

Aritmètica d'ordres quaterniònics i uniformització hiperbòlica de corbes de Shimura

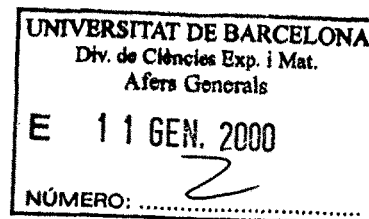
Montserrat Alsina i Aubach

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author.

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques
Departament d'Àlgebra i Geometria



ARITMÈTICA D'ORDRES QUATERNIÒNICS
I UNIFORMITZACIÓ HIPERBÒLICA
DE CORBES DE SHIMURA

Montserrat Alsina i Aubach

Capítol 6

Ordres quaterniònics i formes quadràtiques

6.1 Formes nòrmiques d'ordres quaterniònics

Sigui H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions i sigui $\mathcal{O} \subset H$ un ordre quaterniònic.

A partir de la forma nòrmica de l'àlgebra, associem a cada ordre una forma quadràtica quaternària i una de ternària, que anomenem formes nòrmiques de l'ordre i denotem per $n_{\mathcal{O},4}$ i $n_{\mathcal{O},3}$, respectivament.

En aquesta secció veurem com queden determinades les formes nòrmiques, quines propietats tenen en general i quines són les seves característiques quan es treballa amb ordres d'Eichler.

6.1.1 Construcció i propietats

Fixem en l'ordre $\mathcal{O} \subseteq H$ una base normalitzada $\{1, v_2, v_3, v_4\}$ (cf. secció 1.2), per tal d'obtenir formes nòrmiques amb bones propietats.

6.1.1 Definició. La forma nòrmica quaternària associada a l'ordre és la forma quadràtica que s'obté a partir de la forma nòrmica de l'àlgebra, expressada en la base normalitzada fixada. La denotem per $n_{\mathcal{O},4}$.

Per a definir la forma nòrmica ternària ens restringim al subespai dels quaternions purs. Es tracta senzillament d'imposar la restricció $\text{tr}(\alpha) = 0$ als elements de l'ordre; és a dir, la norma aplicada a $\mathcal{O} \cap H_0$ s'obté a partir de

$n_{\mathcal{O},4}$, amb la restricció $\text{tr}(\alpha) = 0$. Ara bé, la forma quadràtica obtinguda d'aquesta manera pot tenir coeficients no enters, depenent de la paritat de l'ordre. Així, construïm una altra forma quadràtica ternària mitjançant un canvi de variable no enter, per tal que tingui coeficients enters. Amb aquesta construcció, variar els elements de $\mathcal{O} \cap H_0$ equivaldrà a recórrer els enters.

6.1.2 Definició. La forma nòrmica ternària associada a \mathcal{O} , en la base normalitzada $\{1, v_2, v_3, v_4\}$, és la forma quadràtica ternària que s'obté substituint a $n_{\mathcal{O},4}$ l'expressió $T = -2X$ si \mathcal{O} és un ordre senar, i $X = 0$ si \mathcal{O} és un ordre parell. La denotem per $n_{\mathcal{O},3}$. \square

A continuació, explicitem les relacions entre les matrius de les formes quadràtiques nòrmiques associades a l'àlgebra de quaternions H i les associades a un ordre quaterniònic $\mathcal{O} \subseteq H$.

Suposem que \mathcal{O} és un ordre parell. Denotem per P_0 la matriu de canvi de la base fixada en l'ordre a la base fixada en l'àlgebra i definim les matrius $P_{0,3}$, R_0 , $R_{0,4}$, $R_{0,3}$ següents:

$$P_0 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & P_{0,3} & \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad R_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{0,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{0,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Id}.$$

Suposem que \mathcal{O} és un ordre senar. Denotem per P_1 la matriu de canvi de la base fixada en l'ordre a la base fixada en l'àlgebra i definim les matrius $P_{1,3}$, R_1 , $R_{1,4}$, $R_{1,3}$ següents.

$$P_1 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & P_{1,3} & \\ 0 & & & \end{array} \right), \quad R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_{1,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.1.3 Lema. *Posem $k = 0$ si \mathcal{O} és un ordre parell, i $k = 1$ si \mathcal{O} és un ordre senar. Aleshores, amb les notacions anteriors, tenim que:*

$$(i) \quad A(n_{\mathcal{O},4}) = P_k^t A(n_{H,4}) P_k.$$

$$(ii) \quad A(n_{\mathcal{O},3}) = R_k^t A(n_{\mathcal{O},4}) R_k.$$

$$(iii) \quad A(n_{\mathcal{O},3}) = (R_{k,3})^t (P_{k,3})^t A(n_{H,3}) P_{k,3} R_{k,3}. \quad \square$$

Utilitzant aquest resultat i el fet que les formes nòrmiques quaternàries dels ordres i la de l'àlgebra són \mathbb{Q} -equivalents, per 4.4.4, deduïm les propietats següents.

6.1.4 Proposició. *Siguin H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions i $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre. Considerem les formes nòrmiques associades a \mathcal{O} . Aleshores,*

(i) *L'àlgebra H és definida si, i només si, la forma $n_{\mathcal{O},4}$ és definida positiva; si, i només si, la forma $n_{\mathcal{O},3}$ és definida positiva.*

(ii) *L'àlgebra H és indefinida si, i només si, la forma $n_{\mathcal{O},4}$ és indefinida, de signatura $(2,2)$; si, i només si, la forma $n_{\mathcal{O},3}$ és indefinida, de signatura $(1,2)$.*

(iii) *$\det_1(n_{\mathcal{O},4})$ i $\det_1(n_{\mathcal{O},3})$ són quadrats. Explícitament, si P és la matriu de canvi de la base normalitzada de \mathcal{O} a la base de l'àlgebra, tenim que*

$$\det_1(n_{\mathcal{O},4}) = (ab \det P)^2,$$

$$\det_1(n_{\mathcal{O},3}) = \begin{cases} (ab \det P)^2 & \text{si } \mathcal{O} \text{ és un ordre parell,} \\ (2ab \det P)^2 & \text{si } \mathcal{O} \text{ és un ordre senar.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ: Les formes nòrmiques $n_{H,4}$ i $n_{\mathcal{O},4}$ són \mathbb{Q} -equivalents; en particular, són \mathbb{R} -equivalents i, per tant, tenen la mateixa signatura. El seu caràcter es correspon amb el caràcter de l'àlgebra, per 4.4.5, 5.1.8 i 5.1.14. Si apliquem la relació matricial del lema anterior (iii), en segueix també el resultat per a la forma ternària i completa la demostració de (i) i (ii).

De les mateixes relacions matricials anteriors deduïm els resultats de (iii). Notem que $P = P_k$ i que $\det P_k = \det P_{k,3}$, per $k = 0, 1$, segons la paritat de l'ordre. Com que $\det_1(n_{H,4}) = a^2 b^2 = \det_1(n_{H,3})$, obtenim que $\det_1(n_{\mathcal{O},4}) = (ab \det P)^2$. Notem que $\det R_{0,3} = 1$ i $\det R_{1,3} = -2$; per tant, obtenim els valors per a $\det_1(n_{\mathcal{O},3})$ indicats a l'enunciat de (iii). \square

6.1.5 Corollari. *Sigui $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre d'una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions H . Considerem les formes nòrmiques associades a l'ordre \mathcal{O} . Aleshores,*

$$\begin{aligned} |d_1(n_{\mathcal{O},4})| &= \frac{1}{4}D_{\mathcal{O}}, \\ |d_2(n_{\mathcal{O},4})| &= D_{\mathcal{O}}, \\ |d_1(n_{\mathcal{O},3})| &= \begin{cases} \frac{1}{4}D_{\mathcal{O}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és un ordre parell,} \\ \frac{1}{2}D_{\mathcal{O}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és un ordre senar.} \end{cases} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓ: Sigui P la matriu de canvi de la base de l'ordre a la base de l'àlgebra. Per 6.1.4 tenim que $\det_1(n_{\mathcal{O},4}) = a^2b^2(\det P)^2$ i el caràcter de la forma $n_{\mathcal{O},4}$ depèn de si H és una àlgebra definida o indefinida. Recordem que el signe de $d_i(f)$ es fixa en funció del caràcter de la forma f . Així, $|d_1(n_{\mathcal{O},4})| = |ab \det P|$ i $|d_2(n_{\mathcal{O},4})| = 2^2|ab \det P|$.

Per al cas de la forma ternària, utilitzem també 6.1.4. Així, a partir de $\det_1(n_{\mathcal{O},3})$ obtenim que

$$|d_1(n_{\mathcal{O},3})| = \begin{cases} |ab \det P| & \text{si } \mathcal{O} \text{ és un ordre parell,} \\ 2|ab \det P| & \text{si } \mathcal{O} \text{ és un ordre senar.} \end{cases}$$

Si apliquem 1.2.6, podem expressar els resultats anteriors sobre d_i en funció del discriminant de l'ordre, ja que $D_{\mathcal{O}} = 4|ab \det P|$. Això completa la demostració de (ii). \square

6.1.6 Lema. *Sigui \mathcal{O} un ordre d'una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions H i fixem una base normalitzada de \mathcal{O} . Aleshores, les formes nòrmiques $n_{\mathcal{O},4}$ i $n_{\mathcal{O},3}$ tenen coeficients a \mathbb{Z} .*

DEMOSTRACIÓ: Per ser \mathcal{O} un \mathbb{Z} -ordre, només conté elements enters sobre \mathbb{Z} . Així, $n_{\mathcal{O},4}$ i $n_{\mathcal{O},3}$ són formes quadràtiques que, sobre \mathbb{Z} , només representen elements enters. En particular, els coeficients centrals són enters. Ara bé, els coeficients laterals també són enters, ja que cada subforma de dues variables, amb coeficient lateral diferent de 0, representa només elements enters.

\square

6.1.7 Proposició. *Les formes nòrmiques associades a un \mathbb{Z} -ordre en bases normalitzades diferents són \mathbb{Z} -equivalents. Així, les formes nòrmiques queden determinades per l'ordre llevat \mathbb{Z} -equivalència.*

DEMOSTRACIÓ: Per a la forma $n_{\mathcal{O},4}$ és una aplicació directa de 4.4.3.

Considerem dues bases normalitzades de \mathcal{O} , $\{v_i\}$ i $\{v'_i\}$, i sigui Q la matriu de canvi de base de $\{v'_i\}$ i $\{v_i\}$; així, $Q \in \text{GL}(4, \mathbb{Z})$ i satisfà les condicions de 1.2.9(iii). Posem $n_{\mathcal{O},3}$, $n'_{\mathcal{O},3}$, $n_{\mathcal{O},4}$ i $n'_{\mathcal{O},4}$, les formes ternàries i quaternàries associades a \mathcal{O} en les dues bases, respectivament.

Expressem les relacions a nivell de matrius, seguint la notació de 6.1.3. Volem veure que existeix $S \in \text{GL}(3, \mathbb{Z})$ tal que $S^t A(n_{\mathcal{O},3}) S = A(n'_{\mathcal{O},3})$. És clar que, per a l'ordre \mathcal{O} , se satisfà $A(n'_{\mathcal{O},4}) = Q^t A(n_{\mathcal{O},4}) Q$. Així, d'una banda, tenim que $A(n'_{\mathcal{O},3}) = R_k^t A(n'_{\mathcal{O},4}) R_k = R_k^t Q^t A(n_{\mathcal{O},4}) Q R_k$; de l'altra, tenim que $A(n_{\mathcal{O},3}) = R_k^t A(n_{\mathcal{O},4}) R_k$. Per tant, és suficient trobar $S \in \text{GL}(3, \mathbb{Z})$ tal que $Q R_k = R_k S$. Considerem les matrius de $M(3, \mathbb{Z})$ següents:

$$S_0 = \begin{pmatrix} q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 - 2q_{14} & q_{12} & q_{13} \\ -2q_{24} & q_{22} & q_{23} \\ -2q_{34} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

Donades les condicions satisfetes per Q , cf. remarca 1.2.11, es comprova fàcilment que $Q R_k = R_k S_k$. A més, aplicant propietats de determinants s'obté $\det S = \det Q$. Per tant, $S \in \text{GL}(3, \mathbb{Z})$, com volíem veure. Com a alternativa, també és fàcil comprovar-ho veient que

$$R_{0,4}^t Q R_{0,4} = \left(\begin{array}{c|c} S_0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{i} \quad R_{1,4}^t Q R_{1,4} = \left(\begin{array}{c|c} S_1 & q_{i4} \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right). \quad \square$$

Observem que també té sentit definir la forma nòrmica quaternària de l'ordre respecte de bases no necessàriament normalitzades. Aplicant de nou 4.4.3, la forma quaternària obtinguda seria \mathbb{Z} -equivalent a la forma nòrmica que hem definit.

6.1.8 Proposició. *Les formes nòrmiques associades a \mathbb{Z} -ordres conjugats són \mathbb{Z} -equivalents.*

DEMOSTRACIÓ: És clar que la forma nòrmica quaternària $n_{\mathcal{O},4}$ és multiplicativa. Així doncs, si no ens restringim a bases normalitzades, podem aplicar directament el resultat de K -àlgebres 4.4.6 i tindrem que les formes nòrmiques quaternàries corresponents a ordres conjugats són \mathbb{Z} -equivalents. Notem que, de fet, la demostració de 4.4.6 consisteix a reduir-ho al cas de bases diferents d'un mateix ordre, veient que les formes quadràtiques corresponents a bases conjugades són la mateixa. El mateix argument es pot aplicar a la forma nòrmica quaternària que hem definit a partir de bases normalitzades, ja que la base conjugada d'una base normalitzada és també normalitzada.

La igualtat de les formes nòrmiques quaternàries, en bases normalitzades conjugades, es pot redemstrar fàcilment utilitzant directament la definició de la forma bilineal corresponent a la norma en funció de la traça. Sigui $\{v_i\}$ una base normalitzada de \mathcal{O} . Per la multiplicativitat, la norma es conserva per conjugació; així, els coeficients centrals de la forma nòrmica de \mathcal{O} , en base $\{v_i\}$, i els de la forma nòrmica de $h^{-1}\mathcal{O}h$, en base $\{h^{-1}v_i h\}$, són iguals. Per veure la igualtat dels coeficients laterals, fem

$$\begin{aligned} B(u^{-1}v_i u, u^{-1}v_j u) &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(u^{-1}v_i \overline{u u^{-1}v_j u}) = \\ &= \frac{1}{2} (u^{-1}v_i \overline{u u^{-1}v_j u} + u^{-1}v_j \overline{u u^{-1}v_i u}) = \\ &= \frac{1}{2} (u^{-1}v_i \overline{u v_j u^{-1}} + u^{-1}v_j \overline{u v_i u^{-1}}) = \\ &= \frac{1}{2} (u^{-1}(v_i n(u) \overline{v_j} + v_j n(u) \overline{v_i}) \frac{u}{n(u)}) = \\ &= \frac{1}{2} u^{-1} \operatorname{tr}(v_i \overline{v_j}) u = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr}(v_i \overline{v_j}) = \\ &= B(v_i, v_j). \end{aligned}$$

Això dóna la igualtat de formes nòrmiques sobre bases conjugades. Així, hem reduït el problema a la \mathbb{Z} -equivalència de formes nòrmiques quaternàries d'un mateix ordre en bases diferents, la qual cosa és precisament la proposició anterior. Notem que en segueix automàticament el resultat per a les formes nòrmiques ternàries, ja que els ordres conjugats tenen el mateix tipus. \square

6.1.9 Exemple. Sigui $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions qualsevol i considerem l'ordre $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[1, i, j, ij]$, que és un ordre parell. Aleshores,

$$(i) \quad n_{\mathcal{O},4} = X^2 - aY^2 - bZ^2 + abT^2.$$

$$(ii) \quad n_{\mathcal{O},3} = -aX^2 - bY^2 + abZ^2.$$

$$(iii) \quad \det_1(n_{\mathcal{O},4}) = a^2 b^2, \quad D_{\mathcal{O}} = 4ab. \quad \square$$

6.1.10 Cas no ramificat. Considerem l'àlgebra de quaternions no ramificada $H = \left(\frac{1, -1}{\mathbb{Q}}\right)$ i l'ordre $\mathcal{O}_M(1, N) = \mathbb{Z}[1, \frac{j+ij}{2}, N\frac{-j+ij}{2}, \frac{1-i}{2}]$, que és un ordre senar, donat ja en una base normalitzada. Les formes nòrmiques associades a l'ordre en aquesta base són:

$$(i) \quad n_{\mathcal{O}_M(1,1),4} = X^2 + XT - NYZ.$$

$$(ii) \quad n_{\mathcal{O}_M(1,1),3} = -X^2 - NYZ.$$

$$(iii) \quad \det_1(n_{\mathcal{O}_M(1,1),4}) = N^2/16, \quad D_{\mathcal{O}_M(1,1)} = 1.$$

Considerem ara l'àlgebra de quaternions no ramificada $H = M(2, \mathbb{Q})$ i l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_0(1, N)$. Si fixem a $\mathcal{O}_0(1, N)$ la base normalitzada següent:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

les formes nòrmiques obtingudes són exactament les anteriors. Es podria argumentar que és més natural considerar directament l'ordre $\mathcal{O}_0(1, N)$ respecte de la base habitual

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ N & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

encara que és una base no normalitzada. En aquest cas, calculem la forma nòrmica quaternària directament a partir del concepte de norma, vist com a determinant de l'element. La forma nòrmica ternària es pot definir aleshores directament, imposant la condició que la traça sigui 0. Els resultats obtinguts són:

$$(i) \quad n_{\mathcal{O}_0(1, N), 4} = XT - NYZ.$$

$$(ii) \quad n_{\mathcal{O}_0(1, N), 3} = -X^2 - NYZ.$$

Notem que obtenim exactament la mateixa forma ternària que en la base anterior. Així, en el cas de l'àlgebra de matrius i els seus ordres, utilitzarem la notació i la construcció introduïdes en aquesta secció, que unifica el cas no ramificat i el cas ramificat. \square

6.1.11 Cas poc ramificat de tipus A. Considerem l'àlgebra de quaternions $H_A(p) = \left(\frac{p, -1}{\mathbb{Q}} \right)$. Sigui l'ordre $\mathcal{O}_A(2p, N) = \mathbb{Z}[1, i, Nj, \frac{1+i+j+ij}{2}]$ donat a 1.2.35. Observem que $\mathcal{O}_A(2p, N)$ és un ordre senar i la base donada ja és una base normalitzada. Les formes nòrmiques associades a l'ordre $\mathcal{O}_A(2p, N)$ en aquesta base són:

$$(i) \quad n_{\mathcal{O}_A(2p, N), 4} = X^2 - pY^2 + N^2Z^2 + \frac{1-p}{2}T^2 + XT - pYT + NZT.$$

$$(ii) \quad n_{\mathcal{O}_A(2p, N), 3} = (1 - 2p)X^2 - pY^2 + N^2Z^2 + 2pXY - 2NXZ.$$

$$(iii) \quad \det_1(n_{\mathcal{O}_A(2p, N), 4}) = p^2N^2/4, \quad D_{\mathcal{O}_A(2p, N)} = 2pN.$$

6.1.12 Cas poc ramificat de tipus B. Considerem l'ordre $\mathcal{O}_B(pq, N) = \mathbb{Z}[1, Ni, \frac{1+i}{2}, \frac{1+ij}{2}] \subseteq H_B(p, q)$ donat a 1.2.35. Observem que $\mathcal{O}_B(pq, N)$ és un ordre senar. La base donada no és normalitzada; la transformem en una base normalitzada intercanviant el tercer i el quart element. Les formes nòrmiques associades a l'ordre $\mathcal{O}_B(pq, N)$, en aquesta nova base, són:

$$(i) \ n_{\mathcal{O}_B(pq, N), 4} = X^2 - pN^2Y^2 - p\frac{1-q}{4}Z^2 + \frac{1-q}{4}T^2 + XT - pNYZ.$$

$$(ii) \ n_{\mathcal{O}_B(pq, N), 3} = -qX^2 - pN^2Y^2 - p\frac{1-q}{4}Z^2 - pNYZ.$$

$$(iii) \ \det_1(n_{\mathcal{O}_B(pq, N), 4}) = p^2q^2N^2/16, \ D_{\mathcal{O}_B(pq, N)} = pqN. \quad \square$$

6.1.13 Teorema. *Si $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaternioní, on H és una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions.*

$$(i) \ n_{\mathcal{O}, 4} \text{ és una } K_1\text{-forma si, i només si, } N(n_{\mathcal{O}, 4}) | D_{\mathcal{O}}.$$

$$(ii) \ n_{\mathcal{O}, 4} \text{ és una } K_2\text{-forma si, i només si, } N(n_{\mathcal{O}, 4}) | 2D_{\mathcal{O}}.$$

$$(iii) \ \text{Si } \mathcal{O} \text{ és un ordre parell, aleshores } n_{\mathcal{O}, 3} \text{ és una } K_1\text{-forma si, i només si, } N(n_{\mathcal{O}, 3}) | D_{\mathcal{O}}.$$

$$(iv) \ \text{Si } \mathcal{O} \text{ és un ordre senar, aleshores } n_{\mathcal{O}, 3} \text{ és una } K_1\text{-forma si, i només si, } N(n_{\mathcal{O}, 3}) | 2D_{\mathcal{O}}.$$

DEMOSTRACIÓ: Per 4.3.12 (vii), el fet que la forma nòrmica quaternària $n_{\mathcal{O}, 4}$ sigui K_1 -forma es caracteritza per la relació de divisibilitat $N(n_{\mathcal{O}, 4}) | d_2(n_{\mathcal{O}, 4})$. Ara bé, per 6.1.5, tenim que $d_2(n_{\mathcal{O}, 4}) = D_{\mathcal{O}}$. Així, obtenim que $n_{\mathcal{O}, 4}$ és K_1 -forma si, i només si, $N(n_{\mathcal{O}, 4}) | D_{\mathcal{O}}$.

La condició perquè $n_{\mathcal{O}, 4}$ sigui K_2 -forma és $N(n_{\mathcal{O}, 4}) | 2d_2(n_{\mathcal{O}, 4})$. Utilitzant 6.1.5 la condició s'escriu de la manera indicada a (ii).

Per a la forma ternària $n_{\mathcal{O}, 3}$, utilitzem 4.3.12(i) i 6.1.5. Així obtenim les equivalències de (iii). \square

6.1.14 Remarca. Siguin H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions, $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre, \mathcal{B} una base de \mathcal{O} normalitzada fixada, $n_{\mathcal{O}, 4}$ i $n_{\mathcal{O}, 3}$ les formes nòrmiques associades a l'ordre \mathcal{O} i δ un nombre enter. Considerem la base \mathcal{B} com a \mathbb{Q} -base de H i posem $\omega = (x, y, z, t) \in H$ respecte de la base \mathcal{B} . És clar que, per construcció, tenim els fets següents.

- (i) $\omega \in \mathcal{O}$ si, i només si, $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$; en aquest cas, $n(\omega) = n_{\mathcal{O},4}(x, y, z, t)$. Així, trobar un element $\omega \in \mathcal{O}$ de norma igual a δ és equivalent a trobar una representació sobre \mathbb{Z} de δ per la forma nòrmica quaternària $n_{\mathcal{O},4}$.
- (ii) Si \mathcal{O} és un ordre parell, aleshores $\omega \in \mathcal{O} \cap H_0$ si, i només si, $x = 0$ i $y, z, t \in \mathbb{Z}$; en aquest cas, $n(\omega) = n_{\mathcal{O},3}(y, z, t)$. Si \mathcal{O} és un ordre senar, aleshores $\omega \in \mathcal{O} \cap H_0$ si, i només si, $x, y, z \in \mathbb{Z}$ i $t = -2x$; en aquest cas, $n(\omega) = n_{\mathcal{O},3}(x, y, z)$. Així, independentment del caràcter de l'ordre \mathcal{O} , trobar un element $\omega \in \mathcal{O} \cap H_0$ de norma igual δ és equivalent a trobar una representació sobre \mathbb{Z} de δ per la forma nòrmica ternària $n_{\mathcal{O},3}$. \square

Observem que els resultats sobre les representacions de les formes quadràtiques de coeficients enters no depenen de la classe de \mathbb{Z} -equivalència; per tant, aquests comentaris només depenen de la classe de conjugació de l'ordre.

Donat $\mu \in \mathbb{Z}$, considerem el subconjunt de quaternions $H_\mu = \{\omega \in H : \text{tr}(\omega) = \mu\} = \{x + yi + zj + tij : x = \mu/2\}$. Per a cada element $\omega = (x, y, z, t) \in H_\mu$ tenim que $n(\omega) = n_{H,4}(\omega) = \mu^2/4 + n_{H,3}(y, z, t)$. Així, posem $n_{H,3}^{(\mu)} := \mu^2/4 + n_{H,3}(Y, Z, T)$. Notem que l'equació $n_{H,3}^{(\mu)}(Y, Z, T) = \delta$ és una quàdrica, per a qualsevol $\delta \in \mathbb{R}$. Concretament, $n_{H,3}^{(\mu)}(Y, Z, T) = \mu^2/4 - aY^2 - bZ^2 + abT^2$.

Donat un ordre $\mathcal{O} \subseteq H$, podem considerar el conjunt $\mathcal{O} \cap H_\mu$ i estudiar els valors que pren la norma en aquest conjunt. Notem que si $\mathcal{B} = \{1, v_2, v_3, v_4\}$ és una base normalitzada de \mathcal{O} , tenim que $\mathcal{O} \cap H_\mu = \{(x, y, z, t)_{\mathcal{B}} : x, y, z, t \in \mathbb{Z}, 2x + \text{tr}(v_4)t = \mu\}$. Així, per a cada element $\omega = (x, y, z, t) \in \mathcal{O} \cap H_\mu$, la seva norma és $n_{\mathcal{O},4}(x, y, z, t)$, amb $t = \mu - 2x$ si \mathcal{O} és senar i $x = \mu/2$ si \mathcal{O} és parell. L'expressió resultant, en funció de tres variables, la denotem per $n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}$. En particular, $n_{\mathcal{O},3}^{(0)}(X, Y, Z) = n_{\mathcal{O},3}(X, Y, Z)$.

6.1.15 Notació. Per analogia amb les representacions de nombres per formes ternàries, considerarem el conjunt de punts de la quàdrica $n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)} = \delta$ com el conjunt de representacions de δ per $n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}$. Així, denotem per

$$\mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}, \delta; \mathbb{Z}) := \{(x, y, z) : n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}(x, y, z) = \delta, x, y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

6.1.16 Remarca. Sigui H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions i $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic, amb una base normalitzada fixada. Fixem $\mu \in \mathbb{Z}$. Aleshores, són equivalents:

- (i) trobar un element $\omega \in \mathcal{O} \cap H_\mu$, amb $n(\omega) = \delta$.

- (ii) trobar una representació sobre \mathbb{Z} de δ per la forma nòrmica quaternària $n_{\mathcal{O},4}$ amb la condició que la traça sigui μ .
- (iii) trobar un punt de coordenades a \mathbb{Z} de la quàdrica $n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)} = \delta$.

Així, $\omega \in \mathcal{O} \cap H_\mu$, amb $n(\omega) = \delta$, si, i només si, en coordenades respecte de la base normalitzada fixada a \mathcal{O} ,

$$\omega = \begin{cases} (\mu/2, x, y, z) & \text{si } \mathcal{O} \text{ és parell,} \\ (x, y, z, \mu - 2x) & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar,} \end{cases}$$

per a algun $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}, \delta; \mathbb{Z})$. Si \mathcal{O} és un ordre parell, és clar que μ ha de ser un nombre enter parell. \square

6.1.2 Formes nòrmiques d'ordres d'Eichler

Per a les formes nòrmiques associades als ordres d'Eichler tenim propietats més explícites.

6.1.17 Proposició. *Sigui $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions. Considerem \mathcal{O} i \mathcal{O}' dos ordres d'Eichler de H del mateix nivell. Aleshores,*

- (i) $n_{\mathcal{O},i} \stackrel{\mathbb{R}}{\sim} n_{\mathcal{O}',i}$ i $n_{\mathcal{O},i} \stackrel{\mathbb{Z}_p}{\sim} n_{\mathcal{O}',i}$, per a tot p finit, per a $i = 3, 4$.
- (ii) Si H és una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida, aleshores $n_{\mathcal{O},i} \stackrel{\mathbb{Z}}{\sim} n_{\mathcal{O}',i}$, per a $i = 3, 4$.

DEMOSTRACIÓ: La signatura de les formes nòrmiques només depèn de la signatura de l'àlgebra; per tant, les formes nòrmiques de dos ordres de la mateixa àlgebra són \mathbb{R} -equivalents.

Dos \mathbb{Z} -ordres \mathcal{O} i \mathcal{O}' d'Eichler del mateix nivell són sempre localment conjugats com a \mathbb{Z}_p -ordres, per a tot primer p , cf. 1.2.21. Per tant, per 6.1.8, les formes nòrmiques ternàries i quaternàries associades $n_{\mathcal{O},i}$ i $n_{\mathcal{O}',i}$ són \mathbb{Z}_p -equivalents per a tot primer p . Això demostra (i).

Si H és una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida, tots els \mathbb{Z} -ordres d'Eichler d'un mateix nivell són conjugats, per 1.2.33, i les formes nòrmiques quaternàries i ternàries associades a \mathbb{Z} -ordres conjugats són \mathbb{Z} -equivalents, per 6.1.8. \square

6.1.18 Remarca. En particular, la \mathbb{Z} -equivalència de les formes quadràtiques nòrmiques implica la igualtat dels determinants de les matrius que expressen la base dels ordres respecte de la base de l'àlgebra de quaternions, la qual cosa també es dedueix directament en 1.2.30. \square

Recordem que, per a les àlgebres indefinides racionals de discriminant D , hi ha un únic ordre d'Eichler per a cada nivell N , llevat conjugació, que denotem per $\mathcal{O}(D, N)$. A partir del resultat anterior, per a les àlgebres de quaternions racionals indefinides de discriminant D , denotem per $n_{\mathcal{O}(D, N), 4}$ i $n_{\mathcal{O}(D, N), 3}$ les classes de \mathbb{Z} -equivalència de les formes nòrmiques dels ordres d'Eichler de nivell N .

En aquest sentit, per a les àlgebres de quaternions poc ramificades de tipus A i B fixades, les taules que donarem a la secció 6.4 de formes nòrmiques associades als ordres són completes, per als nivells indicats, ja que donen un representant de la classe d'equivalència de les formes nòrmiques associades a un ordre d'Eichler.

6.1.19 Lema. *Sigui $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre d'Eichler i suposem que H és una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida. Aleshores, $n_{\mathcal{O}, 4} \xrightarrow{\mathbb{Z}} -1$. \square*

DEMOSTRACIÓ: Només cal aplicar el resultat d'Eichler 2.3.2, el qual assegura que en cada ordre d'Eichler hi ha unitats de norma igual a -1. \square

6.1.20 Proposició. *Sigui $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre, on H és una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions. Si \mathcal{O} és un ordre d'Eichler de nivell $N_{\mathcal{O}}$ lliure de quadrats, aleshores $n_{\mathcal{O}, 4}$ és una K_1 -forma si, i només si, $N(n_{\mathcal{O}, 4}) = D_{\mathcal{O}}$.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que \mathcal{O} és un ordre d'Eichler de nivell $N_{\mathcal{O}}$ lliure de quadrats. Això és equivalent al fet que $D_{\mathcal{O}} = D_H N_{\mathcal{O}}$ sigui lliure de quadrats i, per 6.1.5, al fet que $d_2(n_{\mathcal{O}, 4})$ sigui lliure de quadrats. Aleshores, només cal aplicar 4.3.13 (ii) a la forma quaternària $n_{\mathcal{O}, 4}$. \square

A partir dels resultats anteriors, hem obtingut computacionalment, mitjançant el paquet Poincare, la proposició següent.

