, the cognitive, the mediational and the ecological (future profession) those that guide his practice. The

criteria that guide his practice explain why the basic science classes in engineering are being implemented in an expository and procedural way, and why innovations are not incorporated.

Keywords: Criteria of Didactical Suitability, Derivatives, Mathematics Teaching, Engineering, Reflection on their practice.

4.1. Introducción

A partir del siglo XX la enseñanza de las matemáticas para ingeniería ha formado parte de las ciencias básicas, estructuradas como un ciclo común a varias ramas de la ingeniería. Esto ha sido así por diferentes motivos, ya sea por la poca importancia que se daba a la relevancia del contexto en la aplicación del conocimiento matemático, o para evitar enseñar unas matemáticas conductistas, mecanicistas, rutinarias, etc. Es así como en el siglo pasado era habitual que las ingenierías se organizaran con un ciclo de estudios generales en la base, que se supone provee a los futuros ingenieros herramientas matemáticas básicas que luego van a aplicar en otros cursos del plan curricular de su carrera, así como en su desempeño profesional. En consecuencia, las ciencias básicas se incorporan en la formación del ingeniero aportando, en teoría, estrategias y conocimientos para que éste sea capaz de afrontar y resolver problemas de su especialidad (Monforte, 2011).

Sin embargo, a partir de las tendencias internacionales en la enseñanza de la ingeniería, en la actualidad han surgido dudas y dilemas relacionados con esta estructura y el rol que cumplen las ciencias básicas (y las matemáticas en particular) en la formación de ingeniería, entre las que destacan, según Font (2019): 1) el cuestionamiento de que un conocimiento general de base sea fácilmente aplicado a diferentes contextos; 2) la presentación de contenidos que después en la práctica no se utilizan; 3) un enfoque con énfasis en una enseñanza que desarrolle competencias; y 4) un elevado número de estudiantes reprobados. En esta línea de repensar el papel de las matemáticas en las carreras de ingeniería, Capote et al. (2016) sostienen que, si bien, el ingeniero debe tener conocimiento profundo de ciencias básicas, la sociedad actual demanda una enseñanza que forme profesionales que respondan a las exigencias del desarrollo contemporáneo, lo cual exige que el proceso docente-educativo y los modelos curriculares sean interactivos, centrados en el estudiante, colaborativos y de aprendizaje para toda la vida.

Como respuesta a estos dilemas y demandas, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias y conocimientos de los profesores de matemáticas y, sobre cómo es la enseñanza de las matemáticas en estos ciclos básicos. Con relación a la enseñanza del cálculo diferencial e integral en las carreras de ingeniería en el Perú, hay cierto consenso difuso en las siguientes afirmaciones: a) los alumnos tienen dificultades para su aprendizaje, b) éstas se deben a una enseñanza netamente algorítmica de aprendizaje de fórmulas, mecanicista y rutinaria, o bien, a una enseñanza rigurosa y formalista, c) una enseñanza que deja de lado la comprensión significativa de las nociones básicas del cálculo y sus aplicaciones, lo cual limita al ingeniero el uso de las matemáticas en la resolución de problemas de su profesión.

En esta línea, presentamos un estudio de caso de un profesor que enseña cálculo diferencial en una facultad de ingeniería en el Perú, de manera que la triangulación de información nos ha permitido responder la pregunta: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica de este profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería, en concreto, para explicar derivadas?

4.2. Revisión de la Literatura

En esta sección enfocamos nuestra atención en investigaciones realizadas sobre dos temáticas: 1) la enseñanza del cálculo diferencial en ingeniería, en especial, en el Perú; y 2) la inferencia de criterios que orientan la práctica del profesor a partir del análisis de su práctica docente y sus reflexiones sobre esta. Referente a la primera, García (2013) sostiene que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (en particular, del cálculo) presenta importantes dificultades para los estudiantes de ingeniería, problema que dista mucho de tener soluciones efectivas, puesto que la tendencia a reducir el álgebra (soporte de aprendizaje del cálculo) a procesos aritméticos y algorítmicos sólo ha complicado más las cosas, porque conlleva una descontextualización de dicha materia.

Este autor también, indica un dilema que afecta la enseñanza del cálculo en ingeniería (ya señalado en Artigue, 1995): por una parte, el cálculo es básico para el desarrollo profesional del futuro ingeniero, pero, por otra parte, en su enseñanza se hace uso y abuso del álgebra y la mecanización en detrimento del proceso de modelización. Además, la algebrización y aritmetización del cálculo han traído consigo aprendizajes sin comprensión y soluciones mecanicistas, dejando en segundo plano aspectos cognitivos, socioafectivos y la contextualización.

Respecto de la enseñanza de las matemáticas en el ciclo básico, se han realizado diversas investigaciones (varias en cálculo diferencial e integral) sobre competencias y conocimientos de los profesores de matemáticas (entre otros, Arana, Ibarra & Font, 2020), y, también, sobre cómo se imparte la enseñanza de las matemáticas (Camarena, 2013; Cooper, Levi Gamlieli, Koichu, Karsenty & Pinto, 2020; Juárez Ramírez, Chamoso Sánchez & González Astudillo, 2020; Rodríguez, 2017).

En el caso del Perú y otros países de la región la investigación sobre la enseñanza de las matemáticas (en particular, del cálculo diferencial) en ingeniería es escasa, solamente hemos encontrado algunas propuestas de innovaciones. Así, Villanueva (2019) indaga sobre el aprendizaje de la derivada en el primer año de ingeniería de Telecomunicaciones de una universidad peruana, entre otros resultados, encontró que uno de los problemas que afrontan estos estudiantes, es que no logran alcanzar un aprendizaje significativo de la derivada con los métodos tradicionales que enfatizan una enseñanza procedimental. Vargas (2010) investiga sobre evaluación de la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en aulas de ingeniería de universidades chilenas, y, entre otros aspectos, concluye que predomina el método expositivo o magistral debido al elevado número de estudiantes en el aula, lo cual, junto con el curso y la relación de éstos con los profesores, condicionan la metodología.

En relación a la segunda temática, diversas líneas de investigación infieren los conocimientos y competencias del profesor a partir del análisis de sus prácticas docentes y de sus reflexiones sobre estas, así como, ciertos patrones o regularidades que orientan su práctica docente. Pepin, Gueudet y Trouche (2017) sostienen que las consideraciones implícitas y tácitas del profesor en la selección e implementación de secuencias de tareas dan cuenta de los criterios que orientan su práctica e inciden en su capacidad de diseño pedagógico, la cual puede desarrollarse a través de la reflexión en la acción (Schön, 1983). Por su parte, Carlos Guzmán (2018) a través de entrevistas en profundidad diseñadas a partir del marco teórico tomado como referente (las nociones de docencia efectiva y buenas prácticas para la enseñanza), estudia las cualidades y formas de enseñar de un grupo de profesores de ingeniería que, a priori, realizaban buenas prácticas de enseñanza, con el objetivo de que los criterios que orientan su práctica permitiesen delinear sugerencias para su formación.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) se ha investigado un fenómeno que se presenta a menudo: los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (CID) propuestos en el EOS, funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando éstos valoran un episodio o justifican que una propuesta didáctica representa una mejora, o bien, cuando reflexionan sobre su práctica, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión (Breda, 2020; Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Seckel, Breda, Sánchez & Font, 2019).

En este estudio, análogamente a lo hecho en Carlos Guzmán (2018), y acorde con el fenómeno comentado, hemos elaborado y aplicado una entrevista semiestructurada para inferir los criterios que orientan la práctica del profesor estudio de caso, y para diseñar el cuestionario de la entrevista se ha usado la herramienta CID.

4.3. Marco teórico

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero & Font, 2007 y 2019) considera cinco tipos de análisis sobre los procesos de instrucción: 1) Identificación de prácticas matemáticas; 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas; 4) Identificación del sistema de normas y metanormas; y 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción (Font, Planas & Godino, 2010; Breda, Pino-Fan & Font, 2017).

El primer tipo de análisis didáctico explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción matemático; el segundo, se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas; el tercero, está orientado, sobre todo, a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas, las cuales están soportadas por una trama de normas y metanormas; mientras que el cuarto estudia dicha trama. Los cuatro primeros tipos de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, mientras que el quinto, se centra en la valoración de la idoneidad didáctica basado en los análisis didácticos previos, y es una síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción.

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados (aprendizaje) y aquellos institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno). Este constructo multidimensional se desglosa en criterios de idoneidad parcial que pueden ser útiles para guiar procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y valorar su implementación (Breda, Font & Pino-Fan, 2018).

En el EOS se consideran seis criterios de idoneidad parcial: 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son "buenas matemáticas"; 2) Idoneidad cognitiva, para valorar si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, si los aprendizajes logrados se acercan a los pretendidos; 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos; 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales usados en el proceso de instrucción; 5) Idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso; y, 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, directrices curriculares, condiciones del entorno social y profesional, entre otros. (Font, Planas & Godino, 2010).

Para la operatividad de los CID se define un conjunto de componentes e indicadores observables que sirven de guía para el análisis y valoración del proceso de instrucción en cualquier etapa educativa (Breda, Pino-Fan & Font, 2017). En la Tabla 1 se detallan los criterios y componentes de idoneidad didáctica (por falta de espacio no se especifican los indicadores).

La idoneidad didáctica está siendo utilizada como herramienta para: 1) analizar secuencias didácticas diseñadas e implementadas por profesores para conseguir mejorar la enseñanza de las matemáticas (Breda, 2020; Morales-López & Font, 2019; Sousa, Gusmão, Font & Lando, 2020; Capone, 2021); 2) organizar la reflexión del profesor sobre su práctica en programas de formación (Esqué & Breda, 2021; Giacomone, Godino & Beltrán-Pellicer, 2018; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya & Bustamante, 2019; Seckel & Font, 2020), ya que facilita la reflexión de la complejidad de objetos matemáticos y factores implicados en su estudio; y 3) para el análisis y valoración de lecciones de textos (Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer & Godino, 2020) y para el diseño y valoración de tareas matemáticas (Gusmão & Font, 2020).

Tabla 4.1

Criterios y componentes de idoneidad didáctica.

Criterio	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Emocional	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Nota: Extraída de Morales-López y Font (2019).

Debemos destacar a Capone (2021) quien en su investigación diseña e implementa una secuencia de tareas de Cálculo II con el objetivo de mejorar las habilidades matemáticas de estudiantes de ingeniería (mejora de la idoneidad cognitiva), así como fomentar en ellos mayores disposiciones motivacionales y afectivas hacia la disciplina (mejora de la idoneidad emocional). Con base en la experimentación y los resultados, dicho autor concluye que estas dos idoneidades efectivamente han mejorado (aumento considerable en el interés y motivación de los estudiantes; y que muchos estudiantes con deficiencias de aprendizaje iniciales en estos temas lograron resultados positivos trabajando en su zona de desarrollo próximo con un soporte adecuado). Los CID son la herramienta teórica que usaremos para responder a la problemática planteada en esta investigación.

4.4. Metodología

Es una investigación con enfoque interpretativo de corte cualitativo, pues el propósito no es explicar, predecir o transformar la realidad, sino que se busca comprender los criterios que orientan la enseñanza de las matemáticas en ingeniería del profesor estudio de caso, mediante el análisis de sus prácticas docentes y de su reflexión sobre ellas.

4.4.1. Fases de la investigación

El método para inferir las consideraciones implícitas en la selección, secuenciación y ejecución de tareas del profesor adoptó las siguientes fases:

Fase 1: Selección de los participantes. Se contactó a un grupo de 10 docentes con experiencia en la enseñanza de las matemáticas en ingeniería, siendo ocho de ellos graduados en matemáticas y dos en educación con mención en matemática. La selección se realizó con base a dos criterios: 1) son profesores que imparten clases de cálculo diferencial e integral en facultades de ingeniería de diversas universidades públicas y privadas en Lima-Perú, y 2) por su disposición a participar en la investigación. Después de presentarles los objetivos de investigación, se les solicitó su participación en la misma y su consentimiento para ingresar en sus aulas y registrar en videograbaciones el desarrollo de sus clases sobre derivadas y sus aplicaciones; así como, para que nos facilitaran su material de trabajo y, también, su disposición a participar en una entrevista semiestructurada.

Fase 2: Recopilación de documentos curriculares, materiales elaborados por el profesor para su implementación en el aula, etc. Todos los docentes participantes de la investigación nos proporcionaron, para su análisis, documentos curriculares (sílabos), cronogramas del ciclo académico, planes de clase, presentaciones del tema de derivadas, separatas de ejercicios propuestos y desarrollados, material de consulta para los alumnos, pruebas objetivas y prácticas calificadas, así como material de talleres para trabajo de equipo en aula.

Fase 3: Grabación de las clases. Se videograbaron las clases impartidas por estos profesores (entre dos y tres clases según el profesor) sobre derivadas y sus aplicaciones; éstas tuvieron una duración promedio de 100 minutos.

Fase 4: Elaboración del instrumento para la entrevista. Con base en: 1) los criterios de idoneidad didáctica (referente teórico de esta investigación), y 2) la observación de las clases videograbadas, se diseñó un cuestionario que sirviese como base para una entrevista semiestructurada. Luego, se realizó una entrevista piloto con uno de los profesores y se revisó el instrumento teniendo en cuenta: a) dificultades de comprensión y redundancias de algunas preguntas, y b) la opinión de un experto en el uso de herramientas EOS para la investigación de conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas.

De esta manera, se obtuvo un cuestionario definitivo de 46 preguntas, con tres de tipo general y 43 formuladas sobre la base de los CID (epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional y ecológico), sus componentes e indicadores. Este cuestionario se aplicó a los 10 profesores con pequeñas variaciones derivadas de la observación de sus clases (ejemplo, respecto del uso de software se varió la pregunta según hubiese usado, o no).

Fase 5: Radiografía de las clases e inferencia de criterios que orientan la práctica del profesor. Para cada profesor se realizó un análisis experto de las clases videograbadas con los cuatro primeros tipos de análisis propuestos en el modelo de análisis didáctico del EOS, tal como se hace en Breda, Hummes, da Silva y Sánchez (2021) y en Pochulu y Font (2011), para determinar las prácticas, objetos y procesos matemáticos, funciones del profesor y del alumno, configuraciones didácticas, conflictos semióticos, patrones y normas.

Sobre esta base, se infirieron los criterios que sigue cada profesor en el diseño e implementación de sus clases, utilizando para ello, como categorías a priori, los indicadores y componentes de los CID – sin realizar la valoración experta de la idoneidad didáctica (quinto tipo de análisis) – los cuales se triangularon con los criterios que el profesor dice seguir.

Fase 6: Selección del estudio de caso. Para este documento se ha seleccionado como estudio de caso uno de los profesores, que le denominamos Docente F, por su mayor disposición y colaboración en el proceso (por ejemplo, nos proporcionó más materiales de trabajo que sus colegas, y permitió la videograbación de tres de sus clases). En sus tres clases videograbadas este profesor explicó el tema de derivadas y sus aplicaciones (prueba de la derivada para una función creciente y decreciente en un intervalo, máximo y mínimo local y criterio de la primera derivada; luego, prueba de concavidad, función cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, criterio de la segunda derivada y ejemplificación; y por último, formas indeterminadas de límites y la regla de L'Hôpital). Cada contenido es mecanizado mediante su aplicación en diferentes ejercicios.

Fase 7: Entrevista al profesor para que explique cuáles son, según él, los criterios que orientan su práctica docente. Se realizó la entrevista videograbada al profesor F con la finalidad de determinar los criterios que, según él, orientaban su práctica pedagógica, esta duró 1,50 horas y tuvo dos partes claramente diferenciadas. En la primera, se hicieron tres preguntas generales (sobre su formación, sobre cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica, y acerca del modelo de profesor con el que se identificaba); y en la segunda, se formularon preguntas más específicas relacionadas con alguno de los componentes de los CID.

Fase 8: transcripción de la entrevista al profesor F. Se realizó la transcripción literal de la entrevista videograbada.

Fase 9: Inferencia de criterios a partir de la entrevista. Se analizó el contenido de la entrevista para inferir los criterios que según el profesor orientan su práctica, de manera similar a como se hace en Breda (2020) y en Seckel, Breda, Sánchez y Font (2019).

Fase 10: Triangulación de fuentes. Finalmente, se realizó la triangulación de fuentes (sobre todo, de los resultados de la fase 5 sobre clases observadas y las respuestas de la entrevista) para inferir resultados.

4.4.2. *Análisis de los datos*

En la fase 5 se realizó, primero, el análisis de los primeros cuatro niveles propuestos en el modelo de análisis didáctico basado en constructos del EOS (identificación de prácticas matemáticas, de objetos primarios y procesos, análisis de interacciones didácticas y conflictos y, de las normas que regulan el proceso de enseñanza).

Las herramientas de estos cuatro niveles de análisis propuestos por el EOS permiten descomponer la transcripción de una clase en una trayectoria de configuraciones didácticas y, para cada configuración, estudiar diferentes aspectos. Por ejemplo, la primera configuración didáctica (CD1) de la Figura 1 se produce justo después del inicio de la tercera clase, donde el profesor ha recordado el criterio de la primera derivada y su aplicación para determinar máximos y mínimos locales, intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función; y termina cuando el profesor inicia la ejemplificación de ejercicios aplicando la segunda derivada, la cual se institucionaliza en la CD2.

Esta CD1 comienza con el dibujo de la gráfica en el plano cartesiano de una función cóncava hacia arriba y su definición, y termina con la explicación de la noción de punto de inflexión. Va desde la línea 1 de la transcripción hasta la 5 (Figura 1) (optamos por considerar como línea un párrafo completo que tuviese sentido de manera global). Luego, se usó la herramienta CID para inferir algunos criterios que orientan la práctica del profesor. Por ejemplo, en la CD1 de la figura 1, se infiere que el profesor tiene en cuenta los saberes previos necesarios para entender el criterio de la segunda derivada.

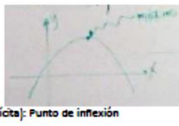
En la fase 8 se transcribió la entrevista del profesor, y en la 9, se infirieron los criterios que, según él, orientan su práctica docente. Por ejemplo, del segmento de transcripción siguiente, inferimos que para el docente F es importante tener en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes:

> Pregunta: ¿Podría explicar cuáles son los criterios principales que tiene en cuenta al diseñar e implementar sus clases en esta facultad de ingeniería?
>
> Respuesta: (03′31″) El diseño metodológico que utilizo es en varias fases no, hay un inicio del modelo educativo, están luego los saberes previos no, una motivación, luego está una transformación que es básicamente el desarrollo de la clase, luego la parte práctica que trabajamos con los estudiantes del

curso de la facultad de ingeniería donde abordamos algunos problemas aplicativos utilizando los conceptos de derivadas, en qué ámbitos de su carrera profesional pueden utilizar estos conceptos matemáticos. Luego, al finalizar hacemos un cierre donde resumimos lo aprendido en la sesión con los estudiantes, y después doy algunas sugerencias para la siguiente clase. Sí, sí tengo en cuenta los saberes previos de los estudiantes.

Figura 4.1

Configuración didáctica 1 de las clases del profesor F

TIEMPO(min)	LÍNEAS DE TRANSCRIPCIÓN (párrafo)	PRÁCTICAS MATEMÁTICAS	OBJETOS PRIMARIOS	PROCESO PRINCIPAL	FUNCIONES DEL PROFESOR	FUNCIONES DEL ALUMNO	TIPO DE CONFIGURACIÓN DIDÁCTICA	NORMAS	CONFLICTOS SEMIÓTICOS
03' 01''	L1: Tenemos el caso 1 para el criterio de la segunda derivada, que se llama cóncava hacia arriba	P1: Enuncia el criterio de la segunda derivada de una función $f(x)$, (cóncava hacia arriba si es positiva) de manera metafórica	P1: Criterio de la segunda derivada (si la segunda derivada es positiva, es cóncava hacia arriba) R1: Representación simbólica de la segunda derivada de una función cóncava hacia arriba $f''(x) > 0$ D1 (implícita): Mínimo	Enunciación Representación	Recordar conocimientos previos				
03' 12''	L2: Su gráfico va a ser tendiendo hacia arriba	P2: Representa gráficamente en el plano una parábola abierta hacia arriba y señala el punto mínimo	R2: Representación gráfica de la función cóncava hacia arriba 	Representación		Escucha y trata de comprender la explicación del profesor			Posible confusión por parte de los estudiantes ya que no se define de manera formal el criterio de la segunda derivada en un intervalo I, tampoco se precisan muy bien las condiciones de concavidad
03' 51''	L3: Luego se da el caso 2 no, para el criterio de la segunda derivada, y se llama cóncava hacia abajo	P3: Enuncia el criterio de la segunda derivada de una función f(x), (cóncava hacia abajo si es negativa) de manera metafórica	P2: Criterio de la segunda derivada (si la segunda derivada es negativa, es cóncava hacia abajo) R3: Representación simbólica de la segunda derivada de una función cóncava hacia abajo $f''(x) < 0$	Enunciación	Explica de manera expositiva		Magistral		
04' 32''	L4: En este caso es similar a la anterior pero su gráfico tiende hacia abajo y la punta es como de un cerro, es el máximo	P4: Representa gráficamente en el plano una curva abierta hacia abajo y señala el punto máximo	D2 (implícita): Máximo R4: Representación gráfica de la función cóncava hacia abajo 	Representación Representación					
07' 15''	L4: También tenemos el punto de inflexión, ¿qué era el punto de inflexión?	P5: De manera implícita, con gestos, recuerda que el punto de inflexión es donde cambia la concavidad o la curvatura de una función P6: Representa gráficamente en el plano una curva y señala los puntos de inflexión	D2 (implícita): Punto de inflexión R5: Representación gráfica de la curva con sus respectivos puntos de inflexión y ubicación de la segunda derivada de una función, tramo por tramo. 	Enunciación Representación					

Finalmente, se realizó la triangulación de fuentes entre lo declarado por el profesor en la entrevista y lo observado en el aula de clases. En el ejemplo que se ha puesto, a diferencia de otros casos, sí se observó coherencia entre lo que dice y lo que hace, por lo que inferimos que el criterio de tener en cuenta los conocimientos previos necesarios, para él, es un criterio valioso para el diseño e implementación de sus clases.

4.5. Resultados

En la Tabla 2 se resumen los criterios que según el profesor guían su práctica, organizados de acuerdo con los CID, y elaborada con base en la transcripción de la entrevista, tal y como se ha explicado en la metodología seguida para el análisis de datos.

Tabla 4.2

Análisis de respuestas dadas por el Docente "F" en la entrevista y triangulación con lo observado en clase.

CI	COMPONENTE	ANÁLISIS RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Preguntas generales	Formación inicial	▪ Ha obtenido Bachiller y Licenciatura en Matemática Aplicada y Maestría en Gerencia Empresarial; posee experiencia docente en academias preuniversitarias, Escuela de Oficiales de la Fuerza Aérea del Perú y en universidades privadas; capacitaciones en programas de docencia y metodologías.	▪ Asumimos que sí está en posesión de los grados y títulos académicos que señala, además es profesor con experiencia y está en constante actualización.
	Criterios al diseñar e implementar clases	▪ Los saberes previos de los alumnos; seguir el modelo educativo de la universidad; la motivación hacia los estudiantes; la visualización con software y recursos tecnológicos; los problemas de aplicación de los conceptos matemáticos al ámbito de la carrera profesional.	▪ Se evidencia que tiene en cuenta los criterios que afirma seguir (recupera conocimientos previos; sigue el modelo educativo; motivación; usa software; plantea problemas de aplicación a la especialidad)
	Modelo de docente	▪ Se define como docente constructivista desde la perspectiva didáctica, ya que trata de construir el conocimiento sobre la base de los saberes previos; y desde la perspectiva matemática, se considera un docente que explica unas matemáticas realistas y busca las aplicaciones en contexto real del alumno.	▪ Hay mediana participación de los estudiantes, pero no hace clases constructivistas, son magistrales, transmisión del conocimiento. Enseña matemáticas mecanicistas con práctica de ejercicios.
Epistémica	Errores	▪ Afirma que no comete errores matemáticos ya que parte de un trasfondo matemático formal; además, señala que sus clases de derivadas no son tan rigurosas desde el punto de vista matemático, usa la formalidad en	▪ Se observa que en sus clases de derivadas videograbadas, no comete errores de tipo matemático; es poco riguroso en el desarrollo del tema matemático.

CI	COMPONENTE	ANÁLISIS RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		ocasiones, y trabaja la derivada de forma teórico-práctica.	
	Ambigüedades	▪ Sostiene que la intuición es importante en el desarrollo de sus clases de derivadas, la usa para hacer una construcción formal del tema y para que los alumnos tengan una idea de cómo funciona la derivada en la vida cotidiana. ▪ En su opinión, un estudiante de ingeniería debe saber aplicar correctamente las fórmulas y las reglas básicas de derivación. En su proceso de instrucción plantea el problema de derivadas y aplica las reglas y fórmulas de derivación, es decir, enfoca los temas matemáticos de una manera más instrumental.	▪ Efectivamente, utiliza la intuición en todas sus clases para relacionar las derivadas con aspectos cotidianos a los estudiantes. ▪ Observamos que enfoca los temas de forma instrumental, sin demostración, y entrega directamente fórmulas y reglas básicas de derivación. Se aprecia bastante práctica de resolución de ejercicios.
	Riqueza de procesos	▪ Opina que el alumno debe aprender, primero, los conceptos de derivadas; en clases trata de abarcar la mayor cantidad de procesos relevantes de la actividad matemática como la modelización, argumentación y resolución de problemas. No trabaja la demostración por falta de tiempo y por el perfil del estudiante. ▪ Afirma que en clases define la derivada como pendiente de recta tangente y como velocidad instantánea; además, dice que es necesario enseñar diferentes significados de la derivada para que los estudiantes sepan de su utilidad en la vida cotidiana y en su especialidad. ▪ Asegura que presenta una diversidad de problemas de derivadas y sus aplicaciones, por lo menos un problema de cada subtema; dice que abarca todos los temas programados.	▪ Observamos que: enfatiza en la resolución algebraica de ejercicios; hay carencia de procesos matemáticos relevantes: argumentación, modelización, problemas extramatemáticos. ▪ Apreciamos que define la derivada como pendiente de recta tangente, y velocidad instantánea; y, presenta el significado geométrico y algebraico de la derivada. ▪ Se observa que presenta diversidad de situaciones, ejercicios procedimentales para aplicar reglas, fórmulas.
	Muestra representativa de la	▪ Aborda problemas intramatemáticos como extramatemáticos de derivadas, y que de éstos últimos la mayoría del contexto de la Física. Considera que plantear y resolver una gran variedad de ejercicios despierta la imaginación de	▪ En efecto, la mayor parte del tiempo resuelve ejercicios algorítmicos de derivadas. Plantea escasos problemas extramatemáticos que desarrollen la

CI	COMPONENTE	ANÁLISIS RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	pluralidad de significados del objeto matemático a enseñar	los estudiantes y les ayuda a desarrollar la competencia matemática ▪ Sostiene que en la implementación de sus clases utiliza diversos modos de expresión como el simbólico (notaciones), gestual, verbal y el modo gráfico, puesto que hace representaciones de la derivada en el plano. ▪ En su opinión, es importante enseñar a los estudiantes de ingeniería diferentes formas de representación de la derivada como la representación geométrica en el plano y la representación analítica como un límite. ▪ Afirma que se rige estrictamente al sílabo para desarrollar todos los contenidos y en la forma de enseñarlos; aunque reconoce pone su estilo personal. Además, considera que el sílabo se debería modificar en el sentido de introducir más aplicaciones de la derivada y darle más importancia al proceso de modelización.	competencia matemática en estudiantes. ▪ En sus explicaciones de derivadas sí usa diversos modos de expresión, y su conversión: el gráfico, gestual, verbal y simbólico. ▪ En sus clases utiliza por lo menos dos formas de representación de derivada: la analítica por límite y la representación geométrica. ▪ En efecto, vemos que sigue el sílabo, la programación de contenidos, se rige por los planes de clase. Además, notamos que el sílabo no incluye procesos de modelización.
Cognitiva	Conocimientos previos	▪ Afirma que tiene en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para el estudio de las derivadas, y para recuperarlos aplica ciertas estrategias como por ejemplo, lluvia de ideas, preguntas y repreguntas, entre otras.	▪ Vemos que recupera saberes previos de los estudiantes al iniciar clases de derivadas, aplicando estrategias como preguntas y repreguntas.
	Adaptación curricular a las diferencias individuales	▪ Cuando identifica que los alumnos no poseen los saberes previos necesarios para el estudio de las derivadas, lo que hace es dedica un tiempo para recordarles, les presenta un video corto, formula preguntas y discuten, luego formaliza los conceptos de la derivada.	▪ Observamos que dedica tiempo corto en recordar a los alumnos ciertos saberes que van a usar en clases de derivadas; pero no vemos que presente vídeos
	Aprendizaje	▪ Considera que la distancia entre lo que los estudiantes ya saben y los nuevos contenidos de derivadas que pretende implementar, sí es alcanzable, a pesar de la brecha que existe sobre los saberes previos.	▪ Apreciamos que presenta contenidos de derivadas que están en la zona de desarrollo próximo (ZDP) del alumno, y accesibles para ellos.

CI	COMPONENTE	ANÁLISIS RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Alta demanda cognitiva	▪ Declara que hace lo posible por atender la diversidad de estudiantes en el aula, trata de reforzar y ampliar la parte matemática y práctica de las derivadas, ya que es consciente de la diversidad de alumnos. ▪ Menciona que la manera de asegurarse de que los estudiantes hayan aprendido el tema de derivadas que ha enseñado, es mediante la aplicación de una evaluación rápida al final de la clase; después pide que le presenten sus resultados y luego hace la retroalimentación. ▪ Los instrumentos de evaluación que viene aplicando son pruebas de desarrollo (examen parcial, final y prácticas calificadas). Asegura que es en el procedimiento de estas pruebas y en los resultados de las evaluaciones continuas, donde recopila evidencias de si el aprendizaje se está dando, o no, así como de las dificultades de aprendizaje de los alumnos sobre derivadas ▪ Cuando en sus clases constata que los alumnos no han aprendido sobre las derivadas y sus aplicaciones, entonces hace retroalimentación de lo enseñado y les explica con más detalle ▪ Considera los talleres grupales que implementa en sus clases como tareas de los alumnos, y afirma que estos talleres activan en los estudiantes algunos procesos cognitivos relevantes como argumentación en algunos casos, conexiones intramatemáticas, pero muy poco de generalización y conjeturización.	▪ No queda claro que se esfuerce por atender la diversidad y ritmos de aprendizaje, aunque se centra en practicar ejercicios ▪ No hay evidencia de que aplique una evaluación rápida para darse cuenta del aprendizaje de los alumnos; sin embargo, inferimos que en ciertas clases sí lo hace. ▪ En efecto para evaluar aplica pruebas sumativas de desarrollo y comunes a varios grupos; además, se infiere que en estas evaluaciones puede darse cuenta de las dificultades de aprendizaje. ▪ Se observa que si no hay aprendizaje, hace una pausa, retrocede para retroalimentar y trata de ser más preciso. ▪ En efecto, forma equipos de trabajo y entrega separata de tareas con ejercicios que enfatizan lo procedimental, no exigen alta demanda cognitiva (argumentación, generalización).
Interaccional	Interacción docente-discente	▪ Considera que ha presentado la derivada de manera adecuada con claridad y orden lógico en los contenidos, parte de la representación geométrica luego la interpreta como un límite; además, que siempre hace énfasis en las reglas de	▪ Observamos que hace presentaciones de derivadas con orden lógico, claridad y secuenciación, entendibles para los

CI	COMPONENTE	ANÁLISIS RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		derivación que van a utilizar los estudiantes.	alumnos; se centra en aplicar reglas y fórmulas
		▪ Sostiene que puede identificar las dudas y dificultades de aprendizaje que presentan los alumnos, ya sea por sus expresiones faciales que éstos manifiestan cuando los invita a participar o cuando interactúa con ellos.	▪ Vemos que está atento, lee las diversas expresiones de los estudiantes, dificultades y dudas de aprendizaje; hay cierta interacción con ellos.
	Interacción entre discentes	▪ Afirma que cuando identifica las dudas y dificultades de aprendizaje de los alumnos sobre las derivadas o sus aplicaciones, entonces se les acerca hasta sus lugares, les formula preguntas, trata de atenderlos personalizadamente y procura esclarecerlas.	▪ Apreciamos que interactúa con los alumnos, ante las dudas y dificultades de aprendizaje de derivadas, se acerca, los atiende, los saca a la pizarra, trata de aclararles
		▪ Utiliza algunos recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos en sus clases de derivadas, tales como un vídeo muy corto sobre derivadas, explicación magistral, entre otros.	▪ No se observa que use algún video, pero inferimos que lo hace en otras clases. Usa como recurso argumentativo metáforas, clase magistral
	Autonomía	▪ En clases de derivadas siempre trata de incluir y hacer participar a la mayor cantidad de estudiantes, sin distinción alguna. En la parte práctica los agrupa y procura generar buen ambiente en aula, en el trabajo de equipos cree fomentar diálogo y comunicación entre ellos.	▪ Observamos que fomenta la participación, se esfuerza por incluir a todos; forma equipos de trabajo por lo que se infiere que ahí se produce el diálogo y comunicación
	Evaluación formativa	▪ Propicia momentos para la exploración y formulación de conjeturas sobre la derivada, luego saca voluntarios a la pizarra y con toda la clase validan los resultados. También, genera espacios para que resuelvan de manera autónoma, si fallan hace retroalimentación.	▪ En el trabajo en equipos exploran y formulan sobre derivadas, saca a la pizarra pero no valida resultados. Tampoco vemos que propicie la autonomía en el aprendizaje
		▪ Opina que la interacción con los estudiantes en clases de derivadas y sus aplicaciones, le permite saber si éstos están aprendiendo, o no, el tema que está enseñando.	▪ Interactúa con los alumnos, está atento a preguntas; inferimos que ahí nota si el aprendizaje se está dando

CI	COMPONENTE	ANÁLISIS RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Mediacional	Recursos materiales	▪ Utiliza recursos tecnológicos de software matemático tales como el Symbolab, Geogebra y Desmos en sus clases de derivadas, ya dice que son recursos interactivos, dinámicos y los gráficos salen mucho mejor y precisos; aunque material concreto afirma que no utiliza.	▪ No hay evidencia del uso de software matemático en las clases videograbadas; sin embargo, inferimos que en otras clases sí llega a utilizar recursos tecnológicos.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	▪ Refiere que la cantidad de estudiantes en las aulas de ingeniería con las que trabaja, 40 alumnos por aula, no le permite ejecutar el proceso de enseñanza de la derivada que pretende; sin embargo, en su rol docente se esfuerza para que la mayoría de estudiantes entienda el tema que viene enseñando.	▪ Vemos que trabaja con aulas llenas de estudiantes lo cual dificulta ejecutar un buen proceso de enseñanza de derivadas. Sin embargo, se esfuerza por atender a todos, aunque no se abastece.
		▪ Sostiene que el aula y el equipamiento dentro de ella sí ofrecen las condiciones necesarias para la enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones; sin embargo, dice que la distribución de los estudiantes en forma de filas y columnas no es adecuada.	▪ Las aulas poseen elementos y equipos multimedia adecuados para una buena enseñanza; aunque, el espacio es reducido para el trabajo en equipo de alumnos
	Tiempo (de la enseñanza colectiva, de tutoría, tiempo de aprendizaje)	▪ Refiere que en la fase presencial desarrolla los contenidos de derivada programados; y en la fase virtual sube al aula virtual los materiales de consulta para los estudiantes, algunas evaluaciones y actividades complementarias.	▪ Vemos que los contenidos clave de derivada los desarrolla en clases; y asigna tareas para trabajo fuera de clase en el campus virtual.
		▪ Afirma que invierte el mayor tiempo disponible para la clase en enseñar los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que en su opinión son más importantes para los estudiantes de ingeniería.	▪ En efecto, selecciona contenidos de derivadas y enfatiza en unos más que en otros, se infiere que lo hace guiado por su experiencia.
		▪ Sostiene que invierte tiempo disponible para las clases en explicar aquellos contenidos de derivadas que en su opinión representan mayor dificultad para los estudiantes, tales como la regla de la cadena, entre otros.	▪ Apreciamos que dedica más tiempo a practicar ejercicios de contenidos de mayor dificultad para los alumnos, aplicando regla de la cadena.

CI	COMPONENTE	ANÁLISIS RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Emocional	Intereses y necesidades	▪ Respecto a las tareas de derivadas que propone a los estudiantes, el docente señala que trabaja con el material que le provee la coordinación de curso. Además, dice que de la separata de tareas selecciona aquellas que considera son de interés e importancia para los alumnos.	▪ Vemos que proyecta la separata de tareas que contiene ejercicios de derivadas, y sobre eso asigna tareas y talleres.
		▪ Menciona que en sus clases propone a los estudiantes situaciones-problema que les permita ver la importancia y utilidad de la derivada como herramienta matemática en la vida cotidiana, en el campo profesional de la ingeniería y en otros contextos.	▪ No hay evidencias que plantee problemas para que valoren la utilidad de las derivadas en la vida diaria; se limita a trabajar ejercicios de la guía institucional.
	Actitudes	▪ Refiere que la manera de implicar a los estudiantes en las actividades de derivadas que les propone, es a través de la participación en la pizarra donde resuelven algún ejercicio que les asigna, mediante dinámicas relacionadas al tema, y a través de preguntas y repreguntas.	▪ Vemos cierta apertura a la participación de los alumnos en la pizarra para resolver algún ejercicio de la guía; además, se acerca y responde preguntas e inquietudes.
		▪ Considera que sí fomenta la responsabilidad y la perseverancia en los estudiantes a través de la forma en cómo organiza sus clases de derivadas y sus aplicaciones, mediante la puntualidad, cumpliendo él con las actividades programadas y dando el ejemplo.	▪ Adopta la puntualidad y cumplimiento de actividades del sílabo y plan de clases, por lo cual inferimos que fomenta la responsabilidad predi-cando con el ejemplo.
	Emociones	▪ Afirma que en sus clases no solo argumentan y participan los alumnos que más saben, sino que también da oportunidad a aquellos que menos saben de derivadas; dice que procura ser equitativo, escucha las preguntas y los argumentos de los alumnos sobre la resolución de problemas y procura responder a todos.	▪ Asigna ejercicios para que resuelvan en equipo y saca a la pizarra voluntariamente, no vemos que argumenten sus procedimientos; tampoco que la participación sea de manera equitativa.
		▪ Sostiene que promociona siempre la confianza, da seguridad en clases, trata de ser ameno, empático, abierto y busca la parte divertida del tema matemático; se esfuerza para que los alumnos estén	▪ En el trabajo en equipos se acerca, y les da confianza. Aunque tiene que cortar la actividad para avanzar la clase,

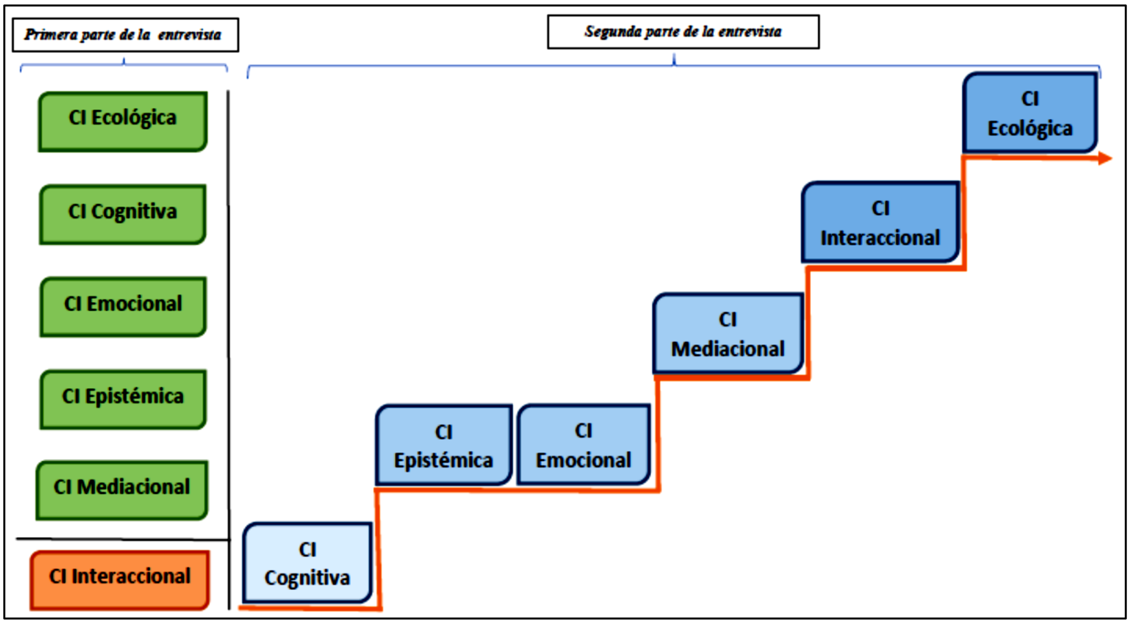
CI	COMPONENTE	ANÁLISIS RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		motivados, para realzar la autoestima y de esa manera pierdan el miedo, la fobia y el rechazo hacia las matemáticas.	inferimos que lo hace por falta de tiempo y por cumplir con la programación.
Ecológica	Adaptación al currículo	▪ Considera que los contenidos de derivadas que enseña, su implementación y la evaluación de estos, sí se corresponden con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería, que están alineados y funciona como un engranaje.	▪ Los contenidos de derivadas que enseña, su evaluación e implementación, son coherente con las directrices curriculares de ingeniería.
	Conexiones intra e inter disciplinares	▪ Sostiene que los conceptos de derivadas y sus aplicaciones que implementa, tienen conexión con los contenidos matemáticos posteriores del plan curricular de ingeniería; también, afirma que servirán como soporte para los contenidos de otras asignaturas propias de ingeniería.	▪ Comenta acerca del uso de derivadas en cursos futuros de matemáticas e ingeniería; deducimos que para él las derivadas sí se conectan con otras disciplinas.
	Utilidad sociolaboral	▪ Declara que en clases los estudiantes siempre preguntan por la utilidad de las derivadas en su carrera profesional, entonces muestra modelos y aplicaciones en ingeniería, software, entre otros. El docente está convencido de que las derivadas sí les serán de utilidad en la inserción sociolaboral y en su futuro campo profesional.	▪ Inferimos que las derivadas servirán a los alumnos para resolver situaciones de su profesión; aunque no se aprecia que muestre algún modelo, deducimos que en algún momento sí lo hace.
	Innovación didáctica	▪ Sostiene que siempre busca innovar en derivadas, en sus aplicaciones y en otros temas matemáticos y tecnológicos; investiga sobre el uso de nuevas metodologías de enseñanza, busca perfeccionar los materiales de estudio, hacer las presentaciones más atractivas y amigables a los alumnos, puesto que cree que de esa manera le ayuda para lograr captar la atención de los estudiantes de ingeniería.	▪ Observamos que se esfuerza por tener sus presentaciones y materiales, actualizados. Si bien, en la videograbación no se evidenció el uso de recursos tecnológicos, pero inferimos que sí realiza innovación en tecnología y perfeccionamiento docente.

