Contribución al estudio de los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados

Santiago Zarzuela Armengou

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LOS GRANDES MODULOS DE COHEN-MACAULAY EQUILIBRADOS

Santiago Zarzuela Armengou.

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DE LOS GRANDES MODULOS DE COHEN-MACAULAY EQUILIBRADOS

Memoria presentada por
Santiago Zarzuela Armengou
para aspirar al grado de
Doctor en Matemáticas
(Universidad de Barcelona).

a Marien.

INDICE

INTRODUCCION

INTRODUCCION.

La *Conjetura de grandes módulos de Cohen-Macaulay*, formulada y demostrada por M.*Hochster* siempre que el anillo A contenga un cuerpo, establece que *si A es un anillo conmutativo, local y Noetheriano y a_1, ..., a_n es un sistema de parámetros de A entonces existe un A-módulo M para el que a_1, ..., a_n es M-sucesión.* Esta conjetura tiene importantes consecuencias y ocupa un lugar primordial en el grupo de las llamadas Conjeturas Homológicas (ver [Ho-3] y [Ho-4]).

Los grandes módulos de Cohen-Macaulay M *no admiten, en general, generación finita* y puede ocurrir, por ejemplo, que no todo sistema de parámetros de A sea M-sucesión. Los que verifican esta propiedad son los que *Sharp* denomina *equilibrados* ([Sh-2]), quien conjetura que los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados constituyen, en cierto modo, una generalización al caso no finitogenerado de los módulos Cohen-Macaulay.

El objetivo principal de esta Memoria es el estudio de los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados. Este estudio lo enfocamos desde tres puntos de vista distintos: *el de las propiedades relativas al grado y a la dimensión de Krull* (Capítulo 2), *el del ascenso de tal carácter por extensiones planas* (Capítulo 3) y, por último, *el de las propiedades homológicas* (Capítulo 4). En cada caso estudiamos, además, *las anomalías que se producen respecto al caso de ge-*

neración finita.

Dada la *no finitud de los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados es necesario utilizar métodos específicos en su estudio.* Hacemos notar que en lo referente al grado hamos podido disponer de los métodos desarrollados por *Foxby* en el contexto más general de su teoría homológica de complejos y en otros trabajos previos ([Fo-1], [Fo-2], [Fo-3] y [Fo-4]). Por el contrario, *ha sido preciso dedicar parte de esta Memoria para aquellas cuestiones relacionadas con la dimensión de Krull de un módulo no finitogenerado, y en especial lo relativo a sus sistemas de parámetros.* Todo ello configura el Capítulo 1.

Quería agradecer al Dr. Rafael Mallol, de quien recibí mis primeras lecciones de Algebra Conmutativa, el haber aceptado la Dirección de esta Memoria y el interés puesto en ella. Asimismo debo agradecer al Dr. José M[a] Giral toda su colaboración e inestimables consejos, especialmente durante el periodo que fuí becario de la Fundació Agustí Pedro i Pons y en el que se elaboró parte de esta Memoria.

Barcelona, Diciembre de 1985.

CAPITULO 1

1.- MODULOS NO FINITOGENERADOS Y SISTEMAS DE PARAMETROS.

En este primer capítulo, y si (A,m) es un anillo conmutativo, local y Noetheriano, estudiamos esencialmente dos cuestiones distintas: por un lado la caracterización de la dimensión de Krull de un A-módulo no finitogenerado como $\sup\{ i \text{ t.q. } H^i_m(M) \neq 0 \}$, y por otro la existencia para A-módulos no finitogenerados de sistemas de parámetros. De la relación entre ambas cuestiones surge el principal resultado de este capítulo: si M es un A-módulo tal que $r = \dim_A(M) = \dim(A/An_A(M))$ y tal que $\dim_A(M) = \sup\{ i \text{ t.q. } H^i_m(M) \neq 0 \}$ entonces todo sistema de parámetros de $A/An_A(M)$ lo es de M (Proposición 1.10).

Este resultado es aplicable entonces a familias de A-módulos previamente estudiadas: pre-módulos Cohen-Macaulay, módulos fielmente planos, módulos con un submódulo básico y módulos "Torsionless". Se dan asimismo ejemplos mostrando como sin las condiciones del resultado antes citado pueden existir sistemas de parámetros y también no existir ningún sistema de parámetros.

§1.- DIMENSION DE KRULL Y COHOMOLOGIA LOCAL.

Sea (A,m) un anillo conmutativo, local y Noetheriano con ideal maximal m. Si M es un A-módulo cualquiera se define la dimensión de Krull de M como la dimensión de su soporte: $\dim_A(M) = \dim(\mathrm{Supp}_A(M))$, es decir, la longitud de la cadena más larga que se pueda formar con ideales primos del soporte de M. Si el A-módulo M es finitogenerado su soporte coincide con el conjunto de ideales primos que contienen al anulador de M $(V(\mathrm{An}_A(M))$ de manera que $\dim_A(M) = \dim(A/\mathrm{An}_A(M))$. No ocurre lo mismo cuando M no es finitogenerado; por ejemplo, si M es la envolvente inyectiva del cuerpo residuo de A $(E_A(A/m))$ se tiene que $\mathrm{An}_A(M) = (0)$ ([Sha-Vá], 2.26 Corollary 2) mientras que $\mathrm{Supp}_A(M) = \{ m \}$.

Para caracterizar homológicamente la dimensión de Krull de un módulo es necesario introducir los módulos de cohomología local. Si I es un ideal de A y M es un A-módulo se define $\Gamma_I(M) = \{ m \in M \text{ t.q. } \mathrm{An}_A(m) \text{ es I-primario} \} = \bigcup_{k=1} (0:I^k)_M$. Γ_I es un functor covariante exacto por la izquierda de manera que $\forall n \geqslant 0$ podemos considerar los functores derivados por la derecha $R^n\Gamma_I$. Se llama n-ésimo módulo de cohomología local de M respecto de I a $R^n\Gamma_I(M)$, y lo indicaremos con $H^n_I(M)$. Cuando $I = m$ se obtienen los llamados módulos de cohomología local.

Aunque la cohomología local fué creada por Grothendieck en el contexto de su teoría de la dualidad (véase [Gro]) también ha constituido posteriormente una importante herramienta del Algebra Conmutativa, y en este sentido utilizaremos [Sh-1], [Mac-Sh] y [He-Ku] §4 como referencia para las propiedades generales de la cohomología local. El siguiente resultado liga a ésta con la dimensión de Krull:

1.1 Proposición.- Sea M un A-módulo. Entonces

$$\dim_A(M) \geqslant \sup \{ n \text{ t.q. } H^n_m(M) \neq 0 \} ,$$

y si M es finitogenerado vale la igualdad.

Demostración: [He-Ku] 4.12 ó bien [Sh-1] 6.1 y [Mac-Sh] 2.2 .■

La cuestión es ahora ver que ocurre para los módulos no finitogenerados. Como comprobamos seguidamente no es posible extender a cualquier A-módulo la igualdad anterior. En efecto:

sea A un dominio local con $\dim(A) \geqslant 4$. Sea M un A-módulo finitogenerado de $\dim_A(M) = 2$ y p un ideal primo de A tal que $\dim(A/p) = 3$. Sea $N = M \oplus E_A(A/p)$. Entonces se tiene que $\dim_A(N) = 3$ mientras que $H^3_m(N) = H^3_m(M) \oplus H^3_m(E_A(A/p)) = 0$.

Para encontrar familias de A-módulos en las que la dimensión de Krull venga dada por $\sup \{ n \text{ t.q. } H^n_m(M) \neq 0 \}$ va a ser necesario imponer alguna restricción. En primer lugar vamos a considerar A-módulos tales que $\dim_A(M) = \dim(A/An_A(M))$ (el A-módulo del ejemplo anterior no verifica esta condición: $\dim_A(N) = 3$, $\dim(A/An_A(M)) = \dim(A) \geqslant 4$). Puesto que M es de forma natural un $A/An_A(M)$-módulo resulta de [He-Ku] 4.11 que la cohomología local de M como A-módulo coincide con la cohomología local de M como $A/An_A(M)$-módulo, de manera que podemos suponer que $\dim_A(M) = \dim(A) = n$. Ahora el A-módulo $H^n_m(M)$ puede ser caracterizado de diversas formas. Previamente necesitamos introducir algunos conceptos.

Si $a_1, \ldots, a_n$ es un sistema de parámetros de A se puede considerar para todo A-módulo el siguiente límite inductivo: $\varinjlim_{k}(M/(a_1^k, \ldots, a_n^k)M)$, siendo el morfismo de conexión entre $M/(a_1^k, \ldots, a_n^k)M$ y $M/(a_1^s, \ldots, a_n^s)M$, $s \geq k$, la multiplicación por $(a_1 \cdots a_n)^{s-k}$. Por otro lado, y si E es la envolvente inyectiva del cuerpo residuo de A, se define el dual de Matlis de un A-módulo M como $M^{\perp} = \mathrm{Hom}_A(M,E)$. En particular a $C = H_{m}^{n}(A)^{\perp}$ se le denomina módulo canónico de A. Puesto que E es cogenerador inyectivo y $H_{m}^{n}(A) \neq 0$ resulta que $C \neq 0$. Asimismo y si el anillo A es completo la dualidad de Matlis transforma módulos Artinianos en módulos Noetherianos ([Sha-Vá] 5.20), de manera que como $H_{m}^{n}(A)$ es siempre Artiniano ([Mac-Sh] 2.1) el módulo canónico es, en este caso, finitogenerado.

La siguiente Proposición resume las distintas caracterizaciones de $H_{m}^{n}(M)$ que aparecen en [He-Ku] §4 y en [Mat].

1.2 Proposición.- Sea M un A-módulo. Los siguientes A-módulos son isomorfos:

(i) $H_{m}^{n}(M)$.

(ii) $H_{m}^{n}(A) \otimes_A M$.

(iii) $\varinjlim_{k}(M/(a_1^k, \ldots, a_n^k)M)$ con $a_1, \ldots, a_n$ cualquier sistema de parámetros de A.

Además la no anulación de $H_{m}^{n}(M)$ es equivalente a la no anulación de

(iv) $\mathrm{Hom}_A(M,C)$.

(v) $\mathrm{Hom}_A(H^n(A),M^{\perp})$.

Demostración: por [He-ku] 4.9 se tiene que

$H_{m}^{n}(M) \cong \varinjlim_{k}(\mathrm{Hom}_A(K_*(a_1^k, \ldots, a_n^k;A),M)$, donde $a_1, \ldots, a_n$ es cualquier sistema de parámetros de A y K_* indica el complejo de Koszul respecto a este sistema de parámetros. Asimismo el morfisno de conexión entre el módulo de índice k y el de índice s de este sistema es el producto por $(a_1\cdots a_n)^{s-k}$, $s \geq k$. Para $K_*(a_1^k, \ldots, a_n^k;A)$ se tiene entonces

$$\begin{array}{ccccl} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{d_n} & A^n \\ & & 1 & \mapsto & ((-1)^{j-1}a_j^k)_{j=1\ldots n} \end{array}$$

,de manera que al aplicar el functor $\mathrm{Hom}_A(.,M)$ quedará $\mathrm{Hom}_A(A^n,M) \xrightarrow{\bar{d}_n} \mathrm{Hom}_A(A,M) \rightarrow 0$. Es fácil entonces comprobar que $\mathrm{Coker}(\bar{d}_n) \cong M/(a_1^k, \ldots, a_n^k)M$ de amnera que obtenemos el isomorfismo $H_m^n(M) \cong \varinjlim_k(M/(a_1^k, \ldots, a_n^k)M$.

En particular $H_m^n(A) \cong \varinjlim_k(A/(a_1^k, \ldots, a_n^k))$, y puesto que el producto tensorial conmuta con el límite inductivo resulta que $H_m^n(M) \cong M \otimes_A H_m^n(A)$.

Ahora, y dado que E es un cogenerador inyectivo, se tiene que $H_m^n(M) \neq 0$ si y solo si $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A H_m^n(A),E) \cong \mathrm{Hom}_A(M,C) \neq 0$ y que $H_m^n(M) \neq 0$ si y solo si $\mathrm{Hom}_A(M \otimes_A H_m^n(A),E) \cong \mathrm{Hom}_A(H_m^n(A),M\ ) \neq 0$.■

1.3 Corolario.- Sea M un A-módulo. Entonces $H_m^n(M) \neq 0$ si y solo si $M \otimes_A \hat{A}$ tiene un cociente finitogenerado (como $\hat{A}$-módulo) de dimensión n.

<u>Demostración:</u> por [He-Ku] 4.12 Reduktion 1 se tiene que $H_m^n(M) \cong H_{\hat{m}}^n(M \otimes_A \hat{A})$, de manera que podemos suponer A completo y simplemente demostrar que $H_m^n(M) \neq 0$ si y solo si M tiene un cociente finitogenerado de dimensión n. Es claro ahora a partir de 1.1 y de 1.2 (iv) que un A-módulo finitogenerado K tiene dimensión n si y solo si $\mathrm{Hom}(K,C) \neq 0$. En particular cualquier submódulo no nulo de C, que es finitogenerado, tiene dimensión n.

Supongamos ahora que $H_m^n(M) \neq 0$. Entonces $\mathrm{Hom}_A(M,C) \neq 0$, es decir, M tiene un cociente isomorfo a un submódulo no nulo de C que tendrá, en consecuencia, dimensión n. Reciprocamente, si K es un cociente de M finitogenerado de dimensión n se tiene que $\mathrm{Hom}_A(K,C) \neq 0$ y com M se epiyecta en K también $\mathrm{Hom}_A(M,C) \neq 0$.■

Observación.- Es cierto en general que si M tiene un cociente finitogenerado de dimensión n entonces $H^n_{m}(M) \neq 0$. En efecto, sea K ese cociente; la sucesión exacta de cohomología local asociada será entonces de la forma $\ldots \to H^n_{m}(M) \to H^n_{m}(K) \to 0$, de manera que como $H^n_{m}(K) \neq 0$ también $H^n_{m}(M) \neq 0$.

1.4 Corolario.- Sea M un A-módulo. Entonces $H^n_{m}(M) \neq 0$ si y solo si existen $a_1, \ldots, a_n$ sistema de parámetros de A y $m \in M$ tales que $\forall j > 0$ se verifica $(a_1^j \cdots a_n^j)m \notin (a_1^{j+1}, \ldots, a_n^{j+1})M$.

Demostración: por 1.2 (iii) $H^n_{m}(M) \neq 0$ si y solo si $\varinjlim_k (M/(b_1^k, \ldots, b_n^k)M)$ no se anula para cualquier sistema de parámetros $b_1, \ldots, b_n$ de A. Es decir, si y solo si para cualquier sistema de parámetros de A existen k_0 y $m \in M$ tales que $\forall s > k_0$ $(b_1 \cdots b_n)^{s-k_0} m \notin (b_1^s, \ldots, b_n^s)M$. Tomando ahora el sistema de parámetros $a_1 = b_1^{k_0}, \ldots, a_n = b_n^{k_0}$ obtenemos que si $H^n_{m}(M) \neq 0$ entonces $\forall j > 0$ $(a_1 \cdots a_n)^j m \notin (a_1^j, \ldots, a_n^j)M$. El recíproco es inmediato.■

Observación.- Si M es un A-módulo y $a_1, \ldots, a_n$ es un sistema de parámetros de A se dice que $m \in M$ es un buen elemento respecto $a_1, \ldots, a_n$ si verifica las condiciones del Corolario anterior. Cuando M = A el hecho de que 1 se un buen elemento respecto cualquier sistema de parámetros de A constituye la llamada Conjetura monomial de Hochster, cierta cuado el anillo A contiene un cuerpo([Ho-1] Prop.3).

Pasamos ahora a detallar algunas familias de A-módulos cuya dimensión de Krull viene caracterizada por la cohomología local.

A) Módulos pre Cohen-Macaulay.

Si $a_1, \ldots, a_n$ es un sistema de parámetros de A se dice que un A-módulo M es pre Cohen-Macaulay respecto $a_1, \ldots, a_n$ si $\forall j > 0$ el morfismo $M/(a_1^j, \ldots, a_n^j) \xrightarrow{a_1 \cdots a_n} M/(a_1^{j+1}, \ldots, a_n^{j+1})$ es inyectivo y $mM \neq M$. Los módulos pre Cohen-Macaulay fueron definidos por Bartjin y Strooker en [Ba-St], donde además demuestran la existencia, dado un sistema de parámetros de A, de un A-módulo pre Cohen-Macaulay respecto a dicho sistema de parámetros siempre que el anillo contenga un cuerpo. Dada la inyectividad de los morfismos de conexión es claro que $H_m^n(M) \cong \varinjlim_k (M/a_1^k, \ldots, a_n^k)M) \neq 0$.

B) Módulos fielmente planos.

Es claro que si M es un A-módulo fielmente plano entonces $H_m^n(M) \cong H_m^n(A) \otimes_A M \neq 0$.

C) Si I es un ideal de A y $N \subset M$ son A-módulos se dice que N es un submódulo I-puro de M si $N/IN \subset M/IM$. Supongamos entonces que N es un submódulo I-puro de M $\forall I$ ideal m-primario. $\forall$ $a_1, \ldots, a_n$ sistema de parámetros de A y $\forall k > 0$ se tendrá que $N/(a_1^k, \ldots, a_n^k)N \subset M/(a_1^k, \ldots, a_n^k)M$, de manera que si $\varinjlim_k (N/(a_1^k, \ldots, a_n^k)N) \neq 0$ también $\varinjlim_k (M/(a_1^k, \ldots, a_n^k)M) \neq 0$.

Por ejemplo si M es un A-módulo separado para la topología m-ádica la extensión $M \to \hat{M}$ es siempre I-pura $\forall$ I ideal m-primario. En efecto, si I es m-primario existe $r > 0$ tal que $m^r \subset I$, de manera que $\bigcap_{n>0} (m^n M + IM) = IM$ y M/IM es separado para la topología m-ádica. Luego $M/IM \subset (M/IM)^\wedge \cong \hat{M}/I\hat{M}$. Concluimos pues que si M es separado para la topología m-ádica y $H^n_m(M) \neq 0$ también $H^n_m(\hat{M}) \neq 0$. En particular si M es un A-módulo finitogenerado de dimensión n.

D) Sea M un A-módulo. Se dice que $L \subset M$ es submódulo básico de M si L es un submódulo no trivial puro de M (es decir, $\forall$ A-módulo N $L \otimes_A N \subset M \otimes_A N$), denso en M para la topología m-ádica y libre. La noción de submódulo básico fue dada por Griffith en [Gri-1] y está relacionada con la platitud (por ejemplo, todo A-módulo fielmente plano tiene un submódulo básico [Ba-St] 3.6). Es claro entonces que por ser L libre $H^n_m(L) \neq 0$, luego también $H^n_m(M) \neq 0$.

E) Módulos "torsionless".

Un A-módulo M se dice que es "torsionless" si $\forall m \in M - (0)$ existe $f \in \mathrm{Hom}_A(M,A)$ tal que $f(m) \neq 0$. Es muy fácil ver que M es "torsionless" si y solo si es isomorfo a un submódulo de un producto de copias de A. Si suponemos ahora que $\forall p \in \mathrm{Ass}_A(A)$ se verifica $\dim(A/p) = \dim(A)$ (por ejemplo si A es íntegro, ó Cohen-Macaulay...) se tiene que todo ideal de A tiene dimensión igual a dim(A), de manera que si para un A-módulo M se verifica $\mathrm{Hom}_A(M,A) \neq 0$ entonces M tendrá un cociente finitogenerado de dimensión $n = \dim(A)$, y por lo tanto $H^n_m(M) \neq 0$. Esto ocurrirá en particular para los módulos "torsionless".

§2.- SISTEMAS DE PARAMETROS, COMPLEJO DE COUSIN y COHOMOLOGIA LOCAL.

Pasamos ahora a estudiar el problema de la existencia de parámetros para un A-módulo dado y su relación con la cohomología local.

Sea M un A-módulo de dimensión r. Diremos que la familia de elementos de A $a_1, \ldots, a_r$ es un sistema de parámetros de M si $\forall\, i = 1, \ldots, r$ se tiene que $\dim_A(M/(a_1, \ldots, a_i)M) = r - i$. Cuando M es un A-módulo finitogenerado siempre existen sistemas de parámetros, que en realidad coinciden con las familias de elementos de A que al hacer clase módulo el $An_A(M)$ nos dan sistemas de parámetros de $A/An_A(M)$ (véase [Se] III Prop.7). Si M no es finitogenerado no tienen porqué existir sistemas de parámetros de M. Veamos un contraejemplo:

sea A un dominio local y catenario de dimensión ≥ 2.(por ejemplo $K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$, $n \geq 2$ y K un cuerpo cualquiera). Sea $M = \bigoplus_{x \in m - \{0\}} A/xA$. Como $\forall\, x \in A$ $\dim(A/xA) = n - 1$ resulta que $\dim_A(M) \geq n - 1$; pero $(0) \notin Ass_A(M)$, pues si K es el cuerpo de fracciones de A $M \otimes_A K = \bigoplus_{x \in m - \{0\}} (A/xA \otimes_A K) = 0$, de manera que $\dim_A(M) = n - 1$. Sea ahora $a \neq 0$ un elemento cualquiera de m. Entonces $M/aM = A/aA \oplus (\bigoplus_{x \in m - \{0,a\}} A/(x,a))$, luego $\dim_A(M/aM) = \dim(A/aA) = n - 1$, y no es posible encontrar para M ningún sistema de parámetros.

