CAPÍTULO 4: LA EVACUACIÓN DE UN RECINTO

4.1 EL PROBLEMA DE LA EVACUACIÓN DE UN RECINTO

El término “recinto” se utiliza habitualmente para indicar una dependencia o una parte de un edificio ocupada por un determinado número de personas que dispone de varias salidas, de la misma forma también puede observarse que edificios de determinadas características para realizar un estudio básico de las condiciones de evacuación pueden asimilarse a dicha definición de recinto.

Sea un recinto con k ocupantes uniformemente distribuidos (figura 4.1), que dispone de n posibles salidas situadas de tal forma que no exista interferencia en el movimiento de los ocupantes que se dirigen a cada una de ellas. Existe además una vía de evacuación hacia cada una de las salidas. La evacuación del recinto habrá finalizado cuando hayan salido del mismo todos sus ocupantes. Si existen n salidas, habrá n recorridos o rutas de evacuación diferentes. El tiempo de evacuación del recinto será la duración del recorrido más largo, determinado por el instante en el cual el último ocupante alcanza el exterior.

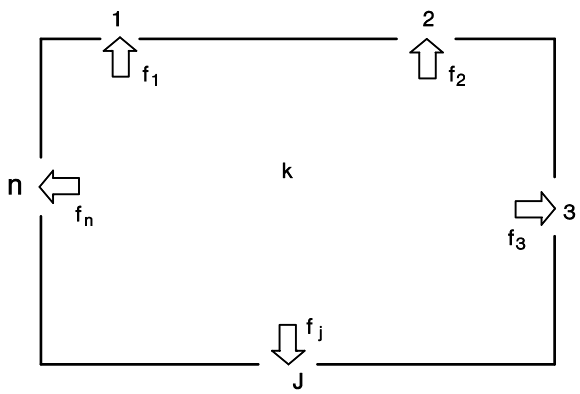

Figura 4.1 Recinto de n salidas

Para cada una de las salidas es posible estimar el flujo $f_1(z)$, $f_2(z)$, . . . , $f_j(z)$, . . . , $f_n(z)$ que se registra en cada una de ellas y el objeto del problema consiste en determinar el número de personas x_1, x_2, . . . , x_j, . . . , x_n que deben dirigirse a cada una de las salidas para alcanzar un determinado objetivo.

Los objetivos de los problemas de evacuación se establecen para todo el colectivo, y tratan de lograr la máxima seguridad de las personas que ocupan el recinto desde una perspectiva global, se trata de definir magnitudes que cuantifiquen este propósito. Aunque parezca contradictorio, es posible que las estrategias de evacuación que resultan de la optimización global, aparentemente no supongan individualmente para cada uno de los ocupantes el tiempo mínimo de evacuación, en estas condiciones a algunos individuos podría corresponderles abandonar el edificio por una determinada salida, existiendo algún recorrido que supuestamente pudiera situarles en el destino en un tiempo menor.

Desde esta óptica colectiva, históricamente se han formulado varios objetivos: **Minimizar el tiempo** necesario para que la totalidad de los ocupantes puedan salir del recinto para dirigirse hasta un destino seguro, **maximizar** en cualquier instante el número de personas que han abandonado el recinto y **minimizar el tiempo total** empleado por todos los ocupantes en salir del recinto, se trata del coste de tiempo que supone la evacuación de la totalidad de los ocupantes.

A simple vista los tres objetivos parecen necesarios, sin embargo cabe preguntarse: ¿Cuál es más importante? o bien, ¿Cuál de ellos comporta mayor seguridad para los ocupantes?. A menudo se presentan problemas en los cuales varios objetivos son antagónicos, en este caso existe la fortuna, que en determinadas condiciones del problema, es posible poderlos cumplir simultáneamente.

El objetivo que la totalidad de los ocupantes pudieran estar situados en un destino seguro lo antes posible parece muy razonable. Si midiéramos el tiempo que transcurre desde que se produce la señal de alarma hasta que el último ocupante abandona el edificio, se trata de minimizar dicha magnitud.

El modelo que permite determinar el número de personas que deben utilizar cada ruta, con el fin de minimizar el tiempo total de evacuación (z), es el siguiente:

$$\text{Min}\, z = \text{Max}\left[\, t_j\left(x_j \right) \right] \quad j = 1 \,.\,.\,.\,.\, n \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = k \tag{4.2}$$

$$0 \leq x_j \leq k \tag{4.3}$$

donde j indica el número de la salida, x_j el número de personas que abandonarán el recinto por la salida j, y $t_j\,(x_j)$ es la función de evacuación que proporciona el tiempo que tardarán en abandonar el recinto x_j personas.

La restricción (4.2) fuerza que salgan del recinto las k personas ocupantes del mismo, mientras que la (4.3) imposibilita que el número de personas que utilizan una determinada ruta sea negativo o mayor que los ocupantes de dicho recinto.

Las hipótesis que subyacen en el modelo son que los ocupantes se hallan uniformemente distribuidos en el recinto e inician la evacuación en el mismo momento, siendo independiente su movimiento en dirección a cada una de las salidas y conociéndose además la función de evacuación para cada salida.

Otro posible objetivo, tan razonable como el anterior, consiste en que el número de personas que han abandonado el recinto en cualquier instante z sea máximo, o la situación equivalente que el número de personas que todavía permanecen en el interior del edificio en cualquier instante sea mínima.

La función de evacuación inversa $p_j(z)$, indica en número de personas que abandonan el recinto utilizando la salida j en un tiempo z, esta función se define para cada una de las salidas.

Si en la salida j existe un flujo $F_j(z)$, variable y función del tiempo, la función de evacuación inversa de una salida j es posible obtenerla directamente a partir de la expresión

$$p_j(z) = \int_0^z F_j(z)\,d(z) \tag{4.4}$$

Si el flujo de circulación que se produce en cada una de las salidas es exclusivamente en el sentido de salida, resulta.

$$F_j(z) \geq 0$$

entonces en la función de evacuación inversa siempre se cumplirá que

$$p_j(z) \geq 0 \quad \forall z$$

La función de evacuación inversa total P(z), indica el número personas que pueden abandonar el recinto en un tiempo z utilizando todas las salidas. Si no existen demoras en el inicio de la evacuación y no se consideran recorridos, la función de evacuación total es estrictamente la suma de las funciones de evacuación inversa de cada una de las salidas:

$$P(z) = p_1(z) + p_2(z) + ... + p_j(z)$$

De esta forma, se pretende que en cualquier instante la función de evacuación total P(z) sea máxima. El objetivo será que el número total de personas que han abandonado el recinto en un tiempo z sea máximo para cualquier valor de z, resultando la función objetivo

$$\text{Max} \left[P(z) \right] \tag{4.5}$$

Otro planteamiento equivalente al enunciado, consiste en definir la ocupación que existe en el recinto en cualquier instante z, en este caso corresponde obtener la mínima ocupación

$$\text{Min} \left[\left(k - P(z) \right) \right] \tag{4.6}$$

El problema definido por los objetivos (4.5) ó (4.6) presenta las mismas restricciones que las del apartado anterior, el número de personas que utilizan cada una de las salidas debe ser un valor comprendido entre 0 y k, el número total entre todas las salidas debe ser igual a k, se halla definido en las expresiones (4.2) y (4.3).

Otro posible objetivo a plantear en el problema de la evacuación, similar a los dos anteriores, consiste en contabilizar el tiempo empleado por todos los ocupantes en abandonar el recinto. Se trata de definir una función de los costes de evacuación, una forma simple de medir dichos costes consiste en sumar el tiempo que le supone a cada individuo en la evacuación.

Se define la función $r_j(x_j)$ que contabiliza el tiempo que tardan en abandonar el recinto las x_j personas que utilizan la salida j. Mediante (4.7) o bien (4.8) se obtiene dicha función para cada una de las salidas.

$$r_j(x_j) = \sum_{j=1}^{x_j} t_j(x_j)\, d(x_j) \qquad (4.7)$$

La situación anterior resulta para un planteamiento discreto del problema, necesario en situaciones de ocupaciones reducidas, mientras que la expresión (4.8) obedece a un planteamiento más general en el cual x_j corresponde a una variable real.

$$r_j(x_j) = \int_0^{x_j} t_j(x_j)\, d(x_j) \qquad (4.8)$$

Si el recinto dispone de n salidas, el coste total de la evacuación será el proporcionado por R(x), que corresponde a la suma de los costes de evacuación de x_j personas por cada una de las j salidas

$$R(x) = r_1(x_1) + r_2(x_2) + \ldots\ldots + r_j(x_n)$$

siendo x el número total de personas que deben abandonar el recinto:

$$x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n$$

Se trata de obtener la estrategia de evacuación que consiga un mínimo coste, es decir aquella cuya suma de tiempos invertidos en la evacuación sea mínimo, se define en la función objetivo (4.9), función de x_1, x_2, ... , x_n.

$$\text{Min}\ \left[R(x) \right] \qquad (4.9)$$

De forma similar, puede obtenerse la función de coste de la evacuación en función del tiempo z a partir de la función de evacuación inversa, ello presenta algunas ventajas. Nuevamente se debe obtener el coste de la evacuación, efectuando la suma del número de personas que abandona el recinto en cada instante por el tiempo z que les supone.

En la forma que se ha definido la función inversa $p_j(z)$, se trata de conocer la función $\rho_j(z)$, definida como la tasa unitaria de circulación una salida

$$\rho_j(z) = \frac{d\left(p_j(z)\right)}{d(z)} \qquad (4.10)$$

La función de coste $r_j(z)$ de la salida j (4.11) indica el coste de la evacuación de $p_j(z)$ en un tiempo z.

$$r_j(z) = \int_0^{z} z\left(\rho_j(z)\right) d(z) \qquad (4.11)$$

Se halla la función R(z) que contabiliza el coste total de la evacuación, utilizando las n salidas, función de una única variable z.

$$R(z) = r_1(z) + r_2(z) + \ldots\ldots + r_n(z)$$

Se trata de obtener la estrategia de evacuación que consiga un mínimo coste, para ello se define la función objetivo (4.12).

$$\mathrm{Min}\ \left[R(z) \right] \tag{4.12}$$

En cualquier caso se trata de minimizar la función objetivo, definida en (4.9) y (4.12), en ambos casos sujetas a las restricciones definidas en (4.2) y (4.3).

4.2 EVACUACIÓN DE UN RECINTO EN EL TIEMPO MÍNIMO

Para la solución del problema de la evacuación de un recinto se ha desarrollado la solución analítica, un procedimiento de solución gráfica y finalmente se presenta una solución heurística.

4.2.1 Solución analítica

La formulación básica del problema de la evacuación de un recinto se fundamenta en el trabajo de J. R. Brown [6] y en el desarrollo de la misma realizado por R. L. Francis [32]. Esta formulación inicial resulta válida para los casos en los cuales las rutas de evacuación son independientes, con una función $t_j(x_j)$ conocida para cada ruta j siendo posible encontrar su función inversa $p_j(z)$ y no se consideran las capacidades de las rutas de evacuación ni de los destinos.

Para cada ruta j existe una función inversa de $t_j(x_j)$ que se denomina $p_j(z)$. Si $t_j(x_j)$ es el tiempo en que tardan x_j personas a salir del recinto por la ruta j, su función inversa $p_j(z)$, será el número de personas que pueden salir del recinto por la ruta j en un tiempo z.

Sustituyendo en $t_j\,(x_j)$ resulta la expresión:

$$z = t_j\left(p_j(z)\right)$$

La función z que se ha obtenido es válida para el intervalo:

$$0 \le z \le t_j(k)$$

siendo $t_j(k)$ el tiempo que tardarían en salir la totalidad de los ocupantes por la ruta j. Si fuera $z > t_j\,(k)$ resultaría que el tiempo de evacuación obtenido es mayor que el necesario para la evacuación de la totalidad de ocupantes del recinto por la ruta j, cuando justamente el número de personas que pueden cruzar la ruta j en un tiempo z es k.

$$p_j(z) = k \quad \forall\, t_j(k) < z$$

Mediante las expresiones anteriores se determina $p_j(z)$, dependiendo de si

$$p_j(z) = \begin{cases} t_j^{-1}(x_j) & 0 \le z \le t_j(k) \\ k & t_j(k) < z \end{cases} \tag{4.13}$$

Se puede interpretar $p_j\,(z)$ como el mayor número de personas que pueden utilizar la ruta j en un tiempo z. Sin embargo, si x_j personas utilizan la ruta j y resulta que $x_j > p_j(z)$, utilizando la función del tiempo de evacuación de una ruta, $t_j(x_j)$ es una función estrictamente creciente, entonces tendremos que:

$$t_j(x_j) > t_j\left(p_j(z)\right) = z$$

el tiempo necesario para salir es mayor que el del número de personas que pueden utilizar la ruta j en un tiempo z.

Si tenemos j salidas independientes, tendremos la capacidad total de salida del recinto

$$P(z) = p_1(z) + p_2(z) + \ldots\ldots + p_n(z) \tag{4.14}$$

P(z) es la función que indica el número total de personas que pueden salir del recinto en un tiempo z.

Si en el recinto existen k ocupantes, ello nos permite encontrar el tiempo mínimo z* necesario para la salida de k ocupantes del recinto, resolviendo:

$$k = P(z^*) \tag{4.15}$$

Resulta que k será el mayor número de ocupantes, que pueden de salir del recinto en un tiempo total z. Entonces z* será el tiempo óptimo.

Ahora puede concluirse que en un tiempo total z'

$$z' < z^*$$

no será posible la evacuación de k ocupantes del recinto, definitivamente será z* el tiempo mínimo para evacuar k ocupantes del recinto. Conocido z* será posible calcular la asignación x^*_j para cada ruta de evacuación

$$x_j^* = p_j(z^*) \quad \forall j \tag{4.16}$$

necesariamente debe garantizarse que:

$$x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^* = p_1(z^*) + p_2(z^*) + \ldots\ldots + p_n(z^*) = P(z^*) = k$$

En estas condiciones, la distribución obtenida produce la evacuación de la totalidad de ocupantes k. Para la cual, finalmente debe verificarse que el tiempo necesario para evacuar x_j* personas por la ruta j será el tiempo óptimo.

$$t\left(x_j^*\right) = t\left(p_j(z^*)\right) = z^*$$

Se obtiene para cada ruta o recorrido un tiempo z* similar. Si no existen restricciones de capacidad en los destinos para una evacuación óptima, los tiempos de evacuación en las diferentes rutas son uniformes. De otra forma el tiempo de evacuación de cada ruta es aproximadamente el mismo cuando el recinto es evacuado en el mínimo tiempo. Decimos aproximadamente el mismo ya que consideramos x_j una variable continua cuando necesariamente es una variable discreta.

Finalmente es necesario comprobar la coherencia de los resultados, verificando la factibilidad de los valores de las velocidades y de los flujos supuestos inicialmente con los valores óptimos del tiempo de evacuación y las asignaciones x_j de cada una de las salidas. Estos aspectos se pueden observar en la figura 4.2.

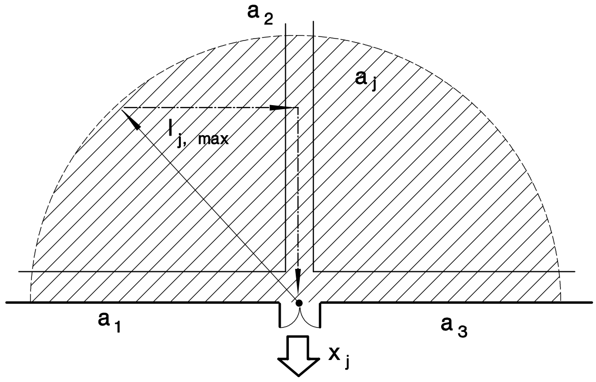

Figura 4.2 Proceso de verificación

Las velocidades de circulación y los flujos, se producen como consecuencia de la densidad de ocupación que resulta de la asignación óptima x_j*. Si a_j es la superficie de vía de evacuación, y x_j el número de personas que utilizan la salida j será

$$d_j = \frac{x_j}{a_j} \tag{4.17}$$

a partir de d_j se procede a revisar el valor de las magnitudes de circulación v_j y f_j.

De la misma forma, el tiempo de evacuación z* no puede ser menor que el tiempo t_j necesario para llegar a la salida j los x_j ocupantes asignados a la misma:

$$t_j = \frac{l_{j\,max}}{v_j} \tag{4.18}$$

Efectuadas dichas operaciones se repite el proceso de cálculo hasta la obtención de la solución definitiva, en la cual las magnitudes de circulación razonablemente deben coincidir con las inicialmente supuestas.

4.2.2 Solución gráfica

Un procedimiento gráfico para la solución del problema cuando las funciones de evacuación son monótonas se debe a R. L. Francis [34]. Dicho procedimiento es posible generalizarlo para considerar efectos de comportamiento que dan lugar a demoras y se consideran recorridos de evacuación, y además se ha transformado el proceso para la utilización de herramientas de cálculo. El proceso a seguir para la solución gráfica del problema es el siguiente:

Primer paso. Determinar para cada salida j la función de evacuación $t_j(x_j)$.

Segundo paso. Obtener la función de evacuación inversa $p_j(z)$, basta con representar la función de evacuación $t_j(x_j)$ situando los tiempos de evacuación z en el eje de abscisas y el número de personas $p_j(z)$ en el eje de ordenadas.

Tercero paso. Obtener y efectuar la representación gráfica de la función $P_T(z)$. Si las salidas son independientes, se suman los valores correspondientes de cada una de ellas representados por las funciones $p_j(z)$. $P_T(z)$ indica el número total de personas que pueden salir en un tiempo z.

Cuarto paso. Se sitúa el valor k en el eje de ordenadas. Desde este punto se traza una línea horizontal hasta la intersección con la línea $P_T(z)$.

Quinto paso. Desde este punto de intersección se traza una línea vertical, en el eje de abscisas se lee el tiempo necesario para la evacuación de los k ocupantes, resulta el tiempo de evacuación mínimo z*.