4.6. Conclusiones

Los resultados obtenidos permiten dar una respuesta a la pregunta que nos habíamos planteado: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería y, en concreto, para explicar derivadas? A partir de la tabla 2 podemos inferir los criterios generales que orientan la práctica del profesor F cuando diseña e implementa clases de derivadas y sus aplicaciones para estudiantes de carreras de ingeniería, así como, inferir el peso que tienen estos criterios en su práctica docente como resultado de la triangulación entre lo que dice y lo que se ha observado que hace en aula (Figura 4.2).

Figura 4.2

Esquema de los criterios que orientan la práctica del profesor F.



En la columna izquierda del esquema se muestran, en la parte superior, los CID que aparecen en las respuestas del profesor F cuando, en la primera parte de la entrevista, se le formula la pregunta de cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica (ecológico, cognitivo, epistémico, emocional y mediacional); mientras que en la parte inferior (interaccional) se halla el CID que no menciona en su respuesta. En la columna derecha están los criterios de idoneidad que emergen en sus respuestas a las preguntas más específicas relacionadas con alguno de los componentes de los CID (segunda parte de la entrevista).

Tal como era esperable, teniendo en cuenta las preguntas formuladas, en esta columna aparecen los seis CID; ahora bien, no todos tienen la misma importancia para este profesor al momento de reflexionar y justificar su práctica. Para representar el diferente peso de cada criterio como guía de la práctica del profesor se ha usado un esquema de escalera, siendo los escalones superiores los de mayor peso y los inferiores los de menor peso. Esta disposición, también pretende mostrar cómo ciertos criterios quedan supeditados por otros; el orden en el que aparecen los CID en la escalera es resultado de la triangulación entre el discurso docente y lo observado en sus clases.

En el discurso inicial de este profesor se infiere que los criterios ecológico, cognitivo, epistémico, emocional y mediacional son los que orientan su práctica docente. Ahora bien, cuando en la segunda parte de la entrevista se le hacen preguntas más específicas sobre el criterio cognitivo, concluimos que: 1) tiene en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para el estudio de derivadas, y para recuperarlos aplica ciertas estrategias: lluvia de ideas, preguntas y repreguntas; 2) trata de reforzar y ampliar la parte matemática y práctica de las derivadas, ya que es consciente de la diversidad de alumnos, aunque no se evidencia que se esfuerce por atender esta diversidad; 3) los instrumentos de evaluación que aplica son pruebas de desarrollo (exámenes parciales, finales, prácticas calificadas), y forman parte de una evaluación sumativa; 4) las tareas que presenta son, básicamente, ejercicios de mecanización y aplicación de fórmulas, no activan en los estudiantes procesos cognitivos relevantes de argumentación o generalización, tampoco exigen alta demanda cognitiva.

En consecuencia, podemos inferir que el docente F asigna un peso mínimo a aspectos cognitivos, ya que el aprendizaje es básicamente de enfoque tradicional propio de clases magistrales; además, que supedita este criterio al ecológico (regirse estrictamente al programa de la asignatura).

El criterio epistémico había aparecido en la primera parte de la entrevista, y vuelve a emerger en el discurso del docente en la segunda parte de esta, de donde inferimos que: 1) no comete errores matemáticos y sus clases de derivadas tienen cierta rigurosidad desde el punto de vista matemático; 2) en sus clases desarrolla los ejercicios de derivadas aplicando reglas y fórmulas de derivación, es decir, enfoca los temas matemáticos de manera muy instrumental; 3) hay carencia de procesos matemáticos relevantes como argumentación, modelización, demostración y resolución de problemas extramatemáticos, lo cual justifica por falta de tiempo y por cumplir con el perfil del estudiante (ya que, en su opinión, por ser de ingeniería hay que hacer una matemática más práctica); 4) cree necesario enseñar diferentes significados de la derivada, aunque sólo trabaja el analítico y geométrico; 5) trabaja problemas intramatemáticos y extramatemáticos de derivadas, aunque vemos que enfatiza en la resolución de ejercicios algebraicos.

Por tanto, inferimos que para el profesor F, al momento de orientar su práctica docente, los aspectos epistémicos tienen un peso bajo y se supeditan al criterio mediacional (falta de tiempo) y al ecológico (perfil del estudiante), con fuerte tendencia a la mecanización y práctica de ejercicios rutinarios.

El criterio emocional que había sido tomado en cuenta por este profesor en su respuesta inicial, luego en sus respuestas de la segunda parte de la entrevista, vuelve a emerger, hecho que también se aprecia en la observación de sus clases. Por ejemplo, selecciona tareas matemáticas de interés e importancia para los alumnos, sin embargo, la mayoría son ejercicios algebraicos de mecanización; no hay evidencia de que plantee problemas para que los estudiantes valoren la utilidad de la derivada en la vida diaria; implica a los estudiantes en las actividades matemáticas que propone, mediante la participación en la pizarra, con dinámicas, preguntas y repreguntas, aunque no hace la validación de los procedimientos; no propicia que los alumnos argumenten sus procedimientos y la participación equitativa; da seguridad y confianza a los estudiantes, trata de ser ameno, empático, se esfuerza para que estén motivados, para realzarles la autoestima, y así pierdan el miedo, la fobia y rechazo hacia las matemáticas.

Por lo expuesto, concluimos que el profesor F asigna bajo peso a los aspectos afectivos en su práctica docente, además se infiere que supedita el criterio emocional al ecológico (cumplir las actividades del sílabo y plan de clase).

El criterio mediacional no sólo había sido tomado en cuenta por el docente al principio de la entrevista, sino que también emerge con cierto peso cuando se le hacen preguntas específicas sobre aspectos de medios. Así por ejemplo, utiliza recursos tecnológicos de software matemático como Symbolab, Geogebra y Desmos en sus clases de derivadas, por ser interactivos, dinámicos y los gráficos salen mucho mejor y precisos; el aula ofrece condiciones y equipos necesarios para la enseñanza de derivadas, aunque la distribución de los estudiantes en filas y columnas no es adecuada; los contenidos clave de derivadas los desarrolla en clases presenciales, dejando para la fase virtual actividades complementarias; invierte más tiempo en enseñar contenidos que, en su opinión, son más importantes y de mayor dificultad para los estudiantes de ingeniería.

Concluimos que para el profesor F los aspectos mediacionales tienen mediano peso en su práctica docente, además, quedan supeditados al criterio ecológico (cumplir las actividades del sílabo).

Acerca del criterio interaccional, éste no figura en las respuestas iniciales del docente, aunque emerge en la segunda parte de la entrevista, se infiere que le asigna un peso significativo en sus clases. Así por ejemplo, presenta la derivada de manera adecuada con claridad y orden lógico en los contenidos; identifica dudas y dificultades de aprendizaje por sus expresiones faciales o cuando interactúa con ellos; utiliza recursos argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos en clase, tales como un vídeo corto o explicación magistral; en la parte práctica los agrupa y procura generar buen ambiente de aula, fomentando el diálogo y la comunicación entre ellos; en el trabajo en equipos los estudiantes pueden hacer exploraciones y formulaciones sobre derivadas, los saca a la pizarra pero no se evidencia la validación de sus resultados y tampoco que propicie la autonomía.

Concluimos que el docente F asigna un alto peso en clases a los aspectos interaccionales, aunque los supedita al criterio ecológico (cumplir el sílabo).

El criterio ecológico aparece en su respuesta inicial y, de la triangulación realizada, evidenciamos que tiene un papel fundamental para orientar la práctica del docente F, la cual justifica, sobre todo, por el cumplimiento de contenidos programados en el sílabo y por seguir el plan de clase, aunque también justifica por el hecho de tener en cuenta la especialidad de los estudiantes; los contenidos de derivadas que enseña se corresponden con las directrices curriculares de las carreras; los conceptos de derivadas que implementa tienen conexión con contenidos matemáticos posteriores del plan curricular, y con asignaturas propias de ingeniería; tiene sus presentaciones en power point y otros materiales actualizados, y realiza innovación basado en la tecnología y el perfeccionamiento en su labor docente.

De la triangulación entre lo dicho en la entrevista y lo observado en sus clases, se infiere que este criterio ecológico es el que mayor peso tiene para orientar su práctica docente y al cual se supeditan los demás CID.

Además, del criterio ecológico hay que destacar que el componente "Utilidad sociolaboral" se tiene en cuenta para justificar una presentación de las derivadas enfocada en la mecanización, clases magistrales y poco significativa, pero no para incorporar procesos de modelización y resolución de problemas. Es decir, este criterio incide disminuyendo la idoneidad epistémica (reduce la riqueza de procesos), en vez de aumentarla enfatizando en los procesos relevantes de la actividad matemática. Se trata de un resultado coherente con lo señalado en García (2013), donde, por una parte, se tiene en cuenta que el estudiante es un futuro ingeniero que necesitará las matemáticas, pero, por otra parte, su enseñanza se implementa a través del uso y abuso del álgebra y la mecanización, con ausencia de procesos de modelización.

El esquema de pesos asignado a los diferentes CID por el profesor para guiar su práctica, puede ser una explicación plausible de por qué se están implementando las clases de ciencias básicas en las carreras de ingeniería de la manera que señalan Villanueva (2019) y Vargas (2010) (explicaciones expositivas poniendo énfasis en aspectos procedimentales), y también, por qué no se incorporan innovaciones como las que se proponen en Camarena (2013) y Rodríguez (2017).

Los resultados de este estudio de caso, si bien solo son aplicables a este profesor, consideramos que van más allá de este caso particular. Por esta razón, el análisis presentado para el profesor F se está realizando también con los demás participantes, lo cual permitirá, en el futuro, un análisis transversal de los datos. En concreto, permitirá estudiar cómo varían los pesos asignados a los diferentes CID por cada profesor para guiar su práctica. Específicamente, esperamos que la priorización de criterios que hace este profesor (supeditar los otros criterios al ecológico) sea la misma que hacen los otros nueve profesores y que las diferencias entre ellos estén en el peso que asignan a los criterios que quedan supeditados a este.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Arana-Pedraza, R. A., Ibarra, S. y Font, V. (2020). Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas en ingeniería: un primer acercamiento. In Y. Morales-López y A. Ruiz, *Educación Matemática en las Américas 2019* (928-935). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en la educación Matemática*. “Una empresa docente”. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema*, *35*(69), 263-288. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico, *Bolema*. *34*(66), 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Camarena, P. (2013). A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. *Innovación Educativa*, *9*(46), 17-44.

Capone, R. (2021). Just-in-Time Teaching and Peer-Led Team Learning in Mathematics Education Using Social Platform with Undergraduate Students. *Frontiers in education* (en prensa).

Capote, G., Rizo, N. y Bravo, G. (2016). La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. *Revista Universidad y Sociedad*, *8*(1), 21-28.

Carlos Guzmán, J. (2018). Buenas prácticas de enseñanza de los profesores de educación Superior. *REICE. Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, *16*(2), 133-149. https://doi.org/10.15366/reice2018.16.2.008

Cooper, J., Levi Gamlieli, H., Koichu, B., Karsenty, R., & Pinto, A. (2020). Instructional innovation in mathematics courses for engineering programs – a case study. En Inprasitha, M., Changsri, N. & Boonsena, N. (Eds). (2020). *Interim Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Khon Kaen, Thailand: PME.

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, *35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Font, V. (2019). Dilemas sobre las matemáticas entendidas como una materia general (ciencia básica) para diferentes carreras (profesiones). En Arango, A. J., Sánchez, O., Vargas, H., Ariza, M. X., Díaz, S. y Canoles, J. C. (Eds.), *Memorias III Congreso ciencias básicas en un mundo globalizado. Investigación experimental y simulación matemática*. Tunja, Colombia: Ediciones Usta-Universidad Santo Tomás.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37*(1), 29-42.

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44*, e172011. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42.

Gusmão, T. C. R. S., & Font, V. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(3), 666-697.

Juárez Ramírez, J. A., Chamoso Sánchez, J. M., & González Astudillo, M. T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(3), 161-178. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041

Monforte, G. L. (2011). Debates sobre el papel de las matemáticas en la formación de los ingenieros civiles decimonónicos. In *Técnica e ingeniería en España* (pp. 255-298). Zaragoza, El Ochocientos: de los lenguajes al patrimonio.

Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, *45*, e189468. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C. y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM*, *49*(5), 799-812. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0870-8

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(3), 361-394.

Rodríguez Gallegos, Ruth. (2017). Repensando la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros: actualidades y desafíos. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, *8*(15), 69-85. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.55

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books.

Seckel, M. J., Breda, A., Sánchez, A. y Font, V. (2019). Criterios asumidos por profesores cuando argumentan sobre la creatividad matemática. *Educação e Pesquisa*, *45*, e211926. http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201945211926

Seckel, M. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. *Magis*, *12*(25), 127-144. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp

Sousa, J.R., Silva Gusmão, T.C.R., Font, V., & Lando, J.C. (2020). Task (Re)Design to Enhance the Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers. *Acta Scientiae*, *22*(4), 98-120. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5711

Vargas Muñoz, D. (2010). *Evaluación de la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje en las aulas de ingeniería de las universidades derivadas chilenas*. (Tesis Doctoral inédita, Universidad de Sevilla). idUS. https://idus.us.es/handle/11441/24043

Villanueva, I. Z. (2019). *Sistema de tareas docente en el aprendizaje de la derivada en los estudiantes del primer año de la escuela profesional de ingeniería en telecomunicaciones, UNSA-2018.* (Tesis Doctoral, Universidad Nacional de San Agustín, Arequipa). Archivo digital. http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/10328

5

CAPÍTULO DE LIBRO

Análisis de la práctica de un profesor en la enseñanza de derivadas para ingeniería en el Perú

El presente estudio ha sido incluido como capítulo en el libro titulado “Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: Investigaciones y Desarrollos en América Latina”, que, en la fecha de presentación de esta memoria, está en prensa.

Autores: Walmer Garcés Córdova y Vicenç Font Moll (2021).

Editores: Jesús Guadalupe Lugo-Armenta, Luis R. Pino-Fan, Marcel Pochulu, y Walter F. Castro.

Editorial: Publicaciones de la Universidad de Los Lagos

Los capítulos de este libro han sido sometidos a un proceso de revisión por pares de tipo doble ciego.

Citar como: Garcés, W y Font, V. (2021). Análisis de la práctica de un profesor para enseñar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería en el Perú cuando explica derivadas, en J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, M. Pochulu y W. F. Castro (Eds.), *Enfoque Onto-Semiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos: Investigaciones y Desarrollos en América Latina* (en prensa).

Resumen

Este estudio tiene como objetivo, determinar los criterios que orientan la práctica de un grupo de profesores en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería y, en concreto, para explicar derivadas. Es una investigación cualitativa de estudio de caso que busca comprender la enseñanza de las matemáticas, a través del análisis de las prácticas de los participantes y de la reflexión sobre su práctica. Para ello, se videograbaron las clases de un grupo de profesores y se infirieron los criterios que siguen en el diseño e implementación de éstas, utilizando los criterios de idoneidad didáctica; luego se seleccionó a uno de ellos como estudio de caso, y después se realizó una triangulación entre lo que dice y lo que hace. Se encontró que este profesor guía su práctica docente por aspectos del criterio ecológico (sílabo y profesión), interaccional (interacción con los estudiantes) y mediacional (tiempo disponible para las clases).

Palabras clave: Reflexión sobre la práctica, Criterios de idoneidad didáctica, Enseñanza de derivadas, Enseñanza y aprendizaje en ingeniería.

Abstract

This study aims to determine the criteria that guide the practice of a group of professors in Peru to explain mathematics in a course of basic sciences in engineering careers and, in particular, to explain derivatives. It is a qualitative case study research that seeks to understand the teaching of mathematics, through the analysis of participants' practices and reflection on their practice. To this end, the classes of a group of professors were filmed and the criteria that follow in the design and implementation of the classes were inferred, using the criteria of didactic suitability; then one of them was selected as a case study, and then a triangulation was made between what he says and what he does. It was found that this professor guides his teaching practice by aspects of ecological criteria (syllabus and profession), interactional (interaction with students) and mediational (time available for classes).

Keywords: Reflection on practice, Criteria of didactical suitability, Derivatives teaching, Teaching and learning in engineering.

5.1. Antecedentes

La enseñanza de las matemáticas para ingeniería se ha relacionado con la siguiente disyuntiva: unas matemáticas específicas para cada ingeniería, o bien, unas matemáticas más generales que se enseñan en los primeros ciclos y comunes a varias ramas de esta. En el siglo XX la estructura más habitual era que las ingenierías se organizasen mediante la creación de un ciclo inicial o de estudios generales, que se supone suministra a los futuros ingenieros las herramientas matemáticas básicas que luego van a aplicar en otras asignaturas de la carrera y, después en su desempeño profesional.

Después de aproximadamente un siglo de organizar las carreras de ingeniería con un ciclo de ciencias básicas, han surgido dudas sobre si ésta es, o no, la mejor opción. Algunos de los dilemas más importantes sobre el papel de las ciencias básicas (y en particular, las matemáticas) en las ingenierías se relacionan con los siguientes aspectos (Font, 2019): 1) el cuestionamiento de que un conocimiento general de base sea fácilmente aplicado a diferentes contextos; 2) el alto número de alumnos reprobados; 3) la presentación de contenidos que después en la práctica no se utilizan; y 4) el enfoque actual que pone énfasis en una enseñanza que desarrolle competencias.

Como respuesta a estos dilemas, a los que se enfrentan los ciclos de estudios generales en ingeniería, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias y conocimientos de los profesores de matemáticas y, también, sobre cómo es la enseñanza de las matemáticas en estos ciclos.

Sobre la enseñanza del cálculo diferencial e integral en las carreras de ingeniería en el Perú, hay un cierto consenso difuso en las siguientes afirmaciones: a) los alumnos tienen muchas dificultades para su aprendizaje, b) estas dificultades, entre otros factores, se deben o bien a que la enseñanza está centrada en una presentación netamente algorítmica de aprendizaje de fórmulas, mecanicista y rutinaria, o bien, a una enseñanza muy rigurosa y formalista, c) la enseñanza se realiza obviando la comprensión significativa de las nociones básicas del cálculo, lo que dificulta que el futuro ingeniero utilice las matemáticas para resolver problemas de su profesión.

Debido a insuficientes investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas en los ciclos de ciencias básicas de ingeniería en el Perú, concluimos que son necesarios estudios que informen sobre dicha situación. En esta investigación nos proponemos responder la pregunta: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica del profesor en el

Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería? Para ello usaremos la noción de derivada como contexto de reflexión.

5.2. Objetivo de investigación

El Objetivo general es, determinar los criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería. En particular, cuando explican la derivada.

5.3. Marco teórico

El Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, EOS en adelante, (Font, Planas y Godino, 2010; Godino, Batanero & Font, 2007 y 2019) dentro de las configuraciones didácticas, considera cinco tipos de análisis sobre los procesos de instrucción:

1) Identificación de prácticas matemáticas;
2) Elaboración de configuraciones de objetos y procesos matemáticos;
3) Análisis de trayectorias e interacciones didácticas;
4) Identificación del sistema de normas y metanormas; y,
5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El primer tipo de análisis explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción matemático. El segundo, se centra en los objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. El tercero, está orientado a la descripción de los patrones de interacción, a las configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas; las configuraciones y trayectorias están condicionadas y soportadas por una trama de normas y metanormas, que es el cuarto tipo de análisis didáctico. El quinto tipo, se basa en los cuatro análisis didácticos previos y en la noción de idoneidad didáctica.

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que éste reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado), para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta los recursos disponibles (entorno). Los criterios de idoneidad didáctica (CID) pueden ser de utilidad para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y para valorar su implementación (Breda, Font & Pino-Fan, 2018).

Este constructo multidimensional se descompone en seis criterios de idoneidad parcial, los cuales los describimos, concretamente, a continuación:

1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son "buenas matemáticas".
2) Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar.
3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos.
4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción.
5) Idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción.
6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional.

Para la operatividad de los CID se define un conjunto de componentes e indicadores observables que sirven de guía para el análisis y valoración de un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa (Breda, Pino-Fan & Font, 2017).

En la Tabla 5.1 se detallan, a continuación, estos criterios y componentes de idoneidad didáctica (por falta de espacio no se especifican los indicadores).

Tabla 5.1

Criterios y componentes de idoneidad didáctica.

Criterio	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectivo o emocional	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

Nota: Extraído de Morales-López y Font (2019).

5.4. Metodología

Esta investigación corresponde a un estudio con un enfoque interpretativo de corte cualitativo (Bisquerra, 2009), que busca comprender y describir la enseñanza de las matemáticas en el ciclo básico de las ingenierías. Desde el punto de vista de la extensión, se trata de un estudio de caso de un profesor, cuando imparte derivadas en los primeros ciclos de ingeniería. Para determinar las consideraciones implícitas en la ejecución de las tareas del profesor se ha considerado los siguientes pasos:

1) Se seleccionó a un grupo de 10 docentes que enseñan matemáticas en ingeniería (ocho graduados en matemáticas y dos en educación con mención en matemática) y se les solicitó su consentimiento para registrar el desarrollo de sus clases sobre derivadas y sus aplicaciones, en videograbaciones.

2) Se recopiló, para su análisis, documentos curriculares (sílabos), planes de clase, presentaciones del tema, separatas de ejercicios, material de consulta para los alumnos, entre otros.

3) Se videograbaron las sesiones desarrolladas por estos docentes (entre dos y tres clases según el profesor).

4) Se diseñó un cuestionario de 46 preguntas, basado en los CID, para la entrevista semiestructurada, el mismo que se aplicó a los 10 docentes.

5) Se realizó un análisis experto de las clases videograbadas con los cuatro niveles del modelo de análisis didáctico propuesto en el EOS, tal como se hace en Breda, Hummes, da Silva y Sánchez (2021) y en Pochulu y Font (2011), para determinar las prácticas, objetos y procesos matemáticos, funciones del profesor y del alumno, configuraciones didácticas, conflictos semióticos, patrones y normas.

6) Para este reporte se ha seleccionado como estudio de caso a uno de los profesores, que le denominamos Docente B, al mismo que se le hizo la entrevista para determinar los criterios que, según él, orientaban su práctica pedagógica.

7) Se realizó la transcripción literal de la entrevista videograbada.

8) Se analizó el contenido de la entrevista para determinar los criterios que según el profesor orientan su práctica, y luego se triangularon las fuentes para inferir resultados.

5.5. Resultados

Estudio de caso del profesor B

Para este docente, se han analizado y sintetizado los criterios que declara seguir, en la entrevista docente, criterios que fueron triangulados con las observaciones de tres de sus clases videograbadas en aula, donde explicó el tema de derivadas y sus aplicaciones (ver Tabla 5.2).

Tabla 5.2

Análisis de las respuestas dadas por el Docente "B" en la entrevista y triangulación con lo observado en clase.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Preguntas generales	Formación inicial	▪ Ha obtenido bachillerato y licenciatura en Matemáticas, maestría en Enseñanza de las Matemáticas y es doctorando en Educación; tiene experiencia como profesor y coordinador de asignaturas de matemáticas en universidades privadas, y ha realizado diplomados y cursos cortos de formación permanente.	▪ Asumimos que sí está en posesión de los grados y títulos académicos que señala, además de ser un profesor con amplia experiencia y estar en constante actualización.
	Criterios al diseñar e implementar clases	▪ Estructura y rigor de los objetos matemáticos y de los materiales de estudio; trabajo en equipo y autoaprendizaje; buen clima en el aula; uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas; y la relación del tema matemático con el contexto y la especialidad de los estudiantes.	▪ Se evidencia que sí tiene en cuenta en cierta manera los criterios que afirma seguir (inicia la sesión recuperando saberes previos; genera buen clima con los estudiantes; hace trabajar en equipos; hace uso de la tecnología en sus clases; los objetos matemáticos y materiales están correctamente presentados; e intenta relacionar el tema con el contexto y la carrera de los estudiantes)
	Modelo de docente	▪ Se considera un docente constructivista ya que trata de que el alumno genere su propio conocimiento, así como, afirma ser un docente que desarrolla unas matemáticas realistas puesto que busca propuestas y aplicaciones cercanas al estudiante.	▪ Si bien, hace participar a los alumnos en todo momento, sigue siendo una clase magistral y de transmisión del conocimiento. No se evidencia que ejecute matemáticas realistas y del contexto del estudiante (el modelo que afirma seguir no se corresponde con lo observado)
Epistémica	Errores	▪ Acepta que comete errores matemáticos por apresuramiento o por cumplir con los temas del sílabo (aunque confunde un error matemático con error didáctico). ▪ Busca que el rigor matemático esté presente en sus clases pero a nivel básico. Considera que la	▪ Se observa que no comete errores matemáticos en sus explicaciones sobre derivadas en sus clases videograbadas ▪ En efecto, el rigor matemático que le imprime a la derivada en sus clases, es a nivel básico;

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Ambigüedades	intuición y el rigor están entrelazados y que con explicaciones intuitivas los alumnos asimilan de forma práctica y sencilla los procesos de solución.	además, se evidencia que utiliza la intuición constantemente en sus explicaciones conectando la derivada con aspectos cotidianos para los estudiantes.
		▪ Afirma que las demostraciones en la enseñanza de la derivada en ingeniería son importantes, pero deben ser básicas, por ello sólo hace dos demostraciones; luego provee a los alumnos la lista de reglas básicas de derivación para que las manipulen, se familiaricen y las apliquen.	▪ Efectivamente, vemos que hace un par de demostraciones iniciales y luego entrega a los alumnos, en la pizarra, un listado de fórmulas y reglas básicas de derivación, indicándoles que se cumplen y se tienen que aplicar.
	Riqueza de procesos	▪ Se centra en la resolución algebraica de ejercicios de derivadas, dejando poco espacio para la resolución de problemas extramatemáticos. Trabaja ciertos procesos relevantes de la actividad matemática, pero no la argumentación ya que afirma que no se evalúa en los exámenes; y la modelización, la trabaja si es que le alcanza el tiempo disponible para las clases.	▪ En efecto, se aprecia que en sus clases enfatiza la aplicación de reglas y fórmulas en la resolución algebraica y algorítmica de ejercicios intramatemáticos de derivadas. Se observa que hay carencia de procesos matemáticos relevantes como la argumentación y la modelización.
		▪ Considera que es importante que el alumno tenga una visión amplia de los diferentes significados de la derivada, por lo que en sus clases define la derivada como pendiente de recta tangente y como consecuencia de ello, también la define como velocidad instantánea.	▪ Se observa que en sus explicaciones hace uso de diferentes significados de la derivada, y que empieza definiéndola como pendiente de recta tangente a una curva y después como velocidad instantánea.
	Muestra representativa de la pluralidad de	▪ Los problemas de derivadas que plantea son, en su mayoría, del contexto intramatemático; menciona además, que en sus clases ha incidido en cuestiones procedimentales y en la aplicación de las propiedades de la derivada.	▪ Efectivamente, vemos que en la mayor parte del tiempo de las clases resuelve ejercicios del contexto intramatemático, de tipo procedimental y de aplicación de propiedades de derivación.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	significados del objeto matemático a enseñar	▪ Opina que en las clases se deben presentar problemas variados de derivadas y de sus aplicaciones; sin embargo, dice que aquellos problemas que él trabaja son escasos y sólo del contexto de la Física.	▪ En efecto, en las tres clases que fueron observadas vemos que solo ha desarrollado un problema contextualizado, ya que ha priorizado los ejercicios algebraicos.
		▪ En sus clases dice que utiliza diversos modos de expresión y su respectiva conversión entre éstos, así como, la representación gráfica y analítica de la derivada, ya que le permite abarcar diferentes formas de aprendizaje de los alumnos.	▪ Se observa que en sus explicaciones de derivadas y sus aplicaciones, usa diversos modos de expresión, su conversión y tratamiento. Y también utiliza diferentes representaciones de la derivada
		▪ Considera que el sílabo de la asignatura determina los contenidos de derivadas que imparte; en cuanto a la forma de enseñarlos, él pone su propio aporte. Opina que se debería dosificar el sílabo dado que está muy denso, además agregar modelos ligados a la ingeniería.	▪ Se evidencia que el docente se rige por el sílabo y el plan de sesión en la implementación de sus clases; aunque también pone su estilo personal y no solamente se basa en las presentaciones que le proporciona la coordinación.
Cognitiva	Conocimientos previos	▪ Trata de recuperar los conocimientos previos de los alumnos cada vez que va a iniciar un nuevo tema. En el caso de que éstos no contaran con dichos saberes, lo que hace es retomar el tema, los motiva e indica que la derivada está presente en todos los fenómenos.	▪ Aunque no se evidencia que aplique alguna evaluación inicial para averiguar saberes previos de los alumnos, vemos que sí trata de recuperar ciertos conocimientos previos y conectar el nuevo tema con los anteriores.
	Adaptación curricular a las diferencias individuales	▪ Espera lograr que la distancia entre lo que los alumnos ya conocen y los nuevos contenidos de derivadas que pretende enseñar, sea alcanzable; aunque reconoce que es complicado conseguirlo.	▪ Se observa que presenta contenidos de derivadas y sus aplicaciones que están en la zona de desarrollo próximo (ZDP) de los alumnos, y que son accesibles para ellos.
		▪ Hace lo posible por atender la diversidad de estudiantes en el aula, así como los distintos ritmos de aprendizaje; para lo cual	▪ Efectivamente, vemos que ante las dudas y dificultades de los estudiantes, se les acerca y trata de atenderlos de forma

C I	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		identifica quiénes tienen mayor dificultad en el aprendizaje de las derivadas y a ellos dirige las actividades de ampliación y refuerzo.	personalizada, los guía y refuerza en sus procedimientos y en la resolución de los ejercicios, y despeja las dudas.
	Aprendizaje	▪ La manera de asegurarse que los estudiantes hayan aprendido los conceptos de derivada que ha enseñado, es cuando éstos están en la capacidad de discutir un concepto o cuando son capaces de abordar y resolver un problema que les plantea.	▪ No hay evidencias en las clases videograbadas de que haya fomentado discusiones sobre conceptos de derivadas que ha enseñado. Aunque vemos que cuando un alumno no entiende algún aspecto procura explicárselo a toda la clase.
		▪ Los instrumentos de evaluación que usa son pruebas de desarrollo (exámenes parciales, finales y prácticas calificadas) que en su opinión le informan, mínimamente, de las dificultades de aprendizaje de los alumnos. Por lo que dice que le asigna más valor a las evaluaciones permanentes que él aplica.	▪ En efecto, se evidencia que las evaluaciones de mayor peso son pruebas sumativas de desarrollo comunes a varias aulas; pero que también hace valoraciones del desempeño de los estudiantes en clases.
	Alta demanda cognitiva	▪ La forma de darse cuenta de que los alumnos no están asimilando bien los conceptos que está enseñando, es cuando pregunta y éstos no le responden de manera adecuada. Entonces, recapitula el tema y vuelve a explicarlo buscando la mayor participación de la clase.	▪ Observamos que si identifica que no está habiendo aprendizaje en sus clases, vuelve a hacer explicaciones puntuales del tema, se acerca al estudiante y busca mayor participación de ellos en el desarrollo de la derivada.
		▪ Afirma que las tareas que propone a los estudiantes ya le entregan elaboradas de la coordinación de la asignatura y tiene que cumplir; se trata de ejercicios de derivadas que priorizan la manipulación algebraica, procedimental y son de solución inmediata, por lo que, en su opinión, éstas no activan en los estudiantes los procesos cognitivos relevantes.	▪ Efectivamente, vemos que trabaja con una guía de tareas que es común para todos los grupos en la cual se proponen, sobre todo, ejercicios algebraicos para mecanización y de aplicación de reglas y fórmulas. Son tareas que fomentan lo procedimental y no exigen alta demanda cognitiva.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Interaccional	Interacción docente-discente	▪ Se esfuerza por mostrar a los estudiantes que no todo en el tema de las derivadas es conceptual, sino que en la presentación del tema hay un cierto orden, claridad y secuenciación que, en su opinión, es medianamente adecuada. ▪ Sostiene que en sus clases interactúa bastante con los estudiantes a través de preguntas, y también les pide que le comuniquen y expresen sus dudas sobre el tema; una vez que ha identificado las dificultades de aprendizaje de éstos, los atiende, trata de sacarlos a la pizarra y trabajar para esclarecerlas	▪ Efectivamente, vemos que hace un esfuerzo para que sus explicaciones sean entendibles para los estudiantes; se observa que el desarrollo de las clases en la pizarra es ordenado, hay claridad y los temas son secuenciales ▪ Notamos que en las clases hay una mediana interacción con los estudiantes, vemos que el docente recorre el aula atendiendo las dudas, hace preguntas y repreguntas sobre la derivada y que saca a la pizarra a algunos de ellos pero de manera voluntaria.
	Interacción entre discentes	▪ Hace uso de diversos recursos argumentativos como la explicación magistral y metáforas para implicar y captar la atención de los alumnos en la clase de derivadas. Además, procura que los alumnos participen de manera homogénea varones y mujeres, los que saben más y los que menos conocen. ▪ Procura generar el diálogo y la comunicación entre los estudiantes y para lograrlo forma equipos o trabaja en pares, pero reconoce que han sido muy escasos esos momentos por falta de tiempo.	▪ Se aprecia que utiliza una variedad de recursos argumentativos para sus explicaciones de las derivadas; aunque sigue siendo una clase expositiva con algunas participaciones de los alumnos desde sus asientos o salidas a la pizarra, pero no explican lo que han desarrollado. ▪ Observamos que el desarrollo de las clases es básicamente expositiva, por lo que se evidencia escasos momentos de diálogo y comunicación entre los estudiantes.
	Autonomía	▪ Propicia actividades de trabajos grupales para que los alumnos exploren, formulen y validen sus conjeturas sobre la derivada, pero a veces ha tenido que cortar esta actividad por falta de tiempo. Además, en este trabajo de equipos ha generado momentos	▪ En las clases videograbadas no se han observado trabajos grupales, aunque deducimos que en otras clases sí lo hace para resolver los talleres que tienen una nota para los estudiantes, y ahí ellos trabajan de manera autónoma.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Mediacional	Evaluación formativa	para la autonomía y el autoaprendizaje de los estudiantes ▪ Fomenta la interacción con los estudiantes en la mayor parte de sus clases, por ejemplo en las exposiciones, en las preguntas que les formula y en las respuestas que dan. Es ahí donde observa si el aprendizaje de los alumnos se está dando, por lo que siempre está pendiente y vigilante de los procesos de aprendizaje, de quiénes aprenden y quiénes se retrasan.	Aunque hay pocos momentos para la autonomía. ▪ Aunque en las clases observadas no han habido exposiciones, vemos que sí formula preguntas y repreguntas a los estudiantes, está pendiente y atento del aprendizaje de éstos y observa sus resoluciones. Por lo tanto, observamos que este docente genera cierta interacción con los alumnos.
Mediacional	Recursos materiales	▪ Utiliza software matemático como Cabri y Geogebra online en sus clases de derivadas, ya que le permiten hacer una presentación dinámica, manipular los objetos matemáticos, además, porque están disponibles en línea.	▪ En efecto, observamos que en clases hace uso del geogebra online en sus clases de derivadas para que los estudiantes visualicen la precisión las gráficas de las funciones
Mediacional	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	▪ Considera que trabajar con grupos de más de 40 estudiantes en el aula es muy complicado, ya que no puede discutir adecuadamente las derivadas para que los alumnos puedan asimilarlas ▪ Reconoce que en general el aula de clases sí es adecuada para desarrollar su enseñanza de las derivadas; sin embargo, sugiere que algunos elementos como las pizarras son reducidas y opacas. ▪ Refiere que, básicamente, en la fase presencial es donde desarrolla casi todo el contenido de la derivada y la resolución de ejercicios; asigna a los estudiantes actividades fuera del horario de clases tales como foros, tareas y talleres virtuales	▪ Efectivamente, apreciamos que en sus clases hay una cantidad considerable de estudiantes por lo que no se da abasto para atender a todos. ▪ Se observa que las aulas sí presentan condiciones adecuadas, aunque las pizarras son pequeñas y opacas, pero hay suficiente espacio para el trabajo en equipos ▪ En efecto, vemos que los contenidos medulares de las derivadas los desarrolla en clases. Se aprecia que asigna ciertas tareas para el trabajo fuera del horario de clase y en el campus virtual.
Mediacional	Tiempo (de la enseñanza	▪ En sus clases trata de ser selectivo en cuanto a los contenidos de derivadas y aplicaciones, por lo	▪ Observamos que de la separata de ejercicios que le provee la coordinación de asignatura,

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	colectiva, de tutoría, tiempo de aprendizaje)	que desarrolla aquello que considera que es realmente importante para el estudiante, así como las competencias para que tengan éxito en el curso.	selecciona las tareas de derivadas que encarga a los alumnos para que resuelvan fuera de horarios de clases.
		▪ Considera que invierte tiempo razonable en ejercitar a los alumnos mediante talleres sobre derivadas, así como en temas complejos o que representan mayor dificultad para ellos como son: la regla de la cadena, la regla del producto y la regla del cociente de funciones.	▪ En efecto, se evidencia que hace talleres de resolución de problemas, en los que plantea ejercicios de derivadas de menor a mayor grado de dificultad, dedicando un tiempo considerable a las resoluciones de tipo procedimental.
Emocional	Intereses y necesidades	▪ En relación a las tareas de derivadas, el docente dice que basado en su experiencia trata de presentar ejercicios o alguna aplicación que sea más amigable, entretenida y de interés para los estudiantes	▪ Se observa que las tareas que propone son básicamente ejercicios algebraicos de derivadas que están en la separata que le provee la coordinación de la asignatura.
		▪ Para lograr que los alumnos valoren la utilidad de la derivada en la vida cotidiana, él incluye lo intuitivo en la parte introductoria del tema; además, trata de presentar problemas de carácter físico o ligados a la vida profesional de los estudiantes de ingeniería.	▪ En efecto, evidenciamos que sí usa lo intuitivo para relacionar las derivadas con aspectos cotidianos o del entorno del alumno. No se aprecia que incluya problemas del contexto de la ingeniería.
	Actitudes	▪ Considera que la más grande motivación para que los estudiantes se impliquen en las actividades matemáticas que les propone, es la nota (motivación extrínseca); además de ello observa la parte actitudinal y el desempeño del alumno en las clases.	▪ Observamos que en sus clases aplica una motivación extrínseca al asignar una nota a las tareas y actividades matemáticas. También se aprecia que asigna puntaje a la evaluación permanente y desempeño de los alumnos.
		▪ Afirma que transmite responsabilidad a los estudiantes predicando con el ejemplo, siempre desarrolla sus clases con puntualidad y cumple con abordar	▪ Efectivamente, vemos que se preocupa por cumplir con la programación del sílabo, es puntual, amable y cortés con los estudiantes, por lo que

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Emociones	los temas programados en el sílabo. También señala que ha logrado que sus alumnos sean perseverantes	inferimos que fomenta la responsabilidad y perseverancia en ellos.
		▪ Menciona que por la naturaleza de la asignatura le ha resultado complicado propiciar momentos para que los estudiantes argumenten y participen de manera equitativa en las clases; no puede atender a todos (le falta tiempo).	▪ Observamos que las clases procura atender las dudas de algunos estudiantes, saca a la pizarra a otros, pero luego corta la participación y continúa con la clase. En efecto, no argumentan de forma equitativa por falta de tiempo.
		▪ Cuando los estudiantes participan y se equivocan, nunca condena el error, más bien los felicita por participar e incentiva para que pierdan el temor, el miedo, la fobia y el rechazo hacia las matemáticas. Procura consolidar la autoestima de sus alumnos.	▪ El docente es atento, amable y muy accesible a todos los estudiantes, les insiste para que participen desde su lugar o en la pizarra, se ve siempre les da ánimo para que se atrevan a resolver los ejercicios que les plantea.
Ecológica	Adaptación al currículo	▪ Cree que los contenidos de derivadas que enseña sí conllevan o dan un soporte fuerte a las asignaturas posteriores de las carreras de ingeniería; es decir, sí se corresponden con las directrices curriculares. En cuanto a la implementación cree que no hay correspondencia, ya que no se da como se ha pretendido por falta de tiempo, por la estructura del curso o porque hay muchos contenidos.	▪ Observamos que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que enseña, así como su evaluación, son coherentes con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería. Aunque también vemos que el sílabo contiene una densidad importante de contenidos por lo que inferimos que le falta tiempo.
	Conexiones intra e inter-disciplinares	▪ Opina que hay una fuerte conexión entre los temas de derivadas que desarrolla y los contenidos posteriores contemplados en el currículo de ingeniería, ya que conlleva al estudio de Cálculo Integral, Cálculo en Varias Variables, y	▪ Se observa que en sus clases el docente formula comentarios sobre el uso futuro de las derivadas a lo largo de la carrera profesional, vinculándolas con asignaturas futuras tanto de la matemática como de la ingeniería.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Utilidad sociolaboral	luego al Cálculo para la Toma de Decisiones. ▪ Considera que los contenidos de derivadas que imparte en sus clases son útiles para la inserción sociolaboral de los futuros ingenieros, en la medida en que dotan de herramientas básicas para adquirir competencias propias de su especialidad.	▪ A partir del discurso del docente en sus clases podemos evidenciar que sostiene ante los estudiantes de ingeniería, que las derivadas les servirá como base sólida para que afronten con éxito los cursos de su especialidad.
	Innovación didáctica	▪ Afirma que en sus clases siempre está innovando con recursos tecnológicos ya que le está permitido por la institución; con respecto a nuevos contenidos de derivadas y formas de evaluación, dice que no puede hacer innovaciones, debido a que la universidad asigna una estructura definida la cual todos los profesores tienen que respetar, acogerse y cumplirla.	▪ Notamos que en el desarrollo de sus clases usa recursos tecnológicos como por ejemplo, abre una hoja de cálculo o proyecta en la pizarra el Geogebra para mostrar una gráfica de la derivada. Sobre la evaluación y agregar nuevos contenidos, se ve que está definido por la universidad en el sílabo y se debe cumplir.