El A-módulo del párrafo anterior es anómalo en el sentido de que $\dim_A(M) \neq \dim(A/An_A(M))$, pues $An_A(M) = (0)$ (en efecto, si $a \in A$ fuera tal que $aM = 0$ se tendría que $a \in \bigcap_{x \in m - \{0\}} (x)$, y por lo tanto a = 0). Obviando esta anomalía se puede enunciar:

1.5 Proposición.- Sea M un A-módulo tal que $\dim_A(M) = \dim(A/An_A(M))$ y tal que $\forall p \in Supp_A(M)$ se verifica $pM_p \neq M_p$. Entonces todo sistema de parámetros de $A/An_A(M)$ es sistema de parámetros de M.

<u>Demostración:</u> considerando a M como un $A/An_A(M)$-módulo podemos suponer simplemente que $\dim_A(M) = \dim(A) = n$. Veamos en primer lugar que $\forall$ ideal I de A $Supp_A(M/IM) = V(I) \cap Supp_A(M)$. En efecto, si $p \in Supp_A(M)$ e $I \subset p$ se tendrá que $IM_p \subset pM_p \neq M_p$, luego $(M/IM)_p \neq 0$ y $p \in Supp_A(M/IM)$. La otra contención es evidente. Sea ahora $p \in Supp_A(M)$ tal que $\dim(A/p) = n$. Si $x_1, \ldots, x_n$ es un sistema de parámetros de A también lo será de A/p, y entonces resultará que $\forall$ r $Supp_A(M/(x_1, \ldots, x_r)M) = V(x_1, \ldots, x_r) \cap Supp_A(M) \supset V(x_1, \ldots, x_r) \cap V(p) = V((x_1, \ldots, x_r), p)$; luego $\dim(Supp_A(M/(x_1, \ldots, x_r)M) \geqslant \dim(V((x_1, \ldots, x_r), \ ) = n - r$. Por otro lado y puesto que $\dim(A/(x_1, \ldots, x_r)) = n - r$ se tiene que $\dim_A(M/(x_1, \ldots, x_r)M) \leqslant n - r$, de manera que que hay igualdad y $x_1, \ldots, x_n$ es sistema de parámetros de M.■

<u>Observación.-</u> La condición $pM_p \neq M_p$ es imprescindible en el enunciado anterior. Por ejemplo, y si A es un dominio local de $\dim(A) = n > 1$, podemos considerar $M = K \oplus A/p$ donde K es el cuerpo de fracciones y p un ideal primo no nulo; $\dim_A(M) = \dim(A/An_A(M)) = n$. Sea $x \notin p$ un elemento no unitario; entonces x forma parte de un sistema de parámetros de A y también de un sistema de parámetros de A/p, de manera que $M/xM = K/xK \oplus A/(x,p)$ es de dimensión n - 2 y, por lo tanto, x no forma parte de un sistema de parámetros de M.

Incluso para A-módulos no finitogenerados con buenas propiedades la condición $pM_p \neq M_p$ $\forall p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ puede fallar. En 2.6 veremos un caso típico en este sentido. Así pues hay que encontrar otro tipo de condición que no dependa tanto del soporte para asegurar la existencia de sistemas de parámetros. Veremos que esta condición viene dada por la cohomología local. Previamente es conveniente introducir la noción de complejo de Cousin de un módulo respecto de una filtración.

Si A es un anillo local y Noetheriano una familia $F = (F_i)_{i \geq 0}$ de subconjuntos de Spec(A) se dice que es una filtración si (i) constituye una cadema descendente de subconjuntos, es decir, $\mathrm{Spec}(A) \supset F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_i \supset \ldots$, y (ii) todo ideal primo de $\delta F_i = F_i - F_{i+1}$ es minimal en F_i (se dice que δF_i es minimal repecto F_i). Un A-módulo M es admitido por la filtración F si $\mathrm{Supp}_A(M) \subset F_0$.

Ejemplos de filtraciones son:

- $\forall i \geq 0$, $H_i = \{ p \in \mathrm{Spec}(A)$ t.q. $h(p) \geq i \}$. Entonces $H = (H_i)_{i \geq 0}$ es la llamada filtración altura de A.

- Si M es un A-módulo puede considerarse $\forall i \geq 0$ $H_i(M) = \{ p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ t.q. $h_M(p) \geq i \}$ (donde $h_M(p)$ indica la altude p en $\mathrm{Supp}_A(M)$). $H(M) = (H_i(M))_{i \geq 0}$ es la llamada filtración altura respecto de M.

- Si M es un A-módulo se define $\forall i \geq 0$ $D_i(M) = \{ p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ t.q. $\dim(A/p) \leq \dim_A(M) - i \}$. $D(M) = (D_i(M))_{i \geq 0}$ es la llamada filtración dimensional respecto de M.

Dado un A-módulo M y $F = (F_i)_{i \geq 0}$ una filtración de Spec(A) admitiendo a M se puede construir un complejo de A-módulos asociado de la siguiente manera:

$\forall r < -1$ se toma $M^r = 0$, y para $r = -1$ $M^{-1} = M$. Se define $M^0 = \bigoplus_{p \in \delta F_0} M_p$. Dado un elemento $m \in M$ hay tan solo un n° finito de ideales primos de δF_0 para los que la imagen de m en M no se anula. En efecto, se tiene que $\mathrm{Supp}_A(mA) \subset \mathrm{Supp}_A(M) \subset F_0$, luego los minimales de F_0 que pertenecen a $\mathrm{Supp}_A(mA)$ son también minimales de $\mathrm{Supp}_A(mA)$, y de estos hay un n° finito.

Hay pues un morfismo natural $M^{-1} = M \xrightarrow{e^{-1}} M^0$. Denotaremos por d^{-1} a e^{-1}. Por otro lado resulta que $\mathrm{Supp}_A(M^0/d^{-1}(M^{-1})) \subset F_1$. En efecto, $\mathrm{Supp}_A(M^0/d^{-1}(M^{-1})) \subset \mathrm{Supp}_A(M^0) \subset \mathrm{Supp}_A(M) \subset F_0$, luego unicamente hemos de ver que si $q \in \delta F_0$ entonces $q \notin \mathrm{Supp}_A(M^0/d^{-1}(M^{-1}))$. Pero $M^0_q = \bigoplus_{p \in \delta F_0} (M_p)_q = M_q$, pues si $p \neq q$ entonces $(M_p)_q = 0$ al ser los ideales primos de δF_0 minimales de F_0. Asimismo $(d^{-1}(M^{-1}))_q = M_q$, luego $(M^0/d^{-1}(M^{-1}))_q = 0$ y $q \notin \mathrm{Supp}_A(M^0/d^{-1}(M^{-1}))$.

Hay entonces un morfismo natural $\mathrm{Coker}(d^{-1}) \xrightarrow{e^0} \bigoplus_{p \in \delta F_1} (\mathrm{Coker}(d^{-1}))_p = M^{1}$. Si se considera el morfismo $M^0 \xrightarrow{h^0} \mathrm{Coker}(d^{-1})$ se puede definir entonces $d^0 = e^0 h^0$. Ahora este proceso se puede repetir recursivamente de manera que $\forall i \geqslant 0$ $M^i = \bigoplus_{p \in \delta F_i} (\mathrm{Coker}(d^{i-2}))_p$ y $d^i = e^i h^i$, obteniéndose así un complejo de A-módulos:

$$0 \to M \xrightarrow{d^{-1}} M^0 \xrightarrow{d^0} M^1 \to \dots \xrightarrow{d^{i-1}} M^i \to \dots$$

llamado <u>complejo de Cousin de M respecto de la filtración F</u> y denotado con <u>$C_A(F, M)$</u>.

El complejo de Cousin de un módulo aparece en relación con la teoría de dualidad de Grothendieck (ver [Ha] IV §2), pero es utilizado por Sharp posteriormente en el estudio de las propiedades Gorenstein y Cohen-Macaulay. Aunque más adelante trataremos este tipo de cuestiones ahora unicamente nos interesa en función de su relación con la cohomología local, al considerar el complejo de Cousin de un A-módulo M respecto de su filtración dimensional. En este sentido el siguiente resultado va a ser de gran utilidad:

1.6 Proposición.- Sea M un A-módulo de diemnsión r. Entonces el término r-ésimo de $C_A(D(M), M)$ es isomorfo a $H^r(M)$.

Demostración: ver [Sh-2] Th. 1.8.■

Sea ahora M un A-módulo con $\dim_A(M) = r$ y consideremos x tal que $x \notin p\ \forall p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ con $\dim(A/p) = \dim_A(M)$. Podemos construir entonces los siguientes complejos:

(1) Complejo de Cousin dimensional de M, $\underline{C}_A(D(M), M)$:

$$0 \to M \xrightarrow{d^{-1}} M^0 \xrightarrow{d^0} \cdots \xrightarrow{d^{r-1}} M^r \to 0 .$$

(2) $\underline{C}_A(D(M), M)^*$, complejo obetnido al considerar

$$0 \to \mathrm{Coker}(d^{-1}) \xrightarrow{e^0} M^1 \xrightarrow{d^1} \cdots \xrightarrow{d^{r-1}} M^r \to 0$$

transformado por el functor $\mathrm{Hom}_A(A/(x),.)$.

(3) Si $N = M/xM$ se toma la filtración $F = (F_i)_{i \geq 0}$ donde $F_i = \{ p \in \mathrm{Supp}_A(M) \text{ t.q. } \dim(A/p) \leq \dim_A(M) - (1 + i)\}$ y se toma al complejo $\underline{C}_A(F, M)$.

El siguiente resultado generaliza [Sh-2] Th. 2.2 al conside-x unicamente con la propiedad antes requerida:

1.7 Proposición.- Existe una epiyección de complejos

$$\Psi : C_A(F, N) \to C_A(D(M), M)^* .$$

<u>Demostración:</u> hemos de construir un morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & N & \xrightarrow{f^{-1}} & N^0 & \xrightarrow{f^0} & N^1 \to & \cdots & \xrightarrow{f^{r-2}} & N^{r-1} & \to 0 \\
 & & \downarrow \psi^{-1} & & \downarrow \psi^0 & & \downarrow \psi^1 & & & \downarrow \psi^{r-1} & \\
0 & \to & (\mathrm{Coker}(d^{-1}))^* & \xrightarrow[(e^0)^*]{} & (M^1)^* & \xrightarrow[(d^1)^*]{} & (M^2)^* \to & \cdots & \xrightarrow[(d^{r-1})^*]{} & (M^r)^* & \to 0
\end{array}$$

que sea epimorfismo a cada nivel. Lo haremos recursivamente: construiremos ψ^{-1} y supuesto construido ψ^i encontraremos a ψ^{i+1}.

- ψ^{-1}. Consideremos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to M \xrightarrow{d^{-1}} M^0 \xrightarrow{h^0} \mathrm{Coker}(d^{-1}) \to 0 \quad (d^0 = e^0h^0) .$$

Puesto que $x \notin p \ \forall p$ tal que $\dim(A/p) = \dim_A(M)$ se tiene que el producto por x es un isomorfismo de M^0. Luego se tiene un epimorfismo de M^0 en $M^0/xd^{-1}(M^0)$ de nucleo $d^{-1}(M)$ y por lo tanto un isomorfismo $\mathrm{Coker}(d^{-1}) \cong M^0/xd^{-1}(M)$. Tomando el functor $\mathrm{Hom}_A(A/(x),.)$ resultará que $(\mathrm{Coker}(d^{-1}))^* \cong (M^0/xd^{-1}(M))^* \cong (xd^{-1}(M):x)_{M^0}/xd^{-1}(M) \cong d^{-1}(M)/xd^{-1}(M)$. Por otro lado hay un epimorfismo de M/xM en $d^{-1}(M)/xd^{-1}(M)$ de manera que componiendo a éste con el isomorfismo anterior obtenemos el epimorfismo $\psi^{-1}:N \to (\mathrm{Coker}(d^{-1}))^*$.

Proceso recursivo:

- i = 0. Se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \to & N & \xrightarrow{f^{-1}} & N^0 \\
 & & \downarrow \psi^{-1} & & \downarrow \psi^0 \\
 & & (\mathrm{Coker}(d^{-1}))^* & \xrightarrow[(e^0)^*]{} & (M^1)^*
\end{array} , \quad \psi^{-1} \text{ epimorfismo.}$$

ψ^{-1} induce de forma natural un epimorfismo $N^0 \xrightarrow{\theta^0} \bigoplus_{p \in \delta F_0} (\mathrm{Coker}(d^{-1}))^*_p$ $\cong \bigoplus_{p \in \delta F_0} (\mathrm{Coker}(d^{-1})_p)^* \cong (\bigoplus_{p \in \delta F_0} \mathrm{Coker}(d^{-1})_p)^* \cong (M^1)^*$, de manera que componiendo a θ^0 con estos isomorfismos se obtiene el epimorfismo ψ^0 .

- $i > 0$. El epimorfismo $\psi^i : N^i \to (M^{i+1})^*$ induce de forma natural un epimorfismo $\bar{\psi}^i : \mathrm{Coker}(f^{i-1}) \to \mathrm{Coker}((d^i)^*)$ y por lo tanto un epimorfismo $\theta^{i+1} : N^{i+1} \to \bigoplus_{p \in \delta F_{i+1}} (\mathrm{Coker}(d^i)^*)$.

Vamos a establecer también un epimorfismo ν^i entre $(\mathrm{Coker}((d^i)^*)$ y $(\mathrm{Coker}(d^i))^*$ de la siguiente forma: el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Coker}(d^{i-1}))^* \arrow[r, "(e^i)^*"] \arrow[d, equal] & (M^{i+1})^* \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Coker}((d^i)^*) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\nu^i"] & 0 \\
(\mathrm{Coker}(d^{i-1}))^* \arrow[r, "(e^i)^*"'] & (M^{i+1})^* \arrow[r, "(h^{i+1})^*"'] & (\mathrm{Coker}(d^i))^* &
\end{tikzcd}$$

induce un morfismo ν^i. Si vemos que $(h^{i+1})^*$ es epimorfismo también lo será ν^i. Pero como $x \notin p \ \forall p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ tal que $\dim(A/p) = \dim_A(M)$ se tiene que el producto por x es un isomorfismo de M^0 y, por construcción, será un epimorfismo de $M^i \ \forall i \geq 0$. Luego si $\bar{m} \in (0:x)_{(\mathrm{Coker}(d^i))} \cong (\mathrm{Coker}(d^i))^*$ existe $z \in (M^i)^*$ tal que $d^i(xz) = xd^i(z) = xm \in d^i(M^i)$. En particular $x(m - d^i(z)) = 0$ y $a = m - d^i(Z) \in (0:x)_{M^{i+1}} \cong (M^{i+1})^*$, luego $(h^{i+1})^*(a) = m - d^i(Z) = \bar{m}$ y concluimos que $(h^{i+1})^*$ es epimorfismo.

El epimorfismo ν^i induce ahora un epimorfismo $\mu^i : \bigoplus_{p \in \delta F_{i+1}} \mathrm{Coker}((d^i)^*) \to \bigoplus_{p \in \delta F_{i+1}} (\mathrm{Coker}(d^i))^* \cong \bigoplus_{p \in \delta F_{i+1}} (\mathrm{Coker}(d^i))^* \cong \left(\bigoplus_{p \in \delta F_{i+1}} \mathrm{Coker}(d^i) \right)^* \cong (M^{i+2})^*$, de manera que por composición con θ^{i+1} obtenemos un epimorfismo $\psi^{i+1} : N^{i+1} \to (M^{i+2})^*$ tal como deseábamos.

Por otro lado Ψ es epimorfismo de complejos por construcción, por lo que queda finalizada la demostración.■

1.8 Corolario.- Sup $\{ i$ t.q. $N^i \neq 0 \} \geqslant \sup \{ i$ t.q. $(M^i)^* \neq 0\} - 1$. En particular si $(M^i)^* \neq 0$ para algún $i > 0$ entonces $\dim_A(N) = \dim_A(M) - 1$, $xM \neq M$ y el complejo $C_A(F,N)$ es el complejo de Cousin dimensional de N.

Demostración: la primera parte es inmediata. Por otro lado $\dim_A(N) < \dim_A(M)$ pues $x \notin p \quad \forall p$ tal que $\dim(A/p) = \dim_A(M)$. Si entonces $(M^i)^* \neq 0$ para cierto $i > 0$ se tendrá que $N^{i-1} \neq 0$ con $i - 1 \geqslant 0$. Por construcción de $C_A(F, N)$ N^0 debe ser no nulo y, en consecuencia, $\mathrm{Supp}_A(N) \cap F_0 \neq \emptyset$. Luego $N \neq 0$ ($xM \neq M$) y $\dim_A(N) = \dim_A(M) - 1$. Es claro entonces que por la misma definición de F se tiene $C_A(F, N) = C_A(D(N), N)$.■

Utilizando ahora la relación entre la cohomología local y el complejo de Cousin dimensional de un módulo podemos enunciar:

1.9 Corolario.- Si $\dim_A(M) = \sup \{ i$ t.q. $H^i_m(M) \neq 0 \} = r$ entonces $\dim_A(N) = \dim_A(M) - 1$, $xM \neq M$ y $\dim_A(N) = \sup \{ i$ t.q. $H^i_m(N) \neq 0 \}$.

Demostración: por 1.6 $M^r \cong H^r_m(M) \neq 0$. Pero $H^r(M)$ es un A-módulo de dimensión 0 ([Mac-Sh] 2.1), luego $(M^r)^* \cong (H^r_m(M))^* \neq 0$. Aplicando el Corolario anterior se tiene que $\dim_A(N) = \dim_A(M) - 1$, $xM \neq M$ y $C_A(F, N) = C_A(D(N), N)$. Por la segunda parte del mismo Corolario obtenemos que $\dim_A(N) = \sup \{ i$ t.q. $H^i_m(N) \neq 0 \}$, pues $N^{r-1} \cong H^{r-1}_m(N)$.■

En relación con la existencia de sistemas de parámetros podemos enunciar:

1.10 Proposición.- Sea M un A-módulo tal que $r = \dim_A(M) = \dim(A/\mathrm{An}_A(M))$ y tal que $\sup \{ i$ t.q. $H^i_m(M) \neq 0 \} = \dim_A(M)$. Entonces todo sistema de parámetros de $A/\mathrm{An}_A(M)$ es sistema de parámetros de M.

Demostración: puesto que $\forall i\ H^i_{m}(M) \cong H^i_{m/An_A(M)}(M)$ ([He-Ku] 4.11) podemos suponer que $An_A(M) = 0$ y que $r = n = \dim(A)$. Sea entonces $x_1, \dots, x_n$ un sistema de parámetros de A. Bastará comprobar que $\forall\ i = 1, \dots, n\ \dim_A(M/(x_1, \dots, x_i)M) = n - i$; lo haremos por inducción sobre i.

$i = 1$. x_1 forma parte de un sistema de parámetros de A, luego $x_1 \notin p\ \ \forall p \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $\dim(A/p) = \dim(A)$. Luego podemos aplicer el Corolario 1.9 y obtener que $M_1 = M/x_1M \neq 0$ es tal que $\dim_A(M_1) = \sup \{ i \text{ t.q. } H^i_{m}(M_1) \neq 0 \} = n - 1$.

Hagamos hipótesis de inducción y supongamos $i \geq 2$. Como $An_A(M_{i-1}) \supset (x_1, \dots, x_{i-1})$ resulta que $\dim(A/An_A(M_{i-1})) \leq n - i + 1 = \dim(A/(x_i, \dots, x_{i-1}))$. Por otro lado $\dim_A(M_{i-1}) \leq \dim(A/An_A(M_{i-1}))$, de manera que aplicando la hipótesis de inducción obtenemos que $\dim(A/An_A(M_{i-1})) = \dim_A(M_{i-1}) = n - 1 + 1$. Ahora, y aplicando el caso $i = 1$, tendremos que $\dim_A(M_i) = \dim_{A/An_A(M_{i-1})}(M_i) = n - i$, con lo que acabamos la demostración.■

1.11 Corolario.- Sea M un A-módulo tal que $r = \dim_A(M) = \dim(A/An_A(M)) = \sup \{ i \text{ t.q. } H^i_{m}(M) \neq 0 \}$. Entonces $mM \neq M$.

Demostración: de nuevo podemos pensar en M como un $A/An_A(M)$-módulo. Sea $x_1, \dots, x_n$ un sistema de parámetros de A. Existe entonces $s > 0$ tal que $m^s \subset (x_1, \dots, x_n)$. Por otro lado $x_1, \dots, x_n$ será sistema de parámetros de M (1.10) luego $\dim(M/(x_1, \dots, x_n)M) = 0$ y en particular $(x_1, \dots, x_n)M \neq M$. Es inmediato entonces que $mM \neq M$.■

Observación.- La condición $\dim_A(M) = \sup \{ i \text{ t.q. } H^i_{m}(M) \neq 0 \}$ no es por si misma suficiente para garantizar la existencia de un sistema de parámetros de M. Por ejemplo, el A-módulo descrito al principio de este apartado la verifica: $H_m^{n-1}(M) = \bigoplus_{x \in m - \{0\}} H_m^{n-1}(A/xA) \neq 0$ ya que $\forall\, x \in m - \{0\}$ A/xA es finitogenerado de dimensión n - 1; en cambio M no tiene ningún sistema de parámetros. Por otro lado ninguna de las dos condiciones de la Proposición 1.10 es <u>en realidad necesaria</u> para asegurar la existencia de un sistema de parámetros del módulo. Veamos un ejemplo:

sea A un dominio local cualquiera de dimensión $n \geq 2$. Sea $p \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $\dim(A/p) = r$, $1 \leq r \leq n$, e I un ideal de A tal que $p \subset I$ y $\dim(A/I) = r - 1$. Consideremos entonces $M = E_A(A/p) \oplus A/I$; se tiene que $\forall\, a \in I - p$ $aM = E_A(A/p)$ de manera que $M/aM = A/I$. Puesto que $\dim_A(M) = \dim(A/p) = r$ resulta que a forma parte de un sistema de parámetros de M y estos pueden ser obtenidos, por ejemplo, completando a con un sistema de parámetros de A/I. En cambio $\mathrm{An}_A(M) = 0$, pues $E_A(A/p)$ es fiel por ser A dominio, y $H_m^r(M) = H_m^r(E_A(A/p)) \oplus H_m^r(A/I) = 0$ pues $E_A(A/p)$ es inyectivo y A/I es de dimensión r - 1.