Sexto paso. A partir de las intersecciones de la línea vertical con las funciones $p_j(z)$ de cada salida, se trazan líneas horizontales, en el eje de ordenadas se efectúa la lectura de la asignación $p_j(z^*)$ que corresponde a cada salida j.

$$p_j(z^*) = x_j^*$$

Séptimo paso. Finalmente de forma analítica debe verificarse que se ha producido la evacuación de la totalidad de ocupantes:

$$x_1^* + ... + x_n^* = p_1(z^*) + ... + p_n^*(z^*) = k$$

En la figura 4.3 puede observarse un ejemplo de solución gráfica en la cual se hallan representadas las funciones de evacuación inversas de cada una de las salidas y la función de evacuación total y mediante las correspondientes líneas horizontales y verticales se completa el procedimiento gráfico descrito para hallar la distribución óptima y el tiempo mínimo de evacuación. Se trata de una situación en la cual se producen distintos flujos en las salidas, de la misma forma que existen distintos recorridos de evacuación.

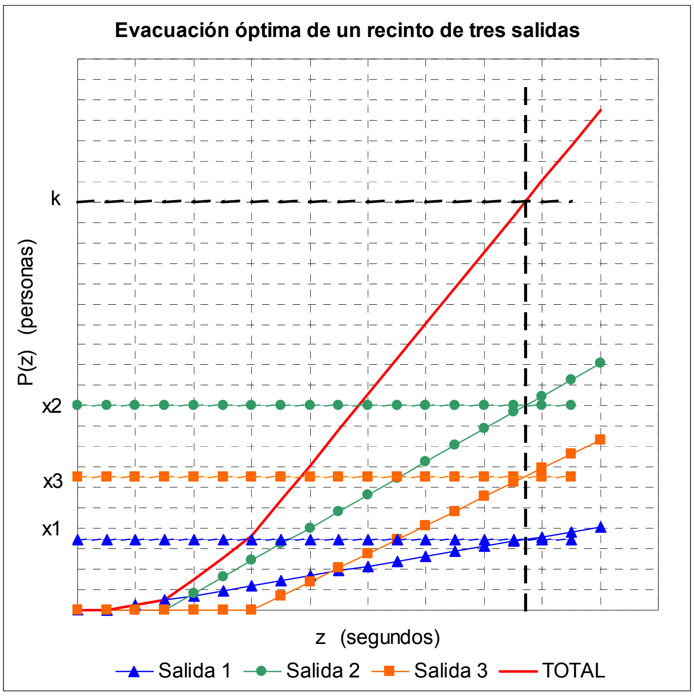

Figura 4.3 Ejemplo: Procedimiento gráfico para la optimización de la evacuación

4.2.3 Solución heurística

Para la resolución del problema se han utilizado diferentes procedimientos heurísticos, en este apartado se presenta un algoritmo incremental muy simple que ha proporcionado buenos resultados. La rapidez en encontrar la solución es función del paso de cada iteración, cuando el número de ocupantes es reducido puede utilizarse como valor del paso la unidad. El proceso a seguir es el siguiente:

Primero. Se establece el paso de resolución x_p

Segundo. Se determina la función $t_j(x_j)$ de evacuación de cada salida.

Tercero. Se considera que x_p ocupantes pretenden abandonar el recinto utilizando una determinada salida j.

Cuarto. Se evalúa el tiempo que supondría a los x_p ocupantes abandonar el recinto por cada una de las salidas.

Quinto. Se asignan los x_p ocupantes a la salida que supone un tiempo de evacuación menor.

Sexto. El proceso se repite hasta la iteración n en la que se verifique

$$\left(k - \sum_{i=1}^{n} x_p\right) \leq x_p$$

Séptimo. Se adopta como paso de resolución la unidad hasta la evacuación de los k ocupantes del recinto.

EXITRV*

Datos

Ocupación total	k

	RUTA					
	1	**2**		**j**		**n**
Anchura efectiva mínima (m)	w_1	w_2				w_n
Superficie útil (m^2)	a_1	a_2				a_n
Recorrido (m)	l_1	l_2				l_n
Densidad estimada (Pers./ m^2)	d_1	d_2				d_n
Flujo específico (Pers./ m min)	f_1	f_2				f_n
Demora en el inicio evac. (s)	$t_{0\,1}$	$t_{0\,2}$				$t_{0\,n}$

Resultados

	RUTA					
Asignación (Pers.)	x_1	x_2				x_n
Densidad resultante(Pers./ m^2)	d_1	d_2				d_n
Velocidad (m min)	v_1	v_2				v_n
Flujo específico (Pers./m min)	f_1	f_2				f_n
Flujo (Pers./ m min)	F_1	F_2				F_n
t_{1j} (s)	$t_{1\,1}$	$t_{1\,2}$				$t_{1\,n}$
t_{2j} (s)	$t_{2\,1}$	$t_{2\,2}$				$t_{2\,n}$
t_{TOTAL} (s)	t_1	t_2				t_n

Tabla 4.1 Tabla de resultados de la solución heurística

Para la aplicación de la heurística propuesta se ha desarrollado la aplicación **EXITR**, en la tabla 4.1 puede observarse la entrada de datos y el formato de los resultados a que da lugar dicha aplicación en la cual t_{0j} corresponde a la demora en el inicio de la evacuación de los ocupantes que se dirigen a la salida j, t_{1j} es el tiempo de circulación, t_{2j} al tiempo de flujo y t_{TOTAL} el tiempo de evacuación.

La demora $t_{0\,j}$ en el inicio de la evacuación para los ocupantes que utilizan la salida j se trata de un valor estimado que depende de diversos factores: El tipo de edificio, las características de los ocupantes, los sistemas de comunicaciones y de señalización instalados en el edificio, etc..

4.3 EVACUACIÓN DE UN RECINTO EN EL TIEMPO MÍNIMO CON FLUJO CONSTANTE EN LAS SALIDAS SIN RECORRIDO

Existen situaciones en las cuales se considera que las salidas se encuentran en los límites del recinto, no se tienen que considerar recorridos y no se producen demoras en el inicio de la evacuación de tal forma que en el momento de producirse la señal de alarma, x_j ocupantes se dirigen de forma absolutamente automática hacia cada salida j, además se supone que el flujo F_j que se registra en las salidas durante el tiempo que se produce la evacuación es constante.

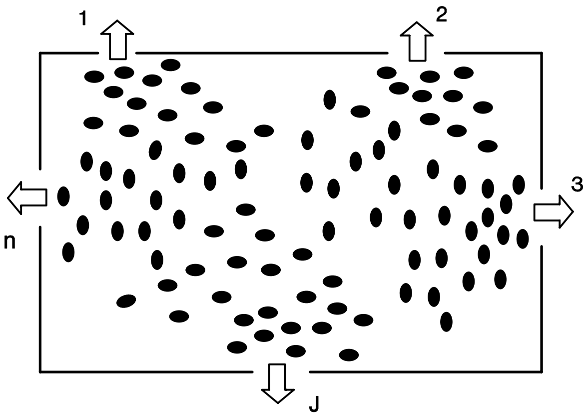

Figura 4.4 Evacuación de un recinto sin recorridos

4.3.1 Solución analítica

Si se supone que los flujos F_j que se registran en cada una de las salidas son constantes, unidireccionales, resulta que las funciones de evacuación $t_j(x_j)$ únicamente serán función del número de personas x_j que utilizan la ruta j. En principio es preciso pronosticar el flujo específico f_j que va existir en cada una de las salidas, según se trate de un recorrido horizontal, circulación por una escalera, una rampa u otro elemento de circulación, la magnitud del flujo puede estimarse a partir del modelado del movimiento de las personas de J. Fruins. Aplicando (3.8) si la anchura mínima de paso es w_j resulta

$$F_j = f_j\, w_j$$

según (3.30) aplicada a este caso, la función de evacuación $t_j(x_j)$ será una función lineal que carece de término independiente cuya pendiente será el inverso del valor del flujo F_j.

$$t_j(x_j) = \frac{x_j}{F_j} = \left(\frac{1}{F_j} \right) x_j \qquad 0 \le x_j \le k \tag{4.19}$$

De la misma forma puede obtenerse directamente la función de evacuación inversa de cada una de las salidas $p_j(z)$, el número de personas que pueden salir será el producto del tiempo z por el valor del flujo

$$p_j(z) = z F_j \qquad z \ge 0 \tag{4.20}$$

Si en un recinto existen n salidas independientes, cada una de ellas con un flujo F_j constante en el intervalo de evacuación, el número total de personas capaces de abandonar el recinto en un tiempo z , vendrá dado por P(z)

$$P(z) = p_1(z) + p_2(z) + \ldots\ldots + p_n(z) = \sum_{j=1}^{n} p_j(z)$$

Sustituyendo las expresiones de las funciones de evacuación resulta

$$P(z) = F_1 z + F_2 z + \ldots\ldots + F_n z = z\left(\sum_{j=1}^{n} F_j \right)$$

Si F es el flujo total de salida del recinto

$$F = F_1 + F_2 + \ldots\ldots + F_n = \sum_{j=1}^{n} F_j$$

El número de personas que pueden abandonar el recinto en un tiempo z será

$$P(z) = z F$$

Si dicho número corresponde con el de ocupantes

$$P(z) = k$$

Resolviendo es posible obtener el tiempo mínimo z, necesario para la evacuación de k ocupantes

$$z^* = \frac{k}{F} \tag{4.21}$$

Conocido el tiempo de evacuación del recinto z*, el tiempo correspondiente a la evacuación de cada una de las salidas será

$$z^* = t_j(x_j)$$

Permite determinar a partir de la ecuación (4.16) la asignación óptima de ocupantes hacia cada salida

$$x_j^* = t_j(x_j) F_j = (z^*) F_j = \left(\frac{k}{F} \right) F_j = k \left(\frac{F_j}{F} \right) \tag{4.22}$$

Puede observarse, que ésta será una asignación crítica, en el sentido que asignar más ocupantes a una determinada salida supone incrementar el tiempo de evacuación z, por ello si z > z*, z deja de ser un tiempo óptimo de evacuación.

Con esta observación se ha obtenido que si en un recinto se registra un determinado flujo específico en cada una de las salidas, el número de ocupantes que debe asignarse a cada salida j, será proporcional a la relación que existe entre el flujo F_j que se registra en la salida j y el flujo total de salida del recinto F.

La formulación anterior puede llevar a una propuesta más simple, si se supone que el flujo especifico f_j que se registra en cada una de las salidas del recinto es el mismo, válido cuando se trata de salidas que tienen unas condiciones físicas idénticas, entonces el flujo F_j que se registra en la salida j depende única y exclusivamente de la anchura mínima de paso w_j

$$f_j = \text{cte.} \qquad \forall\, j$$

Entonces resulta

$$F = f\,w_1 + f\,w_2 + \ldots\ldots + f\,w_n = f\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\right)$$

Siendo w la anchura mínima total

$$w = \sum_{j=1}^{n} w_j$$

Permite expresar la asignación óptima como

$$x_j* = k\left(\frac{F_j}{F}\right) = k\left(\frac{f\,w_j}{f\,w}\right) = k\left(\frac{w_j}{w}\right) \qquad (4.23)$$

Dicha expresión indica que si en todas las salidas se ha considerado que los flujos son idénticos y proporcionales a la anchura de paso mínima, el número de ocupantes que debe asignarse a cada salida j, será proporcional a la relación que existe entre la anchura mínima w_j de la salida j y la total del recinto w.

4.3.2 Solución gráfica

Para obtener la solución gráfica del problema para esta situación se sigue el proceso descrito en el apartado 4.2.2.

> **Primer paso.** La función de evacuación $t_j(x_j)$ de cada una de las j salidas se determina directamente mediante la expresión (4.6). En la figura 4.5 puede observarse que efectivamente se trata de una función lineal que pasa por el origen cuya pendiente es el inverso del flujo.

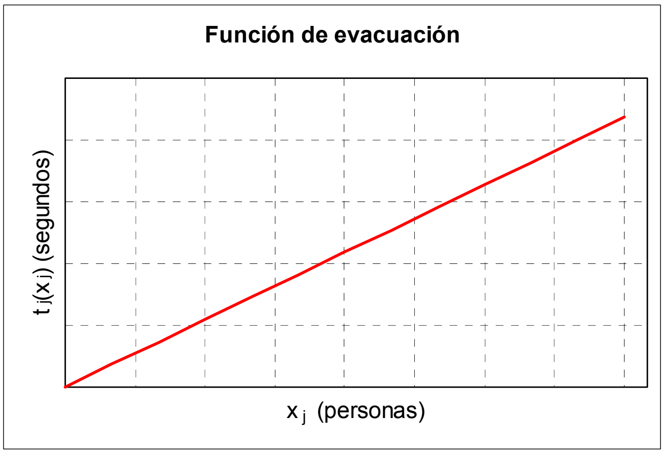

Figura 4.5 Forma de la función de evacuación en flujo constante sin recorrido ni demora

Segundo paso. La función de evacuación inversa $p_j(z)$, se halla directamente mediante la expresión (4.7), en la figura 4.6 puede observarse que es una función lineal sin ordenada en el origen cuya pendiente es el flujo

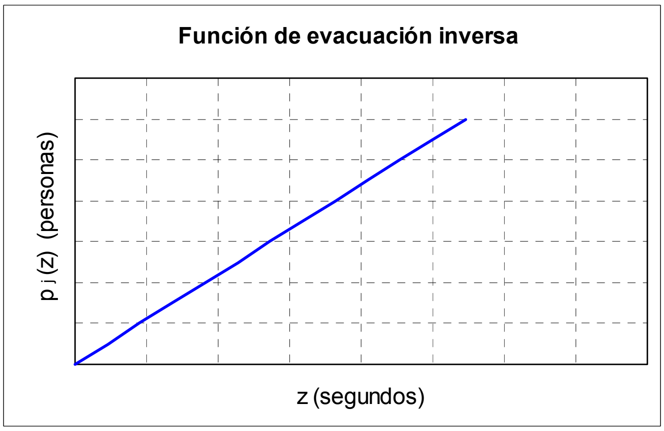

Figura 4.6 Forma que adopta la función de evacuación inversa en este modelo

Tercer paso. En este caso $P_T(z)$ puede obtenerse directamente realizando la suma algebraica de las funciones de evacuación de cada una de las salidas según la expresión (4.12), luego se procede a su representación.

Cuarto paso. Se sitúa el valor k correspondiente al número de ocupantes en el eje de ordenadas, desde este punto se traza una línea horizontal hasta la intersección con $P_T(z)$.

Quinto paso. Desde este punto de intersección de k con $P_T(z)$ se traza una línea vertical, en el eje de abscisas se lee el tiempo mínimo z* necesario para la evacuación de los k ocupantes del recinto.

Sexto paso. Las intersecciones de la línea vertical con las funciones $p_j(z)$ de cada salida determinan los puntos, desde los cuales se trazan líneas horizontales, en el eje de ordenadas se efectúa la lectura de la asignación $p_j(z^*)$ que corresponde a cada salida j.

$$p_j(z^*) = x_j^*$$

Séptimo paso. Finalmente se verifica que se ha producido la evacuación de la totalidad de ocupantes:

$$x_1*+....+x_n*=p_1(z*)+......+p_n*(z*)=k$$

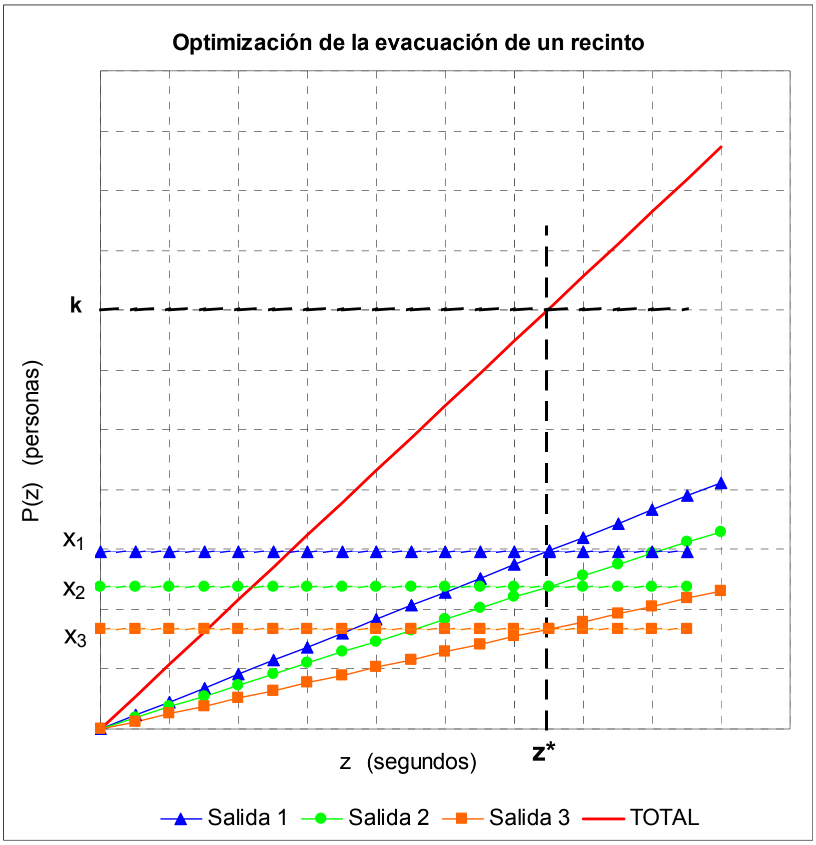

Figura 4.7 Proceso para la obtención de la solución gráfica

4.3.3 Aplicación numérica: Evacuación de un recinto de tres salidas

Sea una dependencia con una forma rectangular de 60 × 40 metros con una inserción en la cara inferior de 16,5 × 18 metros, resulta aproximadamente una superficie de 2100 m^2 y una ocupación máxima de 610 personas, existen 3 salidas independientes identificadas como 1, 2 y 3 cuyas anchuras efectivas de paso son 2, 1,6 y 1,2 metros. Este recinto se representa en la figura 4.8 y se supone que los ocupantes inician la evacuación en el instante en que se produce la señal de alarma.

En este caso, si la totalidad de los ocupantes ocupan de forma inmediata las vías de evacuación se estima que se producirá en cada una de ellas una densidad de ocupación 2,6 Personas por metro cuadrado, situación que corresponde al nivel D de las tablas de ocupación de Fruins y al nivel F de las de circulación, en tales circunstancias es inevitable el contacto físico entre los ocupantes y no es posible efectuar adelantamientos.

Se supone que el flujo específico será constante durante todo el tiempo en que dura la evacuación, se estima que será de 65 personas por metro y minuto.

Se van a utilizar cuatro procedimientos para la resolución de este ejemplo: La solución analítica, la solución gráfica, la solución heurística y directamente a partir de la proporcionalidad de las anchuras mínimas de paso de las salidas.