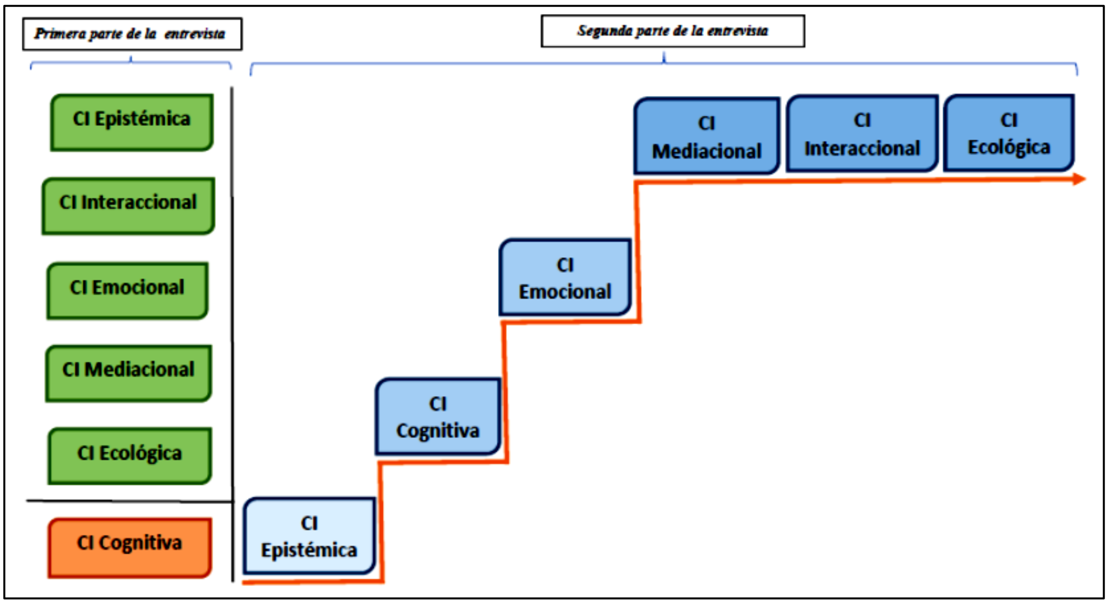
5.6. Conclusiones

Los resultados obtenidos nos permiten dar una respuesta a la pregunta que nos habíamos propuesto contestar en este estudio para el docente B: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica del profesor en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería? Además, podemos determinar el peso que tienen estos criterios en su práctica, como resultado de la triangulación realizada entre lo que dice y lo que se ha observado que hace en las aulas.

En la columna de la izquierda del esquema de la Figura 5.1 se muestran, en la parte superior, los CID que aparecen en las respuestas del profesor B cuando se le formula la pregunta general de cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica (epistémico, interaccional, emocional, mediacional y ecológico); mientras que en la parte inferior (cognitivo) se halla el criterio de idoneidad (CI) que no menciona en su respuesta (primera parte de la entrevista).

Figura 5.1

Esquema de criterios que guían la práctica del Docente "B"



Nota: Fuente propia de la investigación.

En la columna derecha y de color azul están los criterios de idoneidad que emergen en sus respuestas a las preguntas más específicas relacionadas con alguno de los componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica - CID (segunda parte de la entrevista). Tal como era esperable, teniendo en cuenta las preguntas formuladas, en esta columna aparecen los seis CID; ahora bien, no todos tienen la misma importancia para el profesor B al momento de reflexionar y justificar su práctica. Para representar el diferente peso que tiene cada criterio como guía de la práctica del profesor se ha usado el esquema de la escalera, siendo los escalones superiores los de mayor peso, en tanto que los criterios que están en la parte inferior tienen menor peso.

La disposición en la escalera, además de indicar el menor o mayor peso, también pretende representar cómo algunos CI quedan supeditados por otros. El orden en el que aparecen los CI en la escalera es el resultado de la triangulación entre el discurso del docente y lo que se infiere de la observación de sus clases.

En su discurso inicial el docente B explica que los criterios epistémico, interaccional, emocional, mediacional y ecológico son los que orientan su práctica. Ahora bien, cuando en la segunda parte de la entrevista se le hacen preguntas más específicas sobre el criterio epistémico concluimos que: 1) comete algunos errores por apresuramiento, pero vemos que no son errores matemáticos sino de otra índole, 2) si bien, considera que las demostraciones sobre la derivada son importantes, sin embargo no hace demostraciones en sus clases por falta de tiempo y por no estar incluidas en el sílabo, 3) enfatiza en la mecanización, en la resolución de ejercicios por manipulación de reglas y fórmulas de derivación, dejando poco espacio para la resolución de problemas extramatemáticos, ya que le falta el tiempo, 4) no trabaja procesos relevantes de la actividad matemática tales como argumentación y modelización, lo cual justifica por la falta de tiempo, 4) es de la opinión que se debería presentar a los estudiantes de ingeniería una variedad de problemas de derivadas y sus aplicaciones, sin embargo, los ejercicios que les presenta son en su mayoría de tipo intramatemático y cuestiones procedimentales.

En consecuencia, si bien en la segunda parte de la entrevista se infiere que para el docente B los aspectos epistémicos tienen un cierto papel a la hora de orientar su práctica, estos aspectos se supeditan al criterio de mediacional (sobre todo falta de tiempo) y al ecológico (cumplir con lo programado en el sílabo); además, por el hecho de regirse y cumplir con la implementación de la totalidad de contenidos que presenta el sílabo de la asignatura.

De otra parte, el criterio cognitivo que no había sido considerado al principio por este docente, cuando responde a las preguntas específicas sobre este criterio, observamos que empieza a ganar peso puesto que considera que: 1) procura recuperar los conocimientos previos de los estudiantes cada vez que va a iniciar un nuevo tema matemático, 2) se esfuerza por presentar unos contenidos de la derivada y sus aplicaciones que estén en la zona de desarrollo próximo y sean accesibles para los alumnos, 3) hace algún esfuerzo por atender la diversidad y ritmos de aprendizaje de los alumnos, se les acerca y despeja las dudas, interactúa con ellos, 4) se asegura que los estudiantes estén aprendiendo el tema cuando les pregunta y repregunta, observa que respondan de manera coherente y discuten sobre el tema, aunque tiene que interrumpir para continuar con la clase, lo cual justifica por la falta de tiempo y porque tiene que cumplir con el sílabo, 5) no propone situaciones-problema de derivadas que exijan alta demanda cognitiva, sino que presenta tareas que priorizan la manipulación algebraica, procedimental y son de solución inmediata las mismas que no activan en los estudiantes procesos cognitivos relevantes.

En consecuencia, y a partir de la triangulación con lo observado en sus clases podemos inferir que el docente B supedita los aspectos cognitivos al criterio mediacional (falta de tiempo), al interaccional (interacción con los estudiantes) y al ecológico (cumplir con todos los contenidos del sílabo).

Con relación al criterio emocional, al cual el profesor en su respuesta inicial da cierta importancia, en sus respuestas a la segunda parte de la entrevista (cuando se le hacen preguntas específicas sobre éste) se infiere que, efectivamente, lo tiene en cuenta, hecho que también se aprecia en la observación de sus clases. Por ejemplo, observamos que el profesor tiene en cuenta aspectos actitudinales de los estudiantes frente a la asignatura, así como el desempeño de los alumnos en las clases de derivadas; procura presentar situaciones de derivadas y sus aplicaciones que sean amigables, entretenidas y de interés para los estudiantes, aunque vemos que básicamente son ejercicios algebraicos y de tipo procedimental; el docente se esfuerza por transmitir responsabilidad a los estudiantes a partir de predicar con el ejemplo, así como también por lograr que sean perseverantes en la resolución de los ejercicios que les plantea; los incentiva y anima a intentar resolver las tareas, reforzarles su autoestima y que pierdan el temor y el rechazo hacia las matemáticas; sin embargo acepta que no ha logrado la participación y argumentación de los estudiantes de manera equitativa por falta de tiempo.

En consecuencia, vemos que todo ello lo hace dentro de un modelo de clase magistral y expositiva y se infiere que el docente B supedita los aspectos afectivos al criterio mediacional (falta de tiempo para la participación equitativa) y al ecológico (desarrollar todos los temas del sílabo).

En lo que respecta al criterio mediacional vemos que no solamente es tenido en cuenta en la respuesta inicial del profesor B, sino que también emerge de la observación de sus clases y de las respuestas que da en la entrevista cuando se le pregunta específicamente sobre aspectos de medios, se infiere que este criterio tiene una gran importancia para orientar la implementación de sus clases, y por ello lo hemos ubicado en la parte superior del esquema de pesos.

Así por ejemplo, se preocupa por usar recursos tecnológicos como software matemático (Geogebra online y el Cabri) en sus clases de derivadas, en aras de hacer una mejor presentación, aunque, no trabaja la modelización y las demostraciones por falta de tiempo y porque no están programadas en el sílabo; el docente es de la opinión que las condiciones del aula y los elementos en ella, en general, sí son adecuados para ejecutar una buena enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones, sin embargo, la cantidad de alumnos en el aula le complica hacer una interacción adecuada con los estudiantes; implementa los contenidos en la fase presencial, pero también utiliza el campus virtual para actividades complementarias e interactuar con los estudiantes; también, selecciona los contenidos más importantes de derivadas y les dedica tiempo en su desarrollo, así como invierte tiempo en los contenidos que en su apreciación representan mayor dificultad para los estudiantes.

En relación al criterio interaccional observamos que no solamente es tenido cuenta en la respuesta inicial del profesor B, sino que también surge de la observación de sus clases y de las respuestas que brinda dicho docente cuando se le pregunta específicamente sobre aspectos interaccionales, se infiere que le asigna gran importancia en la implementación de sus clases.

Así por ejemplo, se observa que interactúa bastante con los estudiantes en el desarrollo de sus clases mediante preguntas, los atiende, los saca a la pizarra, identifica las dudas y dificultades de aprendizaje frente a las derivadas y se esfuerza por esclarecerlas; hace uso de diferentes recursos argumentativos como metáforas, preguntas y clase magistral para implicar a los estudiantes en sus clases; considera el trabajo en equipos y hace participar tanto a los que más saben, así como a los que menos conocen; procura generar el diálogo y la comunicación entre los estudiantes; y, a través de la interacción puede darse cuenta del aprendizaje de los alumnos, siempre está pendiente del proceso de aprendizaje de las derivadas.

Ahora bien, también se observa que la interacción tiene ciertas limitaciones debido al número de alumnos en aula y por la necesidad de cumplir el sílabo en el tiempo que se ha planificado, pero aun así el criterio interaccional sigue teniendo un peso relevante en las clases del mencionado docente.

En tanto que el criterio ecológico aparece en su respuesta inicial y, de la triangulación realizada, evidenciamos que tiene un papel fundamental para orientar la práctica del docente B, la cual justifica, sobre todo, por el cumplimiento de la totalidad de contenidos del sílabo, aunque también hace reflexiones en clases en las que la justifica por el hecho de tener en cuenta la futura profesión de los estudiantes; hace innovaciones en su práctica docente, sobre todo en la parte de los recursos tecnológicos para enseñar derivadas y otros temas matemáticos; también, en su discurso hace hincapié a los estudiantes en el hecho de que las derivadas les servirá para cuando tengan que estudiar Cálculo Integral, Cálculo en Varias Variables, y luego Cálculo para la Toma de Decisiones.

Por todo lo sustentado y de acuerdo con la triangulación entre lo dicho en la entrevista y lo observado en sus clases, concluimos que estos tres criterios (CI mediacional, interaccional y ecológico) son los que mayor peso tienen para orientar la práctica docente de este profesor B, y a los cuales se supeditan los demás criterios de idoneidad (epistémico, cognitivo y emocional), aunque en nuestra apreciación el criterio emocional y el cognitivo tienen, relativamente, mayor peso que el epistémico.

Finalmente, del criterio ecológico hay que destacar que el componente "Utilidad sociolaboral" se tiene en cuenta para justificar una presentación del tema de las derivadas y sus aplicaciones con fuerte tendencia a la mecanización y poco significativo, pero no para incorporar procesos de modelización y argumentación. Es decir, se trata de un criterio que incide disminuyendo la idoneidad epistémica (reduce la riqueza de procesos), cuando podría afectar aumentándola al dar un papel importante a los procesos matemáticos como la modelización.

Reconocimiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Barcelona: La Muralla.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema* *35*(69), 263-288. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13

Font, V. (2019). Dilemas sobre las matemáticas entendidas como una materia general (ciencia básica) para diferentes carreras (profesiones). En Arango, A. J., Sánchez, O., Vargas, H., Ariza, M. X., Díaz, S. y Canoles, J. C. (Eds.), Memorias III Congreso ciencias básicas en un mundo globalizado. Investigación experimental y simulación matemática. Tunja, Colombia: Ediciones Usta-Universidad Santo Tomás.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, *45*, e189468. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

Pino-Fan, L., Font, V., & Breda, A. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. En Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., and Choy, B.H. (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Singapore: PME.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 361-394.

6

ARTÍCULO CIENTÍFICO 3

Criterios que guían la práctica del profesor de matemáticas en cursos de ciencias básicas para ingeniería

Este artículo ha sido publicado como investigación original en la Revista Científica *Uniciencia*, *36*(1), 1-19, por los autores: Walmer Garcés Córdova y Vicenç Font Moll (2022). DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.5

Indicios de calidad

a) Base de datos de indexación: SCOPUS - SJR. Scimago Journal & Country Rank.
b) Índice de impacto: 0.167 ; año: 2020
c) Categoría: Social Sciencies (Miscellaneus)
d) Posición que ocupa la revista en el área: 382 / 592 ; Tercil: T3 ; Cuartil: Q3
e) Índice MIAR: ICDS 2020 =10.
f) Otros indicios de calidad: Revista indexada en Aquatic Science & Fisheries Abstracts (ASFA), DOAJ, DIALNET. Evaluada en: LATINDEX. Catálogo v2.0 (2018 -), Directory of Open Access Journals, ERIHPlus, LATINDEX. Catálogo v1.0 (2002 - 2017). Indexada en Emerging Sources Citation Index de WoS, con un Journal Citation Indicator de WoS (JCI 2020) = 0,06, Web of Science Categories: Multidisciplinary Sciences - ESCI, 97/128 (Q4).

Citar como: Garcés, W. y Font, V. (2022). Criterios que guían la práctica del profesor de matemáticas en cursos de ciencias básicas para ingeniería. *Uniciencia*, *36*(1), 1-19. DOI: https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.5

Uniciencia

Uniciencia. Vol. 36(1), e15727. January-December, 2022
Doi: https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.5
URL: https://www.revistas.una.ac.cr/uniciencia
E-ISSN: 2215-3470
Email: revistauniciencia@una.cr

Criterios que guían la práctica del profesor de matemáticas en cursos de ciencias básicas para ingeniería

Criteria guiding mathematics professors practice in engineering basic science courses

Critérios que conduzem a prática do professor de matemática nos cursos de ciências básicas para engenharia

Walmer Garcés-Córdova [1], Vicenç Font-Moll [1]

Received: Apr/3/2021 • Accepted: Jun/8/2021 • Published: Jan/31/2022

Resumen

El presente estudio tiene como objetivo inferir los criterios que orientan la práctica del profesor universitario para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería y, en concreto, para explicar derivadas. Se trata de una investigación cualitativa de estudio de caso múltiple que busca comprender la enseñanza del cálculo diferencial a través del análisis de las prácticas de un grupo de siete docentes, y de la reflexión sobre dichas prácticas, cuando implementan sus clases en facultades de ingeniería de universidades públicas y privadas en Lima. Se videograbaron las clases de cada profesor y se infirieron los criterios que siguen en el diseño e implementación de estas mismas, tomando como referente los criterios de idoneidad didáctica, los cuales también se usaron para diseñar el cuestionario de la entrevista semiestructurada; luego, se hizo la triangulación entre lo que señala cada docente y lo que se ha observado que hace. Se encontró que los profesores de matemáticas de las carreras de ingeniería están completamente condicionados por el programa de la asignatura al momento de desarrollar sus clases de derivadas; así como también, por los medios y recursos de enseñanza y la disponibilidad de tiempo para sus clases de cálculo diferencial. Se concluye, pues, que el grupo de profesores participantes tiene como criterio prioritario el cumplimiento del currículo en el tiempo planificado. Por otra parte, dan más importancia a realizar una adecuada gestión de la interacción en el grupo, que a enseñar unas matemáticas de calidad que sean aprendidas de manera significativa por los estudiantes.

Palabras clave: Criterios de idoneidad didáctica; derivadas; enseñanza de las matemáticas; ingeniería; reflexión sobre la práctica.

Abstract

The study aims to infer the criteria that guide the practice of professors to explain mathematics, specifically derivatives, in a basic science course in the engineering program. This qualitative research of a multiple case study seeks to understand the teaching of differential calculus through the analysis of the practices of a group of seven professors, and the reflection on these practices when they implement their classes in engineering faculties of public and private universities in Lima, Peru. Each professor's class was recorded. The criteria they follow to design and implement the classes were inferred, taking the didactic suitability criteria as a reference, which were also used to

design the semi-structured interview questionnaire. Triangulation was done between what professors say and what they have been observed to do. It was noted that mathematics professors in engineering programs are completely conditioned by the subject syllabus when developing their derivative classes, as well as by the means and teaching resources and the availability of time for their differential calculus classes. Therefore, it is concluded that the priority criterion of the group of participating professors is meeting the curriculum in the time scheduled. On the other hand, they give more importance to adequately managing group interaction than teaching quality mathematics to be learned in a significant manner by students.

Keywords: Didactical suitability criteria; derivatives; mathematics teaching; engineering; reflection on practice.

6.1. Introducción

En la enseñanza de las matemáticas en ingeniería, desde sus inicios, se han ido introduciendo las ciencias básicas como un ciclo común en la base a varias ingenierías, bien sea para evitar presentar unas matemáticas conductistas o mecanicistas, o bien por no tener en cuenta la importancia del contexto en la aplicación de las matemáticas. Así, por ejemplo, en el pasado siglo ya era habitual que las ingenierías tuviesen un ciclo básico o de estudios generales, que se suponía suministraba a los futuros ingenieros las herramientas matemáticas básicas que luego iban a aplicar en su campo profesional (Monforte, 2011).

Ahora bien, en la actualidad han surgido ciertas dudas y dilemas relacionados con el rol que cumplen las ciencias básicas y, en particular, las matemáticas, en la estructura de las carreras de ingeniería. Los más importantes están ligados a cuatro aspectos (Font, 2019): 1) La suposición de la aplicación, con cierta facilidad, de un conocimiento básico general en diversos contextos. 2) La presentación de contenidos que en la práctica no se utilizan. 3) El alto número de alumnos reprobados. 4) Énfasis en un enfoque de enseñanza que desarrolle competencias.

Con la finalidad de dar respuesta a estos dilemas se han realizado diversas investigaciones sobre cómo es la enseñanza de las matemáticas en las asignaturas de estos ciclos básicos de ingeniería, así como sobre las competencias y conocimientos de los profesores de matemáticas de dichos ciclos. Con respecto a la enseñanza del cálculo diferencial en carreras de ingeniería en el Perú, hay un cierto consenso difuso en los aspectos siguientes: a) los alumnos tienen dificultades para su aprendizaje, b) estas dificultades se deben a una enseñanza centrada en el aprendizaje de fórmulas, algorítmica y mecanicista, o bien a una enseñanza rigurosa y formalista, c) una enseñanza que omite la comprensión significativa de las nociones básicas del cálculo y sus aplicaciones.

Aunque no existen suficientes investigaciones que den cuenta del estado de la enseñanza de las matemáticas, y del cálculo diferencial, en los ciclos de ciencias básicas de ingeniería en el Perú, a partir de la revisión de la bibliografía lo que encontramos son algunas propuestas de innovaciones. Villanueva (2019) estudia el aprendizaje de la derivada en el primer año de ingeniería de telecomunicaciones de una universidad pública peruana, y entre otros resultados, encontró que uno de los problemas que afrontan los estudiantes de ingenierías, es que no logran alcanzar un aprendizaje significativo de la derivada con los métodos tradicionales que enfatizan en una enseñanza procedimental.

Vargas (2010) hace un estudio sobre evaluación de la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en aulas de ingeniería de universidades chilenas y concluye que, entre otros aspectos, predomina el método expositivo o magistral debido al elevado número de estudiantes, las tutorías son consideradas solo como un complemento de la actividad docente, además de que el tipo de curso, el número de estudiantes en aula y la relación de los profesores con los estudiantes condicionan la metodología.

Capote et al. (2016), con base en las tendencias internacionales sobre la enseñanza en ingeniería, señala que, si bien el ingeniero debe poseer un conocimiento profundo de las ciencias básicas, la sociedad exige una enseñanza que forme profesionales que respondan a las demandas del desarrollo contemporáneo, lo cual requiere que el proceso de enseñanza - aprendizaje y los modelos curriculares sean interactivos, colaborativos, centrados en el estudiante, y con un aprendizaje para toda la vida.

Por su parte, García (2013) sostiene que la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en general, y del cálculo diferencial, en particular, presentan una de las mayores dificultades para los estudiantes de las carreras de ingeniería. El autor señala que hay una tendencia hacia la algebrización y aritmetización del cálculo, lo cual conlleva a una descontextualización de la materia, ya que induce a los estudiantes a obtener soluciones mecanicistas y deja de lado aspectos cognitivos, socioafectivos y de contextualización en el proceso instruccional; además, a pesar de que el cálculo sirve de base para el desarrollo profesional del futuro ingeniero, su enseñanza se centra en el uso y abuso del álgebra y la mecanización, y se descuida el proceso de modelización (también señalado por Artigue, 1995).

De otro lado, se han realizado diversas investigaciones sobre las competencias y conocimientos de los profesores de matemáticas en el ciclo básico (Arana, Ibarra & Font, 2020) y también sobre cómo es la enseñanza de las matemáticas, y del cálculo diferencial e integral, en estos ciclos (Camarena, 2013; Cooper, Levi Gamlieli, Koichu, Karsenty & Pinto, 2020; Juárez Ramírez, Chamoso Sánchez & González Astudillo, 2020; Rodríguez Gallegos, 2017). Por esto, existen diversas líneas de investigación que permiten inferir los conocimientos y competencias del profesor con base en el análisis de sus prácticas docentes y de sus reflexiones sobre estas. Pepin, Gueudet y Trouche (2017) afirman que las consideraciones implícitas y tácitas del profesor en la selección, secuenciación e implementación de secuencias de tareas nos informan de los criterios que orientan su práctica e inciden en lo que llaman capacidad de diseño pedagógico, la cual, por otra parte, puede crecer a través de la reflexión en la acción (Schön, 1983).

Por su parte, Carlos Guzmán (2018) hace una investigación con profesores de carreras de ingeniería usando entrevistas en profundidad diseñadas a partir del marco teórico tomado como referente (las nociones de docencia efectiva y buenas prácticas para la enseñanza), donde se propone identificar las cualidades y formas de enseñar de un grupo de profesores que, a priori, se consideró que realizaban buenas prácticas de enseñanza, con el objetivo de que los criterios que orientaban su práctica permitiesen delinear sugerencias para la formación docente.

Además, los componentes de los criterios de idoneidad didáctica (CID) propuestos en el enfoque ontosemiótico (ver siguiente sección) funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando valoran un episodio o cuando reflexionan sobre su práctica, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta que guíe su reflexión (Breda, 2020; Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Seckel, Breda, Sánchez & Font, 2019). Es decir, sus comentarios se pueden considerar como evidencias del uso implícito de algún componente de los CID como guía para orientar la práctica docente.

En esta línea, la presente investigación trata de un estudio de caso múltiple de un grupo de docentes que enseñan cálculo diferencial en carreras de ingeniería en el Perú, en la cual, análogamente a lo realizado en Carlos Guzmán (2018), hemos aplicado una entrevista semiestructurada usando los CID como referente teórico para el diseño del cuestionario, con el objeto de inferir los criterios que orientan su práctica docente, de manera que la triangulación de fuentes nos ha permitido responder a la problemática: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica de este grupo de profesores para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en ingeniería, en concreto, para explicar derivadas?

6.2. Marco teórico

El enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS a partir de ahora) (Godino, Batanero & Font, 2007 y 2019) considera cinco tipos de análisis sobre los procesos de instrucción: 1) Identificación de prácticas matemáticas. 2) Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos. 3) Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, 4) Identificación del sistema de normas y metanormas. 5) Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción (Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Planas & Godino, 2010).

El primer tipo explora las prácticas matemáticas realizadas en un proceso de instrucción matemático; el segundo, se centra en identificar objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas; el tercero, está orientado a la descripción de patrones de interacción, configuraciones didácticas y su articulación secuencial en trayectorias didácticas; las configuraciones y trayectorias están soportadas por una trama de normas y metanormas; el cuarto, estudia dicha trama. Los cuatro primeros tipos de análisis son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa, y sirven de base al quinto tipo, el cual está centrado en la valoración de la idoneidad didáctica como síntesis orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de instrucción en nuevas implementaciones.

En el EOS se entiende la idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza-aprendizaje como el grado en que este reúne ciertas características que permiten calificarlo como idóneo (óptimo o adecuado), para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta el entorno.

Se trata de un constructo multidimensional que se descompone en seis criterios de idoneidad parcial: 1) Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas “buenas matemáticas”. 2) Idoneidad cognitiva, para valorar, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar. 3) Idoneidad interaccional, para valorar si las interacciones resuelven dudas y dificultades de los alumnos. 4) Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción. 5) Idoneidad emocional, para valorar la implicación (intereses y motivaciones) de los alumnos durante el proceso de instrucción. 6) Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional (Font, Planas & Godino, 2010).

Los CID pueden ser de utilidad, primero, para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y, segundo, para valorar su implementación (Breda, Font & Pino-Fan, 2018).

Para la operatividad de los CID se define un conjunto de componentes e indicadores observables que sirven de guía para el análisis y valoración de un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa (Breda, Pino-Fan & Font, 2017). En la Tabla 6.1 se detallan los criterios y componentes de idoneidad didáctica considerados por estos autores (por falta de espacio no se muestran los indicadores).

La noción de idoneidad didáctica está siendo utilizada ampliamente como herramienta para, por una parte, analizar las secuencias didácticas (y sus rediseños) implementadas por los profesores en aras de conseguir mejoras en la enseñanza de las matemáticas (Breda, 2020; Morales-López & Font, 2019; Sousa, Gusmão, Font & Lando, 2020) y, por otra, para organizar la reflexión del futuro profesor (o en activo) sobre su práctica en programas de formación de profesores (Esqué & Breda, 2021; Giacomone, Godino & Beltrán-Pellicer, 2018; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya & Bustamante, 2019; Seckel & Font, 2020), ya que facilita la reflexión sistemática de los profesores sobre la complejidad de los objetos matemáticos que enseñan y los factores implicados en su estudio.

Tabla 6.1

Criterios y componentes de idoneidad didáctica.

Criterio	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Emocional	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica.

Nota: Extraído de Morales-López y Font (2019).

También se ha usado para el análisis y valoración de lecciones de libros de texto (Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer & Godino, 2020) y para el diseño y valoración de tareas matemáticas (Gusmão & Font, 2020). Los CID son la herramienta teórica que usaremos para dar respuesta a la problemática que nos hemos planteado.

6.3. Metodología

La presente investigación es de enfoque interpretativo de corte cualitativo, ya que el propósito no es explicar, controlar o predecir, ni se pretende transformar la realidad, sino que lo que se busca es comprender los criterios que orientan la enseñanza de las matemáticas en el ciclo de estudios generales de carreras de ingeniería por parte de un grupo de profesores universitarios, a través del análisis de sus prácticas docentes y de su reflexión sobre ellas. El método adoptado para el estudio de dichas prácticas docentes presenta las siguientes fases:

Fase 1: Selección de los participantes. Se coordinó con un grupo de diez docentes de experiencia en la enseñanza del cálculo diferencial e integral en carreras de ingeniería de diversas universidades públicas y privadas en Lima – Perú, con ocho de ellos graduados en matemáticas, y dos, en educación con mención en matemática. Se les expusieron los alcances del estudio y se les pidió su participación en este, y su consentimiento para registrar en videograbaciones el desarrollo de sus clases sobre la derivada y sus aplicaciones; también, para que nos brindasen una entrevista y nos proporcionasen su material académico de trabajo.

Fase 2: Recopilación de documentos curriculares, materiales elaborados por los profesores para su implementación en el aula, etc. Para efectos de realizar el análisis de este estudio, todos los participantes de la investigación nos facilitaron los documentos curriculares: programa de la asignatura, planes de clase, cronogramas del ciclo académico, presentaciones de derivadas, separatas de ejercicios propuestos y desarrollados, material de consulta para los alumnos, pruebas de desarrollo y prácticas calificadas, así como el material de los talleres para el trabajo de equipo en aula.

Fase 3: Grabación de las clases. Las clases sobre derivadas y sus aplicaciones implementadas por siete docentes fueron registradas en videograbación con una duración promedio de 100 minutos (entre dos y tres clases para cada uno). Con los otros tres profesores no fue posible, debido al confinamiento decretado para prevenir la pandemia de la Covid. Por esta razón, la investigación se continuó solo con los siete profesores cuyas clases fueron videograbadas (en adelante nos referiremos a ellos como profesor A, B, C, D, E, F y G).

Fase 4: Elaboración del instrumento para la realización de la entrevista. Con base en una primera observación de las clases videograbadas y en los CID, se diseñó un cuestionario base para una entrevista semiestructurada, luego se realizó una entrevista piloto con uno de los 10 profesores. A partir de esta información se hicieron ajustes al primer cuestionario que consideraron: a) dificultades de comprensión y redundancia de ciertas preguntas, y b) la opinión de un experto en el uso de herramientas EOS para la investigación de los conocimientos y competencias de los profesores de matemáticas.

Es así como se obtuvo un segundo cuestionario de 46 preguntas, dividido en tres preguntas iniciales de tipo general (sobre su formación, la segunda sobre cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica y la tercera sobre el modelo de profesor con el que se identificaba) y 43 formuladas con base en los CID (epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional y ecológico), sus componentes y descriptores.

Fase 5: Radiografía de las clases e inferencia de criterios que orientan la práctica del profesor. Se hizo un análisis experto de las clases videograbadas a cada profesor usando los cuatro primeros tipos de análisis propuestos en el modelo de análisis didáctico del EOS, tal como se hace en Breda, Hummes, da Silva y Sánchez (2021) y en Pochulu y Font (2011), para poder determinar las prácticas, objetos y procesos matemáticos, funciones del profesor y del alumno, configuraciones didácticas, conflictos semióticos, patrones y normas.

Con la información obtenida, se infirieron los criterios que guían a cada profesor en el diseño e implementación de sus clases, utilizando, como categorías a priori, los indicadores y componentes de los CID - sin llegar a realizar la valoración de la idoneidad didáctica (quinto nivel del modelo de análisis didáctico basado en el EOS) - para que sirvieran como referencia en la triangulación con los criterios que cada profesor dice seguir.

Debemos precisar que en estas clases cada profesor explicó parte del tema de derivadas y sus aplicaciones, cuyos contenidos, según el programa de la asignatura, eran: la noción de derivada como pendiente de recta tangente y como límite de las tasas medias de variación, la aplicación de la definición de derivada para calcular derivadas de funciones, la derivada de la suma, producto y cociente de funciones, las reglas básicas de derivación que después son mecanizadas en diversos ejercicios y, por último, los criterios de la primera y segunda derivada para determinar intervalos de crecimiento y concavidad, máximos y mínimos relativos, y puntos de inflexión.

En la Tabla 3 se detallan los contenidos desarrollados por cada profesor (ver Anexo 1).

Fase 6: Entrevista a cada profesor para que explique cuáles son, desde su perspectiva, los criterios que orientan su práctica docente. Se realizó la entrevista a cada uno de los siete profesores cuyas clases fueron videograbada con la finalidad de determinar los criterios que, según ellos, orientaban su práctica pedagógica; cada entrevista duró dos horas en promedio y tuvo dos partes claramente diferenciadas. En la primera parte se hicieron tres preguntas generales (sobre su formación, la segunda sobre cuáles eran los criterios que orientaban su práctica docente, y la tercera sobre el modelo de profesor con el que se identificaba).

En la segunda parte se formularon preguntas específicas relacionadas con alguno de los componentes de los CID.

Fase 7: Transcripción de la entrevista realizada a cada profesor. En esta fase se realizó la transcripción literal de la entrevista videograbada para cada uno de los siete profesores seleccionados.

Fase 8: Inferencia de criterios a partir de la entrevista. Se hizo el análisis del contenido de la entrevista realizada con cada uno de los siete docentes para inferir los criterios que según el profesor orientan su práctica, de manera similar a como se hace en Breda (2020) y en Seckel, Breda, Sánchez y Font (2019).

Fase 9: Triangulación de fuentes. Finalmente, se hizo la triangulación de fuentes (sobre todo, de los resultados de la fase 5 sobre la observación de clases y las respuestas a la entrevista) para inferir los criterios que orientan la práctica docente de cada profesor participante de esta investigación.

6.4. Análisis de datos y resultados

En la fase 5 se realizó el análisis con los cuatro primeros tipos del modelo de análisis didáctico propuesto por el EOS (identificación de prácticas matemáticas, identificación de objetos primarios y procesos, análisis de interacciones didácticas y conflictos y, por último, de las normas que regulan el proceso de enseñanza). Las herramientas de estos cuatro primeros niveles de análisis permiten descomponer la transcripción de una sesión de clase en una trayectoria de configuraciones didácticas y, para cada configuración, estudiar diferentes aspectos.

A continuación, se usó la herramienta CID, la cual sirvió para inferir algunos criterios que orientan la práctica del profesor. Por último, se realizó la triangulación de fuentes entre lo declarado por cada profesor en la entrevista y lo observado en el aula de clases. Este análisis se realizó para cada uno de los siete profesores participantes. En Garcés, Font y Morales-Maure (2021) se muestra, de manera detallada, el proceso de análisis de datos al aplicar las fases de la metodología, explicadas en la sección anterior, para el profesor A, uno de los participantes del presente estudio múltiple; mientras que en Garcés (2021) se muestra el caso del profesor F.

6.4.1. Resultados para cada profesor participante del estudio

A partir del análisis de las respuestas dadas por cada docente en la entrevista y la triangulación con lo observado en sus clases, podemos inferir los criterios principales que orientan la práctica de estos profesores cuando diseñan e implementan sus clases de derivadas para estudiantes de carreras de ingeniería, así como inferir el peso que tienen estos criterios en su práctica docente. Como se ha mencionado antes, el proceso detallado de cómo se llega a estos resultados para el profesor A se puede consultar en Garcés, Font y Morales-Maure (2021) y para el profesor F en Garcés (2021).

Aquí, por cuestiones de espacio, para el caso del profesor E se explica, con detalle, el resultado de esta triangulación, mientras que, para los otros seis profesores, solo se presenta un esquema que resume los resultados. Seguidamente se presentan los resultados globales para todo el grupo de profesores.