Como acabamos de ver la condición $\dim_A(M) = \sup\{\, i \text{ t.q } H_m^i(M) \neq 0 \,\}$ no es en si misma suficiente para asegurar la existencia de un sistema de parámetros de M. La principal dificultad, claro está, es poder encontrar un elemento $x \in m$ tal que $x \notin p$ $\forall\, p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ con $\dim(A/p) = \dim_A(M)$. No obstante, y <u>si el anillo es completo y M es numerablemente generado</u>, la condición es suficiente. Para demostrarlo utilizaremos el siguiente resultado de Sharp y Vámos que generaliza en cierto sentido el conocido lema de evitación de primos.

1.12 Lema.- Sea A un anillo Noetheriano, local y completo. Sea

$\{ p_i \}_{i=1,2,\dots}$ una familia numerable de ideales primos de A y sea I un ideal de A tal que $I \subset \bigcup_{i=1} p_i$. Entonces $\exists$ j tal que $I \subset p_j$.

Demostración: [Sha-Vâ] 2.6.■

1.3 Proposición.- Sea A un anillo Noetheriano, local y completo. Sea M un A-módulo numerablemente generado tal que $\dim_A(M) = \sup \{ i \text{ t.q. } H^i_m(M) \neq 0 \}$. Entonces existe un sistema de parámetros de M.

Demostración: puesto que M es numerablemente generado $\mathrm{Ass}_A(M)$ es un conjunto numerable ([Sha-Vâ] 3.2). Pero

$F = \{ p \in \mathrm{Supp}_A(M) \text{ t.q. } \dim(A/p) = \dim_A(M) \}$ está contenido en los minimales de A, luego F es numerable. Puesto que ninguno de ellos contiene a m el Lema 1.12 nos asegura que $m \not\subset \bigcup_{p \in F} p$, luego existe $x \in m$ tal que $x \notin p \ \forall p \in F$. Por el Corolario 1.9 tenemos entonces que $\dim_A(M/xM) = \dim_A(M) - 1 = \sup \{ i \text{ t.q. } H^i_m(M/xM) \neq 0 \}$. Como M/xM es también numerablemente generado podemos repetir el proceso hata completar un sistema de parámetros de M.■

Es bien conocido que si M es un A-módulo finitogenerado entonces $a_1, \dots, a_r$ es sistema de parámetros de M si y solo si es sistema de parámetros de $A/\mathrm{An}_A(M)$ ([Se] III Prop.7). Como más adelante veremos (2,11) ni siquiera en las condiciones de la Proposición 1.10 es posible asegurar esto para los A-módulos no finitogenerados. Sí lo es, no obstante, para los A-módulos que tienen un submódulo básico. En efecto:

1.14 Proposición.- Sea M un A-módulo y $L \subset M$ un submódulo básico de M. Entonces $a_1, \dots, a_n$ es sistema de parámetros de A si y solo si

$a_1, \ldots, a_n$ es sistema de parámetros de M. En particular si M es fielmente plano.

Demostración: ya hemos visto que $\dim_A(M) = \dim(A) = n$ y que $H^n_m(M) \neq 0$. Por otro lado $An_A(M) \subset An_A(L) = (0)$ por ser L libre. Luego por 1.10 todo sistema de parámetros de A lo es de M. Reciprocamente: supongamos que $a_1, \ldots, a_n$ es un sistema de parámetros de M. Por ser $L \subset M$ una extensión pura se tiene entonces que $\forall\, i = 1, \ldots, n$

$L_i = L/(a_1, \ldots, a_i)L \subset M/(a_1, \ldots, a_i)M$. Luego $\dim_A(L_i) \leqslant \dim_A(M) - i$. Pero como L es libre $\dim_A(L_i) = \dim(A/(a_1, \ldots, a_i)) \geqslant n - i$, luego $\dim(A/(a_1, \ldots, a_i)) = n - i$ y $a_1, \ldots, a_n$ es sistema de parámetros de A.■

Los A-módulos con un submódulo básico verifican también otras propiedades que los acercan en cierta manera a los módulos finitogenerados. Por ejemplo, es cierto que todo A-módulo finitogenerado cumple que $\forall\, p \in \mathrm{Supp}_A(M) - \{ m \}$ la aplicación natural $M \xrightarrow[f_p]{} M_p$ no es epimorfismo. En efecto, $f_p(M) \cong M/\mathrm{Ker}(f_p)$, finitogenerado, luego por el lema de Nakayama $mf_p(M) \neq f_p(M)$ mientras que $mM_p = M_p$. Se tiene entonces:

1.15 Proposición.- Sea M un A-módulo y $L \subset M$ un submódulo básico de M. Entonces $\forall\, p \in \mathrm{Supp}_A(M) - \{ m \}$ la aplicación natural $M \xrightarrow[f_p]{} M_p$ no es epimorfismo.

Demostración: $\forall\, p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ se tiene que $L_p \subset M_p$. Si f_p fuera epimorfismo entonces $\forall\, a \notin p$ y $\forall\, l \in L$ se tendría $l/a = m/1$ para cierto $m \in M$. Luego existe $b \notin p$ tal que $lb - mab = 0$ y, por lo tanto, $mab \in L$. Puesto que $L \subset M$ es una extensión pura existe $l' \in L$ tal que $lb = mab - l'ab$, luego $l/a = l'/b$ y también la aplicación natural $L \xrightarrow[f_p]{} L_p$ es epimorfismo. Pero esto no es posible ya que L es libre.■

CAPITULO 2

2.- GRANDES MODULOS DE COHEN-MACAULAY EQUILIBRADOS: CARACTERIZACION Y PROPIEDADES GENERALES.

Nos centramos en este segundo capítulo en el estudio de los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados desde el punto de vista de su caracterización y también de las propiedades de su soporte. Sobre lo primero damos en la Proposición 2.5 una lista de caracterizaciones (alguna de ellas ya conocida) entre las que cabe destacar la siguiente: si (A,m) es un anillo conmutativo, local y Noetheriano y M es un A-módulo entonces M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado si y solo si todo sistema de parámetros de M es M-sucesión.

Respecto a las propiedades del soporte de un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M observamos en primer lugar las anomalías que puede presentar (Proposición 2.7) y la necesidad de introducir el soporte pequeño: $supp_A(M)$. Al estudiar cuando ambos coinciden obtenemos que si M es un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado entonces $supp_A(M) = Supp_A(M)$ si y solo si todo sistema de parámetros de M lo es de $A/An_A(M)$.(Proposición 2.11).

Las cuestiones anteriores están también relacionadas con la conmutación de las M-sucesiones.para M A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. De hecho obtenemos que estas conmutarán bajo dos tipos de condiciones: coinci-

dencia del los soportes habitual y pequeño por un lado (Proposición 2.13), y propiedades de tipo topológico (Proposición 2.17). Estas últimas tienen como consecuencia que si A es regular y M es un A-módulo tal que para todo ideal I de A el submódulo IM es cerrado en M para la topología m-ádica entonces M es gran módulo de Cohen-Macaulay si y solo si M es fielmente plano sobre A (Proposición 2.17), lo cual generaliza parte de Theorem 1.1 de [Gri-2] al no exigir la condición numerablemente generado a M.

§1.- CARACTERIZACION DE LOS GRANDES MODULOS DE COHEN-MACAULAY EQUILIBRADOS.

(A, m) continuará siendo un anillo conmutativo, local y Noetheriano con ideal maximal m. Un A-módulo M se dice que es <u>A-gran módulo de Cohen-Macaulay</u> si existe un sistema de parámetros de A $a_1, \ldots, a_n$ tal que es M-sucesión, es decir, $\forall i = 1, \ldots, n$ $a_i \notin Z_A(M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M)$ y $(a_1, \ldots, a_n)M \neq M$. Puesto que el ideal $(a_1, \ldots, a_n)$ es m-primario esta última condición es equivalente a que $mM \neq M$. También se dice que M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay respecto $a_1, \ldots, a_n$.

La existencia de un A-gran módulo de Cohen-Macaulay respecto un sistema de parámetros dado constituye la llamada <u>Conjetura de grandes módulos de Cohen-Macaulay</u>, y tiene gran importancia en el área de de las denominadas Cojeturas homológicas por dos motivos:

en primer lugar debido a que de ella se derivan gran parte de las restentes conjeturas, como son la del sumando directo, la de Bass, las diferentes conjeturas de intersección, syzygyas, etc, y en segundo lugar porque gracias a la formidable demostración de Hochster la conjetura es cierta siempre que al anillo A contenga un cuerpo (véase [Ho-2], [Ho-3], [Ho-4], [E-G-1], [E-G-2] y [St]).

Los grandes módulos de Cohen-Macaulay son por regla general no finitogenerados; de hecho la existencia de un tal módulo finitogenerado constituye la Conjetura de pequeños módulos de Cohen-Macaulay, de la que hay contraejemplos si el anillo A no es completo ([Gi], pág.17). Ocurre entonces que los módulos no finitogenerados no verifican las mismas propiedades desde el punto de vista de la dimensión de Krull y del grado que los módulos finitogenerados. Ya hemos visto en el Capítulo 1 algunas de estas diferencias en torno a la dimensión de Krull. También las hay alrrededor del grado. Veamos un ejemplo:

es bien conocido que si M es un A-módulo finitogenerado y $a_1, \ldots, a_r$ es una M-sucesión entonces toda permutación de ella es también M-sucesión. En cambio existen grandes módulos de Cohen-Macaulay que no verifican esta propiedad. En efecto, sea $A = K[X,Y]_{(X,Y)}$, K un cuerpo. Sea $M = A \oplus E_A(A/(Y))$. Entonces X, Y es M-sucesión (pues $M/XM = A/(X)$), pero en cambio Y, X no lo es (pues $Y \in Z_A(M)$).

Este contraejemplo es de Foxby ([Gri-1] Remark 3.3) y no es separado para la topología m-ádica de A ($E_A(A/(Y) \subset m^n M \ \forall n > 0$). Otros contraejemplos que sí lo son pueden encontrarse en [Ba-St] 3.11 a).

Por otro lado Griffith en un intento de resolver al conjetura de pequeños módulos de Cohen-Macaulay a partir de la de grandes módulos utiliza en [Gri-1] una clase especial de grandes módulos de Cohen-Macaulay: aquellos para los que todo sistema de parámetros de A es M-sucesión. La existencia de tales módulos ya había sido probada por Hochster mismo en [Ho-2] Th.5.7 en relación con cuestiones de platitud, pero son Bartjin y Strooker quienes en [Ba-St] Th.1.7 se dan cuenta de su abundancia al demostrar que el completado separado de un gran módulo de Cohen-Macaulay es gran módulo de Cohen-Macaulay respecto cualquier sistema de parámetros de A. Finalmente Sharp da el nombre de grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados a este tipo de A-módulos y demuestra en [Sh-2] y [Sh-3] que verifican algunas de las propiedades de los módulos Cohen-Macaulay finitogenerados.

Antes de continuar adelante vamos a fijar algunas notaciones y conceptos:

para un A-módulo M y dado un ideal primo p de A denotaremos por $\mu_A^i(p,M)$ al i-ésimo número de Bass de M respecto de p, es decir, el número de copias de $E_A(A/p)$ que aparecen en el i-ésimo término de una resolución inyectiva minimal de M. Se define el grado del A-módulo M como $G_A(M) = \min \{ i \text{ t.q. } \mu_A^i(m,M) \neq 0 \}$. Las propiedades del grado así definido son en su aspecto más básico iguales a las del grado definido por medio de M-sucesiones. Más en concreto se tiene que $G_A(M) < \infty$ si $mM \neq M$ (M no es m-divisible), y si $a_1, \ldots, a_r$ es una M-sucesión tal que $m \in \mathrm{Ass}_A(M/(a_1, \ldots, a_r)M)$ entonces $G_A(M) = r$. Por otro lado , y si $G_A(M) < \infty$, siempre $G_A(M) \leq \dim_A(M)$; además este grado viene caracterizado por la cohomología local de la misma forma que en el caso finitogenerado: $G_A(M) = \inf \{ i \text{ t.q. } H_m^i(M) \neq 0 \}$.

El grado así generalizado fue introducido por Foxby en [Fo-1], donde están demostradas con detalle las propiedades citadas.

Dado un A-módulo M se define el <u>soporte pequeño de M</u> como $\mathrm{supp}_A(M) = \{ p \in \mathrm{Spec}(A)$ t.q. $\exists$ i con $\mu^i_A(p,M) \neq 0 \}$. Teniendo en cuenta las propiedades de localización de los números de Bass se tiene que $\mathrm{supp}_A(M) = \{ p \in \mathrm{Spec}(A)$ t.q. $G_{A_p}(M_p) < \infty \}$. Es evidente que $\mathrm{supp}_A(M) \subset \mathrm{Supp}_A(M)$, y es inmediato que $\mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{supp}_A(M)$, pues si $A/p \subset M$ también $E_A(A/p) \subset E_A(M)$ y $\mu^0_A(p,M) \neq 0$. Si M es finitogenerado $\mathrm{supp}_A(M) = \mathrm{Supp}_A(M)$, pero <u>si M no es finitogenerado no hay por lo general coincidencia entre ambos soportes.</u> Por ejemplo si $p \in \mathrm{Spec}(A) - \{m\}$ y $M = E_A(A/p)$ entonces $\mathrm{supp}_A(M) = \{p\}$ mientras que $\mathrm{Supp}_A(M) = V(p)$. Esta no coincidencia se mantiene incluso para "buenos" módulos no finitogenerados como más adelante veremos. La noción de soporte pequeño fue dada por Foxby en el contexto de su teoría de complejos de A-módulos ([Fo-2] , 2 Definition) y en cierta manera sustituye al soporte habitual cuando se consideran módulos no finitogenerados.

Recordemos por último que un A-módulo M se dice que es <u>A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado</u> si todo sistema de parámetros de A es M-sucesión. Es claro a partir de 1.A y de las propiedades que hemos citado del grado que si M es gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado (incluso si M es gran módulo de Cohen-Macaulay) entonces $G_A(M) = \dim_A(M) = \inf \{ i \text{ t.q } H^i_m(M) \neq 0 \} =$
$\sup \{ i \text{ t.q. } H^i_m(M) \neq 0 \}$.

En la siguiente Proposición damos una lista de las propiedades más importantes de los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibeados y que Sharp demuestra en [Sh-3] :

2.1 Proposición.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces se verifica:

(i) $\forall\, p \in \mathrm{supp}_A(M)$ $h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$.

(ii) $p \in \mathrm{supp}_A(M) \Leftrightarrow \exists\, a_1, \ldots, a_r \in A$, $r = h(p)$, M-sucesión tal que $p \in \mathrm{Ass}_A(M/(a_1, \ldots, a_r)M)$.

(iii) $\forall\, p \in \mathrm{supp}_A(M)$ $G_{A_p}(M_p) = h(p)$.

(iv) Para toda M-sucesión $a_1, \ldots, a_r$ $\mathrm{Ass}_A(M/(a_1, \ldots, a_r)M)$ es finito.

(v) Para todo ideal I de A las M-sucesiones formadas por elementos de I y maximales con esta condición tienen igual longitud.

(vi) $\forall\, a \in A$ tal que forma parte de un sistema de parámetros de A M/aM es A/aA-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Demostración: ver [Sh-3].■

Como consecuencia de la anterior lista de propiedades se tiene una nueva caracterización de los ideales primos del $\mathrm{supp}_A(M)$; previamente un lema:

2.2 Lema.- Sea $p \in \mathrm{Spec}(A)$, $r = \dim(A) - \dim(A/p)$ y $x_1, \ldots, x_k$ $k \leq r$ elementos de p tales que forman parte de un sistema de parámetros de A. Entonces existen elementos $x_{k+1}, \ldots, x_r \in p$ tales que $x_1, \ldots, x_r$ forma parte de un sistema de parámetros de A.

Demostración: por hipótesis $\dim(A/(x_1, \ldots, v_k)) = \dim(A) - k \geq \dim(A/p) = \dim(A) - r$. Supongamos que $k < r$. Sea $F = \{\, q \in \mathrm{Spec}(A)$ t.q. $(x_1, \ldots, x_k) \subset q$ y $\dim(A/q) = \dim(A) - k \,\}$. F es finito, pues está contenido en los minimales de $(x_1, \ldots, x_k)$, y $p \notin F$. Luego por el lema de evitación de primos $p \not\subset \bigcup_{q \in F} q$ existe $x_{k+1} \in p$ t.q. $\dim_A(A/(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})) = \dim(A) - k - 1$. Aplicando reiteradamente este proceso acabaríamos la demostración.■

2.3 Proposición.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $p \in \mathrm{Spec}(A)$. Entonces $p \in \mathrm{supp}_A(M) \Leftrightarrow h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$ y $pM_p \neq M_p$.

<u>Demostración:</u> supongamos que $p \in \mathrm{supp}_A(M)$. Por 2.1 (i) se tiene que $h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$, y por el Lema 2.2 existen $x_1, \ldots, x_r \in p$ $r = h(p)$ tales que forman parte de un sistema de parámetros de A. Serán pues M-sucesión y por 2.1 (ii) y (v) maximal en p, luego $p \subset \bigcup_{q \in \mathrm{Ass}_A(M/(x_1, \ldots, x_r)M)} q$. Pero por 2.1 (iv) esta es una reunión de tan solo un número finito de primos, de manera que $\exists\, q \in \mathrm{Ass}_A(M/(x_1, \ldots, x_r)M)$ con $p \subset q$. Pero por 2.1 (ii) q debe tener altura r, luego $q = p$ y en particular $(M/(x_1, \ldots, x_r M)_p = M_p/(x_1, \ldots, x_r)M_p \neq 0$.

Por otro lado $\dim(A/(x_1, \ldots, x_r)) = \dim(A) - r = \dim(A) - h(p) = \dim(A)$. En consecuencia $(x_1/1, \ldots, x_r/1)$ es un ideal pA_p-primario y también $pM_p \neq M_p$.

Recíprocamente, si $\dim(A) = h(p) + \dim(A/p)$ de nuevo por el Lema 2.2 existen $x_1, \ldots, x_r \in p$ $r = h(p)$ formando parte de un sistema de parámetros de A. Como $pM_p \neq M_p$ también $(x_1, \ldots, x_r)M_p \neq M_p$ y $p \in \mathrm{Supp}_A(M/(x_1, \ldots, x_r)M)$. Dado que p es minimal sobre $(x_1, \ldots, x_r)$ se tendrá que $p \in \mathrm{Ass}_A(M/(x_1, \ldots, x_r)M)$ y por 2.1 (ii) $p \in \mathrm{supp}_A(M)$.■

Más adelante volveremos a estudiar el soporte pequeño de un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Ahora pasamos a caracterizar de distintas formas a estos módulos:

2.4 Lema.- Sea M un A-módulo y $x \in m - Z_A(M)$. Entonces $\operatorname{supp}_{A/(x)}(M/(x)M) = \widetilde{\operatorname{supp}_A(M) \cap V(x)}$, donde $\sim$ significa reducción módulo (x).

Demostración: puesto que los números de Bass localizan se tiene que $p \in \operatorname{supp}_A(M) \Leftrightarrow pA_p \in \operatorname{supp}_{A_p}(M_p)$. Por otro lado localizar es un functor plano que conmuta con el paso al cociente de manera que bastará demostrar que $m \in \operatorname{supp}_A(M) \Leftrightarrow \widetilde{m} \in \operatorname{supp}_{A/(x)}(M/(x)M)$. Asimismo $G_A(M/xM) = G_{A/(x)}(M/xM)$ (pues $(x) \subset \operatorname{An}_A(M/(x)M)$) por lo que es suficiente probar que $m \in \operatorname{supp}_A(M)$ si y solo si $m \in \operatorname{supp}_A(M/(x)M)$. Y así es:

consideremos la sucesión exacta $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/(x)M \to 0$. Tomando Ext. deducimos la sucesión exacta

$$\cdots \to \operatorname{Ext}_A^{r-1}(A/m,M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}_A^{r-1}(A/m,M) \to \operatorname{Ext}_A^{r-1}(A/m,M/(x)M) \to$$

$\to \operatorname{Ext}_A^{r}(A/m,M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}_A^{r}(A/m,M) \to \cdots$. Pero $xA/m = 0$ de manera que se tiene $0 \to \operatorname{Ext}_A^{r-1}(A/m,M) \xrightarrow{x} \operatorname{Ext}_A^{r-1}(A/m,M/(x)M) \to \operatorname{Ext}_A^{r}(A/m,M) \to 0$.

Luego si $\operatorname{Ext}_A^{r}(A/m,M) \neq 0$ también $\operatorname{Ext}_A^{r-1}(A/m,M/(x)M) \neq 0$ y $G_A(M/(x)M) = G_A(M) - 1$. En particular $m \in \operatorname{supp}_A(M) \Leftrightarrow m \in \operatorname{supp}_A(M/(x)M)$. ■

2.5 Proposición.- Para un A-módulo M las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

(ii) $C(D(M),M)$ es exacto y $H_m^n(M) \neq 0$.

(iii) $mM \neq M$ y $\forall p \in \operatorname{supp}_A(M)$ $G_{A_p}(M_p) + \dim(A/p) = \dim(A)$.

(iv) $H_m^n(M) \neq 0$ y $a_1, \ldots, a_r \in A$ forma parte de un sistema de parámetros de M si y solo si es M-sucesión.