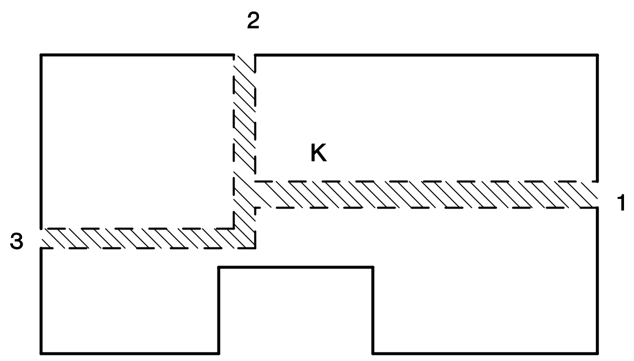

Figura 4.8 Ejemplo de recinto

Las soluciones analítica y gráfica aportarán procedimientos generales de resolución del problema, su valor resulta más instrumental, en la situación concreta que se ha planteado el problema, con los supuestos que se han efectuado la solución más eficaz consiste en aplicar directamente la proporcionalidad.

La **solución analítica** se inicia determinando la función $t_j(x_j)$, se obtiene a partir del flujo específico f_j que se registra en la salida j y de la anchura mínima de paso w_j.

Se estima que en las salidas se registran los siguientes flujos:

$$F_1 = 65 \times 2,0 = 130\,\text{Pers./min} = 2,17\,\text{Pers./s}$$

$$F_2 = 65 \times 1,6 = 104\,\text{Pers./min} = 1,73\,\text{Pers./s}$$

$$F_3 = 65 \times 1,2 = 78\,\text{Pers./min} = 1,30\,\text{Pers./s}$$

Entonces la función de evacuación $t_j\,(x_j)$ de cada salida será:

$$t_1(x_1) = \frac{x_1}{F_1} = \frac{1}{2,17}x_1$$

$$t_2(x_2) = \frac{x_2}{F_2} = \frac{1}{1,73}x_2$$

$$t_3(x_3) = \frac{x_3}{F_3} = \frac{1}{1,30}x_3$$

El problema a resolver será encontrar el valor Min z

$$z = \text{Max}\begin{cases} t_1(x_1) = \dfrac{1}{2,17}x_1 \\[2mm] t_2(x_2) = \dfrac{1}{1,73}x_2 \\[2mm] t_3(x_3) = \dfrac{1}{1,30}x_3 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 610$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0$$

Se hallan las funciones inversas de $t^{-1}(x)$ para cada una de las salidas, indican el número de personas que pueden abandonar el recinto por cada salida en un tiempo z

$$p_1(z) = 2{,}17\,z$$
$$p_2(z) = 1{,}73\,z \qquad z \geq 0$$
$$p_3(z) = 1{,}30\,z$$

Si las salidas son independientes resulta

$$P_T(z) = p_1(z) + p_2(z) + P_3(z) = 5{,}20z \qquad z \geq 0$$

El flujo total de salida del recinto será F = 5,20 Pers./ s

Es posible determinar el tiempo mínimo de evacuación z* sustituyendo en la ecuación anterior, para la ocupación del recinto 610 ocupantes.

$$z^* = \frac{610}{5{,}20} = 117{,}31 \text{ segundos}$$

Igualando el tiempo de evacuación en cada ruta

$$t_j(x_j) = z^*$$

Resulta la asignación óptima de ocupantes. Número de personas que pueden utilizar la salida j en el tiempo z*

$$x_j = t_j(x_j)\,F_j = (z^*)\,F_j$$

$$x_1 = 117{,}31 \times 2{,}17 = 254{,}55 \cong 255 \text{ Pers.}$$

$$x_2 = 117{,}31 \times 1{,}73 = 202{,}94 \cong 203 \text{ Pers.}$$

$$x_3 = 117{,}31 \times 1{,}30 = 152{,}5 \cong 152 \text{ Pers.}$$

Se ha efectuado la correspondiente aproximación para transformar en números enteros el número de personas que utilizan cada salida. Finalmente se debe verificar la evacuación de la totalidad de loas ocupantes:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 610$$

En este caso no ha sido preciso efectuar ajustes en la aproximación antes efectuada.

Una alternativa habría sido resolver el problema directamente utilizando números enteros.

La solución gráfica del problema se apoya en la solución analítica del apartado anterior, por ello directamente se procede a la representación gráfica de las funciones de evacuación inversas de cada una de las salidas $p_1(z)$, $p_j(z)$, $p_n(z)$ y la función de evacuación total $P_T(z)$.

Se utiliza un rango de representación, entre 0 y 750 ocupantes resultando el gráfico de la figura 4.9, el proceso de solución directamente se sitúa en el segundo apartado

Segundo paso. Se representan las funciones de evacuación inversa $p_j(z)$ de cada una de las salidas.

Tercer paso. Se representa la función de evacuación total $P_T(z)$

Cuarto paso. Se sitúa el valor k = 610 en el eje de ordenadas y desde este punto se traza una línea horizontal paralela al eje de abscisas hasta el punto de intersección con la línea $P_T(z)$.

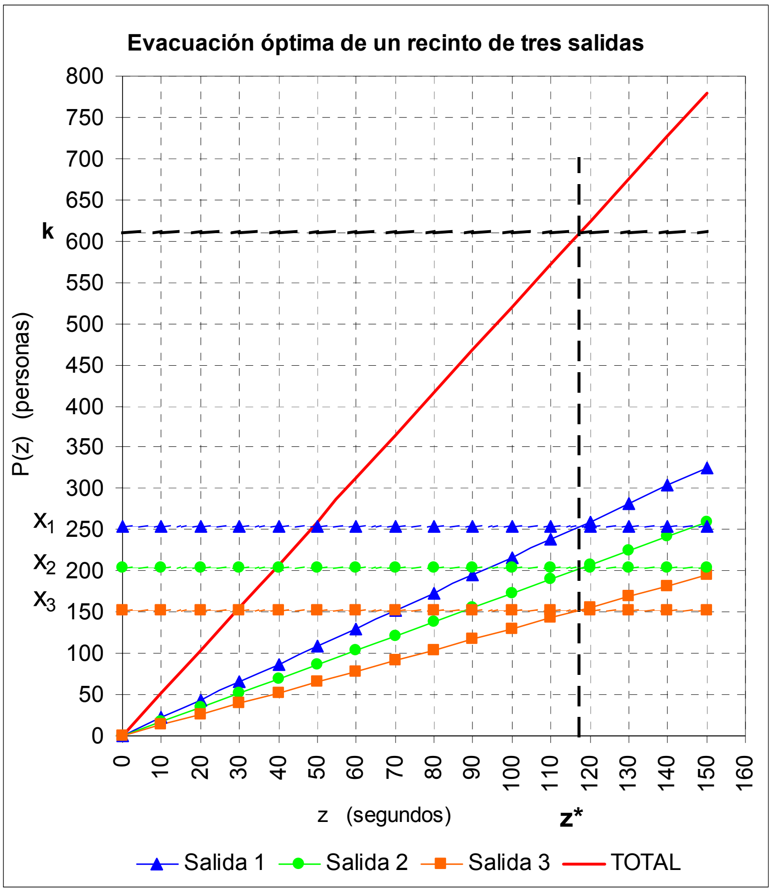

Figura 4.9 Solución gráfica de la aplicación propuesta

Quinto paso. Desde este punto se traza una línea vertical perpendicular al eje de abscisas, en el eje de abscisas se lee el tiempo necesario para la evacuación de los 610 ocupantes, resulta $z = 118$ s

Sexto paso. A partir de las intersecciones de la línea vertical con la función $p_j(z)$ se trazan líneas horizontales que cortan el eje de ordenadas.

En los puntos de intersección con dicho eje se efectúa la lectura de la asignación que corresponde a cada salida. En un gráfico más ampliado se determina

$$P_1(z) = 254 \text{ Pers.}$$

$$P_2(z) = 204 \text{ Pers.}$$

$$P_3(z) = 152 \text{ Pers.}$$

Séptimo paso. Se verifica que se ha realizado la evacuación de la totalidad de los ocupantes.

$$x_1 + x_1 + x_1 = 254 + 204 + 152 = 610$$

En este ejemplo, en el cual no se han considerado los recorridos de evacuación y se ha considerado la identidad de los flujos específicos que se registran en cada salida, se podría haber resuelto directamente a partir de **la proporcionalidad** de las mismas.

Si las anchuras mínimas de paso de cada una de las salidas y la total del edificio son:

$$w_1 = 2,0 \qquad w_2 = 1,6 \qquad w_3 = 1,2 \qquad w_T = 4,8$$

entonces la asignación que resulta en cada una de las salidas será:

$$x_1 = 610\frac{2}{4,8} = 254,17 \cong 254 \ \text{Pers.}$$

$$x_2 = 610\frac{1,6}{4,8} = 203,33 \cong 203 \ \text{Pers.}$$

$$x_3 = 610\frac{1,2}{4,8} = 152,5 \cong 153 \ \text{Pers.}$$

En esta situación se valida aquello que intuitivamente parece razonable, el número de ocupantes asignado a cada salida: Proporcional a la anchura mínima de la salida. Este "principio" queda totalmente invalidado cuando el valor del flujo que se registra en las salidas es distinto o bien se consideran recorridos de evacuación.

El tiempo de evacuación óptimo z* puede determinarse directamente sustituyendo la asignación obtenida en una salida en la expresión de la función de evacuación

$$z^* = t_j(x_j) = \left(\frac{1}{F_1}\right)x_j$$

Por ejemplo operando con las magnitudes correspondientes de la primera salida resulta

$$z^* = \left(\frac{1}{2,17}\right) \times 254,55 = 117,30 \ \text{segundos}$$

La solución heurística se obtiene mediante la aplicación denominada EXITR, en la cual se utiliza en este ejemplo se emplea el paso de resolución de valor 1 y la solución resulta inmediata obteniendo idénticos resultados que mediante los otros procedimientos descritos.

EXITRV1

Datos

Ocupación total	610

	RUTA		
	1	**2**	**3**
Anchura efectiva mínima (m)	2	1,6	1,2
Densidad estimada (Pers./ m^2)	2,6	2,6	2,6
Flujo específico (Pers./ m min)	65	65	65

Resultados

	RUTA		
Asignación (Pers.)	255	203	152
t_{2j} (s)	117,69	117,11	116,92
t_{TOTAL} (s)	117,69		

Tabla 4.2 Tabla de resultados de la solución heurística en el ejemplo propuesto

4.4 EVACUACIÓN DE UN RECINTO EN EL TIEMPO MÍNIMO CON FLUJO CONSTANTE, RECORRIDO Y DEMORA EN EL INICIO DE LA DE EVACUACIÓN

4.4.1 Análisis y solución del problema

Una situación más general que la estudiada en el caso anterior consiste en considerar los recorridos que deben efectuar los ocupantes del recinto para llegar hasta la salida y las demoras en el inicio de la evacuación. En el momento de producirse la señal de alarma x_j ocupantes, después de un tiempo $t_{0\,j}$ se dirigen hacia cada salida j. Los flujos de circulación se supone que son unidireccionales y constantes durante todo el tiempo que dura la evacuación. En función de la densidad de ocupación de la vía de evacuación la magnitud del flujo puede estimarse a partir del modelado del movimiento de las personas realizado por J. Fruins [45].

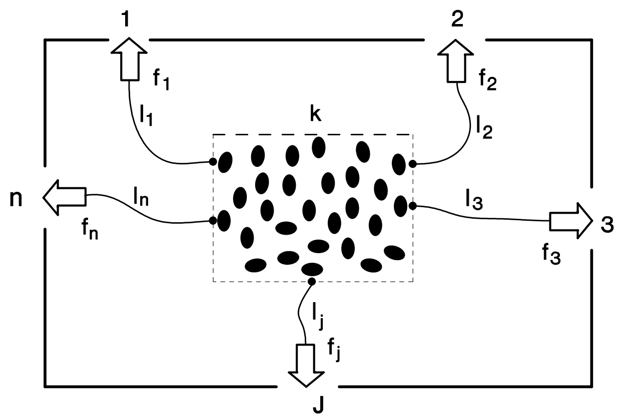

Figura 4.10 Ejemplo de recinto

Para obtener la s**olución analítica** en la salida j, cuya anchura mínima es w_j, existe un recorrido hasta el destino de longitud total l_j, se produce una densidad de ocupación d_j, se estima que los ocupantes que se dirigen hacia la salida lo harán con una velocidad v_j y habrá un flujo específico f_j, ambas magnitudes se suponen constantes durante todo el tiempo que dura la evacuación.

El tiempo $t_{1\,j}$ que se tardará en llegar a cada destino según la expresión (3.8) vendrá dado por

$$t_{1\,j} = \frac{l_j}{v_j}$$

hasta este instante $t_{1\,j}$ el flujo de llegada en el destino es nulo, y a partir del mismo la magnitud del flujo F_j resultante de la salida j lo proporciona la expresión (3.10) y resulta

$$F_j = f_j \; w_j$$

Si los ocupantes que se dirigen a la salida j demoran el inicio de la evacuación un tiempo $t_{0\,j}$, la función de evacuación $t_j(x_j)$ de la salida j a partir de la expresión (3.30) definitivamente

$$t_j(x_j) = t_{0\,j} + \frac{l_j}{v_j} + \left(\frac{1}{F_j}\right) x_j \qquad\qquad 0 \le x_j \le k$$

En la función de evacuación se contabiliza la demora en el inicio de la evacuación, el tiempo de recorrido y el flujo por el punto de anchura mínima. En este caso, un modelo de flujo constante, la función de evacuación adopta la forma representada en la figura 4.11. La ordenada en el origen corresponde a la suma de tiempos de demora en el inicio de la evacuación y de recorrido, mientras que la pendiente de la función corresponde al inverso del flujo.

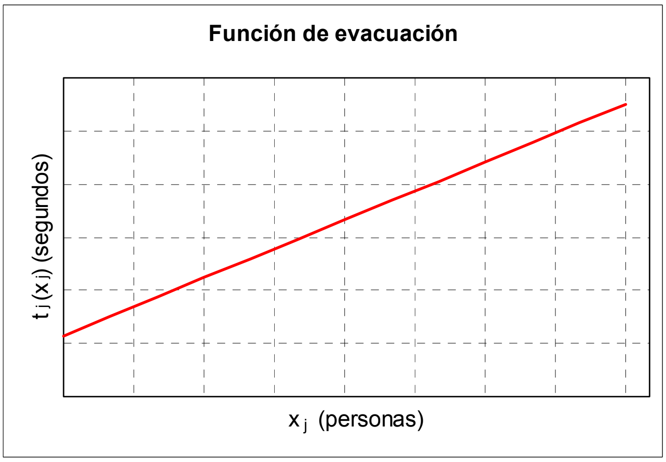

Figura 4.11 Forma de la función de evacuación en flujo constante recorrido y demora

Si el flujo es constante, se producen demoras al inicio de la evacuación, y se contabilizan los tiempos de recorrido hasta las salidas, la forma analítica de la función de evacuación inversa viene dada por la siguiente expresión:

$$p_j(z) = \begin{cases} 0 & z < (t_{0j} + t_{1j}) \\ \left[\, z - (t_{0j} + t_{1j}) \right] F_j & z \ge (t_{0j} + t_{1j}) \end{cases} \qquad (4.23)$$

La forma que adopta esta función es la representada en la figura 4.12, si analizamos detenidamente esta función se aprecia como hasta que ha transcurrido el tiempo de demora y recorrido θ_j, ningún ocupante es capaz de abandonar el recinto y a partir de este instante, el número de personas por unidad de tiempo que abandonan el recinto por la salida j en cada instante se refleja en la pendiente de la función, corresponde a la magnitud del flujo de la salida F_j.

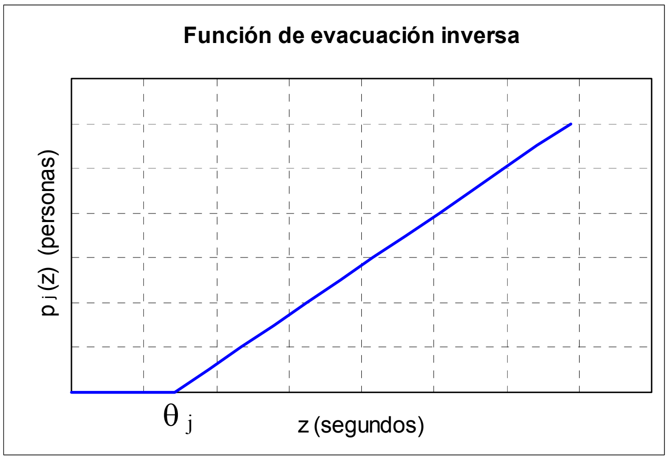

Figura 4.12 Forma que adopta la función de evacuación inversa

Si en un recinto existen n salidas independientes, el número total de personas capaces de abandonar el recinto en un tiempo z, vendrá dado por P(z) obtenida considerando de forma adecuada las discontinuidades de cada $p_j(z)$. En la figura 4.13 puede observarse la representación de las funciones de evacuación inversa de un recinto que dispone de tres salidas, mediante τ_j se indican los puntos de discontinuidad θ_j ordenados, según la figura $\tau_1 = \theta_3$, $\tau_2 = \theta_2$ y $\tau_3 = \theta_1$. Se observa que hasta el instante τ_1 ningún ocupante habrá llegado hasta la salida, en el intervalo comprendido entre τ_1 y τ_2 sólo pueden abandonar el recinto los ocupantes que utilizan la salida 3 en la cual se registra un flujo F_3, en el instante τ_2 llegan a la salida los ocupantes que utilizan la salida 2 y desde este instante τ_2 hasta τ_3 se utilizan conjuntamente las salidas 3 y 2 siendo los flujos de salida F_3 y F_2, finalmente a partir de τ_3 se utilizan las tres salidas siendo los flujos de salida la suma de F_1 F_2 y F_3.