Docente E

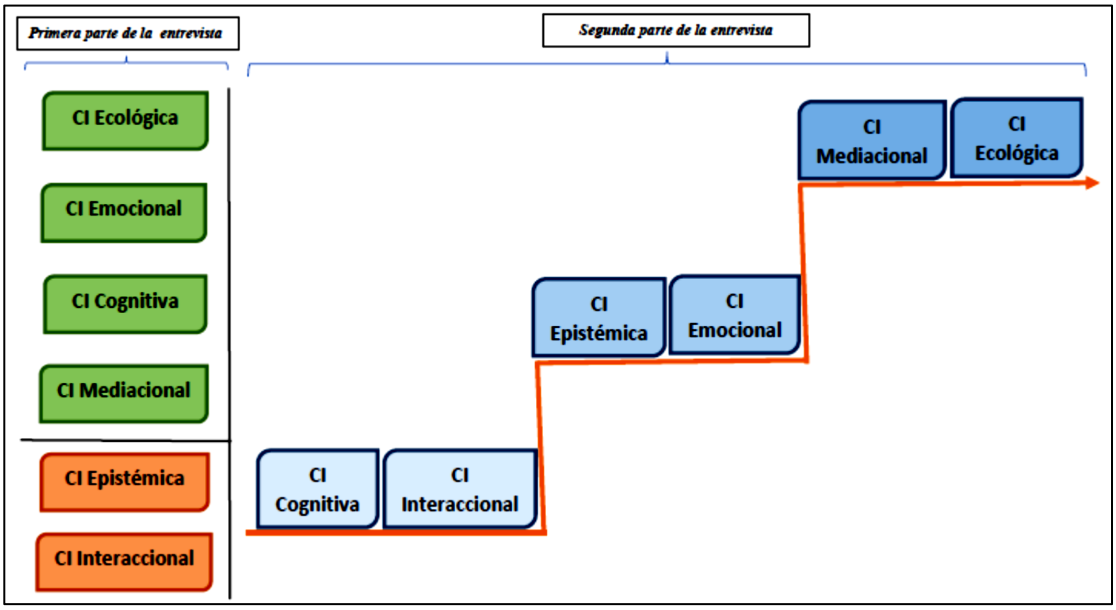
En la columna de la izquierda del esquema de la Figura 6.1 se muestran, en la parte superior, los criterios de idoneidad didáctica (CID) que aparecen en las respuestas del profesor E cuando se le formula, en la primera parte de la entrevista, la pregunta de cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica (ecológico, emocional, cognitivo y mediacional); mientras que en la parte inferior (epistémico e interaccional) se ubican los criterios de idoneidad que no menciona en su respuesta (primera parte de la entrevista).

En la columna derecha del esquema están los criterios de idoneidad que emergen en sus respuestas a las preguntas más específicas relacionadas con alguno de los componentes de los CID (segunda parte de la entrevista). Tal como era esperable, teniendo en cuenta las preguntas formuladas, en esta columna aparecen los seis CID; ahora bien, no todos tienen la misma importancia para el profesor E al momento de reflexionar y justificar su práctica. Para representar el diferente peso que tiene cada CID como guía de la práctica del profesor hemos utilizado el esquema de la escalera, donde los escalones superiores son los de mayor peso, en tanto que los CID que están en la parte inferior tienen menor peso.

La disposición en la escalera, además de indicar el menor o mayor peso, también pretende representar cómo algunos CID quedan supeditados por otros. El orden en el que aparecen los CID en la escalera es resultado de la triangulación entre el discurso docente y lo que se infiere de la observación de sus clases.

Figura 6.1

Esquema de los criterios que orientan la práctica del profesor E



Nota: Fuente propia de la investigación.

En su discurso inicial el profesor E explica que los criterios ecológico, emocional, cognitivo y mediacional son los que orientan su práctica docente. Ahora bien, cuando en la segunda parte de la entrevista se le hacen preguntas más específicas sobre aspectos cognitivos, concluimos que: 1) recupera los conocimientos previos de los estudiantes, ya que para él son muy importantes, de manera que afirma que sin estos saberes previos no podría desarrollar sus clases como pretende; 2) si identifica que los alumnos no tienen los saberes previos necesarios para el estudio de las derivadas, lo que hace es asesorarlos y darles toda posibilidad de que lo contacten, incluso por las redes sociales; 3) los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que presenta en sus clases están en la zona de desarrollo próximo (ZDP) de los alumnos, aunque acepta que no logra que todos los estudiantes aprendan, pues, le falta tiempo; 4) tiene en cuenta la diversidad de los alumnos en sus clases de derivadas; 5) los instrumentos de evaluación que aplica son pruebas de desarrollo objetivas, y cuyos resultados sí le informan de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, aunque no del todo; 6) diseña las tareas con la intención de activar en los estudiantes los procesos cognitivos relevantes; aunque reconoce que no siempre lo logra, entonces va corrigiendo y haciendo ajustes en el proceso, lo cual justifica por falta de tiempo.

En consecuencia, con base en la triangulación de lo observado en sus clases, podemos inferir que el docente E asigna un mediano peso a los aspectos cognitivos, ya que a pesar de su esfuerzo por construir el aprendizaje, este sigue siendo de transmisión de conocimientos, pero basado en los recursos tecnológicos y con intentos de trabajar los procesos cognitivos relevantes; además, supedita este criterio al ecológico (cumplimiento del currículo) y al mediacional (uso de recursos tecnológicos como las redes sociales).

Con respecto al criterio interaccional, este no había sido tomado en cuenta en las respuestas iniciales del docente E, sin embargo, emerge en la segunda parte de la entrevista cuando se le formulan preguntas más específicas sobre aspectos interaccionales, donde se infiere que va ganando cierto peso en la implementación de sus clases. Así, por ejemplo, en sus clases se esfuerza por hacer una presentación clara y ordenada de las definiciones y conceptos de la derivada y de las reglas de derivación, y para que sus explicaciones sean entendibles para los estudiantes; opina que la interacción con los alumnos es fundamental ya que le permite identificar las dudas y dificultades que estos tienen sobre las derivadas; usa diversos recursos argumentativos para captar su atención tales como metáforas, método socrático, discrepancias sobre la invención del cálculo, así como se esfuerza por incluir a todos en sus clases, aunque no lo logra por falta de tiempo; propicia momentos para que los alumnos hagan la exploración, la formulación y la validación de sus conjeturas sobre las derivadas, así como para el diálogo y la comunicación entre estos, sin embargo, no lo alcanza puesto que le falta tiempo; considera que la interacción con los estudiantes es fundamental en el desarrollo de sus clases.

Por lo antes mencionado, concluimos que el profesor E les asigna un peso relativamente bajo a los aspectos interaccionales en su práctica docente, y los supedita al criterio mediacional (tiempo).

En relación con el criterio epistémico, este tampoco había sido tomado en cuenta por el profesor E en la primera parte de la entrevista; sin embargo, en la segunda parte cuando se le formulan preguntas más específicas sobre aspectos epistémicos, emerge con un peso importante, por lo cual concluimos que: 1) no comete errores matemáticos en el desarrollo de sus clases, aunque acepta cometer otro tipo de errores, ya sea por descuido, distracción u omisión; 2) considera muy importante la intuición, hasta el punto que afirma que sin intuición no logra hacer matemáticas en sus clases; 3) proporciona solo una pista de demostración o deducciones sencillas, ya que tiene que adecuarse a los intereses de los estudiantes y al programa de la asignatura, presenta las reglas básicas de derivación y enfoca los temas de una manera más instrumental; 4) trabaja la resolución de problemas, la argumentación y a veces la modelización; la demostración no la trabaja por falta de saberes previos y deficiencias de los alumnos, por falta de tiempo y por cumplir con el sílabo; 5) define la derivada como pendiente de una recta tangente a la curva, como velocidad instantánea y como razón de cambio relacionada, además, considera fundamental presentar diferentes significados de la derivada; 6) la mayoría de problemas que propone son contextualizados, acorde con la coyuntura actual, la tecnología y las redes sociales; cuando los elabora escoge una variedad de contextos y presenta una diversidad de problemas.

En consecuencia, podemos inferir que para el profesor E, al momento de orientar su práctica docente, los aspectos epistémicos se supeditan al criterio ecológico (regirse por el sílabo) y al mediacional (falta de tiempo); además, de que asigna un peso medio en sus clases al criterio epistémico, por esta razón lo hemos colocado en la mitad de la escalera en el esquema.

Con respecto al criterio emocional, este no solamente figura en la respuesta inicial del profesor E, sino que vuelve a emerger y con bastante importancia en sus respuestas en la segunda parte de la entrevista (cuando se le hacen preguntas específicas sobre este). Podemos inferir que: el docente está atento a los sucesos sociales del entorno y a las novedades que trae la tecnología y las redes sociales, para incluirlas como contexto de los problemas de derivadas, de tal manera que dichas tareas sean de interés para los estudiantes; propone situaciones contextualizadas al entorno de la ingeniería y acorde con los intereses de los alumnos, de manera que puedan valorar la utilidad de la derivada en la vida cotidiana y en su ámbito profesional; brinda confianza a los alumnos y los anima, les dice que sí pueden lograr resolver las situaciones de derivación, los motiva y empuja a intentarlo; en sus clases tiene la intención de involucrar a todos los estudiantes para que participen saliendo a la pizarra y argumenten sus procedimientos de manera equitativa, aunque reconoce que no lo logra del todo por falta de tiempo; tiene que luchar contra el miedo y la fobia de los alumnos hacia las matemáticas, les da confianza para que intervengan y participen, puesto que sostiene que esa es su labor como docente, ayudar a levantar la autoestima de los estudiantes.

En consecuencia, por todo lo señalado concluimos que el docente E le asigna un peso medio considerable e importante a los aspectos afectivos al momento de diseñar e implementar sus clases de matemáticas para ingeniería; además, este docente supedita los aspectos emocionales al criterio mediacional (falta de tiempo).

En cuanto al criterio mediacional, este no solamente había sido tomado en cuenta por el profesor E al principio de la entrevista, sino que cuando se le hacen preguntas específicas de aspectos de medios emerge nuevamente y con un peso muy alto dentro de su práctica docente. De sus respuestas podemos inferir que: hace uso de recursos tecnológicos como el Wolfram, Symbolab, Geogebra, emuladores de calculadora y el Wimplot, ya que le permiten mostrar paso a paso y corroborar las derivadas; concluye que trabajar con aulas de 40 estudiantes no es lo ideal para la enseñanza de las derivadas, dice que lo ideal sería 20 alumnos por aula para poder monitorear y atenderlos adecuadamente; la infraestructura, el aula, sus elementos, los equipos multimedia y la distribución de los estudiantes en ella sí son adecuados para la ejecución del proceso de enseñanza que implementa para ingeniería; invierte tiempo disponible para las clases en lo más importante de las derivadas, lo que él considera que es relevante para los estudiantes, desde la definición hasta las aplicaciones, pero básicas sin mucha profundidad; también invierte tiempo en aquellos contenidos matemáticos que considera presentan mayor grado de dificultad para los estudiantes.

En consecuencia, concluimos que para este profesor E los aspectos de medios son de gran importancia en su práctica docente, puesto que, además, se supeditan a él los demás criterios y tienen el mismo peso que el criterio ecológico.

Respecto al criterio ecológico aparece en su respuesta inicial y, de la triangulación realizada, evidenciamos que tiene un papel fundamental para orientar la práctica del docente E, lo cual justifica, sobre todo, por el hecho de tener en cuenta la futura profesión de los estudiantes de ingeniería; los contenidos que implementa sí tienen vínculo con cursos avanzados de ingeniería y con asignaturas posteriores de matemáticas, además, de conexiones con la física, la economía, los modelos econométricos y otros contextos; los contenidos de derivadas que enseña repercuten en la inserción sociolaboral de los futuros ingenieros, en la medida en que utiliza el poder interpretativo de los gráficos, los significados de los fenómenos y de ciertas situaciones laborales; también, se involucra con los estudiantes y procura entrar en su mundo del manejo de los recursos tecnológicos y las redes sociales, adecúa los contenidos de las derivadas a los intereses de los alumnos, aunque reconoce que la evaluación es la más débil en su proceso de instrucción.

De la triangulación entre lo dicho en la entrevista y lo observado en sus clases, se infiere que el criterio ecológico, junto al mediacional, son los que mayor peso tienen para orientar su práctica docente, y a los cuales se supeditan los demás criterios de idoneidad (epistémico, emocional, cognitivo e interaccional).

6.4.2. Resultados globales para el grupo de profesores

En la Tabla 6.2 se muestran los resultados de manera global para el grupo de docentes participantes en este estudio, acerca del peso (alto, medio o bajo) o grado de importancia que asignan estos profesores de matemáticas a los diferentes CID cuando diseñan e implementan sus clases de derivadas y sus aplicaciones en las carreras de ingeniería.

En la Figura 6.2 se muestra la información de la Tabla 6.2 mediante un esquema global de los criterios que orientan la práctica de cada uno de los profesores que han participado en la investigación. En la parte inferior se ha ubicado a los profesores designados por A, B, C, D, E, F, G; luego, de abajo hacia arriba se colocan los CID que cada uno de estos profesores tiene en cuenta -según la importancia que les asignan, de menor a mayor, a cada criterio de idoneidad y considerando tres niveles (bajo, medio y alto) – en el diseño e implementación de sus clases de derivadas y sus aplicaciones en carreras de ingeniería.

En la parte superior del esquema se muestran los criterios de idoneidad didáctica que, según hemos inferido, cada profesor considera de mayor importancia en el desarrollo de sus clases del tema matemático ya mencionado.

Tabla 6.2

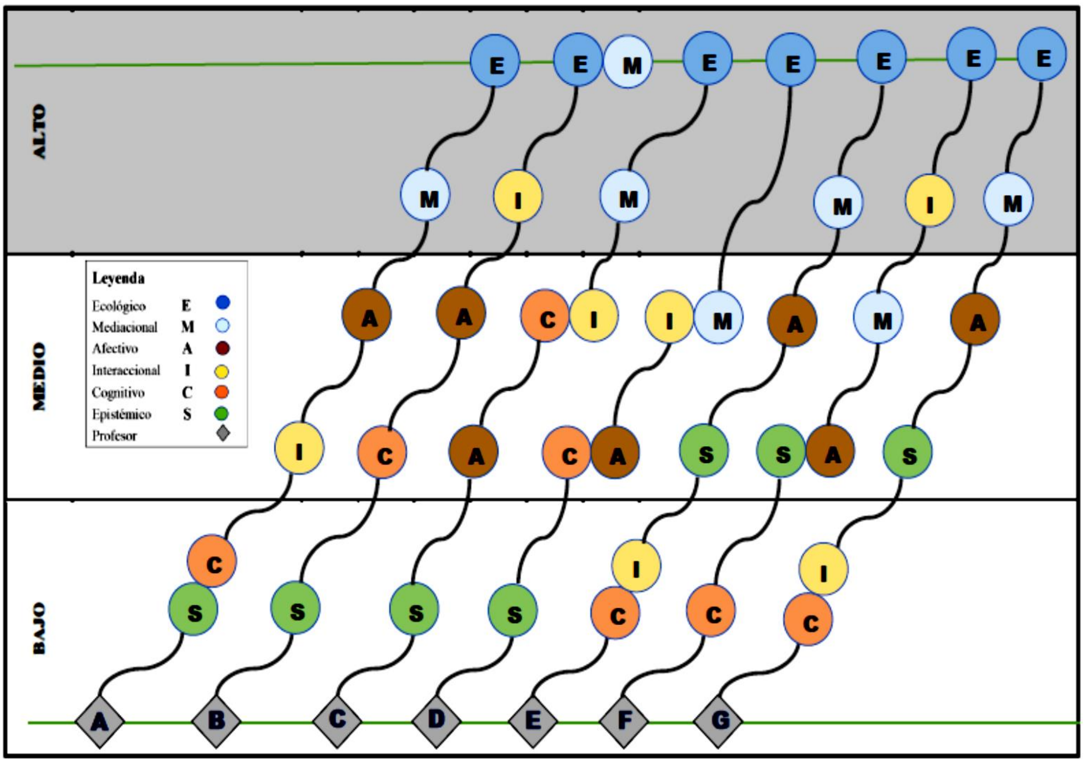
Criterios de idoneidad que tienen en cuenta los profesores de matemáticas, según el peso.

Peso	Criterio de Idoneidad Didáctica	Docente						
		A	B	C	D	E	F	G
ALTO	Ecológico	X	X	X	X	X	X	X
	Mediacional	X	X	X		X		X
	Emocional							
	Interaccional		X				X	
	Cognitivo							
	Epistémico							
MEDIO	Ecológico							
	Mediacional				X		X	
	Emocional	X	X	X	X	X	X	X
	Interaccional	X		X	X			
	Cognitivo		X	X	X			
	Epistémico					X	X	X
BAJO	Ecológico							
	Mediacional							
	Emocional							
	Interaccional					X		X
	Cognitivo	X				X	X	X
	Epistémico	X	X	X	X			

Nota: Fuente propia de la investigación.

Figura 6.2

Esquema global de los criterios que orientan la práctica de cada uno de los profesores



Nota: Fuente propia de la investigación.

6.5. Conclusiones

Los resultados obtenidos nos permiten dar una respuesta a la pregunta que nos habíamos propuesto contestar en este artículo: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica de este grupo de profesores para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en ingeniería, en concreto, para explicar derivadas? Pero, además, podemos inferir el peso que tienen estos criterios en su práctica, como resultado de la triangulación realizada entre lo que dice y lo que se ha observado que hace en las aulas cada profesor.

Con base en los resultados obtenidos concluimos que los profesores de matemáticas de las facultades de ingeniería en el Perú, participantes en esta investigación, están completamente condicionados por el programa de la asignatura y por los planes de clases, al momento de diseñar e implementar sus clases de derivadas y sus aplicaciones con estudiantes de las carreras de ingeniería. Tal y como se puede observar en los resultados, todos los profesores participantes de este estudio asignan el mayor peso en sus clases al criterio de idoneidad ecológico.

También podemos concluir que los profesores de matemáticas de las carreras de ingeniería que han participado están fuertemente condicionados por los medios y materiales de enseñanza en sus clases de cálculo diferencial, lo cual se justifica por el alto grado de importancia que le brindan a cuestiones de disponibilidad o falta de tiempo y a la distribución de los tiempos para el desarrollo de sus clases, así como al uso de los recursos tecnológicos como el software matemático. La gran mayoría de profesores participantes de este estudio asignan un alto peso en el desarrollo de sus clases al criterio de idoneidad mediacional.

De otro lado, concluimos que el grupo de profesores de matemáticas le asigna un peso medio a los criterios de idoneidad didáctica emocional e interaccional en el desarrollo de sus clases de cálculo diferencial, lo cual se justifica en el sentido de que la mayoría se preocupa por atender los intereses, las emociones y las necesidades de los estudiantes en las clases; así como también los docentes se preocupan por propiciar la interacción entre los estudiantes y entre estos con los propios profesores.

Finalmente, concluimos que los profesores de matemáticas de las carreras de ingeniería participantes en este estudio asignan un peso relativamente menor en la implementación de sus clases de cálculo diferencial a los criterios de idoneidad epistémico y cognitivo, puesto que sacrifican rigurosidad matemática, procesos relevantes de la actividad matemática, así como la alta demanda cognitiva, por cuestiones ecológicas y mediacionales, tal como se puede apreciar en los resultados de esta investigación.

Si bien, los resultados obtenidos solo son aplicables estrictamente a los profesores participantes y sirven para alcanzar una mayor comprensión de su práctica docente, consideramos que dichos resultados van más allá de este grupo de profesores y nos dan información relevante de cómo es la práctica docente del profesorado de matemáticas de los ciclos básicos en las carreras de ingeniería en el Perú.

Agradecimientos

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE). Al Programa Nacional de Becas y Crédito Educativo (Pronabec) del Ministerio de Educación del Perú, Beca Generación del Bicentenario, para estudios de doctorado en una de las 400 primeras universidades del mundo.

Declaración de la contribución de los autores

El porcentaje total de contribución para la conceptualización, preparación y corrección de este artículo fue el siguiente: W.G.C., 50 % y V.F.M., 50 %.

Declaración de disponibilidad de los datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio serán puestos a disposición por el autor correspondiente W.G.C., previa solicitud razonable.

Referencias

Arana-Pedraza, R. A., Ibarra, S. y Font, V. (2020). Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas en ingeniería: un primer acercamiento. En Y. Morales-López y A. Ruiz, *Educación Matemática en las Américas 2019* (928-935). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en la educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema, 34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia*

Journal of Mathematics, Science & Technology Education, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema, 35*(69), 263-288. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico, *Bolema*. *34*(66), 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Camarena, P. (2013). A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Innovación Educativa*, *9*(46), 17-44.

Capote, G., Rizo, N. y Bravo, G. (2016). La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. *Revista Universidad y Sociedad*, *8*(1), 21-28.

Carlos Guzmán, J. (2018). Buenas prácticas de enseñanza de los profesores de educación Superior. *REICE. Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, *16*(2), 133-149. https://doi.org/10.15366/reice2018.16.2.008

Cooper, J., Levi Gamlieli, H., Koichu, B., Karsenty, R., & Pinto, A. (2020). Instructional innovation in mathematics courses for engineering programs – a case study. En Inprasitha, M., Changsri, N. & Boonsena, N. (Eds). (2020). *Interim Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Khon Kaen, Thailand: PME.

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, *35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3

Font, V. (2019). Dilemas sobre las matemáticas entendidas como una materia general (ciencia básica) para diferentes carreras (profesiones). En Arango, A. J., Sánchez, O., Vargas, H., Ariza, M. X., Díaz, S. y Canoles, J. C. (Eds.), *Memorias III Congreso ciencias básicas en un mundo globalizado. Investigación experimental y simulación matemática*. Tunja, Colombia: Ediciones Usta-Universidad Santo Tomás.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación*, *37*(1), 29-42.

Garcés, W. (2021). Análisis de las pautas que rigen la práctica del profesor en la enseñanza de derivadas en ciencias básicas en carreras de ingeniería. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education* (en prensa).

Garcés, W., Font, V., & Morales-Maure, L. (2021). Criteria that guide the Professor's practice to explain mathematics at basic sciences courses in engineering degrees in Peru. A case study. *Acta Scientiae*, *23*(3), 1-33. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6389

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44*, e172011. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37-42.

Gusmão, T. C. R. S., & Font, V. (2020). Ciclo de estudo e desenho de tarefas. *Educação Matemática Pesquisa*, *22*(3), 666-697.

Juárez Ramírez, J. A., Chamoso Sánchez, J. M. y González Astudillo, M. T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias*, *38*(3), 161-178. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041

Monforte, G. L. (2011). Debates sobre el papel de las matemáticas en la formación de los ingenieros civiles decimonónicos. In *Técnica e ingeniería en España* (pp. 255-298). Zaragoza, El Ochocientos: de los lenguajes al patrimonio.

Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, *45*, e189468. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C. y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM*, *49*(5), 799-812.
https://doi.org/10.1007/s11858-017-0870-8

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(3), 361-394.

Rodríguez Gallegos, Ruth. (2017). Repensando la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros: actualidades y desafíos. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, *8*(15), 69-85.
https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.55

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books.

Seckel, M. J., Breda, A., Sánchez, A. y Font, V. (2019). Criterios asumidos por profesores cuando argumentan sobre la creatividad matemática. *Educação e Pesquisa*, *45*, e211926.
http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201945211926

Seckel, M. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. *Magis*, *12*(25), 127-144.
https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp

Sousa, J.R., Silva Gusmão, T.C.R., Font, V., & Lando, J.C. (2020). Task (Re)Design to Enhance the Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers. *Acta Scientiae*, *22*(4), 98-120.
https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5711

Vargas Muñoz, D. (2010). *Evaluación de la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje en las aulas de ingeniería de las universidades derivadas chilenas* (Tesis Doctoral inédita, Universidad de Sevilla, España). idUS. https://idus.us.es/handle/11441/24043

Villanueva, I. Z. (2019). *Sistema de tareas docente en el aprendizaje de la derivada en los estudiantes del primer año de la escuela profesional de ingeniería en telecomunicaciones, UNSA-2018* (Tesis Doctoral, Universidad Nacional de San Agustín, Arequipa, Perú). Archivo digital. http://repositorio.unsa.edu.pe/handle/UNSA/10328

Uniciencia

Uniciencia. Vol. 36(1), e15727. January-December, 2022 Doi: https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.5
URL: https://www.revistas.una.ac.cr/uniciencia E-ISSN: 2215-3470
Email: revistauniciencia@una.cr CC: BY-NC-ND

Anexo 1

Tabla 3
Contenidos de las sesiones videograbadas a cada profesor

Docente	Contenidos por sesión de clase, según docente					
	Noción de derivada como pendiente de recta tangente y como límite de las tasas medias de variación	Derivada de funciones, y derivada de la suma, producto y cociente de funciones mediante la definición	Reglas básicas de derivación y resolución de diversos ejercicios de derivadas	Derivada de funciones exponenciales y logarítmicas. Resolución de ejercicios	Criterio de la primera derivada, intervalos de crecimiento, máximos y mínimos relativos, regla de L'Hôpital	Criterio de la segunda derivada, intervalos de concavidad y puntos de inflexión
A	X		X		X	
B			X	X		X
C		X	X			
D	X	X				
E	X	X			X	
F			X		X	X
G					X	X

Nota: Fuente propia de la investigación.

7

Discusión, conclusiones y línea futura de investigación

En este capítulo se presenta, en primer lugar, una discusión general de los resultados de la investigación, en la que siguiendo una directriz central se realiza una especie de engranaje entre el problema general, el objetivo general, el marco teórico adoptado, el diseño de la investigación, y los resultados parciales arribados en cada estudio de caso individual y en el estudio de caso múltiple; en segundo lugar, se formulan las conclusiones que sintetizan de manera holística toda la investigación respondiendo a los problemas específicos y a los objetivos específicos propuestos inicialmente; y, en tercer lugar, se plantean líneas de investigación a seguir en un futuro, como conexión y continuidad de este proceso de estudio.

7.1. Discusión general de los resultados de la investigación

Las consideraciones o pautas que tienen en cuenta los profesores universitarios de matemáticas que enseñan en el ciclo de ciencias básicas en las carreras de las ingenierías, de manera particular, aquellos profesores que imparten clases de cálculo diferencial, - ya sea al momento de diseñar sus planes de clase de derivadas, al momento de implementar sus sesiones en el aula, así como al momento de valorar y reflexionar sobre su práctica docente, - constituye una problemática que está tomando cada vez mayor relevancia en los procesos de instrucción de las matemáticas.

En esta línea, la presente investigación propone, al principio, abordar esta problemática de manera que los resultados permitan responder a la siguiente pregunta general: ¿Cuáles son los criterios que orientan la práctica del profesor en el Perú para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería?, tomando el caso de la derivada y sus aplicaciones como contexto de reflexión. Así pues, para responder a este problema se define como objetivo general: Determinar los criterios que orientan la práctica del profesor para explicar matemáticas en un curso de ciencias básicas en las carreras de ingeniería, en particular, cuando explican la derivada y sus aplicaciones.

Se ha tomado como marco teórico de referencia al Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemáticas, el mismo que ha proporcionado las herramientas teórico-metodológicas para la recopilación, análisis y síntesis de la información, entre otras: los criterios de idoneidad didáctica, sus componentes y descriptores, así como las configuraciones didácticas; tal y como se ha justificado en el capítulo 2 de esta memoria. Para alcanzar el objetivo general propuesto, se ha seleccionado a un grupo inicial de diez profesores (ocho licenciados en matemáticas y dos licenciados en educación matemática) que imparten cálculo diferencial en facultades de ingeniería de universidades públicas y privadas en Lima, Perú.

De aquel grupo inicial, se logró recoger la información completa de siete docentes (de tres de ellos, la información quedó incompleta por razones que se han expuesto en la sección de metodología de este documento). Para cada docente, se videograbaron entre dos y tres clases de derivadas y sus aplicaciones, se recuperó el material académico y curricular de la asignatura, se aplicaron entrevistas semiestructuradas, etc.; tal y como se detalla en la sección de diseño de la investigación del capítulo 2, en el bloque de metodología de esta memoria.

En consecuencia, a lo largo del proceso de esta investigación, se han ido realizando *estudios de caso individual* para cada uno de los docentes participantes, así como un *estudio de caso múltiple*; y para efectos prácticos a cada docente se ha nombrado como Docente A, B, C, D, E, F, y G. Con base en los resultados parciales obtenidos, se ha logrado publicar tres artículos científicos (Artículo 1: estudio de caso del Docente A; Artículo 2: estudio de caso del Docente F; Artículo 3: estudio de caso múltiple), más un capítulo de libro (relativo al Docente B); además, el estudio de caso del Docente E se ha presentado como reporte de investigación en la RELME 34–2021.

Los casos relativos a los Docentes C, D y G no se han publicado, sin embargo, se presentan, junto con el caso E, en el anexo de esta memoria como resultados complementarios de la investigación. Los detalles y las especificaciones de cada artículo publicado en cuanto a la indexación, el impacto de las revistas, entre otros, se encuentran tipificados al inicio de cada capítulo correspondiente, de este documento.

En relación con el ***Docente A*** (artículo científico 1, capítulo 3), en la parte inicial de la entrevista señala que en sus clases tiene en cuenta los criterios cognitivo, emocional y ecológico. Sin embargo, - cuando se le formulan preguntas más específicas,- sobre la base del análisis didáctico de la información recogida, de la triangulación de fuentes y del esquema de pesos de los criterios de idoneidad que orientan su práctica pedagógica, se determina que este profesor al momento de diseñar e implementar en aula sus clases de la derivada y sus aplicaciones, otorga un peso que se ha catalogado como alto a los criterios ecológico (se preocupa por el cumplimiento del sílabo de la asignatura y por la profesión futura de los estudiantes) y mediacional (usa software matemático de acceso libre); además, concede un peso catalogado como medio a los criterios emocional e interaccional; así como también, dicho profesor atribuye un peso relativamente bajo a los criterios epistémico y cognitivo.

Con respecto al ***Docente B*** (reporte de investigación en el primer seminario latinoamericano sobre el EOS y publicado como capítulo de libro – capítulo 5), en la primera parte de la entrevista señala que en sus sesiones de clase adopta los criterios epistémico, interaccional, emocional, mediacional y ecológico. No obstante, cuando se le formulan preguntas más específicas (segunda parte de la entrevista), y luego de realizar la triangulación de fuentes y el esquema de pesos de los criterios de idoneidad que orientan su práctica docente, se determina que el mencionado profesor al momento de diseñar e implementar sus clases de la derivada y sus aplicaciones, asigna un peso alto a los criterios mediacional (uso de recursos tecnológicos en aula y gestión del tiempo), interaccional (trabajo en equipo e interacción para estimular el aprendizaje), y ecológico (cumplimiento de la totalidad del sílabo y conexiones con asignaturas matemáticas futuras). Asimismo, se determina que atribuye un peso considerado como medio a los criterios emocional y cognitivo; y también, que este profesor consigna un peso relativamente bajo al criterio epistémico.

En torno al ***Docente C*** (ver en anexo, los resultados complementarios), en la primera parte de la entrevista refiere que en sus sesiones de clase considera solamente los criterios de idoneidad ecológico y cognitivo. A pesar de ello, cuando se le formulan preguntas más específicas (segunda parte de la entrevista), y luego de realizar la triangulación de fuentes y el esquema de pesos de los criterios de idoneidad que guían su práctica docente, se encuentra que dicho profesor cuando diseña e implementa sus clases de la derivada y sus aplicaciones, concede un peso alto a los criterios mediacional (uso de software matemático y disponibilidad de tiempo) y ecológico (cumplimiento de la programación del sílabo y plan de clase, y conexión intramatemática futura). De igual manera, se halla que fija un peso medio a los criterios cognitivo (enfoque tradicional del aprendizaje y clases magistrales) e interaccional; y también, que confiere un peso relativamente bajo al criterio epistémico y al emocional.

Con referencia al ***Docente D*** (ver en anexo, los resultados complementarios), en la fase inicial de la entrevista menciona que en sus sesiones de clase tiene en cuenta solamente los criterios de idoneidad ecológico, epistémico y cognitivo. Sin embargo, luego de formularle preguntas más específicas (segunda parte de la entrevista), de realizar la triangulación de fuentes y el esquema de pesos de los criterios de idoneidad que guían su práctica pedagógica, se determina que dicho profesor, al diseñar e implementar sus clases de la derivada y sus aplicaciones, da un peso alto a los criterios mediacional (distribución de los estudiantes en el aula y uso de recursos tecnológicos) y ecológico (conexión con las asignaturas del plan curricular, profesión futura y cumplimiento del sílabo). Del mismo modo, se halla que atribuye un peso medio a los criterios interaccional (la interacción es importante en su clase, pero no fomenta la autonomía e inclusión) y emocional; y también que, consigna un peso relativamente bajo a los criterios epistémico y cognitivo (desarrollo de clases magistrales).

En lo que respecta al ***Docente E*** (incluido en el artículo científico 3 - capítulo 6), en la etapa inicial de la entrevista afirma que en sus clases tiene en cuenta los criterios de idoneidad ecológico, emocional, cognitivo y mediacional. No obstante, luego de que en la etapa posterior se le formulasen preguntas más específicas y después de realizar la triangulación de fuentes y el esquema de pesos de los criterios de idoneidad que rigen su práctica docente, se halla que dicho profesor al momento de diseñar, implementar y valorar sus clases sobre la derivada y sus aplicaciones, atribuye un peso alto a los criterios mediacional (uso de diversos software matemáticos, disponibilidad de tiempo y redes sociales en clases) y ecológico (conexiones extramatemáticas y tipo de profesión). De manera similar, se encuentra que asigna un peso medio a los criterios epistémico (propone problemas contextualizados a la coyuntura actual, a la tecnología y las redes sociales) y emocional; y también que, destina un peso considerado como bajo a los criterios cognitivo e interaccional.

Con relación al ***Docente F*** (artículo científico 2 - capítulo 4), en la primera etapa de la entrevista sostiene que en sus clases adopta los criterios de idoneidad ecológico, cognitivo, emocional, epistémico y mediacional. A pesar de ello, después de que en la segunda etapa se le formulasen preguntas más específicas, y luego de realizar la triangulación de fuentes y el esquema de pesos de los criterios de idoneidad que orientan su práctica docente, se determina que este profesor al momento de diseñar e implementar sus sesiones de clase sobre la derivada y sus aplicaciones, concede un peso alto a los criterios ecológico (cumplimiento de los contenidos programados en el sílabo y plan de clase, falta de tiempo) e interaccional (trabajo en equipo y uso de recursos argumentativos). De forma similar, se encuentra que atribuye un peso medio a los criterios epistémico, mediacional (innovación basada en la tecnología) y emocional; y también que, otorga un peso catalogado como bajo al criterio cognitivo (énfasis en la mecanización del aprendizaje).

Respecto del ***Docente G*** (en anexo, en resultados complementarios), en su discurso inicial este profesor señala que en sus clases de derivadas tiene en cuenta los criterios de idoneidad epistémico, cognitivo, emocional y mediacional. Sin embargo, después de que se le formularon preguntas más específicas, y luego de realizar la triangulación de fuentes y el esquema de pesos de los criterios de idoneidad que orientan su práctica pedagógica, se encuentra que este profesor al momento de diseñar e implementar sus sesiones de clase sobre la derivada y sus aplicaciones, consigna un peso alto a los criterios ecológico (cumplimiento de la sumilla del sílabo y conexiones intramatemáticas) y mediacional (uso de software matemático de acceso libre y gestión del tiempo disponible para la clase). Asimismo, se determina que atribuye un peso medio a los criterios epistémico (énfasis en la matematización y en la resolución de ejercicios algebraicos de derivadas) y emocional; y también, que otorga un peso bajo al criterio cognitivo e interaccional (no acostumbra sacar a los alumnos a la pizarra y da mínima importancia a los aspectos interaccionales).

Un aspecto para discutir sobre estos resultados es cómo es que se infiere el uso de algunos de los criterios de idoneidad didáctica en la práctica pedagógica de estos profesores cuando no los conocen explícitamente y, además, no han recibido un proceso de instrucción específico para aprenderlos. Dicho de otra manera, los resultados encontrados en esta investigación coinciden con los obtenidos en diversas investigaciones, donde se ha observado un fenómeno que se manifiesta con cierta regularidad: los componentes de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando éstos valoran un episodio o justifican su práctica docente, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión.

De acuerdo con Breda, Font y Pino-Fan (2018) consideramos que una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor, es que reflejan consensos ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas; y es plausible pensar que el uso implícito de estos que hace el profesor se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos. Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asume como regularidades en su discurso simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable.

Otro aspecto a discutir es la razón por la cual en la pregunta general sobre los criterios que usan, los profesores contestan criterios que muestran más preocupación por los alumnos como el cognitivo y el emocional o el uso de problemas relacionados con su profesión y, en cambio, después de la entrevista completa, se concluye que dominan, sobre todo, el cumplimiento del sílabo y la adaptación al tiempo disponible (se puede considerar que el profesor tiene una imagen sobre su práctica que es más "bonita" de la que realmente es). Y también, otra explicación plausible se relaciona con las tendencias dominantes en la enseñanza de las matemáticas que proponen considerar los aspectos emocionales de los alumnos, dar importancia a los conocimientos previos, enseñar unas matemáticas realistas, etc.; estos aspectos son los que al profesor le gustaría seguir, porque se considera que aseguran una enseñanza de calidad, lo cual le lleva a presentarse como un profesor más innovador de lo que realmente muestra en su práctica.

Además, otro aspecto para discutir sobre los resultados obtenidos en esta investigación es su validez y generalidad más allá de los casos abordados; se trata de una objeción aplicable a cualquier investigación basada en estudio de casos. Ahora bien, si bien es verdad que los resultados y las conclusiones encontradas no se pueden generalizar, también es relevante tener en cuenta que se ha obtenido una información muy detallada sobre las pautas que orientan las prácticas pedagógicas de los profesores participantes que, en nuestra opinión, van más allá del grupo de docentes que participaron de este proceso investigativo.

7.2. Conclusiones de la investigación

En esta sección se presentan las principales conclusiones a las que se ha llegado una vez finalizada la investigación y de la difusión que se ha realizado. A continuación, se presentan las principales conclusiones relacionadas con cada objetivo específico que se propuso en esta investigación.

7.2.1. Conclusiones sobre el objetivo específico 1

El primer objetivo que nos habíamos propuesto en esta investigación era:

(OE_1): Describir las prácticas que realiza el profesor de matemáticas cuando explica la derivada en un curso de ciencias básicas en carreras de ingeniería.

En esta investigación hemos aplicado un modelo teórico que permite realizar un análisis didáctico sistemático para la descripción de clases de matemáticas. En nuestro caso, la descripción de la sesión de clase es el resultado de una metodología de observación, que ha consistido en aplicar los constructos del marco teórico adoptado; el cual nos ha servido de orientación sobre lo que se tenía que observar, cómo se debía observar y, también, nos ha proporcionado las herramientas para realizar la observación. El análisis minucioso, apoyado en las herramientas didácticas que provee el EOS (los cuatro primeros tipos de análisis de su modelo de análisis didáctico) precisa y muestra con detalles la estructura y funcionamiento de una clase de matemáticas, que, en la mayoría de los docentes se puede considerar como una degeneración mecanicista de una clase formal. Dicho de otra manera, las configuraciones didácticas se sitúan más cerca de las configuraciones magistrales formalistas que de otros modelos (por ejemplo, las configuraciones didácticas de tipo realista) en las que los docentes utilizan, sobre todo, el lenguaje algebraico.

Se trata de un resultado esperado y coherente con los resultados de la literatura previa sobre la enseñanza de las matemáticas en los ciclos básicos de ingeniería y, más generalmente, con la enseñanza del cálculo en los primeros cursos de universidad - por ejemplo, Mateus-Nieves (2016) −, los cuales evidencian que aún es dominante una enseñanza netamente algorítmica de aprendizaje de fórmulas, mecanicista y rutinaria, o bien, una enseñanza muy rigurosa y formalista, de tal manera que se deja de lado la comprensión significativa del concepto de derivada y sus aplicaciones inmediatas, lo que permitirá al futuro ingeniero resolver problemas de su desempeño profesional.

Ahora bien, aunque globalmente se puede afirmar que la mayoría de los docentes siguen una trayectoria didáctica en la que la enseñanza realizada se puede considerar como una degeneración mecanicista de una clase formal, hay pequeñas diferencias entre los docentes ya que hay una diversidad de prácticas en las clases observadas. Este hecho nos lleva a considerar que en las prácticas observadas hay "gérmenes del cambio", sobre todo si consideramos que es ingenuo pensar que el cambio es algo que siempre viene de fuera, penetrando y modificando las prácticas docentes. De acuerdo con Ramos (2006) consideramos que cuando una institución que podría continuar haciendo lo mismo se siente provocada a cambiar las prácticas docentes por algo que le viene de fuera, muchas veces ocurre que este "algo" ya está en cierta manera dentro, es decir, ya forma parte de las prácticas realizadas. Lo que cambia es el peso que tiene este tipo de prácticas, que pasan de ser marginales a centrales. Este cambio se produce cuando la institución se convence, mediante argumentos, de que su proyecto exige tener más en cuenta lo que antes se consideraba secundario o poco relevante.