6.1.21 Proposició. *Sigui \mathcal{O} un ordre d'Eichler de nivell $N < 1000$ d'una àlgebra poc ramificada H igual a una de les següents: $H_A(3)$, $H_B(2, 5)$, $H_A(7)$ i $H_B(3, 5)$. Aleshores, $n_{\mathcal{O}, 4}$ és una K_{σ} -forma, per a $\sigma = 1, 2$, i $n_{\mathcal{O}, 3}$ és una K_1 -forma. \square*

6.1.22 Proposició. *Siguin H una àlgebra de quaternions H de discriminant D i $\mathcal{O}(D, M) \subseteq H$ un ordre d'Eichler de nivell M . Siguí $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}(D, M)$ un altre ordre d'Eichler de H . Aleshores,*

$$(i) \quad N_{\mathcal{O}} = M \sqrt{\frac{\det_1(n_{\mathcal{O},4})}{\det_1(n_{\mathcal{O}(D,M),4})}}$$

(ii) *Si H és una àlgebra indefinida, aleshores tenim que $\frac{\det_2(n_{\mathcal{O},4})}{N_{\mathcal{O}}^2} = D_H^2$; és a dir, el quocient és un invariant de l'àlgebra i no depèn de l'ordre d'Eichler \mathcal{O} .*

DEMOSTRACIÓ: Siguí Q la matriu de canvi de la base fixada a l'ordre \mathcal{O} a la base fixada a l'ordre $\mathcal{O}(D, M)$. D'una banda, per 1.2.28 tenim que $N/M = [\mathcal{O}(D, M) : \mathcal{O}] = \det Q$. D'altra banda, aplicant 4.4.7 tenim que $\det_1(n_{\mathcal{O},4}) = (\det Q)^2 \det_1(n_{\mathcal{O}(D,M),4})$. Per tant, si aïllem $\det Q$ de les dues expressions, deduïm la igualtat de (i).

Per a veure (ii), prenem $M = 1$ a la igualtat de (i), la qual es transforma en

$$\det_1(n_{\mathcal{O}(D,1),4}) = \frac{\det_1(n_{\mathcal{O},4})}{N_{\mathcal{O}}^2}.$$

Com que H és una \mathbb{Q} -àlgebra indefinida, tots els ordres maximals són conjugats i les seves formes nòrmiques, equivalents; per tant, $\det_1(n_{\mathcal{O}(D,1),4})$ no depèn de l'ordre maximal considerat i és un invariant de l'àlgebra H .

Utilitzant les propietats de la forma nòrmica podem calcular aquest invariant. Per 6.1.4, tenim que $\det_1(n_{\mathcal{O}(D,1),4}) = (\det P)^2 a^2 b^2$, on P és la matriu que expressa la base fixada a l'ordre $\mathcal{O}(D, 1)$ en funció de la base de l'àlgebra de quaternions H . Ara bé, si apliquem 1.2.6, tenim que $\det_1(n_{\mathcal{O}(D,1),4}) = \left(\frac{D_{\mathcal{O}(D,1)}}{4}\right)^2$.

Com que $\mathcal{O}(D, 1)$ és un ordre maximal, tenim que $\det_1(n_{\mathcal{O}(D,1),4}) = \left(\frac{D_H}{4}\right)^2$, que és equivalent a $\det_2(n_{\mathcal{O}(D,1),4}) = D_H^2$. Així,

$$\frac{\det_2(n_{\mathcal{O},4})}{N_{\mathcal{O}}^2} = D_H^2. \quad \square$$

Podem utilitzar els resultats anteriors per a obtenir el resultat següent, que estén la proposició 4.4.6, en el cas d'ordres d'Eichler de \mathbb{Q} -àlgebres indefinides.

6.1.23 Teorema. *Siguin \mathcal{O} i \mathcal{O}' dos ordres d'Eichler d'una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions H .*

- (i) *Si $n_{\mathcal{O},4} \stackrel{\mathbb{Z}}{\sim} n_{\mathcal{O}',4}$, aleshores, per a tot primer p , \mathcal{O}_p i \mathcal{O}'_p són \mathbb{Z}_p -ordres conjugats.*
- (ii) *Si H és indefinida, aleshores $n_{\mathcal{O},4} \stackrel{\mathbb{Z}}{\sim} n_{\mathcal{O}',4}$ si, i només si, \mathcal{O} i \mathcal{O}' són \mathbb{Z} -ordres conjugats.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que tenim l'equivalència de formes $n_{\mathcal{O},4} \stackrel{\mathbb{Z}}{\sim} n_{\mathcal{O}',4}$. Denotem per P i P' les matrius de canvi de la base dels ordres \mathcal{O} i \mathcal{O}' , respectivament, a la base de l'àlgebra. Aleshores, les dues formes tenen el mateix determinant i $\det_1(n_{\mathcal{O},4})(ab \det P)^2 = (ab \det P')^2 = \det_1(n_{\mathcal{O}',4})$, per 6.1.4. Per tant, $\det P = \det P'$. Ara bé, si apliquem 1.2.6, tenim també la igualtat de discriminants $D_{\mathcal{O}} = D_{\mathcal{O}'}$ i, per 1.2.29, la igualtat de nivells. Notem que per a veure que els ordres \mathcal{O} i \mathcal{O}' tenen el mateix nivell, a partir del fet que les seves formes nòrmiques quaternàries són equivalents, també podríem aplicar 6.1.22.

Per a una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions podem assegurar que dos ordres d'Eichler del mateix nivell són \mathbb{Z}_p -ordres conjugats.

Si l'àlgebra és indefinida, tenim directament que els \mathbb{Z} -ordres d'Eichler d'un mateix nivell són conjugats. Si dos ordres són conjugats, ja tenim que les seves formes nòrmiques són equivalents, per 6.1.8. \square

6.2 Formes traça d'ordres quaterniònics

A partir de la forma quadràtica provinent de la traça associada a l'àlgebra de quaternions, obtenim les formes quadràtiques traça associades als ordres quaterniònics.

Siguin H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions i $\mathcal{O} \subset H$ un ordre. Fixem una \mathbb{Z} -base normalitzada $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de l'ordre. Considerem la forma quadràtica sobre H determinada per la forma bilineal $B'(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\alpha\beta)$, que hem anomenat forma traça de H , cf. secció 5.2.

6.2.1 Definició. La forma quadràtica traça quaternària associada a un ordre $\mathcal{O} \subseteq H$ és la forma quadràtica que s'obté a partir de la forma traça de H , expressada en la base normalitzada fixada de \mathcal{O} . La denotarem per $t_{\mathcal{O},4}$.

Com en el cas de la forma nòrmica, aquesta forma depèn de la base de l'ordre escollida, però n'és independent si la considerem llevat \mathbb{Z} -equivalència (cf 4.4.3).

6.2.2 Lema. *La forma quadràtica $t_{\mathcal{O},4}$ té coeficients a l'anell $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\alpha \in \mathcal{O}$. Tenim que $\alpha^2 \in \mathcal{O}$, per ser anell. Per tant, és un element enter i $\text{tr}(\alpha^2) \in \mathbb{Z}$. \square

Si tenim ordres conjugats, no podem assegurar que les formes traça quaternàries obtingudes siguin \mathbb{Z} -equivalents, ja que la forma traça no és multiplicativa. Però sí que seran vàlids els altres resultats que no necessitaven la multiplicativitat, com per exemple 4.4.4 i les seves conseqüències.

6.2.3 Corollari. *Siguin H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions i $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre. Aleshores,*

- (i) *H és una àlgebra definida si, i només si, $t_{\mathcal{O},4}$ és una forma indefinida de signatura $(1,3)$.*
- (ii) *H és una àlgebra indefinida si, i només si, $t_{\mathcal{O},4}$ és una forma indefinida de signatura $(3,1)$ o bé $(2,2)$.*
- (iii) *$-\det_1(t_{\mathcal{O},4})$ és un quadrat.*

DEMOSTRACIÓ: Els dos primers apartats corresponen al corollari 4.4.5 més 5.2.5 (ii).

Per a veure (iii), utilitzem el resultat 4.4.4, que ens diu que els determinants de $t_{\mathcal{O},4}$ i $t_{H,4}$ difereixen en un quadrat, i $\det_1(t_{H,4}) = -a^2b^2$, per 5.2.5(i). \square

La relació entre els invariants de l'ordre i els invariants d'aquesta forma és directa, ja que el discriminant de l'ordre es defineix justament en funció del determinant de la forma traça. Més concretament, aplicant 1.2.5, tenim el resultat explícit següent.

6.2.4 Lema. *Siguin H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions i \mathcal{O} un ordre de H . Aleshores, $\det_1(t_{\mathcal{O},4}) = -\frac{D_{\mathcal{O}}^2}{2^4}$ i $\det_2(t_{\mathcal{O},4}) = -D_{\mathcal{O}}^2$. Equivalentment, $D_{\mathcal{O}} = 2^2 d_1^+(t_{\mathcal{O},4})$. \square*

En particular, el determinant de la forma quadràtica traça caracteritza els ordres maximals i els ordres d'Eichler de nivell N lliure de quadrats, per 1.2.25 i 1.2.29. Recordem que N és sempre coprimer amb el discriminant de l'àlgebra.

6.2.5 Corollari. *Sigui \mathcal{O} un ordre i $t_{\mathcal{O},4}$ la seva forma traça. Sigui N un enter, $N \geq 1$, lliure de quadrats tal que $\text{mcd}(N, D_H) = 1$. Aleshores,*

- (i) \mathcal{O} és un ordre maximal si, i només si, $d_1^+(t_{\mathcal{O},4}) = -D_H/4$; si, i només si, $\det_2(t_{\mathcal{O},4}) = -D_H^2$.
- (ii) \mathcal{O} és un ordre d'Eichler de nivell N si, i només si, se satisfà $d_1^+(t_{\mathcal{O},4}) = -D_H N/4$; si, i només si, se satisfà $\det_2(t_{\mathcal{O},4}) = -D_H^2 N^2$. \square

A posteriori, doncs, obtenim que, en aquests casos, els ordres d'Eichler conjugats ens proporcionen formes traça amb el mateix determinant.

En la proposició següent donem explícitament la forma traça associada a les famílies d'ordres d'Eichler presentades en el capítol 1. En la secció 6.4, donem una taula de formes quadràtiques traça i les seves constants associades als ordres d'Eichler, per a algunes àlgebres poc ramificades de tipus A i B, fins al nivell indicat.

6.2.6 Proposició. *Considerem $\mathcal{O}_M(1, N)$, $\mathcal{O}_A(2p, N)$ i $\mathcal{O}_B(pq, N)$, els ordres d'Eichler de nivell N de les àlgebres $\left(\frac{1, -1}{\mathbb{Q}}\right)$, $H_A(p)$ i $H_B(p, q)$, respectivament, donats a 1.2.35.*

- (i) $t_{\mathcal{O}_M(1, N), 4} = X^2 + XT + NYZ + T^2/2$.
- (ii) $t_{\mathcal{O}_A(2p, N), 4} = X^2 + XT + pY^2 + pYT - N^2 Z^2 - NZT + pT^2/2$.
- (iii) $t_{\mathcal{O}_B(pq, N), 4} = X^2 + XZ + pN^2 Y^2 + pNYT + \frac{1+q}{4} Z^2 + \frac{p(1-q)}{4} T^2$.

6.3 Formes binàries associades a ordres quaterniònics

6.3.1 Definició. Siguin H una àlgebra de quaternions indefinida i Φ una representació matricial fixada de l'àlgebra de quaternions en $M(2, \mathbb{R})$. Per a cada element $\omega \in H$, la forma quadràtica binària associada és la forma binària associada a l'element $\Phi(\omega)$, segons 2.2.7. La denotem per $f_{\Phi(\omega)}$. \square

6.3.2 Lema. *Siguin $\omega, \omega' \in H$ tals que $\omega' - \omega \in \mathbb{Q}$. Aleshores, $f_{\Phi(\omega')} = f_{\Phi(\omega)}$.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem $\omega' = \omega + k$, per a cert $k \in \mathbb{Q}$. Com que Φ és un morfisme, tenim que $\Phi(\omega') = \Phi(\omega) + k \text{Id}$. Ara, només cal aplicar 2.2.8. \square

Així, és clar que l'assignació de formes quadràtiques binàries als elements d'una àlgebra de quaternions no és pas bijectiva. El lema anterior mostra l'obstrucció i convida a considerar només les formes binàries associades a quaternions purs. En la proposició 6.3.5 provarem que, en efecte, aleshores aconseguim la bijecció.

Per tal de facilitar l'expressió dels resultats fixem la immersió Φ . Per a una àlgebra de quaternions indefinida $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$, suposem que $a > 0$. A partir d'ara, sigui $\Phi : H \hookrightarrow M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a})) \subseteq M(2, \mathbb{R})$, donada a 1.1.25. Així, a l'àlgebra de quaternions li fem correspondre un conjunt de formes quadràtiques binàries de coeficients reals; més concretament, coeficients al cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$.

6.3.3 Notació. Denotem per $\mathcal{H}(a, b)$ el conjunt de formes quadràtiques binàries associades als elements de H . Pel lema anterior, coincideix amb el conjunt de formes binàries associades als quaternions purs $\omega \in H_0$; és a dir,

$$\mathcal{H}(a, b) = \{f_{\Phi(\omega)} : \omega \in H_0\}.$$

Sigui $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic. Denotem per $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ el subconjunt de $\mathcal{H}(a, b)$ que conté les formes quadràtiques binàries associades als elements de \mathcal{O} . Pel lema anterior, coincideix amb el conjunt de formes binàries associades als elements $\omega \in \mathcal{O} \cap H_0$; és a dir,

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) = \{f_{\Phi(\omega)} : \omega \in \mathcal{O} \cap H_0\}. \square$$

6.3.4 Remarca. Si $H = M(2, \mathbb{Q})$, prenem $\Phi = \text{id}$. Així, per a un ordre $\mathcal{O} \subseteq H$, podem considerar igualment el conjunt de formes quadràtiques binàries associades a l'ordre \mathcal{O} si posem

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) := \{f_\gamma : \gamma \in \mathcal{O}, \text{tr}(\gamma) = 0\}. \square$$

6.3.5 Proposició. *Sigui $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions indefinida.*

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \mathcal{H}(a, b) &= \{(b(\lambda_2 + \lambda_3\sqrt{a}), \lambda_1\sqrt{a}, -\lambda_2 + \lambda_3\sqrt{a}) : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Q}\} \\ &= \{(b\beta', \alpha, -\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{a}), \text{tr}(\alpha) = 0\}. \end{aligned}$$

(ii) L'aplicació $f_\Phi : H_0 \rightarrow \mathcal{H}(a, b)$, donada per $f_\Phi(\omega) := f_{\Phi(\omega)}$, és bijectiva.

DEMOSTRACIÓ: A un quaternió pur $\omega = yi + zj + tij \in H_0$, li correspon

$$\begin{aligned} \Phi(\omega) &= \begin{pmatrix} y\sqrt{a} & z + t\sqrt{a} \\ b(z - t\sqrt{a}) & -y\sqrt{a} \end{pmatrix}, \\ A(f_{\Phi(\omega)}) &= \begin{pmatrix} b(z - t\sqrt{a}) & -y\sqrt{a} \\ -y\sqrt{a} & -z - t\sqrt{a} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Així, tenim la forma quadràtica binària

$$f_{\Phi(\omega)} = (b(z - t\sqrt{a}), -2y\sqrt{a}, -z - t\sqrt{a}).$$

Per a $y, z, t \in \mathbb{Q}$, posant $\lambda_1 = -2y$, $\lambda_2 = z$ i $\lambda_3 = -t$, obtenim la primera expressió de $\mathcal{H}(a, b)$, donada a (i). Si posem $\beta = z + t\sqrt{a}$ i $\alpha = -2y\sqrt{a}$, obtenim la segona expressió.

Donada $f \in \mathcal{H}(a, b)$, $f = (b(\lambda_2 + \lambda_3\sqrt{a}), \lambda_1\sqrt{a}, -\lambda_2 + \lambda_3\sqrt{a})$, és clar que si posem $y = -\frac{\lambda_1}{2}$, $z = \lambda_2$ i $t = -\lambda_3$ determinem un únic element $\omega = -\frac{\lambda_1}{2}i + \lambda_2j + \lambda_3ij \in H_0$ tal que $f_{\Phi(\omega)} = f$. \square

6.3.6 Proposició. *Sigui \mathcal{O} un ordre d'una àlgebra de quaternions indefinida $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$. Recordem que $m_{\mathcal{O}}$ denota el denominador de l'ordre \mathcal{O} .*

(i) *Les formes quadràtiques binàries de $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ tenen coeficients a l'anell $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m_{\mathcal{O}}}, \sqrt{a}\right]$.*

(ii) $\mathcal{H}(\mathcal{O}) \subseteq \left\{ \frac{1}{m_{\mathcal{O}}}(b(\lambda_2 + \lambda_3\sqrt{a}), -2\lambda_1\sqrt{a}, -\lambda_2 + \lambda_3\sqrt{a}) : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z} \right\}$
 $= \left\{ \frac{1}{m_{\mathcal{O}}}(b\beta', 2\alpha, -\beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{a}], \text{tr}(\alpha) = 0 \right\}$.

(iii) *La bijecció f_Φ , restringida a \mathcal{O} , dona una bijecció entre els conjunts $\mathcal{O} \cap H_0$ i $\mathcal{H}(\mathcal{O})$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\omega \in \mathcal{O} \cap H_0$. És clar que, per la definició de $m_{\mathcal{O}}$, s'escriu $\omega = yi + zj + tij$, per a certs $y, z, t \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{m_{\mathcal{O}}}\right]$. Aleshores, si apliquem la proposició anterior obtenim els resultats de (i) i (ii).

La bijecció de (iii) és clara per la definició de $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ i el fet que f_Φ ja és una bijecció. \square

El conjunt de formes quadràtiques binàries $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ no depèn de la base fixada a l'ordre \mathcal{O} . Ara bé, si fixem una base normalitzada \mathcal{B} de l'ordre, podem obtenir una expressió genèrica de les formes quadràtiques binàries del conjunt $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, en funció de les coordenades dels elements. Així, per a un element $\omega = (x, y, z, t)_{\mathcal{B}}$, la forma $f_{\Phi(\omega)}$ s'expressa en funció de x, y, z, t . Quan ens restringim a un element $\omega \in \mathcal{O} \cap H_0$, els coeficients de la forma binària són funció només de tres paràmetres. Més concretament, si \mathcal{O} és un ordre parell, la forma binària s'expressarà directament en funció de y, z, t , ja que $x = 0$; si \mathcal{O} és un ordre senar, substituïm la relació $t = -2x$ i obtenim també una expressió en funció de tres paràmetres. Denotem per $f_{\mathcal{O}}$ la forma binària genèrica, en funció de tres paràmetres, tal que $f_{\mathcal{O}}(\omega) = f_{\Phi(\omega)}$.

Amb l'expressió de la forma binària associada a un element genèric de H_0 (respectivament, de $\mathcal{O} \cap H_0$) podem recuperar la forma nòrmica ternària associada a l'àlgebra H (respectivament a l'ordre \mathcal{O}), com mostra la proposició següent.

6.3.7 Proposició. *Siguin $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions indefinida i $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaternionic, amb una base normalitzada fixada. Aleshores,*

(i) *Per a tot $\omega \in H_0$, $n_{H,3}(\omega) = \det_1(f_{\Phi(\omega)})$.*

(ii) *Per a tot $\omega \in \mathcal{O} \cap H_0$, respecte de la base normalitzada fixada de \mathcal{O} , tenim que $n_{\mathcal{O},3}(\omega) = \det_1(f_{\Phi(\omega)})$.*

DEMOSTRACIÓ: Per a $\omega \in H_0$ tenim que

$$\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ b\beta' & \alpha' \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{a}), \quad \text{tr}(\omega) = \alpha + \alpha' = 0.$$

Notem que $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = -\alpha = \alpha'$. Per tant, $f_{\Phi(\omega)} = (b\beta', -2\alpha, -\beta)$. Ara és clar que $\det_1(f_{\Phi(\omega)}) = -b\beta\beta' - \alpha^2 = -b\beta\beta' + \alpha\alpha' = \det(\Phi(\omega)) = n(\omega) = n_{H,3}(\omega)$.

Sigui $\omega \in \mathcal{O} \cap H_0$. Com que $\omega \in \mathcal{O}$, si expressem ω respecte de la base normalitzada fixada a \mathcal{O} , tenim que $n_{\mathcal{O},3}(\omega) = n(\omega)$. Ara bé, com que $\omega \in H_0$, per l'apartat anterior ja tenim $n(\omega) = \det_1(f_{\Phi(\omega)})$, la qual cosa demostra (ii). \square

6.3.8 Corol·lari. *Siguin $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions indefinida i $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaternionic. Sigui $\delta \in \mathbb{Z}$. La bijecció f_{Φ} es restringeix*

a les bijeccions següents entre conjunts de quaternions i conjunts de formes quadràtiques binàries:

$$(i) \{\omega \in H_0 : n(\omega) = \delta\} \longleftrightarrow \{f \in \mathcal{H}(a, b) : \det_1(f) = \delta\}.$$

$$(ii) \{\omega \in \mathcal{O} \cap H_0 : n(\omega) = \delta\} \longleftrightarrow \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{O}) : \det_1(f) = \delta\}. \quad \square$$

6.3.9 Lema. *Sigui \mathcal{O} un ordre quaterniònic d'una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions H indefnida. Sigui $\mathcal{O}(D, 1)$ un ordre maximal de H fixat. Aleshores, existeix $\sigma \in H^*$ tal que $\mathcal{H}(\sigma^{-1}\mathcal{O}\sigma) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{O}(D, 1))$. \square*

6.3.10 Proposició. *Sigui $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic. Conjugant, si cal, l'ordre \mathcal{O} , tenim els resultats següents.*

$$(i) \text{ Si } H = \left(\frac{1, -1}{\mathbb{Q}}\right) \text{ o bé } H = M(2, \mathbb{Q}), \text{ aleshores}$$

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{O}_0(1, 1)) = \mathcal{H}(\mathcal{O}_M(1, 1)) = \{(a, 2b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(ii) \text{ Si } H = H_A(p), \text{ aleshores}$$

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{O}_A(2p, 1)) = \{(a + b\sqrt{p}, 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

$$(iii) \text{ Si } H = H_B(p, q), \text{ aleshores } \mathcal{H}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{O}_B(pq, 1)), \text{ on } \mathcal{H}(\mathcal{O}_B(pq, 1)) \text{ és igual a}$$

$$\left\{ \frac{1}{2}(q(a + b\sqrt{p}), 2c\sqrt{p}, -a + b\sqrt{p}) : a, b, c \in \mathbb{Z}, 2|a, 2|b - c \right\}.$$

DEMOSTRACIÓ: Pel lema anterior, en cada cas només cal calcular el conjunt de formes quadràtiques binàries corresponent a un ordre maximal.

En l'àlgebra $M(2, \mathbb{Q})$, considerem l'ordre maximal $\mathcal{O}_0(1, 1) := M(2, \mathbb{Z})$. Si $H = \left(\frac{1, -1}{\mathbb{Q}}\right)$, considerem l'ordre maximal $\mathcal{O}_M(1, 1) = \mathbb{Z}[1, \frac{j+ij}{2}, \frac{-j+ij}{2}, \frac{1-i}{2}]$. Notem que $\Phi(\mathcal{O}_M(1, 1) \cap H_0) = \{\gamma \in \mathcal{O}_0(1, 1) : \text{tr}(\gamma) = 0\}$. Per tant, $\mathcal{H}(\mathcal{O}_0(1, 1)) = \mathcal{H}(\mathcal{O}_M(1, 1))$.

Calculem $\mathcal{H}(\mathcal{O}_M(1, 1))$. Sigui $\omega \in \mathcal{O}_M(1, 1) \cap H_0$, $\omega = x + y\frac{j+ij}{2} + z\frac{-j+ij}{2} + t\frac{1-i}{2}$, amb $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ i $t = -2x$. Aleshores, tenim que

$$\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}, \quad A(f_{\Phi(\omega)}) = \begin{pmatrix} z & -x \\ -x & -y \end{pmatrix}.$$

Per tant, $\mathcal{H}(\mathcal{O}_M(1, 1)) = \{(z, -2x, -y) : x, y, z \in \mathbb{Z}\} = \{(a, 2b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$.

Per a provar (ii), considerem $H_A(p) = \left(\frac{p, -1}{\mathbb{Q}}\right)$, on $p \equiv 3 \pmod{4}$, i l'ordre maximal $\mathcal{O}_A(2p, 1) = \mathbb{Z}[1, i, j, \frac{1+i+j+ij}{2}]$. Sigui $\omega \in \mathcal{O}_A(2p, 1) \cap H_0$, $\omega = x + yi + zj + t\frac{1+i+j+ij}{2}$, amb $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ i $t = -2x$. Tenim que

$$\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} (y-x)\sqrt{p} & (z-x) - x\sqrt{p} \\ -(z-x) - x\sqrt{p} & -(y-x)\sqrt{p} \end{pmatrix}.$$

Per tant, $f_{\Phi(\omega)} = (-(z-x) - x\sqrt{p}, 2(x-y)\sqrt{p}, -(z-x) + x\sqrt{p})$. Així,

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}_A(2p, 1)) = \{(a + b\sqrt{p}, 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) : a, b, c \in \mathbb{Z}\}.$$

De manera anàloga es prova el resultat corresponent a l'àlgebra $H_B(p, q)$. En aquest cas, prenem l'ordre maximal $\mathcal{O}_B(pq, 1) = \mathbb{Z}[1, i, \frac{1+j}{2}, \frac{i+ij}{2}]$. Per a $\omega = x + yi + z(1+j)/2 + t(i+ij)/2 \in \mathcal{O}_B(pq, 1) \cap H_0$, tenim que $z = -2x$. Per tant, se satisfà

$$f_{\Phi(\omega)} = 1/2(q(-2x - t\sqrt{p}), -2(2y + t)\sqrt{p}, 2x - t\sqrt{p}).$$

Prenem $a = -2x$, $b = -t$, $c = -(2y + t)$ i observem que $a, b, c \in \mathbb{Z}$ satisfan $2|a$ i $2|b - c$. Així, obtenim l'expressió de $\mathcal{H}(\mathcal{O}_B(pq, 1))$ donada a l'enunciat. \square

6.3.11 Exemple. Considerem l'ordre $\mathcal{O}' = \mathbb{Z}[1, 2i, 2j, i+j+ij]$ en l'àlgebra $H_A(p) = \left(\frac{p, -1}{\mathbb{Q}}\right)$. Tenim que

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}') = \{(-(2z + t) + t\sqrt{p}, -2(2y + t)\sqrt{p}, -(2z + t) - t\sqrt{p}) : x, y, z \in \mathbb{Z}\}.$$

Notem que $\mathcal{O}' \subseteq \mathcal{O}(1, 1)$ i, efectivament, se satisfà $\mathcal{H}(\mathcal{O}') \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{O}(1, 1))$, tal com hem calculat en la proposició anterior.

6.4 Algoritmes i taules

En relació amb els conceptes i resultats d'aquest capítol, hem programat algunes instruccions per a trobar les formes quadràtiques associades als ordres quaterniònics. Recordem que un ordre està determinat per una \mathbb{Z} -base

qualsevol, donada per una llista de quatre quaternions. L'argument opcional `true` comprova primer si l'argument d'entrada efectivament defineix un ordre.

Les formes nòrmiques associades als ordres es calculen mitjançant les instruccions `nfOr4` i `nfOr3`. Cal tenir en compte que la base de l'ordre donada com a argument ha de ser normalitzada. En cas contrari, la mateixa instrucció crida l'algoritme corresponent per a trobar-ne una de normalitzada. Tenint en compte els elements de traça diferent de 0, hem programat també la instrucció `quadOr`, referent a la quàdrica associada a un ordre. La instrucció `tfOr4` dóna la forma traça quaternària associada a un ordre. Aquesta instrucció, com les que ens donen les formes nòrmiques, admet paràmetres. Això ens ha permès reprogramar el càlcul del discriminant d'un ordre en la instrucció `DiscOrg`, utilitzant les propietats de la secció 6.2, per tal que funcioni amb paràmetres. Per a trobar les constants i les formes associades, cal utilitzar les instruccions generals referents a formes quadràtiques, comentades en el capítol 4.

Per al càlcul de la forma binària associada a un element de l'àlgebra de quaternions i de la forma binària corresponent a un element genèric de l'ordre, tenim les instruccions `bfH` i `bfOr`, respectivament.

Les taules següents mostren les formes nòrmiques i les formes traça associades a ordres d'Eichler de les àlgebres de quaternions $H_A(3)$, $H_B(2,5)$, $H_A(7)$ i $H_B(3,5)$. A partir de les taules 6.1-6.4, observem que la forma nòrmica $n_{\mathcal{O},4}$ és K_1 -forma i, per tant, K_2 -forma, per a tots els nivells N calculats. De la mateixa manera, la forma nòrmica ternària $n_{\mathcal{O},3}$ també és K_1 -forma. Per a aquests casos, hem comprovat computacionalment que això és sempre així per a $N \leq 1000$.

Taula 6.1 Representants de les classes de \mathbb{Z} -equivalència de les formes nòrmiques quaternàries i ternàries associades als ordres d'Eichler $\mathcal{O}(6, N)$, per a $N \leq 20$.

N	$n_{\mathcal{O}(6,N),4}$		
	$\det_1(n_{\mathcal{O}(6,N),4})$	$d_1(n_{\mathcal{O}(6,N),4})$	$N(n_{\mathcal{O}(6,N),4})$
	$n_{\mathcal{O}(6,N),3}$		
	$\det_1(n_{\mathcal{O}(6,N),3})$	$d_1(n_{\mathcal{O}(6,N),3})$	$N(n_{\mathcal{O}(6,N),3})$
1	$X^2 - 3Y^2 + Z^2 - T^2 + XT - 3YT + ZT$		
	9/4	-3/2	6
	$-5X^2 + 6XY - 2XZ - 3Y^2 + Z^2$		
	9	-3	12
5	$X^2 + XT - 75Y^2 - 60YZ - 45YT - 11Z^2 - 17ZT - 7T^2$		
	225/4	-15/2	30
	$-29X^2 + 90XY + 34XZ - 75Y^2 - 60YZ - 11Z^2$		
	225	-15	60
7	$X^2 + XT - 147Y^2 - 42YZ - 105YT - 2Z^2 - 14ZT - 19T^2$		
	441/4	-21/2	42
	$-77X^2 + 210XY + 28XZ - 147Y^2 - 42YZ - 2Z^2$		
	441	-21	84
11	$X^2 + XT - 3Y^2 - 3YT + 121Z^2 + 55ZT + 5T^2$		
	1089/4	-33/2	66
	$19X^2 + 6XY - 110XZ - 3Y^2 + 121Z^2$		
	1089	-33	132
13	$X^2 + XT - 3Y^2 - 3YT + 169Z^2 + 221ZT + 71T^2$		
	1521/4	-39/2	78
	$283X^2 + 6XY - 442XZ - 3Y^2 + 169Z^2$		
	1521	-39	156
17	$X^2 + XT - 867Y^2 - 102YZ - 357YT - 2Z^2 - 20ZT - 37T^2$		
	2601/4	-51/2	102
	$-149X^2 + 714XY + 40XZ - 867Y^2 - 102YZ - 2Z^2$		
	2601	-51	204
19	$X^2 + XT - 1083Y^2 - 1596YZ - 1539YT - 587Z^2 - 1133ZT - 547T^2$		
	3249/4	-57/2	114
	$-2189X^2 + 3078XY + 2266XZ - 1083Y^2 - 1596YZ - 587Z^2$		
	3249	-57	228

Taula 6.2 Representants de les classes de \mathbb{Z} -equivalència de les formes nòrmiques quaternàries i ternàries associades als ordres d'Eichler $\mathcal{O}(10, N)$, per a $N \leq 17$.