(v) Si $0 \to M \to E^0 \to E^1 \to \cdots$ es una resolución inyectiva minimal de M entonces $\forall i$ $\operatorname{Ass}_A(E^i) \subset V^i(A)$ y $mM \neq M$, siendo

$$V^i(A) = \{ p \in \mathrm{Spec}(A) \text{ t.q. } h(p) = \dim(A) - \dim(A/p) \leqslant i \} .$$

Demostración:

(i) ⇒ (ii) Sharp, [Sh-2] Th.4.1.

(i) ⇒ (iii) Por 2.1 (i) y (iii) $G_{A_p}(M_p) = h(p)$ y $h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$.

(iii) ⇒ (i) (Foxby, comunicación privada) Lo demostraremos por inducción sobre $n = \dim(A)$.

$n = 1$ Por hipótesis $\forall p \in \mathrm{Ass}_A(M)$ $\dim(A/p) = \dim(A) - G_{A_p}(M_p) = \dim(A)$. Luego $\forall x \in m$ tal que $\dim(A/(x)) = \dim(A) - 1$ se tiene que $x \notin p$ $\forall p \in \mathrm{Ass}_A(M)$, es decir, $x \notin Z_A(M)$; como $mM \neq M$ x es M-sucesión.

Hagamos hipótesis de inducción y supongamos $n \geqslant 2$. Analogamente al caso $n = 1$ se tiene que $\forall x \in m$ tal que $\dim(A/(x)) = n - 1$ $x \notin Z_A(M)$. Luego por el Lema 2.4 $\mathrm{supp}_{A/(x)}(M/(x)M) = \widehat{\mathrm{supp}_A(M) \cap V(x)}$. Por otro lado $\forall \tilde{p} \in \mathrm{supp}_{A/(x)}(M/(x)M)$ se verifica que $\dim(A/(x)/\tilde{p}) = \dim(A/p)$ y que $G_{(A/(x))_{\tilde{p}}}((M/(x)M)_{\tilde{p}}) = G_{A_p}(M_p) - 1$, de manera que $M/(x)M$ como $A/(x)$ —módulo verifica la condición (iii) del enunciado. Por hipótesis de inducción M/xM es $A/(x)$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Si ahora $x_1, \ldots, x_n$ es un sistema de parámetros de A se tendrá que $x_2, \ldots, x_n$ es $M/(x_1)M$-sucesión, luego como $x_1 \notin Z_A(M)$ también $x_1, \ldots, x_n$ es M-sucesión y M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

(i) ⇒ (iv) Sea $x_i, \ldots, x_r$ parte de un sistema de parámetros de M y supongamos que $x_1, \ldots, x_i$ es M-sucesión. Demostraremos entonces que $x_{i+1} \notin Z_A(M/(x_1, \ldots, x_i)M)$; por recurrencia, y puesto que $mM \neq M$ resultará que $x_1, \ldots, x_r$ es M-sucesión.

Sea pues $N = M/(x_1, \ldots, x_i)M$ $(i \geqslant 0)$ y tomemos $p \in \mathrm{Ass}_A(N)$. Por 2.1 (i) y (ii) $p \in \mathrm{supp}_A(M)$ y $\dim(A/p) = n - i$, y por 2.3 $pM_p \neq M_p$. En particular $\forall x \in p$ el ideal $(x_1, \ldots, x_i, x)$ es tal que

$(x_1, \ldots, x_i, x)M_p \neq M_p$, y en consecuencia $(N/(x)N)_p = N_p/(x)N_p \neq 0$. Es decir, $p \in \mathrm{Supp}_A(N/xN)$ y por lo tanto $\dim_A(N/xN) \geqslant n - i$. Puesto que $x_1, \ldots, x_r$ forman parte de un sistema de parámetros de M se tiene que $\dim_A(N/(x_{i+1})N) = n - i - 1$, de manera que $x_{i+1} \notin p \quad \forall p \in \mathrm{Ass}_A(N)$, es decir, $x_{i+1} \notin Z_A(N)$.

Sea ahora $x_1, \ldots, x_r$ una M-sucesión. Puesto que por 2.1 (v) todas las M-sucesiones maximales tienen longitud $n = \dim(A) = \dim_A(M)$ bastará ver que si $x_1, \ldots, x_n$ es una M-sucesión entonces también es un sistema de parámetros de M. Y así es, ya que $\forall$ i y $\forall p \in \mathrm{Ass}_A(M/(x_1, \ldots, x_i)M)$ se verifica que $\dim(A/p) = n - i$ y en consecuencia $\dim_A(M/(x_1, \ldots, x_i)M) = n - i$.

Por otro lado $n = G_A(M) = \inf \{ i \text{ t.q. } H^i_m(M) \neq 0 \}$, luego $H^n_m(M) \neq 0$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Puesto que $H^n_m(M) \neq 0$ se tiene que $\dim_A(M) = \dim(A/\mathrm{An}_A(M)) = n$. Es claro entonces que todo sistema de parámetros de A lo es también de $A/\mathrm{An}_A(M)$ de manera que por 1.10 todo sistema de parámetros de A lo es de M y por lo tanto es M-sucesión. En definitiva M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

(i) $\Rightarrow$ (v) $p \in \mathrm{Ass}_A(E^i) \Leftrightarrow \mu^i_A(p,M) \neq 0 \Leftrightarrow G_{A_p}(M_p) \leqslant i$. En particular $G_{A_p}(M_p) < \infty$ y $p \in \mathrm{supp}_A(M)$. Pero M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado de manera que por 2.1 (i) $h(p) = n - \dim(A/p) = G_{A_p}(M_p) \leqslant i$, es decir, $p \in V^i(A)$.

(v) $\Rightarrow$ (iii) Hemos de demostrar que $\forall p \in \mathrm{supp}_A(M)$ se verifica $G_{A_p}(M_p) + \dim(A/p) = \dim(A)$. Por definición $\mathrm{supp}_A(M) = \bigcup_{i=0} \mathrm{Ass}_A(E^i)$.

Sea $p \in \mathrm{supp}_A(M)$. Entonces $G_{A_p}(M_p) = \inf \{ i \text{ t.q. } \mu^i_A(p,M) \neq 0 \} = \inf \{ i \text{ t.q. } p \in \mathrm{Ass}_A(E^i) \}$. Luego por hipótesis $G_{A_p}(M_p) \geqslant h(p) =$

$= \dim(A) - \dim(A/p)$. Pero por otro lado $G_{A_p}(M_p) \leq \dim_{A_p}(M_p) \leq \dim(A/p) - h(p)$ por ser $G_{A_p}(M_p) < \infty$, de manera que

$G_{A_p}(M_p) + \dim(A/p) = h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$.■

Observaciones.-

(1) En la caracterización (iii) es necesario imponer la condición $mM \neq M$. Por ejemplo si $p \in \mathrm{Spec}(A)$ es tal que $\dim(A) = \dim(A/p)$ entonces $M = E_A(A/p)$ verifica que $\mathrm{supp}_A(M) = \{ p \}$ y $G_{A_p}(M_p) + \dim(A/p) = \dim(A/p) = \dim(A)$. Pero M no es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado pues $mM = M$. Esta condición no aparece en la comunicación de Foxby.

(2) La caracterización (v) generaliza [T-H] Th.2.3 en dos sentidos. Por un lado A es cualquiera (allí A debe ser V^{n-2}-anillo) y por otro no presupone que M sea A-gran módulo de Cohen-Macaulay.

§2.- EL SOPORTE PEQUEÑO DE UN GRAN MODULO DE COHEN-MACAULAY EQUILIBRADO.

A pesar de que como acabamos de ver los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados se caracterizan de forma parecida a los módulos Cohen-Macaulay finitogeneradosenseguida aparecen anomalías que dan a entender que no se pueden generalizar las propiedades de estos últimos a los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados sistematicamente. Por ejemplo, no siempre se verifica $\mathrm{supp}_A(M) = \mathrm{Supp}_A(M)$ para M gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado como enseguida vamos a ver. Sharp da el siguiente contraejemplo en [Sh-3] (3.5):

sea R el dominio local no catenario construido por Nagata en [Na] A.1 Ex.2. R contiene un cuerpo de manera que existe un R-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M. Por ser R dominio tendremos que $Z_R(M) = (0)$ y, por lo tanto, $M_{(0)} \neq 0$. Luego $\mathrm{Supp}_A(M) = \mathrm{Spec}(R)$. Pero por ser R no catenario existe un ideal primo p tal que $h(p) + \dim(A/p) \neq \dim(A)$, luego por 2.1 (i) $p \notin \mathrm{supp}_A(M)$.

Profundizando más en este contraejemplo se tiene:

2.6 Proposición.- La condición $h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$ de 2.1 (i) no es suficiente para que un ideal primo p de Spec(A) pertenezca a $\mathrm{supp}_A(M)$, M A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Demostración: vamos a ver en primer lugar que el anillo construido por Nagata citado en el párrafo anetrior es analiticamente irreducible, es decir, que su completado es íntegro. En efecto, y usando la misma notación de [Na] A.1, se tiene que $V = (R_2)_m$ es un anillo local regular. Luego $\hat{V}$ también y en particular $\hat{V}$ es dominio. Por otro lado V domina a R, es decir, $mV \cap R = \mathcal{L}$, maximal de R, luego existe una inclusión de $\hat{R}$ en $\hat{V}$ y también $\hat{R}$ es dominio.

Sea ahora M un $\hat{R}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Todo sistema de parámetros de R lo es de $\hat{R}$ de manera que M como R-módulo es también gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Luego existe $p \in \mathrm{Spec}(R)$ tal que $p \notin \mathrm{supp}_R(M)$. Sea $r = h(p)$. Por el Lema 2.2 existen elementos $x_1, \ldots, x_r$ de p formando parte de un sistema de parámetros de R, de manera que serán M-sucesión. Como $p \notin \mathrm{supp}_R(M)$ por 2.1 (ii) se tendrá que $p \notin \mathrm{Ass}_A(M/(x_1, \ldots, x_r)M)$.

Sea ahora $q \in \mathrm{Spec}(\hat{R})$ minimal sobre $p\hat{R}$. Por ser $R \subset \hat{R}$ una extensión plana se tiene que $h(q) = h(q) + \dim(q/p\hat{R}) = h(p) = r$ ([Ma] Th.19). Si $q \in \mathrm{supp}_{\hat{R}}(M)$ la longitud de una M-sucesión maximal en q

será r (2.1 (v)) de manera que $x_1, \ldots, x_r$ lo es y

$q \subset \bigcup_{h \in \mathrm{Ass}_{\hat{R}}(M/(x_1, \ldots, x_r)M)} h$. Pero por 2.1 (iv) este último es un conjunto finito de ideales primos de altura r, luego por el lema de evitación de primos el ideal q debe ser uno de ellos. Como $q^c = p$ de [Ma] (9A) resulta que $p \in \mathrm{Ass}_R(M/(x_1, \ldots, x_r)M)$, contradicción. Luego $q \notin \mathrm{supp}_{\hat{R}}(M)$ mientras que $h(q) + \dim(\hat{R}/q) = \dim(\hat{R})$ por ser $\hat{R}$ un dominio catenario.■

Así como para un A-módulo cualquiera M se cumple que si $p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ y $q \supset p$ entonces también $q \in \mathrm{Supp}_A(M)$ no ocurre lo mismo para el soporte pequeño. Los contraejemplos anteriores son una muestra de ello: en ambos casos $(0) \in \mathrm{supp}_A(M)$ y en cambio hay ideales primos que no pertenecen a $\mathrm{supp}_A(M)$. No obstante, y si M es un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, si es cierto que $\dim(\mathrm{Supp}_A(M)) = \dim(\mathrm{supp}_A(M))$. Esto es consecuencia del resultado más general siguiente:

2.7 Proposición.- Sea M un A-módulo tal que $\dim_A(M) = r$ y $H^r_m(M) \neq 0$. Entonces $\dim(\mathrm{Supp}_A(M)) = \dim(\mathrm{supp}_A(M))$.

Demostración: sea $\forall i\ H_i(M) = \{\ p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ t.q. $h_M(p) \geqslant i\ \}$. $H(M) = (H_i(M))_{i \geqslant 0}$ es una filtración que admite a M de manera que se puede construir $C_A(H(M), M)$, complejo de Cousin de M respecto de la filtración $H(M)$: $0 \to M \to M^0 \to M^1 \to M^2 \to \ldots \to M^r \to 0$. Este complejo construido por Sharp en [Sh-4] §2 verifica que $M^r \cong H^r(M)$ ([Sh-5] Th), luego $M^r \neq 0$ por hipótesis. Puesto que por construcción si uno de los términos del complejo se anula también se anulan los posteriores obtendremos que $M^0, \ldots, M^r \neq 0$ y, por lo tanto, $\mathrm{Supp}_A(M^{r-1}) \neq \emptyset$. Por construcción de M^{r-1} se tendrá que $\mathrm{Supp}_A(M^{r-1}) \cap \delta H_{r-1}(M) \neq \emptyset$, luego existe $p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ tal que $h_M(p) = r - 1$ y $(M_{r-1})_p \neq 0$.

Consideremos ahora el complejo obtenido localizando por p: $0 \to M_p \to M_p^0 \to \dots \to M_p^{r-1} \to 0$. Por [Sh-4] (3.5) este complejo es isomorfo al complejo de Cousin $C_{A_p}(H(M_p), M_p)$, de manera que $(M_p^{r-1}) \cong H^{r-1}_{pA_p}(M_p) \neq 0$. En particular $G_{A_p}(M_p) < \infty$ y $p \in \mathrm{supp}_A(M)$ con $\dim_{A_p}(M_p) = r - 1$. De ahí que si repetimos el proceso podemos encontrar una cadena de ideales primos $p_0 \subset p_1 \subset \dots \subset p_r = m$ con $p_i \in \mathrm{supp}_A(M)$. Luego $\dim(\mathrm{supp}_A(M)) \geq r = \dim(\mathrm{Supp}_A(M)) = r$ y en consecuencia ambas dimensiones coinciden.■

Cabe preguntarse pues cuando para un gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado coinciden los dos soportes. La respuesta está relacionada con la cuestión planteada en el Capítulo 1 sobre cuando un sistema de parámetros de un A-módulo M es también sistema de parámetros de $A/\mathrm{An}_A(M)$. Previamente necesitamos algunos resultados sobre el anulador de un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

2.8 Lema.- Sea M un A-módulo e $I = \mathrm{An}_A(M)$. Entonces $Z_A(A/I) \subset Z_A(M)$.

Demostración: sea $b \in A - I$ tal que $ab \in I$, Entonces $bM \neq 0$ y $abM = 0$. Luego $a \in Z_A(M)$.■

2.9 Proposición.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado e $I = \mathrm{An}_A(M)$. Entonces:

(i) $a \in Z_A(M) \Leftrightarrow a \in Z_A(A/I)$.

(ii) $\mathrm{Ass}_A(M) = \min(A/I) = \mathrm{Ass}(A/I)$.

(iii) $\mathrm{Supp}_A(M) = V(I)$.

Demostración:

(i) $\Leftarrow$) Lema 2.8.

$\Rightarrow$) Si $a \in Z_A(M)$ entonces $a \in p$ para cierto $p \in \mathrm{Ass}_A(M)$; por 2.1 (i) $\mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Min}(A)$, y como por otro lado $I \subset p$ se tendrá que $p \in \mathrm{Min}_A(A/I) \subset \mathrm{Ass}_A(A/I)$. En particular $a \in Z_A(A/I)$.

(ii) Puesto que $\mathrm{Min}_A(A/I) \subset \mathrm{Ass}_A(A/I)$ y como acabamos de demostrar que $\mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Min}_A(A/I)$ bastará demostrar que $\mathrm{Ass}_A(A/I) \subset \mathrm{Ass}_A(M)$.

Si $p \in \mathrm{Ass}_A(A/I)$ entonces $p \subset Z_A(A/I)$, luego por 2.8 $p \subset Z_A(M)$ y en particular $p \subset \bigcup_{q \in \mathrm{Ass}_A(M)} q$. Pero estos son un número finito de ideales minimales de A (2.1 (iv)), luego por el lema de evitación de primos p es uno de ellos.

(iii) $\mathrm{Supp}_A(M) = \bigcup_{p \in \mathrm{Min}_A(M)} V(p) = \bigcup_{q \in \mathrm{Min}_A(A/I)} V(q) = V(I)$.■

2.10 Lema.- Sea M un A-módulo e $I \subset \mathrm{An}_A(M)$ tal que $\mathrm{Supp}_A(M) = V(I)$. Sea $a \in A$ tal que $\dim_A(M/aM) < \dim_A(M)$. Entonces $\dim(A/(I+(a))) = \dim(A/I) - 1$.

Demostración: bastará probar que $a \notin p$ $\forall p \in V(I)$ tal que $\dim(A/p) = \dim(A/I)$. Un tal ideal primo p será además minimal de $\mathrm{Supp}_A(M)$, luego $0 \neq M_p$ es un A_p-módulo de dimensión 0. Además $\mathrm{An}_{A_p}(M_p)$ ($\supset I_p$) es un ideal pA_p-primario por lo que $pM_p \neq 0$ y $\forall x \in p$ $(M/xM)_p = M_p/xM_p \neq 0$. En definitiva, $\forall x \in p$ $\dim_A(M/xM) = \dim_A(M)$ por lo que $a \notin p$.■

Podemos enunciar ahora:

2.11 Proposición.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces son equivalentes:

(i) $\mathrm{Supp}_A(M) = \mathrm{supp}_A(M)$.

(ii) $a_1, \ldots, a_n$ es sistema de prámetros de $A/An_A(M)$ si y solo si $a_1, \ldots, a_n$ es sistema de parámetros de M.

Demostración:

(i) ⇒ (ii) Por 1.10 todo sistema de parámetros de $A/An_A(M)$ lo es de M.

Supongamos que $a_1, \ldots, a_n$ es un sistema de parámetros de M . Hemos de demostrar que $\forall\, i = 1, \ldots, n$ $\dim(A/(a_1, \ldots, a_i)) = n - i$, $n = \dim(A) = \dim_A(M)$. Lo demostraremos por inducción sobre i:

$i = 1$. $\dim_A(M/a_1M) = \dim_A(M) - 1$, luego por 2.9 y por 2.10 obtenemos que $\dim(A/(An_A(M) + (a_1))) = n - 1$.

Hagamos hipótesis de inducción y sea $i > 1$ tal que $\dim(A/(An_A(M) + (a_1, \ldots, a_{i-1}))) = n - i + 1$. Sea $I = An_A(M)$. Por 2.5 (iv) $a_1, \ldots, a_n$ es M-sucesión de manera que por 2.4 se tiene que $\mathrm{Supp}_A(M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M) = \mathrm{Supp}_{A/(a_1, \ldots, a_{i-1})}(M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M)) \supset$

$\mathrm{supp}_{A/(a_1, \ldots, a_{i-1})}(M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M) = \mathrm{supp}_A(M) \cap V(a_1, \ldots, a_{i-1}) =$

$V(I) \cap V(a_1, \ldots, a_{i-1}) = V(I + (a_1, \ldots, a_{i-1})) \supset$

$\mathrm{Supp}_A(M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M)$. Luego $V(I + (a_1, \ldots, a_{i-1})) =$

$\mathrm{Supp}_A(M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M)$ y por lo tanto $\mathrm{Supp}_A(M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M) = V(I + (a_1, \ldots, a_{i-1}))$.

Como $\dim_A(M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M) = n - i < n - i + 1$ se tiene por 2.10 que $\dim(A/(An_A(M) + (a_1, \ldots, a_i)) = n - i$ tal como deseábamos demostrar.

(ii) ⇒ (i) Lo demostraremos por el contrarecíproco. Sea $I = An_A(M)$. Puesto que todo sistema de parámetros de A/I lo es de M y todo sistema de parámetros de M es M-sucesión (2.5 (iv)) podemos suponer que M es fiel considerándolo como A/I-módulo. Entonces por 2.9 $\mathrm{Supp}_A(M) =$

Spec(A). Supongamos que $supp_A(M) \neq Supp_A(M)$. Existirá $p \in Spec(A)$ tal que $p \notin supp_A(M)$. Sea $r = \dim(A/p)$: por 2.2 existirán elementos $x_1, \ldots, x_{n-r} \in p$ formando parte de un sistema de parámetros de A. Serán pues M-sucesión y $M/(x_1, \ldots, x_{n-r})M$ es $A/(x_1, \ldots, x_{n-r})$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. (2.5 (vi)) de dimensión $n - (n - r) = r = \dim(A/p)$. Luego p es un ideal primo de $A/(x_1, \ldots, x_{n-r})$ de codimensión máxima.

Por otro lado $supp_{A/(x_1, \ldots, x_{n-r})}(M/(x_1, \ldots, x_{n-r})M) = supp_A(M) \cap V(x_1, \ldots, x_{n-r})$ (2.4) de manera que $p \notin supp_{A/(x_1, \ldots, x_{n-r})}(M/(x_1, \ldots, x_{n-r})M)$. Como p es minimal de $A/(x_1, \ldots, x_{n-r})$ se tendrá que $p \not\subset Z_{A/(x_1, \ldots, x_{n-r})}(M/(x_1, \ldots, x_{n-r})M)$ y por lo tanto existe $x \in p - Z_A(M/(x_1, \ldots, x_{n-r})M)$. La familia $x_1, \ldots, x_{n-r}, x$ será pues M-sucesión, y se podrá prolongar hasta una M-sucesión de longitud n (2.5 (v)). Esta será sistema de parámetros de M de manera que $x_1, \ldots, x_{n-r}, x$ forma parte de un sistema de parámetros de M. Pero no forma parte de un sistema de parámetros de A puesto que $\dim(A/(x_1, \ldots, x_{n-r}, x)) = \dim(A/p) = r = \dim(A/(x_1, \ldots, x_{n-r}))$.■

Podemos dar ahora el contraejemplo anunciado en el capítulo 1 §2. Hemos visto en 2.6 que existen anillo, incluso catenarios, y grandes módulos de Cohen-Macaulay sobre estos anillos para los que el soporte y el soporte pequeño no coinciden. Por la Proposición anterior <u>para estos módulos no todo sistema de parámetros de M lo es de $A/An_A(M)$.</u>

Cuando A es un dominio la condición (i) de 2.11 implica la catenariedad de A:

2.12 Corolario.- Sea A un anillo conmutativo, local y Noetheriano. Si existe un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M tal que $\mathrm{Supp}_A(M) = \mathrm{supp}_A(M)$ entonces A es catenario.