En este sentido, se observa que en ciertas prácticas matemáticas realizadas, los docentes hacen uso de metáforas, gestos y señales para indicar a los estudiantes, por ejemplo, la concavidad hacia arriba o hacia debajo de una curva, los puntos de inflexión de la función, el crecimiento o decrecimiento de la curva de la que se está analizando su primera y/o segunda derivada, entre otros; procuran tener en cuenta los conocimientos previos, así como usar las nuevas tecnologías; en algún caso proponen problemas contextualizados relacionados con la profesión, etc. Se trata de prácticas didácticas que, aunque bien se puedan considerar marginales, darían pie a un posible cambio si la institución se lo plantea.

7.2.2. Conclusiones sobre el objetivo específico 2

El segundo objetivo que nos habíamos propuesto en esta investigación era:

(OE_2): Inferir los principios que orientan las prácticas del profesor de matemáticas al explicar la derivada en un curso de ciencias básicas en ingeniería.

Con base en los resultados parciales obtenidos en el objetivo 1, se infiere, después de un proceso de triangulación, que los principios que orientan la práctica pedagógica de este grupo de docentes en el momento de diseñar e implementar clases de derivadas y sus aplicaciones en el ciclo básico de diversas carreras de ingeniería, están relacionados con los siguientes aspectos:

1) El énfasis en la algebrización y algoritmización en el desarrollo de ejercicios de derivadas, y solamente algunos indicios de plantear y resolver problemas (principio epistémico); 2) Un enfoque de enseñanza que, sobre todo, enfatiza en el desarrollo de clases magistrales de enfoque conductista con intentos de hacer clases dialógicas (principio cognitivo); 3) Las interacciones en el aula entre el docente y los estudiantes tienen mediana relevancia por parte de la mayoría de los docentes, mientras algunos procuran que los estudiantes trabajen en equipo (principio interaccional); 4) La motivación y el propósito de que los estudiantes muestren interés por el desarrollo de las derivadas y sus aplicaciones, también tienen mediana relevancia en el global de los docentes (principio afectivo); 5) El uso de recursos tecnológicos en el proceso de instrucción, tales como software matemático de acceso libre y las redes sociales en otro caso, tienen mayor presencia en las clases de todos los docentes (principio de medios) y, sobre todo, ajustarse al tiempo disponible; y, 6) El desarrollo total de los contenidos programados junto con la vinculación del tema matemático a la profesión futura de los estudiantes de ingeniería, lo que cuenta con mayor importancia para el global de este grupo de docentes (principio ecológico).

Por otra parte, cada uno de estos principios tiene un peso diferente, pero en general se concluye que los principios que tienen más peso son el principio ecológico (en cuanto al cumplimiento del programa), el mediacional (respecto a ajustarse al tiempo disponible), el epistémico (respecto a implementar una enseñanza sobre todo procedimental), y el cognitivo (en cuanto se adopta un modelo de enseñanza básicamente de tipo magistral). De todas maneras, estos pesos varían de un docente a otro.

7.2.3. Conclusiones sobre el objetivo específico 3

El tercer objetivo que nos habíamos propuesto en esta investigación era:

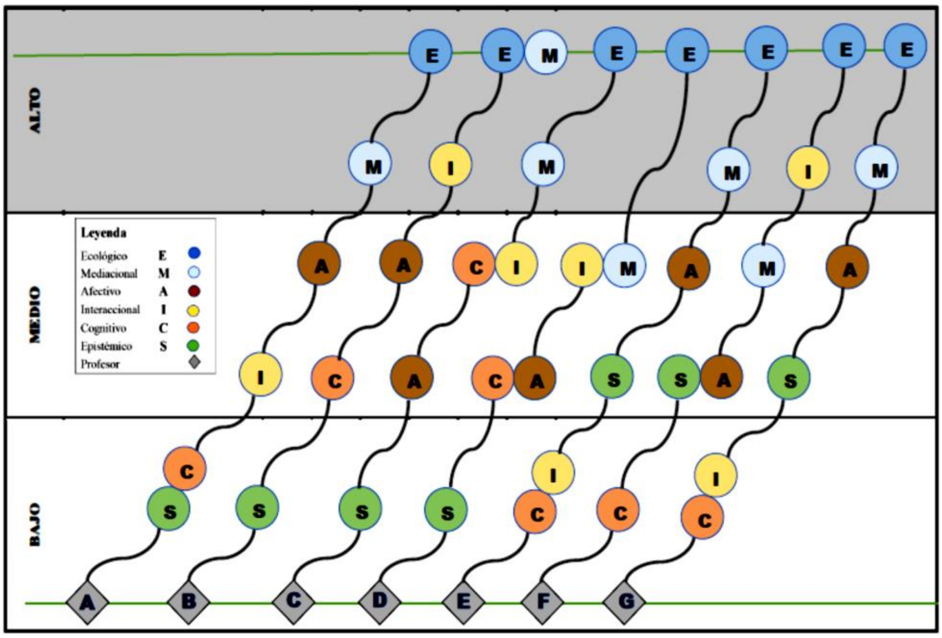
(OE_3): Determinar los principios que orientan la práctica didáctica del profesor de matemáticas cuando explica derivadas en un curso de ciencias básicas de ingeniería, según el profesor.

Sobre la base del análisis didáctico y la triangulación de fuentes mostrada en los resultados parciales obtenidos en cada estudio de caso individual, así como en el estudio de caso múltiple, se concluye que los principios que orientan la práctica pedagógica del grupo de docentes peruanos de cálculo diferencial para ingeniería, según lo que declaran los propios profesores, están en línea con los criterios de idoneidad didáctica proporcionados por el Enfoque Ontosemiótico y la Teoría de la Idoneidad Didáctica. Estos principios son: criterio epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional y ecológico.

Además, como ya se ha señalado en la discusión general, se concluye que este grupo de docentes peruanos que enseñan matemáticas en facultades de ingeniería, asignan un peso alto a los criterios de idoneidad ecológico y mediacional; atribuyen un peso medio a los criterios interaccional y mediacional; así como, dan un peso relativamente bajo a los criterios epistémico y cognitivo. Tal como se observa en el esquema de la Figura 7.1.

Figura 7.1

Esquema global de los criterios que guían la práctica docente



Nota: Fuente propia de la investigación.

Y también, se concluye que para este grupo de docentes peruanos, los criterios ecológico y mediacional son los que supeditan al resto de criterios didácticos (cognitivo, epistémico, interaccional y emocional), en el momento de diseñar e implementar su práctica docente de cálculo diferencial con estudiantes de carreras de ingeniería.

7.3. Conexión con líneas futuras de investigación

La realidad problemática descrita en el capítulo 1 y los intentos de buscar alternativas que permitan dar respuestas a los problemas planteados en esta investigación, nos han llevado a obtener resultados parciales acerca de los criterios o pautas que tienen presentes los docentes al momento de diseñar e implementar sus clases de derivadas en el ciclo básico de las carreras de ingeniería. Sin embargo, consideramos que el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a nivel universitario es bastante amplio y complejo, por lo que creemos conveniente que el proceso de investigación continúe desarrollándose en la línea ya trazada en este estudio. Así pues, con base en la discusión general, en los resultados parciales obtenidos en las publicaciones, y a partir de los resultados obtenidos, se contemplan las siguientes líneas futuras de investigación:

Una primera línea de desarrollo que se ha identificado es la generalización de los resultados sobre los criterios de idoneidad didácticos que orientan la práctica del docente universitario de matemáticas, es decir, que el estudio se amplíe a las distintas especialidades de ingeniería donde se desarrollen procesos de instrucción de matemáticas universitarias. Dado que en la presente investigación se ha trabajado solamente con un grupo reducido de siete docentes, lo cual no es suficiente para hacer generalizaciones, creemos conveniente que en investigaciones futuras se vayan incluyendo más casos de estudio múltiple, así como estudios desde distintas realidades y enfoques de la docencia superior, con la finalidad de ir obteniendo resultados más generales sobre los criterios que orientan la práctica pedagógica del profesor de matemáticas para ingeniería, en el ciclo de ciencias básicas.

Como resultado de esta investigación hemos podido determinar unos criterios que orientan la práctica de los profesores participantes. Dichos criterios se pueden interpretar como creencias, si entendemos, de acuerdo con Peirce (1877), la creencia como una disposición para la acción. Por otra parte, este conjunto de creencias, también de acuerdo con Peirce, se puede entender como concepción del profesor. A su vez, estas creencias y concepciones se relacionan con los conocimientos y competencias de los profesores. Por tanto, una segunda línea de desarrollo de esta investigación está relacionada con el análisis de las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos que poseen los docentes participantes. Dicho estudio está previsto realizarlo tomando como referente teórico el Modelo CCDM del profesor propuesto por el Enfoque Ontosemiótico.

Se concluye que la reflexión realizada por cada docente en la entrevista semiestructurada le lleva a aflorar y explicitar los criterios que orientan su práctica, más la entrevista no llega a poner en cuestión sus concepciones y creencias sobre su quehacer en el aula, de manera que el docente pueda variar los pesos que da a los diferentes criterios, por ejemplo, reducir el peso de los criterios dominantes (adaptación al sílabo y al tiempo disponible). Para ello es necesario ir más allá de una investigación naturalista desarrollando una tercera línea de investigación que, en primer lugar, consiga problematizar la práctica cotidiana del docente en su institución (por ejemplo, no incorporar problemas contextualizados relacionados con la profesión de ingeniero) que hasta el momento no se había considerado como tal en la institución. Una vez conseguida esta problematización, tendría sentido introducir la reflexión para el posible cambio de dicha práctica problemática, lo cual podría ser mediante un dispositivo formativo que combine la metodología Lesson Study con la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica, tal como se hace, por ejemplo, en Hummes, Breda y Font (2019).

Esta tercera línea de investigación que se ha identificado como necesaria y urgente, en particular en el Perú, lleva al desarrollo de dispositivos formativos para los docentes universitarios de matemáticas que enseñan en distintas facultades de las universidades públicas y privadas; de manera que se logre desarrollar y/o potenciar las competencias profesionales en la mayor parte de los docentes a través de la formación y actualización continua. Consideramos que, en estos procesos de formación de los profesores universitarios en servicio, los criterios de idoneidad didáctica son una herramienta que se debe tener en cuenta, dada su potencialidad para el análisis didáctico y para la reflexión de los docentes sobre su práctica pedagógica y mejora continua.

Referencias Bibliográficas

Acevedo, D., Torres, J. D. y Jiménez, M. J. (2015). Factores asociados a la repetición de cursos y retraso en la graduación en programas de ingeniería de la Universidad de Cartagena, en Colombia. *Formación universitaria*, *8*(2), 35-42.

Aguilar, W., de las Fuentes, M., Iñiguez, C. y Rivera, R. (2018). Perfiles de estudiantes asociados a las características de reprobación de las asignaturas de ciencias básicas en ingeniería. Universidad Autónoma de Baja California, *Boletín Redipe*, *7*(8), 129-145. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6523207

Albertí-Palmer, M. (2017). *Descartes: El desarrollo de la geometría analítica*. Colección Genios de las Matemáticas. RBA Coleccionables S.A.

Álvarez-Gayou, J. (2003). *Cómo hacer investigación cualitativa: Fundamentos y metodología* (1.ª ed.). Paidós Ibérica, S.A.

Amado, M., García, A., Brito, R., Sánchez, B. y Sagaste, C. (2014). Causas de reprobación en ingeniería desde la perspectiva de académicos y administradores. *Ciencia y Tecnología*, *14*(1), 233-250.

Amit, M., & Vinner, S. (1990). Some misconception in calculus: Anecdotes or the tip of an iceberg? In G. Booker ve T.N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings of the 14th Annual meeting of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 3-10). Cinvestav, Mexico.

Arana-Pedraza, R. A., Ibarra, S. y Font, V. (2020). Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas en ingeniería: un primer acercamiento. En Y. Morales-López y A. Ruiz, *Educación Matemática en las Américas 2019* (928-935). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Areán-Álvarez, L. (2016). *Lagrange: El renovador de la mecánica*. Colección Genios de las Matemáticas. RBA Coleccionables S.A.

Areán-Álvarez, L. (2017). *Fermat: Un teorema adelantado a su tiempo en tres siglos*. Colección Genios de las Matemáticas. RBA Coleccionables S.A.

Arenzana, V. (1997). Evolución del concepto de función hasta comienzos del siglo XIX. Algunas sugerencias pedagógicas. *EPSILON*, *13*(1), 67-77.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en la educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, ISSN-e1315-4125, Vol. 10, No. 2, 117-134 [Traducción al español del artículo Holton, D. et al. (2003). The teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI Study. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 207-220]. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1020030

Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería. (2016). *Competencias y perfil del ingeniero iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación* (Documentos Plan Estratégico ASIBEI).

Azcárate, C. y Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas*. Madrid, España: síntesis.

Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de Matemática de Colombia*. (Tesis Doctoral inédita, Universitat Autónoma de Barcelona, España). Tesis Doctorals en Xarxa. http://hdl.handle.net/10803/4702

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 479–495.

Bisquerra, R. (2009). *Metodología de la investigación educativa* (2.ª ed.). La Muralla, S.A.

Bos, H. J. M. (1984). *Newton, Leibniz y la tradición Leibniziana. En Grattan-Guinness (comp.), Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910.* Una introducción histórica (pp. 69-124). Madrid: Alianza universidad.

Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática* (M. Martínez, Trad.; 4.ª ed.). Alianza Editorial S. A., Madrid. (Trabajo original publicado en 1969).

Boyer, C. (2007). *Historia de la matemática* (M. Martínez, Trad.). Alianza Editorial S. A., Madrid. (Trabajo original publicado en 1999).

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema, 34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica, *Bolema*, *32*(60), 255-278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13

Breda, A., Hummes, V., da Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021). El papel de la fase de observación de la implementación en la metodología estudio de clases. *Bolema*, *35*(69), 263-288. https://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a

Buentello, C., Valenzuela, N. y Juárez, D. (2013). Deserción escolar, factores que determinan el abandono de la carrera profesional, estrategias y condiciones para el desarrollo del estudiante. *XVI Congreso Internacional sobre Innovaciones en Docencia e Investigación en Ciencias Económico-Administrativas*, Universidad Autónoma de Chihuahua, México. http://www.fca.uach.mx/apcam/2014/04/04/Ponencia%2069-UACoah-Piedras%20Negras.pdf

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J.D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En Muñoz-Escolano, J. M., Arnal Bailera, A., Beltrán-Pellicer, P., Callejo, M., & Carrillo, J. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM. https://www.researchgate.net/publication/320426790

Camarena, P. (2013). A treinta años de la teoría educativa “Matemática en el Contexto de las Ciencias”. *Innovación Educativa*, *9*(46), 17-44.

Cantoral, R. y Montiel, G. (2003). Una presentación visual del polinomio de Lagrange. *Números 55*, 3 – 22. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=743222

Capote, G., Rizo, N. y Bravo, G. (2016). La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. *Revista Universidad y Sociedad*, *8*(1), 21-28.

Carlos-Guzmán, J. (2018). Buenas prácticas de enseñanza de los profesores de educación Superior. *REICE. Revista iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, *16*(2), 133-149. https://doi.org/10.15366/reice2018.16.2.008

Coll, C. (2007). Las competencias en la educación escolar: algo más que una moda y mucho menos que un remedio. *Aula de Innovación Educativa*, *16*(1), 34-39.

Collete, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas, Vol. II*. Editorial Siglo XXI, Madrid.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012). Análisis de un proceso de estudio sobre la enseñanza del límite de una función. *Bolema*, *26*(42B), 667-690.

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 367-384.

Cooper, J., Levi Gamlieli, H., Koichu, B., Karsenty, R., & Pinto, A. (2020). Instructional innovation in mathematics courses for engineering programs – a case study. En Inprasitha, M., Changsri, N., and Boonsena, N. (Eds). (2020). *Interim Proceedings of the 44th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Khon Kaen, Thailand: PME.

Crisostomo Dos Santos, E. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional*. (Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España). http://hdl.handle.net/10481/24493

Descartes, R. (1981). *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. (Prólogo, traducción y notas de G. Quintás). Alfaguara, Madrid.

Durán, J. A. (1996). *Historia con personajes de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza Editorial.

Duran, J. A. (2006). *Isaac Newton & Gottfried Wilheim Leibniz: La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal*. Editorial Crítica.

Elliott, J. (2000). *La investigación-acción en educación* (4.ª ed.). Ediciones Morata, S.L.

Escudero, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, *10*(1), 53-76. https://www.researchgate.net/publication/272266650

Fernández, E. (2017). *Arquímedes: El precursor del cálculo infinitesimal*. Colección Genios de las Matemáticas. RBA Coleccionables S. A.

Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. G. (1991). An overview of the calculus curriculum reform effort: Issues for learning, teaching, and curriculum development. *The American Mathematical Monthly, 98*(7), 627-635.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques: aplicacions a les derivades*. (Tesis Doctoral inédita, Universitat de Barcelona, España). Tesis Doctorals en Xarxa. http://hdl.handle.net/10803/1315

Font, V. y Peraire, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados. El caso de la cisoide. *Educación Matemática, 13*(2), 55-67.

Font, V. (2011a). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, 26, 9-25.

Font, V. (2011b). Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 56, 86-94.

Font, V. (2015). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática*. Manuscrito no publicado. Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática, Universitat de Barcelona.

Font, V. (2019). Dilemas sobre las matemáticas entendidas como una materia general (ciencia básica) para diferentes carreras (profesiones). En Arango, A. J., Sánchez, O., Vargas, H., Ariza, M. X., Díaz, S. y Canoles, J. C. (Eds.), *Memorias III Congreso ciencias básicas en un mundo globalizado. Investigación experimental y simulación matemática*. Tunja, Colombia: Ediciones Usta-Universidad Santo Tomás.

Font, V., Breda, A., & Sala, G. (2015). Competências profissionais na formação inicial de professores de matemática. *Praxis Educacional, 11*(19), 17-34.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Font, V., Pino-Fan, L. y Breda, A. (2020). Una evolución de la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos. *PARADIGMA, 41*(1), 107-129. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p107-129.id846

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Font, V., Sala, G., Breda, A. y Seckel, M. J. (2017). Aspectos históricos presentes en las propuestas de innovación de profesores de básica de matemáticas. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 10*(3), 16-42. https://doi.org/10.3895/rbect.v10n3.7752

Font, V., Vanegas, Y., Ferreres, S., Carvajal, S. y Adán, M. (2012). Funciones. En Font, V., Giménez, J., Larios, V., Zorrilla, J.F. (Eds.), *Competencias del Profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato* (pp. 133-210). Barcelona, España: Publicaciones de la Universitat de Barcelona.

Fuentealba, C., Badillo, E., Sánchez-Matamoros, G., & Cárcamo, A. (2018). The understanding of the derivative concept in higher education. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(2), 1-15. https://doi.org/10.29333/ejmste/100640

Garcés, W. (2021). Análisis de las pautas que rigen la práctica del profesor en la enseñanza de derivadas en ciencias básicas en carreras de ingeniería. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 10*(3). https://doi.org/10.17583/redimat.7657

Garcés, W. y Font, V. (2021). Análisis de la práctica de un profesor en la enseñanza de derivadas para ingeniería en el Perú. En J. G. Lugo-Armenta, L. R. Pino-Fan, M. Pochulu, y W. F. Castro (Eds.), *Enfoque onto-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Investigaciones y desarrollos en América Latina* (en prensa).

Garcés-Córdova, W. y Font-Moll, V. (2022). Criterios que guían la práctica del profesor de matemáticas en cursos de ciencias básicas para ingeniería. *Uniciencia, 36*(1), 1-19. https://doi.org/10.15359/ru.36-1.5

Garcés, W., Font, V., & Morales-Maure, L. (2021). Criteria that guide the Professor's practice to explain mathematics at basic sciences courses in engineering degrees in Peru. A case study. *Acta Scientiae*, *23*(3), 1-33. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6389

García, M. (2008). *Significados institucionales y personales del límite de una función en el proceso de instrucción de una clase de primero de bachillerato*. (Tesis Doctoral inédita, Universidad de Jaén, España). Repositorio de la UJa.

Geertz, C. (2002). *Reflexiones antropológicas sobre temas filosóficos*. Barcelona: Paidós Studio.

Giacomone, M. B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico.* (Tesis Doctoral inédita, Universidade de Granada, España). Repositorio institucional de la Universidad de Granada. http://hdl.handle.net/10481/53793

Giacomone, B., Godino, J. D., & Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers' didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44*, e172011. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20*, 13-31. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20Union_020%202009.pdf

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (49 – 68). Jaén: SEIEM, 2012.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-20). Universidad de Granada: CIVEOS.

Godino, J. D. (2018a). Bases epistemológicas e instruccionales del enfoque ontosemiótico en educación matemática. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_epins_EOS.pdf

Godino, J. D. (2018b). Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf

Godino, J. D. (2021, 2 de julio). De la ingeniería a la idoneidad didáctica en educación matemática (Conferencia plenaria). *RELME 34 - Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, Quetzaltenango, Guatemala C.A.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM.pdf

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42. https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 288-297). Málaga: SEIEM. https://www.researchgate.net/publication/309457869

Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. y Gea, M. M. (2021). Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. *Revemop*, *3, e202107.* https://doi.org/10.33532/revemop.e202107

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26* (1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática.

RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *9*(1), 117-150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde el enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59-76. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132207

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema*, *31*(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *13*, 63-83. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.224

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII: Una investigación histórica sobre las técnicas y métodos que condujeron al descubrimiento del cálculo infinitesimal*. Alianza Editorial.

González, P. (2008). *Fermat y los orígenes del cálculo diferencial*. S. L. Nivola Libros y Ediciones.

González, P. (2012). *Orígenes y evolución histórica del cálculo infinitesimal*. Obras monográficas.

González, P. (2017). *Apolonio: El dominio de las secciones cónicas*. Colección Genios de las Matemáticas. RBA Coleccionables S. A. U.

González-Martín, A. S., & Hernandes-Gomes, G. (2020). Mathematics in engineering programs: what teachers with different academic and professional backgrounds bring to the table. An institutional analysis. *Research in Mathematics Education, 22*(1), 67–86. https://doi.org/10.1080/14794802.2019.1663255

Gordillo, W., y Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *BOLEMA*, *30*(55), 535-558. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a12

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Hawking, S. (2007). *God created the integers. The mathematical breakthroughs that changed history* (Edited, with commentary, by Stephen Hawking). Running Press Philadelphia, Pennsylvania.

Hawking, S. (2010a). *A hombros de gigantes. Las grandes obras de la Física y la Astronomía.* Edición comentada por Stephen Hawking (F. Rico, Trad.; 3.ª ed.). Crítica S. L., Barcelona. (Trabajo original publicado en 2002).

Hawking, S. (2010b). *Dios creó los números. Los descubrimientos matemáticos que cambiaron la historia.* Edición comentada por Stephen Hawking (U. Iriso-Ariz, Trad.). Crítica S. L., Barcelona. (Trabajo original publicado en 2005).

Hill H. C., Ball D. L., & Schilling S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400. http://www.ugr.es/~pflores/2008_9/Master_Conocim/textos%20JP/[1]_Hill-Ball-Schilling-JRME2008-07.pdf

Hummes, V. B., Font, V., & Breda, A. (2019). Combined Use of the Lesson Study and the Criteria of Didactical Suitability for the Development of the Reflection on the own Practice in the Training of Mathematics Teachers. *Acta Scientiae, 21*(1), 64-82. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss1id4968

Inhelder, B. y Piaget, J. (1985). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente. Ensayo sobre la construcción de las estructuras operatorias formales*. Barcelona: Paidós Ibérica S.A.

Juárez Ramírez, J. A., Chamoso Sánchez, J. M. y González Astudillo, M. T. (2020). Interacción en foros virtuales al integrar modelización matemática para formar ingenieros. *Enseñanza de las Ciencias, 38*(3), 161-178. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3041

Lacasta, E. y Pascual, J. R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid, España: Síntesis.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (J. Ibarra, A. Hernández, G. Nagore y N. Moreno, Trad.; 9.ª ed.). McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. (Trabajo original publicado en 2010).

Larson, R. y Edwards, B. (2016). *Cálculo, Tomo 1* (J. León y A. García, Trad.; 10.ª ed.). Cengage Learning Editores, S.A. (Trabajo original publicado en 2014).

López, C., Benedito, V. y León, M. J. (2016). El enfoque de competencias en la formación universitaria y su impacto en la evaluación. La perspectiva de un grupo de profesionales expertos en pedagogía. *Formación Universitaria*, *9*(4) 11-22. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062016000400003

Lucas, C. (2015). *Una posible "razón de ser" del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. (Tesis Doctoral inédita, Universidade de Vigo, España). Repositorio institucional da Universidade de Vigo. http://hdl.handle.net/11093/542

Lusa-Monforte, G. (2011). Debates sobre el papel de las matemáticas en la formación de ingenieros civiles. En M. Silva (Ed.), *Técnica e ingeniería en España*, Vol. VI, *el ochocientos. De los lenguajes al patrimonio* (pp. 327-377). Real Academia de Ingeniería/ Institución "Fernando el Católico". Prensas Universitarias de Zaragoza.

Martín, M. (2008). *Orígenes del cálculo diferencial e integral. Historia del análisis matemático*. Universidad de Granada.

Mateus-Nieves, E. (2016). Análisis didáctico a un proceso de instrucción del método de integración por partes. *Bolema, 30*(55), 559 – 585. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a13

Merzbach, U., & Boyer, C. (2011). *A history of mathematics* (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

Ministerio de Educación del Perú (2017). *Currículo nacional de la educación básica 2016* http://www.minedu.gob.pe/curriculo/pdf/curriculo-nacional-de-la-educacion-basica.pdf

Morán, K. (2012). *Abandono de estudios en la Facultad de Ingeniería campus Mexicali de la UABC* (Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Baja California). https://drive.google.com/ file/d/0B7AGEh5aIwoTYUFpcm5FYXFvaFE/view

Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, *45*, e189468. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468

Morales, Y., Bravo, M. y Cañedo, C. (2013). La enseñanza de la matemática en ingeniería mecánica para el desarrollo de habilidades. *Pedagogía Universitaria*, XVIII (4), 75-89.

Muñoz, J. (2017a). *Newton: El creador de la física matemática moderna*. Colección Genios de las Matemáticas. RBA Coleccionables S.A.

Muñoz, J. (2017b). *Leibniz: La invención del cálculo infinitesimal*. Colección Genios de las Matemáticas. RBA Coleccionables S.A.

Ocampo, J., Martínez, M., de Las Fuentes, M. y Zataraín, J. (2010). Reprobación y deserción en la Facultad de Ingeniería Mexicali de la Universidad Autónoma de Baja California. *Décimo Congreso Internacional*. Instituto Politécnico Nacional, México. http://repositoriodigital.ipn.mx/ handle/123456789/3653

Ordóñez, J. (2011). *Restricciones institucionales en las matemáticas de 2º de bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida*. (Tesis Doctoral inédita, Universidad de Jaén, España). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos - EOS. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Lourdes_Ordo%C3%B1ez.pdf

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

Özkan, E.M., & Ünal, H. (2009). Misconception in Calculus-I: Engineering students' misconceptions in the process of finding domain of functions. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 1*(1), 1792-1796.

Peirce, C. S. (1877). The Fixation of Belief. *Popular Science Monthly*, 12, 1-15.

Pepin, B., Gueudet, G., & Trouche, L. (2017). Refining teacher design capacity: Mathematics teachers' interactions with digital curriculum resources. *ZDM, 49*(5), 799-812. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0870-8

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. (Tesis Doctoral inédita, Universidad de Granada, España). Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos - EOS http://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Luis_Pino_tesis.pdf

Pino-Fan, L., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456.

Pino-Fan, L., Castro, W. F., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Idoneidad epistémica del significado de la derivada en el currículo de bachillerato. *Paradigma*, *34*(2), 123-150.

Pino-Fan, L., Font, V., & Breda, A. (2017). Mathematics teachers' knowledge and competences model based on the onto-semiotic approach. En Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., and Choy, B.H. (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33-40). Singapore: PME.

Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, *36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matematica Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (primera parte). *REVEMAT*, *8*(2), 1 – 49.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of didactic-mathematical knowledge of prospective teachers: the case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(1), 63-94. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8

Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F. (2012). Key Epistemic Features of Mathematical Knowledge for Teaching the Derivative. In Tso, T.Y. (Ed). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taipei, Taiwan.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., Font, V., & Castro, W. F (2013). Prospective teacher's specialized content knowledge on derivative. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3195–3205). Antalya, Turkey: CERME.

Pla i Carrera, J. (2012). *Euclides, La geometría: Las matemáticas presumen de figura*. Colección National Geographic. RBA Coleccionables S. A.

Pochulu, M. (2018). ¿Qué matemáticas requieren los profesionales y cuál estamos enseñando en la Universidad? *Conferencia impartida en la Universidad de los Andes*, Bogotá, Colombia. https://www.youtube.com/watch?v=-1vq2jMNrpw&feature=youtu.be

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(3), 361-394.

Pochulu, M., Font, V. y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME*.

Porres-Tomé, M. (2011). *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías*. (Tesis Doctoral inédita, Universidad de Valladolid, España). Repositorio Documental UVa. http://uvadoc.uva.es/handle/10324/949

Ramos, A. B. (2006). *Objetos personales, matemáticos y didácticos, del profesorado y cambios institucionales. El caso de la contextualización de las funciones en una Facultad de Ciencias Económicas y Sociales*. (Tesis Doctoral inédita, Universitat de Barcelona, España). Tesis Doctorals en Xarxa. http://hdl.handle.net/10803/1313

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2014). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular* (1.ª ed.). Madrid: Alianza Editorial.

Rodríguez-Gallegos, R. (2017). Repensando la enseñanza de las matemáticas para futuros ingenieros: actualidades y desafíos. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, *8*(15), 69-85. https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v8i15.55

Rodríguez-Nieto, C., Font, V., Borji, V., & Rodríguez-Vásquez, F. (2021). Mathematical connections from a networking theory between extended theory of Mathematical Connections and Onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-27. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Rodríguez-Nieto, C. A., Rodríguez-Vázquez, F. M., & García-García, J. (2021). Pre-service mathematics teachers' mathematical connections in the context of problem-solving about the derivative. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *12*(1), 202-220. https://doi.org/10.16949/turkbilmat.797182

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. (Tesis Doctoral inédita, Universitat de Barcelona, España). Tesis Doctorals en Xarxa. http://hdl.handle.net/10803/294031

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGrawHill.

Schön, D. (1983). *The reflective practitioner*. New York: Basic Books.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática*. (Tesis Doctoral inédita, Universitat de Barcelona, España). Tesis Doctorals en Xarxa. http://hdl.handle.net/10803/385915

Seckel, M. J., Breda, A., Sánchez, A. y Font, V. (2019). Criterios asumidos por profesores cuando argumentan sobre la creatividad matemática. *Educação e Pesquisa*, *45*, e211926. http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201945211926

Seckel, M. J. y Font, V. (2015). Competencia de análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemática de Chile. En P. Scott & A. Ruíz (Eds.), *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 1: Formación Inicial para Primaria* (pp. 10-18). República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática. http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol1Formini.pdf

Sepulcre, J. M. (2017). *Weierstrass: La gestación del análisis moderno*. Colección Genios de las Matemáticas. RBA Coleccionables, S.A.U.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 1-22.

Simson, R. (MDCCLXXIV). *Los elementos de Euclides*. Universidad de Glasgow.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas* (M. Rodríguez, Trad.; 7.ª ed.). Cengage Learning Editores, S.A. (Trabajo original publicado en 2012).

Stewart, J. (2018). *Cálculo: Trascendentes tempranas* (A. García y E. Mercado, Trad.; 8.ª ed.). Cengage Learning Editores, S.A. (Trabajo original publicado en 2016).

Tall, D. (1994). Computer environments for the learning of mathematics. In Biehler, Rolf et al. (eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. Dordrecht: Kluwer, 189-199.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 289-325. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tejada, C., Villabona, A. y Ruiz, E. (2013). Deserción y repitencia del programa de ingeniería química de la Universidad de Cartagena Periodo 2006-2011. *Revista Ciencias e Ingeniería al Día, 8*(1), 55-66. http://revistas.unicartagena.edu.co/index.php/ciad/article/view/5

Tellechea, E. y Robles, G. (2008). La derivada a partir de consideraciones geométricas de la recta tangente. *Memorias del IV Congreso Iberoamericano de Cabri*. Córdoba, Argentina. http://www.mat.uson.mx/eduardo/

Thomas, G. B. (2006). *Cálculo. Una variable* (E. De Oteyza y V. Ibarra, Trad.; 11.ª ed.). Pearson Educación de México, S.A. (Trabajo original publicado en 2005).

Thomas, G. B. (2010). *Cálculo una variable* (V. Ibarra, Trad.; 12.ª ed.). Pearson Educación de México, S.A. (Trabajo original publicado en 2010).

Thomas, G. B. (2016). *Calculus* (13th ed.), [*Cálculo*]. Pearson Education, INC.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación matemática, 17*(1), 5-31. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40517101

Ubuz, B. (2001). First year engineering students' learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 20*(1), 113-137.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*(5), 609-637.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y lenguaje*. Barcelona: Paidós (Trabajo original publicado en 1986).

Vygotsky, L. S. (2000). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica S. L., Barcelona.

Westfall, R. S. (2006). *Isaac Newton: Una vida* (C. Gutiérrez, Trad.). Cambridge University Press. (Trabajo original publicado en 1996).

Winsløw, C. (2007). Les problèmes de transition dans l'enseignement de l'analyse et la complémentarité des approches diverses de la didactique. *Annales de didactiques et de sciences cognitives, 12*, 189-204.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 16, 37-85.

Zill, D. y Wright, W. (2011a). *Cálculo. Trascendentes tempranas* (H. Villagómez y G. Nagore, Trad.; 4.ª ed.). McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. (Trabajo original publicado en 2011).

Zill, D. y Wright, W. (2011b). *Matemáticas 1. Cálculo diferencial* (H. Villagómez y G. Nagore, Trad.). McGraw-Hill Interamericana Editores, S. A. de C. V. (Trabajo original publicado en 2010).

ANEXOS

Anexo 1: Resultados complementarios al proceso de investigación

Los resultados obtenidos a lo largo del proceso de esta investigación, se han presentado de manera concreta (no todos) en los tres artículos publicados (Docente A, F y parte de E), así como en el capítulo del libro (Docente B), tal como se muestran en los capítulos anteriores. Sin embargo, por falta de espacio debido a la rigidez de los formatos de las revistas, no se ha podido incluir explícitamente todos los resultados del estudio. En consecuencia, en este anexo presentamos el análisis de las prácticas docentes para cada uno de los profesores restantes (pertenecientes al grupo de investigación), cuando diseñan e implementan sus clases de derivadas y aplicaciones con estudiantes de ingeniería.

1. Docente C

1.1. Triangulación entre respuestas de la entrevista y lo observado en clase

En este caso, se han analizado y sintetizado los criterios que declara seguir dicho profesor en la entrevista docente, cabe mencionar que tales criterios han sido triangulados con las observaciones realizadas de dos de sus clases videograbadas en aula, donde explicó el tema de derivadas y sus aplicaciones (ver Tabla A.1).