N	$n_{\mathcal{O}(10,N),4}$		
	$\det_1(n_{\mathcal{O}(10,N),4})$	$d_1(n_{\mathcal{O}(10,N),4})$	$N(n_{\mathcal{O}(10,N),4})$
	$n_{\mathcal{O}(10,N),3}$		
	$\det_1(n_{\mathcal{O}(10,N),3})$	$d_1(n_{\mathcal{O}(10,N),3})$	$N(n_{\mathcal{O}(10,N),3})$
1	$X^2 + XT - 2Y^2 - 2YZ + 2Z^2 - T^2$		
	25/4	-5/2	10
	$-5X^2 - 2Y^2 - 2YZ + 2Z^2$		
	25	-5	20
3	$X^2 + XT - 18Y^2 - 6YZ - 24YT + 2Z^2 - 4ZT - 9T^2$		
	225/4	-15/2	30
	$-37X^2 + 48XY + 8XZ - 18Y^2 - 6YZ + 2Z^2$		
	225	-15	60
7	$X^2 + XT - 2Y^2 + 2YZ - 2YT - 18Z^2 - 34ZT - 9T^2$		
	1225/4	-35/2	70
	$-37X^2 + 4XY + 68XZ - 2Y^2 + 2YZ - 18Z^2$		
	1225	-35	140
9	$X^2 + XT - 162Y^2 - 18YZ - 72YT + 2Z^2 - 4ZT - 9T^2$		
	2025/4	-45/2	90
	$-37X^2 + 144XY + 8XZ - 162Y^2 - 18YZ + 2Z^2$		
	2025	-45	180
11	$X^2 + XT - 242Y^2 - 22YZ - 308YT + 2Z^2 - 14ZT - 99T^2$		
	3025/4	-55/2	110
	$-397X^2 + 616XY + 28XZ - 242Y^2 - 22YZ + 2Z^2$		
	3025	-55	220
13	$X^2 + XT - 338Y^2 - 234YZ - 468YT - 38Z^2 - 162ZT - 163T^2$		
	4225/4	-65/2	130
	$-653X^2 + 936XY + 324XZ - 338Y^2 - 234YZ - 38Z^2$		
	4225	-65	260
17	$X^2 + XT - 2Y^2 + 2YZ - 2YT - 43Z^2 - 169ZT - 149T^2$		
	7225/4	-85/2	170
	$-597X^2 + 4XY + 338XZ - 2Y^2 + 2YZ - 43Z^2$		
	7225	-85	340

Taula 6.3 Representants de les classes de \mathbb{Z} -equivalència de les formes cònormiques quaternàries i ternàries associades als ordres d'Eichler $\mathcal{O}(14, N)$, per a $N \leq 15$.

N	$n_{\mathcal{O}(14,N),4}$		
	$\det_1(n_{\mathcal{O}(14,N),4})$	$d_1(n_{\mathcal{O}(14,N),4})$	$N(n_{\mathcal{O}(14,N),4})$
	$n_{\mathcal{O}(14,N),3}$		
	$\det_1(n_{\mathcal{O}(14,N),3})$	$d_1(n_{\mathcal{O}(14,N),3})$	$N(n_{\mathcal{O}(14,N),3})$
1	$X^2 + XT - 7Y^2 - 7YT + Z^2 + ZT - 3T^2$		
	49/4	-7/2	14
	$-13X^2 + 14XY - 2XZ - 7Y^2 + Z^2$		
	49	-7	28
3	$X^2 + XT - 7Y^2 - 7YT + 9Z^2 + 15ZT + 3T^2$		
	441/4	-21/2	42
	$11X^2 + 14XY - 30XZ - 7Y^2 + 9Z^2$		
	441	-21	84
5	$X^2 + XT - 175Y^2 - 70YZ - 245YT - 6Z^2 - 48ZT - 87T^2$		
	1225/4	-35/2	70
	$-349X^2 + 490XY + 96XZ - 175Y^2 - 70YZ - 6Z^2$		
	1225	-35	140
9	$X^2 + XT - 63Y^2 - 84YZ - 21YT - 19Z^2 - 11ZT - 3T^2$		
	3969/4	-63/2	126
	$-13X^2 + 42XY + 22XZ - 63Y^2 - 84YZ - 19Z^2$		
	3969	-63	252
11	$X^2 + XT - 847Y^2 - 924YZ - 693YT - 251Z^2 - 377ZT - 143T^2$		
	5929/4	-77/2	154
	$-573X^2 + 1386XY + 754XZ - 847Y^2 - 924YZ - 251Z^2$		
	5929	-77	308
13	$X^2 + XT - 1183Y^2 - 364YZ - 273YT - 27Z^2 - 41ZT - 17T^2$		
	8281/4	-91/2	182
	$-69X^2 + 546XY + 82XZ - 1183Y^2 - 364YZ - 27Z^2$		
	8281	-91	364
15	$X^2 + XT - 175Y^2 - 210YZ - 35YT - 54Z^2 - 6ZT + 3T^2$		
	11025/4	-105/2	210
	$11X^2 + 70XY + 12XZ - 175Y^2 - 210YZ - 54Z^2$		
	11025	-105	420

Taula 6.4 Representants de les classes de \mathbb{Z} -equivalència de les formes cònormiques quaternàries i ternàries associades als ordres d'Eichler $\mathcal{O}(15, N)$, per a $N \leq 20$.

N	$n_{\mathcal{O}(15,N),4}$		
	$\det_1(n_{\mathcal{O}(15,N),4})$	$d_1(n_{\mathcal{O}(15,N),4})$	$N(n_{\mathcal{O}(15,N),4})$
	$n_{\mathcal{O}(15,N),3}$		
	$\det_1(n_{\mathcal{O}(15,N),3})$	$d_1(n_{\mathcal{O}(15,N),3})$	$N(n_{\mathcal{O}(15,N),3})$
1	$X^2 + XT - 3Y^2 - 3YZ + 3Z^2 - T^2$		
	225/16	-15/4	15
	$-5X^2 - 3Y^2 - 3YZ + 3Z^2$		
	225/4	-15/2	60
2	$X^2 + XT - 3Y^2 - 3YT - 5Z^2 - 5ZT + 2T^2$		
	225/4	-15/2	30
	$7X^2 + 6XY + 10XZ - 3Y^2 - 5Z^2$		
	225	-15	60
4	$X^2 + XT - 48Y^2 - 12YZ - 24YT + 3Z^2 - 3ZT - 4T^2$		
	225	-15	60
	$-17X^2 + 48XY + 6XZ - 48Y^2 - 12YZ + 3Z^2$		
	900	-30	60
7	$X^2 + XT - 147Y^2 - 21YZ - 168YT + 3Z^2 - 12ZT - 49T^2$		
	11025/16	-105/4	105
	$-197X^2 + 336XY + 24XZ - 147Y^2 - 21YZ + 3Z^2$		
	11025/4	-105/2	420
8	$X^2 + XT - 48Y^2 - 72YZ - 36YT - 32Z^2 - 32ZT - 4T^2$		
	900	-30	120
	$-17X^2 + 72XY + 64XZ - 48Y^2 - 72YZ - 32Z^2$		
	3600	-60	120
11	$X^2 + XT - 3Y^2 + 3YZ - 3YT - 42Z^2 - 81ZT - 28T^2$		
	27225/16	-165/4	165
	$-113X^2 + 6XY + 162XZ - 3Y^2 + 3YZ - 42Z^2$		
	27225/4	-165/2	660
13	$X^2 + XT - 507Y^2 - 39YZ - 156YT + 3Z^2 - 6ZT - 13T^2$		
	38025/16	-195/4	195
	$-53X^2 + 312XY + 12XZ - 507Y^2 - 39YZ + 3Z^2$		
	38025/4	-195/2	780

Taula 6.5 Forma traça associada als ordres $\mathcal{O}(6, N)$ de la taula 1.4, ordres d'Eichler de nivell $N \leq 100$ de $H_A(3)$.

N	$t_{\mathcal{O}(6,N),4}$
1	$X^2 + XT + 3Y^2 + 3YT - Z^2 - ZT + 3/2T^2$
5	$X^2 + XT + 75Y^2 + 60YZ + 45YT + 11Z^2 + 17ZT + 15/2T^2$
7	$X^2 + XT + 147Y^2 + 42YZ + 105YT + 2Z^2 + 14ZT + 39/2T^2$
11	$X^2 + XT + 3Y^2 + 3YT - 121Z^2 - 55ZT - 9/2T^2$
13	$X^2 + XT + 3Y^2 + 3YT - 169Z^2 - 221ZT - 141/2T^2$
17	$X^2 + XT + 867Y^2 + 102YZ + 357YT + 2Z^2 + 20ZT + 75/2T^2$
19	$X^2 + XT + 1083Y^2 + 1596YZ + 1539YT + 587Z^2 + 1133ZT + 1095/2T^2$
23	$X^2 + XT + 1587Y^2 + 552YZ + 345YT + 47Z^2 + 59ZT + 39/2T^2$
25	$X^2 + XT + 1875Y^2 + 450YZ + 2175YT + 26Z^2 + 260ZT + 1263/2T^2$
29	$X^2 + XT + 2523Y^2 + 4002YZ + 3915YT + 1586Z^2 + 3104ZT + 3039/2T^2$
31	$X^2 + XT + 2883Y^2 + 186YZ + 837YT + 2Z^2 + 26ZT + 123/2T^2$
35	$X^2 + XT + 3675Y^2 + 4200YZ + 315YT + 1199Z^2 + 179ZT + 15/2T^2$
37	$X^2 + XT + 3Y^2 + 3YT - 1369Z^2 - 2183ZT - 1737/2T^2$
41	$X^2 + XT + 5043Y^2 + 8364YZ + 8241YT + 3467Z^2 + 6833ZT + 6735/2T^2$
43	$X^2 + XT + 5547Y^2 + 516YZ + 8643YT + 11Z^2 + 401ZT + 6735/2T^2$
47	$X^2 + XT + 3Y^2 + 3YT - 2209Z^2 - 1645ZT - 609/2T^2$
49	$X^2 + XT + 7203Y^2 + 588YZ + 5145YT + 11Z^2 + 209ZT + 1839/2T^2$
53	$X^2 + XT + 8427Y^2 + 1908YZ + 1113YT + 107Z^2 + 125ZT + 75/2T^2$
55	$X^2 + XT + 9075Y^2 + 12210YZ + 7095YT + 4106Z^2 + 4772ZT + 2775/2T^2$
59	$X^2 + XT + 10443Y^2 + 3540YZ + 12567YT + 299Z^2 + 2129ZT + 7563/2T^2$
61	$X^2 + XT + 11163Y^2 + 14274YZ + 12993YT + 4562Z^2 + 8306ZT + 7563/2T^2$
65	$X^2 + XT + 12675Y^2 + 17550YZ + 13065YT + 6074Z^2 + 9044ZT + 6735/2T^2$
67	$X^2 + XT + 13467Y^2 + 6030YZ + 3417YT + 674Z^2 + 764ZT + 435/2T^2$
71	$X^2 + XT + 15123Y^2 + 426YZ + 2769YT + 2Z^2 + 38ZT + 255/2T^2$
73	$X^2 + XT + 15987Y^2 + 2190YZ + 17301YT + 74Z^2 + 1184ZT + 9363/2T^2$
77	$X^2 + XT + 17787Y^2 + 12012YZ + 7161YT + 2027Z^2 + 2417ZT + 1443/2T^2$
79	$X^2 + XT + 18723Y^2 + 23226YZ + 237YT + 7202Z^2 + 146ZT + 3/2T^2$
83	$X^2 + XT + 20667Y^2 + 17928YZ + 24153YT + 3887Z^2 + 10475ZT + 14115/2T^2$
85	$X^2 + XT + 21675Y^2 + 34170YZ + 41565YT + 13466Z^2 + 32762ZT + 39855/2T^2$
89	$X^2 + XT + 23763Y^2 + 18690YZ + 34443YT + 3674Z^2 + 13544ZT + 24963/2T^2$
91	$X^2 + XT + 24843Y^2 + 25662YZ + 43953YT + 6626Z^2 + 22700ZT + 38883/2T^2$
95	$X^2 + XT + 27075Y^2 + 4560YZ + 2565YT + 191Z^2 + 215ZT + 123/2T^2$
97	$X^2 + XT + 28227Y^2 + 14550YZ + 31137YT + 1874Z^2 + 8024ZT + 17175/2T^2$

Taula 6.6 Forma traça associada als ordres $\mathcal{O}(10, N)$ de la taula 1.5, ordres d'Eichler de nivell $N \leq 85$ de $H_B(2, 5)$.

N	$t_{\mathcal{O}(10, N), 4}$
1	$X^2 + XT + 2Y^2 + 2YZ - 2Z^2 + 3/2T^2$
3	$X^2 + XT + 18Y^2 + 6YZ + 24YT - 2Z^2 + 4ZT + 19/2T^2$
7	$X^2 + XT + 2Y^2 + 14YZ + 10YT - 98Z^2 - 140ZT - 97/2T^2$
9	$X^2 + XT + 162Y^2 + 18YZ + 72YT - 2Z^2 + 4ZT + 19/2T^2$
11	$X^2 + XT + 242Y^2 + 22YZ + 308YT - 2Z^2 + 14ZT + 199/2T^2$
13	$X^2 + XT + 338Y^2 + 234YZ + 468YT + 38Z^2 + 162ZT + 327/2T^2$
17	$X^2 + XT + 2Y^2 + 34YZ + 28YT - 578Z^2 - 952ZT - 781/2T^2$
19	$X^2 + XT + 722Y^2 + 38YZ + 228YT - 2Z^2 + 6ZT + 39/2T^2$
21	$X^2 + XT + 882Y^2 + 462YZ + 1344YT + 58Z^2 + 352ZT + 1027/2T^2$
23	$X^2 + XT + 1058Y^2 + 1426YZ + 368YT + 478Z^2 + 248ZT + 67/2T^2$
27	$X^2 + XT + 1458Y^2 + 54YZ + 1728YT - 2Z^2 + 32ZT + 1027/2T^2$
29	$X^2 + XT + 1682Y^2 + 2262YZ + 116YT + 758Z^2 + 78ZT + 7/2T^2$
31	$X^2 + XT + 2Y^2 + 62YZ + 54YT - 1922Z^2 - 3348ZT - 2913/2T^2$
33	$X^2 + XT + 2178Y^2 + 3498YZ + 2640YT + 1402Z^2 + 2120ZT + 1603/2T^2$
37	$X^2 + XT + 2738Y^2 + 1406YZ + 1480YT + 178Z^2 + 380ZT + 403/2T^2$
39	$X^2 + XT + 3042Y^2 + 3666YZ + 2496YT + 1102Z^2 + 1504ZT + 1027/2T^2$
41	$X^2 + XT + 3362Y^2 + 6478YZ + 1968YT + 3118Z^2 + 1896ZT + 579/2T^2$
43	$X^2 + XT + 3698Y^2 + 6966YZ + 2408YT + 3278Z^2 + 2268ZT + 787/2T^2$
47	$X^2 + XT + 4418Y^2 + 5922YZ + 7520YT + 1982Z^2 + 5040ZT + 6403/2T^2$
49	$X^2 + XT + 2Y^2 + 98YZ + 88YT - 4802Z^2 - 8624ZT - 7741/2T^2$
51	$X^2 + XT + 5202Y^2 + 7854YZ + 204YT + 2962Z^2 + 154ZT + 7/2T^2$
53	$X^2 + XT + 5618Y^2 + 3074YZ + 1060YT + 418Z^2 + 290ZT + 103/2T^2$
57	$X^2 + XT + 6498Y^2 + 2850YZ + 5928YT + 310Z^2 + 1300ZT + 2707/2T^2$
59	$X^2 + XT + 6962Y^2 + 6490YZ + 4012YT + 1510Z^2 + 1870ZT + 1159/2T^2$
61	$X^2 + XT + 7442Y^2 + 8174YZ + 11224YT + 2242Z^2 + 6164ZT + 8467/2T^2$
63	$X^2 + XT + 7938Y^2 + 12726YZ + 4788YT + 5098Z^2 + 3838ZT + 1447/2T^2$
67	$X^2 + XT + 8978Y^2 + 938YZ + 12328YT + 22Z^2 + 644ZT + 8467/2T^2$
69	$X^2 + XT + 9522Y^2 + 4830YZ + 14628YT + 610Z^2 + 3710ZT + 11239/2T^2$
71	$X^2 + XT + 10082Y^2 + 18602YZ + 3124YT + 8578Z^2 + 2882ZT + 487/2T^2$
73	$X^2 + XT + 10658Y^2 + 8322YZ + 584YT + 1622Z^2 + 228ZT + 19/2T^2$
77	$X^2 + XT + 11858Y^2 + 1694YZ + 14476YT + 58Z^2 + 1034ZT + 8839/2T^2$
79	$X^2 + XT + 12482Y^2 + 15642YZ + 4898Z^2 + 3/2T^2$
81	$X^2 + XT + 13122Y^2 + 9882YZ + 23004YT + 1858Z^2 + 8662ZT + 20167/2T^2$
83	$X^2 + XT + 13778Y^2 + 23074YZ + 2324YT + 9658Z^2 + 1946ZT + 199/2T^2$

Taula 6.7 Forma traça associada als ordres $\mathcal{O}(14, N)$ calculats en la taula 1.6, que són ordres d'Eichler de nivell $N \leq 75$ de la \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions $H_A(7)$.

N	$t_{\mathcal{O}(14, N), 4}$
1	$X^2 + XT + 7Y^2 + 7YT - Z^2 - ZT + 7/2T^2$
3	$X^2 + XT + 7Y^2 + 7YT - 9Z^2 - 15ZT - 5/2T^2$
5	$X^2 + XT + 175Y^2 + 70YZ + 245YT + 6Z^2 + 48ZT + 175/2T^2$
9	$X^2 + XT + 63Y^2 + 84YZ + 21YT + 19Z^2 + 11ZT + 7/2T^2$
11	$X^2 + XT + 847Y^2 + 924YZ + 693YT + 251Z^2 + 377ZT + 287/2T^2$
13	$X^2 + XT + 1183Y^2 + 364YZ + 273YT + 27Z^2 + 41ZT + 35/2T^2$
15	$X^2 + XT + 175Y^2 + 210YZ + 35YT + 54Z^2 + 6ZT - 5/2T^2$
17	$X^2 + XT + 2023Y^2 + 1547YT - Z^2 - ZT + 595/2T^2$
19	$X^2 + XT + 2527Y^2 + 1064YZ + 3591YT + 111Z^2 + 755ZT + 2555/2T^2$
23	$X^2 + XT + 3703Y^2 + 322YZ + 2093YT + 6Z^2 + 90ZT + 595/2T^2$
25	$X^2 + XT + 4375Y^2 + 5250YZ + 8225YT + 1574Z^2 + 4934ZT + 7735/2T^2$
27	$X^2 + XT + 7Y^2 + 7YT - 729Z^2 - 351ZT - 77/2T^2$
29	$X^2 + XT + 5887Y^2 + 6496YZ + 6293YT + 1791Z^2 + 3471ZT + 3367/2T^2$
31	$X^2 + XT + 7Y^2 + 7YT - 961Z^2 - 1271ZT - 833/2T^2$
33	$X^2 + XT + 847Y^2 + 770YZ + 1001YT + 166Z^2 + 452ZT + 595/2T^2$
37	$X^2 + XT + 9583Y^2 + 4144YZ + 5957YT + 447Z^2 + 1287ZT + 1855/2T^2$
39	$X^2 + XT + 10647Y^2 + 5460YZ + 11739YT + 699Z^2 + 3009ZT + 6475/2T^2$
41	$X^2 + XT + 11767Y^2 + 12628YZ + 4879YT + 3387Z^2 + 2617ZT + 1015/2T^2$
43	$X^2 + XT + 12943Y^2 + 10836YZ + 301YT + 2267Z^2 + 125ZT + 7/2T^2$
45	$X^2 + XT + 1575Y^2 + 2730YZ + 525YT + 1174Z^2 + 452ZT + 91/2T^2$
47	$X^2 + XT + 15463Y^2 + 8554YZ + 25333YT + 1182Z^2 + 7006ZT + 20755/2T^2$
51	$X^2 + XT + 2023Y^2 + 952YZ + 833YT + 103Z^2 + 181ZT + 163/2T^2$
53	$X^2 + XT + 19663Y^2 + 742YZ + 7049YT + 6Z^2 + 132ZT + 1267/2T^2$
55	$X^2 + XT + 21175Y^2 + 3080YZ + 1925YT + 111Z^2 + 139ZT + 91/2T^2$
57	$X^2 + XT + 2527Y^2 + 3192YZ + 4655YT + 999Z^2 + 2925ZT + 4279/2T^2$
59	$X^2 + XT + 24367Y^2 + 14042YZ + 8673YT + 2022Z^2 + 2498ZT + 1547/2T^2$
61	$X^2 + XT + 26047Y^2 + 2562YZ + 27755YT + 62Z^2 + 1364ZT + 14791/2T^2$
65	$X^2 + XT + 29575Y^2 + 18200YZ + 51415YT + 2799Z^2 + 15819ZT + 44695/2T^2$
67	$X^2 + XT + 31423Y^2 + 42210YZ + 38927YT + 14174Z^2 + 26144ZT + 24115/2T^2$
69	$X^2 + XT + 3703Y^2 + 4508YZ + 161YT + 1363Z^2 + 95ZT + 7/2T^2$
71	$X^2 + XT + 35287Y^2 + 4970YZ + 49203YT + 174Z^2 + 3464ZT + 34307/2T^2$
73	$X^2 + XT + 37303Y^2 + 7154YZ + 71029YT + 342Z^2 + 6810ZT + 67627/2T^2$
75	$X^2 + XT + 4375Y^2 + 700YZ + 7175YT + 19Z^2 + 559ZT + 5875/2T^2$

Taula 6.8 Forma traça associada als ordres $\mathcal{O}(15, N)$ calculats en la taula 1.7, que són ordres d'Eichler de nivell $N \leq 60$ de la \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions $H_B(3, 5)$.

N	$t_{\mathcal{O}(15, N), 4}$
1	$X^2 + XT + 3Y^2 + 3YZ - 3Z^2 + 3/2T^2$
2	$X^2 + XT + 3Y^2 + 3YT + 5Z^2 + 5ZT - 3/2T^2$
4	$X^2 + XT + 48Y^2 + 12YZ + 24YT - 3Z^2 + 3ZT + 9/2T^2$
7	$X^2 + XT + 147Y^2 + 21YZ + 168YT - 3Z^2 + 12ZT + 99/2T^2$
8	$X^2 + XT + 48Y^2 + 72YZ + 36YT + 32Z^2 + 32ZT + 9/2T^2$
11	$X^2 + XT + 3Y^2 + 33YZ + 27YT - 363Z^2 - 594ZT - 483/2T^2$
13	$X^2 + XT + 507Y^2 + 39YZ + 156YT - 3Z^2 + 6ZT + 27/2T^2$
14	$X^2 + XT + 588Y^2 + 798YZ + 420YT + 267Z^2 + 285ZT + 153/2T^2$
16	$X^2 + XT + 192Y^2 + 144YZ + 264YT + 32Z^2 + 104ZT + 177/2T^2$
17	$X^2 + XT + 867Y^2 + 867YZ + 102YT + 213Z^2 + 51ZT + 9/2T^2$
19	$X^2 + XT + 1083Y^2 + 1653YZ + 627Z^2 + 3/2T^2$
22	$X^2 + XT + 363Y^2 + 396YZ + 33YT + 113Z^2 + 23ZT - 3/2T^2$
23	$X^2 + XT + 1587Y^2 + 2139YZ + 2208YT + 717Z^2 + 1488ZT + 1539/2T^2$
26	$X^2 + XT + 3Y^2 + 3YT + 845Z^2 + 1105ZT + 717/2T^2$
28	$X^2 + XT + 2352Y^2 + 84YZ + 504YT - 3Z^2 + 9ZT + 57/2T^2$
29	$X^2 + XT + 2523Y^2 + 1305YZ + 2088YT + 165Z^2 + 540ZT + 867/2T^2$
31	$X^2 + XT + 2883Y^2 + 93YZ + 3162YT - 3Z^2 + 51ZT + 1737/2T^2$
32	$X^2 + XT + 768Y^2 + 1056YZ + 720YT + 368Z^2 + 500ZT + 333/2T^2$
34	$X^2 + XT + 3468Y^2 + 4182YZ + 1428YT + 1257Z^2 + 861ZT + 297/2T^2$
37	$X^2 + XT + 4107Y^2 + 6771YZ + 5994YT + 2787Z^2 + 4941ZT + 4377/2T^2$
38	$X^2 + XT + 4332Y^2 + 5814YZ + 228YT + 1947Z^2 + 153ZT + 9/2T^2$
41	$X^2 + XT + 5043Y^2 + 7503YZ + 9348YT + 2787Z^2 + 6954ZT + 8667/2T^2$
43	$X^2 + XT + 5547Y^2 + 8901YZ + 2322YT + 3567Z^2 + 1863ZT + 489/2T^2$
44	$X^2 + XT + 12Y^2 + 12YZ + 18YT + 608Z^2 + 284ZT + 69/2T^2$
46	$X^2 + XT + 1587Y^2 + 1794YZ + 1725YT + 512Z^2 + 980ZT + 933/2T^2$
47	$X^2 + XT + 3Y^2 + 141YZ + 129YT - 6627Z^2 - 12126ZT - 11091/2T^2$
49	$X^2 + XT + 7203Y^2 + 147YZ + 13230YT - 3Z^2 + 135ZT + 12153/2T^2$
52	$X^2 + XT + 2028Y^2 + 1092YZ + 3822YT + 152Z^2 + 1034ZT + 3597/2T^2$
53	$X^2 + XT + 8427Y^2 + 6201YZ + 13038YT + 1137Z^2 + 4797ZT + 10089/2T^2$
56	$X^2 + XT + 2352Y^2 + 2184YZ + 420YT + 512Z^2 + 200ZT + 33/2T^2$
58	$X^2 + XT + 10092Y^2 + 16182YZ + 16356YT + 6483Z^2 + 13113ZT + 13257/2T^2$
59	$X^2 + XT + 10443Y^2 + 885YZ + 3540YT + 15Z^2 + 150ZT + 603/2T^2$

Taula 6.9 Forma binària genèrica associada als ordres $\mathcal{O}(6, N)$ calculats en la taula 1.4 que són ordres d'Eichler de nivell $N \leq 100$ de la \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions $H_A(3)$.

N	$f_{\mathcal{O}(6,N)}$
1	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(-x + y)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
5	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(5y - 3x + 2z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
7	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(7y - 5x + z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
11	$(-11z + 5x - x\sqrt{3}, -2(-x + y)\sqrt{3}, -11z + 5x + x\sqrt{3})$
13	$(-13z + 17x - x\sqrt{3}, -2(-x + y)\sqrt{3}, -13z + 17x + x\sqrt{3})$
17	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(17y - 7x + z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
19	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(19y - 27x + 14z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
23	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(23y - 5x + 4z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
25	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(25y - 29x + 3z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
29	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(29y - 45x + 23z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
31	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(31y - 9x + z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
35	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(35y - 3x + 20z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
37	$(-37z + 59x - x\sqrt{3}, -2(-x + y)\sqrt{3}, -37z + 59x + x\sqrt{3})$
41	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(41y - 67x + 34z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
43	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(43y - 67x + 2z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
47	$(-47z + 35x - x\sqrt{3}, -2(-x + y)\sqrt{3}, -47z + 35x + x\sqrt{3})$
49	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(49y - 35x + 2z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
53	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(53y - 7x + 6z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
55	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(55y - 43x + 37z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
59	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(59y - 71x + 10z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
61	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(61y - 71x + 39z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
65	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(65y - 67x + 45z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
67	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(67y - 17x + 15z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
71	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(71y - 13x + z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
73	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(73y - 79x + 5z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
77	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(77y - 31x + 26z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
79	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(79y - x + 49z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
83	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(83y - 97x + 36z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
85	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(85y - 163x + 67z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
91	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(91y - 161x + 47z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
95	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(95y - 9x + 8z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
97	$(-z + x - x\sqrt{3}, -2(97y - 107x + 25z)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$

Taula 6.10 Forma binària genèrica associada als ordres $\mathcal{O}(10, N)$ calculats en la taula 1.5 que són ordres d'Eichler de nivell $N \leq 80$ de la \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions $H_B(2, 5)$.

N	$f_{\mathcal{O}(10, N)}$
1	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(y + 1/2t)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
3	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(3y + 1/2t - 4x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
7	$(-5x - 5(7/2z - 5x)\sqrt{2}, -2(y + 7/2z - 5x)\sqrt{2}, x - (7/2z - 5x)\sqrt{2})$
9	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(9y + 1/2t - 4x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
11	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(11y + 1/2t - 14x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
13	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(13y + 9/2t - 18x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
17	$(-5x - 5(17/2z - 14x)\sqrt{2}, -2(y + 17/2z - 14x)\sqrt{2}, x - (17/2z - 14x)\sqrt{2})$
19	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(19y + 1/2t - 6x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
21	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(21y + 11/2t - 32x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
23	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(23y + 31/2t - 8x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
27	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(27y + 1/2t - 32x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
29	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(29y + 39/2t - 2x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
31	$(-5x - 5(31/2z - 27x)\sqrt{2}, -2(y + 31/2z - 27x)\sqrt{2}, x - (31/2z - 27x)\sqrt{2})$
33	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(33y + 53/2t - 40x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
37	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(37y + 19/2t - 20x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
39	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(39y + 47/2t - 32x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
41	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(41y + 79/2t - 24x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
43	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(43y + 81/2t - 28x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
47	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(47y + 63/2t - 80x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
49	$(-5x - 5(49/2z - 44x)\sqrt{2}, -2(y + 49/2z - 44x)\sqrt{2}, x - (49/2z - 44x)\sqrt{2})$
51	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(51y + 77/2t - 2x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
53	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(53y + 29/2t - 10x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
57	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(57y + 25/2t - 52x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
59	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(59y + 55/2t - 34x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
61	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(61y + 67/2t - 92x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
63	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(63y + 101/2t - 38x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
67	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(67y + 7/2t - 92x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
69	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(69y + 35/2t - 106x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
71	$([-5x - 5/2z\sqrt{2}, -2(71y + 131/2z - 22x)\sqrt{2}, x - 1/2z\sqrt{2}])$
73	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(73y + 57/2t - 4x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
77	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(77y + 11/2t - 94x)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$
79	$(-5x - 5/2t\sqrt{2}, -2(79y + 99/2t)\sqrt{2}, x - 1/2t\sqrt{2})$

Taula 6.11 Forma binària genèrica associada als ordres $\mathcal{O}(14, N)$ calculats en la taula 1.6 que són ordres d'Eichler de nivell $N \leq 80$ de la \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions $H_A(7)$.

N	$f_{\mathcal{O}(14, N)}$
1	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(y - x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
3	$(-3z + 5x - x\sqrt{7}, -2(y - x)\sqrt{7}, -3z + 5x + x\sqrt{7})$
5	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(5y + z - 7x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
9	$(-3z + x - x\sqrt{7}, -2(3y + 2z - x)\sqrt{7}, -3z + x + x\sqrt{7})$
11	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(11y + 6z - 9x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
13	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(13y + 2z - 3x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
15	$(-3z + 5x - x\sqrt{7}, -2(5y + 3z - x)\sqrt{7}, -3z + 5x + x\sqrt{7})$
17	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(17y - 13x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
19	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(19y + 4z - 27x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
23	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(23y + z - 13x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
25	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(25y + 15z - 47x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
27	$(-27z + 13x - x\sqrt{7}, -2(y - x)\sqrt{7}, -27z + 13x + x\sqrt{7})$
29	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(29y + 16z - 31x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
31	$(-31z + 41x - x\sqrt{7}, -2(y - x)\sqrt{7}, -31z + 41x + x\sqrt{7})$
33	$(-3z + x - x\sqrt{7}, -2(11y + 5z - 13x)\sqrt{7}, -3z + x + x\sqrt{7})$
37	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(37y + 8z - 23x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
39	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(39y + 10z - 43x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
41	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(41y + 22z - 17x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
43	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(43y + 18z - x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
45	$(-3z + x - x\sqrt{7}, -2(15y + 13z - 5x)\sqrt{7}, -3z + x + x\sqrt{7})$
51	$(-3z + 5x - x\sqrt{7}, -2(17y + 4z - 7x)\sqrt{7}, -3z + 5x + x\sqrt{7})$
53	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(53y + z - 19x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
55	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(55y + 4z - 5x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
57	$(-3z + 5x - x\sqrt{7}, -2(19y + 12z - 35x)\sqrt{7}, -3z + 5x + x\sqrt{7})$
59	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(59y + 17z - 21x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
61	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(61y + 3z - 65x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
65	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(65y + 20z - 113x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$
69	$(-3z + x - x\sqrt{7}, -2(23y + 14z - x)\sqrt{7}, -3z + x + x\sqrt{7})$
75	$(-3z + 5x - x\sqrt{7}, -2(25y + 2z - 41x)\sqrt{7}, -3z + 5x + x\sqrt{7})$
79	$(-z + x - x\sqrt{7}, -2(79y + 21z - 41x)\sqrt{7}, -z + x + x\sqrt{7})$

Taula 6.12 Forma binària genèrica associada als ordres $\mathcal{O}(15, N)$ calculats en la taula 1.7 que són ordres d'Eichler de nivell $N \leq 60$ de la \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions $H_B(3, 5)$.