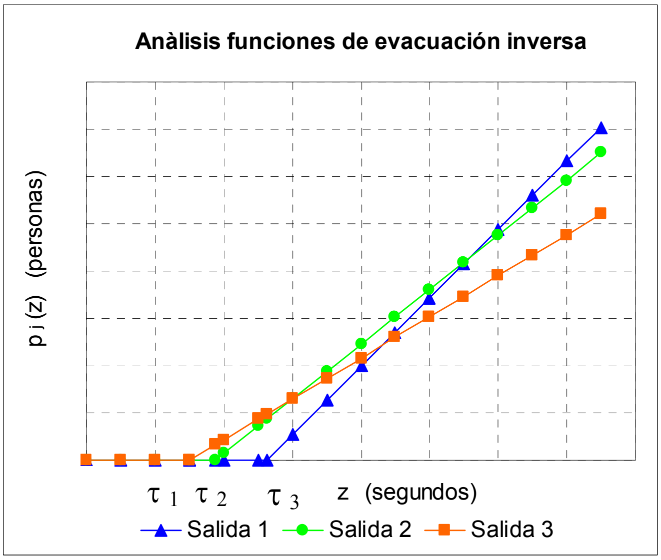

Figura 4.13 Función de evacuación inversas recinto tres salidas

Esta situación puede generalizarse, en principio mediante la expresión (4.24) se definen los puntos de discontinuidad de cada una de las salidas

$$\theta_j = t_{0j} + t_{1j} \tag{4.24}$$

Sea Θ_1 el conjunto inicial formado por los puntos de discontinuidad de las funciones $p_j(z)$. Si el recinto dispone de n salidas:

$$\Theta_1 = \left\{\theta_1, \ldots, \theta_j, \ldots, \theta_n\right\} \tag{4.25}$$

Se obtiene el primer punto de discontinuidad τ_1 y la función π_1 asociada al mismo:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mathrm{Min}\left\{\Theta_1\right\} \\ \pi_1 &= \left[\, p_j(z_j) \middle|\, z_j = \tau_1 \right] \end{aligned} \tag{4.26}$$

Sea Θ_2 el conjunto de puntos de discontinuidad pendientes de ordenar:

$$\Theta_2 = \left\{ \theta_j \,|\, \theta_j > \tau_1 \right\} \tag{4.27}$$

Se obtiene el segundo punto de discontinuidad τ_2 y la función π_2 asociada al mismo:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \mathrm{Min}\left\{\Theta_2\right\} \\ \pi_2 &= \left[\, p_j(z_j) \middle|\, z_j = \tau_2 \right] \end{aligned} \tag{4.28}$$

En general, dado el conjunto de todos los puntos de discontinuidad no ordenados Θ_j:

$$\Theta_j = \left\{ \theta_j \,|\, \theta_j > \tau_{j-1} \right\} \tag{4.29}$$

Se obtiene el j-ésimo punto de discontinuidad τ_J y la función correspondiente π_J:

$$\begin{aligned} \tau_j &= \mathrm{Min}\left\{\Theta_j\right\} \\ \pi_j &= \left[\, p_j(z_j) \middle|\, z_j = \tau_j \right] \end{aligned} \tag{4.30}$$

Con ello se ordenan las funciones inversas de evacuación según sus puntos de discontinuidad:

$$\begin{aligned} &\left\{ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \right\} \\ &\tau_1 < \tau_2, \ldots < \tau_J < \ldots, \tau_n \\ &\left\{ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n \right\} \end{aligned} \tag{4.31}$$

Para determinar la función de evacuación inversa global P(z), basta sumar las funciones de evacuación inversa de cada salida considerando de forma adecuada las discontinuidades.

$$P(z) = \begin{cases} 0 & 0 \le z < \tau_1 \\ \pi_1 & \tau_1 \le z < \tau_2 \\ \pi_1 + \pi_2 & \tau_2 \le z < \tau_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \pi_1 + \ldots + \pi_{n-1} & \tau_{n-1} \le z < \tau_n \\ \pi_1 + \ldots + \pi_{n-1} + \pi_n & \tau_n \ge z \end{cases} \tag{4.32}$$

Hasta que se utilizan todas las salidas existe un periodo transitorio, a partir del instante τ_n cuando se utilizan todas las salidas resulta el período estacionario.

En el intervalo $0 < z < \tau_1$ ningún ocupante habrá alcanzado una salida, mientras que en el intervalo $\tau_1 < z < \tau_2$ solamente se utiliza una, en el intervalo $\tau_2 \le z < \tau_3$ se utilizan las dos salidas, y así sucesivamente hasta utilizarse todas las salidas y resulta el período estacionario.

En la función P(z) existen dos zonas: Un período transitorio $z \leq \tau_n$ y un periodo estacionario $z > \tau_n$. Normalmente el periodo transitorio es corto y en el estudio de problemas de evacuación reales tiene escasa trascendencia, la evacuación de recintos tiene interés con grandes ocupaciones que se sitúan en la zona estacionaria.

Para resolver el problema se debe situar el número de ocupantes k en el tramo correspondiente para ellos se debe acotar P(z) y conocer los puntos de discontinuidad.

$$\begin{aligned} z &= \tau_1 \;\Rightarrow\; P(z=\tau_1) = \psi_1 \\ z &= \tau_2 \;\Rightarrow\; P(z=\tau_2) = \psi_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z &= \tau_n \;\Rightarrow\; P(z=\tau_n) = \psi_n \end{aligned} \tag{4.33}$$

Con ello quedan definidos los tramos de ocupación { $0\text{-}\psi_1$, $\psi_1\text{-}\psi_2$, ... $\psi_{n-1}\text{-}\psi_n$, } e identificados los tramos en los cuales se debe resolver la función de evacuación inversa global P(z). Resultan las siguientes situaciones:

$$\begin{aligned} 0 \leq k \leq \psi_1 &\quad \Rightarrow P(z) = 0 \\ \psi_1 < k \leq \psi_2 &\quad \Rightarrow P(z) = \pi_1 \\ \psi_2 < k \leq \psi_3 &\quad \Rightarrow P(z) = \pi_1 + \pi_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n < k &\quad \Rightarrow P(z) = \pi_1 + \pi_2 + \ldots. + \pi_n \end{aligned} \tag{4.34}$$

En el ejemplo planteado puede observarse la situación de los valores ψ_1 y ψ_2, efectivamente se trata de unos valores en el eje de ordenas que sitúan el tramo de resolución de P(z).

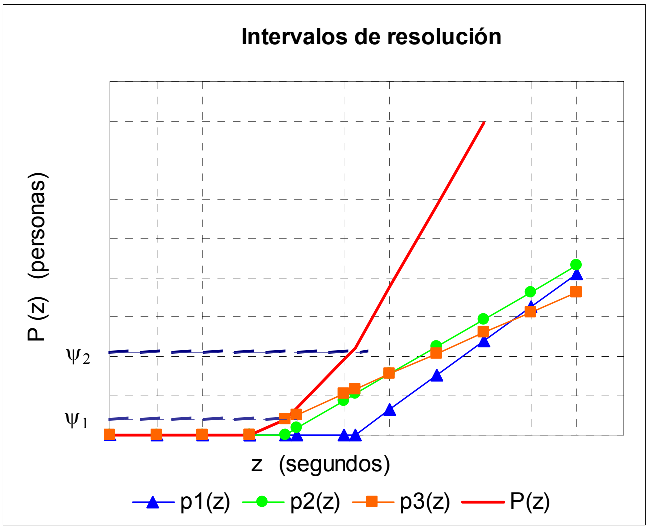

Figura 4.14 Situación de los tramos de resolución

Definida P(z) el proceso de solución es equivalente al descrito en el apartado 4.3.1. La función de evacuación adopta la forma

$$P(z) = F_1\, z + F_2\, z + \ldots\ldots + F_n\, z = z\left(\sum_{j=1}^{n} F_j\right)$$

El flujo total F de salida del recinto será la suma de los flujos registrados en cada una de las salidas utilizadas, todas en el intervalo estacionario y un número menor en el transitorio

$$F = F_1 + F_2 + \ldots\ldots + F_n = \sum_{j=1}^{n} F_j$$

resolviendo

$$P(z) = z\,F$$

se obtiene el valor del tiempo mínimo z, necesario para la evacuación de k ocupantes

$$z^* = \frac{k}{F}$$

Conocido el tiempo de evacuación del recinto z*, se determina la asignación óptima de ocupantes hacia cada salida

$$x_j{}^* = t_j\,(x_j\,)F_j = (\,z^*\,)F_j = \left(\frac{k}{F}\right)F_j = k\left(\frac{F_j}{F}\right)$$

Ciertamente, prácticamente la totalidad de problemas de evacuación de recintos se sitúan en la zona estacionaria.

Solución gráfica. El proceso a seguir para obtener la solución gráfica del problema es el mismo que se ha seguido en casos anteriores, el único aspecto diferente que debe considerarse de forma adecuada radica en la obtención de la función de evacuación P(z). Realmente la composición gráfica de P(z) puede resultar más simple que la resolución analítica.

Solución heurística. También la solución heurística coincide con la descrita en el apartado anterior con los correspondientes ajustes en la función de evacuación al considerar los recorridos de circulación.

4.4.2 Aplicación numérica: recorridos de evacuación

Se trata de resolver el ejemplo planteado en el apartado 4.3.3, la situación es notablemente distinta cuando los ocupantes no se hallan en disposición de abandonar el recinto, se considera que los ocupantes que se dirigen a la salida 1 deben efectuar un recorrido de 35 metros, 20 metros los que se dirigen a la salida 2 y 25 metros los que utilizan la salida 3. Se supone que no se registran demoras en el inicio de la evacuación. Se estima que la velocidad de circulación de los ocupantes es de 40 m / min y se supone constante durante todo el intervalo de tiempo que dura la evacuación del recinto.

Solución analítica. En primer lugar se determinan los puntos de discontinuidad en las funciones $p_j(z)$, al no considerar demoras simplemente se trata de conocer el instante en el cual los ocupantes alcanzan cada una de las salidas. Según la expresión (3.8) resulta

$$t_{11} = \frac{35}{40} \times 60 = 52,5$$

$$t_{12} = \frac{25}{40} \times 60 = 37,5$$

$$t_{13} = \frac{20}{40} \times 60 = 30$$

La función $t_j(x_j)$, considerando para cada ruta j, los flujos f_j y las velocidades v_j constantes será:

$$t_1(x_1) = 52,5 + \frac{1}{2,17} x_1$$

$$t_2(x_2) = 37,5 + \frac{1}{1,73} x_2$$

$$t_3(x_3) = 30 + \frac{1}{1,30} x_3$$

$t_{1j}(x_j)$ es el tiempo que tardarán en llegar a la salida los ocupantes que utilizan la ruta j, se trata de encontrar el mínimo valor de z, siendo z el valor máximo de las funciones de evacuación de cada salida

$$z = \text{Max} \begin{cases} t_1(x_1) = 52,5 + \dfrac{1}{2,17} x_1 & x_1 \geq 0 \\ t_2(x_2) = 37,5 + \dfrac{1}{1,73} x_2 & x_2 \geq 0 \\ t_3(x_3) = 30 + \dfrac{1}{1,30} x_3 & x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Se hallan las funciones de evacuación inversa de cada una de las salidas

$$p_1(z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z < 52,50 \\ 2,17\,z & z \geq 52,50 \end{cases}$$

$$p_2(z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z < 37,50 \\ 1,73\,z & z \geq 37,50 \end{cases}$$

$$p_3(z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z < 30 \\ 1,30\,z & z \geq 30 \end{cases}$$

Según la expresión (4.25) se determina el conjunto inicial formado por los puntos de discontinuidad Θ_1

$$\Theta_1 = \{ 52,5;\ 37,5;\ 30 \}$$

Según (4.26) se obtiene el primer punto de discontinuidad τ_1 y la función π_1 asociada al mismo:

$$\tau_1 = \mathrm{Min}\{\Theta_1\} = 30$$
$$\pi_1 = \left[\, p_j(z_j) \middle|\, z_j = \tau_1 \right] = p_3(z)$$

Sea Θ_2 el conjunto de puntos de discontinuidad pendientes de ordenar:

$$\Theta_2 = \{ z_{j\,I} \mid z_{j\,I} > \tau_1 \} = \{ 52{,}5;\ 37{,}5 \}$$

Se obtiene el segundo punto de discontinuidad τ_2 y la función π_2 asociada al mismo según la expresión (4.28), resultando:

$$\tau_2 = \mathrm{Min}\{\Theta_2\} = 37{,}5$$
$$\pi_2 = \left[\, p_j(z_j) \middle|\, z_j = \tau_2 \right] = p_2(z)$$

Finalmente

$$\tau_3 = 52{,}5$$
$$\pi_3 = p_3(z)$$

Se han ordenado las funciones inversas de evacuación según sus puntos de discontinuidad:

$$\{ 30;\ 37{,}5;\ 52{,}5 \}$$
$$\{ \pi_1 = p_3(z),\ \pi_2 = p_2(z),\ \pi_3 = p_1(z) \}$$

Al suponer la independencia entre las vías de evacuación y considerar de forma adecuada los puntos de discontinuidad resulta

$$P_T(z) = \begin{cases} 0 & 0 \le z < 30 \\ \pi_1 = 1{,}30z - 39 & 30 \le z < 37{,}50 \\ \pi_1 + \pi_2 = 3{,}03z - 103{,}875 & 37{,}5 \le z < 52{,}5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 5{,}20z - 217{,}8 & 52{,}5 \le z \end{cases}$$

Se debe situar el número de ocupantes k en el tramo correspondiente para ellos se debe acotar P(z) y conocer los puntos de discontinuidad.

$$z = 30 \;\Rightarrow\; P(z{=}30) = \psi_1 = 0$$
$$z = 37{,}5 \;\Rightarrow\; P(z{=}37{,}5) = 9{,}75$$
$$z = 52{,}5 \;\Rightarrow\; P(z{=}52{,}5) = 55{,}2$$

Con ello quedan definidos los tramos de ocupación, resultan las siguientes situaciones:

$$\begin{array}{ll} 0 \le k \le 9{,}75 & \Rightarrow P(z) = 1{,}39z - 39 \\ 9{,}75 < k \le 55{,}2 & \Rightarrow P(z) = 3{,}03z - 103{,}875 \\ 55{,}2 < k & \Rightarrow P(z) = 5{,}20z - 217{,}8 \end{array}$$

En este caso si la ocupación es de 610 personas se trata de resolver $P_T(z) = 610$ en el último tramo

$$5{,}20z - 217{,}8 = 610$$

resultando

$$z^* = \frac{610 + 217,8}{520} = 159,19 \quad \text{segundos}$$

Igualando $\quad t_j(x_j) = z^*$

es posible determinar la asignación óptima. Resulta la siguiente distribución hacia cada una de las salidas:

$$x_1 = p_1(z) = 2,17(159,19 - 52,50) = 231,52 \cong 231$$
$$x_2 = p_2(z) = 1,73(159,19 - 37,50) = 210,53 \cong 211$$
$$x_3 = p_3(z) = 1,30(159,19 - 30) = 167,95 \cong 168$$

Necesariamente debe verificarse que se cumple la condición de la evacuación de la totalidad de ocupantes.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 231 + 211 + 168 = 610$$

En este caso no es preciso efectuar ninguna corrección en las aproximaciones efectuadas.

Solución gráfica. La función $t_j(x_j)$ es una función lineal con término independiente, que corresponde al tiempo necesario para que los ocupantes lleguen a la salida.

Figura 4.15 Optimización de la evacuación

Se procede a la representación gráfica de las funciones inversas para cada vía de evacuación $p_1(z)$, $p_j(z)$, $p_n(z)$ y el total del recinto $P_T(z)$. Se representa el tiempo en el eje de abscisas y el número de ocupantes en el eje de ordenadas.

La gráfica permite efectuar la lectura del tiempo mínimo de evacuación para un determinado número de ocupantes dentro del intervalo de la representación. También resulta inmediato conocer la distribución óptima.

Se obtiene el gráfico de la figura 4.15, los resultados se obtienen de la misma forma que en el apartado 12.1.3.

En el gráfico se efectúa la lectura del tiempo de evacuación de 159 segundos y una asignación:

$$x_1 = 230 \text{ Pers.}$$

$$x_2 = 210 \text{ Pers.}$$

$$x_3 = 170 \text{ Pers.}$$

Valores cuya suma corresponde a la evacuación de la totalidad de los ocupantes.

Solución heurística. Se ha utilizando la aplicación EXITR, en este caso se ha considerado el recorrido hasta los destinos en la función de evacuación, la solución resulta inmediata obteniendo los mismos resultados que mediante el procedimiento analítico y la solución gráfica.

EXITRV2

Datos

Ocupación total	610

	RUTA		
	1	**2**	**3**
Anchura efectiva mínima (m)	2	1,6	1,2
Distancia hasta la salida (m)	35	25	20
Densidad estimada (Pers./ m^2)	2,6	2,6	2,6
Velocidad circulación (m / min)	40	40	40
Flujo específico (Pers./ m min)	65	65	65

Resultados

	RUTA		
Asignación (Pers.)	232	211	167
t_i (s)	159,58	159,23	158,46
t_{TOTAL} (s)	159,58		

Tabla 4.3 Tabla de resultados de la solución heurística

4.5 EVACUACIÓN DE UN RECINTO EN EL TIEMPO MÍNIMO CON FLUJO DE SALIDA FUNCIÓN DE LA DENSIDAD DE OCUPACIÓN

En el modelo inicial propuesto en apartados anteriores, los valores de los flujos de salida se obtienen a partir del modelo de circulación de J. Fruins. La utilización de los modelos de circulación de Fruins para definir la ocupación y las magnitudes de circulación (flujos y velocidades), exige predecir en primera instancia las densidades de ocupación que se van a producir en cada salida y en función de la geometría de la misma efectuar la lectura de los valores de los flujos en la tabla correspondiente. Pronosticar a priori los flujos y las velocidades, además de resultar complejo en la mayoría de ocasiones, supone condicionar el resultado del problema a estos valores ya que a partir de estos valores se determina la asignación óptima de cada salida. El resultado del problema queda condicionado por los valores del flujo supuestos inicialmente, dependiendo la validez de los resultados del acierto en el pronóstico de los valores iniciales.

Por el contrario, si se utilizan las ecuaciones propuestas en los años 90 por H. Nelson y H. McLennan [107] para el modelado del movimiento de las personas, no se establece ninguna condición previa a los valores de la velocidad y de los flujos de circulación que se van a producir en cada salida; sencillamente son función del número de personas que las utilizan y de las características geométricas del recinto.