Tabla A.1

Análisis de las respuestas dadas por el Docente "C" en la entrevista y triangulación con lo observado en clase.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Preguntas generales	Formación inicial	▪ Ha obtenido bachillerato y licenciatura en Educación, en la especialidad de Matemática y Física, y maestría en Educación Matemática; cuenta con amplia experiencia como profesor y coordinador de asignaturas de matemáticas en educación secundaria y en universidad privada; además realiza de manera permanente cursos cortos de actualización profesional y formación continua.	▪ Asumimos que sí está en posesión de los grados y títulos académicos que señala, además de ser un profesor con amplia experiencia y estar en constante actualización. ▪ Se evidencia que sí tiene en cuenta en cierta manera los criterios que afirma seguir (recupera conocimientos previos de los alumnos; la utilidad del tema matemático

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Criterios al diseñar e implementar clases	▪ La utilidad y la justificación de los temas matemáticos; las conexiones con temas matemáticos futuros; la relación del tema con el contexto y con la especialidad del alumno; la parte didáctica y la metodología para desarrollar el tema matemático; y, los saberes previos de los estudiantes.	para los estudiantes; la conexión del tema matemático con otros temas futuros del currículo; la cercanía del tema a desarrollar con el contexto del estudiante; y enseñar los temas de manera didáctica y con cierta metodología)
	Modelo de docente	▪ Se considera un docente magistral puesto que ejecuta clases magistrales, así como, desde la perspectiva del tipo de matemáticas que explica, se define como un docente mecanicista, ya que afirma que en sus clases desarrolla unas matemáticas mecanicistas.	▪ Hace participar medianamente a los estudiantes en las clases que son fundamentalmente magistrales y de transmisión del conocimiento. En efecto, se evidencia que implementa unas matemáticas de tipo mecanicistas.
Epistémica	Errores	▪ Acepta que podría ser que sí comete errores matemáticos en el desarrollo de sus clases de derivadas, aunque vemos que confunde un error matemático con un error didáctico o por despiste.	▪ Se observa que comete algún error matemático por despiste u olvido en sus explicaciones sobre derivadas, luego se da cuenta y lo corrige.
	Ambigüedades	▪ Asegura que intenta ser riguroso en la enseñanza de los conceptos de derivadas. Además, dice que trata de que el alumno intuya a través de ejemplos, sin embargo, siente que por utilizar la intuición en la implementación de sus clases sacrifica o pierde la rigurosidad del tema matemático. ▪ Opina que para estudiantes de ingeniería es suficiente con entregarles la lista de fórmulas y reglas básicas de derivación, que las conozcan y las apliquen. Plantea los temas de una manera más instrumental por ser más práctico y por falta tiempo; no trabaja la demostración ya que los estudiantes no manejan conceptos previos para ello y le demandaría mucho tiempo dárselos.	▪ En efecto, se aprecia que utiliza la intuición en todas sus clases para relacionar las derivadas con aspectos cotidianos de los estudiantes. Además, se observa que es poco riguroso en el desarrollo del tema matemático. ▪ Efectivamente, se observa que en sus clases no realiza ninguna demostración, y más bien, entrega directamente el listado de reglas básicas de derivación y fórmulas. Señala que las reglas se cumplen, ya están demostradas y las deben aplicar en la resolución de los ejercicios. ▪ Se observa que enfatiza en la resolución algebraica y

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Riqueza de procesos	▪ Sostiene que dedica la mayor parte del tiempo disponible de las clases a resolver ejercicios algorítmicos y procedimentales de derivadas aplicando las reglas básicas de derivación, dejando de trabajar ciertos procesos relevantes de la actividad matemática como la modelización y la resolución de problemas extramatemáticos.	algorítmica aplicando reglas y fórmulas de ejercicios intramatemáticos de derivadas. Vemos que hay carencia de procesos matemáticos relevantes como la modelización y la resolución de problemas extramatemáticos.
	Muestra representativa de la pluralidad de significados del objeto matemático a enseñar	▪ Afirma que define la derivada como pendiente de una recta tangente a una curva, más que como velocidad instantánea; así como, considera importante enseñar a los estudiantes diversos significados de la derivada, aunque en sus clases dice que no lo hace porque le falta tiempo.	▪ Observamos que define la derivada como pendiente de una recta tangente, no se evidencia la definición como velocidad instantánea. Respecto de los diversos significados de la derivada, vemos que solamente trabaja el geométrico y el algebraico.
		▪ Refiere que las tareas que plantea a sus alumnos son de la separata de ejercicios que le provee la coordinación de asignatura, donde la mayoría de situaciones son para aplicar fórmulas y reglas básicas de derivación, regla de L'Hóspital y el criterio de la primera derivada. Aunque dice que intenta agregar algún problema de modelación.	▪ En efecto, apreciamos que las tareas que les plantea a sus estudiantes en clase las extrae de la guía que le provee la coordinación del curso. Se trata de ejercicios algorítmicos para resolver aplicando fórmulas y reglas de derivación; no se aprecia que plantee situaciones de modelización.
		▪ Menciona que los problemas de derivadas y sus aplicaciones que trabaja en sus clases son, en su gran mayoría, intramatemáticos, y eso le constituye un problema; por eso trata de incluir por lo menos un problema extramatemático.	▪ En efecto, en las clases que fueron observadas vemos que todo el tiempo disponible trabaja ejercicios algorítmicos de derivadas de tipo intramatemático. No hay evidencia de que haya incluido algún problema extramatemático.
		▪ Sostiene que en el desarrollo de sus clases presenta a los alumnos diversas notaciones de la derivada. Considera que es importante enseñar diferentes formas de representación de las derivadas, aunque dice que no lo puede hacer porque los alumnos no	▪ Se observa que en sus explicaciones de derivadas y sus aplicaciones, usa un par de notaciones y dos formas de representación de la derivada,

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		tienen los conocimientos previos necesarios. ▪ Considera una limitación el hecho de que el sílabo lo condicione a desarrollar el cien por ciento de los contenidos de derivadas y sus aplicaciones. Es de la opinión que el sílabo se debería modificar para asignarle más horas semanales a las derivadas, así como agregar actividades de refuerzo y profundización para los estudiantes.	la forma analítica por límite y la representación geométrica. ▪ Se aprecia que cumple con la programación del sílabo y que éste está muy cargado de contenidos y dispone de pocas horas para la enseñanza de las derivadas. También, notamos que los exámenes le obligan a él a desarrollar todos los contenidos, por lo que no profundiza los temas.
Cognitiva	Conocimientos previos	▪ Considera que es primordial antes de empezar un nuevo tema saber en qué terreno va a ingresar, y para averiguarlo formula preguntas previas al concepto, es su estilo sondear siempre cómo van sus alumnos. Cuando ve que éstos no poseen los saberes previos para el estudio de las derivadas, forma equipos o trabaja en pares, distribuye a los alumnos líderes y va monitoreando el proceso.	▪ Se observa que sí recupera los conocimientos previos de los estudiantes cuando va a iniciar la clase, y luego trata de conectarlos con el nuevo tema que pretende enseñar. Asimismo, se evidencia que forma equipos de trabajo en el desarrollo de sus clases.
	Adaptación curricular a las diferencias individuales	▪ Cree que la distancia entre lo que los estudiantes ya conocen y los nuevos contenidos de derivadas que pretende implementar, sí es alcanzable; aunque dice que esto implica tener que dejar de exigirles más a los alumnos que más saben. ▪ Asegura que hace lo posible por atender la diversidad de estudiantes en el aula, tanto a los que saben más como a los que menos conocen, les provee material para la ampliación de las derivadas, así como también usa aplicativos (quizziz) para reforzar el tema y motivarlos. ▪ La manera de asegurarse de que los estudiantes hayan aprendido los conceptos de derivadas que ha enseñado, es formulando preguntas y observando la claridad de sus	▪ Observamos que presenta contenidos de derivadas y sus aplicaciones que están en la zona de desarrollo próximo (ZDP) de los alumnos, y que son accesibles para ellos. ▪ Vemos que realiza cierto esfuerzo por atender las dudas y dificultades de aprendizaje de la derivada de los estudiantes. También se observa que asigna material en el campus virtual, pero no se evidencia el uso de aplicativos. ▪ En efecto, se evidencia que formula preguntas, recibe las respuestas de los alumnos y vuelve a hacer repreguntas. Se infiere que por la experiencia

C I	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Aprendizaje	respuestas, lee sus rostros y expresiones, que resuelvan ejercicios e intercambien sus resultados. ▪ Los instrumentos de evaluación que viene aplicando son pruebas de desarrollo (exámenes parciales, finales y prácticas calificadas), y que en su opinión no le informan muy bien de las dudas y dificultades de aprendizaje de los alumnos sobre las derivadas. ▪ Cuando detecta que sus alumnos no lo están siguiendo en clases o no han aprendido las derivadas y sus aplicaciones, lo que hace es, en la siguiente clase refuerza esa parte del tema y toma una fracción de tiempo para las consultas; y si ha sido muy mecanicista, entonces enfoca el tema de otra manera planteando problemas más simples.	que posee como docente puede leer rostros, expresiones e identificar el aprendizaje ▪ Se observa que las evaluaciones que aplica a sus alumnos y que tienen mayor peso en el promedio, son pruebas sumativas de desarrollo y comunes, por lo que se infiere no le informan bien de las dificultades de aprendizaje ▪ Se observa que cuando identifica que no ha habido aprendizaje de las derivadas en los estudiantes, hace una pausa y retrocede para reforzar el tema; procede a explicar de nuevo el tema de una manera concreta y distinta.
	Alta demanda cognitiva	▪ Afirma que no asigna tareas para que los estudiantes realicen fuera de horario de clase, aunque les sugiere resolver todos los ejercicios de la guía para que tengan claro el tema. Las tareas que trabaja en clase son ejercicios para la manipulación algebraica de la derivada y que en su opinión, no activan procesos cognitivos relevantes.	▪ En efecto, forma equipos de trabajo y entrega una separata de tareas común para todos los grupos donde propone ejercicios para mecanización y aplicación de fórmulas. Son tareas que enfatizan en lo procedimental y no exigen alta demanda cognitiva.
Interaccional	Interacción docente-discente	▪ Considera que no ha hecho una presentación adecuada del concepto de derivada, lo cual justifica por falta de tiempo y porque necesitaría ampliar un poco más el tema, y que tampoco ha enfatizado en temas clave; aunque en su opinión guarda cierto orden y claridad al momento de exponer sus ideas. ▪ Sostiene que la experiencia que ha acumulado como docente le permite leer los silencios de los alumnos, las expresiones faciales e interpretar las	▪ Apreciamos que podría mejorar sus presentaciones de las derivadas respecto al orden y secuenciación para que sean más entendibles para los estudiantes, tampoco se aprecia que haga énfasis en los temas clave. ▪ Observamos que es un profesor con amplia experiencia en la docencia capaz de interpretar las respuestas y comportamientos

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		respuestas que le brindan; y ello le indica muchas cosas sobre las dudas que surgen en el aprendizaje de la derivada.	de los estudiantes, así como las dudas y dificultades de aprendizaje sobre la derivada.
	Interacción entre discentes	▪ Afirma que cuando reconoce las dudas y dificultades de aprendizaje de los alumnos sobre las derivadas, entonces interactúa y conversa con ellos sobre alguna experiencia cotidiana relacionada al tema, incluso usa aplicativos (kahoot).	▪ Se aprecia que interactúa con los alumnos, ante las dudas y dificultades de aprendizaje sobre la derivada que éstos presentan, se acerca, los atiende y los saca a la pizarra. No hay evidencia del uso de aplicativos en clase.
		▪ Utiliza algunos recursos argumentativos como una historia o metáfora para implicar y captar la atención de los alumnos en la clase de derivadas, pero que sean cortas y no tomen mucho tiempo, ya que dice que eso le quita rigurosidad al tema.	▪ Si bien, no hay evidencias en las clases observadas de que usara historietas relacionadas a las derivadas, pero sí utiliza otros recursos argumentativos como la clase magistral y algunas metáforas
		▪ Opina que el diálogo y la comunicación es importante entre el docente y los estudiantes y también entre pares; por esa razón, siempre trata de darles confianza, de que sus alumnos se sientan cómodos para que no se replieguen y la comunicación se haga fácil.	▪ Observamos que el docente es bastante accesible a los estudiantes, da confianza y se muestra receptivo a las preguntas. Se infiere que cuando forma equipos de trabajo, propicia el diálogo y la comunicación ente alumnos.
	Autonomía	▪ Refiere que en sus clases propicia muy pocos momentos para que los estudiantes realicen la exploración, la formulación y la validación de sus conjeturas sobre la derivada; así como para el aprendizaje autónomo, lo cual justifica por la falta de tiempo.	▪ Se observa que el trabajo en grupos de estudiantes en el aula lo hace en escasos momentos, por lo que los alumnos no tienen tiempo para que exploren y validen sus resultados. Tampoco notamos que propicie la autonomía.
	Evaluación formativa	▪ Propicia la interacción con los estudiantes en la mayor parte de sus clases. Dice que está atento a cuando los alumnos dialogan en los grupos de trabajo y ponen ejemplos sobre las derivadas, ya que este tipo de interacción le permite observar si éstos han entendido o han aprendido el tema que ha enseñado.	▪ Aunque se observa que el trabajo en equipos no es constante, sí lo hace para los talleres por ejemplo; cuando se da, vemos la interacción entre estudiantes y de los grupos con el docente, ya que está atento a las dudas y preguntas de los grupos.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Mediacional	Recursos materiales	▪ Utiliza software matemático como Geogebra y Desmos cuando implementa sus clases de derivadas, puesto le ayudan a profundizar el tema y por ser recursos tecnológicos disponibles libremente.	▪ En efecto, observamos que en todas sus clases proyecta gráficas en el Geogebra online o el Desmos para que los estudiantes comprendan mejor las derivadas.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	▪ Afirma que trabaja con aulas numerosas de más de 40 estudiantes en sus clases, por lo que considera que con grupos más reducidos de alumnos por aula podría obtener mejores resultados en la enseñanza de la derivada y sus aplicaciones. ▪ Menciona que el aula y los elementos en ella sí reúnen las condiciones necesarias para las clases; sin embargo, dice que la distribución de los estudiantes en filas y columnas no es adecuada para la ejecución del proceso de instrucción que implementa.	▪ Efectivamente, vemos que en cada aula de sus clases hay una buena cantidad de estudiantes, y que debido a ello, no se abastece para atenderlos de forma personalizada. ▪ Se observa que las aulas donde trabaja sí presentan los elementos y equipos multimedia adecuados para ejecutar una buena enseñanza; aunque, se nota que el espacio es reducido para el trabajo en equipos de alumnos.
	Tiempo (de la enseñanza colectiva, de tutoría, tiempo de aprendizaje)	▪ Refiere que trata de desarrollar todos los contenidos de derivadas que le es posible en la fase presencial, para que no constituya una barrera por falta de conocimiento para los alumnos cuando tengan que ingresar en la plataforma para el trabajo virtual. ▪ Afirma que en sus clases trata de seleccionar los contenidos de derivadas y sus aplicaciones, por lo que desarrolla aquellos que considera relevantes para los estudiantes. ▪ Considera que invierte el mayor tiempo disponible para la clase en enseñar los contenidos de derivadas que en su opinión son más importantes; así como aquellos contenidos que implican mayor dificultad para los estudiantes les da para que investiguen, se tomen su tiempo y se motiven, por el reto que constituye para ellos.	▪ En efecto, se evidencia que los contenidos claves de las derivadas los desarrolla en clases. Además, se aprecia que asigna ciertas tareas para el trabajo fuera del horario de clase y en el campus virtual. ▪ Observamos que del sílabo selecciona contenidos de derivadas y pone énfasis en unos contenidos más que en otros, se infiere que lo hace guiado por su experiencia. ▪ Efectivamente, se observa que dedica más tiempo en practicar ejercicios de ciertos contenidos, más que otros; y también, enfatiza y dedica más tiempo en resolver ejercicios de contenidos de derivadas que se conoce representan mayor dificultad para los estudiantes.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Emocional	Intereses y necesidades	▪ Con respecto a las tareas de derivadas que propone, el docente señala que trabaja con el material (común a varios grupos) que le provee la coordinación de asignatura, el mismo que trata de modificar al momento de desarrollar. Además, intenta resolver los ejercicios que más despiertan el interés en los estudiantes.	▪ Efectivamente, se aprecia que en sus clases proyecta, en la pizarra, la separata de tareas que le entrega la coordinación y la publica en el campus virtual. En ella se puede apreciar que contiene, básicamente, ejercicios de derivadas para mecanización.
		▪ Considera importante proponer situaciones que permitan a los estudiantes valorar la utilidad de la derivada en la vida cotidiana y profesional. Además, dice a sus alumnos que dichas situaciones forman parte de los conocimientos previos que necesitan tener para poder desarrollar otros temas.	▪ Se aprecia que sí es de la opinión de plantear situaciones de la vida cotidiana que se resuelven con derivadas. Sin embargo, no se aprecia que trabaje este tipo de situaciones del contexto de ingeniería en sus clases, lo cual justifica por falta de tiempo.
	Actitudes	▪ Refiere que la manera de implicar a los estudiantes en las actividades de derivadas que les propone, es a través de la nota (motivación extrínseca). También, se esfuerza para que dichas actividades sean de interés para ellos, así como, les hace ver la importancia y utilidad de que conozcan del tema para conceptos posteriores.	▪ Observamos que aplica una motivación de tipo extrínseca al asignar puntaje a las tareas y actividades dentro de la clase (talleres), lo cual repercute en el promedio final de la asignatura. Sin embargo, no se evidencia que se esfuerce por incluir situaciones distintas a las de la guía.
		▪ Cree fomentar la responsabilidad y la perseverancia en los estudiantes organizando sus clases de derivadas y sus aplicaciones, de la manera más adecuada posible, y para logarlo aplica los tres momentos de clase (inicio, proceso y salida).	▪ Observamos que se preocupa por cumplir en su totalidad con el sílabo, proyecta gráficos en software y lleva cierta secuencia lógica de los temas; con lo cual inferimos que fomenta la responsabilidad en los estudiantes
	Emociones	▪ Admite que le gustaría dar la oportunidad para que todos los estudiantes participen y argumenten de manera equitativa en sus clases de derivadas, pero dice que no ocurre eso, lo cual justifica por falta de tiempo.	▪ Apreciamos que en sus clases saca a la pizarra a algunos estudiantes de manera voluntaria, pero no hay una validación de sus desarrollos, tampoco vemos que sea de forma equitativa; no dispone de suficiente tiempo.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		▪ Sostiene que los estudiantes ya vienen de sus casas predispuestos con conceptos de rechazo, de fobia y miedo hacia los límites, las derivadas y las integrales; razón por la cual él trata de elevarles la autoestima y de hacerles ver que poniendo dedicación y empeño, sí pueden lograr comprender las derivadas.	▪ En efecto, vemos que en ocasiones se acerca hasta las ubicaciones de los estudiantes, asesora y alienta a intentar desarrollar los ejercicios; se muestra accesible a todos, conversa con ellos, luego tiene que interrumpir para continuar con la clase.
Ecológica	Adaptación al currículo	▪ Considera que los contenidos de derivadas que enseña y su implementación, sí se corresponden con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería. Sin embargo, en su opinión, en la evaluación de estos contenidos no hay tal correspondencia.	▪ Observamos que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que enseña, son coherentes con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería. Aunque que con el sistema de evaluación, el docente está en desacuerdo.
	Conexiones intra e inter-disciplinares	▪ Sostiene que los conceptos de derivadas que implementa tienen conexión y van a ayudar a los contenidos matemáticos posteriores, así como a los contenidos de otras asignaturas de ingeniería. Sin embargo, dice que la dificultad está en qué tan riguroso ha sido en la base, por lo que sugiere que en el curso se debería trabajar la rigurosidad matemática y el proceso de demostración.	▪ Se observa que en sus clases el profesor hace comentarios a los estudiantes acerca del uso de las derivadas en asignaturas posteriores de su carrea profesional. Sin embargo, no se aprecia que se esfuerce por ser riguroso en los temas matemáticos y tampoco hace demostraciones.
	Utilidad sociolaboral	▪ Opina que los contenidos de derivadas que imparte en sus clases pueden ser útiles para la inserción sociolaboral de los estudiantes de ingeniería, en la medida en que éstos puedan contextualizar las derivadas para resolver una problemática de su especialidad.	▪ Podemos evidenciar que argumenta ante los estudiantes de ingeniería, que las derivadas les servirá para que resuelvan situaciones de su campo laboral; aunque no apreciamos que plantee situaciones contextualizadas en sus clases
	Innovación didáctica	▪ Argumenta que es importante que el docente sepa manejar recursos tecnológicos para que pueda explicar mejor los contenidos que el alumno está aprendiendo; él sí viene innovando en este aspecto en sus	▪ Observamos que en el desarrollo de sus clases hace uso de recursos tecnológicos como software matemáticos y otros para enseñar las derivadas. Respecto de la

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		clases. Sugiere que se debería mejorar la evaluación de contenidos matemáticos, no comparte la idea de evaluar de manera general y con un mismo examen a todos los grupos de estudiantes.	evaluación, vemos que está establecida en el sílabo y en el sistema de gestión institucional por lo que no puede modificarla; en efecto, los exámenes son comunes.

1.2. Conclusiones sobre los criterios que orientan la práctica del Docente C

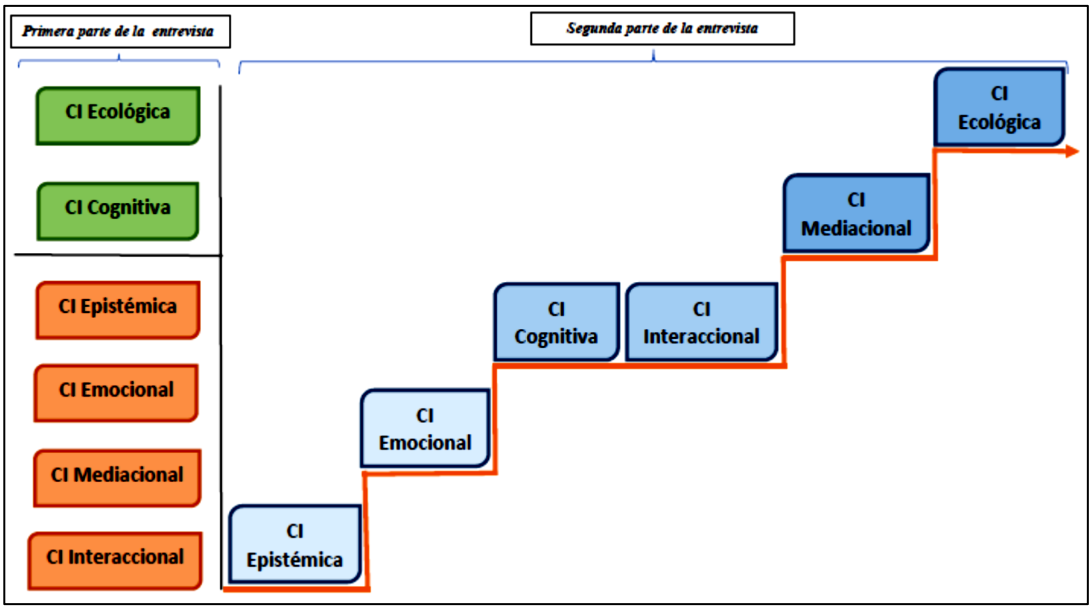
Sobre la base de los resultados mostrados en la Tabla A.1 podemos inferir los criterios generales y principales que orientan la práctica de este profesor "C" cuando diseña e implementa sus clases de derivadas y sus aplicaciones para estudiantes de diversas carreras de ingeniería, así como inferir el peso que tienen estos criterios en su práctica docente como resultado de la triangulación realizada entre lo que dice y lo que se ha observado que hace en las aulas el mencionado docente (ver Figura A.1).

En la columna de la izquierda del esquema de la Figura A.1, se muestran, en la parte superior, los criterios de idoneidad didáctica que aparecen en las respuestas del profesor C cuando se le formula la pregunta de cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica (ecológico y cognitivo); mientras que en la parte inferior (epistémico, emocional, mediacional e interaccional) se hallan los criterios de idoneidad (CI) que no menciona en su respuesta (primera parte de la entrevista).

En la columna derecha de dicho esquema están los criterios de idoneidad que emergen en sus respuestas a las preguntas más específicas relacionadas con alguno de los componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica - CID (segunda parte de la entrevista). Tal como era esperable, teniendo en cuenta las preguntas formuladas, en esta columna aparecen los seis CID; ahora bien, no todos tienen la misma importancia para el profesor C al momento de reflexionar y justificar su práctica. Para representar el diferente peso que tiene cada criterio como guía de la práctica del profesor hemos utilizado el esquema de la escalera, siendo los escalones superiores los de mayor peso, en tanto que los criterios que están en la parte inferior tienen menor peso. La disposición en la escalera, además de indicar el menor o mayor peso, también pretende representar cómo algunos CI quedan supeditados por otros. El orden en el que aparecen los CI en la escalera es el resultado de la triangulación entre el discurso del docente y lo que se infiere de la observación de sus clases.

Figura A.1

Esquema de criterios que guían la práctica didáctica del Docente "C"



Nota: Fuente propia de la investigación.

En su discurso inicial el profesor C explica que los criterios ecológico y cognitivo son los que orientan su práctica docente. Ahora bien, cuando en la segunda parte de la entrevista se le hacen preguntas más específicas sobre el criterio cognitivo, concluimos que: 1) considera primordial antes de empezar un nuevo tema saber en qué terreno va a ingresar, y cuando ve que sus alumnos no poseen los conocimientos previos para el estudio de las derivadas, forma equipos o trabaja en pares, 2) hace lo posible por atender la diversidad de estudiantes en el aula, tanto a los que saben más como a los que menos conocen y les provee material para la ampliación de las derivadas, 3) se esfuerza por asegurarse del aprendizaje de los estudiantes, y para ello formula preguntas y observa las respuestas, lee sus rostros y expresiones, y asigna que resuelvan ejercicios; sin embargo lo hace dentro de un enfoque de aprendizaje mecanicista, 4) si identifica que los estudiantes no están aprendiendo el tema que está enseñando, entonces refuerza en la siguiente clase, y si ha sido muy mecanicista enfoca el tema de otra manera planteando problemas más simples; si bien trata de tomar un tiempo para ello, luego tiene que cortar y continuar la clase para cumplir con el sílabo y por falta de tiempo, 5) no asigna tareas para que los estudiantes resuelvan fuera del horario de clases, y aquellas que propone en clases son ejercicios de manipulación algebraica de la derivada; no propone situaciones-problema que activen en los estudiantes procesos cognitivos relevantes.

En consecuencia, con base en la triangulación de lo observado en sus clases podemos inferir que el docente C asigna una mediana importancia a los aspectos cognitivos, ya que el aprendizaje es básicamente de enfoque tradicional propio de clases magistrales; además, supedita este criterio al mediacional (falta de tiempo) y al ecológico (cumplir con el sílabo).

Con respecto al criterio epistémico, si bien no había sido considerado al principio por el docente C, en la segunda parte de la entrevista emerge en el discurso y va tomando fuerza, de lo cual inferimos que: 1) comete errores matemáticos en el desarrollo de sus clases de derivadas, aunque se debe por apresuramiento o por despiste, 2) trata de que el alumno intuya a través de ejemplos; sin embargo, siente que por utilizar la intuición pierde rigurosidad del tema matemático, 3) plantea los temas de manera más instrumental por ser más práctico y porque le falta tiempo; no trabaja la demostración ya que los estudiantes no manejan conceptos previos y le demandaría mucho tiempo enseñárselos, 4) básicamente, en clases resuelve ejercicios algorítmicos y procedimentales de derivadas aplicando las reglas básicas de derivación; no trabaja ciertos procesos relevantes de la actividad matemática como la modelización y la resolución de problemas extramatemáticos, 5) los problemas de derivadas que trabaja en sus clases son, en su gran mayoría, intramatemáticos; además, ve como una limitación el hecho que el sílabo lo condicione a desarrollar el cien por ciento de los contenidos de derivadas, dice que deberían asignarle más horas semanales a las derivadas.

En consecuencia, podemos inferir que para el profesor C, al momento de orientar su práctica docente, los aspectos epistémicos se supeditan al criterio mediacional (condicionado por la falta de tiempo) y al ecológico (condicionado por el sílabo); además, el enfoque que utiliza está centrado en la mecanización.

Con respecto al criterio emocional, al cual el profesor en su respuesta inicial no lo había tomado en cuenta, sin embargo, en sus respuestas a la segunda parte de la entrevista (cuando se le hacen preguntas específicas sobre éste) se infiere que, efectivamente, ahora sí emerge o lo tiene en cuenta, hecho que también se aprecia en la observación de sus clases. Por ejemplo, si bien, intenta resolver ejercicios que más despiertan el interés en los estudiantes, aunque lo hace a partir de la guía institucional que contiene sólo ejercicios algorítmicos, y no incluye situaciones del contexto profesional de ingeniería; cree importante proponer situaciones del campo laboral del estudiante que se resuelven con derivadas, sin embargo, no lo hace en clases, lo cual justifica por la falta de tiempo; implica los estudiantes en las actividades matemáticas que les propone a través de la motivación extrínseca (asignando nota a las tareas sobre el promedio final); le gustaría dar la oportunidad para que todos los estudiantes participen y argumenten de manera equitativa en sus clases, sin embargo no lo hace, lo cual justifica por falta de tiempo; fomenta la responsabilidad y la perseverancia en los estudiantes organizando sus clases de derivadas siguiendo el plan de clase que le provee la institución.

En consecuencia, concluimos que todo ello lo hace dentro de un modelo de clase magistral, expositiva y mecanicista, y que además no le da la importancia necesaria a la parte emocional, por lo que se infiere que el docente C supedita los aspectos afectivos al criterio mediacional (falta de tiempo) y al ecológico (seguir el plan de clase institucional).

Con relación al criterio interaccional observamos que tampoco aparece en las respuestas iniciales del docente C, aunque emerge en la segunda parte de la entrevista cuando se le formulan preguntas más específicas sobre aspectos interaccionales, se infiere que le asigna cierto peso e importancia en la implementación de sus clases. Así por ejemplo, si bien no considera que haya hecho una presentación del todo adecuada, no obstante guarda cierto orden, claridad y secuenciación lógica al momento de exponer sus ideas; a través de la experiencia docente es capaz de leer sus expresiones faciales, interpretar sus respuestas, reconocer las dudas y dificultades de aprendizaje de los alumnos, en consecuencia interactúa y conversa con ellos sobre alguna experiencia cotidiana relacionada al tema; utiliza ciertos recursos argumentativos como una historia o metáfora para implicar y captar la atención de los alumnos, pero que no le tome mucho tiempo porque tiene que continuar la clase para cumplir con lo programado; propicia escasos momentos para que los estudiantes realicen la exploración, la formulación y la validación de sus conjeturas, así como para el aprendizaje autónomo, lo cual justifica por la falta de tiempo.

Por lo antes mencionado, concluimos que este docente le asigna un peso medio en sus clases a los aspectos interaccionales y los supedita al criterio mediacional (falta de tiempo) y al ecológico (cumplir la programación).

Si bien, el criterio mediacional no había sido tomado en cuenta por el docente C al principio de la entrevista, cuando se le hacen preguntas específicas de aspectos de medios entonces de sus respuestas podemos inferir que este criterio tiene una gran importancia para orientar la implementación de sus clases, y por ello lo hemos ubicado en la parte superior del esquema de pesos. Así por ejemplo, utiliza recursos tecnológicos como software matemático (Geogebra y Desmos) cuando implementa sus clases de derivadas, puesto le ayudan a profundizar el tema matemático; gestiona las aulas numerosas de alumnos así como la distribución de estudiantes en el aula en equipos de trabajo y pares, de manera que le permita ejecutar la enseñanza que él pretende, aunque no lo hace siempre; se esfuerza por desarrollar todos los contenidos en la fase presencial, para que los estudiantes no tengan problemas de falta de conocimiento cuando ingresen al campus virtual a trabajar las actividades complementarias; selecciona los contenidos relevantes para los estudiantes e invierte el mayor tiempo disponible de la clase en enseñar los contenidos más importantes y los de mayor dificultad para los alumnos, en aras de cumplir la programación del sílabo.

En consecuencia, concluimos que para este profesor los aspectos de medios son de gran importancia en su práctica, aunque quedan supeditados al criterio ecológico (cumplir la programación).

En tanto que el criterio ecológico aparece en su respuesta inicial y, de la triangulación realizada, evidenciamos que tiene un papel fundamental para orientar la práctica del docente C, la cual justifica, sobre todo, por el cumplimiento de la totalidad de contenidos programados en el sílabo del curso y por seguir el plan de clase, aunque también hace reflexiones en clases en las que la justifica por el hecho de tener en cuenta la futura profesión de los estudiantes de ingeniería; viene innovando en su práctica docente, sobre todo en la parte de incluir recursos tecnológicos para la enseñanza de las derivadas y otros temas matemáticos; también, en su discurso enfatiza a los estudiantes que los conceptos de derivadas que implementa tienen conexión y van a ayudar a los contenidos matemáticos posteriores, así como a los contenidos de otras asignaturas de ingeniería.

De la triangulación entre lo dicho en la entrevista y lo observado en sus clases, se infiere que este criterio ecológico es el que mayor peso tiene para orientar su práctica docente y al cual se supeditan los demás CI (epistémico, emocional, cognitivo, interaccional y mediacional), aunque en nuestra apreciación el criterio de medios está sólo un peldaño por debajo del ecológico.

Además, del criterio ecológico, aquí también el componente "Utilidad sociolaboral" se tiene en cuenta para justificar una presentación del tema de las derivadas abiertamente enfocado en la mecanización, las clases magistrales y poco significativo, pero no para incorporar procesos de modelización, argumentación y resolución de problemas extramatemáticos. Este criterio incide disminuyendo la idoneidad epistémica (reduce la riqueza de procesos), en lugar de aumentarla asignando un rol fundamental a los procesos relevantes de la actividad matemática.

2. Docente D

2.1. Triangulación entre respuestas de la entrevista y lo observado en clase

Para este caso, se han analizado y sintetizado los criterios que declara seguir dicho profesor en la entrevista docente, cabe mencionar que tales criterios han sido triangulados con las observaciones realizadas de dos de sus clases videograbadas en aula, donde explicó el tema de derivadas y sus aplicaciones (ver Tabla A.2).

Tabla A.2

Análisis de las respuestas dadas por el Docente "D" en la entrevista y triangulación con lo observado en clase.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Preguntas generales	Formación inicial	▪ Ha obtenido el grado de Bachiller y Licenciatura en Matemática Pura, y el grado de Magíster en Educación Matemática; cuenta con amplia experiencia como profesor y coordinador de asignaturas de matemáticas en universidad pública y privada; ha realizado talleres y cursos	▪ Asumimos que sí está en posesión de los grados y títulos académicos que señala, además de ser un profesor con amplia experiencia y estar en permanente actualización.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Criterios al diseñar e implementar clases	de capacitación permanente en docencia y metodología. ▪ Perfil del estudiante y del egresado; lineamientos generales de la universidad; orden y secuenciación en el desarrollo del tema matemático; engranaje y conexiones del tema; los conocimientos previos de los estudiantes; aplicaciones de los conceptos dentro del tema matemático y a la especialidad del alumno.	▪ Se evidencia que sí tiene en cuenta en cierta manera los criterios que afirma seguir (recupera saberes previos de los alumnos; el perfil del egresado y los lineamientos institucionales; orden lógico y secuencia y conexiones del tema; y las aplicaciones intra y extra matemáticas).
	Modelo de docente	▪ Se considera un docente que desde la perspectiva didáctica desarrolla clases magistrales, expositivas, dialógicas e intenta construir el aprendizaje; y, desde el tipo de matemáticas que explica, hace unas matemáticas mecanicistas para que después el alumno las comprenda y las aplique.	▪ En efecto, se trata de un profesor que desarrolla sus clases dentro de un enfoque magistral, expositivo y de transmisión del conocimiento, no se evidencia la parte dialógica; así como también, desarrolla unas matemáticas con un centradas en la mecanización y repetición.
Epistémica	Errores	▪ Declara que no comete errores de tipo matemático en el desarrollo de sus clases de derivadas, aunque sí acepta cometer otro tipo de errores tales como errores didácticos, de aplicación de las derivadas o de conexión con la realidad de las cosas.	▪ En efecto, no se observa que cometa algún error matemático en sus explicaciones sobre las derivadas, en todas las clases videograbadas.
	Ambigüedades	▪ Sostiene que no es riguroso en las clases de derivadas y sus aplicaciones ya que se enfoca en que los estudiantes practiquen los ejercicios que les presenta. Además, dice que en el desarrollo de los contenidos de derivadas no demuestra los teoremas, ni las propiedades, tampoco elabora una estructura teórica formal. ▪ Afirma que siempre utiliza la intuición en su proceso de enseñanza, para él las explicaciones intuitivas son clave en sus clases; concibe a la intuición como el puente entre la parte mecánica del tema y el	▪ Efectivamente, no se aprecia el rigor matemático formal en sus explicaciones sobre derivadas. Además, vemos que no hace demostraciones de las reglas básicas de derivación, de las propiedades, ni de los teoremas. ▪ Se observa que en sus explicaciones de la derivada incorpora elementos intuitivos relacionando la derivada con aspectos cotidianos, inferimos que lo hace para lograr una

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		entendimiento de las derivadas por parte de los alumnos.	mejor comprensión por parte de los estudiantes
	Riqueza de procesos	▪ En sus clases de derivadas, presenta directamente las reglas de derivación, la parte mecánica del tema y da pequeños detalles de demostraciones, ya que dice que los alumnos no tienen la base ni los lineamientos demostrativos por inducción, por contradicción u otros estilos. En consecuencia, se limita a enfocar los temas matemáticos de una manera más instrumental. ▪ Sostiene que trabaja el aspecto práctico, mecánico e intuitivo de la derivada y la resolución de ejercicios en la mayor parte del tiempo. Una porción de modelización al final del tema y resolución de problemas, aunque los problemas que presenta no son tan reales, son forzados, un acercamiento a la realidad. La argumentación y la demostración quedan relegadas, ya que no es lo que la universidad quiere; además, los alumnos carecen de base para ello.	▪ Observamos que el docente no desarrolla ninguna demostración, sino que entrega directamente un listado de reglas básicas de derivación, propiedades y fórmulas. Además, vemos que se enfoca en la práctica de ejercicios de derivadas y de una forma instrumental. ▪ Se observa que en la mayor parte del tiempo disponible para la clase enfatiza en la resolución algebraica y algorítmica, aplicando reglas y fórmulas, de ejercicios de derivadas. Vemos que hay carencia de los procesos matemáticos relevantes como la modelización, resolución de problemas y argumentación.
	Muestra representativa de la pluralidad de significados del objeto matemático a enseñar	▪ Afirma que inicia el estudio de la derivada definiéndola como pendiente de recta tangente a una curva, mientras que la definición como velocidad instantánea la presenta en las aplicaciones. En su opinión, todos los conceptos matemáticos se pueden dar al estudiante y lo mejor es darles varios significados de la derivada. ▪ Refiere que presenta ejemplos de derivadas para argumentar por límite, para aplicar reglas básicas de derivación, para aplicar los criterios de la primera y la segunda derivada. Plantea en un 70% problemas intramatemáticos y el resto son extramatemáticos para conectar con	▪ Apreciamos que explica dos significados de la derivada: el significado geométrico y el algebraico por límite; así como también notamos que define la derivada como pendiente de una recta tangente a la curva, pero no se evidencia la definición como velocidad instantánea. ▪ En efecto, apreciamos que las situaciones que presenta a sus estudiantes en clase son principalmente ejercicios intramatemáticos que se resuelven aplicando fórmulas y reglas de derivación. Se aprecian escasas situaciones de modelización o problemas contextualizados.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		la realidad y en dos o tres contextos, nada más. ▪ Considera que es importante enseñar diferentes formas de representación de las derivadas, es por ello que trata que los estudiantes verbalicen los nuevos conceptos de derivada, usa la parte gráfica, visual y simbólica, ya que permite a los alumnos una mejor captación o comprensión del concepto. ▪ Considera que implementar las derivadas y sus aplicaciones depende también del sílabo de la asignatura, en éste la universidad establece los contenidos a desarrollar así como el grado de profundidad, el estilo de enseñanza y cómo quiere que lo apliquen. En su proceso de enseñanza se rige por el sílabo y plan de clases.	▪ En efecto, en las clases que fueron observadas vemos que utiliza diferentes modos de expresión y representación para explicar derivadas, tales como gestos, simbologías, modo verbal; así como la representación geométrica, pero no se aprecia que use la forma tabular. ▪ Se aprecia que se esfuerza por seguir la programación de contenidos del sílabo y del plan de clases, donde todo está establecido para que el docente lo ejecute. También, que hay escasa profundización de los temas matemáticos, lo cual inferimos que se debe a cuestiones de falta de tiempo.
Cognitiva	Conocimientos previos	▪ Afirma que en el estudio de las derivadas y sus aplicaciones recuerda y recupera directamente ciertos conocimientos previos a los estudiantes, de manera que le sirvan de empalme con el nuevo tema. Es decir, no espera a averiguar si tienen o no lo saberes previos, sino que se anticipa y recuerda identidades trigonométricas, entre otros.	▪ Se observa que sí recupera los conocimientos previos de los estudiantes al inicio de sus clases. Si bien, no aplica una evaluación diagnóstica, lo que hace es recordarles ciertos elementos de geometría, álgebra y trigonometría que van a necesitar para el estudio de las derivadas.
	Adaptación curricular a las diferencias individuales	▪ Considera que la distancia entre lo que los estudiantes ya conocen y los nuevos contenidos de derivadas que pretende implementar, sí es alcanzable; dice que experimentalmente ha visto que los alumnos alcanzan el nuevo conocimiento de las derivadas ▪ Sostiene que en sus clases tiene en cuenta la diversidad de alumnos y la manera en cómo éstos llegan respecto a sus conocimientos; también, la velocidad y los ritmos de aprendizaje, por lo que refuerza,	▪ Apreciamos que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que presenta el docente están en la zona de desarrollo próximo (ZDP) de los alumnos, además son accesibles para ellos. ▪ Observamos que el profesor se esfuerza por atender a la diversidad de estudiantes en el aula, a los diferentes ritmos y velocidades de aprendizaje que éstos presentan, y también

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		estimula y los alienta con ejercicios de cálculo directo a aquellos que poseen un conocimiento inicial.	los alienta a atreverse a resolver los ejercicios.
		▪ Señala que en la medida que va implementado sus clases de derivadas, va preguntando e interactuando con los estudiantes; y a partir de ello, puede darse cuenta si éstos han capturado la idea de derivadas o están aprendiendo el tema, bien sea por su forma de hablar, la forma de resolver los ejercicios o cuando salen a la pizarra.	▪ En efecto, vemos que formula preguntas, recibe las respuestas de los alumnos y vuelve a hacer repreguntas conforme va desarrollando su clase. También, lee sus rostros, expresiones y reconoce el aprendizaje de éstos.
	Aprendizaje	▪ Opina que los instrumentos de evaluación que viene aplicando son pruebas de desarrollo (examen parcial, final y prácticas calificadas), y que sí le informan del aprendizaje de los estudiantes; aunque la mayor evidencia de si éstos están aprendiendo las derivadas, la obtiene cuando conversa e interactúa con ellos, ve sus cuadernos y desarrollos, si llegan temprano, si preguntan.	▪ Efectivamente, se aprecia que las evaluaciones que aplica a sus alumnos y que tienen mayor peso en el promedio del curso, son pruebas sumativas de desarrollo; también vemos que interactúa con los estudiantes, se acerca y conversa acerca de su proceso de aprendizaje.
		▪ Cree que las dificultades de los alumnos en el estudio de las derivadas están en el procedimiento, en la parte mecánica y práctica de los ejercicios. Cuando detecta dudas y dificultades de aprendizaje de sus alumnos, les da resúmenes de propiedades, ejercicios y problemas para que practiquen por su cuenta.	▪ Se observa que cuando identifica las dudas y dificultades de sus alumnos sobre el aprendizaje de las derivadas, se esfuerza por despejarlas y atenderlos de manera personalizada, además les entrega material de ejercicios adicional para que resuelvan fuera del horario de clase.
	Alta demanda cognitiva	▪ Refiere que en las tareas de derivadas y sus aplicaciones que propone a los estudiantes tanto durante la clase como fuera del horarios de clases, sectoriza los problemas de manera que activen en los alumnos ciertos procesos cognitivos relevantes como la generalización, conectar unos términos con otros, un poco de argumentación y de reglas prácticas de derivación.	▪ Observamos que las tareas que propone son de una separata común para todos los grupos de estudiantes, la cual contiene ejercicios de algebrización y aplicación de reglas básica de derivación. No se aprecia alta demanda cognitiva ni procesos de generalización o argumentación.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Interaccional	Interacción docente-discente	▪ Considera que ha hecho una presentación adecuada del concepto de la derivada, luego señala que proporciona a los alumnos un camino de la parte teórica, de las propiedades y las aplicaciones de las derivadas; para después ramificar en contenido en subtemas. ▪ Sostiene que reconoce las dudas de los estudiantes sobre las derivadas, básicamente, por su forma de hablar y de expresarse, por la manera de mirar, por sus notaciones y posturas, sus inquietudes o cuando llegan tarde a clases. Para aclararlas, comienza a explorarlas, saca a los alumnos a la pizarra a resolver un ejercicio, pero a veces el tiempo le dice que debe avanzar con lo programado	▪ Apreciamos que sus presentaciones de las derivadas son magistrales y guardan un orden lógico y secuenciación; se esfuerza por hacer entendibles los contenidos para los estudiantes. ▪ Observamos que basado en su experiencia en la docencia puede reconocer dudas y dificultades e interpretar gestos, posturas y expresiones de los estudiantes; además, procura hacer participar a los alumnos para aclararles las dudas sobre la derivada.
	Interacción entre discentes	▪ Utiliza en sus explicaciones diversos recursos argumentativos tales como la explicación magistral, algunos elementos visuales, gráficos de funciones y derivadas, y pautas para que el estudiante se implique y conecte con el tema. ▪ Afirma que desarrolla la clase para un grupo de estudiantes que ya sabe que están atendiendo; sin embargo, procura incluir a los demás alumnos conversando con ellos, facilitando y preguntándoles acerca del tema que están tratando. ▪ Procura fomentar el diálogo y la comunicación entre los estudiantes planteándoles algún problema para que lo resuelvan, debatan y discutan sus resultados.	▪ Se aprecia que en sus explicaciones de las derivadas sí hace uso de diferentes recursos argumentativos, siendo la explicación magistral y las gráficas lo que más emplea. ▪ Aunque conversa con los alumnos y les pregunta, no se evidencia que incluya a todos los estudiantes en sus clases, ya que el tiempo disponible es limitado. ▪ Aunque el docente es bastante accesible a los estudiantes, se muestra receptivo a las preguntas. No se evidencia que genere diálogo y comunicación fluida entre los alumnos.
	Autonomía	▪ Refiere que propicia momentos para que los estudiantes realicen la exploración, la formulación y la validación de sus conjeturas sobre la derivada, para ello los saca a la pizarra a resolver ejercicios. Además,	▪ Se observa que el docente saca a la pizarra a algunos estudiantes a que participen resolviendo algunos ejercicios del trabajo grupal y él mismo