Demostración: puesto que M es fiel por 2.9 se tendrá que $\mathrm{supp}_A(M) = \mathrm{Supp}_A(M) = \mathrm{Spec}(A)$, luego por 2.5 (i) $\forall\, p \in \mathrm{Spec}(A)$ se verifica $h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$. Por la caracterización de Ratliff [Ra-1] Th.2.2 A es catenario.■

§3.- CONMUTATIVIDAD DE LAS M-SUCESIONES, M A-GRAN MODULO DE COHEN-MACAULAY.

También la condición (i) de 2.11 tiene efecto sobre la conmutatividad de las M-sucesiones:

2.13 Corolario.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado tal que $\mathrm{supp}_A(M) = \mathrm{Supp}_A(M)$ y sea $a_1, \ldots, a_n$ una M-sucesión. Entonces toda permutación de $a_1, \ldots, a_n$ es M-sucesión.

Demostración: por 2.5 (iv) $a_1, \ldots, a_n$ será sistema de parámetros de M, y por 2.11 sistema de parámetros de $A/\mathrm{An}_A(M)$. Pero estos conmutan y son sistemas de parámetros de M por 1.10, de manera que por 2.5 (iv) toda permutación de $a_1, \ldots, a_n$ es M-sucesión.■

Veremos posteriormente (3.18) un contraejemplo para la conmutatividad de las M-sucesiones sobre grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados. Ahora bien: si a un A-módulo M se le exigen condiciones de separabilidad suficientes sí se puede asegurar que las M-sucesiones conmutan. El siguiente resultado, que podría obtenerse como consecuencia de [Bou] §9 n°7 Th.1 y que nosotros obtenemos sin ayuda del complejo de Koszul, comulga con esta idea:

2.14 Proposición.- Sea M un A-módulo tal que es separado para la topología m-ádica y tal que $\forall$ I ideal de A el submódulo IM es cerrado en M. Entonces las M-sucesiones conmutan.

Demostración: vamos a demostrar en primer lugar que $\forall$ I ideal de A y $\forall H \subset M$ tal que $\widetilde{H} \neq 0$ (donde $\sim$ indica reducción módulo I) se verifica que $m\widetilde{H} \neq \widetilde{H}$. En efecto, si $m\widetilde{H} = \widetilde{H}$ también $m^n\widetilde{H} = \widetilde{H}$ $\forall n > 0$. Luego $\widetilde{H} = \bigcap_{n \in 0} m^n\widetilde{H} \subset \bigcap_{n \in 0} m^n\widetilde{M}$. Pero $\widetilde{M}$ es separado para la topología m-ádica por ser IM cerrado, de manera que $\widetilde{H} = 0$ tal como deseábamos demostrar.

Sea ahora $x_1, \ldots, x_r$ una M-sucesión. Siguiendo el método de [Ka] Th.118 podemos reducirnos al caso de longitud 2 (la condición IM cerrado nos asegura el mantenimiento de las hipótesis al pasar al cociente). Hemos de probar entonces que si x_1, x_2 es una M-sucesión también x_2, x_1 lo es. Pero de nuevo por [Ka] Th.118 podemos reducirnos a probar que $x_2 \notin Z_A(M)$. Sea entonces $m \in (0:x_2)_M$. $x_2m = 0 \Rightarrow x_2 = x_1h$, $h \in M \Rightarrow x_1(x_2h) = 0 \Rightarrow x_2h = 0 \Rightarrow h \in (0:x_2)_M$. Luego el submódulo $H = (0:x_2)_M$ es tal que $x_1H = H$ y, por lo tanto, $mH = H$. Pero hemos visto que esto implica que $H = 0$, luego $x_2 \notin Z_A(M)$ y acabamos la demostración.■

Como consecuencia de lo anterior vamos a ver que el hecho de que para un gran módulo de Cohen-Macaulay M las M-sucesiones conmuten obliga a que éste sea equilibrado. Previamente hemos de demostrar un lema bastante conocido pero del que no nos ha sido posible encontrar una demostración en la literatura:

2.15 Lema.- Sean $x_1, \ldots, x_n$ e $y_1, \ldots, y_n$ dos sistemas de parámetros de A. Existe entonces un sistema de parámetros de A: $z_1, \ldots, z_n$ y una sucesión de naturales: $m_1, \ldots, m_n$ tales que

$$(x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n}) \subset (z_1, x_2^{m_2}, \ldots, x_n^{m_n}) \subset \ldots \subset (z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n^{m_n}) \subset$$

$$(z_1, \ldots, z_n) \subset (z_1, \ldots, z_{n-1}, y_n) \subset \ldots \quad (z_1, y_2, \ldots, y_n) \subset$$

$$(y_1, \ldots, y_n).$$

Demostración: probaremos en primer lugar que dados $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ dos sistemas de parámetros de A existe $c \in A$ tal que $a_1, \ldots, a_{n-1}, c$ y $b_1, \ldots, b_{n-1}, c$ son sistemas de parámetros de A, siendo c un elemento de $(a_1, \ldots, a_n) \cap (b_1, \ldots, b_n)$.

En efecto, $\dim(A/(a_1, \ldots, a_{n-1})) = \dim(A/(b_1, \ldots, b_{n-1})) = n - 1$; sean $p_1, \ldots, p_r$ los ideales primos minimales de $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ y $q_1, \ldots, q_s$ los de $(b_1, \ldots, b_{n-1})$. Por el lema de evitación de primos $m \not\subset p_1 \cup \ldots \cup p_r \cup q_1 \cup \ldots \cup q_s$, luego existe un elemento $c \in m - (\bigcup_{i=1}^{r} p_i \cup \bigcup_{j=1}^{s} q_j)$. Tanto $a_1, \ldots, a_{n-1}, c$ como $b_1, \ldots, b_{n-1}, c$ serán entonces sistemas de parámetros de A y puesto que $a_1, \ldots, a_n$ y $b_1, \ldots, b_n$ son sistemas de parámetros de A podemos encontrar $k > 0$ tal que $c^k \in (a_1, \ldots, a_n) \cap (b_1, \ldots, b_n)$. Cambiando c por c^k obtenemos lo que deseábamos.

Para finalizar la demostración describimos el primer paso: tomemos $x_2, \ldots, x_n$ e $y_2, \ldots, y_n$. Por lo anterior existe v_1 tal que $v_1, x_2, \ldots, x_n$ y $v_1, y_2, \ldots, y_n$ son sistemas de parámetros de A y tal que $(v_1, y_2, \ldots, y_n) \subset (y_1, \ldots, y_n)$ Como todos ellos generan ideales m-primarios es claro que elevando a potencias suficientemente grandes tendremos: $(x_1^{m_1^1}, \ldots, x_n^{m_n^1}) \subset (v_1, x_2^{m_2^1}, \ldots, x_n^{m_n^1}) \subset$ $(v_1, y_2, \ldots, y_n) \subset (y_1, \ldots, y_n)$. De la misma forma podemos encontrar ahora v_2 tal que $(x_1^{m_1^2}, \ldots, x_n^{m_n^2}) \subset (v_1, v_2, x_3^{m_3^2}, \ldots, x_n^{m_n^2}) \subset$ $(v_1, v_2, y_3, \ldots, y_n) \subset (v_1, y_2, \ldots, y_n) \subset (y_1, \ldots, y_n)$. Reiterando este proceso obtendríamos finalmente lo que buscamos.■

2.16 Corolario.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay tal que las M-sucesiones conmutan (por ejemplo, M verificando las condiciones de 2.14). Entonces M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Demostración: sea $x_1, \ldots, x_n$ el sistema de parámetros de A que es M-sucesión e $y_1, \ldots, y_n$ cualquier otro sistema de parámetros de A. Entonces $\forall\, m_1, \ldots, m_n$ la familia $x_1^{m_1}, \ldots, x_n^{m_n}$ es también M-sucesión ([No] 5 Th.3). Luego teniendo en cuenta el Lema anterior para probar que $y_1, \ldots, y_n$ es M-sucesión será suficiente probar que si $(a_1, \ldots, a_n) \subset (a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ y $a_1, \ldots, a_n$ es M-sucesión también $a_1, \ldots, a_{n-1}, b$ es M-sucesión. Como $\mathfrak{m}M \neq M$ basta probar que $b \notin Z_A(M/(a_1, \ldots, a_{n-1})M)$. Y así es:

$$b\bar{m} = o \Rightarrow bm = \sum_{i=1}^{n-1} a_i m_i,\ m_i \in M\ \forall i.\ \text{Como } a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i h_i + bh,$$

$h_i, h \in A\ \forall i$, también se tendrá que $a_n m = \sum_{i=1}^{n-1} a_i n_i,\ n_i \in M\ \forall i$. Luego $m \in (a_1, \ldots, a_{n-1})M$ y $\bar{m} = 0$, con lo que finalizamos la demostración.■

Cuando el anillo A es regular las condiciones de separabilidad están relacionadas con la platitud. El siguiente resultado generaliza parte de Th. 1.1 de [Gri-2] al no exigir la condición de módulo numerablemente generado:

2.17 Proposición.- Sea A un anillo local regular y M un A-módulo. Entonces son equivalentes las siguientes condiciones:

(i) M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay y $\forall$ I ideal de A IM es cerrado en M para la topología m-ádica.

(ii) M es fielmente plano y $\forall$ I ideal de A IM es cerrado para la topología m-ádica.

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por 2.16 M es gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, y por ser A regular $fd_A(M) < \infty$. Luego por [Ba-St] 4.4 M es fielmente plano.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Es inmediato por ser A regular.∎

Observación.- La condición IM cerrado en M para la topología m-ádica $\forall$ I ideal de A se exige en 2.14 unicamente para que en el paso al cociente no se pierda la condición de separabilidad. Si dim(A) = 2 no es necesario pasar al cociente, de manera que tampoco hace falta exigir esa condición. Concluimos pues que si dim(A) = 2 todo gran módulo de Cohen-Macaulay separado ~~es~~ equilibrado, y que si A es regular es fielmente plano.

CAPITULO 3

3.- GRANDES MÓDULOS DE COHEN-MACAULAY EQUILIBRADOS Y EXTENSIONES PLANAS.

El objetivo de este tercer capítulo es estudiar bajo que condiciones la propiedad ser gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado se mantiene por extensión de escalares plana. Más concretamente: si $(A,m) \to (B,n)$ es un morfismo plano de anillos conmutativos, Noetherianos y locales, y si M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, ¿cuándo $M \otimes_A B$ es B-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado?.

En la Proposición 3.4 se dan condiciones suficientes y necesarias para que esto ocurra. A continuación estudiamos cuatro casos concretos: B extensión entera plana de A; $B = A_p$, $p \in supp_A(M)$; $B = \hat{A}$; $B = A^h$. En cada caso damos condiciones suficientes para que la pregunta anterior tenga respuesta afirmativa así como contraejemplos que muestran que esta respuesta afirmativa no puede ser general.

Estos casos obedecen a diversas cuestiones planteadas por Sharp y Riley y que resolvemos parcialmente. También son objeto de estudio las interrelaciones entre los distintos casos planteados así como la cuestión relativa a la restricción de escalares.

§ 1.- CONSERVACION DE LA PROPIEDAD GRAN MODULO DE COHEN-MACAULAY EQUILIBRADO POR EXTENSION PLANA DE ESCALARES.

$(A,\mathfrak{m})$ es un anillo conmutativo, local y Noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$. Es bien conocido que si M es un A-módulo finitogenerado y Cohen-Macaulay entonces $M \otimes_A \hat{A}$ es $\hat{A}$-módulo finitogenerado Cohen-Macaulay ([Se] Ch.IV Prop.10). Es asimismo bien conocido que si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}_A(M)$ entonces $M_{\mathfrak{p}}$ es $A_{\mathfrak{p}}$-módulo finitogenerado y Cohen-Macaulay. Siguiendo entonces la misma linea que en el capítulo anterior cabe hacerse la pregunta de si sobre los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados ocurrirá lo mismo, es decir, si M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}_A(M)$ ¿son $M \otimes_A \hat{A}$ $\hat{A}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $M_{\mathfrak{p}}$ $A_{\mathfrak{p}}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado?. Como veremos más adelante no hay en general una respuesta afirmativa a esta pregunta, aunque sí en algunos casos particulares.

Ambas cuestiones han sido formuladas independientemente por Riley en [Ri] Remark 2.3 (completación) y por Sharp en [Sh-2], [Sh-3] y [Sh-6] Problem 3.11 (localización). Ambos casos tienen en común que constituyen extensiones planas de escalares y cabe pues preguntarse algo más general: sea $A \to B$ un morfismo plano de anillos locales y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, ¿Cuándo $M \otimes_A B$ es B-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado?. A partir de ahí, y como casos particulares, podremos estudiar la completación y la localización.

Sea $A \to B$ un morfismo plano de anillos locales $(A,\mathfrak{m})$, $(B,\mathfrak{n})$;

$q \in \mathrm{Spec}(B)$, $p = q^c \in \mathrm{Spec}(A)$, $C = B/pB$ y $\overline{q} = qC$. Teniendo en cuenta el importante papel que juegan los números de Bass en la caracterización de los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados el siguiente resultado de Foxby y Thorup nos será muy útil:

3.1 Proposición.- Sea M un A-módulo. Entonces $\forall$ 1 se verifica

$$\mu_B^1(q, M \otimes_A B) = \sum_{r+s=1} \mu_C^r(\overline{q}, C)\mu_A^s(p, M) .$$

Demostración: [Fo-Th], Theorem.■

Mediante este resultado podemos evaluar el grado de un módulo al extenderlo por un morfismo plano:

3.2 Proposición.- Para todo A-módulo M se verifica que

$$G_{B_q}((M \otimes_A B)_q) = G(C_{\overline{q}}) + G_{A_p}(M_p) .$$

Demostración: por definición $G_{B_q}((M \otimes_A B)_q) = \inf \{ 1 \text{ t.q. } \mu^1_{B_q}(qB_q, (M \otimes_A B)_q) \neq 0 \}$, pero teniendo en cuenta que los números de Bass localizan tendremos que $G_{B_q}((M \otimes_A B)_q) = \inf \{ 1 \text{ t.q. } \mu_B^1(q, M \otimes_A B) \neq 0 \}$. Es inmediato entonces a partir de 3.1 que este ínfimo es igual a $\inf \{ r \text{ t.q. } \mu_C^r(\overline{q}, C) \neq 0 \} + \inf \{ s \text{ t.q. } \mu_A^s(p, M) \neq 0 \} = \inf \{ r \text{ t.q. } \mu^r_{C_{\overline{q}}}(\overline{q}C_{\overline{q}}, C_{\overline{q}}) \neq 0 \} + \inf \{ s \text{ t.q. } \mu_A^s(p, M) \neq 0 \} = G(C_{\overline{q}}) + G_{A_p}(M_p)$, con lo que finaliza la demostración.■

Ahora podemos caracterizar al soporte pequeño de la extensión:

3.3 Corolario.- Para todo A-módulo M se verifica que

$$\mathrm{supp}_B(M \otimes_A B) = \{ q \in \mathrm{Spec}(B) \text{ t.q. } q^c \in \mathrm{supp}_A(M) \} .$$

Demostración: si $q \in \mathrm{Spec}(B)$ y $p = q^c$ por 3.2 tendremos que

$G_{B_q}((M \otimes_A B)_q) < \infty$ si y solo si $G(C_{\bar{q}}) < \infty$ y $G_{A_p}(M_p) < \infty$. Pero $C(C_{\bar{q}})$ siempre es finito (es el grado de un anillo) de manera que por definición del soporte pequeño $q \in \mathrm{supp}_B(M \otimes_A B)$ si y solo si $p \in \mathrm{supp}_A(M)$ tal como deseábamos demostrar.■

Usando la caracterización (iii) de 2.5 es posible ahora dar una condición suficiente y necesaria para que un gran módulo de Cohen-Macaualay equilibrado conserve tal propiedad por extensión plana de escalares:

3.4 Proposición.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces son equivalentes:

(i) $M \otimes_A B$ es B-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

(ii) $n(M \otimes_A B) \neq M_A B$ y $\forall q \in \mathrm{supp}_B(M \otimes_A B)$ se verifica

1) $h(q/pB) = C(C_{\bar{q}})$

2) $h(q) + \dim(B/q) = \dim(B)$.

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por ser $M \otimes_A B$ B-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado se tiene que $n(M \otimes_A B) \neq M \otimes_A B$, y por 2.1 (i) que $\forall\, q \in \mathrm{supp}_B(M \otimes_A B)$ $h(q) + \dim(B/q) = \dim(B)$. Por otro lado $G_{B_q}((M \otimes_A B)_q) = h(q)$ $\forall\, q \in \mathrm{supp}_B(M \otimes_A B)$ (2.1 (iii)) de manera que por ser $A \to B$ un morfismo plano y puesto que $p = q^c \in \mathrm{supp}_A(M \otimes_A B)$ (3.3) se tiene que:

$$\dim(B) = h(q) + \dim(B/q) = G_{B_q}((M \otimes_A B)_q) + \dim(B/q) \underset{(3.2)}{=}$$

$G(C_{\bar{q}}) + G_{A_p}(M_p) + \dim(B/q) = G(C_{\bar{q}}) + h(p) + \dim(B/q)$. Pero evidentemente $G(C_{\bar{q}}) \leqslant \dim(C_{\bar{q}}) = h(q/pB)$, y como se verifica la fórmula $h(p) = h(q) + h(q/pB)$ ([Ma] Th.19) se tendrá $G(C_{\bar{q}}) + h(p) + \dim(B/q) \leqslant$

$h(q/pB) + h(p) + \dim(B/q) = h(q) + \dim(B/q) = \dim(B)$.

Por lo tanto la desigualdad $G(C_{\overline{q}}) \leqslant \dim(C_{\overline{q}})$ es una igualdad y se obtiene que $G(C_{\overline{q}}) = h(q/pB)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Por 2.5 (iii) es unicamente necesario probar que

$\forall\ q \in \mathrm{supp}_B(M \otimes_A B)$ se verifica $G_{B_q}((M \otimes_A B)_q) + \dim(B/q) = \dim(B)$.

Y así es: por 3.2 se tendrá $G_{B_q}((M \otimes_A B)_q) + \dim(B/q) =$ $G(C_{\overline{q}}) + G_{A_p}(M_p) + \dim(B/q)$; pero M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $p \in \mathrm{supp}_A(M)$ (3.3), luego por 2.1 (iii) $h(p) = G_{A_p}(M_p)$ y la anterior suma será $h(q/pB) + h(p) + \dim(B/q) = h(q) + \dim(B/q) =$ $\dim(B)$, tal como deseábamos demostrar.■

Vamos ahora a particularizar el resultado anterior para algunos tipos de extensiones planas.

En [Ri] Th. 2.2 Riley prueba que si $A \to B$ es una extensión libre y finita de anillos locales y M es un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado entonces $M \otimes_A B$ es B-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Posteriormente en [O'Ca] O'Carroll generaliza este resultado a extensiones planas y enteras. El primero utiliza en su demostración la caracterización 2.5 (ii) mientras que el segundo resultados sobre el llamado módulo de fracciones generalizado. Ahora este resultado surge como inmediata consecuencia de la Proposición 3.4 :

3.5 Corolario.- Sea $A \to B$ una extensión entera y plana de anillos locales. Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces $M \otimes_A B$ es B-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Demostración: será suficiente verificar (ii) de 3.4. Por ser extensión entera las fibras son de dimensión 0, luego $0 \leqslant G(C_{\overline{q}}) \leqslant \dim(C_{\overline{q}}) =$

$= h(q/pB) = 0$ y 1) se cumple. Por otro lado $A/p \to B/q$ es también una extensión entera, luego $\dim(A/p) = \dim(B/q)$.

Como por la platitud se tiene que $h(q) = h(p)$ resulta en definitiva que $h(q) + \dim(B/q) = h(p) + \dim(A/p) = \dim(A) = \dim(B)$ por ser $p \in \mathrm{supp}_A(M)$ y $A \to B$ entera. Luego se cumple también 2).

Por último se tiene que $M/mM \otimes_A B \cong (M \otimes_A B)/m(M \otimes_A B) \neq 0$ por ser B fielmente plano sobre A ($A \to B$ es plana y entera), de manera que como mB es un ideal n-primario también $n(M \otimes_A B) \neq (M \otimes_A B)$ y finalizamos la demostración.■

Ya nos hemos referido al problema que sobre la localización planteó Sharp por primera vez en [Sh-3]. El problema corectamente formulado es el siguiente: sea A un anillo local y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Sea $P \in \mathrm{supp}_A(M)$. Entonces ¿ es M_P A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado ?. El mismo Sharp demuestra en [Sh-2] Th. 4.3 que esto es cierto si A es un dominio catenario. El siguiente resultado, obtenido independientemente por Foxby (comunicación privada), generaliza lo anterior a cualquier anillo catenario:

3.6 Corolario.- Sea A un anillo catenario, M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $P \in \mathrm{supp}_A(M)$. Entonces M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Demostración: $A \to A_P$ es un morfismo plano de manera que basta verificar (ii) de 3.4. Puesto que las fibras son de dimensión 0 es inmediato que se cumple 1). Por otro lado, y puesto que A es catenario, se tiene $\dim(A/q) = h(P/q) + \dim(A/P)$, luego $h(qA_P) + \dim(A_P/qA_P) =$ $h(q) + h(P/q) = h(q) + \dim(A/q) - \dim(A/P) = \dim(A) - \dim(A/P) =$

$= h(P) = \dim(A_P)$, ya que P y q son de $\mathrm{supp}_A(M)$ y verifican (i) de 2.5. En definitiva, se cumple 2).