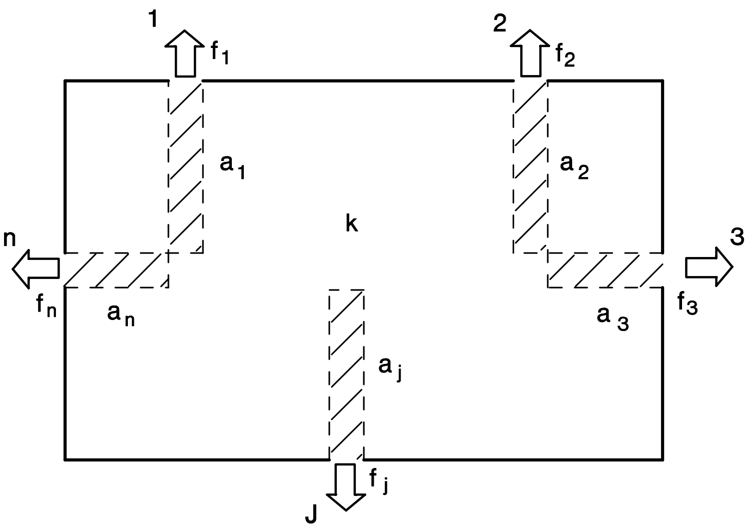

Figura 4.16 Modelo de flujo función de la densidad de ocupación

Esta situación puede observarse en la figura 4.16, en ella puede suponerse que hacia cada salida j existe una zona de circulación cuya superficie es a_j en la cual la densidad de ocupación que se produzca d_j, será función del número de ocupantes x_j que utilicen la salida y ello determina las magnitudes de circulación, en este caso no se consideran los recorridos.

$$d_j = \frac{x_j}{a_j}$$

En función de la densidad resultarán las velocidades y los flujos de circulación. Magnitudes éstas, definidas según el modelado del movimiento de las personas formulado por Nelson y McLennan [107]. La principal característica de este modelo de circulación es la relación lineal existente entre la velocidad de circulación y la densidad. Así cuando la densidad de ocupación está comprendida entre 0,5382 y 3,5 personas por metro cuadrado, la velocidad de circulación y el flujo son función de la densidad de ocupación. En cambio, cuando la densidad de ocupación es inferior a 0,5382 personas por metro cuadrado el movimiento de los individuos depende de sus características personales. En este caso las magnitudes que lo definen tienen una gran variabilidad, es por ello que se toma una velocidad media constante e independiente de la densidad, de 1,1996 metros por segundo para el caso de circulación horizontal.

$$v(d_j) = \begin{cases} 1{,}1996 & 0 < d_j \le 0{,}5382 \\ \lambda(1-\alpha\, d_j) & 0{,}5382 < d_j \le 3{,}5 \end{cases}$$

donde v es la velocidad de circulación, d la densidad, α y λ son valores constantes. Así por ejemplo el parámetro λ se halla tabulado para distintas geometrías y toma el valor 1,40 metros por segundo en el caso de circulación horizontal y operando con unidades decimales α toma el valor de 0,266 metros cuadrados por persona.

Luego el flujo viene determinado por el producto de la velocidad de circulación y la densidad:

$$F_j(d_j) = \begin{cases} d_j\, w_j\, v(d_j) = 1{,}1996\, d_j\, w_j & 0 < d_j \le 0{,}5382 \\ d_j\, w_j\, v(d_j) = \lambda(1-\alpha d_j)\, d_j\, w_j & 0{,}5382 < d_j \le 3{,}5 \end{cases}$$

donde w_j es la anchura mínima de la salida j.

Expresando las velocidades y los flujos en función de las personas x_j que utilizan las salidas y de las superficies de los recintos a_j que conducen a las mismas, resultan las expresiones:

$$v(x_j) = \begin{cases} 1{,}1996 & 0 < x_j \le 0{,}5382\, a_j \\ \lambda\left(1-\alpha\,\dfrac{x_j}{a_j}\right) & 0{,}5382\, a_j < x_j \le 3{,}5\, a_j \end{cases} \tag{4.35}$$

$$F_j(x_j) = \begin{cases} \left(1{,}1996\dfrac{w_j}{a_j}\right) x_j & 0 < x_j \le 0{,}5382\, a_j \\ \lambda\, w_j\left(1-\alpha\,\dfrac{x_j}{a_j}\right)\dfrac{x_j}{a_j} & 0{,}5382\, a_j < x_j \le 3{,}5\, a_j \end{cases} \tag{4.36}$$

Las expresiones (4.35) y (4.36) deben interpretarse como los valores que resultan de la velocidad y del flujo de circulación si utilizan la salida x_j personas.

Puede hallarse para cada salida el valor de la asignación x_j que produce el flujo máximo en la correspondiente salida, sencillamente se trata de resolver

$$\frac{d\left(F_j(x_j)\right)}{d(x_j)} = 0$$

los flujos máximos se producirán en el intervalo $0{,}5382\, a_j < x_j \le 3{,}5\, a_j$, entonces resulta

$$x_j = \frac{a_j}{2\alpha} \qquad 0{,}5382\, a_j < x_j \le 3{,}5\, a_j \tag{4.37}$$

En esta situación, en la cual no se consideran los recorridos de evacuación, la función de evacuación $t_j(x_j)$ consiste simplemente en el tiempo de flujo

$$t_j(x_j) = \frac{x_j}{F_j(x_j)}$$

se obtiene

$$t_j(x_j) = \begin{cases} \dfrac{x_j}{F(x_j)} = \dfrac{a_j}{1{,}1996\, w_j} & 0 < x_j \le 0{,}5382\, a_j \\[2ex] \dfrac{x_j}{F(x_j)} = \dfrac{\left(a_j\right)^2}{\lambda\, w_j\,(a_j - \alpha_j\, x_j)} & 0{,}5382\, a_j < x_j \le 3{,}5\, a_j \end{cases} \tag{4.38}$$

y se definen los intervalos $x_{j\,I}$ y $x_{j\,S}$ de la función de evacuación

$$\begin{aligned} x_{j\,I} &= 0{,}5382\, a_j \\ x_{j\,S} &= 3{,}5\, a_j \end{aligned} \tag{4.39}$$

Se observa que si la utilización de la salida j está comprendida entre $0 < x_j \le 0{,}5382\, a_j$ el tiempo de evacuación es constante.

Se obtiene la función de evacuación inversa $p_j(z)$ para cada una de las j salidas, que determina el número de ocupantes que pueden salir en un tiempo z por j

$$p_j(z) = \frac{a_j}{\alpha\lambda}\left(\lambda - \frac{a}{z\, w_j}\right) \qquad z_{j\,I} < z \le z_{j\,S} \tag{4.40}$$

siendo $z_{j\,I}$ y $z_{j\,S}$ los valores asociados a las ocupaciones $x_{j\,I}$ y $x_{j\,S}$

$$\begin{aligned} z_{j,I} &= \frac{a_j}{1{,}1996\, w_j} \\ z_{j,S} &= \frac{\left(a_j\right)^2}{\lambda\, w_j\,(a_j - \alpha_j\, x_{j,S})} \end{aligned} \tag{4.41}$$

Dado que existen varias salidas se definen los valores θ_I y θ_S que corresponden a los valores máximos y mínimos de $z_{j\,I}$ y $z_{j\,S}$ con el objetivo de establecer un intervalo estacionario de definición de P(z)

$$\begin{aligned} \theta_I &= \mathrm{Max}\left\{ z_{j\,I} \right\} \qquad \forall j \\ \theta_S &= \mathrm{Min}\left\{ z_{j\,S} \right\} \qquad \forall j \end{aligned} \tag{4.42}$$

Si las salidas son independientes resulta

$$P(z) = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) - \frac{1}{\alpha\,\lambda\, z}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(a_j\right)^2}{w_j}\right) \qquad \theta_I \le z \le \theta_S \tag{4.43}$$

En estas condiciones la solución óptima del problema vendrá dada por (4.44) expresión en la cual resulta el tiempo mínimo z* (segundos) en que pueden salir los k ocupantes del recinto

$$z^* = \frac{\dfrac{1}{\alpha\lambda}\left(\sum_{j=1}^{n}\dfrac{\left(a_j\right)^2}{w_j}\right)}{\dfrac{1}{\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) - k} \qquad \theta_I \le z \le \theta_S \tag{4.44}$$

4.5.2 Aplicación numérica considerando los flujos función de la densidad

En el ejemplo descrito ene el apartado 4.33 se considera que hacia cada salida existen unos pasillos cuyas superficies son 90, 75 y 70 metros cuadrados respectivamente siendo las anchuras mínimas de paso de 2, 1,6 y 1,2 metros. En este caso no es preciso efectuar suposición alguna, directamente según la expresión (4.36) se determinan los flujos que resultarían en las salidas en función de la asignación.

$$F_1(x_1) = \begin{cases} 0{,}0267\,x_1 & 0 < x_1 \le 48{,}44 \\ 0{,}0311\,x_1 - 9{,}195\ 10^{-5}\left(x_1\right)^2 & 48{,}44 < x_1 \le 315 \end{cases}$$

$$F_2(x_2) = \begin{cases} 0{,}0256\,x_2 & 0 < x_2 \le 40{,}37 \\ 0{,}0299\,x_2 - 1{,}059\ 10^{-4}\left(x_2\right)^2 & 40{,}37 < x_2 \le 262{,}50 \end{cases}$$

$$F_3(x_3) = \begin{cases} 0{,}0206\,x_3 & 0 < x_3 \le 37{,}67 \\ 0{,}0240\,x_3 - 9{,}120\ 10^{-5}\left(x_3\right)^2 & 37{,}67 < x_3 \le 245 \end{cases}$$

Para cada una de las salidas mediante (4.37) puede determinarse las asignaciones que produce el valor de los flujos máximos

$$x_1 = 169{,}17$$
$$x_2 = 140{,}98$$
$$x_3 = 131{,}58$$

Según (4.38) resulta la función de evacuación $t_j(x_j)$ para cada una de las salidas indicando el tiempo necesario para salir x_j personas por el recorrido j considerando que no hay demoras ni recorridos

$$t_1(x_1) = \begin{cases} 37{,}513 & 0 < x_1 \le 48{,}44 \\ \dfrac{1}{0{,}0311 - 9{,}195\ 10^{-5}\ x_1} & 48{,}44 < x_1 \le 315 \end{cases}$$

$$t_2(x_2) = \begin{cases} 39{,}076 & 0 < x_2 \le 40{,}37 \\ \dfrac{1}{0{,}0299 - 1{,}059\ 10^{-4}\ x_2} & 40{,}37 < x_2 \le 262{,}50 \end{cases}$$

$$t_3(x_3) = \begin{cases} 48,627 & 0 < x_3 \leq 37,67 \\ \dfrac{1}{0,0240 - 9,120\ 10^{-5}\ x_3} & 37,67 < x_3 \leq 245 \end{cases}$$

Seguidamente conviene determinar los valores $z_{j\ I}$ y $z_{j\ S}$ los valores asociados a las ocupaciones $x_{j\ I}$ y $x_{j\ S}$, según la expresión dada en (4.41) resulta

$$z_{1\ I} = 37,513 \qquad z_{1\ S} = 465,839$$
$$z_{2\ I} = 39,076 \qquad z_{2\ S} = 485,248$$
$$z_{3\ I} = 48,627 \qquad z_{3\ S} = 603,865$$

Una cuestión más compleja que se analiza en próximos apartados está en interpretar las situaciones en las cuales x_j es menor que $x_{j\ I}$ y ello da lugar a un tiempo de evacuación z_I, entonces cuando $z = z_I$ cabe pensar en la falta de definición de $p_j(z)$.

La función de evacuación inversa $p_j(z)$ de cada una de las salidas en el intervalo de definición, que indica el número de ocupantes que pueden salir en un tiempo z por la ruta j, resulta:

$$p_1(z) = 338,35 - \frac{10875,40}{z} \qquad 37,513 \leq z \leq 465,839$$

$$p_2(z) = 281,95 - \frac{9440,45}{z} \qquad 39,076 \leq z \leq 485,248$$

$$p_3(z) = 263,16 - \frac{10964,91}{z} \qquad 48,627 \leq z \leq 603,865$$

La acotación que resulta de P(z) será

$$\theta_I = \text{Max}\left\{37,513\ \ 39,076\ \ 48,627\right\} = 48,627$$
$$\theta_S = \text{Min}\left\{465,839\ \ 485,248\ \ 603,865\right\} = 465,839$$

definido el intervalo estacionario definitivamente resulta

$$P_T(z) = 883,46 - \frac{31280,76}{z} \qquad 48,627 \leq z \leq 465,839$$

El tiempo mínimo z* en que pueden salir los 610 ocupantes del recinto aplicando la expresión (4.44) será

$$z^* = \frac{31280,76}{883,46 - 610} = 114,39 \quad \text{segundos}$$

Permite encontrar la asignación óptima x_j a cada salida

$$x^*_1 = p_1(z) = 338,35 - \frac{10875,40}{114,39} = 243,27 \cong 243 \quad \text{Personas}$$

$$x^*_2 = p_2(z) = 281,95 - \frac{9440,45}{114,39} = 199,42 \cong 199 \quad \text{Personas}$$

$$x^*_3 = p_3(z) = 263{,}16 - \frac{10964{,}91}{114{,}39} = 167{,}30 \cong 167 \quad \text{Personas}$$

Necesariamente debe cumplirse que

$$x^*_1 + x^*_2 + x^*_3 = 610$$

Resulta necesario ajustar la asignación realizada, para ello se asigna $x^*_2 = 200$

Análisis y solución gráfica del problema. Representando la función de evacuación para cada una de las salidas resultan los tiempos de evacuación en función del número de personas asignadas, este análisis resulta muy interesante porque se aprecian de forma inmediata las asignaciones que producen flujos máximos y tienden a la saturación de las salidas. Por ejemplo en la figura 4.17 correspondiente a la representación de la función de evacuación de la salida 1, se observa que si las asignaciones superan las 275 personas pueden resultar realmente peligrosas, el intervalo razonable de utilización de la salida está comprendido entre las 50 y las 275 personas.

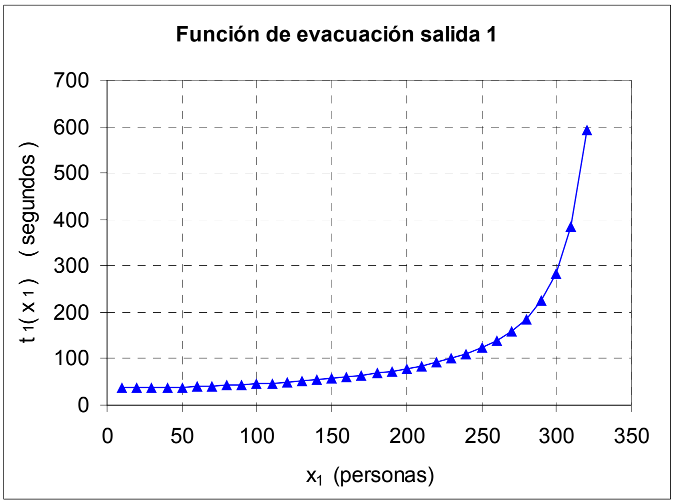

Figura 4.17 Representación de la función de evacuación de una salida

Realizando la misma representación en las otras dos salidas se determina que en la salida 2 tenemos los valores de 75 y 225 Personas y en la salida 3 tenemos 60 y 180 Personas. En ningún caso conviene superar estos valores máximos ello materialmente supone bloquear salida.

La solución gráfica del problema, si se limita al intervalo estacionario, realmente es similar a la realizada en los modelos de flujo constante y el proceso de resolución es idéntico. En la figura 4.17 se procede a mostrar la solución de la aplicación numérica, puede verificarse que los resultados resultan prácticamente idénticos.

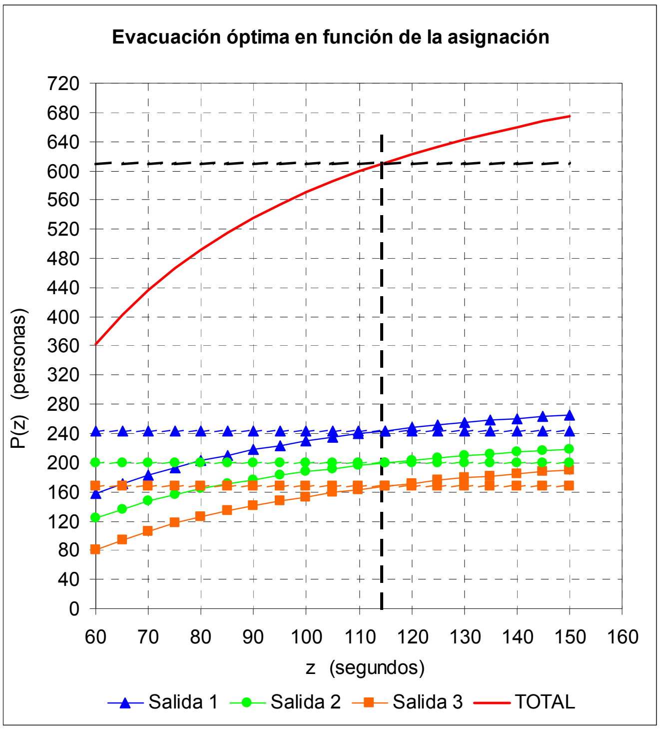

Figura 4.18 Optimización de la evacuación intervalo estacionario

En la gráfica puede efectuarse la lectura del tiempo de evacuación, aproximadamente 114 segundos, y la lectura de las asignaciones a cada salida:

$$P_1(z) = 240 \text{ Pers.}$$

$$P_2(z) = 200 \text{ Pers.}$$

$$P_3(z) = 170 \text{ Pers.}$$

Realmente puede destacarse la razonable coincidencia de los resultados obtenidos con este procedimiento gráfico y la solución analítica propuesta.

Se ha utilizando la aplicación EXITR, en este caso adaptada a esta situación en la cual los flujos se ha considerado que son directamente función de la asignación, la solución resulta inmediata obteniendo los mismos resultados que mediante el procedimiento analítico y la solución gráfica.

EXITRV3

Datos

Ocupación total	610

	RUTA		
	1	**2**	**3**
Anchura efectiva mínima (m)	2	1,6	1,2
Distancia hasta la salida (m)	35	25	20
Densidad estimada (Pers./ m^2)	2,6	2,6	2,6
Velocidad circulación (m / min)	40	40	40
Flujo específico (Pers./ m min)	65	65	65

Resultados

	RUTA		
Asignación (Pers.)	243	200	167
t_j (s)	114,06	115,19	114,03
t_{TOTAL} (s)		115,19	

Tabla 4.4 Tabla de resultados de la solución heurística

4.6 EVACUACIÓN DE UN RECINTO EN EL TIEMPO MÍNIMO CONSIDERANDO RECORRIDOS Y LAS MAGNITUDES DE CIRCULACIÓN FUNCIONES DE LA DENSIDAD DE OCUPACIÓN

Una generalización de la situación analizada en el apartado anterior consiste en considerar los recorridos hasta los destinos de evacuación, donde cabe suponer que existen unas zonas de paso que ocupan las personas presentes en el recinto. Según sea su distribución dará lugar a la densidad de evacuación que configurará las magnitudes de circulación en el recorrido hasta el destino de evacuación. Puede observarse en la figura 4.19.