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		cree fomentar la autonomía cuando les asigna un problema para que lo resuelvan y él va registrando y recogiendo las diferentes estrategias que ellos utilizan en sus procedimientos.	hace la validación. Sin embargo no se evidencia que propicie la autonomía en el aprendizaje sobre las derivadas.
	Evaluación formativa	▪ Sostiene que la interacción con los estudiantes es importantísima en el desarrollo de sus clases, dice que en la interacción es la parte fuerte del docente, en el cómo vamos, cómo los alumnos entienden las derivadas u otro tema, qué hay que corregir en el proceso. Todo ello le permite observar si los estudiantes están aprendiendo, o no, el tema matemático que viene enseñando.	▪ Se aprecia que en sus clases realiza trabajo en equipos donde se produce cierta interacción entre los estudiantes, también interactúa con ellos en determinados momentos, en talleres por ejemplo. Inferimos que eso le permite darse cuenta del aprendizaje de los alumnos sobre derivadas.
Mediacional	Recursos materiales	▪ Utiliza software matemático como Geogebra y Desmos cuando implementa sus clases de derivadas, ya que en su opinión permite que el alumno reafirme su aprendizaje mediante cálculos online y la visualización de las gráficas.	▪ Aunque en las clases observadas no se evidenció el uso de software matemático, deducimos que en algunas clases sí utiliza el Geogebra o Desmos para presentar las gráficas.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	▪ Señala que en ingeniería trabaja con aulas de entre 40 hasta 60 estudiantes, lo cual dice no le ha permitido ejecutar la enseñanza de las derivadas que pretende; en su experiencia ha visto que una cantidad intermedia de alumnos por aula, es muchísimo mejor. ▪ Considera que el aula y los equipos en ella sí ofrecen las condiciones adecuadas para desarrollar sus clases; sin embargo, opina que una distribución ecuánime de los alumnos en el aula mejoraría la implementación de la enseñanza. ▪ Sostiene que en la fase presencial de las clases dosifica la parte fuerte del tema matemático, dejando para la fase virtual alguna interacción	▪ Efectivamente, se aprecia que trabaja con aulas repletas de estudiantes de ingeniería, y que debido a ello, inferimos que no se abastece para atender a todos ellos como pretendería. ▪ Se observa que las aulas sí presentan los elementos y equipos multimedia adecuados para desarrollar el proceso de enseñanza; aunque, el espacio es reducido para el trabajo en equipos. ▪ En efecto, se evidencia que el docente trabaja los contenidos claves de las derivadas clases presenciales, y actividades de

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		complementaria, comentarios o interrogantes.	complemento en la fase virtual.
	Tiempo (de la enseñanza colectiva, de tutoría, tiempo de aprendizaje)	▪ Opina que en derivadas y sus aplicaciones hay partes importantes como el manejo de las reglas prácticas de derivación, cálculo de las derivadas con propiedades, entre otros; por lo que selecciona aquellos contenidos que considera relevantes para los estudiantes, les da mayor énfasis y jerarquía e invierte más tiempo en su análisis. ▪ Afirma que enfatiza e invierte mayor tiempo disponible para la clase en aquellos contenidos de derivadas que representan mayor dificultad para los estudiantes. Aunque si considera que no son útiles para temas futuros, entonces les disminuye la jerarquía en la resolución de los problemas.	▪ Apreciamos que implementa los contenidos de derivadas que son fundamentales para estudiantes de ingeniería, se detiene para hacer precisiones y énfasis en aquellas partes que por su experiencia considera importantes. ▪ Efectivamente, dedica más tiempo en practicar ejercicios de ciertos contenidos, más que de otros; y también, dedica más tiempo en resolver ejercicios de contenidos de derivadas que se conoce representan mayor dificultad para los estudiantes.
Emocional	Intereses y necesidades	▪ Respecto a las tareas de derivadas que propone, el docente señala que selecciona los problemas que son útiles para el momento de la clase, pero más apunta a lo que viene después. Considera que hay problemas clásicos de la derivada que los alumnos deben aprender, así como herramientas básicas de manejo de éstos. ▪ Acepta que le resulta muy difícil proponer situaciones que permitan a los estudiantes valorar la utilidad de la derivada en la vida cotidiana, siente que no tiene el marco o las herramientas para hacerlo. Es por ello que en sus clases se centra en explorar el concepto de la derivada, en entenderlo y practicarlo.	▪ Efectivamente, se aprecia que en sus clases trabaja con la separata de tareas que le entrega la coordinación de asignatura. Ésta contiene, en su mayoría, ejercicios algebraicos de derivadas. ▪ Apreciamos que el docente en sus clases opta por resolver en su gran mayoría ejercicios de tipo procedimental, de aplicación de fórmulas y para mecanización. No se aprecia que trabaje situaciones del contexto de la ingeniería en sus clases, lo cual justifica por regirse al sílabo.
	Actitudes	▪ Para implicar a los estudiantes en las actividades de derivadas que propone, forma equipos de trabajo y pone en cada grupo a alumnos líderes que sí tienen la vitalidad de resolver	▪ Observamos que algunas veces pide a los estudiantes agruparse y les encarga resolver una parte de la separata de ejercicios que

C I	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Emociones	problemas, para que direccionen a los demás y los fortalezcan en el trabajo de la derivada. ▪ En su experiencia docente ha observado que un grupo numeroso de alumnos sí cumplen con las tareas, son responsables y perseverantes con las actividades que les asigna, llegan temprano, insisten y preguntan continuamente; aunque dice que no ocurre con todos. ▪ Reconoce a aquellos alumnos que están pendientes de lo que hace, son los que siempre participan, pero si por allí interviene alguien de los que menos saben, trata de resaltar, valorizar y hacer hincapié en su aporte; aunque no ocurre de forma equitativa por falta de tiempo. ▪ Sostiene se preocupa por elevar la autoestima de sus estudiantes llegando a las clases tranquilo, sosegado y calmado, entonces proyecta esa tranquilidad en ellos y la reciben y plasman con naturalidad. De esa manera cree que los alumnos van a participar sin temor, ni rechazo, ni fobia hacia las derivadas.	todos manejan (común), una especie de talleres donde él va monitoreando el avance. ▪ Se aprecia que el docente les encarga a sus estudiantes que resuelvan ejercicios como tarea fuera del horario de clases, inferimos que es en el cumplimiento de éstas donde fomenta la responsabilidad en los estudiantes. ▪ Apreciamos que en sus clases saca a la pizarra a algunos estudiantes de manera voluntaria, aunque tampoco vemos que sea una participación equitativa. Se infiere que es por falta de tiempo. ▪ En efecto, observamos que en el desarrollo de sus clases se acerca a los estudiantes, conversa con ellos, es muy cordial, amable y respetuoso con ellos, y los anima a intentar desarrollar los ejercicios que les asigna.
Ecológica	Adaptación al currículo	▪ Afirma que los contenidos de derivadas que enseña, su implementación y evaluación, sí se corresponden con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería, dice que sí se está dando este engranaje por todo el bagaje que aparece en el proceso de enseñanza que conduce.	▪ Observamos que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que enseña, son coherentes con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería.
	Conexiones intra e inter-disciplinares	▪ Refiere que los conceptos de derivadas que implementa tienen conexión con contenidos matemáticos posteriores, así como con contenidos de otras asignaturas de ingeniería. Dice que todo en	▪ Apreciamos que en sus clases el profesor hace comentarios a los estudiantes acerca del uso de las derivadas en asignaturas posteriores de su carrea profesional.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		matemáticas está relacionado y va a ayudar y a plasmarse en las derivadas, luego todo este bagaje matemático va a servir muy bien para las integrales, y así encadenado todo como una malla en la estructura curricular en ingeniería.	Especialmente se refiere la temas futuros de matemáticas como integrales o ecuaciones diferenciales.
	Utilidad sociolaboral	▪ Cree que los contenidos de derivadas que imparte en sus clases sí están repercutiendo en los estudiantes de ingeniería para la inserción sociolaboral, en la medida que actualmente las matemáticas vienen siendo impulsadas fuertemente por el software.	▪ Podemos evidenciar que argumenta ante los estudiantes de ingeniería, que las derivadas les servirá para que resuelvan situaciones de su campo laboral; aunque no apreciamos que plantee situaciones contextualizadas en sus clases.
	Innovación didáctica	▪ En lo que respecta a las innovaciones, señala que siente que no ha desarrollado aún el aspecto de innovaciones basadas en su propia práctica reflexiva, aunque dice que sí hace cambios continuos en la forma de evaluar el aprendizaje de los alumnos y de presentar las derivadas con elementos en línea; también, realiza la actualización constante de los conceptos de derivada.	▪ Se observa que en sus clases hace uso de ciertos recursos tecnológicos y por su discurso inferimos que también trabaja con software matemático en otras clases de las derivadas. Además se aprecia que las presentaciones que proyecta en la pizarra este profesor, sí están actualizadas.

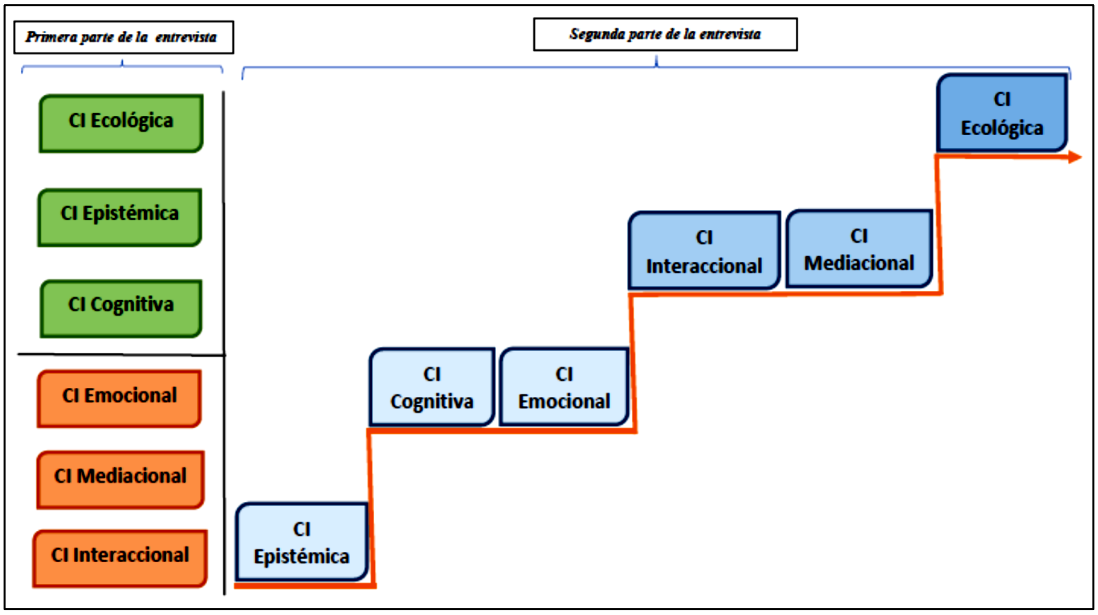
2.2. Conclusiones sobre los criterios que orientan la práctica del Docente D

Sobre la base de los resultados mostrados en la Tabla A.2 podemos inferir los criterios generales y principales que orientan la práctica de este profesor “D” cuando diseña e implementa sus clases de derivadas y sus aplicaciones para estudiantes de diversas carreras de ingeniería, así como inferir el peso que tienen estos criterios en su práctica docente como resultado de la triangulación realizada entre lo que dice y lo que se ha observado que hace en las aulas el mencionado docente (ver Figura A.2).

En la columna de la izquierda del esquema de la Figura A.2 se muestran, en la parte superior, los criterios de idoneidad didáctica que aparecen en las respuestas del profesor D, cuando se le formula la pregunta de cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica (ecológico, epistémico y cognitivo); mientras que en la parte inferior (emocional, mediacional e interaccional) se hallan los criterios de idoneidad (CI) que no menciona en su respuesta (primera parte de la entrevista).

Figura A.2

Esquema de criterios que guían la práctica didáctica del Docente "D"



Nota: Fuente propia de la investigación.

En la columna derecha de dicho esquema se ubican los criterios de idoneidad que emergen en sus respuestas a las preguntas más específicas relacionadas con alguno de los componentes de los CID (segunda parte de la entrevista). Tal como era esperable, teniendo en cuenta las preguntas formuladas, en esta columna aparecen los seis CID; ahora bien, no todos tienen la misma importancia para el profesor D al momento de reflexionar y justificar su práctica. Para representar el diferente peso que tiene cada criterio como guía de la práctica del profesor hemos utilizado el esquema de la escalera, siendo los escalones superiores los de mayor peso, en tanto que los criterios que están en la parte inferior tienen menor peso. La disposición en la escalera, además de indicar el menor o mayor peso, también pretende representar cómo algunos CI quedan supeditados por otros. El orden en el que aparecen los CI en la escalera es el resultado de la triangulación entre el discurso del docente y lo que se infiere de la observación de sus clases.

En su discurso inicial el profesor D explica que los criterios ecológico, epistémico y cognitivo son los que orientan su práctica docente. Ahora bien, cuando en la segunda parte de la entrevista se le hacen preguntas más específicas sobre aspectos epistémicos, concluimos que: 1) no comete errores de tipo matemático en el desarrollo de sus clases de derivadas, aunque acepta cometer otro tipo de errores tales como errores didácticos o de aplicación, 2) no aplica el rigor matemático en derivadas ya que se enfoca en la resolución de ejercicios, no demuestra teoremas, propiedades y tampoco elabora una estructura teórica formal, 3) presenta directamente las reglas de derivación, hace la parte mecánica y se limita a enfocar los temas matemáticos de una forma más instrumental, 4) debido a que se centra en el aspecto práctico, mecánico e intuitivo de la derivada, así como en la resolución de ejercicios en la mayor parte del tiempo, la modelización y argumentación quedan relegadas, 5) la gran mayoría de problemas que plantea son situaciones intramatemáticas y el resto son extramatemáticos. Además, considera que implementar las derivadas y sus aplicaciones depende también del sílabo de la asignatura, por lo que en su enseñanza se rige por el sílabo y plan de clases.

En consecuencia, podemos inferir que para el profesor D, al momento de orientar su práctica docente, los aspectos epistémicos no solamente se supeditan al criterio ecológico (regirse por el sílabo y plan de clases), sino que tienen un peso relativo en sus clases, ya que el enfoque que utiliza tiene una fuerte tendencia hacia la mecanización y la algebrización de los temas matemáticos.

Respecto del criterio cognitivo que ya había sido tenido en cuenta por este profesor en sus respuestas a las preguntas iniciales de la entrevista, vuelve a aparecer en la segunda parte de las preguntas específicas, por lo que concluimos que: 1) recupera directamente ciertos conocimientos previos de los estudiantes, de manera que le sirvan de empalme con el nuevo tema, 2) tiene en cuenta la diversidad de alumnos, la velocidad y los ritmos de aprendizaje, y la manera en cómo éstos llegan respecto a sus conocimientos, 3) los instrumentos de evaluación que aplica sí le informan del aprendizaje de los estudiantes, aunque la mayor evidencia la obtiene cuando interactúa con ellos, 4) las dificultades de los alumnos en el estudio de las derivadas están en el procedimiento, en la parte mecánica y práctica de los ejercicios, y que cuando las identifica, les da resúmenes de propiedades, ejercicios y problemas para que practiquen por su cuenta, 5) las tareas que propone son de una separata común para todos los grupos de estudiantes, la cual contiene ejercicios de algebrización y aplicación de reglas básicas de derivación, por lo que no hay alta demanda cognitiva ni procesos de generalización o argumentación.

En consecuencia, con base en la triangulación de lo observado en sus clases podemos inferir que el docente D asigna una mediano peso a los aspectos cognitivos, ya que el aprendizaje es fundamentalmente de enfoque tradicional (transmisión de conocimientos) donde no se trabajan procesos cognitivos relevantes; además, supedita este criterio al ecológico (regirse estrictamente por el sílabo).

En relación al criterio emocional, al cual el profesor en su respuesta inicial no lo había tomado en cuenta, sin embargo, en sus respuestas a la segunda parte de la entrevista (cuando se le hacen preguntas específicas sobre éste) se infiere que, efectivamente, ahora sí emerge o lo tiene en cuenta con un cierto peso, hecho que también se aprecia en la observación de sus clases. Podemos inferir que, si bien selecciona los problemas que son útiles para el momento de la clase y para los temas futuros, aunque dichas tareas siguen siendo ejercicios algorítmicos; le resulta muy difícil proponer situaciones para que los estudiantes valoren la utilidad de la derivada en la vida cotidiana, por lo que se centra en explorar el concepto de la derivada, en entenderlo y practicarlo; logra implicar a los estudiantes en las actividades de derivadas que propone mediante equipos de trabajo y pone en cada grupo a alumnos líderes para que ayuden a los demás en la resolución de los ejercicios; ha logrado que un grupo numeroso de alumnos sean responsables y perseverantes, lo cual lo corrobora en el cumplimiento de las actividades y tareas que les asigna; se preocupa por elevar la autoestima de sus estudiantes para que pierdan el miedo y la fobia por las matemáticas, aunque no fomenta la participación y argumentación de manera equitativa.

Por tanto, concluimos que todo ello lo hace dentro de un modelo de clase magistral y mecanicista, dándoles relativa importancia a los aspectos emocionales en su proceso de enseñanza, por lo que se infiere que el docente D supedita los aspectos afectivos al criterio ecológico (tener en cuenta temas futuros del currículo).

Con relación al criterio interaccional éste no había figurado en las respuestas iniciales del docente D, pero sí emerge en la segunda parte de la entrevista cuando se le formulan preguntas más específicas sobre aspectos interaccionales, donde se infiere que le asigna cierto peso e importancia en la implementación de sus clases. Así por ejemplo, considera que ha hecho una presentación adecuada del concepto de la derivada; hace participar a los alumnos para aclararles las dudas y dificultades de aprendizaje sobre la derivada, aunque la falta de tiempo le dice que tiene que continuar para cumplir con lo programado; utiliza en sus explicaciones diversos recursos argumentativos tales como elementos visuales y gráficos, aunque lo hace dentro de una explicación magistral; desarrolla las clases para un grupo de estudiantes que ya sabe que están atendiendo, por lo que no fomenta la inclusión; no se esfuerza por fomentar el diálogo y la comunicación de manera fluida entre los estudiantes y tampoco la autonomía; Asegura que la interacción de él con los estudiantes es importantísima en el desarrollo de sus clases, dice que en la interacción es la parte fuerte del docente, aunque se evidencia que la interacción entre estudiantes ocurre en escasos momentos.

Por lo antes mencionado, concluimos que el profesor D le asigna un relativo peso a los aspectos interaccionales en su práctica docente, y los supedita al criterio mediacional (falta de tiempo) y al ecológico (cumplir con lo programado).

Si bien, el criterio mediacional tampoco había sido tomado en cuenta por el profesor D al principio de la entrevista, cuando se le hacen preguntas específicas de aspectos de medios emerge y gana un importante peso dentro de su práctica docente, de sus respuestas podemos inferir que: utiliza recursos tecnológicos como software matemático (Geogebra y Desmos) cuando implementa sus clases de derivadas, ya que en su opinión permite que el alumno reafirme su aprendizaje; en su experiencia, el trabajar con aulas numerosas no le ha permitido ejecutar la enseñanza de las derivadas que pretende; la distribución de los estudiantes en el aula no es la más adecuada, y que una distribución ecuánime de los alumnos mejoraría su proceso de enseñanza; selecciona los contenidos que considera relevantes para los estudiantes, les da mayor énfasis, jerarquía e invierte más tiempo en su análisis, así como también invierte tiempo en aquellos contenidos que son más difíciles para los estudiantes, de acuerdo con que si estos contenidos les va a servir, o no, en temas futuros.

En consecuencia, concluimos que para este profesor D los aspectos de medios son de gran importancia en su práctica, aunque quedan relativamente supeditados al criterio ecológico (utilidad de contenidos dentro del currículo).

En tanto que el criterio ecológico aparece en su respuesta inicial y, de la triangulación realizada, evidenciamos que tiene un papel fundamental para orientar la práctica del docente D, la cual justifica, sobre todo, por el cumplimiento de la totalidad de contenidos programados en el sílabo del curso y por seguir el plan de clase, aunque también hace reflexiones en clases en las que la justifica por el hecho de tener en cuenta la futura profesión de los estudiantes de ingeniería; en la innovación en su práctica docente señala que ha tenido ciertas dificultades pero sí incorpora recursos tecnológicos para la enseñanza de las derivadas y otros temas matemáticos; también, en su discurso enfatiza a los estudiantes que las derivadas constituyen un bagaje matemático que va a servir muy bien para las integrales, y así encadenado todo como una malla en la estructura curricular de ingeniería.

Por lo que, de la triangulación entre lo dicho en la entrevista y lo observado en sus clases, se infiere que este criterio ecológico es el que mayor peso tiene para orientar su práctica docente y al cual se supeditan los demás CI (epistémico, emocional, cognitivo, interaccional y mediacional), aunque en nuestra apreciación el criterio de medios y el interaccional están sólo un peldaño por debajo del ecológico.

Por otra parte, también en este caso, del criterio ecológico tenemos que destacar que el componente "Utilidad sociolaboral" se tiene en cuenta para justificar una presentación del tema de las derivadas abiertamente enfocado en la mecanización, las clases magistrales y la transmisión de los conocimientos, pero no para incorporar procesos de modelización, argumentación y resolución de problemas extramatemáticos. Es decir, se trata de un criterio que incide disminuyendo la idoneidad epistémica (reduce la riqueza de procesos), cuando podría afectar aumentándola al dar un papel fundamental a los procesos relevantes de la actividad matemática.

3. Docente E

3.1. Triangulación entre respuestas de la entrevista y lo observado en clase

Se han analizado y sintetizado los criterios que este profesor declara seguir en la entrevista docente, cabe mencionar que tales criterios han sido triangulados con las observaciones de dos de sus clases videograbadas en aula, donde explicó las derivadas y sus aplicaciones. A continuación solamente presentamos el análisis de la triangulación (ver Tabla A.3), puesto que las conclusiones sobre los criterios que guían su práctica docente, así como el esquema, ya fueron incluidas en el Artículo 3 (ver Capítulo 6).

Tabla A.3

Análisis de las respuestas dadas por el Docente "E" en la entrevista y triangulación con lo observado en clase.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Preguntas generales	Formación inicial	▪ Ha obtenido Licenciatura en Matemática Pura y Licenciatura en Educación; Maestría en Evaluación y Acreditación de la Calidad Universitaria y Maestría en Pedagogía de la Matemática; posee experiencia docente en educación secundaria, bachillerato internacional y en universidad privada; además, tiene diplomados y cursos varios de formación continua.	▪ Asumimos que sí está en posesión de los grados y títulos académicos que señala, además de ser un profesor con amplia experiencia y estar en permanente actualización.
	Criterios al diseñar e implementar clases	▪ La misión, visión y el perfil institucional; la coherencia con lo que la institución requiere; la perspectiva y expectativas de los estudiantes; los saberes previos de los alumnos para construir el conocimiento; y, la tecnología y redes sociales como fuentes de información.	▪ Se evidencia que sí tiene en cuenta en cierta manera los criterios que afirma seguir (saberes previos de los alumnos; los lineamientos institucionales; las directrices curriculares; las expectativas de los estudiantes; y la tecnología y redes sociales como fuentes de información).
	Modelo de docente	▪ Se define como un docente que desde el punto de vista de la didáctica trata de rescatar algo de la perspectiva magistral, dialógica, constructivista y conductista; y según la perspectiva matemática, trata de explicar unas matemáticas combinadas entre cercanas a la realidad del alumno, mecanicistas y practicistas.	▪ En efecto, este profesor desarrolla sus clases dentro de un enfoque magistral, conductista, con elementos dialógicos y de transmisión del conocimiento, no se evidencia la parte constructivista; así como también, implementa unas matemáticas entre mecanicistas y realistas.
Epistémica	Errores	▪ No comete errores matemáticos en el desarrollo de sus clases de derivadas, aunque sí acepta cometer otro tipo de errores, ya sean por descuido, distracción u omisión; dice que ha dejado de lado la rigurosidad y la formalidad por priorizar el interés del alumno. ▪ En sus clases de derivadas procura que los alumnos intuyan, y para	▪ En efecto, no se observa que cometa algún error matemático en sus explicaciones sobre las derivadas; tampoco observamos que sea muy riguroso en los procedimientos matemáticos de la derivada. ▪ Observamos que en todas sus clases sobre derivadas siempre

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Ambigüedades	lograrlo formula preguntas, presenta animaciones, les hace que observen y busquen en la web. Considera muy importante la intuición, de manera que dice que sin intuición no es matemática.	hace uso de la intuición relacionando el tema matemático con lo cotidiano de los alumnos; inferimos que lo hace en aras de lograr que los alumnos entiendan.
		▪ En sus explicaciones de las derivadas proporciona sólo una pista de demostración o deducciones sencillas, ya que tiene que adecuarse a los intereses de los estudiantes; luego les presenta las reglas básicas de derivación. En su proceso de instrucción enfoca el tema de derivadas de una manera más instrumental.	▪ Efectivamente, se aprecia que presenta directamente el listado de reglas básicas de derivación, por grupos de reglas. Además, vemos que aborda los temas matemáticos de forma instrumental centrado en la práctica de ejercicios.
	Riqueza de procesos	▪ De las situaciones que plantea en clases la mitad son ejercicios y la otra son problemas. Con respecto a los procesos relevantes de la actividad matemática, considera que trabaja la resolución de problemas, la argumentación y a veces modelización. La demostración no la trabaja por falta de saberes previos y deficiencias de los alumnos, por falta de tiempo y por cumplir con el sílabo.	▪ Se observa que el docente plantea a sus alumnos no solo ejercicios de derivadas, sino también problemas contextualizados; apreciamos que trabaja la resolución de problemas, la argumentación y casos de modelización, sin embargo no se observa que trabaje la demostración.
		▪ Afirma que define la derivada como pendiente de una recta tangente a la curva, como velocidad instantánea y como razón de cambio relacionada. Además, considera fundamental presentar diferentes significados de la derivada, puesto que el alumno debe saber no sólo el cálculo, sino también, interpretar los gráficos y las curvas en el contexto económico.	▪ En efecto, empieza definiendo la derivada como pendiente de recta tangente a la curva, luego la define como razón de cambio; también trabaja los significados geométrico y el analítico por límite de las derivadas, para aplicarlos en contextos como el económico y los negocios.
		▪ Sostiene que un alumno en clase y en evaluación de derivadas debe estar apto para resolver diferentes situaciones-problema, por ello en sus clases les propone un abanico de posibilidades (problemas).	▪ En efecto, apreciamos que en sus clases presenta a los alumnos una variedad de ejercicios y problemas de derivadas contextualizados a la vida cotidiana.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Muestra representativa de la pluralidad de significados del objeto matemático a enseñar	▪ Refiere que la mayoría de problemas que propone son contextualizados acorde con la coyuntura actual, la tecnología y las redes sociales; cuando los elabora escoge una variedad de contextos y presenta una diversidad de problemas en aras de desarrollar la competencia matemática en los estudiantes. ▪ En el desarrollo de sus clases trata de transitar entre un modo de expresión y otro (verbal, gestual, gráfico, simbólico), luego de la interpretación viene la traducción para colocar todo en símbolos. Considera que es importante que el alumno maneje diferentes formas de representación de la derivada, que entienda su concepto en el sentido algebraico y en su representación gráfica. ▪ Manifiesta que en el proceso de instrucción que implementa está condicionado por el sílabo en cuanto a los contenidos de derivadas y sus aplicaciones, pero en la forma de enseñar tiene libertad y pone su cuota de experiencia. Además, opina que el sílabo se debe modificar y agregarle el contexto tecnológico y redes sociales a las situaciones-problema.	▪ Observamos que se esfuerza en proponer ejercicios y formular problemas contextualizados a la especialidad de los estudiantes y al acontecer cotidiano, que usa las redes sociales y hace que ellos utilicen la web para indagar sobre su resolución. ▪ En efecto, se observa que hace uso de diferentes modos de expresión en sus explicaciones, magistral, metáforas, gráfico, gestual, verbal, simbólico e historias de las matemáticas. También presenta la representación analítica y la geométrica de la derivada, pero no la forma tabular. ▪ Observamos que su proceso de enseñanza de las derivadas lo hace siguiendo la programación de contenidos del sílabo, sin embargo notamos que también pone su estilo personal y aporte. Además, se aprecia que el docente trabaja bastante con información de redes sociales.
Cognitiva	Conocimientos previos	▪ Afirma que para la enseñanza de las derivadas y sus aplicaciones los conocimientos previos de los estudiantes son muy importantes, considera que sin estos saberes previos no podría desarrollar sus clases como pretende. ▪ Manifiesta que cuando los alumnos no tienen los saberes previos necesarios para el estudio de las derivadas, lo que hace es asesorar y darles toda posibilidad de que lo contacten hasta por redes sociales.	▪ Se observa que recupera los conocimientos previos de los estudiantes al inicio de sus clases. Aunque no hace una evaluación diagnóstica, les recuerda ciertos saberes que van a necesitar para el estudio de las derivadas. ▪ Se evidencia que cuando identifica que los alumnos carecen de ciertos saberes previos, hace un paréntesis y les hace recordar, además de reiterarles que asistan a las

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Adaptación curricular a las diferencias individuales	Además, los deriva a las asesorías fuera del horario de clase.	asesorías fuera del horario de clases.
		▪ Considera que la distancia entre lo que los estudiantes ya conocen y los nuevos contenidos de derivadas que pretende implementar, sí es alcanzable. Aunque acepta que en sus clases no logra que todos los alumnos aprendan.	▪ Apreciamos que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que presenta en sus clases están en la zona de desarrollo próximo (ZDP) de los alumnos, además son accesibles para ellos.
		▪ Sostiene que tiene en cuenta la diversidad de los alumnos en sus clases de derivadas, para complementar les proporciona información adicional, les sugiere sitios webs, vídeos de youtube.	▪ Observamos que se esfuerza por atender a la diversidad de estudiantes, a los diferentes ritmos de aprendizaje, y que complementa brindándoles materiales de estudio.
	Aprendizaje	▪ Señala que puede darse cuenta de que los alumnos hayan aprendido, o no, sobre las derivadas y sus aplicaciones a través de la pruebas escritas, mediante el factor emocional, así como observando el avance y el desempeño en aula de éstos en cada clase.	▪ En efecto, se evidencia que el docente a medida que va desarrollando sus clases, va asignándoles por grupos ciertas actividades puntuales; luego pide que le presenten, hace la revisión y la socialización con toda el aula.
		▪ Refiere que los instrumentos de evaluación que viene aplicando son pruebas de desarrollo (examen parcial, examen final y prácticas calificadas) y cuyos resultados sí le informan de las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, aunque dice que no del todo.	▪ Efectivamente, se aprecia que las evaluaciones que aplica a sus alumnos y que tienen mayor peso en el promedio del curso, son pruebas sumativas de desarrollo, de las que inferimos recaba información del proceso de aprendizaje.
	Alta demanda cognitiva	▪ Sostiene que cuando detecta dudas y dificultades de aprendizaje de sus alumnos y observa que éstos no han aprendido el tema de derivadas que está enseñando, lo que hace es: siempre los orienta, les pide que asistan a las asesorías fuera del horarios de clases, les sugiere vídeos por redes sociales y tutoriales.	▪ Se observa que cuando identifica las dudas y dificultades de aprendizaje sobre las derivadas, se esfuerza por despejarlas, se muestra amable y los atiende; además les pide que revisen materiales en la web fuera del horario de clases.
		▪ Afirma que las tareas de derivadas y sus aplicaciones que propone a los estudiantes tanto durante la clase como fuera del horario de clases, las	▪ Observamos que las tareas que propone son diversas y se ve el esfuerzo que hace por elaborar y formular ejercicios y

<table>
<tr><th>CI</th><th>COMPONENTE</th><th>RESPUESTAS DOCENTE</th><th>OBSERVADO EN CLASE</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>diseña con la intención de activar en los estudiantes los procesos cognitivos relevantes; aunque reconoce que no siempre lo logra, entonces va corrigiendo y haciendo ajustes en el proceso.</td><td>problemas de derivadas que impliquen cierta demanda cognitiva, y un poco de los procesos de generalización, argumentación y metacognición.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Interaccional</td><td rowspan="2">Interacción docente-discente</td><td>▪ Afirma que en sus clases se esfuerza por hacer una presentación clara y ordenada de las definiciones y conceptos de la derivada y de las reglas de derivación; también, para que el alumno sepa qué herramienta le conviene aplicar en cada situación y sepa interpretar los resultados obtenidos.</td><td>▪ Se observa que en sus presentaciones de derivadas guarda cierto orden lógico, claridad y secuenciación, tanto en los conceptos como en los procedimientos en la resolución de ejercicios. Se esfuerza para que sus explicaciones sean entendibles a los estudiantes.</td></tr>
<tr><td>▪ Opina que la interacción con los alumnos es fundamental ya que le permite identificar las dudas y dificultades que éstos tienen sobre las derivadas, y de esa manera evita que estas dudas se magnifiquen. Para superar estas dificultades de aprendizaje lo que hace es, se acerca a los alumnos, formula preguntas y repreguntas, y les hace ver en qué se equivocaron.</td><td>▪ Observamos que el docente interactúa constantemente con los estudiantes formulándoles preguntas, aclarando las dudas. Además, les asigna que trabajen y le presenten dentro de la clase pequeñas tareas, y con el resultado hace la retroalimentación y les señala los errores que han cometido en sus resoluciones.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Interacción entre discentes</td><td>▪ Utiliza diversos recursos argumentativos para captar la atención de los estudiantes: metáforas, método socrático, discrepancia sobre la invención del cálculo. Además, se preocupa por incluir a la gran mayoría en sus clases, va hasta sus asientos, conversa sobre tal problema y los involucra, aunque dice que no lo logra con todos.</td><td>▪ Se observa que en sus explicaciones de las derivadas sí hace uso de diferentes recursos argumentativos tales como historias de la invención del cálculo, explicación magistral gráficas y metáforas. También se esfuerza por incluir a todos los alumnos en sus clases.</td></tr>
<tr><td>▪ Procura generar condiciones para que el diálogo y la comunicación fluya entre los estudiantes en el aula de clases, en especial cuando forma equipos para que trabajen las actividades matemáticas.</td><td>▪ Apreciamos que forma equipos de trabajo y les pide que resuelvan algún ejercicio y discutan su procedimiento. Inferimos que es ahí donde se genera la comunicación.</td></tr>
</table>

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Autonomía	▪ Propicia momentos para que los alumnos hagan la exploración, la formulación y la validación de sus conjeturas sobre las derivadas; y para lograrlo saca a los alumnos a la pizarra a que resuelvan ejercicios y muestren sus procedimientos, y con todo el grupo van validando sus desarrollos. ▪ Considera que fomenta la autonomía cuando luego de explicar la teoría sobre las derivadas, forma grupos o parejas de trabajo, les asigna un problema para que resuelvan y va monitoreando el avance.	▪ Observamos que cuando forma equipos de trabajo, les asigna un tiempo determinado para que resuelvan en grupo, luego le presenten sus resultados y expliquen a la clase sus procedimientos en la pizarra, entonces se produce la validación de los resultados. ▪ Se observa que en los equipos de trabajo que forma en sus clases es donde hay momentos para el aprendizaje autónomo de los estudiantes.
	Evaluación formativa	▪ Afirma que la interacción con los estudiantes es fundamental en el desarrollo de sus clases. Es de la opinión que el rol educativo es social y por tanto la interacción le permite ver si éstos han comprendido lo que ha enseñado sobre las derivadas.	▪ Se aprecia interacción constante con los alumnos en el desarrollo de sus clases, donde él va monitoreando el avance. Inferimos que eso le permite darse cuenta del aprendizaje de las derivadas.
Mediacional	Recursos materiales	▪ Utiliza recursos tecnológicos como el Wolfram, Symbolab, Geogebra, emuladores de calculadora y el Wimplot, ya que le permiten mostrar paso a paso y corroborar las derivadas. A veces usa material concreto y mapas mentales para el concepto de derivada.	▪ Se observa que hace uso de diversos recursos tecnológicos en el desarrollo de sus clases de derivadas como el software matemático Symbolab y otros para presentar las gráficas y los procedimientos.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	▪ En su opinión, trabajar con aulas de 40 estudiantes no es lo ideal para la enseñanza de las derivadas, dice que lo ideal sería 20 alumnos por aula para poder monitorear y atenderlos adecuadamente. ▪ Considera que la infraestructura, el aula, sus elementos, los equipos multimedia y la distribución de los estudiantes en ella, sí son adecuados para la ejecución del proceso de enseñanza de la derivada que implementa para ingeniería.	▪ Observamos que trabaja con aulas llenas de estudiantes de ingeniería, por lo que inferimos que le resulta complicado ejecutar las clases como pretendería. ▪ Se evidencia que las aulas sí presentan los elementos y equipos multimedia adecuados para desarrollar el proceso de enseñanza, además los espacios son amplios y están acondicionados para el bienestar de los alumnos.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Tiempo (de la enseñanza colectiva, de tutoría, tiempo de aprendizaje)	▪ Sostiene que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones los trabaja netamente en la fase presencial; dice que para la fase virtual, el campus virtual funciona como un repositorio de recursos, además usa las redes sociales para desarrollar cosas complementarias. ▪ Afirma que invierte tiempo disponible para sus clases en lo más importante de las derivadas, lo que él considera que es relevante para los estudiantes, desde la definición de derivada como un límite hasta las aplicaciones, pero básicas sin mucha profundidad. ▪ Refiere también que invierte un poco más de tiempo en explicar aquellos contenidos de derivadas y sus aplicaciones que representan mayor dificultad para los estudiantes, sobre todo cuando la dificultad es algo colectivo del grupo.	▪ En efecto, apreciamos que el docente trabaja los contenidos claves de las derivadas en clases presenciales, y las actividades complementarias en la fase virtual y a través de las redes sociales. ▪ Se observa que implementa los contenidos de derivadas que son fundamentales para estudiantes de ingeniería, enfatiza en aquellas partes que son importantes. Sin embargo no se aprecia mayor grado de profundidad. ▪ En efecto, vemos que invierte tiempo en explicar ciertos contenidos de las derivadas y sus aplicaciones, como la regla de la cadena, que sabemos representan mayor dificultad para los estudiantes.
Emocional	Intereses y necesidades	▪ Respecto a las tareas que propone, el docente señala que está atento a los sucesos sociales del entorno y a las novedades que trae la tecnología y las redes sociales, para incluirlas como contexto de los problemas de derivadas, de tal manera que dichas tareas sean de interés para los estudiantes. ▪ En sus clases, procura proponer situaciones de derivadas contextualizadas al entorno de los estudiantes de ingeniería y acorde a los intereses de éstos, de manera que puedan valorar la utilidad de las derivadas en la vida cotidiana y en su ámbito profesional.	▪ Efectivamente, se aprecia que en sus clases propone tareas que él mismo elabora, las cuales contienen ejercicios para aplicar reglas de derivación y también problemas contextualizados con hechos cotidianos y redes sociales. ▪ Observamos que el docente en sus clases propone y resuelve no solamente ejercicios de derivadas, sino que también problemas contextualizados a la economía y los negocios.
	Actitudes	▪ Para implicar a los estudiantes en las actividades matemáticas que les propone, lo que hace es darles confianza y animarlos, les dice que sí	▪ Se observa que el profesor constantemente está al pendiente del avance de los estudiantes, de si estos están aprendiendo o tienen dudas en su aprendizaje de las

C I	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		pueden lograr resolver las situaciones de derivación, los motiva y empuja a intentarlo.	derivadas, los motiva y se muestra muy accesible.
		▪ En sus clases de derivadas y sus aplicaciones intenta prender esa chispa o interés desde el principio de la asignatura, para que los alumnos se involucren en las actividades matemáticas con responsabilidad y perseverancia.	▪ Apreciamos que asigna a los estudiantes responsabilidades, los compromete a que le cumplan y le presenten pequeñas actividades, y ahí se aprecia la perseverancia de ellos; además, asigna actividades para fuera de clase.
	Emociones	▪ Reconoce que en sus clases tiene la intención de involucrar a todos los estudiantes para que participen saliendo a la pizarra y argumenten sus procedimientos de manera equitativa, o participen desde sus lugares, opinen e intervengan.	▪ Se observa que en sus clases luego del trabajo grupal saca a la pizarra a un alumno a explicar sus procedimientos, luego él va corrigiendo y validando su resolución; aunque no ocurre de manera equitativa por falta de tiempo.
		▪ Opina que los alumnos ya vienen con miedo, fobia, temores y prejuicios hacia las matemáticas desde casa y la familia, por lo que en el aula tiene que luchar contra eso, darles confianza para que intervengan y participen, puesto que sostiene que esa es su labor como docente, ayudar a levantar el autoestima de los estudiantes.	▪ Efectivamente, vemos que el profesor en sus clases se esfuerza para darles confianza a los estudiantes, es muy cordial, amable y respetuoso con ellos, los conmina a intentar resolver las tareas o ejercicios que les asigna y les da la responsabilidad de participar en la clase.
Ecológica	Adaptación al currículo	▪ Afirma que los contenidos de derivadas que enseña, su implementación y evaluación, sí van de acuerdo o se corresponden con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería, en líneas generales, dice que está todo coherente.	▪ Observamos que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que implementa, así como la evaluación de éstos, sí son coherentes con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería.
	Conexiones intra e inter-disciplinares	▪ Sostiene que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que implementa, sí tienen cierta implicancia y vínculo con cursos avanzados de ingeniería y con asignaturas posteriores de matemáticas. Además de conexiones	▪ Se aprecia que en sus clases el profesor hace comentarios a los estudiantes sobre la aplicación de las derivadas en asignaturas futuras de su carrera, así como en los contextos de la Economía, los

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		con la Física, con la Economía, con los modelos econométricos y otros.	Negocios, la Física, y vínculo con modelos econométricos.
	Utilidad sociolaboral	▪ Es de la opinión que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que imparte en sus clases sí serán útiles para los futuros ingenieros y están repercutiendo en los estudiantes de ingeniería para la inserción sociolaboral, en la medida que se utilice el poder interpretativo de los gráficos, los significados de los fenómenos y de ciertas situaciones laborales.	▪ Podemos evidenciar que argumenta ante los estudiantes de ingeniería, que las derivadas y sus aplicaciones que enseña les servirá para que resuelvan situaciones de su campo laboral, para que interpreten gráficas y curvas económicas y de negocios. Además, formula y plantea situaciones contextualizadas a la especialidad de estos.
	Innovación didáctica	▪ En lo que respecta a las innovaciones, señala que se involucra con los estudiantes y procura entrar en su mundo del manejo de los recursos tecnológicos y las redes sociales, adecúa los contenidos de las derivadas a los intereses de los alumnos. Aunque reconoce que la evaluación es la más débil en su proceso de instrucción, dice que es la pata coja de la mesa, ya que no se aplica como se debería.	▪ Observamos que en sus clases hace uso de diversos recursos tecnológicos como software matemático, páginas web y las redes sociales como el WhatsApp, para el intercambio fluido de las resoluciones de los grupos de trabajo. Sobre la evaluación, se observa que tiene que acogerse a aplicar los exámenes que estipula el sílabo del curso.