N	$f_{\mathcal{O}(15, N)}$
1	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(y + 1/2t)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
2	$(5z - 5x + 5x\sqrt{3}, -2(y - x)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
4	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(1/2t - 2x + 4y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
7	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(1/2t - 8x + 7y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
8	$(5z - 5x + 5x\sqrt{3}, -2(3z - 3x + 4y)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
11	$(-5x - 5(11/2z - 9x)\sqrt{3}, -2(y + 11/2z - 9x)\sqrt{3}, x - (11/2z - 9x)\sqrt{3})$
13	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(1/2t - 4x + 13y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
14	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(19/2t - 10x + 14y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
16	$(5z - 5x + 5x\sqrt{3}, -2(3z - 11x + 8y)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
17	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(17/2t - 2x + 17y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
19	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(19y + 29/2t)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
22	$(5z - 5x + 5x\sqrt{3}, -2(6z - x + 11y)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
23	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(31/2t - 32x + 23y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
26	$(65z - 85x + 5x\sqrt{3}, -2(y - x)\sqrt{3}, -13z + 17x + x\sqrt{3})$
28	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(1/2t - 6x + 28y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
29	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(15/2t - 24x + 29y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
31	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(1/2t - 34x + 31y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
32	$(5z - 5x + 5x\sqrt{3}, -2(11z - 15x + 16y)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
34	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(41/2t - 14x + 34y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
37	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(61/2t - 54x + 37y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
38	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(51/2t - 2x + 38y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
41	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(61/2t - 76x + 41y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
43	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(69/2t - 18x + 43y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
44	$(-25x + 55z + 5x\sqrt{3}, -2(z - 3x + 2y)\sqrt{3}, 5x - 11z + x\sqrt{3})$
46	$(5z - 5x + 5x\sqrt{3}, -2(13z - 25x + 23y)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
47	$(-5x - 5(47/2z - 43x)\sqrt{3}, -2(y + 47/2z - 43x)\sqrt{3}, x - (47/2z - 43x)\sqrt{3})$
49	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(1/2t - 90x + 49y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
52	$(5z - 5x + 5x\sqrt{3}, -2(7z - 49x + 26y)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
53	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(39/2t - 82x + 53y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
56	$(5z - 5x + 5x\sqrt{3}, -2(13z - 5x + 28y)\sqrt{3}, -z + x + x\sqrt{3})$
58	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(93/2t - 94x + 58y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$
59	$(-5x - 5/2t\sqrt{3}, -2(5/2t - 20x + 59y)\sqrt{3}, x - 1/2t\sqrt{3})$

Capítol 7

Immersiones i formes quadràtiques

En aquest capítol, tractem les immersiones de cossos quadràtics en àlgebres de quaternions, tenint en compte l'aritmètica de les àlgebres de quaternions i dels cossos quadràtics. Així, estudiem les immersiones dels ordres quadràtics en els ordres quaterniònics i les relacionem amb les formes quadràtiques que hem associat als ordres en el capítol anterior.

Per a tot el capítol, sigui $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un cos quadràtic, on $d \in \mathbb{Z}$ és lliure de quadrats. Considerem D_F el discriminant fonamental de F . Sigui H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions que, en alguns casos, exigirem que sigui indefinida. Denotem per \mathcal{O} i \mathcal{O}' ordres quaterniònics de H , i per Λ i Λ' ordres quadràtics de F .

En la primera secció, caracteritzem l'existència d'immersiones de F en H per mitjà de representacions de formes quadràtiques. En la segona secció, es recorden les definicions d'immersiones relatives als ordres quadràtics i quaterniònics i es recopilen resultats d'Eichler sobre la seva classificació. En la tercera secció, trobem bijeccions entre els conjunts d'immersiones i els conjunts de representacions de certes formes quadràtiques ternàries, i obtenim una classificació d'aquestes representacions. En la quarta secció, provem resultats sobre bijeccions entre els conjunts d'immersiones i certs conjunts de formes quadràtiques binàries, la qual cosa dóna també una classificació d'aquestes formes binàries. En particular, per a les àlgebres no ramificades, les àlgebres poc ramificades de tipus A i les de tipus B, explicitem els conjunts de formes binàries corresponents.

7.1 Immersions de cossos quadràtics en àlgebres de quaternions

En la proposició 1.1.19 es caracteritza l'existència d'immersions d'un cos quadràtic $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ en una àlgebra de quaternions H . A continuació, interpretem els resultats d'aquesta proposició utilitzant les formes quadràtiques per a la construcció de les immersions.

7.1.1 Notació. Fixem les notacions següents per a designar els conjunts d'immersions i de representacions corresponents. Per a les formes quadràtiques, utilitzem la notació introduïda en el capítol 4. Recordem que, per a una forma quadràtica f , la matriu associada a f es denota per $A(f)$. Indiquem com a subíndex el nombre de variables de la forma quadràtica.

$$\mathcal{I}(H, F) := \{\varphi : \varphi \text{ és una immersió de } F \text{ en } H\},$$

$$\mathcal{R}(f_3, \delta_1; \mathbb{Q}) := \{\alpha \in \mathbb{Q}^3 : \alpha^t A(f_3) \alpha = \delta_1\},$$

$$\mathcal{R}(f_4, g_2; \mathbb{Q}) := \{P \in M(4 \times 2, \mathbb{Q}) : P^t A(f_4) P = A(g_2)\}. \square$$

7.1.2 Proposició. *Siguin $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions i $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un cos quadràtic. Siguin $n_{H,4}$ i $n_{H,3}$ les formes nòrmiques quaternària i ternària associades a H , i $n_{F,2}$ la forma nòrmica binària associada a F .*

- (i) *Els conjunts $\mathcal{I}(H, F)$ i $\mathcal{R}(n_{H,3}, -d; \mathbb{Q})$ estan en correspondència bijectiva.*
- (ii) *Existeix una aplicació injectiva de $\mathcal{I}(H, F)$ en $\mathcal{R}(n_{H,4}, n_{F,2}; \mathbb{Q})$.*
- (iii) *Si $\mathcal{R}(n_{H,4}, n_{F,2}; \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, aleshores $\mathcal{I}(H, F) \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ: Considerem $\omega = \varphi(\sqrt{d})$. El conjunt d'immersions $\varphi : F \hookrightarrow H$ es correspon de manera bijectiva amb el conjunt d'elements $\omega \in H \setminus \mathbb{Q}$ tals que $n(\omega) = n(\varphi(\sqrt{d})) = n(\sqrt{d}) = -d$ i $\text{tr}(\omega) = \text{tr}(\varphi(\sqrt{d})) = \text{tr}(\sqrt{d}) = 0$; és a dir, $\omega \in H_0$, amb $n(\omega) = n_{H,3}(\omega)$. Si escrivim $\omega = yi + zj + tij$, aleshores el conjunt anterior es correspon bijectivament amb el conjunt de \mathbb{Q} -representacions (y, z, t) de $-d$ per la forma quadràtica ternària $n_{H,3}$. És clar que immersions diferents equivalen a representacions diferents. Això demostra l'apartat (i). S'arriba a la mateixa conclusió si demanem que $\omega = \varphi(\sqrt{d}) \in H - \mathbb{Q}$ satisfaci la igualtat $\omega^2 = d$ a H .

Donada una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(H, F)$, considerem l'element $\omega = \varphi(\sqrt{d}) \in H - \mathbb{Q}$, amb $n(\omega) = -d$ i $\text{tr}(\omega) = 0$. Tenim que $\{1, \omega\}$ és una base de $\varphi(F)$ i $n_{H,4}(\varphi(\alpha)) = n_{F,2}(\alpha)$, per a tot $\alpha \in F$, per ser immersió. Considerem la matriu P , que expressa 1 i ω en coordenades respecte de la base de l'àlgebra de quaternions. Aleshores, és clar que P té coeficients a \mathbb{Q} i satisfà $P^t A(n_{H,4}) P = A(n_{F,2})$. Per tant, $P \in \mathcal{R}(n_{H,4}, n_{F,2}; \mathbb{Q})$. És clar que immersions diferents proporcionen matrius de representació diferents. Així, hem provat l'apartat (ii).

Vegem l'apartat (iii). Suposem que la forma quaternària $n_{H,4}$ representa la forma binària $n_{F,2}$. Per a cada $p|D_H$, si apliquem 5.1.13, tenim que $n_{H,4}$ no és \mathbb{Q}_p -isòtropa. Deduïm que, per a cada $p|D_H$, la forma $n_{F,2}$ tampoc és \mathbb{Q}_p -isòtropa; és a dir, $x^2 - dy^2$ no representa el 0 a \mathbb{Q}_p^* , la qual cosa equival a dir que d no és un quadrat a \mathbb{Q}_p^* . Així, per a cada $p|D_H$ tenim que p no descompon en $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, i això és equivalent al fet que existeixi una immersió de F en H , cf. 1.1.19. \square

7.1.3 Remarca. Observem la relació entre els dos conjunts $\mathcal{R}(n_{H,3}, -d; \mathbb{Q})$ i $\mathcal{R}(n_{H,4}, n_{F,2}; \mathbb{Q})$. D'una banda, tenim que

$$n_{H,4} = \langle 1 \rangle \oplus n_{H,3}, \quad n_{F,2} = \langle 1 \rangle \oplus \langle d \rangle.$$

D'altra banda, tenim que $-d = \det_1(n_{F,2}) = \text{disc}(n_{F,2})$. Aquest resultat és comparable a les relacions que obtindrem en el cas de les immersions dels ordres quadràtics en els ordres quaternionics, cf. 7.3.3. \square

A continuació, trobem les condicions efectives per a l'existència d'immersions de F en H , en funció del discriminant de l'àlgebra de quaternions H i de la forma nòrmica ternària $n_{H,3}$.

7.1.4 Lema. *Siguin $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ i $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Aleshores, els fets següents són equivalents.*

- (a) *Existeix una immersió de F en H .*
- (b) *Per a cada primer p tal que $n_{H,3}$ és \mathbb{Q}_p -anisòtropa, p no descompon en $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.*
- (c) *Per a cada primer p tal que $p|D_H$, tenim que $\left(\frac{D_F}{p}\right) \neq 1$.*

DEMOSTRACIÓ: Recordem que $p|D_H$ si, i només si, $n_{H,3}$ és \mathbb{Q}_p -anisòtropa, per 5.1.13. Així, deduïm l'equivalència entre (a) i (b) directament de 1.1.19.

L'equivalència entre (b) i (c) prové d'explicitar les condicions per a la representació de nombres per formes ternàries, que coincideixen amb les condicions per a la descomposició de primers. \square

7.1.5 Corollari. *No hi ha immersions de cossos quadràtics reals en àlgebres de quaternions definides.*

DEMOSTRACIÓ: D'una banda, si F és un cos quadràtic real, aleshores $n_{F,2}$ és una forma quadràtica indefinida. De l'altra, si H és definida, aleshores $n_{H,4}$ és una forma definida positiva, per 5.1.14. Ara bé, és clar que formes quadràtiques definides no poden representar formes indefinides; per tant, $\mathcal{R}(n_{H,4}, n_{F,2}; \mathbb{Q}) = \emptyset$. Per 7.1.2 (ii), obtenim que $\mathcal{I}(H, F) = \emptyset$. \square

7.1.6 Corollari. *sigui $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}} \right)$ una àlgebra de quaternions. Aleshores,*

- (i) *Existeixen immersions de $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$ en H .*
- (ii) *Existeixen immersions de $\mathbb{Q}(\sqrt{-D_H})$ en H .*
- (iii) *Hi ha immersions de $\mathbb{Q}(\sqrt{D_H})$ en H si, i només si, H és una àlgebra de quaternions indefinida.*

DEMOSTRACIÓ: L'apartat (i) és trivial, tant si el pensem a nivell d'àlgebres com a nivell de formes quadràtiques.

Per a veure (ii) i (iii) només cal remarcar que per als primers $p|D_H$ finits, és clar que p ramifica a $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm D_H})$; per tant, no descompon. Si H és definida, la condició necessària per a l'infinit equival al fet que el cos quadràtic sigui imaginari. \square

Considerem ara els ordres i les seves formes quadràtiques associades. De forma immediata, tenim el resultat següent sobre \mathbb{Q} -representacions. En la secció 7.3, veurem el que fa referència a \mathbb{Z} -representacions.

7.1.7 Corollari. *Siguin \mathcal{O} i Λ ordres de H i F , respectivament. Si se satisfà $\mathcal{I}(H, F) \neq \emptyset$, aleshores*

$$n_{\mathcal{O},4} \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} n_{\Lambda,2}.$$

DEMOSTRACIÓ: Com que $n_{H,4} \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} n_{\mathcal{O},4}$ i $n_F \stackrel{\mathbb{Q}}{\sim} n_{\Lambda,2}$, només cal aplicar la proposició 7.1.2. \square

7.2 Immersions d'ordres quadràtics en ordres quaternionics

7.2.1 Definició. Siguin \mathcal{O} i Λ ordres de H i F , respectivament. Un homomorfisme de \mathbb{Q} -àlgebres $\varphi : F \rightarrow H$ es diu que és una immersió de l'ordre quadràtic Λ en l'ordre quaternionic \mathcal{O} si $\varphi(\Lambda) \subseteq \mathcal{O}$. \square

7.2.2 Definició. Siguin \mathcal{O} i Λ ordres de H i F , respectivament. Un homomorfisme de \mathbb{Q} -àlgebres $\varphi : F \rightarrow H$ es diu que és una immersió optimal de l'ordre quadràtic Λ en l'ordre quaternionic \mathcal{O} si $\varphi(F) \cap \mathcal{O} = \varphi(\Lambda)$; equivalentment, si $\Lambda = \varphi^{-1}(\varphi(F) \cap \mathcal{O})$. \square

7.2.3 Notació. De manera anàloga a la secció anterior, considerem els conjunts d'immersions següents

$$\mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda) := \{\varphi : \varphi \text{ immersió de } \Lambda \text{ en } \mathcal{O}\},$$

$$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda) := \{\varphi : \varphi \text{ immersió optimal de } \Lambda \text{ en } \mathcal{O}\}. \square$$

7.2.4 Remarca. Sigui Λ l'ordre quadràtic de conductor m ; és a dir, $\Lambda = \mathbb{Z}[1, mw]$, on $w = \sqrt{d}$ si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, i $w = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$. Sigui \mathcal{O} un ordre quaternionic de H . Definir una immersió φ de Λ en \mathcal{O} equival a fixar $\omega = \varphi(mw) \in \mathcal{O}$ tal que $n(\varphi(mw)) = m^2 n(w)$ i $\text{tr}(\varphi(mw)) = m \text{tr}(w)$. De forma equivalent, es pot fixar també $\omega \in \mathcal{O}$ que satisfaci $(\omega - \bar{\omega})^2 = D_\Lambda$. Notem que, donat un ordre Λ de F , una immersió $\varphi : F \rightarrow H$ queda determinada per $\varphi|_\Lambda$. \square

A partir de les definicions, obtenim directament els lemes següents, que relacionen conjunts d'immersions d'ordres diferents.

7.2.5 Lema. Siguin $\mathcal{O}' \subsetneq \mathcal{O}$ ordres de H i $\Lambda' \subsetneq \Lambda$, ordres de F . Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(H, F)$.

(i) Si $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$, aleshores $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda') - \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda')$.

(ii) Si $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda')$, aleshores $\varphi \notin \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$.

(iii) Si $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}', \Lambda)$, aleshores $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$. \square

7.2.6 Lema. Sigui $\varphi : F \rightarrow H$ una immersió i $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaternionic.

- (i) Tenim que $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \varphi^{-1}(\varphi(F) \cap \mathcal{O}))$.
- (ii) Si $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$, aleshores $\Lambda \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(F) \cap \mathcal{O})$. \square

7.2.7 Corollari. Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic i Λ_F l'anell d'enters de F . Aleshores, $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda_F) = \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda_F)$. \square

Els resultats següents donen condicions per a l'existència d'immersions optimals entre ordres fixats.

7.2.8 Lema. Considerem una \mathbb{Q}_p -àlgebra de quaternions H_p de divisió local i $\mathcal{O}_p \subseteq H_p$ l'únic ordre maximal. Siguin F_p tal que $\mathcal{I}(H_p, F_p) \neq \emptyset$ i $\Lambda_p \subseteq F_p$ un ordre. Aleshores, $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}_p, \Lambda_p) \neq \emptyset$ si, i només si, Λ_p és maximal.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(H_p, F_p)$. És clar que $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_p, \Lambda_p)$, per ser l'ordre \mathcal{O}_p maximal. Podem suposar $F_p \subseteq H_p$. Aleshores, la immersió φ és optimal si, i només si, $\mathcal{O}_p \cap F_p = \Lambda_p$. Però, com que \mathcal{O}_p és un anell de valoració discreta, tenim que $\mathcal{O}_p \cap F_p$ és l'anell d'enters de F_p . Així, φ és optimal si, i només si, Λ_p és l'ordre maximal de F_p , com volíem veure. \square

7.2.9 Proposició. Siguin H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions de discriminant D i $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre d'Eichler de nivell N . Siguin $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un cos quadràtic tal que $\mathcal{I}(H, F) \neq \emptyset$ i $\Lambda \subseteq F$ l'ordre quadràtic de conductor m .

- (i) Si $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda) \neq \emptyset$, aleshores $\text{mcd}(D, m) = 1$.
- (ii) Si $N = 1$ i H és indefinida, aleshores $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda) \neq \emptyset$ si, i només si, $\text{mcd}(D, m) = 1$.

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda) \neq \emptyset$ i $p|D$. Aleshores, H_p és una àlgebra de quaternions de divisió i $\mathcal{O}_p \subseteq H_p$ és l'únic ordre maximal. Notem que $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda) \neq \emptyset$ implica que $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}_p, \Lambda_p) \neq \emptyset$. Pel lema 7.2.8, tenim que Λ_p és l'ordre maximal de F_p ; per tant, deduïm que $p \nmid m$. Això demostra l'apartat (i).

Si $N = 1$ i H és indefinida, tenim també el recíproc. En efecte, suposem $\text{mcd}(D, m) = 1$ i sigui $\varphi \in \mathcal{I}(H, F)$. Llevat conjugació, podem suposar que $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$, ja que $\varphi(\Lambda)$ està contingut en un ordre quaterniònic maximal i tots els ordres maximals de H són conjugats, per ser l'àlgebra H indefinida. És clar que φ serà optimal si, i només si, φ_p és optimal per a totes les places p . Per a les places $p|D$, tenim que $p \nmid m$ i aplicant el lema anterior deduïm

que φ_p és una immersió optimal. Per a les places $p \nmid Dm$, tenim que \mathcal{O} és un ordre maximal de $H \simeq M(2, \mathbb{Q})$ i la immersió és automàticament optimal, per 7.2.7. Si $p \nmid D$ i $p \mid m$, tenim que \mathcal{O} és un ordre maximal de $M(2, \mathbb{Q})$ i Λ_p és un ordre no maximal; en aquest cas es demostra també que hi ha immersions optimals (cf. [Vig80]). \square

Considerem el conjunt d'immersions $\mathcal{I}(H, F)$ i el grup H^* de les unitats de l'àlgebra de quaternions H . Definim una acció de H^* en $\mathcal{I}(H, F)$ de la manera següent:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(H, F) \times H^* &\longrightarrow \mathcal{I}(H, F) \\ (\varphi, \sigma) &\longmapsto \varphi^\sigma, \end{aligned}$$

on $\varphi^\sigma(\alpha) := \sigma^{-1}\varphi(\alpha)\sigma$, per a tot $\alpha \in F$.

7.2.10 Lema. *Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(H, F)$. Aleshores, per a tot $\sigma \in H^*$:*

- (i) $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$ si, i només si, $\varphi^\sigma \in \mathcal{I}(\sigma^{-1}\mathcal{O}\sigma, \Lambda)$.
- (ii) $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ si, i només si, $\varphi^\sigma \in \mathcal{I}^*(\sigma^{-1}\mathcal{O}\sigma, \Lambda)$. \square

Si H és una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida, tots els ordres d'Eichler d'un mateix nivell són conjugats; per tant, pel lema anterior ens podem reduir a estudiar les immersions en un ordre d'Eichler fixat per a cada nivell.

Per als conjunts d'immersions relatius als ordres, ens podem restringir a l'acció dels subgrups $G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$, com indica el corollari següent.

7.2.11 Corollari. *Sigui G un subgrup, $G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$. Aleshores, l'acció de H^* en $\mathcal{I}(H, F)$ induïx una acció de G en $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$ i en $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$. \square*

Aquesta acció ens defineix una relació d'equivalència: $\varphi, \varphi' \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ són G -equivalents si existeix $\sigma \in G$ tal que $\varphi' = \varphi^\sigma$. Fixada una base $\{1, \lambda\}$ de l'ordre quadràtic Λ , qualsevol immersió $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ està determinada per $\varphi(\lambda)$. Per tant, perquè dues immersions $\varphi, \varphi' \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ siguin G -equivalents és suficient que existeixi $\sigma \in G$ tal que $\varphi'(\lambda) = \sigma^{-1}\varphi(\lambda)\sigma$.

7.2.12 Notació. Considerem el conjunt quocient $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)/G$. El nombre de classes de G -equivalència d'immersions optimals de Λ en \mathcal{O} , si s'escau, el denotarem per $\nu(\mathcal{O}, \Lambda; G)$; és a dir,

$$\nu(\mathcal{O}, \Lambda; G) := \#\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)/G.$$

De manera anàloga, per al cas local tenim que $\mathcal{I}(\mathcal{O}_p, \Lambda_p)$ i $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}_p, \Lambda_p)$ són G_p -conjunts. Denotem per $\nu_p(\mathcal{O}, \Lambda; G)$ el corresponent nombre de classes pels ordres locals; és a dir,

$$\nu_p(\mathcal{O}, \Lambda; G) := \#\mathcal{I}^*(\mathcal{O}_p, \Lambda_p)/G_p.$$

Si \mathcal{O} és un ordre d'Eichler de nivell N d'una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida de discriminant D , i Λ és l'ordre quadràtic de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m , posem $\nu(D, N, d, m; G) := \nu(\mathcal{O}, \Lambda; G)$ i $\nu_p(D, N, d, m; G) := \nu_p(\mathcal{O}_p, \Lambda_p; G_p)$.

Recordem que si Λ és l'ordre quadràtic de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m , denotem per $h(\Lambda)$ o bé $h(d, m)$ el seu nombre de classes d'ideals (cf. secció 4.5). \square

A continuació, explicitem resultats coneguts sobre el nombre de classes d'immersions $\nu(D, N, d, m; G)$ per al cas de $G = \mathcal{O}^*$, vàlids també més en general per a K -àlgebres de quaternions indefinides, on K és un cos de nombres totalment real de nombre de classes senar. El teorema 7.2.13 següent (cf. [Eic55b]) proporciona la relació entre els nombres de classes d'immersions locals i globals i les fórmules del nombre de classes d'immersions locals donades a [Ogg83] i [Vig80]. Considerem ψ_p la funció multiplicativa donada per $\psi_p(p^k) = p^k(1 + \frac{1}{p})$ i $\psi_p(a) = 1$ si $p \nmid a$.

7.2.13 Teorema. *Sigui $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre d'Eichler de nivell N , on H és una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida de discriminant D . Sigui $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ l'ordre de conductor m . Suposem que hi ha immersions de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ en H i que $\text{mcd}(m, D) = 1$. Aleshores,*

$$\nu(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = h(d, m) \prod_{p|DN} \nu_p(D, N, d, m; \mathcal{O}^*).$$

Els nombres de classes d'immersions $\nu_p(D, N, d, m; \mathcal{O}^)$, per als primers $p|DN$, vénen donats de la manera següent.*

$$(i) \text{ Si } p|D, \text{ aleshores } \nu_p(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = 1 - \left(\frac{D_F}{p}\right).$$

$$(ii) \text{ Si } p \parallel N, \text{ aleshores } \nu_p(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = \begin{cases} 1 + \left(\frac{D_F}{p}\right) & \text{si } p \nmid m, \\ 2 & \text{si } p|m. \end{cases}$$

$$(iii) \text{ Suposem } N = p^r u_1, \text{ amb } p \nmid u_1, r \geq 2. \text{ Posem } m = p^k u_2, p \nmid u_2.$$

(a) Si $r \geq 2k + 2$, aleshores

$$\nu_p(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = \begin{cases} 2\psi_p(m) & \text{si } \left(\frac{D_F}{p}\right) = 1, \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

(b) Si $r = 2k + 1$, aleshores

$$\nu_p(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = \begin{cases} 2\psi_p(m) & \text{si } \left(\frac{D_F}{p}\right) = 1, \\ p^k & \text{si } \left(\frac{D_F}{p}\right) = 0, \\ 0 & \text{si } \left(\frac{D_F}{p}\right) = -1. \end{cases}$$

(c) Si $r = 2k$, aleshores

$$\nu_p(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = p^{k-1} \left(p + 1 + \left(\frac{D_F}{p}\right) \right).$$

(d) Si $r \leq 2k - 1$, aleshores

$$\nu_p(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = \begin{cases} p^{k/2} + p^{k/2-1} & \text{si } k \text{ és parell,} \\ 2p^{k-1/2} & \text{si } k \text{ és senar. } \square \end{cases}$$

7.2.14 Corol·lari. Sigui H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida de discriminant D i $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre d'Eichler de nivell N , N lliure de quadrats. Sigui $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un cos quadràtic de manera que $\mathcal{I}(H, F) \neq \emptyset$ i $\Lambda \subseteq F$ l'ordre de conductor m , de manera que $\text{mcd}(m, D) = 1$. Aleshores,

$$\nu(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = \begin{cases} 0 & \text{si existeix } p|N, p \nmid m, p \text{ inert a } F, \\ h(d, m) \cdot 2^{s+t} & \text{altrament,} \end{cases}$$

on $s = \#\{p|D : p \text{ inert a } F\}$ i $t = \#\{p|N : p \text{ descompon en } F \text{ o bé } p|m\}$. \square

Sigui H una àlgebra de quaternions no ramificada. Si ens restringim a N lliure de quadrats, o bé a N primer, obtenim els resultats següents per al nombre de classes d'immersions optimals, com a corol·laris de 7.2.13.

7.2.15 Corol·lari. Considerem $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0(1, N) \subseteq M(2, \mathbb{Q})$, ordre d'Eichler de nivell N , amb N lliure de quadrats. Sigui $\Lambda(d, m)$ l'ordre de $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m . Aleshores,

$$\nu(D, N, d, m; \mathcal{O}^*) = \begin{cases} 0 & \text{si existeix } p|N, p \nmid m, p \text{ inert en } F, \\ h(d, m) \cdot 2^t & \text{altrament,} \end{cases}$$

on $t = \#\{p|N : p \text{ descompon en } F \text{ o } p|m\}$. \square

7.2.16 Corol·lari. Considerem $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0(1, N) \subseteq M(2, \mathbb{Q})$, ordre d'Eichler de nivell N , amb N primer. Sigui $\Lambda(d, m)$ l'ordre de $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m . Aleshores,

$$\nu(1, N, d, m; \mathcal{O}^*) = \begin{cases} 0 & \text{si } N \text{ és inert en } F \text{ i } N \nmid m, \\ h(d, m) & \text{si } N \text{ ramifica en } F \text{ i } N \nmid m, \\ 2h(d, m) & \text{si } N \text{ descompon en } F \text{ o bé si } N = m. \quad \square \end{cases}$$

Explicitem també el nombre de classes d'immersions optimals com a corol·lari de 7.2.13 en el cas de les àlgebres de quaternions H poc ramificades, de discriminant $D_H = pq$.

7.2.17 Corol·lari. Suposem que $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ escindeix H . Considerem $\mathcal{O} = \mathcal{O}(pq, 1) \subseteq H$, un ordre quaterniònic maximal, i $\Lambda(d, m)$ l'ordre de F de conductor m . Aleshores,

(i) $\nu(pq, 1, d, m; \mathcal{O}^*) = 0$ si, i només si, $\text{mcd}(pq, m) \neq 1$.

(ii) Suposem que $\text{mcd}(pq, m) = 1$; aleshores,

$$\nu(pq, 1, d, m; \mathcal{O}^*) = \begin{cases} h(d, m) & \text{si } p, q \text{ ramifiquen en } F, \\ 2h(d, m) & \text{si } p \text{ ramifica i } q \text{ és inert en } F \\ 4h(d, m) & \text{si } p, q \text{ són inerts en } F. \quad \square \end{cases}$$

7.2.18 Corol·lari. Suposem que $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ escindeix H . Considerem $\mathcal{O} = \mathcal{O}(pq, N) \subseteq H$, un ordre quaterniònic d'Eichler de nivell N , on N és un nombre primer diferent de p i q . Sigui $\Lambda(d, m)$ l'ordre de F de conductor m .

(i) Si $\nu(pq, N, d, m; \mathcal{O}^*) = 0$, aleshores $\text{mcd}(pq, m) \neq 1$.

(ii) Suposem que $\text{mcd}(pq, m) = 1$; aleshores, $\nu(pq, N, d, m; \mathcal{O}^*)$ és igual a

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } N \text{ és inert en } F \text{ i } N \nmid m, \\ h(d, m) & \text{si } N, p \text{ i } q \text{ ramifiquen en } F \text{ i } N \nmid m, \\ 2h(d, m) & \text{si } N, p \text{ ramifiquen i } q \text{ és inert en } F \\ & \text{o bé si } N \text{ descompon i } p, q \text{ ramifiquen en } F, \\ & \text{o bé si } N = m \text{ i } p, q \text{ ramifiquen en } F, \\ 4h(d, m) & \text{si } N \text{ ramifica, } N \nmid m \text{ i } p, q \text{ són inerts en } F, \\ & \text{o bé si } N \text{ descompon, } N \nmid m, p \text{ ramifica i } q \text{ és inert en } F, \\ & \text{o bé si } N|m, p \text{ ramifica i } q \text{ és inert en } F, \\ 8h(d, m) & \text{si } N \text{ descompon o } N \nmid m \text{ p, q són inerts en } F. \quad \square \end{array} \right.$$

A continuació, considerem el grup \mathcal{O}_+^* , que intervé en la definició dels grups d'homografies quaterniòniques. Tenim una estructura de \mathcal{O}_+^* -conjunt definida en $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ i considerem el conjunt quocient $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)/\mathcal{O}_+^*$. Més en general, donat un subgrup G , $\mathcal{O}^* \subseteq G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$, definim $G_+ := \{\sigma \in G : n(\sigma) > 0\}$.

Pels resultats de la secció 2.3 tenim que, si \mathcal{O} és un ordre d'Eichler en una \mathbb{Q} -àlgebra indefinida, aleshores \mathcal{O}_+^* és un subgrup d'índex 2 en \mathcal{O}^* , ja que \mathcal{O} conté unitats de norma negativa. Això ens diu també que, en aquest cas, $[G : G_+] = 2$. Si ho apliquem als nombres de classes d'immersions optimals, deduïm la proposició següent.

7.2.19 Proposició. *Sigui \mathcal{O} un ordre d'Eichler de nivell N en una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions H indefinida de discriminant D . Sigui G un subgrup tal que $\mathcal{O}^* \subseteq G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$ i considerem G_+ . Aleshores,*

$$\nu(D, N, d, m; G_+) = 2\nu(D, N, d, m; G). \quad \square$$

Finalment, en el cas d'una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida H , notem el paper que tenen les immersions d'ordres quadràtics en ordres quaterniònics de H en relació amb la immersió de H en $M(2, \mathbb{R})$. Fixem $\Phi : H \rightarrow M(2, \mathbb{R})$. Aleshores, donada una immersió φ de F en H , la composició $\phi := \Phi \circ \varphi$ és una immersió de F en $M(2, \mathbb{R})$ que anomenem immersió quaterniònica de F en $M(2, \mathbb{R})$. Així, podem traslladar els resultats sobre immersions d'ordres quadràtics Λ en ordres quaterniònics \mathcal{O} , a immersions d'ordres quadràtics Λ en $\Phi(\mathcal{O}) \subseteq M(2, \mathbb{R})$. En particular, podem parlar d'immersions quaterniòniques Γ -equivalents, per a certs subgrups Γ de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$, definits a partir de G , on $\mathcal{O}_+^* \subseteq G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$.

7.3 Classificació de representacions per formes ternàries d'ordres quaterniònics

Considerem les formes nòrmiques ternàries associades als ordres quaterniònics (cf. secció 6.1) i als ordres quadràtics (cf. secció 4.5). Tot seguit, caracteritzarem l'existència i la construcció efectiva d'immersions d'ordres quadràtics en ordres quaterniònics en funció de representacions d'aquestes formes quadràtiques.