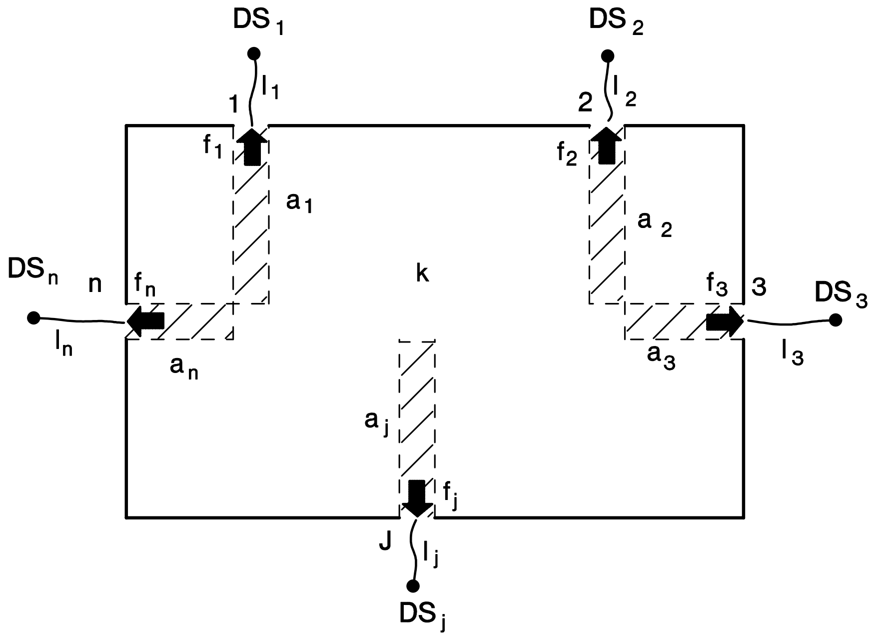

Figura 4.19 Modelo de flujo función de la densidad de ocupación y del recorrido

De la misma forma que en el modelo anterior, según el modelado del movimiento de las personas formulado por Nelson y McLennan, la velocidad de circulación horizontal y los flujos responden a las siguientes expresiones

$$v(d_j) = \begin{cases} 1{,}1996 & 0 < d_j \le 0{,}5382 \\ \lambda(1 - \alpha\, d_j) & 0{,}5382 < d_j \le 3{,}5 \end{cases}$$

α y λ son valores constantes que se hallan tabulados, el parámetro λ toma el valor 1,40 metros por segundo en el caso de circulación horizontal y α = 0,266 utilizando magnitudes decimales.

$$F_j(d_j) = \begin{cases} d_j\, w_j\, v(d_j) = 1{,}1996\, d_j\, w_j & 0 < d_j \le 0{,}5382 \\ d_j\, w_j\, v(d_j) = \lambda(1-\alpha_j\, d_j)\, d_j\, w_j & 0{,}5382 < d_j \le 3{,}5 \end{cases}$$

4.6.1 Solución del problema

El tiempo necesario para alcanzar la salida vendrá dado por la expresión:

$$t_{1\,j}(d_j) = \begin{cases} \dfrac{l_j}{v(d_j)} = \dfrac{l_j}{1{,}1996} & 0 < d_j \le 0{,}5382 \\ \dfrac{l_j}{v(d_j)} = \dfrac{l_j}{\lambda(1-\alpha\, d_j)} & 0{,}5382 < d_j \le 3{,}5 \end{cases} \tag{4.45}$$

donde $x_{j\,I}$ es el límite inferior del número de ocupantes asignados a la salida j y $x_{j\,S}$ el límite superior del número de ocupantes asignados a la salida j.

De la misma forma el tiempo de flujo será:

$$t_{2\,j}(d_j) = \begin{cases} \dfrac{x_j}{F(d_j)} = \dfrac{x_j}{1{,}1996\, d_j\, w_j} & 0 < d_j \le 0{,}5382 \\ \dfrac{x_j}{F(d_j)} = \dfrac{x_j}{\lambda(1-\alpha\, d_j)\, d_j\, w_j} & 0{,}5382 < d_j \le 3{,}5 \end{cases} \tag{4.46}$$

Sustituyendo en la expresión (3.30) se obtiene la función de evacuación que determina el tiempo que tardan x_j individuos en salir del recinto a través de la ruta j:

$$t_j(x_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{1{,}1996}\left[l_j + \dfrac{x_j}{d_j\, w_j} \right] & 0 < d_j \le 0{,}5382 \\ \dfrac{1}{\lambda(1-\alpha\, d_j)}\left[l_j + \dfrac{x_j}{d_j\, w_j} \right] & 0{,}5382 < d_j \le 3{,}5 \end{cases} \tag{4.47}$$

Siendo la densidad directamente proporcional al número de ocupantes asignados a la salida e inversamente proporcional a la superficie de la misma, la anterior expresión se transforma en la siguiente:

$$t_j(x_j) = \begin{cases} \dfrac{1}{1{,}1996}\left[l_j + \dfrac{a_j}{w_j} \right] & 0 < x_j \le x_{j\,I} \\ \dfrac{a_j}{\lambda(a_j-\alpha\, x_j)}\left[l_j + \dfrac{a_j}{w_j} \right] & x_{j\,I} < x_j \le x_{j\,S} \end{cases} \tag{4.48}$$

donde a_j indica la superficie de la salida j. En la Figura 4.20 se representa la función de evacuación, en ella puede observarse que cuando $x_j < x_{j\,I}$ el tiempo de evacuación es constante e independiente de la ocupación x_j del recinto, en este tramo la densidad de ocupación es inferior a 0,5382 con lo que se produce una velocidad de circulación constante. Si la velocidad de circulación es constante la variación de flujo depende exclusivamente de la densidad, entonces los tiempos de evacuación resultan iguales como consecuencia de la enorme diferencia que existe en los flujos de salida en uno y otro caso. El siguiente tramo $x_{j\,I}$ - $x_{j\,S}$ el crecimiento de la función es hiperbólico.

El tramo inicial, en el cual podrían salir del recinto hasta $x_{j\,I}$ personas en el mismo tiempo, lo denominamos "intervalo de fluencia de la función de evacuación". Este nombre se propone por la similitud que existe con el fenómeno que se produce en el ensayo mecánico de tracción, donde en el gráfico de esfuerzos-deformaciones, una vez se ha superado el periodo elástico, existe un tramo horizontal en el cual sin incrementar la tensión se produce un alargamiento del material.

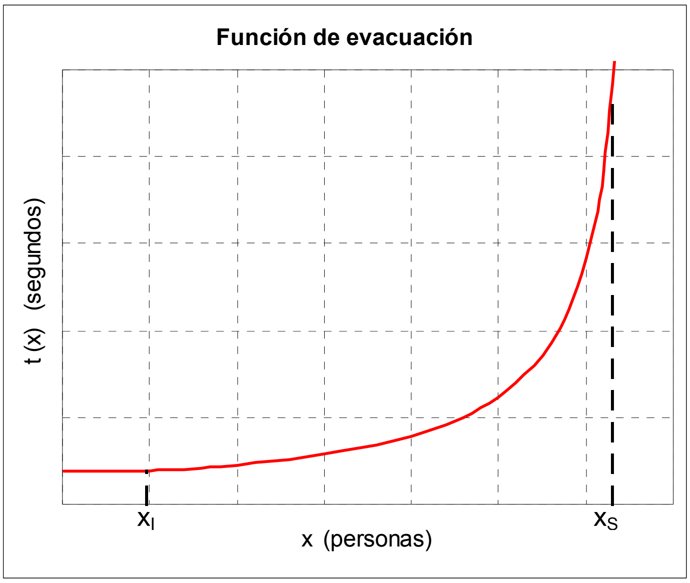

Figura 4. 20 Función de evacuación en los modelos función de la densidad

Función de evacuación inversa. La función de evacuación inversa $p_j(z_j)$ de la salida j establece el número de personas que pueden salir del recinto en un tiempo z_j utilizando la salida j. Viene dada por la siguiente expresión 4.49.

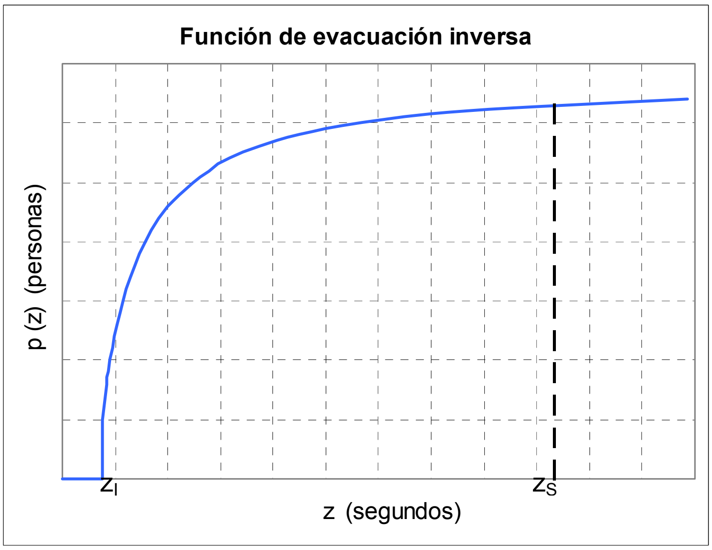

Figura 4. 21 Función de evacuación inversa en los modelos función de la densidad

$$p_j(z_j) = \begin{cases} 0 & 0 \le z_j < z_{jI} \\ 0 < p_j(z_j) \le p_{jI} & z_j = z_{jI} \\ \dfrac{a_j}{\alpha}\left(1 - \dfrac{l_j w_j + a_j}{z \lambda w_j}\right) & z_{jI} < z_j \le z_{jS} \end{cases} \tag{4.49}$$

para el instante $z = z_{j,I}$ se utiliza la denominación de "tiempo de fluencia". En la Figura 4.21 se puede observar la función de evacuación inversa.

En la función de evacuación inversa $p_j(z_j)$, el tiempo z_j es la variable independiente y el número de individuos asignados a una salida x_j la variable dependiente:

$$z_j = t_j(x_j) \qquad\qquad p_j(z_j) = x_j$$

Sustituyendo los valores $x_{j\,I}$ y $x_{,S}$ en la función de evacuación se obtienen los valores $t_{j\,I}$ y $t_{j\,S}$ a los que se designa $z_{j\,I}$ y $z_{j\,S}$.

$$\begin{aligned} z_{j\,I} &= t_j(x_{j,\,I}) = \frac{a_j}{\lambda(a_j - \alpha x_{j\,I})}\left(l_j + \frac{a_j}{w_j}\right) \\ z_{j\,S} &= t_j(x_{j,\,S}) = \frac{a_j}{\lambda(a_j - \alpha x_{j\,S})}\left(l_j + \frac{a_j}{w_j}\right) \end{aligned} \tag{4.50}$$

Siendo $z_{j\,I}$ el tiempo necesario para llegar hasta la salida j y abandonar el recinto un número de ocupantes x_j que constituyan una densidad de ocupación de 0,5382 personas por m^2. De la misma forma $z_{j\,S}$ indica el tiempo necesario para alcanzar la salida j y abandonar el recinto un número de ocupantes x_j cuya densidad de ocupación sea de 3,5 personas por m^2.

Algoritmo. El algoritmo propuesto para resolver el problema de la evacuación de un recinto a través de rutas independientes y conocidas se fundamenta en el trabajo de Brown [4]. La consideración de los recorridos de evacuación y la utilización de las ecuaciones de Nelson&McLennan supone cambios notables en la forma de las funciones de evacuación y de evacuación inversas, por lo que ha sido preciso adaptar el procedimiento de resolución propuesto de J. R. Brown. En la realidad, se ha procedido a una generalización del mismo, resultando el algoritmo siguiente:

Paso 1. Determinar para cada salida los intervalos de aplicación de las ecuaciones de Nelson &McLennan [107] utilizadas para modelar el movimiento de las personas.

Teniendo en cuenta que la densidad de la salida j es directamente proporcional al número de ocupantes asignados a la misma e inversamente proporcional a su superficie, resulta que el número de ocupantes asignados a una salida es directamente proporcional a la densidad y a la superficie de la misma.

$$x_j = d_j a_j \tag{4.51}$$

Como los límites de la densidad son 0,5382 y 3,5 el número de ocupantes asignados a una salida debe situarse en el intervalo:

$$\begin{aligned} x_{j\,I} &= 0{,}5382\, a_j \\ x_{j\,S} &= 3{,}5\, a_j \end{aligned} \qquad (4.52)$$

Paso 2. Determinar para cada ruta j la función de evacuación $t_j(x_j)$.

Paso 3. Determinar los puntos singulares $z_{j\,I}$ y $z_{j\,S}$ de la función de evacuación inversa $p_j(z_j)$.

Paso 4. Obtener la función de evacuación inversa de cada salida.

Paso 5. Ordenar la función de evacuación inversa de cada salida según los puntos de discontinuidad $z_{j\,I}$ siguiendo el criterio de menor a mayor tiempo de fluencia $z_{j\,I}$

Se puede observar en la Figura 4.22 el caso de un recinto que dispone de tres salidas

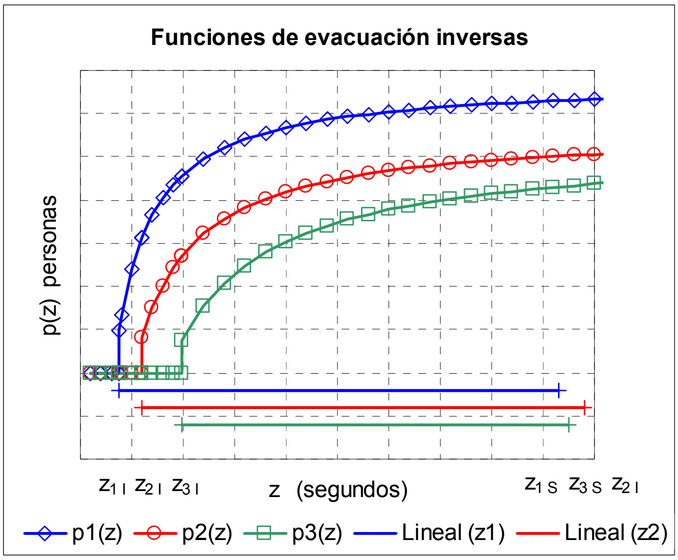

Figura 4.22 Funciones de evacuación inversas de un recinto de tres salidas

Sea Θ_1 el conjunto inicial formado por los puntos de fluencia $z_{j,I}$ de cada una de las salidas. Si el recinto dispone de n salidas:

$$\Theta_1 = \left\{ z_{1\,I}, \ldots, z_{j\,I}, \ldots, z_{n\,I} \right\} \qquad (4.53)$$

Se obtiene el primer punto de fluencia τ_1 y la función π_1 asociada al mismo:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \mathrm{Min}\{\Theta_1\} \\ \pi_1 &= \left[p_j(z_j) \middle| \, z_j = \tau_1 \right] \end{aligned} \qquad (4.54)$$

Sea Θ_2 el conjunto de puntos de fluencia pendientes de ordenar:

$$\Theta_2 = \left\{ z_{j\,I} \mid z_{j\,I} > \tau_1 \right\} \qquad (4.55)$$

Se obtiene el segundo punto de fluencia τ_2 y la función π_2 asociada al mismo:

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \operatorname{Min}\left\{ \Theta_2 \right\} \\ \pi_2 &= \left[p_j(z_j) \middle| z_j = \tau_2 \right] \end{aligned} \tag{4.56}$$

En general, dado el conjunto de todos los puntos de fluencia no ordenados Θ_j:

$$\Theta_j = \left\{ z_{jI} \mid z_{jI} > \tau_{j-1} \right\} \tag{4.57}$$

Se obtiene el j-ésimo punto de fluencia τ_J y la función correspondiente π_J:

$$\begin{aligned} \tau_j &= \operatorname{Min}\left\{ \Theta_j \right\} \\ \pi_j &= \left[p_j(z_j) \middle| z_j = \tau_j \right] \end{aligned} \tag{4.58}$$

Con ello se ordenan las funciones inversas de evacuación según sus puntos de fluencia:

$$\begin{aligned} &\left\{ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \right\} \\ &\tau_1 < \tau_2, \ldots < \tau_J < \ldots, \tau_n \\ &\left\{ \pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n \right\} \end{aligned} \tag{4.59}$$

Paso 6. Obtener el valor máximo z_S para el cual estará definida la función de evacuación inversa global P(z).

$$z_S = \operatorname{Min}\left\{ z_{1S}, \ldots, z_{jS}, z_{jS} \right\} \tag{4.60}$$

Paso 7. Determinar la función de evacuación inversa global P(z), para ello basta sumar las funciones de evacuación inversa de cada salida considerando de forma adecuada las discontinuidades.

$$P(z) = \begin{cases} 0 & 0 \leq z < \tau_1 \\ \pi_1 & \tau_1 < z < \tau_2 \\ \pi_1 + \pi_2 & \tau_2 < z < \tau_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \pi_1 + \ldots + \pi_{n-1} & \tau_{n-1} < z < \tau_n \\ \pi_1 + \ldots + \pi_{n-1} + \pi_n & \tau_n < z \leq \tau_S \end{cases} \tag{4.61}$$

Se observa que no se ha definido P(z) en los instantes τ_1 en los que se producen las discontinuidades y en el tramo inicial mientras ningún ocupante ha alcanzado ninguna salida, entonces P(z) = 0.