4. Docente G

4.1. Triangulación entre respuestas de la entrevista y lo observado en clase

Para el caso del profesor G, se han analizado y sintetizado los criterios didácticos que declara (en la entrevista docente) seguir cuando diseña e implementa sus sesiones de clase, es preciso señalar que tales criterios han sido triangulados con las observaciones realizadas en tres de sus clases videograbadas en aula, donde explicó parte del tópico de derivadas y sus aplicaciones (ver Tabla A.4).

Tabla A.4

Análisis de las respuestas dadas por el Docente "G" en la entrevista y triangulación con lo observado en clase.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Preguntas generales	Formación inicial	▪ Ha obtenido el grado de Bachiller en Matemática Pura, Maestría en Matemática Pura, Maestría en Docencia Universitaria y Doctorando en Educación; cuenta con experiencia docente de matemáticas en secundaria, en academias preuniversitarias y en universidad privada; ha realizado cursos cortos de actualización y formación continua.	▪ Asumimos que sí está en posesión de los grados y títulos académicos que señala, además de ser un profesor con amplia experiencia y estar en constante actualización.
	Criterios al diseñar e implementar clases	▪ El perfeccionamiento del material para el dictado de clases; Proporcionar toda la teoría posible del tema matemático al alumno; la secuenciación y gradualidad del tema matemático; un enfoque con metodología y didáctica para que entienda el estudiante.	▪ Se evidencia que sí tiene en cuenta en cierta manera los criterios que afirma seguir (perfeccionar el material de clases; proporcionar toda la teoría al alumno; secuenciación y gradualidad de los temas; un enfoque con metodología entendible para el estudiante)
	Modelo de docente	▪ Se define como un docente magistral, ya que trata de hacer clases magistrales con autocontenido por falta de tiempo; y desde la perspectiva matemática se considera en parte formalista y en parte mecanicista, ya que se interesa más por la práctica de los ejercicios del tema matemático.	▪ En efecto, se observa que ejecuta clases magistrales, tradicionales de transmisión del conocimiento. Además enseña unas matemáticas de tipo mecanicistas puesto que se centra en la práctica de ejercicios rutinarios.
Epistémica	Errores	▪ Afirma que en el desarrollo de sus clases comete errores pero no de tipo matemático, sino que son errores involuntarios, tipográficos e insignificantes. Dice que en la teoría sería fatal equivocarse; además, considera que en sus clases es riguroso en el sentido de dejar claro la noción de lo que hay detrás de la derivada. ▪ Opina que asigna cierta importancia a la intuición en sus clases de	▪ Se observa que no comete errores de naturaleza matemática en sus clases de derivadas y sus aplicaciones que fueron videograbadas. Además, notamos que sí es riguroso en el desarrollo de los temas matemáticos. ▪ Efectivamente, se aprecia que utiliza la intuición en todas sus clases para relacionar las

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Ambigüedades	derivadas y sus aplicaciones para definir un concepto, así por ejemplo, el de recta tangente; también cuando plantea funciones difíciles de construir, recurre a la idea intuitiva para que los estudiantes puedan captar los conceptos. ▪ En sus clases presenta directamente las fórmulas y reglas básicas de derivación, y dice a sus alumnos que éstas se cumplen y que hay que aplicarlas como tal. Considera importante la demostración pero no la hace por falta de tiempo y por cumplir con la sumilla del sílabo, por lo que enfoca los temas matemáticos de manera instrumental.	derivadas con aspectos que sean del entorno inmediato o cotidianos para los estudiantes de ingeniería. ▪ En efecto, observamos que el profesor enfoca los temas matemáticos de una forma más instrumental, sin hacer ninguna demostración de las derivadas; y más bien, entrega directamente el listado de reglas básicas de derivación, las propiedades y las fórmulas.
	Riqueza de procesos	▪ Afirma que en su proceso de instrucción desarrolla, en su mayoría, ejercicios de derivadas y sus aplicaciones; no enfatiza en resolver situaciones puesto que considera que trabajar la modelización le quitaría mucho tiempo del que dispone para las clases. ▪ Sostiene que en sus clases trabaja algunos procesos relevantes de la actividad matemática tales como la argumentación, la resolución de problemas de derivadas, la matematización; aunque dice que no trabaja la demostración, por el hecho de no está contemplada en el sílabo de la asignatura para ingeniería. ▪ Menciona que en el desarrollo de sus clases define la derivada como pendiente de una recta tangente a la curva y también como velocidad instantánea. Opina que es importante enseñar diversos significados de la derivada como el geométrico, la razón de cambio instantáneo y la representación como un límite.	▪ Efectivamente, se observa que enfatiza en la resolución algebraica y algorítmica de ejercicios de derivadas para aplicación de reglas y fórmulas; además no se aprecia que plantee situaciones-problema de modelización ▪ Observamos que en sus clases hay carencia de procesos matemáticos relevantes, no se aprecia la modelización, argumentación, la demostración, tampoco la resolución de problemas extramatemáticos. Lo que se observa es el énfasis en la mecanización y la algebrización. ▪ En efecto, vemos que define la derivada como pendiente de una recta tangente, y luego la definición como velocidad instantánea. Sobre los diversos significados de la derivada, apreciamos que trabaja el significado geométrico y el algebraico.

<table>
<tr><th>CI</th><th>COMPONENTE</th><th>RESPUESTAS DOCENTE</th><th>OBSERVADO EN CLASE</th></tr>
<tr><td></td><td>Muestra representativa de la pluralidad de significados del objeto matemático a enseñar</td><td>

Afirma que en sus clases trabaja con los problemas de la separata de tareas que le provee la coordinación de asignatura, y complementa las tareas con problemas que él propone; por lo que considera que sí hay una variedad de ejercicios y de todos los temas matemáticos.
Señala que la mayoría de ejercicios de derivadas y sus aplicaciones que trabaja son de tipo intramatemático, y de los escasos problemas extramatemáticos que presenta, son del contexto de la Física. Además, considera que sí aplica una diversidad de problemas para desarrollar la competencia matemática en los estudiantes.
Sostiene que al momento de implementar sus clases utiliza diferentes modos de expresión y representación de la derivada, tales como el modo gráfico, gestual, verbal; dice que de lo contrario, el estudiante no vería lo que hay detrás de los conceptos.
Considera que es importante presentar a los estudiantes las distintas formas de representación de la derivada; ya sea la razón de cambio instantánea (RCI) y la pendiente de recta tangente, para que los alumnos vean que hay correlación entre estas representaciones.
Afirma que se rige por el sílabo para el desarrollo de los contenidos de derivadas; aunque sobre la forma de enseñarlos, trata de ajustar el material de estudio para hacerlo más didáctico. En su opinión, el sílabo de derivadas es adecuado para los estudiantes de ingeniería, dice que no hay que agregar ni quitar nada.

</td><td>

Observamos que el docente trabaja con la guía de ejercicios común donde presenta una diversidad de situaciones de cada subtema, pero que son ejercicios de tipo procedimental para aplicar reglas y fórmulas.
En efecto, en las clases observadas vemos que en la mayor parte del tiempo trabaja ejercicios algorítmicos de derivadas de tipo intramatemático. No se ve que presente problemas extramatemáticos para desarrollar la competencia matemática en los alumnos.
Apreciamos que en sus explicaciones de las derivadas y sus aplicaciones sí usa diversos modos de expresión, así como su conversión entre ellos, siendo los más utilizados el modo gráfico, el gestual, el verbal y el simbólico.
En efecto, se observa que en sus clases utiliza por lo menos dos formas de representación de la derivada, la forma analítica por límite y la representación geométrica como pendiente de recta tangente.
Efectivamente, observamos que el docente sigue al pie de la letra la programación de contenidos estipulados en el sílabo y en los planes de clase. Vemos también que se esfuerza por mostrar sus proyecciones con ciertos ajustes donde pone su aporte personal.

</td></tr>
</table>

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Cognitiva	Conocimientos previos	▪ Señala que no suele tener en cuenta los saberes previos de los estudiantes para enseñar derivadas o sus aplicaciones, puesto que asume que los temas anteriores a las derivadas ya se dieron y por tanto los alumnos debieron haberlo estudiado.	▪ En efecto, se observa que el profesor no recupera los conocimientos previos de los estudiantes cuando desarrolla sus clases de derivadas o sus aplicaciones.
	Adaptación curricular a las diferencias individuales	▪ Cuando identifica que sus alumnos no poseen los conocimientos previos necesarios para el estudio de las derivadas, entonces lo que hace es explicar un par de ejercicios de límites o uno de derivadas pero bien detallado; dice que eso también va a estar en función del tiempo disponible según como vaya avanzando en el curso.	▪ Observamos que el docente dedica un tiempo muy corto para hacer precisiones muy puntuales, cuando los estudiantes le hacen preguntas relacionadas con los saberes previos a las derivadas.
		▪ Considera que la distancia entre los conocimientos que poseen los alumnos y los contenidos de derivadas que enseña, sí es alcanzable.	▪ Se aprecia que presenta contenidos de derivadas que están en la zona de desarrollo próximo (ZDP) de los alumnos, y que sí son accesibles para los estudiantes.
		▪ Sostiene que en el aula hace clases magistrales de autocontenido; en el caso de que hubieran alumnos que necesitan de refuerzo y ampliación de los temas que viene enseñando, él no dedica tiempo a retroalimentar, sino que los deriva a los talleres que brinda la universidad fuera del horario de clases.	▪ Efectivamente, apreciamos que el docente desarrolla clases netamente magistrales y de transmisión del conocimiento. No se observa que se esfuerce por realizar ampliación o refuerzo de los temas que ha enseñado dentro del horario de sus clases.
	Aprendizaje	▪ Señala que en la implementación de sus clases la manera de averiguar si sus alumnos han aprendido lo que ha enseñado de derivadas, es a través de las evaluaciones cuantitativas y también, mediante preguntas y repreguntas al finalizar las clases.	▪ En efecto, se evidencia que aplica evaluaciones cuantitativas; además, vemos que al finalizar sus clases formula a los estudiantes preguntas y repreguntas del tema que ha enseñado.
		▪ Los instrumentos de evaluación que viene aplicando son pruebas de desarrollo (exámenes parciales, finales y prácticas calificadas). Asegura que las evidencias recogidas en dichos instrumentos no le	▪ Efectivamente, podemos apreciar que el profesor aplica todas las pruebas objetivas contempladas en el sílabo, se trata de evaluaciones sumativas y comunes.

C I	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Alta demanda cognitiva	permiten ver las dificultades de aprendizaje de los alumnos, y por ello prefiere otra forma como los trabajos de grupo en el aula. ▪ Cuando constata que los alumnos no están aprendiendo las derivadas o sus aplicaciones que está enseñando, entonces lo que hace es: retrocede un poco, hace un repaso y retoma el tema; además, dice que recomienda revisar material adicional a los estudiantes. ▪ Sostiene que en su proceso de instrucción matemática trabaja y asigna las tareas a partir de la separata que le brinda la coordinación de la asignatura, la cual contiene mayormente ejercicios intramatemáticos para práctica y más práctica por parte de los estudiantes. Por lo que considera que las tareas que asigna para resolver dentro y fuera del horario de clases no activan en los estudiantes procesos cognitivos relevantes.	Además, se infiere que asigna un puntaje por la presentación de las tareas grupales que se dan dentro del horario de clases. ▪ No hay evidencia en la clases videograbadas que el docente retroceda para retomar el tema o que repita sus explicaciones. Lo que hace es precisiones puntuales y responder a algunas preguntas. ▪ En efecto, se observa que asigna las tareas a partir de la separata de problemas que es común a varias aulas de ingeniería, y donde propone ejercicios para mecanización y aplicación de fórmulas. Por lo que inferimos que dichas tareas no exigen alta demanda cognitiva por parte de los alumnos, sino que enfatizan en lo procedimental.
Interaccional	Interacción docente-discente	▪ Considera que en sus clases sí ha hecho presentaciones adecuadas, ordenadas y claras de la definición de derivada, de las reglas de derivación, de optimización, así como de los criterios de la primera y la segunda derivada. ▪ Afirma que la interacción que realiza con los estudiantes en sus clases, le permite identificar las dudas y dificultades de aprendizaje sobre la derivada, sobre todo cuando formula preguntas y los alumnos se quedan callados; una vez identificadas las dudas, entonces para aclararlas, plantea un problema en la pizarra y lo resuelve con la participación de todos los alumnos.	▪ En efecto, se observa que hace sus presentaciones de las derivadas con cierto orden lógico, claridad y secuenciación, en aras de hacerlas más entendibles para los estudiantes. ▪ Observamos que el profesor en sus clases realiza escasa interacción con los estudiantes, básicamente, formula preguntas y recepciona las respuestas de éstos que participan desde sus asientos. Cuando plantea un ejercicio, pregunta a los alumnos los pasos a seguir y él mismo va resolviendo, pero no los saca a la pizarra.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Interacción entre discentes	▪ Menciona que en sus clases de derivadas hace uso de diversos recursos argumentativos tales como el método socrático, preguntas y repreguntas; además, dice que en sus explicaciones a propósito se equivoca para que los alumnos lo corrijan. ▪ Señala que no es incisivo en incluir a todos los alumnos en la dinámica de la clase, dice que cuando el aula está llena de estudiantes el tiempo juega en su contra y tiene que avanzar la sumilla; además, no se detiene por tres o cuatro alumnos que no estén atentos a sus explicaciones	▪ Apreciamos que en efecto, en sus explicaciones el profesor hace uso de recursos argumentativos tales como el método socrático de preguntas y repreguntas que constantemente está formulando a los alumnos. ▪ No se aprecia que el profesor fomente la inclusión de todos los estudiantes en la dinámica de sus clases de derivadas o en sus aplicaciones, aquellos alumnos que se quedaron desconectados o se distrajeron, no son atendidos por él.
	Autonomía	▪ Afirma que favorece el diálogo y la comunicación entre los estudiantes en sus clases de derivadas y sus aplicaciones, lo cual hace cuando hay preguntas ambiguas y cuando trabajan en equipos. ▪ Refiere que genera espacios para la formulación, exploración y validación de las conjeturas, cuando asigna una pregunta para que la resuelvan de forma individual o grupal. Dice que es poco de sacarlos a la pizarra por falta tiempo, y cree que fomenta la autonomía cuando asigna problemas para que trabajen de forma independiente.	▪ Aunque formula preguntas y repreguntas en sus clases, no se observa que fomente el diálogo y la comunicación entre los estudiantes, más que cuando forma equipos para trabajar los talleres los mismo que son escasos. ▪ No se observa que genere espacios para la exploración, formulación y validación de las conjeturas de los estudiantes. Tampoco apreciamos que propicie la autonomía en ellos en el trabajo dentro de las clases.
	Evaluación formativa	▪ Sostiene que interactúa con los estudiantes en el desarrollo de las clases de derivadas y sus aplicaciones, y que a partir de las interacciones puede reconocer si éstos están aprendiendo, o no, el tema que está enseñando; la interacción la entiende, básicamente, como formular preguntas y repreguntas a los alumnos.	▪ En efecto, se observa que el docente interactúa con los estudiantes a nivel de preguntas y repreguntas, y también con los grupos de trabajo donde absuelve las dudas de estos. Por lo que inferimos, que ahí puede identificar si el aprendizaje se está dando, o no.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Mediacional	Recursos materiales	▪ Utiliza recursos tecnológicos de software matemático como el Geogebra para graficar funciones, derivadas y mostrar el significado de la recta tangente; dice que plantea el problema analíticamente y luego lo pasa al software matemático para que los alumnos verifiquen que lo hecho en la pizarra, se cumple.	▪ Efectivamente, observamos que usa los recursos tecnológicos de software matemático para explicar las derivadas y sus gráficas en sus clases. Por ejemplo, proyecta el Geogebra online y muestra las gráficas de la funciones y sus respectivas derivadas.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	▪ Menciona que trabaja con aulas de 40 estudiantes en ingeniería, aunque no siempre está llena el aula, pero cuando sí lo está, considera que no le permite ejecutar el proceso de enseñanza de la derivada y sus aplicaciones que pretende.	▪ Observamos que trabaja con aulas llenas de estudiantes en sus clases, por lo que se infiere que eso le dificulta ejecutar un buen proceso de enseñanza de las derivadas.
		▪ Opina que las aulas poseen los elementos y equipos multimedia esenciales, además de buena iluminación, ventilación y se puede distribuir a los estudiantes; de manera que cumplen con las expectativas y le permite desarrollar sus clases que pretende.	▪ En efecto, se observa que las aulas donde trabaja sí presentan los equipos multimedia adecuados para ejecutar una buena enseñanza; aunque, se aprecia que el espacio es reducido para el trabajo en equipos de alumnos.
	Tiempo (de la enseñanza colectiva, de tutoría, tiempo de aprendizaje)	▪ Respecto de la distribución de contenidos, trata de que por lo menos el 90% se desarrollen en la fase presencial; la fase virtual dice que la toma como un complemento donde asigna actividades para que los estudiantes trabajen en el campus virtual.	▪ Se evidencia que los contenidos importantes de las derivadas los desarrolla de manera presencial; en tanto que asigna algunas tareas para el trabajo fuera del horario de clase y las sube en el campus virtual.
		▪ Afirma que invierte el mayor tiempo disponible para la clase en los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que, en su opinión, son relevantes para los estudiantes de ingeniería; así como también, señala que invierte tiempo y enfatiza en aquellos contenidos de derivadas que considera son más complicados para los alumnos.	▪ Apreciamos que en sus clases enfatiza e invierte tiempo en contenidos relevantes para los estudiantes de ingeniería; además, dedica más tiempo en practicar ejercicios de derivadas que tienen mayor dificultad, como la regla de la cadena y los criterios de la primera y segunda derivada.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
Emocional	Intereses y necesidades	▪ Respecto de las tareas de derivadas que propone a los estudiantes de ingeniería, el docente señala que trabaja con el material académico que le proporciona la coordinación de asignatura; de la separata de ejercicios, dice que deja a criterio de los estudiantes resolver todo, o no, pero no selecciona situaciones que les sean de interés. ▪ Afirma que en sus clases no propone situaciones para que los estudiantes valoren la utilidad de la derivada en la vida cotidiana y profesional, sino que lo que hace es regirse por la separata institucional de problemas propuestos, la cual contiene en su gran mayoría problemas intramatemáticos (ejercicios).	▪ En efecto, se aprecia que en sus clases resuelve los ejercicios de la separata de tareas que le entrega la coordinación, la cual contiene, básicamente, ejercicios algebraicos de derivadas; además a partir de esta guía asigna las tareas para que resuelvan fuera de horario. ▪ Efectivamente, observamos que el profesor toma la separata de ejercicios institucional común a varios grupos y resuelve lo que ésta contiene. No se aprecia que plantee situaciones que permitan a los alumnos valorar la utilidad de la derivada.
	Actitudes	▪ Es de la opinión que los estudiantes de ingeniería a los que enseña todavía no son maduros desde el punto de vista del comportamiento, por lo que para implicarlos, para que se interesen y cumplan con las actividades matemáticas que les propone, lo que hace es asignar una nota sobre el promedio final del curso. ▪ Considera que por la manera como organiza sus clases de derivadas fomenta la responsabilidad en los estudiantes, por ejemplo cuando les pide que cumplan con las actividades que asigna; aunque no cree fomentar la perseverancia en los alumnos.	▪ Apreciamos que el docente asigna un puntaje sobre las tareas que le presentan los estudiantes, es decir, usa una motivación extrínseca para implicar a los alumnos en las actividades matemáticas que les propone. ▪ Se observa que el docente practica la puntualidad y el cumplimiento de las actividades programadas en el sílabo del curso y el plan de clases, por lo que inferimos que fomenta la responsabilidad predicando con el ejemplo.
	Emociones	▪ Opina que en el desarrollo de sus clases para que les dé a los estudiantes la oportunidad de que argumenten sus resoluciones de manera equitativa, va a depender del tiempo que aún tenga disponible en la clase; dice que muchos no argumentan nada.	▪ Observamos que el profesor hace preguntas y recoge algunas respuestas de los estudiantes, pero no se aprecia que los saque a la pizarra a resolver o de oportunidad para que argumenten acerca de sus procedimientos.

CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
		▪ Sostiene que en clases trata de construir y resolver ejemplos y problemas de menor a mayor grado de dificultad, comenzando por los más sencillos; y de esta manera cree motivar y levantarles la autoestima para que pierdan el miedo y fobia hacia las matemáticas.	▪ Se aprecia que conversa con los alumnos sobre el desarrollo de los ejercicios, pide opiniones y trata de darles confianza, por lo que se infiere que intenta realzarles la autoestima frente a las matemáticas.
Ecológica	Adaptación al currículo	▪ Respecto de los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que enseña, su implementación y la evaluación de estos, y la correspondencia con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería, el docente afirma que no ha revisado el currículo de ingeniería por lo que no está seguro de si existe, o no, tal correspondencia a nivel curricular.	▪ Se evidencia que los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que enseña, así como la implementación y la evaluación, sí son coherentes con las directrices curriculares de las carreras de ingeniería, a pesar que el docente dice que lo desconoce.
	Conexiones intra e inter-disciplinares	▪ Afirma que no tiene conocimiento de qué otras asignaturas llevan los estudiantes en las carreras de ingeniería donde intervengan las derivadas, aunque dice que los contenidos de derivadas que enseña sí tienen conexión con diferentes contenidos matemáticos en asignaturas posteriores como Ecuaciones Diferenciales y otras.	▪ Apreciamos que en el desarrollo de sus clases el profesor hace comentarios acerca del uso de las derivadas en asignaturas futuras de matemáticas que cursarán los estudiantes de ingeniería como Ecuaciones Diferenciales.
	Utilidad sociolaboral	▪ En su opinión, no tanto los conceptos de la derivada sino más bien las aplicaciones de ésta que imparte en sus clases, junto con la visualización de las estructuras en forma de funciones, todo ello les va a servir a los estudiantes en su desempeño profesional, así como en la inserción sociolaboral de los futuros ingenieros.	▪ Se infiere que el docente tiene cierta noción de la utilidad de las aplicaciones de las derivadas para la inserción en el campo laboral de los futuros ingenieros; y que todo ello les servirá a los estudiantes en su desempeño profesional.
		▪ Sostiene que actualmente viene investigando en temas como recursos tecnológicos, tecnologías de la información y comunicación – TICs,	▪ Se observa que el profesor en sus clases se esfuerza por utilizar los recursos tecnológicos como software

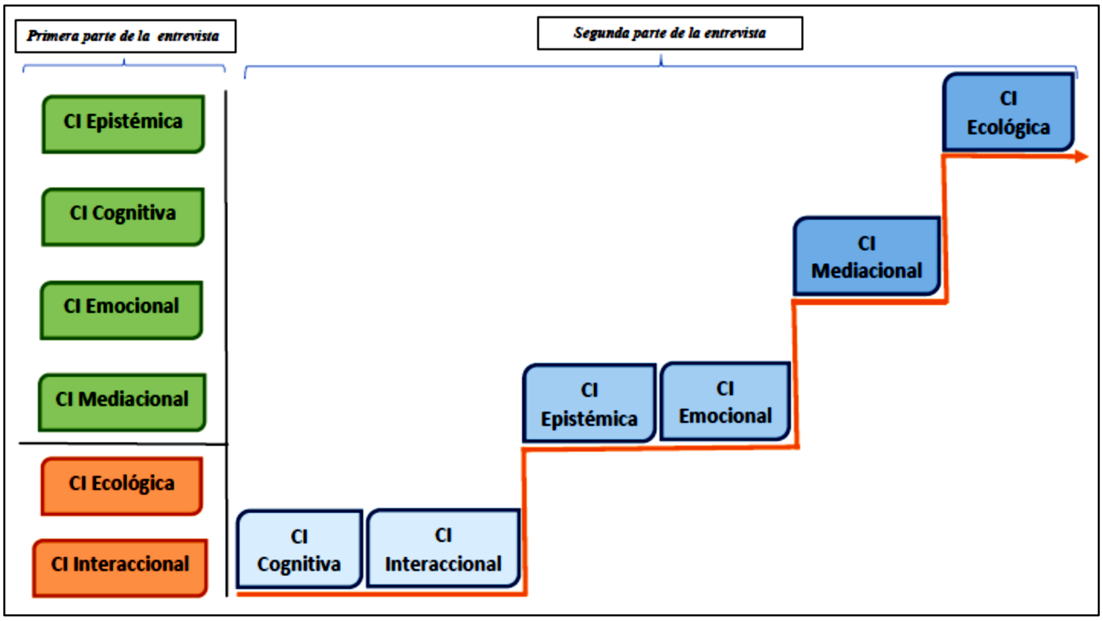
CI	COMPONENTE	RESPUESTAS DOCENTE	OBSERVADO EN CLASE
	Innovación didáctica	en nuevas formas de enseñar las derivadas y sus gráficas sobre la base del software matemático, y en otros recursos. Sin embargo, en relación a nuevas formas de evaluación dice que eso ya está definido por la universidad por lo que no tiene injerencia en ese aspecto.	matemático y equipos multimedia, de manera que no solamente usa la pizarra. Por lo que inferimos que sí realiza innovación principalmente en aspectos de las nuevas tecnologías y en su práctica docente.

4.2. Conclusiones sobre los criterios que orientan la práctica del Docente G

Sobre la base de los resultados mostrados en la Tabla A.4 podemos inferir los criterios generales y principales que orientan la práctica del profesor "G", cuando diseña e implementa sus clases de derivadas y sus aplicaciones para estudiantes de diversas carreras de ingeniería, así como, determinar el peso que tienen estos criterios en su práctica docente como resultado de la triangulación realizada entre lo que dice y lo que se ha observado que hace en las aulas el mencionado docente (ver Figura A.3).

Figura A.3

Esquema de criterios que guían la práctica didáctica del Docente G



Nota: Fuente propia de la investigación.

En la columna de la izquierda del esquema de la Figura A.3 se muestran, en la parte superior, los criterios de idoneidad didáctica que aparecen en las respuestas del profesor G cuando se le formula la pregunta de cuáles eran los criterios que orientaban su práctica pedagógica (epistémico, cognitivo, emocional y mediacional); mientras que en la parte inferior (ecológico e interaccional) se hallan los CI que no menciona en su respuesta (primera parte de la entrevista).

En la columna derecha de dicho esquema están los CI que emergen en sus respuestas a las preguntas más específicas relacionadas con alguno de los componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica (segunda parte de la entrevista). Tal como era esperable, teniendo en cuenta las preguntas formuladas, en esta columna aparecen los seis CID; ahora bien, no todos tienen la misma importancia para el profesor G al momento de reflexionar y justificar su práctica. Para representar el diferente peso que tiene cada criterio como guía de la práctica del profesor hemos utilizado el esquema de la escalera, siendo los escalones superiores los de mayor peso, en tanto que los criterios que están en la parte inferior tienen menor peso. La disposición en la escalera, además de indicar el menor o mayor peso, también pretende representar cómo algunos CI quedan supeditados por otros. El orden en el que aparecen los CI en la escalera es el resultado de la triangulación entre el discurso del docente y lo que se infiere de la observación de sus clases.

En su discurso inicial el profesor G explica que los criterios epistémico, cognitivo, emocional y mediacional son los que orientan su práctica docente. Ahora bien, cuando en la segunda parte de la entrevista se le hacen preguntas más específicas sobre el criterio cognitivo, concluimos que: 1) no tiene en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes para el estudio de las derivadas o sus aplicaciones, ya que asume que los éstos ya se dieron y por tanto los alumnos debieron haberlo estudiado; 2) desarrolla clases magistrales de autocontenido, en el caso de que hubieran alumnos que necesitan de refuerzo y ampliación de los temas que viene enseñando, él no dedica tiempo para retroalimentar, lo cual justifica por falta de tiempo y por cumplir con la sumilla; 3) los instrumentos de evaluación que aplica son pruebas de desarrollo (exámenes parciales, finales y prácticas calificadas) y que no le permiten ver las dificultades de aprendizaje de los alumnos; 4) las tareas que asigna para que los alumnos resuelvan dentro y fuera del horario de clases no activan en los estudiantes procesos cognitivos relevantes de argumentación, generalización, conjeturización, y tampoco exigen alta demanda cognitiva.

Por todo lo señalado y con base en la triangulación de lo observado en sus clases podemos inferir que el profesor G asigna un peso mínimo a los aspectos cognitivos en su práctica docente, ya que el aprendizaje es básicamente de mecanización propio de clases magistrales; además, inferimos que supedita estos aspectos al criterio ecológico (cumplimiento de la sumilla) y al mediacional (falta de tiempo).

En lo referente al criterio interaccional, si bien, éste no había sido tomado en cuenta en las respuestas iniciales del docente G, en la segunda parte de la entrevista cuando se le formulan preguntas más específicas vemos que emergen los aspectos interaccionales, aunque se infiere que el docente le asigna un peso mínimo en su práctica. Así por ejemplo, la interacción con los estudiantes en el aula de clases es escasa, básicamente, formula preguntas y recepciona las respuestas de los alumnos los cuales participan desde sus asientos; hace uso de algunos recursos argumentativos tales como el método socrático de preguntas y repreguntas; no es incisivo en incluir a todos los alumnos en la dinámica de la clase, ya que cuando el aula está llena de estudiantes el tiempo juega en su contra y tiene que avanzar la sumilla, además, no se detiene por tres o cuatro alumnos que no estén atentos a sus explicaciones; genera espacios para la formulación, exploración y validación de las conjeturas por parte de los estudiantes, aunque cuando asigna un ejercicio para que lo resuelvan no valida los procedimientos, dice que es poco de sacarlos a la pizarra por falta tiempo; tampoco fomenta la autonomía en el trabajo de los estudiantes.

Por lo antes mencionado, concluimos que el docente G le asigna una mínima importancia o peso a los aspectos interaccionales en la implementación de sus clases, aunque los supedita al criterio mediacional (falta de tiempo) y al ecológico (avanzar la sumilla del sílabo).

Con respecto al criterio epistémico, éste había aparecido ya en la primera parte de la entrevista, y vuelve a emerger con cierto peso en el discurso del docente G cuando se le formulan preguntas más específicas (segunda parte de la entrevista), de donde inferimos que: 1) comete errores pero no de tipo matemático, sino que son errores involuntarios, tipográficos e insignificantes, considera que en sus clases es riguroso en el sentido de dejar claro la noción de lo que hay detrás de la derivada; 2) presenta directamente las fórmulas y reglas básicas de derivación para que sus alumnos las apliquen como tal, considera importante la demostración pero no la hace por falta de tiempo y por cumplir con la sumilla del sílabo, por lo que enfoca los temas matemáticos de forma más instrumental; 3) trabaja algunos procesos relevantes de la actividad matemática tales como la argumentación, la resolución de problemas de derivadas, la matematización, aunque no trabaja la modelización y en la resolución de problemas se centra en la parte de ejercicios; 4) la mayoría de ejercicios de derivadas y sus aplicaciones que trabaja son de tipo intramatemático, y de los escasos problemas extramatemáticos que presenta, son del contexto de la Física; 5) considera que es importante presentar a los estudiantes las distintas formas de representación de la derivada, ya sea como la razón de cambio instantánea (RCI) o como pendiente de recta tangente.

Por todo lo sustentado, podemos inferir que para el profesor G al momento de orientar su práctica docente, los aspectos epistémicos tienen una mediana importancia y se supeditan al criterio mediacional (falta de tiempo) y al ecológico (cumplir con la sumilla); además, observamos una fuerte tendencia en la mecanización y a la práctica de ejercicios rutinarios.

Con respecto al criterio emocional, al cual el profesor G en su respuesta inicial ya lo había tomado en cuenta, luego en sus respuestas a la segunda parte de la entrevista (cuando se le hacen preguntas específicas sobre éste) vuelve a emerger, hecho que también se aprecia en la observación de sus clases. Por ejemplo, trabaja con el material académico que le proporciona la coordinación de la asignatura dejando a criterio de los estudiantes resolver toda la separata, o no, aunque no se preocupa por seleccionar situaciones que sean de interés para los alumnos; no propone situaciones para que los estudiantes valoren la utilidad de la derivada en la vida cotidiana y profesional, ya que se rige a la guía de problemas propuestos que le entrega la coordinación, la cual contiene en su gran mayoría ejercicios intramatemáticos; para implicar a los estudiantes, para que se interesen y cumplan con las actividades matemáticas que les propone, asigna una nota sobre el promedio final del curso, es decir aplica una motivación extrínseca; en el desarrollo de sus clases para que ceda a los estudiantes la oportunidad de argumentar sus resoluciones de manera equitativa, va a depender del tiempo disponible en la sesión, aunque considera que muchos alumnos no argumentan nada.

Por todo lo expuesto concluimos que el profesor G asigna un mediano peso a los aspectos afectivos en su práctica docente, además se infiere que supedita el criterio emocional al ecológico (cumplir con el sílabo) y al mediacional (tiempo disponible).

En relación al criterio mediacional, éste no sólo había sido tomado en cuenta por el docente G al principio de la entrevista, sino que también emerge con un peso significativo cuando se le hacen preguntas específicas sobre aspectos de medios en la segunda parte de la entrevista. Así por ejemplo, utiliza recursos tecnológicos de software matemático como el Geogebra para graficar funciones derivadas y mostrar el significado de la recta tangente, plantea el problema analíticamente y luego lo coloca en el software para que los alumnos verifiquen que lo hecho en la pizarra se cumple; las aulas poseen los elementos y equipos multimedia esenciales, buena iluminación, ventilación y se puede distribuir a los estudiantes, de manera que cumplen con las expectativas para el desarrollo de sus clases; invierte el mayor tiempo disponible para la clase en los contenidos de derivadas y sus aplicaciones que son relevantes para los estudiantes de ingeniería, así como también enfatiza en aquellos contenidos que son más complicados para los alumnos como la regla de la cadena y los criterios de la primera y segunda derivada.

En consecuencia, concluimos que para este profesor G los aspectos de medios son de gran importancia en su práctica docente, aunque quedan supeditados al criterio ecológico (cumplir con el sílabo).

El criterio ecológico aparece en su respuesta inicial y, de la triangulación realizada, evidenciamos que tiene un papel fundamental para orientar la práctica del docente G, la cual justifica, sobre todo, por el cumplimiento de la sumilla del sílabo y por seguir lo estipulado en los planes de clase, aunque también hace ciertas reflexiones en clases en las que la justifica por el hecho de tener en cuenta la especialidad de los estudiantes de ingeniería; los contenidos de derivadas que enseña se corresponden con las directrices curriculares de las carreras, a pesar de que el docente no conoce bien los planes curriculares; los contenidos de derivadas que enseña sí tienen conexión con diferentes contenidos matemáticos en asignaturas posteriores tales como Ecuaciones Diferenciales; no sólo los conceptos de derivadas sino también las aplicaciones de éstas que imparte en sus clases, junto con la visualización de las estructuras en forma de funciones, todo ello les va a servir a los estudiantes en su desempeño profesional; investiga en temas como recursos tecnológicos, tecnologías de la información y comunicación – TICs, en nuevas formas de enseñar las derivadas y sus gráficas, sobre la base del software matemático y en otros recursos.

Consecuentemente, a partir de la triangulación entre lo dicho en la entrevista y lo observado en sus clases, se infiere que este criterio ecológico es el que mayor peso tiene para orientar su práctica docente y al cual quedan supeditados todos los demás CID.

Finalmente, aquí también debemos resaltar del criterio ecológico que el componente “Utilidad sociolaboral” se tiene en cuenta para justificar una presentación del tema de las derivadas y de sus aplicaciones que enfatiza en la mecanización, en las clases magistrales y poco significativo, pero no para incorporar procesos de modelización, argumentación y resolución de problemas extramatemáticos. Por lo que este criterio incide en el proceso disminuyendo la idoneidad epistémica , ya que reduce la riqueza de procesos, en lugar de aumentarla, enfatizando en los procesos relevantes de la actividad matemática, tales como la modelización.