Por último $(PA_P)M_P \neq M_P$ por 2.3, luego M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Observación.- Takeuchi e Hiromori demuestran en [Ta-Hi] Prop. 2.4 el siguiente resultado: sea A un anillo local tal que a) $\forall\, p \in \mathrm{Spec}(A)$ con $h(p) = \dim(A) - \dim(A/p) \leqslant \dim(A) - 2$ se verifica que A_p es Cohen-Macaulay y b) $\forall\, p \supset q \in \mathrm{Spec}(A)$ con $h(p) = \dim(A) - \dim(A/p) \leqslant \dim(A) - 1$ y $h(q) = \dim(A) - \dim(A/q) \leqslant \dim(A) - 2$ se cumple $h(p) = h(q) + h(p/q)$. Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces $\forall\, P \in \mathrm{supp}_A(M)$ M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Este resultado es completamente generalizable en el sentido siguiente: sea $p \neq m$ un ideal primo de $\mathrm{supp}_A(M)$. Entonces por 2.1 (i) $h(p) = \dim(A) - \dim(A/p) \leqslant \dim(A) - 1$. Sea ahora $q \subset p$ otro ideal primo de $\mathrm{supp}_A(M)$; de nuevo por 2.1 (i) se tiene que $h(q) = \dim(A) - \dim(A/q) \leqslant \dim(A) - 2$. Luego la condición b') $\forall\, p, q \neq m$ ideales primos de $\mathrm{supp}_A(M)$ se verifica $h(p) = h(q) + h(p/q)$ es una condición más débil que b). Pero ahora es inmediato por 3.4 que b') es suficiente para asegurar que $\forall\, P \neq m$ M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. De manera que del resultado de Takeuchi e Hiromori es posible eliminar la condición a) y sustituir la b) por la más débil b').

Respecto a la completación se tiene:

3.7 Corolario.- Sea A cociente de un anillo local Cohen-Macaulay. Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces $M \otimes_A \hat{A}$

es $\hat{A}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Demostración: basta verificar ii) de 3.4. Sea $q \in \mathrm{supp}_{\hat{A}}(M \otimes_A \hat{A})$. $p = q^c \in \mathrm{supp}_A(M)$ por 3.3, de manera que $h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$. Por otro lado A/p es isomorfo al cociente de un anillo Cohen-Macaulay por un ideal primo, luego es un dominio catenario y, en consecuencia, equidimensional. También será entonces equidimensional $(A/p)^\wedge = \hat{A}/p\hat{A}$, de manera que $h(q) + \dim(\hat{A}/q) = h(p) + h(q/p\hat{A}) + \dim(\hat{A}/q) = h(p) + \dim(\hat{A}/p\hat{A}) = h(p) + \dim(A/p) = \dim(A) = \dim(\hat{A})$. Luego se verifica 2) de ii).

Por otro lado las fibras formales de A son siempre Cohen-Macaulay ([Gro-2] 6.3.8), y en consecuencia $G(C_{\overline{q}}) = \dim(C_{\overline{q}}) = h(q/p\hat{A})$, es decir, se verifica 1) de ii).

Por último $M \otimes_A \hat{A}/\hat{m}(M \otimes_A \hat{A}) \cong M/mM \otimes_A \hat{A} \neq 0$ por ser la completación fielmente plana. En definitiva, $M \otimes_A \hat{A}$ es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.∎

Otra extensión plana importante de un anillo es su henselización. Recordemos que un anillo A cumple la primera condición de cadenas si toda cadena maximal de ideales primos de A tiene longitud igual a dim(A). Se dice entonces que verifica la segunda condición de cadenas si $\forall p \in \mathrm{Spec}(A)$ minimal se tiene $\dim(A/p) = \dim(A)$ y toda extensión entera e íntegra de A/p verifica la primera condición de cadenas.

3.8 Corolario.- Sea A un anillo local que satisface la segunda condición de cadenas y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces $M \otimes_A A^h$ es A^h-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

57-bis

Demostración: puesto que $A \to A^h$ es una extensión fielmente plana ([Na] 43.8) es suficiente verificar ii) de 3.4. Las fibras de la henselización son siempre geometricamente regulares ([Gro-2] 18.6.9); en particular son regulares y, por lo tanto, Cohen-Macaulay. Luego se verifica siempre 1).

Por otro lado y como A verifica la segunda condición de cadenas se tiene que A^h también la verifica ([Sey] Th. 1.3). En particular verifica la primera y $\forall q \in \mathrm{Spec}(A^h)$ $h(q) + \dim(A^h/q) = \dim(A^h)$, luego también se cumple 2).

Por último $M \otimes_A A^h/mA^h(M \otimes_A A^h) \cong M/mM \otimes_A A^h \neq 0$ por ser A^h fielmente plano sobre A. Como mA^h es el ideal maximal de A^h tenemos que, en efecto, $M \otimes_A A^h$ es A^h-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.■

§2.- CONTRAEJEMPLOS.

Vamos a ver ahora contraejemplos para la localización, la completación y la henselización.

El primero que vamos a estudiar es el caso de la localización. Ogoma en [Og] §5, II ha dado el siguiente contraejemplo:

3.9 Proposición.- Existe un anillo local A y un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M con un ideal primo $p \in \mathrm{supp}_A(M)$ tal que M_p no es A_p-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Demostración: sea (R, n) un dominio local de dimensión 3 con una cadena saturada de ideales primos de longitud 2: $0 \subset q \subset n$ (por ejemplo el dominio local no catenario que Nagata construye en [Na] Appendix Ex. 2). Sean $\rho_1: R \to R/q = A_0$ y $\rho_2: A_0[X,Y] \to A_0$, donde X e Y son indeterminadas y $\rho_2(X) = \rho_2(Y) = 0$. Consideremos $A = R \underset{A_0}{\times} A_0[X,Y]$ el producto fibrado de ambos morfismos. Por [Og] Th. 2.1 y Th. 3.1 A es un anillo local Noetheriano con dos primos minimales q_1 y q_2, tales que $A/q_2 = A_2 \cong A_0[X,Y]$ es un anillo Cohen-Macaulay de dimensión 3 y $A/q_1 = A_1 \cong R$.

Sea $M = K(q_1) \oplus A/q_2$. Es inmediato entonces que M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Sea entonces $P = q_1 + q_2$. $A/P \cong A_0$, dominio, luego P es un ideal primo de Spec(A) que por [Og] 5, II pertenece a $\mathrm{supp}_A(M)$. Pero $q_1 \in \mathrm{supp}_A(M)$ y $h(P/q_1) + h(q_1) = 1 + 0 < h(P) = 2$ por [Og] Th.3.1. Luego no se verifica 2) de 3.4 y por lo tanto M_P no es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.■

Para la completación también hay contraejemplos. El siguiente es de O'Carroll y aparece en [O'Ca]:

3.10 Proposición.- Existe un anillo A tal que $\forall$ A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M, $M \underset{A}{\otimes} \hat{A}$ no es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibtado.

<u>Demostración:</u> Ferrand y Raynaud construyen en [Fe-Ra] un dominio local de dimensión 2, A, cuyo completado tiene primos inmersos en (0). Este anillo contiene un cuerpo de manera que existe un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M. Por ser A dominio $(0) \in \mathrm{supp}_A(M)$, mientras que la fibra formal de (0) no es Cohen-Macaulay. Luego no se verifica 1) de 3.4 y $M \underset{A}{\otimes} \hat{A}$ no puede ser $\hat{A}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.■

Para la henselización damos el siguiente contraejemplo:

3.11 Proposición.- Existe un anillo catenario A tal que $\forall$ M A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado $M \otimes_A A^h$ no es A^h-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

<u>Demostración:</u> en [Na] Appendix, Ex. 2 Nagata construye un dominio local R que contiene un cuerpo y que verifica la primera condición de cadenas pero no la segunda. Por [Sey] 1.3 R^h no verifica la segunda condición de cadenas, de manera que por [Sey] 1.9 tampoco verifica la primera (en particular $R \neq R^h$). Ahora, y por [Ra-2] Ex. 143 R^h no puede ser taut-level, es decir, $\exists\ q \in \mathrm{Spec}(R^h)$ tal que $h(q) + \dim(R^h/q) < n = \dim(R^h) = \dim(R)$. Sea $p = q^c$ y $A = R/p$.

Puesto que R es catenario (por ser dominio y verificar la primera condición de cadenas) A es catenario. Por otro lado $h(q) + \dim(R^h/q) = h(p) + h(q/pR^h) + \dim(R^h/q) < n = h(p) + \dim(R/p)$, pues la extensión $R \to R^h$ es plana. Así pues $h(q/pR^h) + \dim(R^h/q) < \dim(R/p) = \dim((R/p)^h)$. Pero $(R/p)^h \cong R^h/pR^h$ ([Na] §43) de manera que A es un dominio local tal que $\exists\ q \in \mathrm{Spec}(A^h)$ con $q^c = (0)$ y $\dim(A^h/q) + h(q) < \dim(A^h)$. Luego si M es un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado cualquiera por 2) de 3.4 $M \otimes_A A^h$ no será nunca A^h-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.■

<u>Observación.-</u> Supongamos que para un anillo local A existe un A-módulo M finitogenerado. Puesto que M es finitogenerado y debe conservar el carácter Cohen-Macaulay al completar se tendrá que si $I = An_A(M)$:

1) A/I es equidimensional (2.1 (i))

2) A/I es catenario (2.12)

3) A/I tiene las fibras formales Cohen-Macaulay (3.4 1)).

En particular, y si A es un dominio para el que existe un A-módulo M maximal de Cohen-Macaulay (es decir, finitogenerado, Cohen-Macaulay y $\dim_A(M) = \dim(A)$) el anillo A deberá satisfacer las condiciones anteriores.

Por ejemplo, al anillo que Ferrand y Raynaud construyen en [Fe-Ra] verifica 1) y 2) (pues es un dominio local de dimensión 2 pero no 3), de manera que para este anillo no existen módulos maximales de Cohen-Macaulay. Lo anterior explica, en parte, el porqué no se conocen contraejemplos a la conjetura de pequeños módulos de Cohen-Macaulay que sean anillos excelentes ([Gi] pág. 18).

Como acabamos de ver en cada una de las distintas extensiones planas de un anillo que hemos estudiado influyen factores diferentes para que la condición gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado se conserve por tal extensión de escalares. En la completación es que las fibras formales sean Cohen-Macaulay, y condiciones de cadena para la localización y la henselización. No obstante la localización se relaciona con las demás madiante el siguiente resultado:

3.12 Proposición.- Sea $A \to B$ un morfismo fielmente plano de anillos locales $(A,\mathfrak{m})$ y $(B,\mathfrak{n})$. Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado tal que $M \otimes_A B$ es B-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces si $M \otimes_A B$ localiza también localiza M.

Demostración: sea $\mathfrak{p} \in \mathrm{supp}_A(M)$. Puesto que $A \to B$ es fielmente plano por 3.3 podemos encontrar $\mathfrak{q} \in \mathrm{supp}_B(M \otimes_A B)$ tal que $\mathfrak{q}^c = \mathfrak{p}$ y $h(\mathfrak{q}) = h(\mathfrak{p})$. Por hipótesis $(M \otimes_A B)_\mathfrak{q}$ es $B_\mathfrak{q}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, es decir, $M_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{q}} B_\mathfrak{q}$ es $B_\mathfrak{q}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, con $A_\mathfrak{p} \to B_\mathfrak{q}$ morfismo fielmente plano. Puesto que ambos anillos son de la misma dimensión todo sistema de parámetros de A_p nos proporciona un sistema de parámetros de B_q, y es inmediato entonces que también M_p es A_p-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.■

Así pues, y teniendo en cuenta que todo anillo completo es catenario, por 3.6 todo contraejemplo al problema de la localización es un contraejemplo al problema de la completación. En particular el de Ogoma estudiado en 3.9. Afinando algo más en este sentido se tiene:

3.13 Corolario.- Sea A un anillo para el que existe un A-gran módulo de Cohen-Macaulay que no localiza. Entonces:

1) ó bien $\hat{A}$ no es equidimensional ó bien las fibras formales no son todas Cohen-Macaulay.

2) ó bien A^h no es catenario ó bien A^h no es equidimensional.

Demostración: sea M este A-módulo. Puesto que M no localiza si $\hat{A}$ es equidimensional la única obstrucción a que $M \otimes_A \hat{A}$ sea $\hat{A}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado es que no se verifique la condición 1) de 3.4, es decir, que las fibras formales no sean todas Cohen-Macaulay.

Por otro lado en el paso al henselizado las fibras son siempre Cohen-Macaulay, luego la única obstrucción a que $M \otimes_A A^h$ no sea A^h-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado es que no se verifique la condición 2) de 3.4. Luego si A^h es equidimensional y catenario $M \otimes_A A^h$ no localiza, contradiccón con el hecho de que A^h sea catenario (3.6).■

Hemos comentado ya el hecho de que la condición gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado se conserve por la extensión de escalares al completado está relacionado con el de si las fibras formales son ó no Cohen-Macaulay. También la siguiente condición de cadenas está involucrada:

3.14 Proposición.- Sea A un anillo tal que la extesión de escalares al completado conserva el carácter gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Sea $I = \bigcap_{\substack{p \in \mathrm{Spec}(A) \\ \dim(A/p)=\dim(A)}} p$. Entonces A/I es equidimensional y satisface la segunda condición de cadenas. En particular es catenario.

<u>Demostración:</u> A/I es equidimensional por definición de I. Sea entonces $p \in \mathrm{Spec}(A)$ tal que $\dim(A/p) = \dim(A)$ y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. El A-módulo $N = M \oplus E_A(A/p)$ es también A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado (pues si x forma parte de un sistema de parámetros de A entonces $x \notin p$ y $E_A(A/p) \xrightarrow{x} E_A(A/p)$ es un isomorfismo). Pero ahora $p \in \mathrm{supp}_A(N)$ de manera que podemos asegurar que $\forall p \in \mathrm{Spec}(A)$ con $\dim(A/p) = \dim(A)$ existe un A-gran módulo de Cohen-Macaulay M con $p \in \mathrm{supp}_A(M)$. Como $M \otimes_A \hat{A}$ es $\hat{A}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado se tendrá por 3.4 (ii) que $\forall q \in \mathrm{Spec}(\hat{A})$ con $q^c = p$ y q minimal sobre $p\hat{A}$ se verifica $\dim(\hat{A}/q) = \dim(\hat{A})$. Pero $\mathrm{Min}((A/I)\hat{\ }) = \mathrm{Min}(\hat{A}/I\hat{A}) = \{ q \in \mathrm{Min}(\hat{A}/p\hat{A}) \text{ con } p \in \mathrm{Min}(A/I) \}$, de manera que $(A/I)\hat{\ }$ es equidimensional. En definitiva A/I es lo que se denomina formalmente equidimensional, que por [Sey] 1.5 implica que A/I satisface la segunda condición de cadenas.■

Si A es un dominio entonces I = (0) de manera que si los A-grandes módulos de Cohen-Macaulay conservan tal propiedad por extensión de escalares al completado el anillo A deberá ser catenario. Luego <u>cualquier dominio no catenario es un contraejemplo al problema de</u>

la completación.

En particular los dominios locales no catenarios que Nagata construye en [Na] Appendix ó bien el G-anillo que Greco construye en [Gre] Prop. 1.1; en efecto, ahí puede encontrarse un anillo A para el que existe un ideal $I \subset Rad(A)$ tal que:

- A es semilocal de dimensión 3
- A es I-completo y separado
- A/I es excelente
- A no es catenario

Como el propio Greco hace observar por [Ro] Th. 3 A es quasi-excelente y, en particular, G-anillo. Por otro lado existe un ideal maximal m tal que $B = A_m$ no es catenario, de manera que B es un G-anillo no catenario. Además, por construcción, B contiene un cuerpo, luego existen B-grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados.

Este último contraejemplo centra su interés en el hecho de que al ser B un G-anillo las fibras formales son Cohen-Macaulay, lo cual prueba que la condición 1) de 3.4 tiene también importancia en el problema de la completación.

Ocurre entonces que:

3.15 Proposición.- Sea A un anillo local e $I = \bigcap_{\substack{p \in Spec(A) \\ dim(A/p)=dim(A)}} p$.

Si A/I es catenario entonces los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados localizan.

Demostración: en efecto, basta demostrar por 3.4 que si M es un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y p,q son dos ideales primos de $supp_A(M)$ con $q \subset p$ entonces $h(p/q) + h(q) = h(p)$.

Puesto que $\mathrm{Min}_A(M) \subset \mathrm{Min}_A(A/I)$ tanto p como q contienen a I. Luego si demotamos por — la acción de pasar al cociente módulo I se tendrá: $h(p/q) = h(\overline{p}/\overline{q})$, $h(p) + \dim(A/p) = \dim(A)$ y $h(q) + \dim(A/q) = \dim(A)$. Luego las cadenas de ideales primos que dan las alturas de p y q respectivamente deben partir de ideales primos de coaltura máxima, y por lo tanto $h(p) = h(\overline{p})$ y $h(q) = h(\overline{q})$. Como A/I es catenario se tiene finalmente que $h(p/q) + h(q) = h(\overline{p}/\overline{q}) + h(\overline{q}) = h(\overline{p}) = h(p)$, tal como deseábamos probar.■

El resultado anterior nos indica que la aplicación de 3.12 al caso $A \to \hat{A}$ no va a producir ninguna mejora a la solución del problema de la localización de los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados. No obstante la familia de anillos para los que esta cuestión tiene solución positiva es más amplia que la de los catenarios. En efecto, en [Na] Appendix, Ex. 2 Nagata construye $\forall m > 0$ un dominio local no catenario . Por [Ra-2] B 2.4 $\forall p \neq m$ R_p es regular. Luego si M es R-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $m \neq p \in \mathrm{supp}_R(M)$ se tendrá que $\forall q \subset p$ $\dim(R_p) = h(qR_p) + \dim(R_p/qR_p)$, es decir, se verifica la condición 2) de 3.4 suficiente para asegurar M_p es R_p-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

3.- OTRAS CUESTIONES.

Naturalmente, y si A es un anillo local y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, condiciones muy particulares sobre M pueden hacer que éste localize independientemente de lo que pueda ocurrir con el resto de los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados. Por ejemplo se tiene:

3.16 Proposición.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado tal que $\mathrm{Supp}_A(M) = \mathrm{supp}_A(M)$. Entonces $\forall P \in \mathrm{supp}_A(M)$ M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

<u>Demostración:</u> sea $I = \mathrm{An}_A(M)$. Por 2.9 se tiene que $\mathrm{supp}_A(M) = \mathrm{Supp}_A(M) = V(I) = \mathrm{Spec}(A/I)$. Pero entonces A/I es catenario (2.12) de manera que se cumple 2) de 3.4 y, por lo tanto, M localiza.■

Tal como Rush observa en [Ru-1] Remark 3.6 si M es un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $P \in \mathrm{supp}_A(M)$ entonces M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay. En efecto, si $r = h(P)$ por 2.2 existen elementos $x_1, \ldots, x_r$ de P tales que forman parte de un sistema de parámetros de A. Son por lo tanto M-sucesión, y como $PM_P \neq M_P$ también serán M_P-sucesión. Pero $x_1, \ldots, x_r$ son evidentemente un sistema de parámetros de A_P, de manera que, en efecto, M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Teniendo en cuenta esto resulta entonces que:

3.17 Proposición.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado tal que $\forall P \in \mathrm{supp}_A(M)$ las M_P-sucesiones en A_P conmutan. Entonces $\forall P \in \mathrm{supp}_A(M)$ M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

<u>Demostración:</u> basta aplicar 2.16 a la observación anterior.■

En relación con estas cuestiones podemos dar ahora el contraejemplo al que aludíamos en el Capítulo 2, §3:

3.18 Proposición.- Existe un anillo local A y un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M para el que las M-sucesiones no conmutan.

Demostración: sean A y M respectivamente el anillo y el A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado construidos por Ogoma y que ya hemos descrito en 3.9; sean q_1 y q_2 los primos minimales de A, con $M = A/q_2 \oplus K(q_1)$. Sea $x_1 \in q_1 \cap q_2$ y $x_2 \in q_1$ tal que $x_2 \in p$ $\forall p$ con $q_2 \subset p$ y $\dim(A/p) = 2$ (este elemento existe ya que $\dim(A/(q_1 + q_2)) = 1$). Entonces x_2, x_1 no es M-sucesión y en cambio x_1, x_2 sí lo es, ya que A/q_2 es Cohen-Macaulay y $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ es sistema de parámetros de A/q_2.■

Si A es un anillo local y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado el hecho de que M localiza está relacionado con el de que , en cierta manera, los sistemas de parámetros de A_P, $P \in \mathrm{supp}_A(M)$, provengan de sistemas de parámetros de A. Más en concreto se tiene:

3.19 Proposición.- Para un anillo A y un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M son equivalentes:

(i) $P \in \mathrm{supp}_A(M)$ y M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

(ii) Sea $a_1, \ldots, a_r \in P$ una M-sucesión tal que $a_1/1, \ldots, a_r/1$ forma parte de un sistema de parámetros de A_P. Sea $N = M/(a_1, \ldots, a_r)M$ y $B = A/(a_1, \ldots, a_r)$. Entonces para todo sistema de parámetros de $B_{\overline{P}}$ $x_{r+1}, \ldots, x_s$, existe $b \in B \cap x_{r+1}B_{\overline{P}}$ tal que $b/1, x_{r+2}, \ldots, x_s$ es sistema de parámetros de $B_{\overline{P}}$ y b es N-sucesión.