7.3.1 Notació. Recordem la notació donada per al conjunt de representacions de formes quadràtiques de coeficients enters (cf. capítol 4). Siguin f, g

formes quadràtiques de n i r variables, respectivament.

$$\mathcal{R}(f, g; \mathbb{Z}) := \{P \in M(n \times r, \mathbb{Z}) : P^t A(f)P = A(g)\},$$

$$\mathcal{R}^*(f, g; \mathbb{Z}) := \{P \in M(n \times r, \mathbb{Z}) : P^t A(f)P = A(g), P \text{ primitiva}\}.$$

Considerem també les quàdriques $n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}(X, Y, Z) = \delta$, definides a la secció 6.1. Per analogia amb la notació utilitzada per a les formes quadràtiques, escrivim el conjunt de punts enters d'aquestes quàdriques com

$$\mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}, \delta; \mathbb{Z}) := \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 : n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}(x, y, z) = \delta\},$$

$$\mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}, \delta; \mathbb{Z}) := \{(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}^{(\mu)}, \delta; \mathbb{Z}) : \text{mcd}(x, y, z) = 1\}. \quad \square$$

7.3.2 Lema. *Sigui $\{1, v_2, v_3, v_4\}$ una base normalitzada d'un ordre quaterniònic \mathcal{O} d'una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions. Aleshores, l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$ és parell i una base normalitzada d'aquest ordre és $\{1, 2v_2, 2v_3, 2v_4 - \text{tr}(v_4)\}$. \square*

7.3.3 Teorema. *Sigui H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions. Siguin \mathcal{O} i Λ ordres de H i $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, respectivament. Aleshores,*

(i) *Hi ha una correspondència bijectiva*

$$\rho : \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z}).$$

(ii) *Hi ha una correspondència bijectiva*

$$\sigma : \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(D_\Lambda)}, \frac{(D_\Lambda^2 - D_\Lambda)}{4}; \mathbb{Z}\right).$$

(iii) *Hi ha una correspondència injectiva*

$$\varrho : \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{R}(n_{\mathcal{O},4}, n_{\Lambda,2}; \mathbb{Z}).$$

DEMOSTRACIÓ: Sigui m el conductor de l'ordre quadràtic Λ . Sabem que $\{1, mw\}$ és una base de Λ , on $\{1, w\}$ és una \mathbb{Z} -base de l'anell d'enters Λ_F , i que $D_\Lambda = D_F m^2 = -\det_1(n_{\Lambda,2})$. Fixem una base normalitzada $\mathcal{B} = \{1, v_2, v_3, v_4\}$ de l'ordre quaterniònic \mathcal{O} . Així, $\mathcal{B}' = \{1, 2v_2, 2v_3, 2v_4 - \text{tr}(v_4)\}$ és una base normalitzada de l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, que és un ordre parell.

En primer lloc, definim l'aplicació $\rho : \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$, distingint segons els valors de d a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Suposem que $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$, donada per $\varphi(m\sqrt{d}) = \omega$; és a dir, $\omega \in \mathcal{O}$ és tal que $n(\omega) = -dm^2$ i $\text{tr}(\omega) = 0$. Considerem $e = \varphi(2m\sqrt{d}) = 2\omega$. Aleshores, $e \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$ satisfà que $n(e) = -4dm^2$ i $\text{tr}(e) = 0$. Així, respecte de la base normalitzada de $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, tenim que $e = (0, x, y, z)_{\mathcal{B}'}$, on (x, y, z) és una representació de $-4dm^2 = -D_F m^2 = -D_\Lambda$ per $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}$. Aleshores posem $\rho(\varphi) := (x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. És clar que, si $\rho(\varphi) = \rho(\varphi')$, aleshores $\varphi(2m\sqrt{d}) = \varphi'(2m\sqrt{d})$ i, per tant, necessàriament serà $\varphi = \varphi'$.

Construïm l'aplicació inversa. Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. Per a $e = x(2v_2) + y(2v_3) + z(2v_4 - \text{tr}(v_4))$, tenim que $e \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, amb $n(e) = -4dm^2$ i $\text{tr}(e) = 0$. Com que $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$, respecte de la base normalitzada de \mathcal{O} , obtenim que $e = (-z \text{tr}(v_4), 2x, 2y, 2z)_{\mathcal{B}}$. Observem que $2|z \text{tr}(v_4)$, ja que $n_{\mathcal{O},4}(e) = z^2 \text{tr}(v_4) + g(x, y, z) = -4dm^2$ per a certa expressió quadràtica $g(x, y, z)$ que satisfà $2|g(x, y, z)$. Per tant, $\omega = e/2 = (-z \text{tr}(v_4)/2, x, y, z)_{\mathcal{B}}$ pertany a \mathcal{O} i satisfà $n(\omega) = -dm^2$ i $\text{tr}(\omega) = 0$. Així, si posem $\varphi(m\sqrt{d}) := \omega$, tenim definida una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$. És clar que, si considerem una representació diferent, la immersió obtinguda és diferent.

Suposem ara que $d \equiv 1 \pmod{4}$. Considerem una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$, donada per $\varphi\left(m\frac{(1+\sqrt{d})}{2}\right) = \omega$; és a dir, donada per $\omega \in \mathcal{O}$ tal que $n(\omega) = m^2(1-d)/4$ i $\text{tr}(\omega) = m$. Considerem $e = \varphi(m\sqrt{d}) = 2\omega - m$. Aleshores, $e \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$ satisfà que $n(e) = -dm^2$ i $\text{tr}(e) = 0$. Per tant, $e = (0, x, y, z)_{\mathcal{B}'}$ i $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}(x, y, z) = n(e)$. Així, (x, y, z) és una representació de $-dm^2$ per $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}$; per tant, $\rho(\varphi) := (x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. És clar que ρ és injectiva per construcció.

A la inversa, sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. Posem $e = x(2v_2) + y(2v_3) + z(2v_4 - \text{tr}(v_4))$. Aleshores, tenim que $e \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$ satisfà que $n(e) = -dm^2$ i $\text{tr}(e) = 0$. Notem que $e = (-z \text{tr}(v_4), 2x, 2y, 2z)_{\mathcal{B}}$, respecte de la base normalitzada de \mathcal{O} . Considerem ara l'element $\omega = (m + e)/2 = ((m - z \text{tr}(v_4))/2, x, y, z)_{\mathcal{B}}$, el qual clarament satisfà que $n(\omega) = (1-d)m^2/4$ i $\text{tr}(\omega) = m$. Tenim que $\omega \in \mathcal{O}$ si, i només si, $2|(m - z \text{tr}(v_4))$. Si \mathcal{O} és un ordre senar, tenim que $\text{tr}(v_4) = 1$ i la condició equival al fet que m i z siguin de la mateixa paritat. Efectivament, si $2|z$, aleshores $4|n(e)$; com que $n(e) = -dm^2$, per d lliure de quadrats, deduïm que m és parell. A la inversa, si m és parell tenim que $2|n(e) = n_{\mathcal{O},3}(-z, 2x, 2y, 2z)$ i deduïm $2|z$. Si \mathcal{O} és un ordre parell, tenim que $\text{tr}(v_4) = 0$ i la condició equival al fet que m sigui parell. Efectivament, si \mathcal{O} és un ordre parell i $d \equiv 1 \pmod{4}$, tenim que $e = (0, 2x, 2y, 2z)_{\mathcal{B}}$ i, per tant, $4|n(e) = -dm^2$. Ara bé, com que d és lliure de quadrats, deduïm que m és parell, com volíem demostrar. Així, queda

provat que $\omega \in \mathcal{O}$, amb $n(\omega) = m^2(1-d)/4$ i $\text{tr}(\omega) = m$, per la qual cosa $\varphi\left(m\frac{(1+\sqrt{d})}{2}\right) := \omega$ defineix una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$. Això completa la demostració de (i).

En particular, hem provat que, si \mathcal{O} és un ordre parell, m és senar i $d \equiv 1 \pmod{4}$, tenim que $\mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z}) = \emptyset$. Notem que, en les mateixes condicions, també tenim que $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda) = \emptyset$, ja que en un ordre parell no hi ha cap element que pugui ser imatge de $m\frac{(1+\sqrt{d})}{2}$.

Vegem a continuació la bijecció entre $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$ i $\mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(D_\Lambda)}, \frac{(D_\Lambda^2 - D_\Lambda)}{4}; \mathbb{Z}\right)$ corresponent a l'apartat (ii). Prenem a l'ordre Λ la \mathbb{Z} -base $\{1, \lambda\}$, amb $\lambda = \frac{D_\Lambda + \sqrt{D_\Lambda}}{2}$, independent del valor de d mòdul 4. Aleshores, definir la immersió φ és equivalent a fixar un element $\varphi(\lambda) \in \mathcal{O}$ de norma igual a $\frac{D_\Lambda^2 - D_\Lambda}{4}$ i traça igual a D_Λ . Per construcció de $n_{\mathcal{O},3}^{(D_\Lambda)}$, és clar que això és equivalent a trobar un punt de la quàdrica $n_{\mathcal{O},3}^{(D_\Lambda)} = \frac{D_\Lambda^2 - D_\Lambda}{4}$. Per tant, obtenim la bijecció desitjada.

Notem que, quan $d \equiv 1 \pmod{4}$ i m és senar, tenim que $D_\Lambda = D_F m^2$ és senar. Per tant, si \mathcal{O} és un ordre parell, aleshores $\mathcal{O} \cap H_{D_\Lambda} = \emptyset$ i la quàdrica és buida. Per tant, en aquestes condicions, $\mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(D_\Lambda)}, \frac{(D_\Lambda^2 - D_\Lambda)}{4}; \mathbb{Z}\right) = \emptyset$, en consonància amb els altres dos conjunts. Això completa la demostració de (ii).

Anem a provar (iii). Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$, una immersió de Λ en \mathcal{O} . Considerem l'element $\omega \in \mathcal{O}$ tal que $\omega = \varphi(m\omega) \in H - \mathbb{Q}$ i posem P la matriu que expressa 1 i ω en coordenades respecte de la base de \mathcal{O} fixada. És clar que P té coeficients a \mathbb{Z} . Com que $n(\alpha) = n_{\Lambda,2}(\alpha) = n_{\mathcal{O},4}(\varphi(\alpha))$, matricialment tenim la igualtat $P^t A(n_{\mathcal{O},4}) P = A(n_{\Lambda,2})$. Per tant, $n_{\mathcal{O},4}$ representa $n_{\Lambda,2}$ sobre \mathbb{Z} i posem $\varrho(\varphi) = P \in \mathcal{R}(n_{\mathcal{O},4}, n_{\Lambda,2}; \mathbb{Z})$. \square

A partir dels detalls de la demostració anterior, obtenim el corollari següent.

7.3.4 Corollari. *Sigui $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic amb una base normalitzada \mathcal{B} fixada. Sigui $\Lambda(d, m)$ un ordre quadràtic. Aleshores, l'aplicació ρ^{-1} ve donada per*

$$\rho^{-1} : \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$$

$$(x, y, z) \longmapsto \varphi,$$

on φ és la immersió definida per $\varphi(m\omega) = \left(\frac{rm - z \text{tr}(u_4)}{2}, x, y, z\right)_B$, on $r = 0$ si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ i $r = 1$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$. \square

Podem donar altres maneres alternatives de trobar immersions d'un ordre quadràtic Λ en un ordre quaterniònic \mathcal{O} , relacionades amb formes quadràtiques, que varien en funció de la base de Λ escollida, cf. proposició 4.5.3. Recollim les bijeccions explícites en la proposició següent, per tal que siguin fàcilment implementables.

7.3.5 Proposició. *Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic i $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ l'ordre quadràtic de conductor m . Fixem una base normalitzada $\mathcal{B} = \{1, v_2, v_3, v_4\}$ de \mathcal{O} . Una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$ es determina de forma efectiva a partir dels apartats següents.*

(i) *Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$.*

Si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, aleshores $\varphi(\sqrt{d}) = \left(\frac{-z \operatorname{tr}(v_4)}{2m}, \frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m} \right)_{\mathcal{B}}$; és a dir,

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m} \right)_{\mathcal{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és parell,} \\ \left(-\frac{z}{2m}, \frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m} \right)_{\mathcal{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar.} \end{cases}$$

Si $d \equiv 1 \pmod{4}$, aleshores $\varphi(\sqrt{d}) = \left(\frac{-z \operatorname{tr}(v_4)}{m}, \frac{2x}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m} \right)_{\mathcal{B}}$; és a dir,

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{2x}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m} \right)_{\mathcal{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és parell i } 2|m, \\ \left(\frac{-z}{m}, \frac{2x}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m} \right)_{\mathcal{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar.} \end{cases}$$

(ii) *Suposem $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$. Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}, -dm^2; \mathbb{Z})$. Aleshores,*

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m} \right)_{\mathcal{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és parell,} \\ \left(\frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}, \frac{-2x}{m} \right)_{\mathcal{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar.} \end{cases}$$

Suposem $d \equiv 1 \pmod{4}$. Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(m)}, m^2 \frac{(1-d)}{4}; \mathbb{Z}\right)$. Aleshores,

res,

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{2x}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m}\right)_{\mathbb{B}} & \mathcal{O} \text{ és parell i } 2|m, \\ \left(\frac{2x}{m} - 1, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m}, -2\left(\frac{2x}{m} - 1\right)\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar.} \end{cases}$$

(iii) Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(mD_F)}, m^2 \frac{(D_F^2 - D_F)}{4}; \mathbb{Z}\right)$.

Si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, aleshores

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és parell,} \\ \left(\frac{x}{m} - 2d, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}, -2\left(\frac{x}{m} - 2d\right)\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar.} \end{cases}$$

Si $d \equiv 1 \pmod{4}$, aleshores

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{2x}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m}\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és parell} \\ & \text{i } m \text{ és parell,} \\ \left(\frac{2x}{m} - d, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m}, -2\left(\frac{2x}{m} - d\right)\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar.} \end{cases}$$

(iv) Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(D_\Lambda)}, \frac{(D_\Lambda^2 - D_\Lambda)}{4}; \mathbb{Z}\right)$.

Si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, aleshores

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és parell,} \\ \left(\frac{x}{m} - 2dm, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}, -2\left(\frac{x}{m} - 2dm\right)\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar.} \end{cases}$$

Si $d \equiv 1 \pmod{4}$, aleshores

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{2x}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m}\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és parell} \\ & \text{i } m \text{ és parell,} \\ \left(\frac{2x}{m} - dm, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m}, -2\left(\frac{2x}{m} - dm\right)\right)_{\mathbb{B}} & \text{si } \mathcal{O} \text{ és senar.} \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓ: Considerem la base $\{1, mw\}$ de l'ordre quadràtic Λ , amb $w = \sqrt{d}$ si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, i $w = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$.

Resseguint els detalls de la demostració de la proposició anterior, tenim que la immersió es defineix a partir de $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathcal{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. De forma natural, aquesta representació es correspon amb un element $e \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, imatge d'un element de l'ordre quadràtic. Si utilitzem la relació d'aquest element amb \sqrt{d} , deduïm l'expressió de $\varphi(\sqrt{d})$ en funció de la representació, la qual depèn del valor de d a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, tal com es troba expressat en l'apartat (i).

Els resultats de l'apartat (ii) es dedueixen directament de l'expressió de la immersió en la base $\{1, mw\}$ de Λ . Recordem que, per a definir la immersió, ens cal donar $\omega = \varphi(mw) \in \mathcal{O}$. Per construcció de $n_{\mathcal{O},3}$ i $n_{\mathcal{O},3}^{(m)}$, això equival a trobar un element (x, y, z) de $\mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}, -dm^2; \mathbb{Z})$ o de $\mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}^{(m)}, \frac{(1-d)}{4}m^2; \mathbb{Z})$, depenent de si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ o $d \equiv 1 \pmod{4}$, respectivament. Aleshores, $\omega = (\mu/2, x, y, x)$ si \mathcal{O} és parell, i $\omega = (x, y, x, \mu - 2x)$ si \mathcal{O} és senar, on $\mu = 0$ si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, i $\mu = m$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$. D'aquí deduïm les expressions de $\varphi(\sqrt{d})$ indicades en l'apartat (ii).

Considerem ara la base $\{1, m\frac{D_F+\sqrt{D_F}}{2}\}$ de Λ . Una immersió es determina en fixar $\omega = \varphi(m\frac{D_F+\sqrt{D_F}}{2})$. Això equival a trobar una representació (x, y, z) del conjunt $\mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}^{(mD_F)}, m^2\frac{(D_F^2-D_F)}{4}; \mathbb{Z})$. Obtenim que $\omega = (mD_F/2, x, y, x)$ si \mathcal{O} és parell, i $\omega = (x, y, x, mD_F - 2x)$ si \mathcal{O} és senar, cf. 6.1.16. En explicitar la base de Λ en funció de d , deduïm les expressions de $\varphi(\sqrt{d})$ indicades en l'apartat (iii).

L'apartat (iv) és l'anàleg de l'apartat (iii) si fixem a l'ordre quadràtic Λ la base $\{1, m\frac{D_\Lambda+\sqrt{D_\Lambda}}{2}\}$. Notem que varia ben poc. En aquest cas, la immersió φ es determina en donar $\omega = \varphi(m\frac{(D_\Lambda+\sqrt{D_\Lambda})}{2})$. Això correspon a trobar un element de norma igual a $\frac{D_\Lambda^2-D_\Lambda}{4}$ i traça igual a D_Λ ; és a dir, un element de $\mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}^{D_\Lambda}, \frac{(D_\Lambda^2-D_\Lambda)}{4}; \mathbb{Z})$. De forma anàloga als apartats anteriors, només cal aïllar $\varphi(\sqrt{d})$, segons el valor de d a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. \square

En el cas dels ordres parells, els resultats s'expressen de manera més simple en el corollari següent.

7.3.6 Corollari. *Sigui \mathcal{O} un ordre parell d'una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions H*

i fixem una base normalitzada \mathcal{B} de \mathcal{O} . Sigui $\Lambda \subseteq F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ l'ordre de conductor m . Aleshores tota immersió φ de Λ en \mathcal{O} és de la forma

$$\varphi(\sqrt{d}) = \begin{cases} \left(0, \frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}\right)_{\mathcal{B}} & \text{si } d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ \left(0, \frac{2x}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m}\right)_{\mathcal{B}} & \text{si } d \equiv 1 \pmod{4} \text{ i } m \text{ és parell,} \end{cases}$$

o, equivalentment,

$$\varphi(\sqrt{D_F}) = \left(0, \frac{2x}{m}, \frac{2y}{m}, \frac{2z}{m}\right)_{\mathcal{B}},$$

on (x, y, z) pertany a algun dels conjunts següents:

(i) $\mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$.

(ii) $\mathcal{R}(n_{\mathcal{O},3}, -dm^2; \mathbb{Z})$, si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$;

$\mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(m)}, m^2 \frac{(1-d)}{4}; \mathbb{Z}\right)$, si $d \equiv 1 \pmod{4}$.

(iii) $\mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(mD_F)}, m^2 \frac{(D_F^2 - D_F)}{4}; \mathbb{Z}\right)$.

(iv) $\mathcal{R}\left(n_{\mathcal{O},3}^{(D_{\Lambda})}, \frac{(D_{\Lambda}^2 - D_{\Lambda})}{4}; \mathbb{Z}\right)$. \square

7.3.7 Proposició. Siguin \mathcal{O} i Λ ordres de H i $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, respectivament. Siguin ρ i ϱ les aplicacions definides a 7.3.3. Aleshores,

(i) La restricció de ρ dona una bijecció

$$\rho^* : \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z}).$$

(ii) La restricció de ϱ dona una injecció

$$\varrho^* : \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda) \hookrightarrow \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O},4}, n_{\Lambda,2}; \mathbb{Z}).$$

DEMOSTRACIÓ: Suposem que Λ és l'ordre de conductor m i fixem la base $\{1, mw\}$, on $\{1, w\}$ és una base de l'anell d'enters Λ_F . Fixem també una base normalitzada $\mathcal{B} = \{1, v_2, v_3, v_4\}$ de l'ordre quaterniònic \mathcal{O} .

Sigui $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ donada per $\varphi(mw) = \omega$. Aleshores, per 7.3.3 tenim definit $\rho(\varphi) = (x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$ tal que, aplicant 7.3.4,

$$\omega = \left(\frac{rm - z \operatorname{tr}(v_4)}{2}, x, y, z \right)_B, \quad \text{on } r = \begin{cases} 0 & \text{si } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ 1 & \text{si } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Sigui $s \in \mathbb{Z}$ tal que $s \mid \operatorname{mcd}(x, y, z)$. Considerem un enter l tal que $l \equiv \frac{rm - z \operatorname{tr}(v_4)}{2} \pmod{s}$ i prenem l'element $\frac{\omega - l}{s} = \frac{1}{s} \left(\frac{rm - z \operatorname{tr}(v_4)}{2} - l, x, y, z \right)_B$, el qual pertany a l'ordre \mathcal{O} perquè té totes les coordenades enteres. És clar que $\frac{\omega - l}{s} = \varphi\left(\frac{mw - l}{s}\right)$. Per tant, com que φ és una immersió optimal, ha de ser $\frac{mw - l}{s} \in \Lambda$, la qual cosa ens diu que $s = 1$. Així, $(x, y, z) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$, com volíem demostrar.

A la inversa, sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$. Per la bijecció de 7.3.3, aquesta representació es correspon amb la immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$ donada per $\varphi(mw) = \left(\frac{rm - z \operatorname{tr}(v_4)}{2}, x, y, z \right)_B$, on $r = 0$ si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, i $r = 1$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$. Volem veure que φ és una immersió optimal. Suposem que $\varphi(k + smw) \in \mathcal{O}$ amb $k, s \in \mathbb{Q}$; hem de veure que $k, s \in \mathbb{Z}$. Per definició de φ , tenim que

$$\varphi(k + smw) = \left(k + \frac{s(rm - z \operatorname{tr}(v_4))}{2}, sa, sb, sc \right)_B,$$

on $s = \frac{s_1}{s_2}$ amb $\operatorname{mcd}(s_1, s_2) = 1$. Aleshores, deduïm que $s_2 \mid \operatorname{mcd}(x, y, z) = 1$ i, per tant, $s \in \mathbb{Z}$. Llavors també són enters els nombres

$$k + \frac{s(rm - z \operatorname{tr}(v_4))}{2} \quad \text{i} \quad \frac{s(rm - z \operatorname{tr}(v_4))}{2},$$

d'on resulta $k \in \mathbb{Z}$. Així, $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$, la qual cosa completa la demostració de (i).

Per a provar (ii), considerem $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$, donada per $\varphi(mw) = \omega$. Hem definit $\rho(\varphi) = P \in \mathcal{R}(n_{\mathcal{O},4}, n_{\Lambda,2}; \mathbb{Z})$, on P és la matriu donada per 1 i ω expressats respecte de la base de \mathcal{O} fixada; és a dir,

$$\omega = \left(\frac{rm - z \operatorname{tr}(v_4)}{2}, x, y, z \right)_B, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{rm - z \operatorname{tr}(v_4)}{2} \\ 0 & x \\ 0 & y \\ 0 & z \end{pmatrix},$$

on $r = 0$ si $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$, i $r = 1$ si $d \equiv 1 \pmod{4}$, per algun $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$. Comprovem que el màxim comú divisor dels menors

2×2 de P és igual a $\text{mcd}(x, y, z) = 1$. Però a l'apartat anterior, com que $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$, ja hem provat que $\text{mcd}(x, y, z) = 1$. Per tant, $P \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O},4}, n_{\Lambda,2}; \mathbb{Z})$, com volíem veure. \square

7.3.8 Lema. *Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(H, F)$. Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic i $\Lambda \subseteq F$ l'ordre quadràtic de conductor m . Suposem que $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$, de manera que $\rho_{\Lambda}(\varphi) = (x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$, on ρ_{Λ} denota la bijecció de $\mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$ a $\mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$. Posem $m' = \text{mcd}(x, y, z)$. Aleshores tenim que $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda')$, on Λ' és l'ordre quadràtic de F de conductor $\frac{m}{m'}$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\omega = \varphi(mw) \in \mathcal{O}$. En 7.3.4 s'obté una expressió explícita de ω en funció de x, y, z i és fàcil veure que $\frac{1}{m'}\omega \in \mathcal{O}$, ja que $m' = \text{mcd}(x, y, z)$. Així, $\varphi\left(\frac{m}{m'}w\right) = \frac{1}{m'}\omega \in \mathcal{O}$. Això ens diu que $\varphi\left(\frac{m}{m'}w\right)$ és un enter de H i $\frac{m}{m'}w$, un enter de F . Com que w és un element primitiu de l'anell d'enters Λ_F , és clar que $\frac{m}{m'} \in \mathbb{Z}$. Així tenim definida una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda')$.

Cal veure que φ és una immersió optimal. La bijecció de 7.3.3, per a l'ordre quadràtic Λ' , dóna que $\rho_{\Lambda'}(\varphi) = \frac{1}{m'}(x, y, z) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_{\Lambda'}; \mathbb{Z})$. Per la proposició 7.3.7, l'anterior ens assegura que $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda')$. \square

A continuació, explicitem la forma nòrmica ternària $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}$ de famílies d'ordres \mathcal{O} d'Eichler.

7.3.9 Lema. *Siguin $\mathcal{O}_0(1, N)$, $\mathcal{O}_M(1, N)$, $\mathcal{O}_A(2p, N)$ i $\mathcal{O}_B(pq, N)$, els ordres d'Eichler de nivell N de les àlgebres $M(2, \mathbb{Q})$, $\left(\frac{1, -1}{\mathbb{Q}}\right)$, $H_A(p)$ i $H_B(p, q)$, respectivament, donats en 1.2.35.*

$$(i) \quad n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_M(1,N),3} = -4NXY - Z^2.$$

$$(ii) \quad n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_A(2p,N),3} = -4pX^2 - 4pXZ + 4N^2Y^2 + 4NYZ + (1 - 2p)Z^2.$$

$$(iii) \quad n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_B(pq,N),3} = -4pN^2X^2 - 4pNXY + p(q - 1)Y^2 - qZ^2. \quad \square$$

7.3.10 Lema. *Sigui H una àlgebra de quaternions no ramificada. Siguin $\mathcal{O}(1, N) \subseteq \mathcal{O}(1, M)$ dos ordres d'Eichler de H de nivell N i M , respectivament, $M|N$. Si $\text{mcd}(m, \frac{N}{M}) = 1$, aleshores $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1, N), \Lambda) \subset \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1, M), \Lambda)$.*

DEMOSTRACIÓ: Per 7.3.5, una immersió Λ en un ordre \mathcal{O} equival a una representació de $m^2 n(w)$ per $n_{\mathcal{O},3}$ o $n_{\mathcal{O},3}^{(1)}$, dependent de $D_\Lambda \pmod 4$. En ambdós casos, és clar que, si (x_0, y_0, z_0) és una solució per a l'ordre de nivell N , $(x_0, \frac{N}{M}y_0, z_0)$ és una solució per a l'ordre de nivell M .

Comprovem la condició sobre la primitivitat. Suposem $\text{mcd}(x_0, y_0, z_0) = 1$ i posem $s = \text{mcd}(x_0, \frac{N}{M}y_0, z_0)$; així, $s = \text{mcd}(x_0, \frac{N}{M}, z_0)$; en particular, $s | \frac{N}{M}$. Substituint la representació obtenim $s | m$, però per hipòtesi $\text{mcd}(\frac{N}{M}, m) = 1$; per tant, $s = 1$. \square

7.3.11 Exemples. Considerem l'àlgebra de quaternions no ramificada $H = M(2, \mathbb{Q})$ i els ordres $\mathcal{O}_0(1, 1) = M(2, \mathbb{Z})$ i $\mathcal{O}_0(1, 5)$, maximal i d'Eichler de nivell 5, respectivament. Sigui $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ i considerem els ordres quadràtics: $\Lambda(m) = \mathbb{Z}[1, mw]$ per a $m = 1, 2, 5, 6$, on $w = \sqrt{-1}$. Calculant elements dels conjunts de representacions sobre \mathbb{Z} de 1, 4, 25 i 36 per les formes nòrmiques ternàries $n_{\mathcal{O}(1,1),3}(X, Y, Z) = -X^2 - YZ$ i $n_{\mathcal{O}(1,5),3}(X, Y, Z) = -X^2 - 5YZ$, obtenim les immersions $\varphi_s \in \mathcal{I}(H, F)$ donades per $\varphi_s(w) = \omega_s$, $1 \leq s \leq 9$, on

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \omega_4 &:= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}, & \omega_7 &:= \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ 5/6 & -1/3 \end{pmatrix}, \\ \omega_2 &:= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, & \omega_5 &:= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5/2 & -2 \end{pmatrix}, & \omega_8 &:= \begin{pmatrix} 1/5 & -13/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}, \\ \omega_3 &:= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, & \omega_6 &:= \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}, & \omega_9 &:= \begin{pmatrix} 0 & -1/5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aleshores, considerem els conjunts d'immersions possibles variant els ordres quadràtics i els ordres quaterniònics, entre els considerats en el paràgraf anterior. En la taula següent mostrem quines immersions de les donades pertanyen als conjunts d'immersions considerats. Assenyallem amb el símbol \bullet les caselles que determinen una immersió i un conjunt d'immersions al qual la immersió pertany, i amb el símbol $-$ els casos que no satisfan aquesta condició.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	φ_5	φ_6	φ_7	φ_8	φ_9
$\mathcal{I}(\mathcal{O}(1,1), \Lambda(-1,1))$	•	•	•	–	–	–	–	–	–
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1,1), \Lambda(-1,1))$	•	•	•	–	–	–	–	–	–
$\mathcal{I}(\mathcal{O}(1,1), \Lambda(-1,2))$	•	•	•	•	•	–	–	–	–
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1,1), \Lambda(-1,2))$	–	–	–	•	•	–	–	–	–
$\mathcal{I}(\mathcal{O}(1,1), \Lambda(-1,5))$	•	•	•	–	–	–	–	•	•
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1,1), \Lambda(-1,5))$	–	–	–	–	–	–	–	•	•
$\mathcal{I}(\mathcal{O}(1,1), \Lambda(-1,6))$	•	•	•	•	•	•	•	–	–
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1,1), \Lambda(-1,6))$	–	–	–	–	–	•	•	–	–
$\mathcal{I}(\mathcal{O}(1,5), \Lambda(-1,1))$	–	–	•	–	–	–	–	–	–
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1,5), \Lambda(-1,1))$	–	–	•	–	–	–	–	–	–
$\mathcal{I}(\mathcal{O}(1,5), \Lambda(-1,2))$	–	–	•	–	•	–	–	–	–
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1,5), \Lambda(-1,2))$	–	–	–	–	•	–	–	–	–
$\mathcal{I}(\mathcal{O}(1,5), \Lambda(-1,5))$	–	•	•	–	–	–	–	–	•
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1,5), \Lambda(-1,5))$	–	•	–	–	–	–	–	–	•
$\mathcal{I}(\mathcal{O}(1,5), \Lambda(-1,6))$	–	–	•	–	•	–	•	–	–
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(1,5), \Lambda(-1,6))$	–	–	–	–	–	–	•	–	–

7.3.12 Exemples. Considerem l'àlgebra de quaternions $H_A(7) = \left(\frac{7, -1}{\mathbb{Q}}\right)$ i l'ordre maximal $\mathcal{O}_A(7, 1) = \mathbb{Z}[1, i, j, \frac{1+i+j+ij}{2}]$. Sigui $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ i posem $w = \sqrt{-1}$. Considerem els ordres quadràtics: $\Lambda(-1, 1)$, $\Lambda(-1, 3)$ i $\Lambda(-1, 15)$. Considerem les immersions $\varphi_s \in \mathcal{I}(H_A(7), F)$, donades per $\varphi_s(w) = \omega_s$, $s = 1, \dots, 4$, on $\omega_1 := j$, $\omega_2 := 3i + 8j$, $\omega_3 := 1/3i + 4/3j$, $\omega_4 := 1/15i + 22/15j + 2/5ij$. Per a obtenir-les, hem considerat representacions de 1, 9 i 225 per la forma nòrmica ternària $n_{\mathcal{O}(14,1),3}(X, Y, Z) = -13X^2 + 14XY - 2XZ - 7Y^2 + Z^2$.