En el intervalo $\tau_1 < z < \tau_2$ solamente se utiliza la salida 1, en el intervalo $\tau_2 \leq z < \tau_3$ se utilizan las salidas 1 y 2, y así sucesivamente hasta que a partir del tiempo τ_n se utilizarán todas las salidas. Cuando se utilizan todas las salidas resulta el período estacionario. La situación aquí descrita puede observarse en la Figura 4.23

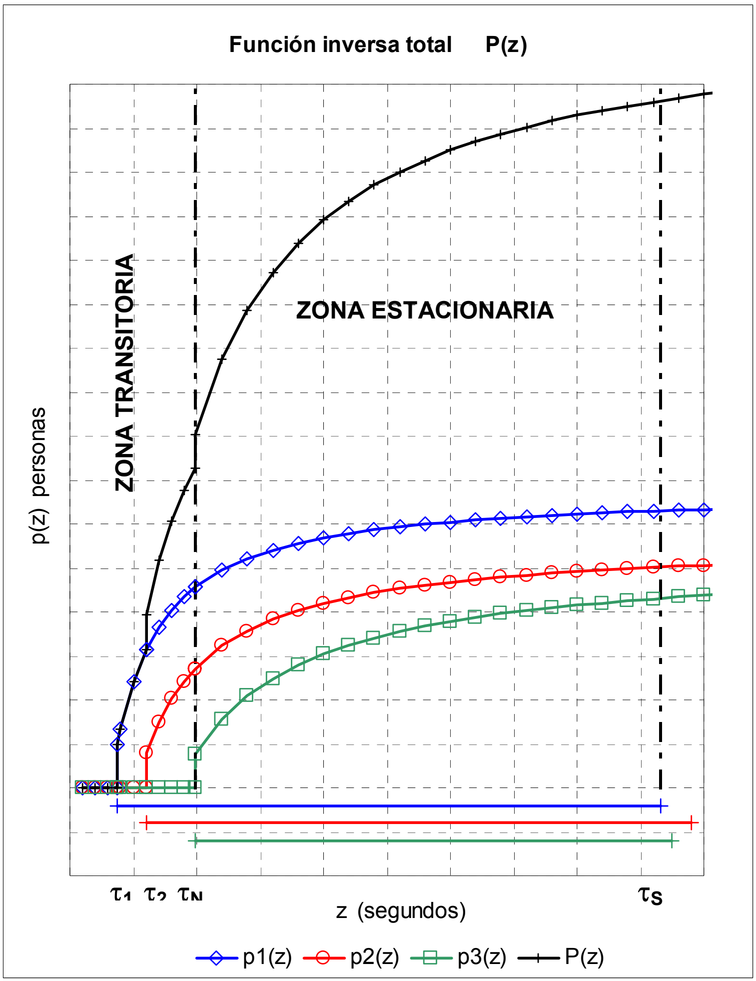

Figura 4.23 Análisis de las zonas de representación

En la función P(z) existen dos zonas: Un período transitorio $z \leq \tau_n$ y un periodo estacionario $\tau_n < z \leq \tau_S$. Normalmente el periodo transitorio es corto y en el estudio de problemas de evacuación reales tiene escasa trascendencia, la evacuación de recintos tiene interés con grandes ocupaciones que se sitúan en la zona estacionaría.

Paso 8. Acotar P(z) en los puntos de fluencia.

$$
\begin{aligned}
& z = \tau_1 \quad \Rightarrow 0 \leq P(z) \leq \pi_1 (z = \tau_1) \\
& z = \tau_2 \quad \Rightarrow \pi_1 (z = \tau_2) \leq P(z) \leq \pi_{1-2} (z = \tau_2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& z = \tau_n \quad \Rightarrow \pi_{1-2-\ldots-(n-1)} (z = \tau_n) \leq P(z) \leq \pi_{1-2-\ldots-n} (z = \tau_n)
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

Con ello queda definida la función de evacuación inversa global P(z).

Paso 9. Calcular el tiempo de evacuación óptimo z*

Para hallar z* debe analizarse la situación del valor del número de personas ocupantes del recinto (k) para conocer el tramo de la función P(z) en el que vamos trabajar. Puede observarse la Figura 4.24 donde se muestra el caso de un recinto con tres salidas.

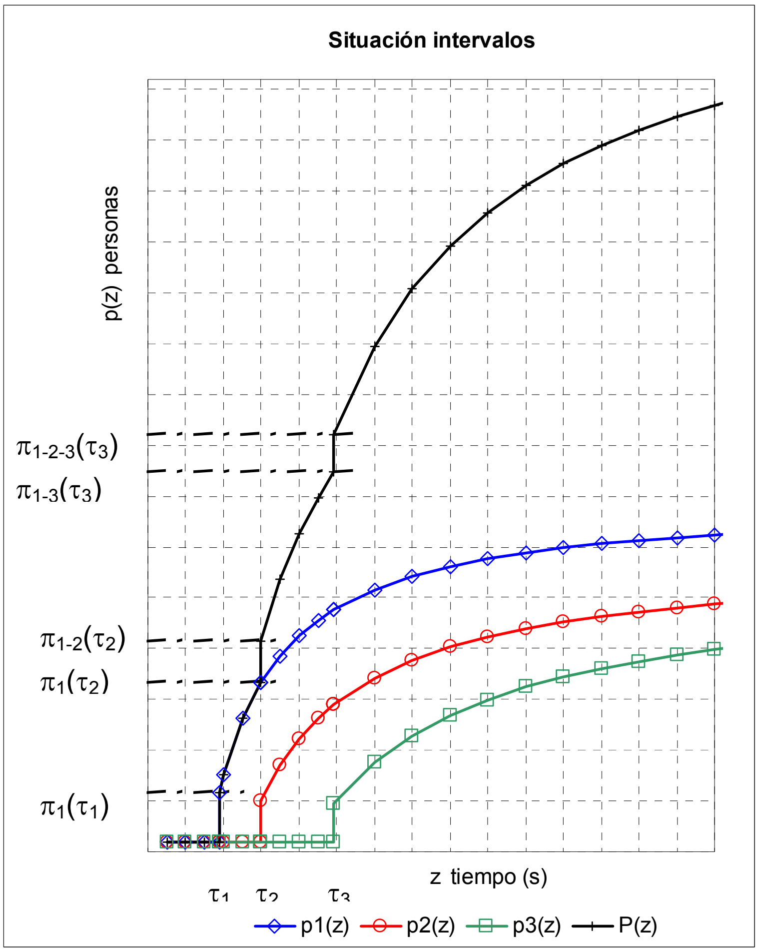

Figura 4.24 Análisis de las zonas de representación

La situación de k da lugar a tres escenarios posibles:

1. **El valor k se sitúa en un intervalo de fluencia,** en este caso el valor del tiempo de evacuación z* se corresponde con un tiempo de fluencia. Resultan las siguientes situaciones:

$$0 \le k \le \pi_1(z = \tau_1) \qquad \Rightarrow z^* = \tau_1$$

$$\pi_1(z = \tau_2) \le k \le \pi_{1-2}(z = \tau_2) \qquad \Rightarrow z^* = \tau_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pi_{1-2-\ldots-(n-1)}(z = \tau_n) \le k \le \pi_{1-2-\ldots-n}(z = \tau_n) \qquad \Rightarrow z^* = \tau_n$$

2. k se sitúa en los diferentes intervalos del periodo transitorio

$$\pi_J(z = \tau_J) < k < \pi_J(z = \tau_{J+1}) \qquad \Rightarrow k = \pi_J(z) \qquad z^* = z$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pi_{1-2-\ldots-(n-1)}(z = \tau_{n-1}) < k < \pi_{1-2-\ldots-(n-1)}(z=\tau_n) \qquad \Rightarrow k = \pi_{1-2-\ldots-n-1}(z) \qquad z^* = z$$

3. El número de ocupantes del recinto k se sitúa en el periodo estacionario

$$k > \pi_{1-2-\ldots-n}(z = \tau_n) \qquad \Rightarrow \qquad k = \pi_{1-2-\ldots-n}(z) \qquad z^* = z$$

Paso 10. Conocido z* se determina el número de personas que deben utilizar cada salida. Para ello se sustituye z* en la función de evacuación inversa de cada salida, considerando detenidamente el tramo en que está situado el valor k. Este proceso puede observarse en la Figura 4.25, donde se obtienen las asignaciones de las tres salidas correspondientes al esquema planteado.

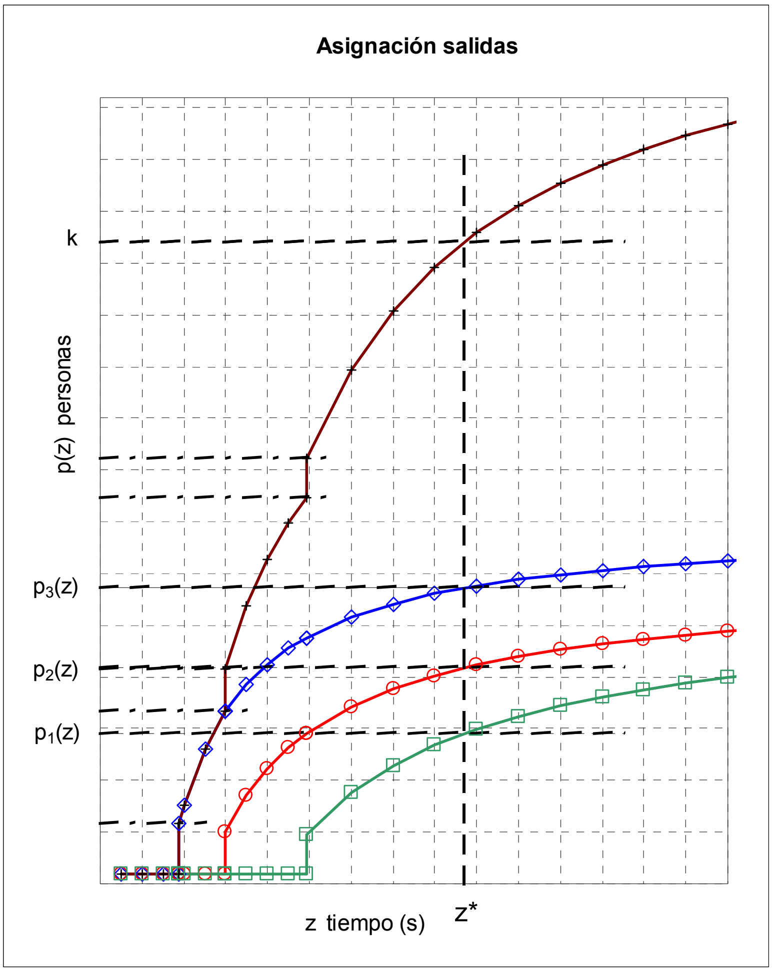

Figura 4.25 Análisis de las zonas de representación

La situación de k da lugar, igual que en el paso anterior, a los tres escenarios posibles:

1. **El valor k se sitúa en un intervalo de fluencia,** en este caso el valor del tiempo de evacuación z* se corresponde con un tiempo de fluencia. Resultan las siguientes situaciones:

$$z^* = \tau_1 \qquad \Rightarrow x_1 = p_1^*(z^*) = k$$

$$z^* = \tau_2 \qquad \Rightarrow x_1 = p_1^*(z^*) \quad x_2 = p_2^*(z^*) = k - p_1^*(z^*)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z^* = \tau_J \qquad \Rightarrow x_1 = p_1^*(z^*) \quad x_J = p_J^*(z*) = k - \sum_{I=1}^{I=J-1} p_I^*(z*)$$

2. **k se sitúa en los diferentes intervalos del periodo transitorio**

$$\pi_{J-1}(z = \tau_{J-1}) < k < \pi_{J-1}(z = \tau_J) \quad \Rightarrow \quad x_j = \pi_j^*(z^*)$$

3. El número de ocupantes del recinto k, se sitúa en el periodo estacionario

$$k > \pi_{1-2-\ldots-n}(z = \tau_n) \quad \Rightarrow x_n = \pi_n^*(z^*)$$

Se utilizan todas las salidas, no produciéndose fluencia en ninguna de ellas.

4.6.1 Aplicación numérica

Se estudia el caso descrito en el apartado 4.3.3 correspondiente a un recinto con tres salidas independientes,y representado en la figura 4.8 en el cual se hallan 610 personas uniformemente distribuidas. Existen unas zonas de paso de superficie a_j hacia cada una de las salidas, estas zonas se hallan libres de obstáculos, se considera una anchura mínima w_j. Las principales características del recinto respecto a la optimización de la evacuación del mismo se resumen en la siguiente tabla 4.5

Salida	Anchura mínima de la salida w (metros)	Longuitud del recorrido de evacuación de la salida l (metros)	Superfície del recorrido de la vía de evacuación a (m^2)
1	2,0	0	90
2	1,6	25	75
3	1,2	60	70

Tabla 4.5 Resumen características recinto

Solución

Considerando que la circulación hacia las salidas se efectúa por un pasillo horizontal y se opera con unidades decimales el valor de las de las constantes será de:

$$\lambda = 1{,}40 \quad \text{(metros/segundo)} \quad \alpha = 0{,}266 \quad (m^2 / \text{personas})$$

Paso 1. Intervalos de aplicación de las ecuaciones de Nelson&McLennan.

$$x_{1\,I} = 48{,}44 \qquad x_{1\,S} = 315{,}00$$
$$x_{2\,I} = 40{,}36 \qquad x_{2\,S} = 262{,}50$$
$$x_{3\,I} = 37{,}67 \qquad x_{3\,S} = 245{,}00$$

Paso 2. Función de evacuación de cada salida.

$$t_1(x_1) = \begin{cases} 37{,}51 & 0 < x_1 \le 48{,}44 \\ \dfrac{4050}{126 - 0{,}3724\,x_1} & 48{,}44 < x_1 \le 315 \end{cases}$$

$$t_2(x_2) = \begin{cases} 59{,}92 & 0 < x_2 \le 40{,}36 \\ \dfrac{5390{,}63}{105 - 0{,}3724\,x_2} & 40{,}36 < x_2 \le 262{,}5 \end{cases}$$

$$t_3(x_3) = \begin{cases} 98,65 & 0 < x_3 \le 37,67 \\ \dfrac{8283,33}{98 - 0,3724\, x_3} & 37,67 < x_3 \le 245 \end{cases}$$

Paso 3. Puntos singulares de las funciones de evacuación inversa.

$$z_{1\,I} = 37,51 \qquad z_{1\,S} = 465,84$$
$$z_{2\,I} = 59,92 \qquad z_{2\,S} = 744,05$$
$$z_{3\,I} = 98,65 \qquad z_{3\,S} = 1.225,0$$

Paso 4. Función de evacuación inversa de cada salida.

$$p_1(z_1) = \begin{cases} 0 & 0 \le z_1 < 37,51 \\ 0 < p_1(z_1) \le 48,44 & z_1 = 37,51 \\ 338,35 - \dfrac{10875,403}{z_1} & 37,51 < z_1 \le 465,84 \end{cases}$$

$$p_2(z_2) = \begin{cases} 0 & 0 \le z_2 < 59,92 \\ 0 < p_2(z_2) \le 40,36 & z_2 = 59,92 \\ 281,955 - \dfrac{14475,363}{z_2} & 59,92 < z_2 \le 744,05 \end{cases}$$

$$p_3(z_3) = \begin{cases} 0 & 0 \le z_3 < 98,65 \\ 0 < p_3(z_3) \le 37,67 & z_3 = 98,65 \\ 263,16 - \dfrac{22243,11}{z_3} & 98,65 < z_3 \le 1225 \end{cases}$$

Paso 5. Ordenar las funciones de evacuación inversa según los puntos de discontinuidad $z_{j,I}$

$$\Theta_1 = \{ 37,51 \quad 59,92 \quad 98,65 \}$$
$$\tau_1 = \mathrm{Min}\{ \Theta_1 \} = 37,51$$
$$\pi_1 = p_1(z_1)$$
$$\Theta_2 = \{ 59,92 \quad 98,65 \}$$
$$\tau_2 = \mathrm{Min}\{ \Theta_2 \} = 59,92$$
$$\pi_2 = p_2(z_2)$$
$$\Theta_3 = \{ 98,65 \}$$
$$\tau_3 = \mathrm{Min}\{ \Theta_3 \} = 98,65$$
$$\pi_3 = p_3(z_3)$$

Paso 6. Valor máximo z_S para el cual estará definida la función de evacuación inversa global.

$$z_S = \mathrm{Min}\left\{ z_{1\,S},\, z_{2\,S},\, z_{3\,S} \right\} = \mathrm{Min}\left\{ 465{,}84 \quad 744{,}05 \quad 1.225 \right\} = 465{,}84$$

Paso 7. Función de evacuación inversa.

Periodo transitorio $0 \le z \le 98{,}65$

Periodo estacionario $98{,}65 < z \le 465{,}84$

$$P(z) = \begin{cases} 0 & 0 < z < 37{,}51 \\ 338{,}35 - \dfrac{10875{,}403}{z} & 37{,}51 < z < 59{,}92 \\ 620{,}305 - \dfrac{25350{,}766}{z} & 59{,}92 < z < 98{,}65 \\ 883{,}465 - \dfrac{47593{,}876}{z} & 98{,}65 < z < 465{,}84 \end{cases}$$

El número máximo de personas que pueden salir del recinto es de 465,84 s.

Paso 8. Resolver P(z) en los puntos de discontinuidad o puntos de fluencia.

$$z = \tau_1 = 37{,}51 \quad \Rightarrow \quad 0 \le P(z) \le 48{,}44$$

$$z = \tau_2 = 59{,}92 \quad \Rightarrow \quad 156{,}85 \le P(z) \le 197{,}23$$

$$z = \tau_3 = 98{,}65 \quad \Rightarrow \quad 363{,}33 \le P(z) \le 401{,}01$$

Si la ocupación del recinto es inferior a 48,44 personas solamente se utiliza la salida 1 y el tiempo de evacuación será de 37,51 segundos. Se produce la fluencia de la salida 1. Si la ocupación del recinto está comprendida entre 156,85 y 197,23 personas, se utilizarán las salidas 1 y 2. Se producirá la fluencia de la salida 2 y el tiempo de evacuación óptimo será de 59,92 segundos. Por último, si la ocupación está comprendida entre 363,33 y 401,1 personas, se utilizarán todas las salidas. Se producirá la fluencia de la salida 3 y el tiempo de evacuación óptimo será de 98,65 segundos.