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii) buscamos un elemento b tal que (1) $b \in I = x_{r+1}B_{\overline{P}} \cap B$, (2) $b \notin q$ $\forall q \in \mathrm{Ass}_B(N)$ y (3) $b \notin q$ $\forall q \in \mathrm{Min}_{B_{\overline{P}}}(B_{\overline{P}}/(x_{r+2}, \ldots, x_s))$. Por 2.1 (iv) la condición (2) atañe unicamente a un conjunto finito de ideales primos; lo mismo ocurre con la condición (3) de manera que si $q_1, \ldots, q_m$ son todos estos ideales primos hemos de probar que $I \not\subset q_1 \cup \ldots \cup q_m$. Por el lema de evitación de primos esto se reducirá a probar que $I \not\subset q_i$ $\forall i$. Y así es: puesto que $(x_{r+1}, \ldots, x_s) \subset (I, x_{r+2}, \ldots, x_s)$ y $x_{r+1}, \ldots, x_s$ es un sistema de parámetros de $B_{\bar{P}}$ es claro que $I \not\subset q$ $\forall q$ primo minimal de $(x_{r+2}, \ldots, x_s)$ (condición (3)).

Veamos ahora la condición (2). Podemos suponer que $x_{r+1} \in B$ (basta multiplicar por un inversible). Entonces, por definición, $I = \bigcup_{t \in \bar{P}} ((x_{r+1}):t)_B$. Sea $q \in \mathrm{Ass}_B(N)$. Por 2.1 $\dim(B/q) = \dim(B)$. Distinguiremos ahora dos casos:

(A) $q \subset \bar{P}$. Si $x_{r+1} \notin q$ entonces $I \not\subset q$ evidentemente.

Si $x_{r+1} \in q$ entonces $\bar{q}$ será un ideal primo minimal $C = B/(x_{r+1})$. Luego el anillo $C_{\bar{q}}$ será artiniano. Sea entonces $v \in q$ tal que $v \notin \bar{P}$. Por ser $C_{\bar{q}}$ artiniano el elmento $\bar{v}/1$ tiene una potencia que se anula: $(\bar{v}/1)^k = 0$, $k > 0$. Luego $\mathrm{An}_C(\bar{v}^k) \not\subset \bar{q}$ y por lo tanto $((x_{r+1}):v^k)_B \not\subset q$. Pero $v \notin \bar{P}$ luego v^k tampoco y $((x_{r+1}):v^k)_B \subset I$. En definitiva hemos probado que $I \not\subset q$.

(B) $q \subset \bar{P}$. Entonces $q \in \mathrm{Ass}_{B_{\bar{P}}}(N_{\bar{P}})$ y dado que M_P es A_P-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado por 2.1 (v) resulta que $x_{r+1} \notin Z_{B_{\bar{P}}}(N_{\bar{P}})$, luego $x_{r+1} \notin q$ e $I \not\subset q$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Ya hemos visto en 2.3 que $PM_P \neq M_P$. Sea pues $a_1, \ldots, a_s$ un sistema de parámetros de A_P. Multiplicando por inversibles podemos suponer que $a_i \in A$ $\forall i$. Sea r el máximo índice tal que $a_1, \ldots, a_r$ es M-sucesión y tomemos $k = s - r$. Demostraremos que $a_1, \ldots, a_s$ es M_P-sucesión por inducción sobre k.

Si $k = 0$ entonces $s = r$ y es inmediato.

Hagamos hipótesis de inducción y supongamos $k > 0$; entonces $a_1, \ldots, a_r$ son M-sucesión de manera que si $N = M/(a_1, \ldots, a_r)M$ y $B = A/(a_1, \ldots, a_r)$ existe (por hipótesis) $b \in B$ que es N-sucesión y tal que si $\forall j\ x_j = \bar{a}_j$ entonces $b/1, x_{r+2}, \ldots, x_s$ es sistema de parámetros de $B_{\bar{p}}$ con $b \in x_{r+1}B_{\bar{p}} \cap B$. Sea $a \in A$ un representante de b. Entonces $a_1, \ldots, a_r, a/1, \ldots, a_s$ es sistema de parámetros de A_p con $a_1, \ldots, a_r, a$ M-sucesión. Por hipótesis de inducción $a_1, \ldots, a_r, a/1, a_{r+2}, \ldots, a_s$ es M_p-sucesión. Veamos ahora que $a_1, \ldots, a_s$ también lo es.

En efecto, es claro que bastará probar que $x_{r+1}, \ldots, x_s$ es $N_{\bar{p}}$ -sucesión, y para ello contamos con que $b/1, x_{r+2}, \ldots, x_s$ lo es. Se tiene que $b/1 = x_{r+1}\alpha$, $\alpha \in B_{\bar{p}}$; luego también x_{r+1} es $N_{\bar{p}}$ -sucesión. Sea ahora $h > r + 1$ y (1) $\sum_{i=r+1}^{h} x_i n_i = 0$ con $n_i \in N_{\bar{p}}$.

Multiplicando la expresión (1) por α tendremos que $\sum_{i=r+1}^{h} x_i \alpha n_i = 0$, luego $\alpha n_h \in (b/1, \ldots, x_{h-1})N_{\bar{p}}$. Entonces el elemento $\alpha x_{r+1} n_h$ pertenece a $((b/1)x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_{h-1})N_{\bar{p}}$ de manera que existe $n \in N_{\bar{p}}$ tal que $(b/1)(n_h - x_{r+1}n) \in (x_{r+2}, \ldots, x_{h-1})N_{\bar{p}}$. Pero por ser $b/1, \ldots, x_r$ $N_{\bar{p}}$ -sucesión se tiene que $b/1 \notin Z_{B_{\bar{p}}}(N_{\bar{p}}/(x_{r+2}, \ldots, x_{h-1})N_{\bar{p}})$. Luego $n_h - x_{r+1}n \in (x_{r+2}, \ldots, x_{h-1})N_{\bar{p}}$ y finalmente que $n_h \in (x_{r+1}, \ldots, x_{h-1})N_{\bar{p}}$ tal como era preciso demostrar.∎

Hasta ahora hemos estudiado como afecta la extensión de escalares a los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados. Finalmente vamos a ver que ocurre con la restricción de escalares. El problema podemos plantearlo en los siguientes términos:

sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de anillos locales. Sea M un B-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. ¿Cuándo es M A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado?.

Es claro que una condición suficiente para que así sea es que todo sistema de parámetros de A pase a ser un sistema de parámetros de B por f. Pues bien: en tal sentido se tiene:

3.20 Proposición.- Sea $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de anillos locales $(A,\mathfrak{m})$ y $(B,\mathfrak{n})$. Entonces todo sistema de parámetros de A pasa a ser un sistema de parámetros de B mediante f si y solo si $\dim(A) = \dim(B)$ y $\mathfrak{n}$ es el único ideal primo de B que contrae a $\mathfrak{m}$.

Demostración:

$\Rightarrow$) Es claro que $\dim(A) = \dim(B)$. Por otro lado si $\mathfrak{p}^c = \mathfrak{m}$ y $a_1, \ldots, a_n$ es un sistema de parámetros de A entonces el ideal $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ está contenido en $\mathfrak{p}$, luego $\mathfrak{p} = \mathfrak{n}$.

$\Rightarrow$) Sea $a_1, \ldots, a_n$ un sistema de parámetros de A. Puesto que el ideal $(a_1, \ldots, a_n)$ es $\mathfrak{m}$-primario y $\mathfrak{n}$ es el único ideal primo de B que contrae a $\mathfrak{m}$ el ideal $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ es $\mathfrak{n}$-primario. Como $\dim(A) = \dim(B)$ tendremos entonces que $f(a_1), \ldots, f(a_n)$ es sistema de parámetros de B.∎

Observación.- Es inmediato que esta condición se verifica si f es una extensión entera y si f es un morfismo fielmente plano con $\dim(A) = \dim(B)$.

CAPITULO 4

4.- DIMENSION INYECTIVA DE LOS GRANDES MODULOS DE COHEN-MACAULAY.

En este cuarto y último capítulo estudiamos la dimensión inyectiva de los grandes módulos de Cohen-Macaulay. Cabe destacar que el hecho de que estos módulos no sean finito-generados produce ciertas anomalías en la caracterización de tal dimensión inyectiva (ver 4.6); también que si para un anillo local A existe un A-gran módulo de Cohen-Macaulay de dimensión inyectiva finita A debe ser Cohen-Macaulay (4.4).

Ya particularizando a los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados caracterizamos a los que tienen dimensión inyectiva finita como aquellos para los que el complejo de Cousin dimensional es una resolución inyectiva del módulo (4.9), por lo que podríamos decir que estos constituyen una generalización de los módulos Gorenstein finitogenerados. No obstante no se pueden generalizar todas las propiedades de estos últimos (4.10), aunque sí se pueden aproximar en cierta manera (4.11) y obtener como consecuencia que si M es un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado de dimensión inyectiva finita entonces $supp_A(M) = Supp_A(M)$ (4.13).

Por último establecemos un paralelismo entre algunas propiedades de los módulos fielmente planos y los *resultados anteriores a partir de que sobre anillos Gorenstein coincides los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados de dimensión inyectiva finita y los módulos fielmente planos.*

§1.- CARACTERIZACION DE LA DIMENSION INYECTIVA DE UN GRAN MODULO DE COHEN-MACAULAY.

Como ya ha sido comentado en el capítulo 2° los grandes módulos de Cohen-Macaulay fueron en parte introducidos por su relación con la platitud. Los trabajos de Griffith [Gri-1], [Gri-2] y Rush [Ru-1], [Ru-2] ya contienen resultados en este sentido, pero son Bartjin y Strooker quienes en [Ba-St] profundizan más en esta cuestión aclarando, al mismo tiempo, diversas confusiones de los anteriores trabajos. Los resultados de Bartjin y Strooker podrían resumirse de la siguiente manera:

4.1 Proposición.- Sea A un anillo conmutativo, local y Noetheriano. Entonces:

(i) Si existe un A-gran módulo de Cohen-Macaulay de dimensión plana finita el anillo A debe ser Cohen-Macaulay (y el A-módulo no necesariamente plano).

(ii) Si existe un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado de dimensión plana finita entonces A es Cohen-Macaulay y el A-módulo es plano.

(iii) Si A es Cohen-Macaulay y M es un A-módulo entonces M es fielmente plano si y solo si M es gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

Demostración: ver 4.3, 4.4 y 3.10 de [Ba-St].■

Nuestro propósito va a ser ahora hacer un estudio similar a partir de la dimensión inyectiva, obteniendo resultados en parte análogos a los que se relacionan con la dimensión plana.

Recordemos que si A es un anillo conmutativo, local y Noetheriano y M es un A-módulo la dimensión inyectiva de M viene dada por la longitud de una resolución inyectiva minimal de M, de manera que $di_A(M) = \sup \{ i \text{ t.q. } p \in Spec(A) \text{ con } \mu_A^i(p,M) \neq 0 \}$. Si (A,m,k) es nuestro anillo definiremos $di_k(M) = \sup \{ i \text{ t.q. } \mu_A^i(m,M) \neq 0 \}$, con $di_k(M) = -1$ si $\mu_A^i(m,M) = 0 \ \forall i$ (esto ocurre cuando $m \notin supp_A(M)$). Es claro que $di_k(M) \leqslant di_A(M)$. Hay igualdad si M es finitogenerado ([Gi] 2.22) pero no necesariamente si M no lo es, ni siquiera para los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados. El siguiente resultado de Foxby nos será útil:

4.2 Proposición.- Sea M un A-módulo.

(a) Si $1 \geqslant dim_A(M)$ es tal que $\mu_A^1(m,M) = 0$ entonces $\mu_A^i(m,M) = 0 \ \forall i \geqslant 1$.

(b) Si $1 > G(A)$ es tal que $\mu_A^1(m,M) \neq 0$ entonces $\forall i \geqslant 1 \ \mu_A^i(m,M) \neq 0$.

Demostración: ver [Fo-3] Th. 8.1.■

4.3 Corolario.- Sea M un A-módulo tal que $di_k(M)$ y $G_A(M)$ son finitos. Entonces $G_A(M) \leqslant di_k(M) \leqslant G(A)$.

Demostración: basta tener en cuenta que $G_A(M) = \inf \{ i \text{ t.q } \mu_A^i(m,M) \neq 0 \}$ y aplicar (b) de la proposición anterior.■

Particularizando a los grandes módulos de Cohen-Macaulay se tiene:

4.4 Proposición.- Si A no es Cohen-Macaulay y M es un A-gran módulo de Cohen-Macaulay entonces $di_k(M) = di_A(M) = \infty$ y $\mu_A^i(m,M) \neq 0$ si y solo si $i \geqslant \dim(A)$.

Demostración: puesto que A no es Cohen-Macaulay se tiene que $G(A) < \dim(A)$. Luego por 4.3 $di_k(M) = \infty$. Ahora por b) de 4.2 y la definición de $di_k(M)$ se tiene el resto del enunciado.■

Así pues si existe un gran módulo de Cohen-Macaulay M con $di_k(M)$ finita el anillo A debe ser Cohen-Macaulay. En tal caso, además, se tiene:

4.5 Proposición.- Sea A Cohen-Macaulay y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay tal que $di_k(M) < \infty$. Entonces $di_k(M) = \dim(A)$ y $\mu_A^i(m,M) \neq 0$ si y solo si $i = \dim(A)$. Si además $di_A(M) < \infty$ entonces $di_k(M) = di_A(M)$.

Demostración: puesto que $G_A(M) = \dim(A) = G(A)$ por 4.3 es inmediato que $di_k(M) = \dim(A)$ y que $\mu_A^i(m,M) \neq 0$ si y solo si $i = \dim(A)$. Por otro lado si $di_k(M) \neq di_A(M)$ se tendría que $\forall p \in \mathrm{Spec}(A) - \{m\}$ tal que $\mu_A^i(p,M) \neq 0$ con $i > di_k(M) = \dim(A) > \dim(A/p) \geqslant G(A_p)$. Localizando por p y aplicando (b) de 4.2 se obtendrá inmediatamente que $\mu_{A_p}^s(pA_p,M_p) = \mu_A^s(p,M) \neq 0$ $\forall s \geqslant i$, y por lo tanto que $di_A(M) = \infty$.■

Nos queda ahora por estudiar el caso en que el anillo A es Cohen-Macaulay y M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay de dimensión inyectiva infinita. Se pueden distinguir dos casos:

(i) $di_k(M) = \infty$ $(= di_A(M))$

(ii) $di_k(M) < \infty$ $(\neq di_A(M))$.

Aplicando (b) de 4.2 al caso (i) y teniendo en cuenta que

$G_A(M) = \dim(A)$ se obtiene que $\mu_A^i(\mathfrak{m}, M) \neq 0$ si y solo si $i \geqslant \dim(A)$.

El caso (ii) es anómalo por cuanto no puede darse en módulos finitogenerados. En cambio se tiene:

4.6 Proposición.- Existe un anillo Cohen-Macaulay A y un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M tal que $di_A(M) = \infty$ y $di_k(M) < \infty$.

<u>Demostración:</u> Sea K un cuerpo cualquiera y $S = K[X_1, \ldots, X_n]_{(X_1, \ldots, X_n)}$, $n \geqslant 2$; sea $t = X_1^2$. S es un anillo regular, luego Gorenstein ($di_S(S) < \infty$), y puesto que $t \notin Z_A(S)$ el anillo $A = S/(t)$ es también Gorenstein ([Gi] 2.42) con $\dim(A) = n - 1 \leqslant 1$. Sea $p = (X_1) \in \operatorname{Spec}(S)$. Entonces $\bar{p} = (\bar{X}_1) \in \operatorname{Spec}(A)$ es un primo minimal tal que $A_{\bar{p}} = S_p/(t)$ no es regular, pues ni siquiera es dominio. Por el Teorema de Serre existe un $A_{\bar{p}}$-módulo N con $di_{A_{\bar{p}}}(N) = \infty$. Sea $M = A \oplus N$. Entonces:

- A es Cohen-Macaulay, pues es Gorenstein ([Gi] 2.30).
- $di_A(M) = \infty$, pues $\infty = di_{A_{\bar{p}}}(N) = di_A(N) \leqslant di_A(M)$.
- $di_k(M) = di_k(A) < \infty$ pues $di_k(N) = -1$ ($p \notin \operatorname{supp}_A(N)$).y A es Gorenstein.
- M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, pues si $a_1, \ldots, a_n$ es un sistema de parámetros de A entonces $a_1 \notin \bar{p}$, luego $a_1 \notin Z_A(N)$. Como tampoco $a_1 \in Z_A(A)$ se tendrá que $a_1 \notin Z_A(M)$. Por otro lado $M/a_1M \cong A/a_1A$ (pues $a_1N = N$) que es Cohen-Macaulay, luego $a_1, \ldots, a_n$ es M-sucesión.

M es, pues, el contraejemplo que buscábamos.∎

2.- GRANDES MODULOS DE COHEN-MACAULAY EQULIBRADOS DE DIMENSION INYECTIVA FINITA.

Restringiéndonos a los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados se tiene:

4.7 Proposición.- Sea M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado con $di_A(M) < \infty$. Entonces $\forall\, p \in supp_A(M)$ se tiene que $\mu_A^i(p,M) \neq 0$ si y solo si $i = h(p)$.

Demostración: por 4.4 A debe ser Cohen-Macaulay, luego catenario. Por 3.6 $\forall\, p \in supp_A(M)$ M_p es A_p-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado, y $di_{A_p}(M_p) \leq di_A(M) < \infty$. Por 4.5 aplicado a A_p se tendrá que $\mu_A^i(p,M) = \mu_{A_p}^i(pA_p,M_p) \neq 0$ si y solo si $i = dim(A_p) = h(p)$.■

Módulos finitogenerados cuyos números de Bass verifican las propiedades descritas en la Proposición anterior han sido estudiados por diversos autores (veáse [Fo-4], [F-F-G-R], [Re], [Sh-7], [Sh-8]). Son los llamados módulos Gorenstein que inicialmente se definen como aquellos cuyo complejo de Cousin dimensional es una resolución inyectiva minimal del módulo. Son, además, módulos Cohen-Macaulay de grado máximo y dimensión inyectiva finita, y su existencia implica que el anillo base es Cohen-Macaulay. La pregunta natural es entonces si los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados de dimensión inyectiva finita son generalización de los módulos Gorenstein finitogenerados y se pueden caracterizar de la misma manera.

Como vamos a ver la respuesta es afirmativa:

4.8 Lema.- Sea A un anillo catenario y equidimensional, Sea M un

A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. Entonces $\forall\ p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ $C(D(M_p), M_p) \cong (C(D(M), M))_p$, y si $h(p) = r$ entonces $(M_p)^r \neq 0$ si y solo si $p \in \mathrm{supp}_A(M)$.

Demostración: vamos a ver en primer lugar que para M coinciden la filtración dimensional y la filtración altura. En efecto:

$\{\ p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ t.q. $\dim(A/p) \leqslant \dim_A(M) - i\ \} = D_i(M)$ y

$\{\ p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ t.q. $h_M(p) \geqslant i\ \} = H_i(M)$. Sean p, $q \in \mathrm{Supp}_A(M)$ tales que q es un primo minimal de $\mathrm{Supp}_A(M)$ y $h_M(p) = h(p/q)$. Entonces $\dim(A) \geqslant h(p) + \dim(A/p) \geqslant h_M(p) + \dim(A/p) = h(p/q) + \dim(A/p) = \dim(A/q) = \dim(A)$ por ser A catenario y q un ideal primo de codimensión máxima por 2.1 (i). Luego $h(p) = h_M(p) = h(p/q)$. Por lo tanto $h_M(p) \geqslant i \Leftrightarrow h(p/q) \geqslant i \Leftrightarrow h(p) \geqslant i \Leftrightarrow \dim(A/p) \leqslant h(p) + \dim(A/p) - i = \dim(A) - i = \dim_A(M) - i$ por ser A equidimensional y catenario. Luego $H_i(M) = D_i(M)\ \forall i \geqslant 0$.

Por otro lado, y si $p \in \mathrm{Supp}_A(M)$, también se verifica que A es equidimensional y catenario y que $\dim_{A_p}(M_p) = \dim(A_p)$. Además ideales primos de $\mathrm{Min}_{A_p}(M_p)$ son ideales primos de codimensión máxima de A_p, de manera que por el mismo procedimiento obtenemos que coinciden $D(M_p)$ y $H(M_p)$. Luego los complejos de Cousin respectivos son idénticos y por [Sh-4] 3.5 se tendrá que $C(D(M_p), M_p) \cong (C(D(M), M))_p$.

Por último se sabe que $(M_p)^r \cong H^r_{pA_p}(M_p)$ ([Sh-5] Th.) si $h(p) = r$ y que por ser M A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado $C(D(M), M)$ es exacto. Luego tambien es exacto $C(D(M_p), M_p)$. Como M es A_p-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado si y solo si $p \in \mathrm{supp}_A(M)$ (2.3 y 3.6) por 2.5 (ii) se tendrá que $(M_p)^r \neq 0$ si y solo si $p \in \mathrm{supp}_A(M)$.■

4.9 Proposición.- Sea A un anillo y M un A-módulo. Entonces son equivalentes:

(i) M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $di_A(M) < \infty$.

(ii) C(D(M), M) es una resolución inyectiva minimal de M.

<u>Demostración:</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii) Por 4.5 A será Cohen-Macaulay y $di_A(M) = \dim(A) = n$. Puesto que por 2.5 (ii) C(D(M), M) es exacto de longitud n será suficiente comprobar que $\forall r > 0$ M^r es inyectivo.