	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4
$\mathcal{I}(\mathcal{O}_A(7, 1), \Lambda(-1, 1))$	•	•	–	–
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}_A(7, 1), \Lambda(-1, 1))$	•	•	–	–
$\mathcal{I}(\mathcal{O}_A(7, 1), \Lambda(-1, 3))$	•	•	•	–
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}_A(7, 1), \Lambda(-1, 3))$	–	–	•	–
$\mathcal{I}(\mathcal{O}_A(7, 1), \Lambda(-1, 15))$	•	•	•	•
$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}_A(7, 1), \Lambda(-1, 15))$	–	–	–	•

7.3.13 Proposició. Sigui \mathcal{O} un ordre quaterniònic amb una base normalitzada B fixada. Aleshores, tenim un homomorfisme de grups

$$\kappa : \text{Nor}(\mathcal{O}) \longrightarrow \text{GL}(3, \mathbb{Z}),$$

el qual factoritza en un monomorfisme $\kappa : \text{Nor}(\mathcal{O})/\mathbb{Q}^* \hookrightarrow \text{GL}(3, \mathbb{Z})$.

DEMOSTRACIÓ: Definim l'aplicació κ . Sigui $\sigma \in \text{Nor}(\mathcal{O})$. Sigui \mathcal{B}' la base obtinguda a partir de \mathcal{B} conjugant per σ , que és també una base normalitzada de \mathcal{O} , cf. 1.2.12. Sigui $S_{k,4}$ la matriu del canvi de base de \mathcal{B}' a \mathcal{B} , on $k = 1$ si \mathcal{O} és senar i $k = 0$ si \mathcal{O} és parell. Com que ambdues bases són normalitzades, la matriu $S_{k,4}$ satisfà les condicions de 1.2.11 i determina unívocament una matriu $S_{k,3} \in \text{GL}(3, \mathbb{Z})$. Definim $\kappa(\sigma) := S_{k,3}$.

Vegem que és un homomorfisme. És clar que, si considerem $\sigma = 1$, aleshores tenim que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ i, per tant, $S_{k,3}$ és la matriu identitat. Siguin $\kappa(\sigma) = S_{k,3}$ i $\kappa(\sigma') = S'_{k,3}$. Considerem l'element $\sigma\sigma'$. Si denotem per $S''_{k,4}$ la matriu del canvi de base corresponent a la conjugació per l'element $\sigma\sigma'$, aleshores tenim que $\kappa(\sigma\sigma') = S''_{k,3}$. Cal veure que $S''_{k,3} = S_{k,3}S'_{k,3}$. En efecte, és clar que tenim la relació $S''_{k,4} = S_{k,4}S'_{k,4}$; és a dir,

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & S''_{k,3} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & S_{k,3} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & S'_{k,3} \end{array} \right),$$

on les entrades de $*$ estan determinades per la resta de la matriu. D'aquí deduïm la relació que volíem.

Finalment, vegem com factoritza κ . Suposem que tenim que $\kappa(\sigma) = S_{k,3}$ coincideix amb $\kappa(\sigma') = S'_{k,3}$. Aleshores, tenim que $S_{k,4} = S'_{k,4}$. Per tant, les bases $(\sigma')^{-1}\mathcal{B}\sigma'$ i $\sigma^{-1}\mathcal{B}\sigma$ són la mateixa. Això ens diu que $(\sigma')^{-1}v\sigma' = \sigma^{-1}v\sigma$ per a tot $v \in H$, i d'aquí deduïm que $\sigma'\sigma^{-1}$ commuta amb tots els elements de H ; per tant, $\sigma'\sigma^{-1}$ és un element de $Z(H) = \mathbb{Q}$ invertible. \square

7.3.14 Proposició. *Siguen $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ i $\sigma \in \text{Nor}(\mathcal{O})$. Aleshores,*

$$\rho^*(\varphi^\sigma) = \kappa(\sigma)\rho^*(\varphi) \text{ a } \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z}).$$

DEMOSTRACIÓ: Considerem $\rho^*(\varphi) = (x, y, z)$ i $\rho^*(\varphi^\sigma) = (x', y', z')$, on $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. Per la proposició 7.3.3, si fixem la base $\{1, mw\}$ de Λ , tenim que $\omega := \varphi(mw) = (\lambda, x, y, z)_B$ i $\omega' := \varphi^\sigma(mw) = (\lambda', x', y', z')_B$, on $\lambda := \frac{rm-z \text{tr}(v_4)}{2}$ i $\lambda' = \frac{rm-z' \text{tr}(v_4)}{2}$. Per definició, $\varphi^\sigma(\alpha) = \sigma^{-1}\varphi(\alpha)\sigma$, per a tot $\alpha \in F$; per tant, considerem $\alpha = mw$ i obtenim que $\omega' = \sigma^{-1}\omega\sigma$. Explicitem aquesta relació.

Considerem \mathcal{B}' la base obtinguda en conjuguar \mathcal{B} per σ . Aleshores, per la relació anterior, les coordenades de ω' respecte de la base \mathcal{B}' coincideixen amb les coordenades de ω respecte de la base \mathcal{B} ; és a dir, $\omega' = (\lambda', x', y', z')_B = (\lambda, x, y, z)_B$. Si ho escrivim matricialment, amb $S_{k,4}$ la matriu de canvi de la

base \mathcal{B}' a la base \mathcal{B} ,

$$S_{k,4} \begin{pmatrix} \lambda \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad S_{k,4} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & * \\ \hline 0 & S_{k,3} \end{array} \right),$$

deduïm que

$$S_{k,3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Ara bé, per la definició de l'aplicació κ de la proposició anterior, la relació obtinguda és precisament $\rho^*(\varphi^\sigma) = \kappa(\sigma)\rho^*(\varphi)$. \square

Notem que no podem afirmar que dues representacions que estiguin relacionades per una matriu $Q \in \text{GL}(3, \mathbb{Z})$ provinquin d'immersions equivalents, cf. 1.1.17. Cal afinar l'equivalència en el conjunt de representacions.

7.3.15 Notació. Donat G un subgrup de $\text{Nor } \mathcal{O}$, denotem per $\kappa(G)$ el subgrup de $\text{GL}(3, \mathbb{Z})$ imatge del grup G per l'aplicació anterior. Així, podem considerar el conjunt quocient $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})/\kappa(G)$. El seu nombre d'elements, si s'escau, el denotarem per $r^*(\mathcal{O}, \Lambda; G)$; és a dir,

$$r^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; G) := \# \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})/\kappa(G).$$

7.3.16 Teorema. *Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic i $\Lambda(d, m)$ un ordre quadràtic. Siguí G un grup, $\mathcal{O}^* \subseteq G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$. Aleshores, hi ha una bijecció*

$$\overline{\rho^*} : \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)/G \longrightarrow \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})/\kappa(G).$$

DEMOSTRACIÓ: Només cal utilitzar la proposició 7.3.14 anterior i el fet que l'aplicació ρ^* és bijectiva, vist a 7.3.7.

Efectivament, siguin $\overline{\varphi} = \overline{\varphi'} \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)/G$; aleshores existeix $\sigma \in G$ tal que $\varphi' = \varphi^\sigma$. Per la proposició 7.3.14, tenim que $\rho^*(\varphi^\sigma) = \kappa(\sigma)\rho^*(\varphi)$; per tant, obtenim la igualtat $\overline{\rho^*(\varphi^\sigma)} = \overline{\rho^*(\varphi)}$ a $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})/\kappa(G)$.

A la inversa, considerem dues representacions de $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. Podem suposar que són $\overline{\rho^*(\varphi)}$ i $\overline{\rho^*(\varphi')}$, ja que l'aplicació ρ^* és exhaustiva. Suposem que $\overline{\rho^*(\varphi)} = \overline{\rho^*(\varphi')}$; és a dir, suposem que existeix $\sigma \in G$ tal que $\rho^*(\varphi') = \kappa(\sigma)\rho^*(\varphi)$. Aleshores, tenim que $\rho^*(\varphi') = \rho^*(\varphi^\sigma)$ i la injectivitat de ρ^* assegura que $\varphi' = \varphi^\sigma$. \square

7.3.17 Corollari. *Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaternionic, $\Lambda(d, m)$ un ordre quadràtic i G un grup $\mathcal{O}^* \subseteq G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$. Aleshores, el nombre de $\kappa(G)$ -classes de representacions primitives de $-D_\Lambda$ per a la forma ternària $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}$ és*

$$r^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; G) = \nu(\mathcal{O}, \Lambda; G). \quad \square$$

En la secció 7.5 mostrem taules amb les formes $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}$ i els nombres de classes $r^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathcal{O}^*)$ calculats per a ordres d'Eichler \mathcal{O} de les àlgebres $H_A(3)$, $H_B(2, 5)$, $H_A(7)$ i $H_B(3, 5)$.

7.4 Classificació de formes binàries associades a ordres quaternionics

En aquesta secció, relacionem els conjunts d'immersions d'ordres quadràtics en ordres quaternionics amb conjunts de formes quadràtiques binàries. En primer lloc, enunciem les bijeccions de conjunts corresponents, i remarquem la relació amb el conjunt de representacions per formes ternàries de la secció anterior. Això ens permet introduir un concepte de primitivitat en les formes binàries considerades i una relació d'equivalència.

7.4.1 Notació. Sigui H una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions. Donat un ordre $\mathcal{O} \subseteq H$, $m_{\mathcal{O}}$ denota el denominador de l'ordre, cf. 1.2.13. Recordem la notació utilitzada per al conjunt de formes quadràtiques binàries associat a un ordre quaternionic \mathcal{O} ,

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) := \{f_{\mathcal{O}}(\omega) : \omega \in \mathcal{O} \cap H_0\}.$$

Donat un ordre quaternionic \mathcal{O} i un ordre quadràtic Λ , posem

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}, \Lambda) := \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{O}) : \det_1(f) = -D_\Lambda\}. \quad \square$$

7.4.2 Proposició. *Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaternionic i $\Lambda(d, m)$ un ordre quadràtic. Aleshores, la correspondència*

$$\begin{aligned} \mathfrak{f} : \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda) &\longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda) \\ \varphi &\longmapsto \mathfrak{f}(\varphi) = f_{\Phi(\varphi(\sqrt{D_\Lambda}))} \end{aligned}$$

és una bijecció.

DEMOSTRACIÓ: Posem $\mathcal{O}' := \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$. Per la proposició 7.3.3, cada immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$ es correspon amb un element $e \in \mathcal{O}'$ de $n(e) = -D_\Lambda$ i $\text{tr}(e) = 0$,

$$e := \begin{cases} \varphi(2m\sqrt{d}) & \text{si } d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ \varphi(m\sqrt{d}) & \text{si } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Ho podem expressar posant $e = \varphi(\sqrt{D_\Lambda})$. Per la proposició 6.3.6, cada un d'aquests elements de $\mathcal{O}' \cap H_0$ es correspon bijectivament amb una forma quadràtica binària de $\mathcal{H}(\mathcal{O}', \Lambda)$. \square

7.4.3 Corollari. *Tenim una bijecció entre els conjunts $\mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$ i $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda)$, donada per $\mu := \mathfrak{f} \circ \rho^{-1}$, on ρ és la bijecció donada a 7.3.3.*
 \square

7.4.4 Definició. Considerem el subconjunt de formes quadràtiques binàries de $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda)$, definit per

$$\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda) := \mathfrak{f}(\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)).$$

Les formes binàries que pertanyen a $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda)$, les anomenem formes binàries (\mathcal{O}, Λ) -primitives.

7.4.5 Corollari. *Les bijeccions \mathfrak{f} i μ anteriors es restringeixen a les bijeccions:*

$$\mathfrak{f}^* : \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda),$$

$$\mu^* : \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda). \square$$

7.4.6 Definició. Sigui $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic i $\Phi : H \hookrightarrow M(2, \mathbb{R})$ una immersió fixada. Definim l'aplicació:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} : \text{Nor}(\mathcal{O}) &\longrightarrow \{P \in \text{GL}(2, \mathbb{R}) : \det P = \pm 1\} \\ \sigma &\mapsto \tilde{\Phi}(\sigma) := \frac{\Phi(\sigma)}{n(\sigma)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Sigui G un grup, $G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$. Anomenem grup d'homografies quaterniòniques definit per G el grup $\Gamma_G := \tilde{\Phi}(G)_2$, imatge de G per l'aplicació $\tilde{\Phi}$ anterior. En particular, si $G \subseteq \mathcal{O}^*$, aleshores $\tilde{\Phi}(G) = \Phi(G)$. Si \mathcal{O} és un ordre d'Eichler de nivell N en una \mathbb{Q} -àlgebra de quaternions indefinida de discriminant D , per a $G = \mathcal{O}_+^*$ obtenim $\Gamma_G = \Gamma(D, N)$, el grup d'homografies quaterniòniques definit a la secció 2.3. \square

7.4.7 Teorema. *Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic i $\Lambda(d, m)$ un ordre quadràtic. Siguin $G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$ un grup. Aleshores, la bijecció f de 7.4.2 induïx una bijecció entre els conjunts de classes*

$$\bar{f} : \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)/G \longrightarrow \mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda)/\Gamma_G.$$

DEMOSTRACIÓ: Cal comprovar que $\varphi, \varphi' \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ són G -equivalents si, i només si, $f^*(\varphi), f^*(\varphi') \in \mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda)$ són Γ_G -equivalents, ja que f^* ja és una bijecció. Posem $\alpha = \sqrt{D_\Lambda}$.

$$f^*(\varphi^\sigma) = f_{\Phi(\varphi^\sigma(\alpha))} = f_{\Phi(\sigma^{-1}\varphi(\alpha)\sigma)} = f_{\Phi(\sigma)^{-1}\Phi(\varphi(\alpha))\Phi(\sigma)}.$$

Si ara apliquem el lema 2.2.8, obtenim que l'expressió anterior és igual a

$$\frac{1}{\det(\Phi(\sigma))} \Phi(\sigma)^t f_{\Phi(\varphi(\alpha))} \Phi(\sigma) = \frac{\Phi(\sigma)^t}{\sqrt{n(\sigma)}} f_{\Phi(\varphi(\alpha))} \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{n(\sigma)}}.$$

Posem $P := \tilde{\Phi}(\sigma)$ i tenim efectivament $f^*(\varphi') = P^t f^*(\varphi) P$. Com que l'aplicació $\tilde{\Phi}$ és exhaustiva sobre Γ_G , deduïm la bijecció. \square

7.4.8 Notació. Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic i $\Lambda \subseteq F$ un ordre quadràtic. Fixem un grup $G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$. Denotem per $h(\mathcal{O}, \Lambda; G)$, si s'escau, el nombre de classes del conjunt de formes binàries (\mathcal{O}, Λ) -primitives $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda)/\Gamma_G$.

En particular, si $\mathcal{O} = \mathcal{O}(D, N)$, $\Lambda = \Lambda(d, m)$ i $G = \mathcal{O}(D, N)^*$, utilitzem també les notacions següents:

$$\begin{aligned} H(D, N, d, m) &:= \mathcal{H}^*(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(d, m))/\Gamma_{\mathcal{O}(D, N)^*} \\ h(D, N, d, m) &:= \# H(D, N, d, m). \end{aligned}$$

7.4.9 Corol·lari. *Siguin $\mathcal{O} \subseteq H$ un ordre quaterniònic, $\Lambda(d, m)$ un ordre quadràtic i un grup $G \subseteq \text{Nor}(\mathcal{O})$. Aleshores, el nombre de classes de formes binàries de $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda)$, (\mathcal{O}, Λ) -primitives, per la relació de Γ_G -equivalència, és*

$$h(\mathcal{O}, \Lambda; G) = \nu(\mathcal{O}, \Lambda; G). \quad \square$$

A continuació, considerem ordres d'Eichler d'àlgebres de quaternions no ramificades, poc ramificades de tipus A i poc ramificades de tipus B. Per a aquests, en les proposicions següents explicitem els conjunts de formes binàries i les bijeccions anteriors. En primer lloc, obtenim el lema general següent.

7.4.10 Lema. *Sigui \mathcal{O} un ordre quaterniònic d'una àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ indefinida. Suposem $a > 0$ i fixem la immersió $\Phi : H \hookrightarrow M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a}))$. Aleshores,*

$$\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}) \subseteq \left\{ \frac{2}{m_{\mathcal{O}}} (b(\lambda_2 - \lambda_3\sqrt{a}), -2\lambda_1\sqrt{a}, -(\lambda_2 + \lambda_3\sqrt{a})) : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

DEMOSTRACIÓ: Per a un quaternió pur $e \in (\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}) \cap H_0$, tenim en general que

$$\Phi(e) = \frac{2}{m_{\mathcal{O}}} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ b\beta' & \alpha' \end{pmatrix} = \frac{2}{m_{\mathcal{O}}} \begin{pmatrix} \lambda_1\sqrt{a} & \lambda_2 + \lambda_3\sqrt{a} \\ b(\lambda_2 - \lambda_3\sqrt{a}) & -\lambda_1\sqrt{a} \end{pmatrix},$$

on $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$ i $\text{tr}(\alpha) = 0$, i $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{Z}$. La forma quadràtica binària corresponent és

$$f_{\Phi(e)} = \frac{2}{m_{\mathcal{O}}} (b\beta', -2\alpha, -\beta) = \frac{2}{m_{\mathcal{O}}} (b(\lambda_2 - \lambda_3\sqrt{a}), -2\lambda_1\sqrt{a}, -\lambda_2 - \lambda_3\sqrt{a}). \quad \square$$

7.4.11 Teorema. *Considerem l'àlgebra no ramificada $H = M(2, \mathbb{Q})$ i l'ordre $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0(1, N)$, que és un ordre d'Eichler de nivell N . Sigui $\Lambda = \Lambda(d, m)$ un ordre quadràtic qualsevol.*

$$(i) \quad \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N), \Lambda) = \{f = 2(Na, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}, \det_1(f) = -D_{\Lambda}\} \\ \leftrightarrow \{f = (Na, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}, \det_2(f) = -D_{\Lambda}\}.$$

(ii) *Sigui μ_0 la bijecció de 7.4.3. Aleshores:*

$$\mu_0 : \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N), 3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N), \Lambda) \\ (x, y, z) \longmapsto 2(Ny, -x, -z).$$

(iii) *El conjunt de formes binàries $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N), \Lambda)$ és igual a*

$$\{2(Na, b, c) \in \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N), \Lambda) : \text{mcd}(a, b, c) = 1\}.$$

DEMOSTRACIÓ: Calculem $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N))$. Es comprova que

$$(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N)) \cap H_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ 2Nz & -x \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Per a cada $\omega \in (\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N)) \cap H_0$, tenim que $f_{\Phi(\omega)} = (2Nz, -2x, -2y)$. Per tant,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N)) &= \{2(Na, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N), \Lambda) &= \{g = 2(Na, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}, \det_1(g) = -D_\Lambda\}.\end{aligned}$$

Ara bé, si considerem $f = \frac{1}{2}g$, tenim que $\det_2(f) = \det_1(g) = -D_\Lambda$. Així,

$$\mathcal{H}(1, N, d, m) \simeq \{f = (Na, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}, \det_2(f) = -D_\Lambda\}.$$

Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_0(1,N),3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. Pels resultats de la secció anterior, aquesta representació ens determina l'element $e = \begin{pmatrix} x & 2y \\ 2Nz & -x \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_0(1, N) \cap H_0$, de norma $n(e) = -D_\Lambda$. La forma binària corresponent a aquest element és $f_{\Phi(e)} = 2(Ny, -x, -z)$.

Suposem que $(x, y, z) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_0(1,N),3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$; és a dir, $\text{mcd}(x, y, z) = 1$. Aleshores, és clar que la forma binària donada per la bijecció de l'apartat anterior, $f = 2(Ny, -x, -z) = 2(Na, b, c)$, satisfà que $\text{mcd}(a, b, c) = 1$. \square

7.4.12 Teorema. Considerem l'àlgebra de quaternions $H_A(p)$ i l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_A(2p, N) = \mathbb{Z}[1, i, Nj, \frac{1+i+j+ij}{2}]$ de nivell N , per a $N \mid \frac{p-1}{2}$ lliure de quadrats. Sigui $\Lambda = \Lambda(d, m)$ un ordre quadràtic qualsevol.

(i) El conjunt de formes binàries $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda)$ és igual a

$$\{f = (a + b\sqrt{p}, 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) : a, b, c \in \mathbb{Z}, a \equiv b \equiv c \pmod{2}, N \mid a + b, \det_1(f) = -D_\Lambda\}.$$

(ii) Sigui μ_A la bijecció de 7.4.3 entre els conjunts $\mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_A(2p,N),3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$ i $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda)$. Aleshores, μ_A està donada per

$$\mu_A(x, y, z) = (-(2Ny + z) + z\sqrt{p}, -2(2x + z)\sqrt{p}, -(2Ny + z) - z\sqrt{p}).$$

(iii) El conjunt $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda)$ és igual a

$$\{(a + b\sqrt{p}, 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) \in \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda) : \text{mcd}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2N}, b\right) = 1\}.$$

DEMOSTRACIÓ: En primer lloc, calculem $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N))$. És immediat comprovar que $\Phi(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N)) \cap H_0$ és igual a

$$\left\{ \begin{pmatrix} (2y+t)\sqrt{p} & (2Nz+t) + t\sqrt{p} \\ -(2Nz+t) + t\sqrt{p} & -(2y+t)\sqrt{p} \end{pmatrix} : y, z, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Per tant, el conjunt de formes binàries $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N))$ és igual a

$$\{(-(2Nz + t) + t\sqrt{p}, -2(2y + t)\sqrt{p}, -(2Nz + t) - t\sqrt{p}) : y, z, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Si posem $a = -(2Nz + t)$, $b = t$ i $c = -(2y + t)$, obtenim les condicions de divisibilitat donades a l'expressió de l'apartat (i): $a \equiv b \equiv c \pmod{2}$ i $N|a + b$.

Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), 3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. Pels resultats de la secció anterior, aquesta representació es correspon amb l'element $e \in (\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N)) \cap H_0 \subseteq \mathcal{O}$, de $n(e) = -D_\Lambda$, donat per $e = (0, x, y, z)_{\mathcal{B}'} = (-z, 2x, 2y, 2z)_{\mathcal{B}} = -z + (2x + z)i + (2Ny + z)j + zij$, on \mathcal{B} i \mathcal{B}' són les bases normalitzades fixades en els ordres $\mathcal{O}_A(2p, N)$ i $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N)$, respectivament. La forma binària corresponent a aquest element és

$$f_{\Phi(e)} = (-(2Ny + z) + z\sqrt{p}, -2(2x + z)\sqrt{p}, -(2Ny + z) - z\sqrt{p}).$$

Suposem ara que $(x, y, z) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), 3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$; és a dir, suposem que, a més, tenim que $\text{mcd}(x, y, z) = 1$. A la forma binària donada per la bijecció de l'apartat anterior, li fem els canvis de variable $a = -(2Ny + z)$, $b = z$ i $c = -(2x + z)$; és a dir, $x = -\frac{c+b}{2}$, $y = -\frac{a+b}{2N}$ i $z = b$. Així, una representació primitiva es correspon amb una forma binària de $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda)$ que satisfà la condició $\text{mcd}\left(\frac{c+b}{2}, \frac{a+b}{2N}, b\right) = 1$. \square

En el conjunt de formes binàries $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N))$ tenim la condició que a, b, c són de la mateixa paritat. En funció de la paritat del valor D_Λ , deduïm el corollari següent.

7.4.13 Corollari. *Situem-nos en les hipòtesis de la proposició anterior. Aleshores,*

$$(i) \ D_\Lambda \equiv 0 \pmod{4} \text{ si, i només si, } \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda) \text{ és igual a}$$

$$= \{f = (a + b\sqrt{p}, 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) : a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{ parells,}$$

$$N|a + b, \det(f) = -D_\Lambda\}.$$

$$(ii) \ D_\Lambda \equiv 1 \pmod{4} \text{ si, i només si, } \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda) \text{ és igual a}$$

$$= \{f = (a + b\sqrt{p}, 2c\sqrt{p}, a - b\sqrt{p}) : a, b, c \in \mathbb{Z}, a, b, c \text{ senars,}$$

$$N|a + b, \det(f) = -D_\Lambda\}. \square$$

7.4.14 Teorema. Considerem l'àlgebra de quaternions $H_B(p, q)$ i l'ordre $\mathcal{O}_B(pq, N) = \mathbb{Z} [1, Ni, \frac{1+i}{2}, \frac{i+ij}{2}]$, per a N lliure de quadrats, que satisfaci $\text{mcd}(N, p) = 1$ i $N \mid \frac{q-1}{4}$, que és un ordre d'Eichler de nivell N . Sigui Λ un ordre quadràtic qualsevol.

(i) El conjunt de formes binàries $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(2p, N), \Lambda)$ és igual a

$$\{f = (q(a + b\sqrt{p}), 2c\sqrt{p}, -a + b\sqrt{p}) : a, b, c \in \mathbb{Z}, 2N \mid c - b, \det_1(f) = -D_\Lambda\}.$$

(ii) Sigui μ_B la bijecció del corollari 7.4.3 entre el conjunt de les representacions $\mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_B(pq, N), 3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$ i el conjunt de formes binàries $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N), \Lambda)$. Aleshores, μ_B està donada per

$$\mu_B(x, y, z) = (q(z - y\sqrt{p}), -2(2Nx + y)\sqrt{p}, -z - y\sqrt{p}).$$

(iii) La bijecció μ_B restringeix a una bijecció entre els conjunts de representacions primitives $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_B(pq, N), 3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$ i el conjunt de formes binàries $(\mathcal{O}_B(pq, N), \Lambda)$ -primitives $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N), \Lambda)$, on el conjunt $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N), \Lambda)$ és igual a

$$\{(q(a + b\sqrt{p}), 2c\sqrt{p}, -a + b\sqrt{p}) \in \mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N), \Lambda) : a, b, c \in \mathbb{Z}, \text{mcd}(a, b, \frac{c-b}{2N}) = 1\}.$$

DEMOSTRACIÓ: De manera anàloga a la proposició anterior, calculem $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N))$. Es comprova que $(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N)) \cap H_0$ és igual a

$$\left\{ \begin{pmatrix} (2Ny + t)\sqrt{p} & z + t\sqrt{p} \\ q(z - t\sqrt{p}) & -(2Ny + t)\sqrt{p} \end{pmatrix} : y, z, t \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Per tant, el conjunt de formes binàries associades, $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N))$, és

$$\{(q(z - t\sqrt{p}), -2(2Ny + t)\sqrt{p}, -z + t\sqrt{p}) : y, z, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Si posem $a = z$, $b = -t$ i $c = -(2Ny + t)$, tenim que $a, b, c \in \mathbb{Z}$, amb la condició $2N \mid c - b$. Això demostra (i).

Fixem a l'ordre $\mathcal{O}_B(pq, N)$ la \mathbb{Z} -base normalitzada $\mathcal{B} = \{1, Ni, \frac{i+ij}{2}, \frac{1+i}{2}\}$, i denotem per \mathcal{B}' la base normalitzada que correspon a l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N)$. Sigui $(x, y, z) \in \mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_B(pq, N), 3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$. Aquesta representació es correspon amb l'element $e \in (\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_B(pq, N)) \cap H_0 \subseteq \mathcal{O}$ de $n(e) = -D_\Lambda$,

$e = (0, x, y, z)_{B'} = (-z, 2x, 2y, 2z)_B = (2Nx + y)i + zj + yij$. Per 6.3.6, aquest element es correspon bijectivament amb la forma binària

$$f_{\Phi(e)} = (q(z - y\sqrt{p}), -2(2Nx + y)\sqrt{p}, -z - y\sqrt{p}).$$

Suposem que $(x, y, z) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_B(pq, N), 3}, -D_{\Lambda}; \mathbb{Z})$; és a dir, suposem que $\text{mcd}(x, y, z) = 1$. Fem els canvis $a = z$, $b = -y$ i $c = -(2Nx + y)$ en la forma binària donada per la bijecció de l'apartat anterior. És a dir, tenim que $x = -\frac{c-b}{2N}$, $y = -b$ i $z = a$. Així, la condició de representació primitiva es correspon amb la condició $\text{mcd}\left(a, b, \frac{c-b}{2N}\right) = 1$, en funció dels coeficients de la forma binària corresponent. \square

7.4.15 Remarca. En els teoremes 7.4.11, 7.4.12 i 7.4.14, mostrem explícitament els conjunts de formes binàries $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N), \Lambda)$ per algunes famílies de valors de D i N . Observem que aquestes formes binàries tenen els coeficients en un anell quadràtic fixat a partir de l'àlgebra de quaternions inicial. Així, tenim definida una condició de primitivitat en conjunts de formes binàries de coeficients en anells quadràtics, tot i que aquests anells quadràtics poden ser no principals. \square

Els resultats 7.4.7 i 7.4.9 ens donen aleshores una classificació d'aquestes formes binàries $\mathcal{O}(D, N)$ -primitives respecte de l'acció de Γ_G . En particular, per a $G = \mathcal{O}_+^*$ tenim una classificació per l'acció dels grups d'homografies quaternioniques $\Gamma(D, N) \subseteq \text{SL}(2, \mathbb{R})$ amb nombres de classes $h(D, N, d, m)$ calculables.

Resumim en el corollari següent les igualtats de certs nombres de classes, resultat de les bijeccions establertes en aquesta secció i l'anterior.

7.4.16 Corollari. *Siguin $\mathcal{O}(D, N)$ un ordre d'Eichler de nivell N d'una àlgebra de quaternions de discriminant D i $\Lambda(d, m) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ l'ordre quadràtic de conductor m . Aleshores els següents nombres de classes coincideixen:*

- (i) $h(D, N, d, m)$, igual al nombre de $\Gamma_{\mathcal{O}(D, N)^*}$ -classes de formes quadràtiques binàries associades a l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N)$ de determinant igual a $-D_{\Lambda(d, m)}$, $(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(d, m))$ -primitives.
- (ii) $r^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D, N), 3}, -D_{\Lambda(d, m)}; \mathcal{O}(D, N)^*)$, igual al nombre de $\kappa(\mathcal{O}(D, N)^*)$ -classes de representacions primitives de $-D_{\Lambda(d, m)}$ per la forma nòrmica ternària $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D, N), 3}$.

- (iii) $\nu(D, N, d, m; \mathcal{O}(D, N)^*)$, igual al nombre de $\mathcal{O}(D, N)^*$ -classes d'immersions optimals de $\Lambda(d, m)$ en $\mathcal{O}(D, N)$.

En particular, es poden calcular tots utilitzant 7.2.13 \square .

7.5 Algoritmes i taules

A continuació comentem els algoritmes referents als resultats d'aquest capítol, implementats en el paquet `Poincare`, i presentem taules amb càlculs explícits per als nombres de classes i per a les formes ternàries i binàries associades als ordres quaterniònics.

En la instrucció `hqQOr` hem implementat l'algoritme de càlcul del nombre de classes d'immersions optimals d'un ordre quadràtic en un ordre quaterniònic. Per a aconseguir-ho, ens ha calgut implementar altres instruccions com ara: `hqQOrp`, que dóna el corresponent nombre de classes local; `hOrF`, per al nombre de classes d'un ordre quadràtic; `vaIp`, per al càlcul de la valoració p -àdica; i `Psip`, que calcula una funció aritmètica.

Per tal de fer efectives les immersions hem implementat també algunes instruccions. Amb `nBasisZ2Or` obtenim una base normalitzada de l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$. La instrucció `FindRepOr` està preparada per a buscar representacions en el conjunt $\mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N)}, -D_{\Lambda(d,m)}; \mathbb{Z})$, a partir de la base de $\mathcal{O}(D, N)$ i els paràmetres d i m . Inclou també un argument opcional per tal de controlar la profunditat de la recerca, ja que el procés requereix força càlculs. Donada una representació del conjunt anterior, les instruccions `ImHRep` i `ImMRep` ens donen la immersió corresponent, com a element de H o bé directament com a matriu, respectivament.

La instrucció `belongNOr` comprova si un quaternió pertany al normalitzador d'un ordre donat, per tal de fer efectiva l'aplicació κ , implementada en la instrucció `kappa`.

Finalment, les funcions lògiques `isPrimbfA` i `isPrimbfB` comproven si la forma binària corresponent a un quaternió satisfà o no la condició de primitivitat definida en els conjunts de formes binàries corresponents a certs ordres d'Eichler de les àlgebres $H_A(p)$ i $H_B(p, q)$, respectivament.

El primer bloc de taules, 7.1-7.5, mostra el nombre de classes $h(D, N, d, m)$, utilitzant el corol·lari 7.4.16. En la taula 7.1, donem els valors corresponents a ordres de les àlgebres no ramificades; observem que per al cas $N = 1$, tenim

que $h(1, 1, d, m) = h(d, m)$, que és el nombre de classes de l'ordre quadràtic $\Lambda(d, m)$. En les taules següents, tractem les àlgebres poc ramificades de discriminant $D = 6, 10, 14$ i 15 fins a certs valors de N, d i m .