Paso 9. Obtener el tiempo de evacuación óptimo z*

Si el valor k se sitúa en un intervalo de fluencia:

$$0 \le k \le 48{,}44 \quad \Rightarrow \quad z^* = 37{,}50$$

$$156{,}85 \le k \le 197{,}23 \quad \Rightarrow \quad z^* = 59{,}92$$

$$363{,}33 \le k \le 401{,}01 \quad \Rightarrow \quad z^* = 98{,}65$$

Si k se sitúa en los diferentes intervalos del periodo transitorio:

$$48,44 < k < 156,85 \quad \Rightarrow \quad k = 338,350 - \frac{10875,403}{z^*}$$

$$197,23 < k < 363,33 \quad \Rightarrow \quad k = 620,305 - \frac{25350,766}{z^*}$$

Si el número de ocupantes del recinto se sitúa en el periodo estacionario:

$$401,01 < k \quad \Rightarrow \quad k = 883,465 - \frac{47593,876}{z^*}$$

Dado que el número de ocupantes del recinto es de 610 personas, nos hallamos en el caso de que el número de ocupantes se sitúa en el periodo estacionario (610 > 401). En dicho periodo se utilizan las tres salidas.

$$k = 883,465 - \frac{47593,876}{z} \Rightarrow 610 = 883,465 - \frac{47593,876}{z^*} \Rightarrow z^* = 174,04 \text{ segundos}$$

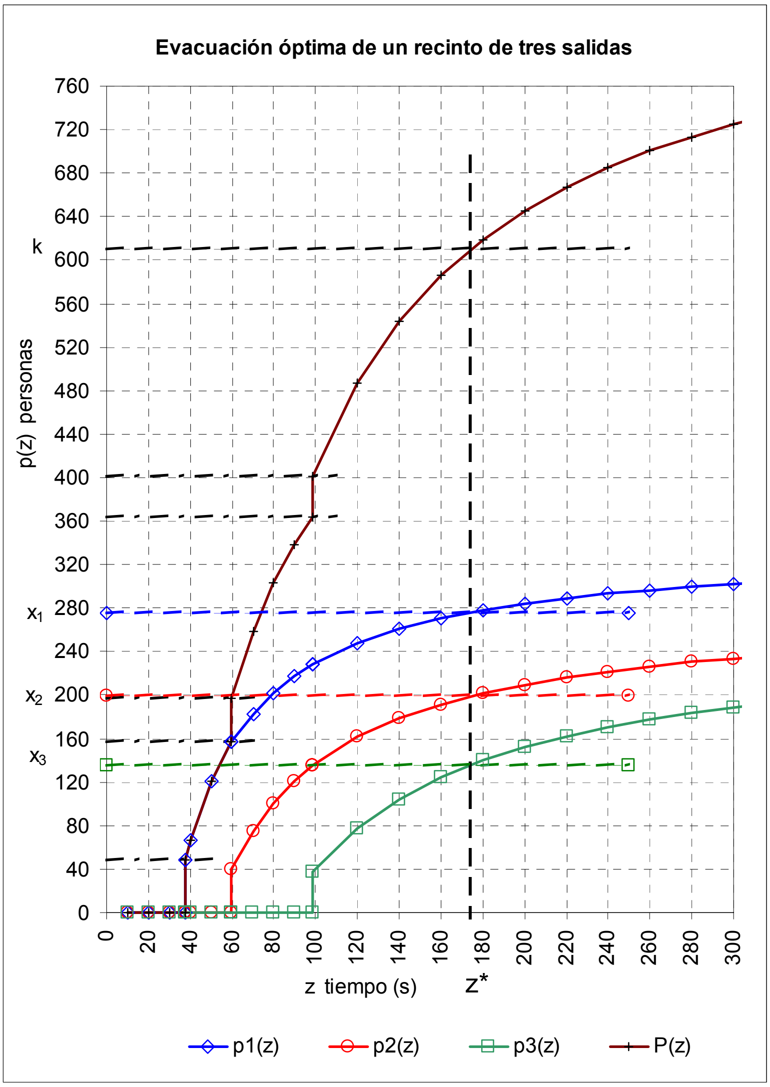

Figura 4.26 Solución gráfica de la aplicación propuesta

Paso 10. Determinar el número de personas x_j que deben utilizar cada salida. Para ello se resuelve la función de evacuación inversa de cada salida para $z^* = 174,04$ segundos.

$$x_1 = 338,350 - \frac{10875,403}{174,04} = 276 \ \text{personas}$$

$$x_2 = 281,955 - \frac{14475,363}{174,04} = 199 \ \text{personas}$$

$$x_3 = 263,160 - \frac{22243,110}{174,04} = 135 \ \text{personas}$$

Una alternativa a la solución analítica consiste en la solución gráfica, para facilitar la visualización de los resultados la escala de tiempos que se ha utilizado está comprendida entre 0 y 300 s, puede observarse en la figura 4.26.

También se ha hallado la solución del problema mediante la aplicación EXITR, en este caso se ha considerado el recorrido hasta los destinos siendo tanto las velocidades de circulación como los flujos función de las asignaciones realizadas, la solución resulta inmediata obteniendo los mismos resultados que mediante el procedimiento analítico y la solución gráfica.

EXITRV4

Datos

Ocupación total	610

	RUTA		
	1	**2**	**3**
Anchura efectiva mínima (m)	2	1,6	1,2
Distancia hasta la salida (m)	0	25	60

Resultados

	RUTA		
Asignación (Pers.)	276	199	135
t_{2j} (s)	174,44	174,49	173,56
t_{TOTAL} (s)		174,49	

Tabla 4.6 Tabla de resultados de la solución heurística

4.7 OTRAS CONDICIONES DE OPTIMIZACIÓN DE LA EVACUACIÓN DE UN RECINTO

Según demuestran J. Jarvis y D. Ratliff [75] son objetivos equivalentes minimizar tiempos de evacuación, ocupaciones en cualquier instante y costes de la evacuación si las funciones que definen el problema de evacuación cumplen determinadas condiciones. Estas condiciones se aplican al problema de la evacuación de un recinto considerando el caso en el cual la función de evacuación $t_j(x_j)$, depende exclusivamente del flujo f_j registrado en la salida j y del número de personas x_j que utilizan la ruta j, y no existen recorridos de evacuación.

Si el flujo f_j que se registra en la ruta j, es constante durante todo el tiempo que dura la evacuación, resulta que $t_j(x_j)$ será una función lineal cuya pendiente será el inverso del valor del flujo f_j.

$$t_j\,(x_j) = \left(\frac{1}{f_j}\right) x_j$$

Conocida la función de evacuación $t_j(x_j)$ y existiendo su función inversa $p_j(z)$, obtenida directamente

$$p_j(z) = z\, f_j$$

El número total de personas capaces de abandonar el recinto en un tiempo z será P(z), entonces es posible conocer el tiempo mínimo necesario para la evacuación de P(z) personas en un tiempo z

$$z = \frac{P(z)}{\left(\sum_{j=1}^{n} f_j\right)}$$

Si en un recinto existen n salidas independientes, cada una de ellas con un flujo f_j constante, el flujo total de salida del recinto F, será la suma de los flujos

$$F = f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n$$

El conocimiento del flujo total de salida F, permite obtener una estimación del tiempo mínimo de evacuación z*, para un número de k ocupantes resulta

$$z^* = \frac{k}{F}$$

El conocimiento del tiempo de evacuación del recinto, permite determinar la asignación óptima de ocupantes hacia cada una de las salidas

$$x_j{}^* = t_j(x_j)\; f_j = (z^*) f_j = \left(\frac{f_j}{F}\right) k$$

Puede observarse, que asignar más ocupantes a una determinada salida supone incrementar el tiempo de evacuación z, por ello si z > z*, z deja de ser un tiempo mínimo de evacuación del recinto, entonces la asignación x_j no puede ser mayor que la asignación óptima x_j*.

En un recinto, en condiciones de flujo constante, para lograr el tiempo mínimo de evacuación, el número de ocupantes x_j que debe asignarse a cada salida j, será proporcional a la relación que existe entre el flujo f_j que se registra en la salida j y el flujo total de salida del recinto F.

En la segunda propuesta cuyo objetivo era "Minimizar la ocupación del recinto en cualquier instante" (4.5) o el objetivo equivalente de "Maximizar directamente el número de personas que han abandonado el recinto en cualquier instante" (4.9) conduce a la misma solución que el objetivo anterior.

Sea z un valor de tiempo cualquiera, cuando dicho tiempo z se iguala al correspondiente con el valor óptimo z*

$$z = z^*$$

se trata de determinar el número máximo de personas capaces de abandonar el recinto, entonces se observa que si $f_j(z)$ es constante, el número de personas capaces de abandonar el recinto por la salida j, si P(z) está definida por la suma de las funciones de evacuación inversa de cada una de las salidas y $p_j(z)$ un conjunto de funciones definidas positivas

$$\mathrm{Max}\big(P(z)\big) = \mathrm{Max}\Big(\, p_1(z^*) + p_2(z^*) + \ldots\ldots + p_j(z^*)\,\Big) \qquad (4.63)$$

entonces para maximizar P(z), necesariamente debe cumplirse que sean máximas las funciones de evacuación inversa de cada una de las salidas

$$\forall\, j \;\; \mathrm{Max}\big(p_j(z^*)\big) \qquad (4.64)$$

Obteniéndose que el número máximo de personas que pueden abandonar el recinto por cada una de las salidas, resulta x_j*. Siendo el número máximo de ocupantes que pueden abandonar el recinto en un tiempo z* igual a k.

$$x_1{}^* + x_2{}^* + \ldots + x_n{}^* = k$$

Sencillamente se ha encontrado que en el tiempo de evacuación óptimo z*, el número máximo de personas capaces de abandonar el recinto es k, el número total de ocupantes.

Finalmente para la tercera propuesta, cuyo objetivo era "Minimizar el coste total de la evacuación" según la función objetivo (4.8) se trata de hallar la coincidencia con los resultados anteriores.

En esta situación, en la cual el flujo en cada una de las salidas es constante, sustituyendo la expresión de la función de evacuación de una salida en la expresión de la función del coste de la evacuación se obtiene

$$r_j(x_j) = \int_0^{x_j} t_j(x_j)\,d(x) = \frac{\left(x_j\right)^2}{2\,f_j}$$

Si el recinto dispone de n salidas, el coste total de la evacuación será la suma de los costes de evacuación de cada una de las salidas

$$R(x_1+x_2+\quad+x_n)=r_1(x_1)+r_2(x_2)+......+r_j(x_n)=\frac{(x_1)^2}{2f_1}+\frac{(x_2)^2}{2f_2}+......+\frac{(x_n)^2}{2f_n}$$

Si además existe la restricción definida (4.2), concretamente:

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = k$$

Se procede a hallar el valor mínimo de $Q(x_j)$, en este caso la función lagrangiana, será

$$Q(x_j,\lambda)=\frac{(x_1)^2}{2f_1}+\frac{(x_2)^2}{2f_2}+......+\frac{(x_n)^2}{2f_n}+\lambda(x_1+x_2+...+x_n-k)$$

aplicando Kuhn-Tucker y resolviendo se llega a obtener la solución final. Resulta para cada una de las j salidas.

$$x_j{}^* = \left(\frac{f_j}{F}\right)k$$

Con ello resulta la coincidencia de objetivos en los tres casos considerados. La solución del problema del coste de la evacuación es idéntica a la correspondiente minimización del tiempo de evacuación, y en este tiempo mínimo se ha probado que el número de individuos capaces de abandonar el recinto es exactamente el número de ocupantes k.

4.8 OPTIMIZACIÓN DE LA EVACUACIÓN DE UN RECINTO CON RESTRICCIONES EN LA CAPACIDAD DE LOS DESTINOS

Normalmente en los problemas de evacuación de edificios el destino de evacuación es un espacio exterior de dimensiones suficientes para albergar la totalidad de los ocupantes del recinto, sin embargo existen determinadas situaciones en las cuales la evacuación se realiza a dependencias contiguas que constituyen sectores de incendio distintos de los orígenes de evacuación, en estos casos surge el problema de la evacuación de un recinto con restricciones de capacidad en los destinos. Puede observarse en la siguiente figura 4.27.

Sea un problema de evacuación de un edificio que dispone de n salidas, en el cual los ocupantes que abandonan el edificio lo realizan por una salida hacia un destino que tiene una determinada capacidad c_{DS}, los ocupantes que abandonan el recinto por la salida 1 se dirigen al destino 1 cuya capacidad será de c_{DS1} personas, en general los que utilizan la salida j se dirigen al destino j y finalmente los de la salida n se dirigen al destino n.

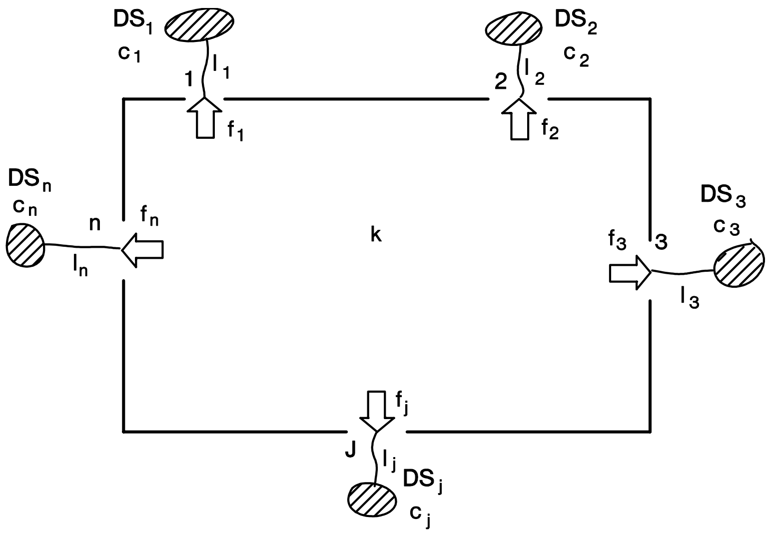

Figura 4.27 Recinto de n salidas y capacidad en los destinos

Necesariamente debe cumplirse la condición que la capacidad de los destinos sea suficiente para albergar la totalidad de los k ocupantes

$$\sum_{j=1}^{n} c_{DS\,j} \geq k \tag{4.52}$$

Si x_j es el número de ocupantes que abandonan el recinto por la salida j hacia el destino j de capacidad c_{DSj} debe cumplirse

$$x_j \leq c_{DS\,j} \tag{4.53}$$

Con estas dos nuevas restricciones la formulación final del problema es la siguiente:

$$\operatorname{Min} z = \operatorname{Max}\left[\, t_j\left(x_j \right) \right] \quad j = 1 \,.\,.\,.\,.\,.\, n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = k$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{DS\,j} \geq k$$

$$x_j \leq c_{DS\,j}$$

$$0 \leq x_j \leq k$$

El problema tiene una solución analítica ya planteada por R. L. Francis [34], la cual podría desarrollarse en las diversas situaciones planteadas, sin embargo dada la laboriosidad del proceso se opta por la solución heurística, consiste en contemplar la capacidad de los destinos siguiendo el mismo proceso que en los casos anteriores.

Primero. Se establece el paso de resolución x_p

Segundo. Se determina la función $t_j(x_j)$ de evacuación de cada salida.

Tercero. Se considera que x_p ocupantes pretenden abandonar el recinto utilizando una determinada salida j.

Cuarto. Se evalúa si se cumple la condición de capacidad de los destinos.

Quinto. Se evalúa el tiempo que supondría a los x_p ocupantes abandonar el recinto por cada una de las salidas.

Sexto. Se asignan los x_p ocupante a la salida que supone un tiempo de evacuación menor y cumple la condición de capacidad de los destinos.

Séptimo. El proceso se repite hasta la iteración n en la que se verifique

$$\left(k-\sum_{i=1}^{n} x_p\right) \leq x_p$$

Octavo. Se adopta como paso de resolución la unidad hasta la evacuación de los k ocupantes del recinto.

Para la aplicación de la heurística propuesta se ha desarrollado la aplicación **EXITRC**, en la tabla 4.7 puede observarse la entrada de datos y el formato de los resultados a que da lugar dicha aplicación en la cual t_{0j} corresponde a la demora en el inicio de la evacuación de los ocupantes que se dirigen a la salida j, t_{1j} es el tiempo de circulación, t_{2j} al tiempo de flujo y t_{TOTAL} el tiempo de evacuación.

EXITRC

Datos

Ocupación total	k

	RUTA					
	1	**2**		**j**		**n**
Anchura efectiva mínima (m)	w_1	w_2				w_n
Superficie útil (m^2)	a_1	a_2				a_n
Recorrido (m)	l_1	l_2				l_n
Densidad estimada (Pers./ m^2)	d_1	d_2				d_n
Flujo específico (Pers./ m min)	f_1	f_2				f_n
Demora en el inicio evac. (s)	$t_{1\ 1}$	$t_{1\ 2}$				$t_{1\ n}$
Capacidad destinos	CDS1	CDS2		CDSj		CDSn

Resultados

	RUTA					
Asignación (Pers.)	x_1	x_2				x_n
Densidad resultante(Pers./ m^2)	d_1	d_2				d_n
Velocidad (m. min)	v_1	v_2				v_n
Flujo específico (Pers./m min)	f_1	f_2				f_n
Flujo (Pers./ m min)	F_1	F_2				F_n
t_{1j} (s)	$t_{1\ 1}$	$t_{1\ 2}$				$t_{1\ n}$
t_{2j} (s)	$t_{2\ 1}$	$t_{2\ 2}$				$t_{2\ n}$
t_{TOTAL} (s)	t_1	t_2				t_n

Tabla 4.7 Tabla de resultados de la solución heurística

Finalmente se realiza una aplicación numérica en las condiciones de la situación descrita en el apartado 4.3.3, se consideran las siguientes capacidades c_1= 150, c_2= 350 y c_3= 300 personas. En primer lugar se verifica que la capacidad del destino de evacuación es de 800 personas, magnitud que supera la ocupación de 610 personas y con estas condiciones la solución óptima del problema es la proporciona la tabla 4.8, en la que puede observarse como el destino 1 alcanza su capacidad máxima y los ocupantes se distribuyen hacia los dos destinos restantes.

EXITRV5

Datos

Ocupación total	610

	RUTA		
	1	**2**	**3**
Anchura efectiva mínima (m)	2	1,6	1,2
Distancia hasta la salida (m)	35	25	20
Densidad estimada (Pers./ m^2)	2,6	2,6	2,6
Velocidad circulación (m / min)	40	40	40
Flujo específico (Pers./ m min)	65	65	65
Capacidad destino (Pers.)	150	350	300

Resultados

	RUTA		
Asignación (Pers.)	150	258	202
t_j (s)	121,73	186,35	186,15
t_{TOTAL} (s)		186,35	

Tabla 4.8 Tabla de resultados de la solución heurística