Se tiene por definición que $M^r = \bigoplus_{\substack{h(p)=r \\ p \in \mathrm{Supp}_A(M)}} (\mathrm{Coker}\ d^{r-2})_p$, luego únicamente hay que demostrar que $(\mathrm{Coker}\ d^{r-2})_p = (M^r)_p = (M_p)^r$ es A_p-módulo inyectivo $\forall p \in \mathrm{Supp}_A(M)$ con $h(p) = r$. Pero $(M_p)^r = 0$ si $p \notin \mathrm{supp}_A(M)$, de manera que podemos desechar este caso. Puesto que si $p \in \mathrm{supp}_A(M)$ M_p es A_p-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado de dimensión inyectiva finita es posible reducirse a probar que si M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado de dimensión inyectiva finita entonces M^n es inyectivo. Pero esto es inmediato a partir de [Sh-2] 3.2 y de que $\dim_A(M) = n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Por hipótesis C(D(M), M) es exacto, luego por 2.5 (ii) M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado. $Di_A(M) < \infty$ trivialmente.∎

Los módulos Gorenstein finitogenerados verifican un Teorema de estructura. En efecto, en [F-F-Gr-R] Cor. 4.6 se demuestra que si existe un A-módulo Gorenstein finitogenerado entonces existe uno minimal, H, de manera que cualquier otro módulo Gorenstein finitogenerado es de la forma H^s, $s > 0$. Cuando tal módulo verifica además que

$\mu_A^n(m,H) = 1$, $n = \dim(A)$, se dice que H es un módulo dualizante, y se puede demostrar que para un anillo Cohen-Macaulay existe módulo dualizante si y solo si A es imagen homomórfica de un anillo Gorenstein ([Re] Th. 3). Por el contrario se tiene:

4.10 Proposición.- Para todo anillo Cohen-Macaulay A con módulo dualizante H existe un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado M tal que $di_A(M) < \infty$ y M no es de la forma $H^{(I)}$ para ningún cardinal I.

Demostración: sea p un primo minimal de A y $M = H \oplus E_A(A/p)$. M no es finitogenerado y es gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado (pues H lo es y si x forma parte de un sistema de parámetros de A entonces $E_A(A/p) \xrightarrow{x} E_A(A/p)$ es un isomorfismo). También $di_A(M) < \infty$, pero en cambio M no es de la forma $H^{(I)}$ pues si $x \in m - Z(A)$ entonces $M/xM \cong H/xH$ es finitogenerado mientras que $H^{(I)}/xH^{(I)} \cong (H/xH)^{(I)}$ no es finitogenerado al no poder ser I finito.■

Todo anillo Cohen-Macaulay completo tiene un módulo dualizante H. Aunque como acabamos de ver no se verifica el Teorema de estructura para los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados de dimensión inyectiva finita sí se tiene la siguiente aproximación:

4.11 Proposición.- Sea A un anillo Cohen-Macaulay completo y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado con $di_k(M) < \infty$. Entonces existe un epimorfismo de la forma $M^{(I)} \xrightarrow{\pi} H \to 0$, I cierto cardinal.

Demostración: la haremos por inducción sobre $n = \dim(A)$.

$n = 0$. Entonces tanto M como H son módulos inyectivos de la forma $E_A(A/m)^{(J)}$ (J finito para H). Es clara entonces la existencia de π.

Hagamos hipótesis de inducción y supongamos $n > 0$. Elijamos un elemento $x \in m - \{ Z(A) \cup Z_A(M) \cup Z_A(H)\}$ (que existe por ser A Cohen-Macaulay). Entonces A/xA, H/xH y M/xM continuan verificando todas las hipótesis del enunciado pero con $\dim(A/xA) = n - 1$. Luego por hipótesis de inducción existe un epimorfismo $(M/xM)^{(I)} \xrightarrow{\tau} H/xH \to 0$ y, por lo tanto, un epimorfismo $M^{(I)} \xrightarrow{\tau} H/xH \to 0$, I cierto cardinal. Consideremos la sucesión exacta $0 \to H \xrightarrow{x} H \to H/xH \to 0$ y apliquemos el functor $\mathrm{Hom}_A(M^{(I)},.)$. Se tendrá:

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M^{(I)},H) \xrightarrow{x} \mathrm{Hom}_A(M^{(I)},H) \xrightarrow{\omega} \mathrm{Hom}_A(M^{(I)},H/xH) \to \mathrm{Ext}^1_A(M^{(I)},H) \ .$$

En [Ka] Th. 217 se demuestra que si R y S son dos A-módulos finitogenerados tales que $di_A(R) < \infty$ entonces $\mathrm{Ext}^i_A(S,R) = 0 \quad \forall i > n - G_A(S)$. La condición finitogenerado en S se impone unicamente para que el lema de Nakayama pueda ser utilizado en un punto de la demostración, pero usando la versión especial de este lema que Griffith da en [Gri-1] Lemma 2.5 es posible afirmar que el Teorema es cierto en nuestro caso particular.

Se concluye entonces que $\mathrm{Ext}^1_A(M^{(I)},H) = 0$ y existe un morfismo $\pi \in \mathrm{Hom}_A(M^{(I)},H)$ tal que $\omega(\pi) = \tau$. Teniendo en cuenta que τ es epimorfismo se obtiene que $\pi(M^{(I)}) + xH = H$ y por el lema de Nakayama que π es epimorfismo.■

4.12.Corolario.- En las condiciones de la Proposición 4.11 se tiene que $\mathrm{Supp}_A(M) = \mathrm{Spec}(A)$.

Demostración: $\mathrm{Supp}_A(M) = \mathrm{Supp}_A(M^{(I)}) \quad \mathrm{Supp}_A(H) = \mathrm{Spec}(A)$ ([Sh-7] Th. 4.12).■

Ya hemos visto en el Capítulo 2 que para los grandes módulos de Cohen-Macaulay equilibrados no es cierta en general la igualdad entre $\mathrm{supp}_A(M)$ y $\mathrm{Supp}_A(M)$ (2.6) así como las consecuencias que esta igualdad comporta (2.11). Ahora se tiene:

4.13 Proposición.- Sea A un anillo Cohen-Macaulay y M un A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado tal que $\mathrm{di}_k(M) < \infty$. Entonces $\mathrm{supp}_A(M) = \mathrm{Supp}_A(M) = \mathrm{Spec}(A)$.

<u>Demostración:</u> puesto que A es Cohen-Macaulay también $M \otimes_A \hat{A}$ es $\hat{A}$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado (3.7); por otro lado se deduce de 3.1 que también $\mathrm{di}_{\bar{k}}(M \otimes_A \hat{A}) < \infty$, donde $\bar{k} = \hat{A}/m\hat{A}$. Luego teniendo en cuenta que $\mathrm{supp}_A(M \otimes_A \hat{A}) = \{ q \in \mathrm{Spec}(\hat{A})$ t.q. $q^c \in \mathrm{supp}_A(M)\}$ (3.3) podemos reducirnos al caso en que A es completo.

Sea $q \in \mathrm{Spec}(A)$ y $r = h(q)$; $h(q) + \dim(A/q) = \dim(A)$ por ser A Cohen-Macaulay. Sean $x_1, \ldots, x_r$ elementos de q que formen parte de un sistema de parámetros de A (es posible encontrarlos por 2.2). Entonces $M/(x_1, \ldots, x_r)M$ es $A/(x_1, \ldots, x_r)$-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y verifica las condiciones del enunciado. Además por 2.4 $\mathrm{supp}_{A/(x_1, \ldots, x_r)}(M/(x_1, \ldots, x_r)M = \overbrace{\mathrm{supp}_A(M) \cap V(x_1, \ldots, x_r)}$, de manera que como q es minimal en $A/(x_1, \ldots, x_r)$ podemos reducirnos también al caso en que q es un primo minimal de A. Pero entonces $q \in \mathrm{supp}_A(M)$ si y solo si $q \in \mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Supp}_A(M)$, y esto es cierto por el Corolario anterior.■

§3.- EL CASO A GORENSTEIN.

Supongamos ahora que A es Gorenstein. Entonces A es Cohen-Macaulay de dimensión inyectiva finita de manera que el propio A es el A-módulo dualizante. Es inmediato observar entonces que en la Proposición 4.11 puede ser tomadado como I a 1, luego se deduce que A es sumando directo de M. Este hecho, no obstante, está relacionado con otro orden de ideas. En primer lugar se tiene:

4.14 Proposición.- Sea A un anillo local Gorenstein. Para un A-módulo M son equivalentes:

(i) M es fielmente plano.

(ii) M es gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado y $di_A(M) < \infty$.

Demostración: Foxby prueba en [Fo-5] Th. 8.30 que si A es Gorenstein y N es un A-módulo entonces $di_A(N) < \infty$ si y solo si $fd_A(N) < \infty$.

Luego:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $di_A(M) < \infty$, y por ser A Cohen-Macaulay M es A-gran módulo de Cohen-Macaulay equilibrado.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $fd_A(M) < \infty$, luego por 4.1 (ii) M es fielmente plano.■

Por otra parte se tiene:

4.15 Proposición.- Si A es completo y M es un A-módulo fielmente plano entonces A es sumando directo de M.

Demostración: por [Ba-St] 3.6 M contiene un submódulo básico, es decir, existe $0 \neq L \subset M$, con L libre, denso en M para la topología m-ádica y puro. Si N es un A-módulo separado y completo es inmediato que $Hom_A(L,N) \cong Hom_A(M,N)$ y que si $f \in Hom_A(L,N)$ es epimorfismo también lo es $\bar{f}$, extensión de f a M. Luego como L es libre existe un epimorfismo de M en A y por lo tanto A es sumando directo de M.■

4.16 Corolario.- Si A es completo y M es un A-módulo fielmente plano entonces $Ass_A(M) = Ass(A)$. En particular $Supp_A(M) = Spec(A)$.

Demostración: por 4.5 $\mathrm{Ass}_A(M) \supset \mathrm{Ass}(A)$. Para demostrar la contención contraria supondremos en primer lugar que el ideal maximal m pertenece a $\mathrm{Ass}_A(M)$. Entonces $\exists$ $m \in M - \{0\}$ tal que $\mathrm{Ass}_A(m) = m$. Luego $\forall$ $x \in m$ el morfismo $M \xrightarrow{x} M$ no es inyectivo. Puesto que M es fielmente plano tampoco lo puede ser $A \xrightarrow{x} A$, luego $Z(A) = m$. Por ser A Noetheriano $m \in \mathrm{Ass}(A)$.

Sea ahora p un ideal primo de $\mathrm{Ass}_A(M)$. Entonces $pA_p \in \mathrm{Ass}_{A_p}(M_p)$ y M_p es A_p-módulo fielmente plano. Por lo que acabamos de ver $pA_p \in \mathrm{Ass}(A_p)$ y por lo tanto $p \in \mathrm{Ass}(A)$.■

4.17 Corolario.- Si A es completo y M es un A-módulo fielmente plano tal que $\dim_{A/m}(M/mM) = r < \infty$ entonces $M = L \oplus N$, siendo $L \cong A^r$ y $N = \bigcap_{n>0} m^n M$. En particular M es libre si y solo si M es separado para la topología m-ádica.

Demostración: sea $L \subset M$ un sumando directo libre de M tal que M/L no tenga ningún sumando directo libre. Tal submódulo L existe por ser $r < \infty$ y existir al menos un sumando directo libre de M (4.15). Sea $M = L \oplus N$. Es claro que también $\dim_{A/m}(L/mL) < \infty$, luego $L \cong A^s$, $s < \infty$. Por otro lado $N \cong M/L$ no tiene ningún sumando directo libre, luego aunque es plano no es fielmente plano y $mN = N$. Así pues $M = L + mM$ y L es denso en M para la topología m-ádica. Ahora, y por ser A completo, tendremos: $L \subset M/(\bigcap_{n>0} m^n M) \subset \hat{M} = \hat{L} = L$, luego $L \oplus \bigcap_{n>0} m^n M = M$. Por último es calro que $L/mL = M/mM$ y, por lo tanto, $L \cong A^r$.■

Observación.- La condición $\dim_{A/m}(M/mM) < \infty$ para un A-módulo ya fué considerada por Vasconcelos en [Va] y por Cox y Rush en [Co-Ru], donde pueden encontrarse resultados sobre la finitogeneración de A-módulos planos con esta condición.

REFERENCIAS

REFERENCIAS.

[Ba-St] J.Bartjin, J.R.Strooker;
Modifications monomiales,
en Seminaire d'Algèbre Dubreil-Malliavin, Paris 1982,
Lecture Notes in Math. 1029, Springer.

[Bou] N.Bourbaki;
Algèbre homologique,
Algèbre, Chap.10, Elements de Mathematiques, Masson 1980.

[Co-Ru] S.H.Cox Jr., D.Rush;
Finiteness in flat Modules and Algebras,
J.Algebra 32, (1974), 44-50.

[E-G-1] E.G.Evans, P.Griffith;
The syzygy problem,
Ann. of Math. 114, (1981), 323-333.

[E-G-2] E.G.Evans, P.Griffith;
The syzygy problem: a new proof and historical perspective;
en Conmutative Algebra: Durham 1981, L.M.S, L.N.S 72,
ed. by R.Y.Sharp.

[F-F-G-R] R.Fossum, H-B.Foxby, P.Griffith, I.Reiten;
Injective resolutions with applications to dualizing modules and Gorenstein rings,
Publ. Math. I.H.E.S 45, (1976), 193-215.

[Fe-Ra] D.Ferrand, M.Raynaud;
Fibres formelles d'un anneau local Noetherien,
Ann. Sci. École Norm. Sup.(4) 3, (1970), 295-311.

[Fo-1] H.B.Foxby;
On the μ^i in a minimal injective resolution,
Math. Scand. 41, (1977), 19-44.

[Fo-2] H.B.Foxby;
Bounded complexes of flat modules,
J. Pure Appl. Algebra 15, (1979), 149-172.

[Fo-3] H.B.Foxby;
Complexes of injective modules,
en Conmutative Algebra: Durham 1981, L.M.S, L.N.S 72, ed. by R.Y.Sharp.

[Fo-4] H.B.Foxby;
Gorenstein modules and related topics,
Math. Scand. 31, (1972), 267-284.

[Fo-5] H.B.Foxby;
A homological theory of complexes of modules,
Preprint Series del Matematisk Institut, Kobenhawns Universitet, 19, (1981).

[Fo-Th] H.B.Foxby, A.Thorup;
Minimal injective resolutions under flat base change,
Proc. Amer. Math. Soc. 67, (1977), 27-31.

[Gi] J.M.Giral;
Conjeturas homológicas,
Notas del Seminario de Algebra Conmutativa y Geometría Algebraica 4, Dpto. de Algebra y Fundamentos, Universidad de Barcelona (1981).

[Gre] S.Greco;
A note on Universally Catenary rings,
Nagoya Math. J. 87, (1982), 95-100.

[Gri-1] P.Griffith;
A representation theorem for complete local rings,
J. Pure Appl. Algebra 7, (1976), 303-315.

[Gri-2] P.Griffith;
Maximal Cohen-Macaulay modules and representation theory,
J. Pure Appl. Algebra 13,(1978), 321-334.

[Gro-1] A.Grothendieck (notes by R.Hartshorne);
Local Cohomology,
Lecture Notes in Math. 41, (1967), Springer.

[Gro-2] A.Grothendieck;
E.G.A. Chap. IV,
Publ. Math. I.H.E.S 20 (1964) 24 (1925).

[Ha] R.Hartshorne;
Residues and duality,
Lecture Notes in Math. 20 (1966), Springer.

[He-Ku] J.Herzog, E.Kunz;
Der Kanonische modul eines Cohen-Macaulay rings,
Lecture Notes in Math. 238 (1971), Springer.

[Ho-1] M.Hochster;
Contracted ideals from integral extensions of local rings,
Nagoya Math. J. 51, (1973), 25-43.

[Ho-2] M.Hochster;
Big Cohen-Macaulay modules and algebras and embeddability in rings of Witt vectors,
Proc. of the Queen's Univ. Conmutative Algebra Conference (Kingston, Ontario, Canada 1975), Queen's Papers on Pure and Applied Math. 42, (1975), 106-195.

[Ho-3] M.Hochster;
Topics on the homological theory of modules over conmutative rings,
C.B.M.S, Regional Conference Series in Mathematics 24,
Amer. Math. Soc., Providence, Ri, (1974).

[Ho-4] M.Hochster;
The local homological conjectures in Conmutative Algebra,
en Conmutative Algebra: Durham 1981, L.M.S, L.N.S 72,
ed. by R.Y.Sharp.

[Ka] I.Kaplansky;
Conmutative rings,
The University of Chicago Press (1974).

[Ma] H.Matsumura;
Conmutative Algebra,
The Benjamin Cummings Publishing Co. (1980).

[Mat] E.Matlis;
The Koszul complex and duality,
Comm. Algebra 1(2), (1974), 87-144.

[Mac-Sh] I.G.Macdonald, R.Y.Sharp;
An alementary proof of the non-vanishing of certain local cohomology modules,
Quart. J. Math. Oxford (2) 23, (1972), 197-204.

[Na] M.Nagata;
Local rings,
Interscience Publishers, New York (1962).

[No] D.G.Northcott;
Ideal theory,
Cambridge Tracts in Math. 42, Cambridge University Press (1968).

[O'Ca] L.O'Caroll;
Balanced big Cohen-Macaulay modules and ring extensions,
Proc. Roy. Soc. Edinburgh 99A, (1984), 171-172.

[Og] T.Ogoma;
Fibre products of Noetherian rings and their applications,
Pre-print.

[Ra-1] L.J.Ratliff Jr.;
Catenary rings and the Altitude formula,
Amer. J. Math. 94, (1972), 458-466.

[Ra-2] L.J.Ratliff Jr.;
Chain conjectures in Ring theory,
Lecture Notes in Math. 647 (1978), Springer.

[Re] I.Reiten;
The converse to a Theorem of Sharp on Gorenstein modules,
Proc. Amer. Math. Soc. 32 (2), (1972), 417-420.

[Ri] A.M.Riley;
Balanced big Cohen-Macaulay modules and free extensions of local rings,
Proc. Roy. Soc. Edinburgh 93 A, (1982), 41-45.

[Ro] C.Rotthaus;
Komplettierung semilocaler quasiansgereichnete ringe,
Nagoya Math. J. 76, (1979), 173-180.

[Ru-1] D.E.Rush;
Big Cohen-Macaulay modules,
Illinois J. Math. 24 (4), (1980), 606-611.

[Ru-2] D.E.Rush;
Some applications of Griffith's basic submodules,
J. Pure Appl. Algebra 11, (1977), 41-44.

[Se] J.P.Serre;
Algèbre locale, Multiplicités,
Lecture Notes in Math. 11 (1975), Springer.

[Sey] H.Seydi;
Aneaux Henséliens et conditions de Chaînes,
Bull. Soc. Math. France 98, (1970), 9-31.

[Sh-1] R.Y.Sharp;
Local cohomology theory in conmutative algebra,
J. Math. Oxford (2) 21, (1970), 425-434.

[Sh-2] R.Y.Sharp;
A Cousin-Complex characterization of balanced big Cohen-Macaulay modules,
Quart. J. Math. Oxford (2) 33, (1982), 471-185.

[Sh-3] R.Y.Sharp;
Cohen-Macaulay properties for balanced big Cohen-Macaulay modules,
Proc. Camb. Phil. Soc. 90, (1981), 229-238.

[Sh-4] R.Y.Sharp;
The Cousin Complex for a Module over a conmutative Noetherian ring,
Math. Z 112, (1969), 340-356.

[Sh-5] R.Y.Sharp;
Local cohomology and the Cousin Complex for a conmutative Noetherian ring,
Math. Z. 153, (1977), 19-22.

[Sh-6] R.Y.Sharp (editor);
Conmutative Algebra: Durham 1981,
L.M.S, L.N.S 72 Cambridge University Press.

[Sh-7] R.Y.Sharp;
Gorenstein modules,
Math. Z. 115, (1970), 117-139.

[Sh-8] R.Y.Sharp;
Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen-Macaulay rings,
Proc. London. Math. Soc. (3) 25, (1972), 303-318.

[Sh-Vá] R.Y.Sharp, P.Vámos;
Baire's category theorem and prime avoidance in complete local rings,
Arch. Math. 44, (1985), 243-248.

[Sha-Vá] D.W.Sharpe, P.Vámos;
Injective modules,
Cambridge University Press, (1972).

[St] J.R.Strooker;
Algunos problemas homológicos en álgebra local,
Pre-print 365, Department of Mathematics, University Utrecht, (Jan. 1985).

[Ta-Hi] Y.Takeuchi, K.Hiromori;
On F-modules and balanced big Cohen-Macaulay modules,
Mathematics Seminar Notes, Kobe University, 10, (1982) 596-608.

[Va] W.V.Vasconcelos;
Flat modules over conmutative Noetherian rings,
Trans. Amer. Math. Soc. 152, (1970), 137-143.

FE DE ERRATAS		donde dice	debe decir
pág. 13	linea 2	parámetros	un sistema de parámetros
" 16	" -8	M^{-1}	M^{1}
" 32	" -2	existe	y existe
" 36	" -7	$x_i, \dots, x_r$	$x_1, \dots, x_r$
" 46	" 9	$n \in 0$	$n > 0$
" 57	" -1	$M \otimes_A A$	$M \otimes_A \hat{A}$
" 59	" -9	A-gran ...	$\hat{A}$-gran ...
" 60	" -6	M finitogenerado	M finitogenerado y Cohen-Macaulay
" 78	" -10	ideales primos de $\mathrm{Min}_{A_p}(M_p)$	los ideales primos de $\mathrm{Min}_{A_p}(M_p)$
" 81	" -4	$\mathrm{Supp}_A(M^{(I)})$ $\mathrm{Supp}_A(M)$	$\mathrm{Supp}_A(M^{(I)}) \supset \mathrm{Supp}_A(M)$
" 88	" -7	Cojeturas	Conjeturas