En el següent bloc de taules, 7.6-7.10, calculem les formes nòrmiques ternàries $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N)}$ per a ordres quaterniònics de l'àlgebra de quaternions no ramificada $M(2, \mathbb{Q})$ i de les àlgebres de quaternions poc ramificades $H_A(3)$, $H_B(2, 5)$, $H_A(7)$ i $H_B(3, 5)$.

Finalment, les taules 7.11-7.14 contenen l'expressió genèrica de les formes binàries de coeficients reals de $\mathcal{H}(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O})$, per als ordres quaterniònics de les àlgebres de quaternions poc ramificades $H_A(3)$, $H_B(2, 5)$, $H_A(7)$ i $H_B(3, 5)$ del bloc de taules anteriors.

Taula 7.1 Nombres de classes $h(1, N, d, m)$ corresponents als paràmetres $N \leq 10$, $|d| \leq 5$ lliure de quadrats i $m \leq 5$.

N	d	m	h
1	-1	1	1
		2	1
		3	2
		4	2
		5	2
	2	1	1
		2	2
		3	4
		4	4
		5	6
	-2	1	1
		2	2
		3	2
		4	4
		5	6
	3	1	1
		2	2
		3	3
		4	4
		5	6
	-3	1	1
		2	1
		3	1
		4	2
		5	2
	5	1	1
		2	3
		3	4
		4	6
		5	5
	-5	1	2
		2	4
		3	4
		4	8
		5	10

N	d	m	h	
2	-1	1	1	
		2	2	
		3	2	
		4	4	
		5	2	
	2	1	1	
		2	4	
		3	4	
		4	8	
		5	6	
	-2	1	1	
		2	4	
		3	2	
		4	8	
		5	6	
	3	1	1	
		2	4	
		3	3	
		4	8	
		5	6	
	-3	2	2	
		4	4	
		5	2	
		6	6	
		12	12	
	-5	1	2	
		2	8	
		3	4	
		4	16	
		5	10	
	3	-1	3	4
		2	3	8
		-2	1	2
		2	2	4
	3	3	4	
4	4	8		

N	d	m	h	
4	3	5	12	
		1	1	
		2	2	
		3	6	
		4	4	
		5	6	
		-3	1	1
			2	1
			3	2
			4	2
	5		2	
	5	3	8	
		-5	1	4
		2	8	
		3	8	
		4	16	
	-5	5	20	
		-1	2	3
		4	6	
		2	2	6
		4	12	
		-2	2	6
		4	12	
		3	2	6
		4	12	
		-3	2	2
	4	6		
	5	2	6	
		4	18	
		-5	2	12
		4	24	
		-1	1	2
	5	-1	2	2
			3	4
			4	4

N	d	m	h	
		5	4	
	2	5	12	
	-2	5	12	
	3	5	12	
	-3	5	4	
	5	1	1	
		2	3	
		3	4	
		4	6	
		5	10	
	-5	1	2	
		2	4	
		3	4	
		4	8	
		5	20	
	6	-1	3	4
			3	8
			1	2
			2	8
3			4	
-2		4	16	
		5	12	
		1	1	
		2	4	
		3	6	
3		4	8	
		5	6	
		2	2	
		4	4	
		1	4	
-3		2	2	
		4	4	
		1	4	
		2	4	
	2	16		

N	d	m	h	
		3	8	
		4	32	
		5	20	
	7	2	1	2
			2	4
			3	8
			4	8
			5	12
	-3	1	2	
		2	2	
		3	2	
		4	4	
		5	4	
	-5	1	4	
		2	8	
		3	8	
		4	16	
		5	20	
	8	-1	2	2
4			6	
2			4	
4			12	
2			4	
-2		2	4	
		4	12	
		2	4	
		4	12	
		2	4	
3		2	4	
		4	12	
		4	6	
		5	4	
		4	18	
-5		2	8	
		4	24	

N	d	m	h	
	9	-1	3	6
			3	12
			1	2
			2	4
			3	10
	-2	4	8	
		5	12	
		3	3	
		3	4	
		5	3	
	3	3	3	
		3	4	
		5	3	
		1	4	
		2	8	
	-5	3	20	
		4	16	
		5	20	
		1	2	
2		4		
10	-1	3	4	
		4	8	
		5	4	
		2	5	
		5	12	
	-2	5	12	
		3	5	
		5	12	
		2	6	
		4	12	
	3	4	12	
		1	2	
		2	8	
		3	4	
		4	16	
	-5	5	20	

Taula 7.2 Nombres de classes $h(6, N, d, m)$ corresponents als paràmetres $N \leq 20$, $|d| \leq 10$ lliure de quadrats i $m \leq 5$.

N	d	m	h	
1	-1	1	2	
		5	4	
	2	1	2	
		5	12	
	3	1	1	
		5	6	
	-3	1	2	
		5	4	
	5	1	4	
		5	20	
	6	1	1	
		5	4	
	-6	1	2	
		5	8	
	-10	1	4	
		5	20	
	5	-1	1	4
			5	8
2		5	24	
		5	12	
-3		5	8	
		5	4	
5		1	4	
		5	40	
6		1	2	
		5	8	
-6		1	4	
		5	16	
-10	1	4		
	5	40		
7	2	1	4	
		5	24	
	-3	1	4	
		5	8	

N	d	m	h	
	-6	1	4	
		5	16	
	-10	1	8	
		5	40	
	11	3	1	2
			5	12
5		1	8	
		5	40	
-6		1	4	
		5	16	
-10	1	8		
	5	40		
13	-1	1	4	
		5	8	
	3	1	2	
		5	12	
	-3	1	4	
		5	8	
-10	1	8		
	5	40		
17	-1	1	4	
		5	8	
	2	1	4	
		5	24	
19	-3	1	4	
		5	8	
	5	1	8	
		5	40	
	6	1	2	
		5	8	
-10	1	8		
	5	40		

Taula 7.3 Nombres de classes $h(10, N, d, m)$ corresponents als paràmetres $N \leq 20$, $|d| \leq 10$ lliure de quadrats i $m \leq 5$.

N	d	m	h	
1	2	1	2	
		3	8	
	-2	1	2	
		3	4	
	3	1	2	
		3	6	
	-3	1	4	
		3	4	
	5	1	2	
		3	8	
	-5	1	2	
		3	4	
	7	1	2	
		3	4	
	10	1	2	
		3	4	
	-10	1	2	
		3	8	
	3	2	3	16
			-2	4
-2		1	4	
		3	8	
3		1	2	
		3	12	
-3		1	4	
		3	8	
5		3	16	
-5		1	4	
		3	8	
7		1	4	

N	d	m	h	
	10	3	8	
		1	4	
		3	8	
		3	16	
	7	2	1	4
			3	16
		-3	1	8
			3	8
		-5	1	4
			3	8
		7	1	2
			3	4
-10	1	4		
	3	16		
9	2	3	24	
	-2	1	4	
		3	20	
	3	3	24	
	-3	3	16	
		5	3	24
	-5	1	4	
		3	20	
	7	1	4	
		3	20	
10	1	4		
	3	20		
-10	3	24		
	11	-2	1	4
		3	8	

N	d	m	h
	3	1	4
		3	12
	5	1	4
		3	16
	-10	1	4
		3	16
13	3	1	4
		3	12
	-3	1	8
		3	8
	10	1	4
		3	8
	-10	1	4
		3	16
3		16	
17	2	1	4
		3	16
	-2	1	4
		3	8
19	-2	1	4
		3	8
	-3	1	8
		3	8
	5	1	4
		3	16
	7	1	4
		3	8
-10	1	4	
	3	16	

Taula 7.4 Nombres de classes $h(14, N, d, m)$ corresponents als paràmetres $N \leq 20$, $|d| \leq 10$ lliure de quadrats i $m \leq 5$.

N	d	m	h	
1	-1	1	2	
		3	4	
		5	4	
	-2	1	2	
		3	4	
		5	12	
	3	1	2	
		3	6	
		5	12	
	5	1	4	
		3	16	
		5	20	
	6	1	2	
		3	6	
		5	8	
	7	1	1	
		3	2	
		5	6	
	10	1	4	
		3	8	
		5	20	
	3	-1	3	8
			5	8
			5	24
-2		1	4	
		3	8	
		5	24	
3		1	2	
		3	12	
		5	12	

N	d	m	h	
5	5	3	32	
		1	2	
		3	12	
	6	1	2	
		3	4	
		5	12	
	7	1	2	
		3	4	
		5	12	
	10	1	8	
		3	16	
		5	40	
	5	-1	1	4
			3	8
			5	8
-2		5	24	
		5	24	
		5	40	
5		1	4	
		3	16	
		5	40	
6	1	4		
	3	12		
	5	16		
7	5	12		
	10	4		
	10	8		
10	1	4		
	3	8		
	5	40		
9	-1	3	12	
		1	4	
		3	20	

N	d	m	h	
		5	24	
		3	3	24
		5	3	48
		6	3	24
		7	1	2
			3	10
			5	12
		10	1	8
			3	40
			5	40
11	-2	1	4	
		3	8	
		5	24	
	3	1	4	
		3	12	
		5	24	
	5	1	8	
		3	32	
		5	40	
13	-1	1	4	
		3	8	
		5	8	
	3	1	4	
		3	12	
		5	24	
	10	1	8	
		3	16	
		5	40	

N	d	m	h	
15		-1	3	16
		-2	5	48
		3	5	24
		5	3	32
		6	1	4
			3	24
			5	16
		7	5	24
		10	1	8
			3	16
5	80			
17	-1	1	4	
		3	8	
		5	8	
	-2	1	4	
		3	8	
		5	24	
	19	-2	1	4
			3	8
			5	24
5		1	8	
		3	32	
		5	40	
6		1	4	
		3	12	
		5	16	
7		1	2	
	3	4		
	5	12		

Taula 7.5 Nombres de classes $h(15, N, d, m)$ corresponents als paràmetres $N \leq 20$, $|d| \leq 10$ lliure de quadrats i $m \leq 5$.

N	d	m	h	
1	2	1	4	
		2	8	
		4	16	
	3	1	2	
		2	4	
		4	8	
	-3	1	2	
		2	2	
		4	4	
	5	1	2	
		2	6	
		4	12	
	-7	1	4	
		2	4	
		4	8	
	-10	1	4	
		2	8	
		4	16	
	2	2	1	4
			2	16
			4	32
		3	1	2
			2	8
			4	16
-3		2	4	
		4	8	
5		2	12	
		4	24	
-7		1	8	
		2	8	
		4	16	

N	d	m	h	
4	-10	1	4	
		2	16	
		4	32	
	2	2	24	
		4	48	
	3	2	12	
		4	24	
	-3	2	4	
		4	12	
	5	2	12	
		4	36	
	-7	1	8	
		2	16	
		4	24	
	-10	2	24	
		4	48	
	7	2	1	8
			2	16
4			32	
-3		1	4	
		2	4	
		4	8	
-7		1	4	
		2	4	
		4	8	
-10	1	8		
	2	16		
	4	32		
8	2	2	16	
		4	48	
	3	2	8	

N	d	m	h	
		4	24	
	-3	4	12	
	5	4	36	
	-7	1	8	
		2	8	
		4	24	
	-10	2	16	
		4	48	
	11	3	1	4
			2	8
4			16	
5		1	4	
		2	12	
		4	24	
-7		1	8	
		2	8	
		4	16	
-10		1	8	
	2	16		
	4	32		
13	3	1	4	
		2	8	
		4	16	
	-3	1	4	
		2	4	
		4	8	
	-10	1	8	
		2	16	
		4	32	
	14	2	1	8

N	d	m	h	
		2	32	
		4	64	
	-3	2	8	
		4	16	
	-7	1	8	
		2	8	
	-7	4	16	
		-10	1	8
		2	32	
		4	64	
16		2	4	96
16	3	4	48	
	-3	4	16	
	5	4	48	
		-7	1	8
		2	8	
		4	64	
-10	4	96		
	17	2	1	8
		2	16	
	4	32		
19	-3	1	4	
		2	4	
		4	8	
	5	1	4	
		2	12	
		4	24	
	-10	1	8	
		2	16	
		4	32	

Taula 7.6 Formes nòrmiques ternàries $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_0(1,N),3}$ per als ordres quaterniònics $\mathcal{O} = \mathcal{O}_0(1, N)$, per a $N \leq 35$, en l'àlgebra de quaternions $M(2, \mathbb{Q})$.

N	$n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_0(1,N),3}$
1	$-X^2 - 4YZ$
2	$-X^2 - 8YZ$
3	$-X^2 - 12YZ$
4	$-X^2 - 16YZ$
5	$-X^2 - 20YZ$
6	$-X^2 - 24YZ$
7	$-X^2 - 28YZ$
8	$-X^2 - 32YZ$
9	$-X^2 - 36YZ$
10	$-X^2 - 40YZ$
11	$-X^2 - 44YZ$
12	$-X^2 - 48YZ$
13	$-X^2 - 52YZ$
14	$-X^2 - 56YZ$
15	$-X^2 - 60YZ$
16	$-X^2 - 64YZ$
17	$-X^2 - 68YZ$
18	$-X^2 - 72YZ$
19	$-X^2 - 76YZ$
20	$-X^2 - 80YZ$
21	$-X^2 - 84YZ$
22	$-X^2 - 88YZ$
23	$-X^2 - 92YZ$
24	$-X^2 - 96YZ$
25	$-X^2 - 100YZ$
26	$-X^2 - 104YZ$
27	$-X^2 - 108YZ$
28	$-X^2 - 112YZ$
29	$-X^2 - 116YZ$
30	$-X^2 - 120YZ$

Taula 7.7 Formes nòrmiques ternàries $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(6,N),3}$ per als ordres quaterniònics $\mathcal{O} = \mathcal{O}(6, N)$ calculats en la taula 1.4, per a $N \leq 100$, en l'àlgebra de quaternions $H_A(3)$.

N	$n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(6,N),3}$
1	$-12X^2 - 12ZX + 4Y^2 + 4YZ - 5Z^2$
5	$-300X^2 - 240YX - 180ZX - 44Y^2 - 68YZ - 29Z^2$
7	$-588X^2 - 168YX - 420ZX - 8Y^2 - 56YZ - 77Z^2$
11	$-12X^2 - 12ZX + 484Y^2 + 220YZ + 19Z^2$
13	$-12X^2 - 12ZX + 676Y^2 + 884YZ + 283Z^2$
17	$-3468X^2 - 408YX - 1428ZX - 8Y^2 - 80YZ - 149Z^2$
19	$-4332X^2 - 6384YX - 6156ZX - 2348Y^2 - 4532YZ - 2189Z^2$
23	$-6348X^2 - 2208YX - 1380ZX - 188Y^2 - 236YZ - 77Z^2$
25	$-7500X^2 - 1800YX - 8700ZX - 104Y^2 - 1040YZ - 2525Z^2$
29	$-10092X^2 - 16008YX - 15660ZX - 6344Y^2 - 12416YZ - 6077Z^2$
31	$-11532X^2 - 744YX - 3348ZX - 8Y^2 - 104YZ - 245Z^2$
35	$-14700X^2 - 16800YX - 1260ZX - 4796Y^2 - 716YZ - 29Z^2$
37	$-12X^2 - 12ZX + 5476Y^2 + 8732YZ + 3475Z^2$
41	$-20172X^2 - 33456YX - 32964ZX - 13868Y^2 - 27332YZ - 13469Z^2$
43	$-22188X^2 - 2064YX - 34572ZX - 44Y^2 - 1604YZ - 13469Z^2$
47	$-12X^2 - 12ZX + 8836Y^2 + 6580YZ + 1219Z^2$
49	$-28812X^2 - 2352YX - 20580ZX - 44Y^2 - 836YZ - 3677Z^2$
53	$-33708X^2 - 7632YX - 4452ZX - 428Y^2 - 500YZ - 149Z^2$
55	$-36300X^2 - 48840YX - 28380ZX - 16424Y^2 - 19088YZ - 5549Z^2$
59	$-41772X^2 - 14160YX - 50268ZX - 1196Y^2 - 8516YZ - 15125Z^2$
61	$-44652X^2 - 57096YX - 51972ZX - 18248Y^2 - 33224YZ - 15125Z^2$
65	$-50700X^2 - 70200YX - 52260ZX - 24296Y^2 - 36176YZ - 13469Z^2$
67	$-53868X^2 - 24120YX - 13668ZX - 2696Y^2 - 3056YZ - 869Z^2$
71	$-60492X^2 - 1704YX - 11076ZX - 8Y^2 - 152YZ - 509Z^2$
73	$-63948X^2 - 8760YX - 69204ZX - 296Y^2 - 4736YZ - 18725Z^2$
77	$-71148X^2 - 48048YX - 28644ZX - 8108Y^2 - 9668YZ - 2885Z^2$
79	$-74892X^2 - 92904YX - 948ZX - 28808Y^2 - 584YZ - 5Z^2$
83	$-82668X^2 - 71712YX - 96612ZX - 15548Y^2 - 41900YZ - 28229Z^2$
85	$-86700X^2 - 136680YX - 166260ZX - 53864Y^2 - 131048YZ - 79709Z^2$
89	$-95052X^2 - 74760YX - 137772ZX - 14696Y^2 - 54176YZ - 49925Z^2$
91	$-99372X^2 - 102648YX - 175812ZX - 26504Y^2 - 90800YZ - 77765Z^2$
95	$-108300X^2 - 18240YX - 10260ZX - 764Y^2 - 860YZ - 245Z^2$
97	$-112908X^2 - 58200YX - 124548ZX - 7496Y^2 - 32096YZ - 34349Z^2$

Taula 7.8 Formes nòrmiques ternàries $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}$ per als ordres quaterniònics $\mathcal{O} = \mathcal{O}(10, N)$ calculats en la taula 1.5, per a $N \leq 80$, en l'àlgebra de quaternions $H_{\mathbb{B}}(2, 5)$.

N	$n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(10,N),3}$
1	$-8X^2 - 8YX + 8Y^2 - 5Z^2$
3	$-72X^2 - 24YX - 96ZX + 8Y^2 - 16YZ - 37Z^2$
7	$-8X^2 - 56XY - 40XZ + 392Y^2 + 560YZ + 195Z^2$
9	$-648X^2 - 72YX - 288ZX + 8Y^2 - 16YZ - 37Z^2$
11	$-968X^2 - 88YX - 1232ZX + 8Y^2 - 56YZ - 397Z^2$
13	$-1352X^2 - 936YX - 1872ZX - 152Y^2 - 648YZ - 653Z^2$
17	$-8X^2 - 136XY - 112XZ + 2312Y^2 + 3808YZ + 1563Z^2$
19	$-2888X^2 - 152YX - 912ZX + 8Y^2 - 24YZ - 77Z^2$
21	$-3528X^2 - 1848YX - 5376ZX - 232Y^2 - 1408YZ - 2053Z^2$
23	$-4232X^2 - 5704YX - 1472ZX - 1912Y^2 - 992YZ - 133Z^2$
27	$-5832X^2 - 216YX - 6912ZX + 8Y^2 - 128YZ - 2053Z^2$
29	$-6728X^2 - 9048YX - 464ZX - 3032Y^2 - 312YZ - 13Z^2$
31	$-8X^2 - 248XY - 216XZ + 7688Y^2 + 13392YZ + 5827Z^2$
33	$-8712X^2 - 13992YX - 10560ZX - 5608Y^2 - 8480YZ - 3205Z^2$
37	$-10952X^2 - 5624YX - 5920ZX - 712Y^2 - 1520YZ - 805Z^2$
39	$-12168X^2 - 14664YX - 9984ZX - 4408Y^2 - 6016YZ - 2053Z^2$
41	$-13448X^2 - 25912YX - 7872ZX - 12472Y^2 - 7584YZ - 1157Z^2$
43	$-14792X^2 - 27864YX - 9632ZX - 13112Y^2 - 9072YZ - 1573Z^2$
47	$-17672X^2 - 23688YX - 30080ZX - 7928Y^2 - 20160YZ - 12805Z^2$
49	$-8X^2 - 392YX - 352XZ + 19208Y^2 + 34496YZ + 15483Z^2$
51	$-20808X^2 - 31416YX - 816ZX - 11848Y^2 - 616YZ - 13Z^2$
53	$-22472X^2 - 12296YX - 4240ZX - 1672Y^2 - 1160YZ - 205Z^2$
57	$-25992X^2 - 11400YX - 23712ZX - 1240Y^2 - 5200YZ - 5413Z^2$
59	$-27848X^2 - 25960YX - 16048ZX - 6040Y^2 - 7480YZ - 2317Z^2$
61	$-29768X^2 - 32696YX - 44896ZX - 8968Y^2 - 24656YZ - 16933Z^2$
63	$-31752X^2 - 50904YX - 19152ZX - 20392Y^2 - 15352YZ - 2893Z^2$
67	$-35912X^2 - 3752YX - 49312ZX - 88Y^2 - 2576YZ - 16933Z^2$
69	$-38088X^2 - 19320YX - 58512ZX - 2440Y^2 - 14840YZ - 22477Z^2$
71	$-8X^2 - 392YX - 352XZ + 19208Y^2 + 34496YZ + 15483Z^2$
73	$-42632X^2 - 33288YX - 2336ZX - 6488Y^2 - 912YZ - 37Z^2$
77	$-47432X^2 - 6776YX - 57904ZX - 232Y^2 - 4136YZ - 17677Z^2$
79	$-49928X^2 - 62568YX - 19592Y^2 - 5Z^2$

Taula 7.9 Formes nòrmiques ternàries $n_{Z+2\mathcal{O}(14,N),3}$ per als ordres quaternionics $\mathcal{O} = \mathcal{O}(14, N)$ calculats en la taula 1.6, per a $N \leq 80$, en l'àlgebra de quaternions $H_A(7)$.

N	$n_{Z+2\mathcal{O}(14,N),3}$
1	$-28X^2 - 28ZX + 4Y^2 + 4YZ - 13Z^2$
3	$-28X^2 - 28ZX + 36Y^2 + 60YZ + 11Z^2$
5	$-700X^2 - 280YX - 980ZX - 24Y^2 - 192YZ - 349Z^2$
9	$-252X^2 - 336YX - 84ZX - 76Y^2 - 44YZ - 13Z^2$
11	$-3388X^2 - 3696YX - 2772ZX - 1004Y^2 - 1508YZ - 573Z^2$
13	$-4732X^2 - 1456YX - 1092ZX - 108Y^2 - 164YZ - 69Z^2$
15	$-700X^2 - 840YX - 140ZX - 216Y^2 - 24YZ + 11Z^2$
17	$-8092X^2 - 6188ZX + 4Y^2 + 4YZ - 1189Z^2$
19	$-10108X^2 - 4256YX - 14364ZX - 444Y^2 - 3020YZ - 5109Z^2$
23	$-14812X^2 - 1288YX - 8372ZX - 24Y^2 - 360YZ - 1189Z^2$
25	$-17500X^2 - 21000YX - 32900ZX - 6296Y^2 - 19736YZ - 15469Z^2$
27	$-28X^2 - 28ZX + 2916Y^2 + 1404YZ + 155Z^2$
29	$-23548X^2 - 25984YX - 25172ZX - 7164Y^2 - 13884YZ - 6733Z^2$
31	$-28X^2 - 28ZX + 3844Y^2 + 5084YZ + 1667Z^2$
33	$-3388X^2 - 3080YX - 4004ZX - 664Y^2 - 1808YZ - 1189Z^2$
37	$-38332X^2 - 16576YX - 23828ZX - 1788Y^2 - 5148YZ - 3709Z^2$
39	$-42588X^2 - 21840YX - 46956ZX - 2796Y^2 - 12036YZ - 12949Z^2$
41	$-47068X^2 - 50512YX - 19516ZX - 13548Y^2 - 10468YZ - 2029Z^2$
43	$-51772X^2 - 43344YX - 1204ZX - 9068Y^2 - 500YZ - 13Z^2$
45	$-6300X^2 - 10920YX - 2100ZX - 4696Y^2 - 1808YZ - 181Z^2$
51	$-8092X^2 - 3808YX - 3332ZX - 412Y^2 - 724YZ - 325Z^2$
53	$-78652X^2 - 2968YX - 28196ZX - 24Y^2 - 528YZ - 2533Z^2$
55	$-84700X^2 - 12320YX - 7700ZX - 444Y^2 - 556YZ - 181Z^2$
57	$-10108X^2 - 12768YX - 18620ZX - 3996Y^2 - 11700YZ - 8557Z^2$
59	$-97468X^2 - 56168YX - 34692ZX - 8088Y^2 - 9992YZ - 3093Z^2$
61	$-104188X^2 - 10248YX - 111020ZX - 248Y^2 - 5456YZ - 29581Z^2$
65	$-118300X^2 - 72800YX - 205660ZX - 11196Y^2 - 63276YZ - 89389Z^2$
69	$-14812X^2 - 18032YX - 644ZX - 5452Y^2 - 380YZ - 13Z^2$
75	$-17500X^2 - 2800YX - 28700ZX - 76Y^2 - 2236YZ - 11749Z^2$
79	$-174748X^2 - 92904YX - 90692ZX - 12344Y^2 - 24104YZ - 11773Z^2$

Taula 7.10 Formes nòrmiques ternàries $n_{Z+2\mathcal{O},3}$ per als ordres quaternionics $\mathcal{O} = \mathcal{O}(15, N)$ calculats en la taula 1.7, per a $N \leq 60$, en l'àlgebra de quaternions $H_B(3, 5)$.

N	$n_{Z+2\mathcal{O}(15,N),3}$
1	$-12X^2 - 12YX + 12Y^2 - 5Z^2$
2	$-12X^2 - 12ZX - 20Y^2 - 20YZ + 7Z^2$
4	$-192X^2 - 48YX - 96ZX + 12Y^2 - 12YZ - 17Z^2$
7	$-588X^2 - 84YX - 672ZX + 12Y^2 - 48YZ - 197Z^2$
8	$-192X^2 - 288YX - 144ZX - 128Y^2 - 128YZ - 17Z^2$
11	$-12X^2 - 132YX - 108ZX + 1452Y^2 + 2376YZ + 967Z^2$
13	$-2028X^2 - 156YX - 624ZX + 12Y^2 - 24YZ - 53Z^2$
14	$-2352X^2 - 3192YX - 1680ZX - 1068Y^2 - 1140YZ - 305Z^2$
16	$-768X^2 - 576YX - 1056ZX - 128Y^2 - 416YZ - 353Z^2$
17	$-3468X^2 - 3468YX - 408ZX - 852Y^2 - 204YZ - 17Z^2$
19	$-4332X^2 - 6612YX - 2508Y^2 - 5Z^2$
22	$-1452X^2 - 1584YX - 132ZX - 452Y^2 - 92YZ + 7Z^2$
23	$-6348X^2 - 8556YX - 8832ZX - 2868Y^2 - 5952YZ - 3077Z^2$
26	$-12X^2 - 12ZX - 3380Y^2 - 4420YZ - 1433Z^2$
28	$-9408X^2 - 336YX - 2016ZX + 12Y^2 - 36YZ - 113Z^2$
29	$-10092X^2 - 5220YX - 8352ZX - 660Y^2 - 2160YZ - 1733Z^2$
31	$-11532X^2 - 372YX - 12648ZX + 12Y^2 - 204YZ - 3473Z^2$
32	$-3072X^2 - 4224YX - 2880ZX - 1472Y^2 - 2000YZ - 665Z^2$
34	$-13872X^2 - 16728YX - 5712ZX - 5028Y^2 - 3444YZ - 593Z^2$
37	$-16428X^2 - 27084YX - 23976ZX - 11148Y^2 - 19764YZ - 8753Z^2$
38	$-17328X^2 - 23256YX - 912ZX - 7788Y^2 - 612YZ - 17Z^2$
41	$-20172X^2 - 30012YX - 37392ZX - 11148Y^2 - 27816YZ - 17333Z^2$
43	$-22188X^2 - 35604YX - 9288ZX - 14268Y^2 - 7452YZ - 977Z^2$
44	$-48X^2 - 48YX - 72ZX - 2432Y^2 - 1136YZ - 137Z^2$
46	$-6348X^2 - 7176YX - 6900ZX - 2048Y^2 - 3920YZ - 1865Z^2$
47	$-12X^2 - 564YX - 516ZX + 26508Y^2 + 48504YZ + 22183Z^2$
49	$-28812X^2 - 588YX - 52920ZX + 12Y^2 - 540YZ - 24305Z^2$
52	$-8112X^2 - 4368YX - 15288ZX - 608Y^2 - 4136YZ - 7193Z^2$
53	$-33708X^2 - 24804YX - 52152ZX - 4548Y^2 - 19188YZ - 20177Z^2$
56	$-9408X^2 - 8736YX - 1680ZX - 2048Y^2 - 800YZ - 65Z^2$
58	$-40368X^2 - 64728YX - 65424ZX - 25932Y^2 - 52452YZ - 26513Z^2$
59	$-41772X^2 - 3540YX - 14160ZX - 60Y^2 - 600YZ - 1205Z^2$

Taula 7.11 Formes binàries genèriques $f_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}}$ per als ordres quaternionics $\mathcal{O} = \mathcal{O}(6, N)$ calculats en la taula 1.4, per a $N \leq 95$, en l'àlgebra de quaternions $H_A(3)$.

N	$f_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(6,N)}$
1	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(t + 2y)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
5	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(3t + 10y + 4z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
7	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(5t + 14y + 2z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
11	$(-22z - 5t + t\sqrt{3}, -2(t + 2y)\sqrt{3}, -22z - 5t - t\sqrt{3})$
13	$(-26z - 17t + t\sqrt{3}, -2(t + 2y)\sqrt{3}, -26z - 17t - t\sqrt{3})$
17	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(7t + 34y + 2z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
19	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(27t + 38y + 28z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
23	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(5t + 46y + 8z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
25	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(29t + 50y + 6z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
29	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(45t + 58y + 46z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
31	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(9t + 62y + 2z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
35	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(3t + 70y + 40z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
37	$(-74z - 59t + t\sqrt{3}, -2(t + 2y)\sqrt{3}, -74z - 59t - t\sqrt{3})$
41	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(67t + 82y + 68z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
43	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(67t + 86y + 4z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
47	$(-94z - 35t + t\sqrt{3}, -2(t + 2y)\sqrt{3}, -94z - 35t - t\sqrt{3})$
49	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(35t + 98y + 4z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
53	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(7t + 106y + 12z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
55	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(43t + 110y + 74z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
59	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(71t + 118y + 20z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
61	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(71t + 122y + 78z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
65	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(67t + 130y + 90z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
67	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(17t + 134y + 30z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
71	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(13t + 142y + 2z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
73	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(79t + 146y + 10z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
77	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(31t + 154y + 52z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
79	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(t + 158y + 98z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
83	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(97t + 166y + 72z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
85	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(163t + 170y + 134z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
89	$(-2z - t + \sqrt{3}, -2(129t + 178y + 70z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
91	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(161t + 182y + 94z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
95	$(-2z - t + t\sqrt{3}, -2(9t + 190y + 16z)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$

Taula 7.12 Formes binàries genèriques $f_{z+2\mathcal{O}}$ per als ordres quaterniònics $\mathcal{O} = \mathcal{O}(10, N)$ calculats en la taula 1.5, per a $N \leq 80$, en l'àlgebra de quaternions $H_B(2, 5)$.

N	$f_{z+2\mathcal{O}(10,N)}$
1	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(2y + z)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
3	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(z + 4t + 6y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
7	$(5t - 5(7z + 5t)\sqrt{2}, -2(2y + 7z + 5t)\sqrt{2}, -t - (7z + 5t)\sqrt{2})$
9	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(z + 4t + 18y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
11	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(z + 14t + 22y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
13	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(9z + 18t + 26y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
17	$(5t - 5(17z + 14t)\sqrt{2}, -2(2y + 17z + 14t)\sqrt{2}, -t - (17z + 14t)\sqrt{2})$
19	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(z + 6t + 38y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
21	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(11z + 32t + 42y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
23	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(31z + 8t + 46y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
27	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(z + 32t + 54y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
29	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(39z + 2t + 58y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
31	$(5t - 5(31z + 27t)\sqrt{2}, -2(2y + 31z + 27t)\sqrt{2}, -t - (31z + 27t)\sqrt{2})$
33	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(53z + 40t + 66y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
37	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(19z + 20t + 74y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
39	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(47z + 32t + 78y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
41	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(79z + 24t + 82y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
43	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(81z + 28t + 86y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
47	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(63z + 80t + 94y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
49	$(5t - 5(49z + 44t)\sqrt{2}, -2(2y + 49z + 44t)\sqrt{2}, -t - (49z + 44t)\sqrt{2})$
51	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(77z + 2t + 102y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
53	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(29z + 10t + 106y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
57	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(25z + 52t + 114y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
59	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(55z + 34t + 118y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
61	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(67z + 92t + 122y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
63	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(101z + 38t + 126y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
67	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(7z + 92t + 134y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
69	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(35z + 106t + 138y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
71	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(142y + 131z + 22t)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
73	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(57z + 4t + 146y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
77	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(11z + 94t + 154y)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$
79	$(5t - 5z\sqrt{2}, -2(158y + 99z)\sqrt{2}, -t - z\sqrt{2})$

Taula 7.13 Formes binàries genèriques $f_{z+2\mathcal{O}}$ per als ordres quaterniònics $\mathcal{O} = \mathcal{O}(14, N)$ calculats en la taula 1.6, per a $N \leq 80$, en l'àlgebra de quaternions $H_A(7)$.

N	$f_{z+2\mathcal{O}(14,N)}$
1	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(2y + t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
3	$(-6z - 5t + t\sqrt{7}, -2(2y + t)\sqrt{7}, -6z - 5t - t\sqrt{7})$
5	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(10y + 2z + 7t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
9	$(-6z - t + t\sqrt{7}, -2(6y + 4z + t)\sqrt{7}, -6z - t - t\sqrt{7})$
11	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(22y + 12z + 9t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
13	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(26y + 4z + 3t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
15	$(-6z - 5t + t\sqrt{7}, -2(10y + 6z + t)\sqrt{7}, -6z - 5t - t\sqrt{7})$
17	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(34y + 13t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
19	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(38y + 8z + 27t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
23	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(46y + 2z + 13t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
25	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(50y + 30z + 47t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
27	$(-54z - 13t + t\sqrt{7}, -2(2y + t)\sqrt{7}, -54z - 13t - t\sqrt{7})$
29	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(58y + 32z + 31t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
31	$(-62z - 41t + t\sqrt{7}, -2(2y + t)\sqrt{7}, -62z - 41t - t\sqrt{7})$
33	$(-6z - t + t\sqrt{7}, -2(22y + 10z + 13t)\sqrt{7}, -6z - t - t\sqrt{7})$
37	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(74y + 16z + 23t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
39	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(78y + 20z + 43t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
41	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(82y + 44z + 17t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
43	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(86y + 36z + t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
45	$(-6z - t + t\sqrt{7}, -2(30y + 26z + 5t)\sqrt{7}, -6z - t - t\sqrt{7})$
51	$(-6z - 5t + t\sqrt{7}, -2(34y + 8z + 7t)\sqrt{7}, -6z - 5t - t\sqrt{7})$
53	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(106y + 2z + 19t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
55	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(110y + 8z + 5t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
57	$(-6z - 5t + t\sqrt{7}, -2(38y + 24z + 35t)\sqrt{7}, -6z - 5t - t\sqrt{7})$
59	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(118y + 34z + 21t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
61	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(122y + 6z + 65t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
65	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(130y + 40z + 113t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$
69	$(-6z - t + t\sqrt{7}, -2(46y + 28z + t)\sqrt{7}, -6z - t - t\sqrt{7})$
75	$(-6z - 5t + t\sqrt{7}, -2(50y + 4z + 41t)\sqrt{7}, -6z - 5t - t\sqrt{7})$
79	$(-2z - t + t\sqrt{7}, -2(158y + 42z + 41t)\sqrt{7}, -2z - t - t\sqrt{7})$

Taula 7.14 Formes binàries genèriques $f_{z+2\mathcal{O}}$ per als ordres quaterniònics $\mathcal{O} = \mathcal{O}(15, N)$ calculats en la taula 1.7, per a $N \leq 60$, en l'àlgebra de quaternions $H_B(3, 5)$.

N	$f_{z+2\mathcal{O}(15, N)}$
1	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(2y + z)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
2	$(10z + 5t - 5t\sqrt{3}, -2(2y + t)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
4	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(8y + z + 2t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
7	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(14y + z + 8t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
8	$(10z + 5t - 5t\sqrt{3}, -2(8y + 6z + 3t)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
11	$(5t - 5(11z + 9t)\sqrt{3}, -2(2y + 11z + 9t)\sqrt{3}, -t - (11z + 9t)\sqrt{3})$
13	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(26y + z + 4t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
14	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(28y + 19z + 10t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
16	$(10z + 5t - 5t\sqrt{3}, -2(16y + 6z + 11t)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
19	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(38y + 29z)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
22	$(10z + 5t - 5t\sqrt{3}, -2(22y + 12z + t)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
23	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(46y + 31z + 32t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
26	$(130z + 85t - 5t\sqrt{3}, -2(2y + t)\sqrt{3}, -26z - 17t - t\sqrt{3})$
28	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(56y + z + 6t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
29	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(58y + 15z + 24t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
31	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(62y + z + 34t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
32	$(10z + 5t - 5t\sqrt{3}, -2(32y + 22z + 15t)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
34	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(68y + 41z + 14t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
37	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(74y + 61z + 54t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
38	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(76y + 51z + 2t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
41	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(82y + 61z + 76t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
43	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(86y + 69z + 18t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
46	$(10z + 5t - 5t\sqrt{3}, -2(46y + 26z + 25t)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
47	$(5t - 5(47z + 43t)\sqrt{3}, -2(2y + 47z + 43t)\sqrt{3}, -t - (47z + 43t)\sqrt{3})$
49	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(98y + z + 90t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
52	$(10z + 5t - 5t\sqrt{3}, -2(52y + 14z + 49t)\sqrt{3}, -2z - t - t\sqrt{3})$
58	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(116y + 93z + 94t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$
59	$(5t - 5z\sqrt{3}, -2(118y + 5z + 20t)\sqrt{3}, -t - z\sqrt{3})$

Capítol 8

Uniformització hiperbòlica de corbes de Shimura: cas ramificat

Considerem les corbes de Shimura $X(D, N)$, amb D i N nombres naturals primers entre si, D lliure de quadrats i igual al producte d'un nombre parell no nul de primers.

Fixats els nombres anteriors, considerem una àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ de discriminant D . Per la condició sobre D , H és una àlgebra de quaternions indefinida i ramificada. Considerem també $\mathcal{O}(D, N) \subseteq H$ un ordre d'Eichler de nivell N . En particular, ens interessarem per les àlgebres de quaternions poc ramificades de tipus A i de tipus B, i pels ordres d'Eichler destacats en la secció 1.2. A partir de l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D, N) \subseteq H$, obtenim el grup d'homografies quaterniòniques $\Gamma(D, N)$, definit en la secció 2.3, i una uniformització hiperbòlica $j_{D, N} : \Gamma(D, N) \backslash \mathcal{H} \rightarrow X(D, N)(\mathbb{C})$, cf. 2.4.

En aquest capítol apliquem els resultats sobre immersions i formes quadràtiques per a determinar homografies del grup $\Gamma(D, N)$, punts el·líptics de $X(D, N)$, etc. Això ens permetrà construir dominis fonamentals explícits per a corbes de Shimura.

Recordem que Φ denota la immersió de H en $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a}))$, fixada a 1.1.25. Si F és un cos quadràtic, per a cada immersió $\varphi \in \mathcal{I}(H, F)$, posem $\phi := \Phi \circ \varphi$, la immersió corresponent de F en $M(2, \mathbb{R})$. Recordem que denotem per ι el nombre complex imaginari tal que $\iota^2 = -1$.

8.1 Homografies, immersions i formes

En aquesta secció mostrem les relacions entre el grup d'homografies quaterniòniques $\Gamma(D, N)$, que defineix la corba de Shimura $X(D, N)$, i les immersions d'ordres quadràtics en l'ordre quaterniònic $\mathcal{O}(D, N)$. A partir dels resultats sobre les bijeccions d'immersions i els conjunts relacionats amb formes quadràtiques, donem resultats efectius, especialment pel que fa a homografies i a punts el·líptics, que explicitem per als grups $\Gamma(2p, N)$ i $\Gamma(pq, N)$, corresponents a ordres d'Eichler d'àlgebres poc ramificades de tipus A i de tipus B. Finalment, destaquem el paper de certes homografies hiperbòliques i introduïm el concepte d'homotècia principal de $\Gamma(D, N)$, en substitució de la translació que intervé en el cas modular.

8.1.1 Notació. En el grup d'homografies quaterniòniques $\Gamma(D, N)$, definim els subconjunts següents:

$$\Gamma_2(D, N) := \{\gamma \in \Gamma(D, N) : \gamma \text{ és el·líptica d'ordre } 2\},$$

$$\Gamma_3(D, N) := \{\gamma \in \Gamma(D, N) : \gamma \text{ és el·líptica d'ordre } 3\},$$

$$\Gamma_e(D, N) := \Gamma_2(D, N) \cup \Gamma_3(D, N),$$

$$\Gamma_h(D, N) := \{\gamma \in \Gamma(D, N) : \gamma \text{ és hiperbòlica}\},$$

$$\Gamma_p(D, N) := \{\gamma \in \Gamma(D, N) : \gamma \text{ és parabòlica}\}.$$

Considerem els conjunts de punts de \mathcal{H} següents, en funció de l'acció del grup $\Gamma(D, N)$:

$$\mathcal{P}_2(D, N) := \{z \in \mathcal{H} : \gamma(z) = z, \gamma \in \Gamma_2(D, N)\},$$

$$\mathcal{P}_3(D, N) := \{z \in \mathcal{H} : \gamma(z) = z, \gamma \in \Gamma_3(D, N)\},$$

$$\mathcal{P}_e(D, N) := \mathcal{P}_2(D, N) \cup \mathcal{P}_3(D, N).$$

Posem també, per a $k = 2, 3$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_k(D, N) &= \{z \in \mathbb{C} : \gamma(z) = z, \gamma \in \Gamma_k(D, N)\} = \\ &= \{z \in \mathbb{C} : z \text{ o bé } \bar{z} \in \mathcal{P}_k(D, N)\}. \end{aligned}$$

Notem que $\mathcal{P}_k(D, N) = \tilde{\mathcal{P}}_k(D, N) \cap \mathcal{H}$.

Si considerem la corba de Shimura $X(D, N)$, aleshores els conjunts de punts el·líptics, per a $k = 2, 3$, els escriurem:

$$P_k(D, N) := \Gamma(D, N) \backslash \mathcal{P}_k(D, N). \quad \square$$

8.1.1 Homografies quaternioniques

Utilitzant les formes quadràtiques nòrmiques associades a l'àlgebra de quaternions obtenim una demostració directa del fet que la superfície de Riemann $\Gamma(D, N) \backslash \mathcal{H}$ és compacta.

8.1.2 Proposició. *Si $D > 1$, aleshores la corba de Shimura $X(D, N)$ no té punts parabòlics; és a dir, $\mathcal{P}_\infty(D, N) = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓ: Fixem una àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ de discriminant D . Suposem que existís $\omega \in H$ de manera que $n(\omega) = 1$ i que la matriu $\Phi(\omega) = \begin{pmatrix} x + \sqrt{ay} & z + \sqrt{at} \\ b(z - \sqrt{at}) & x - \sqrt{ay} \end{pmatrix} \in \Gamma_p(D, N)$, és a dir, fos parabòlica. Això diria que $\text{tr}(\omega) = 2$, per la qual cosa tindriem $x = 1$ i $-ay^2 - bz^2 + abt^2 = 0$. Així, la forma quadràtica ternària $n_{H,3}(Y, Z, T) = -aY^2 - bZ^2 + abT^2$ seria isòtropa a \mathbb{Q} (o, equivalentment, seria isòtropa a \mathbb{Z}); per tant, seria isòtropa a \mathbb{Q}_p per a tot p . Ara bé, aplicant 5.1.13 sabem que per als $p|D$ la forma $n_{H,3}$ és \mathbb{Q}_p -anisòtropa, amb la qual cosa arribem a una contradicció. En particular, tots els grups d'homografies quaternionics $\Gamma(D, N) \subseteq \Phi(H)$ no tenen elements parabòlics; és a dir, per a tot N , $\Gamma_p(D, N) = \emptyset$. \square

A partir d'ara, considerem cossos quadràtics $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ tals que $\mathcal{I}(H, F) \neq \emptyset$, i ordres quadràtics $\Lambda(d, m) \subseteq F$ tals que $\mathcal{I}(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(d, m)) \neq \emptyset$. Amb aquestes immersions, a partir de les unitats dels ordres quadràtics $\Lambda(d, m)$ obtenim homografies quaternioniques distingides del grup $\Gamma(D, N)$ i deduïm propietats sobre la corba $X(D, N)$.

8.1.3 Proposició. *Considerem una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(d, m))$ i una unitat $u \in \Lambda(d, m)^*$. Posem $\gamma := \phi(u)$, on $\phi = \Phi \circ \varphi$.*

- (i) *Si $n(u) = 1$, aleshores $\gamma \in \Gamma(D, N)$.*
- (ii) *Si $n(u) = -1$, aleshores $\gamma \notin \Gamma(D, N)$, però $\gamma^2 \in \Gamma(D, N)$. \square*

8.1.4 Notació. Donat un ordre quadràtic $\Lambda(d, m)$, sigui ε la seva unitat fonamental. Aleshores, posem $\xi := \varepsilon$ si $n(\varepsilon) = 1$ i $\xi := \varepsilon^2$ si $n(\varepsilon) = -1$. \square

8.1.5 Corollari. Sigui $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(d, m))$ una immersió. Aleshores, per a tot $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma = \phi(\xi^n) \in \Gamma(D, N)$. \square

A la inversa, els resultats següents demostren que tots els elements de les àlgebres de quaternions es poden obtenir a través d'immersions de cossos quadràtics.

8.1.6 Lema. Sigui $\omega \in H$, $\omega \notin \mathbb{Q}$. Aleshores existeix una immersió φ del cos quadràtic $F_\omega := \mathbb{Q}(\sqrt{\text{tr}(\omega)^2 - 4n(\omega)})$ en H tal que $\omega \in \varphi(F_\omega)$.

DEMOSTRACIÓ: Considerem el polinomi $p_\omega(X) = X^2 - \text{tr}(\omega)X + n(\omega) \in \mathbb{Q}(X)$, que defineix el cos quadràtic $F_\omega = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, amb $d = \text{tr}(\omega)^2 - 4n(\omega)$. L'element $\alpha = \frac{\text{tr}(\omega)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d} \in F_\omega$ satisfà que $\text{tr}(\alpha) = \text{tr}(\omega)$ i $n(\alpha) = n(\omega)$. Per tant, $\varphi(\alpha) := \omega$ defineix una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(H, F_\omega)$. \square

8.1.7 Teorema. Sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)$. Aleshores,

- (i) Existeixen un cos quadràtic $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, un ordre $\Lambda(d, m) \subseteq F$, un nombre $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ i una immersió $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(d, m))$, tals que $\Phi(\varphi(\varepsilon^n)) = \gamma$, on ε és la unitat fonamental de $\Lambda(d, m)$.
- (ii) L'homografia γ és el·líptica si, i només si, $d < 0$ (és a dir, F és un cos quadràtic imaginari).
- (iii) L'homografia γ és hiperbòlica si, i només si, $d > 0$ (és a dir, F és un cos quadràtic real).

DEMOSTRACIÓ: Per construcció de $\Gamma(D, N)$, existeix $\omega \in \mathcal{O}(D, N)_+^*$, de manera que $\gamma = \Phi(\omega)$. Si apliquem el lema 8.1.6 anterior, tenim que $\omega \in \varphi(F_\omega)$ per a certa immersió $\varphi \in \mathcal{I}(H, F_\omega)$, on $F_\omega = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d = \text{tr}(\omega)^2 - 4$. Més concretament, $\omega = \varphi(\alpha)$, on $\alpha = \frac{\text{tr}(\omega)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{d}$ és una unitat, ja que $n(\alpha) = n(\omega) = \det(\gamma) = 1$. Per tant, existeix $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tal que $\alpha = \varepsilon^n$; n serà necessàriament parell si $n(\varepsilon) = -1$. Si considerem l'ordre quadràtic $\mathbb{Z}[1, \alpha]$, és clar que φ és una immersió d'aquest ordre en $\mathcal{O}(D, N)$, però no podem assegurar que sigui una immersió optimal. Considerem aleshores l'ordre quadràtic $\Lambda = \varphi^{-1}(\mathcal{O}(D, N)) \cap F_\omega$, que inclou l'ordre quadràtic anterior, $\Lambda = \Lambda(d, m)$.

De fet, tenim que $F_\omega = \mathbb{Q}(\sqrt{\operatorname{tr}(\omega)^2 - 4})$, ja que $n(\omega) = 1$. Per tant, és clar que F_ω és un cos quadràtic imaginari si, i només si, $|\operatorname{tr}(\omega)| < 2$; això equival al fet que γ sigui el·líptica. Notem que no hi ha homografies parabòliques; per tant, automàticament queda demostrat també (iii). També es veu directament: en efecte, F_ω és un cos quadràtic real si, i només si, $|\operatorname{tr}(\omega)| > 2$, i això equival al fet que γ sigui hiperbòlica. \square

8.1.2 Punts el·líptics de $X(D, N)$

Pel teorema 8.1.7, les homografies el·líptiques del grup $\Gamma(D, N)$ s'obtenen a partir de les unitats d'ordres quadràtics imaginaris, a través d'immersions d'aquests ordres en l'ordre quaterniònic $\mathcal{O}(D, N)$. Utilitzant els resultats sobre l'equivalència entre immersions i representacions de formes quadràtiques ternàries, reduïm el problema de trobar els elements el·líptics de $\Gamma(D, N)$ i els punts el·líptics de la corba de Shimura $X(D, N)$, a l'estudi de representacions d'enters per formes quadràtiques ternàries.

De manera alternativa, interpretem també els punts el·líptics com a punts fixos de formes quadràtiques binàries i obtenim resultats anàlegs als anteriors.

8.1.8 Lema. *Sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)$ una homografia el·líptica, de manera que $\gamma = \Phi(\omega)$ amb $\omega \in \mathcal{O}_+^*(D, N)$.*

- (i) γ és el·líptica d'ordre 2 si, i només si, $F_\omega = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$.
- (ii) γ és el·líptica d'ordre 3 si, i només si, $F_\omega = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.
- (iii) γ només pot tenir ordre 2 o 3.

DEMOSTRACIÓ: Per 8.1.7, tot element $\gamma \in \Gamma(D, N)$ és $\gamma = \Phi(\omega)$ per a cert ω que prové d'una unitat del cos quadràtic F_ω , i F_ω és un cos imaginari per ser γ el·líptica. Els únics cossos quadràtics imaginaris que contenen unitats no trivials són $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. De fet, són les dues úniques possibilitats per al cos $F_\omega = \mathbb{Q}(\sqrt{\operatorname{tr}(\gamma)^2 - 4})$, tenint en compte que, per a una homografia el·líptica γ amb traça entera, $|\operatorname{tr}(\gamma)|$ només pot prendre els valors 0 i 1. Els valors de la traça són els que determinen l'ordre de l'homografia, si apliquem 2.2.6 i que $\Phi(-1) = -\operatorname{Id} \in \Gamma(D, N)$. Això prova els apartats (i) i (ii).

No hi ha altres possibilitats ni per a la traça ni per als cossos, la qual cosa demostra (iii). \square

8.1.9 Remarca. Si apliquem el teorema 8.1.7, tenim que les homografies el·líptiques es determinen a partir d'immersions d'unitats dels ordres quadràtics dels cossos $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Ara bé, les unitats $\neq \pm 1$ dels cossos quadràtics $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ només estan contingudes en els ordres quadràtics maximals. Per tant, les immersions considerades són necessàriament optimals.

Així, l'existència de punts el·líptics d'ordre 2 en la corba $X(D, N)$ és equivalent a l'existència d'immersions optimals de l'anell d'enters de $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ en l'ordre quaterniònic $\mathcal{O}(D, N)$. Tenim la mateixa relació entre l'existència del punts el·líptics d'ordre 3 en la corba $X(D, N)$ i l'existència d'immersions optimals de l'anell d'enters del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ en l'ordre $\mathcal{O}(D, N)$. Notem l'analogia entre les fórmules explícites que caracteritzen aquests fets (cf. 2.4.3, 7.2.13). \square

A continuació, caracteritzem les homografies quaterniòniques el·líptiques en funció de representacions per formes nòrmiques ternàries.

8.1.10 Teorema. *Sigui $X(D, N)$ la corba de Shimura definida pel grup d'homografies quaterniòniques $\Gamma(D, N)$. Sigui $\mathcal{O}(D, N)$ l'ordre d'Eichler corresponent, amb una base \mathcal{B} normalitzada fixada a partir de la qual obtenim les formes nòrmiques associades als ordres $\mathcal{O}(D, N)$ i $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N)$. Suposem que l'ordre $\mathcal{O}(D, N)$ és senar. Sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)$. Aleshores,*

(i) γ és una homografia el·líptica d'ordre 2 si, i només si,

$$\gamma = \Phi \left(-\frac{z_0}{2}, x_0, y_0, z_0 \right)_{\mathcal{B}} = \Phi(x_1, y_1, z_1, -2x_1)_{\mathcal{B}},$$

$$\text{on } (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 4; \mathbb{Z}), (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O}(D,N),3}, 1; \mathbb{Z}).$$

(ii) γ és una homografia el·líptica d'ordre 3 si, i només si,

$$\text{o bé } \gamma = \Phi \left(\frac{1-z_0}{2}, x_0, y_0, z_0 \right)_{\mathcal{B}} = \Phi(x_1, y_1, z_1, 1-2x_1)_{\mathcal{B}},$$

$$\text{o bé } \gamma = \Phi \left(\frac{-1-z_0}{2}, x_0, y_0, z_0 \right)_{\mathcal{B}} = \Phi(x_1-1, y_1, z_1, 1-2x_1)_{\mathcal{B}},$$

$$\text{on } (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 3; \mathbb{Z}), (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O}(D,N),3}^{(1)}, 1; \mathbb{Z}).$$

DEMOSTRACIÓ: Pels resultats anteriors, cada homografia el·líptica s'obté a partir d'una unitat d'un cos quadràtic imaginari. Utilitzem la bijecció entre

les immersions i les representacions de formes quadràtiques ternàries donada a 7.3.3 i l'expressió explícita donada a 7.3.5.

Pel lema 8.1.8 anterior i el teorema 8.1.7, tenim que una homografia γ el·líptica d'ordre 2 ha de ser $\gamma = \Phi(\varphi(u))$, on u és una unitat no trivial d'un ordre quadràtic $\Lambda(-1, m)$ i $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(-1, m))$. Ara bé, les unitats no trivials del cos quadràtic $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ són $\pm\sqrt{-1}$, ambdues pertanyents només a l'ordre quadràtic maximal $\Lambda_F = \Lambda(-1, 1)$. Tenim que el conjunt d'immersions $\mathcal{I}(\mathcal{O}(D, N), \Lambda_F)$, igual en aquest cas a $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D, N), \Lambda_F)$, es correspon amb el conjunt de representacions $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 4; \mathbb{Z})$ i amb el conjunt de representacions $\mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O}(D,N),3}, 1; \mathbb{Z})$, ja que $D_{\Lambda_F} = -4$. La proposició 7.3.5 (i)-(ii) dóna expressions explícites de les immersions respecte d'aquests conjunts de representacions, respectivament. Notem que dues unitats u i $-u$ donen lloc a la mateixa homografia; per tant, és suficient considerar la unitat $u = \sqrt{-1}$. Així, obtenim que $\varphi(\sqrt{-1}) = \left(-\frac{z_0}{2}, x_0, y_0, z_0\right)_B$, per a una representació $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 4; \mathbb{Z})$, i $\varphi(\sqrt{-1}) = (x_1, y_1, z_1, -2x_1)_B$, per a $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O}(D,N),3}, 1; \mathbb{Z})$.

De manera anàloga, en el cas d'ordre 3 considerem les unitats del cos quadràtic $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$; aquestes unitats són $1, \varepsilon, \varepsilon^2, -1, -\varepsilon$ i $-\varepsilon^2$, on $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$, i només estan contingudes en l'ordre quadràtic maximal $\Lambda_F = \Lambda(-3, 1)$. Per aconseguir homografies, llevat unitats trivials i canvi de signe, és suficient considerar les unitats ε i ε^2 .

Així, una homografia $\gamma \in \Gamma_3(D, N)$, aplicant de nou 8.1.7 i 8.1.8, és $\gamma = \Phi(\varphi(\varepsilon))$ o bé $\gamma = \Phi(\varphi(\varepsilon^2))$, per a $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D, N), \Lambda_F)$. La proposició 7.3.5 dóna l'expressió explícita de $\varphi(\sqrt{-3})$ en funció d'una representació $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 3; \mathbb{Z})$ o bé d'una representació $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O}(D,N),3}^{(1)}, 1; \mathbb{Z})$. A partir d'aquestes expressions obtenim els resultats següents, que completen la demostració de (ii):

$$\varphi(\varepsilon) = \left(\frac{1-z_0}{2}, x_0, y_0, z_0\right)_B = (x_1, y_1, z_1, 1-2x_1)_B,$$

$$\varphi(\varepsilon^2) = \left(\frac{-1-z_0}{2}, x_0, y_0, z_0\right)_B = (x_1-1, y_1, z_1, 1-2x_1)_B. \quad \square$$

8.1.11 Corol·lari. *Sigui $X(D, N)$ una corba de Shimura uniformitzada per un grup d'homografies quaterniòniques $\Gamma(D, N)$. Aleshores, els conjunts de punts el·líptics $P_2(D, N)$ i $P_3(D, N)$ es determinen a partir del càlcul de representacions dels conjunts $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 4; \mathbb{Z})$ i $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 3; \mathbb{Z})$, respectivament. \square*

8.1.12 Remarca. A partir del teorema anterior, per a cada representació $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, 3; \mathbb{Z})$, o bé $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O},3}^{(1)}, 1; \mathbb{Z})$, tenim dues possibles homografies el·líptiques d'ordre 3: $\sigma_1 = \varphi(\varepsilon)$ i $\sigma_2 = \varphi(\varepsilon^2) = (\varphi(\varepsilon))^2 = \sigma_1^2$. Ara bé, si $\tau \in \mathcal{H}$ és el punt el·líptic corresponent a σ_1 , és clar que τ també és un punt fix de σ_1^2 . Per tant, les dues possibilitats ens donen els mateixos punts el·líptics. \square

8.1.13 Remarca. Utilitzant el nombre de classes d'immersions optimals dels anells d'enters de $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ en $\mathcal{O}(D, N)$, es reobtenen les fórmules per al nombre de punts el·líptics d'ordre 2 i 3 de les corbes de Shimura $X(D, N)$, donades al capítol 2. Aquest fet és un cas particular del resultat per als punts de multiplicació complexa, que veurem a 9.1.17. \square

Per a cada corba de Shimura $X(D, N)$ concreta, a partir de l'ordre $\mathcal{O}(D, N)$ explícit podem calcular, efectivament, les homografies i els punts el·líptics, utilitzant els resultats anteriors. En particular, això s'aplica als ordres calculats en les taules 1.5-1.6, i a les formes nòrmiques corresponents, contingudes en les taules 7.6-7.9.

8.1.14 Teorema. *Sigui $X(2p, N)$ la corba de Shimura determinada pel grup d'homografies quaterniòniques $\Gamma(2p, N)$, per a $p \equiv 3 \pmod{4}$ i $N \mid \frac{p-1}{2}$ i lliure de quadrats. Fixem l'àlgebra de quaternions $H_A(p)$ i l'ordre $\mathcal{O}_A(2p, N) = \mathbb{Z}[1, i, Nj, \frac{1+i+j+ij}{2}]$, que és un ordre d'Eichler de nivell N . Aleshores:*

(i) *El conjunt de punts el·líptics d'ordre 2 de $X(2p, N)$ és*

$$P_2(2p, N) = \Gamma(2p, N) \backslash \tilde{P}_2(2p, N) \cap \mathcal{H},$$

on $\tilde{P}_2(2p, N)$ és igual a

$$\left\{ \tau_0 = \frac{(2x_0 + z_0)\sqrt{p} \pm 2\iota}{-(2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p}} : (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, 4; \mathbb{Z}) \right\} =$$

$$= \left\{ \tau_1 = \frac{(y_1 - x_1)\sqrt{p} \pm \iota}{-(Nz_1 - x_1) - x_1\sqrt{p}} : (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O},3}, 1; \mathbb{Z}) \right\}.$$

(ii) *El conjunt de punts el·líptics d'ordre 3 de $X(2p, N)$ és*

$$P_3(2p, N) = \Gamma(2p, N) \backslash \tilde{P}_3(2p, N) \cap \mathcal{H},$$

on $\tilde{\mathcal{P}}_3(2p, N)$ és igual a

$$\left\{ \nu_0 = \frac{(2x_0 + z_0)\sqrt{p} \pm \sqrt{3}\iota}{-(2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p}} : (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, 3; \mathbb{Z}) \right\} =$$

$$= \left\{ \nu_1 = \frac{(1 + 2(y_1 - x_1))\sqrt{p} \pm \sqrt{3}\iota}{-(1 + 2(Nz_1 - x_1)) + (1 - 2x_1)\sqrt{p}} : \right.$$

$$\left. (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O},3}^{(1)}, 1; \mathbb{Z}) \right\}.$$

(iii) Els conjunts d'homografies el·líptiques corresponents són

$$\Gamma_2(2p, N) = \{\gamma_{\tau_0} : \tau_0 \in \mathcal{P}_2(2p, N)\} = \{\gamma_{\tau_1} : \tau_1 \in \mathcal{P}_2(2p, N)\},$$

$$\Gamma_3(2p, N) = \{\gamma_{\nu_0} : \nu_0 \in \mathcal{P}_3(2p, N)\} = \{\gamma_{\nu_1} : \nu_1 \in \mathcal{P}_3(2p, N)\},$$

on

$$\gamma_{\tau_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2x_0 + z_0)\sqrt{p} & (2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p} \\ -(2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p} & -(2x_0 + z_0)\sqrt{p} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{\tau_1} = \begin{pmatrix} (y_1 - x_1)\sqrt{p} & (Nz_1 - x_1) - x_1\sqrt{p} \\ -(Nz_1 - x_1) - x_1\sqrt{p} & -(y_1 - x_1)\sqrt{p} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{\nu_0} = \gamma_{\tau_0} \pm \text{Id}, \quad \gamma_{\nu_1} = \gamma_{\tau_1} \pm \text{Id}.$$

DEMOSTRACIÓ: Determinem les homografies el·líptiques d'ordre 2 i 3 a partir del teorema 8.1.10 anterior.

Sigui γ una homografia el·líptica d'ordre 2. Aleshores, existeix una representació $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_A(2p,N),3}, 4; \mathbb{Z})$ que determina una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda(-1, 1))$, de manera que $\gamma = \Phi(\varphi(\sqrt{-1}))$. Si apliquem 8.1.10 (i), obtenim explícitament que $\gamma = \Phi(\frac{1}{2}((2x_0 + z_0)i + (2Ny_0 + z_0)j + z_0ij))$; és a dir,

$$\gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (2x_0 + z_0)\sqrt{p} & (2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p} \\ -(2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p} & -(2x_0 + z_0)\sqrt{p} \end{pmatrix}.$$

Per tant, els punts fixos de γ són els punts el·líptics $\frac{(2x_0 + z_0)\sqrt{p} \pm 2\iota}{-(2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p}}$.

També existeix una representació $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O},3}, 1; \mathbb{Z})$ tal que determina una immersió $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}_A(2p, N), \Lambda(-1, 1))$, de manera que $\gamma =$

$\Phi(\varphi(\sqrt{-1}))$. En aquest cas, tenim que $\gamma = \Phi((y_1 - x_1)i + (Nz_1 - x_1)j - x_1ij)$; per tant,

$$\gamma = \begin{pmatrix} (y_1 - x_1)\sqrt{p} & (Nz_1 - x_1) - x_1\sqrt{p} \\ -(Nz_1 - x_1) - x_1\sqrt{p} & -(y_1 - x_1)\sqrt{p} \end{pmatrix}.$$

Els punts el·líptics corresponents són ara $\frac{(y_1 - x_1)\sqrt{p} \pm \iota}{-(Nz_1 - x_1) - x_1\sqrt{p}}$.

Per als punts el·líptics d'ordre 3 de $X(2p, N)$, la demostració és anàloga a l'anterior, utilitzant 8.1.10(ii). Donada γ una homografia el·líptica d'ordre 3, tenim $\gamma = \Phi(\varphi(\varepsilon))$ o bé $\gamma = \Phi(\varphi(\varepsilon^2))$, on $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Es calcula

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) &= \frac{1}{2}(1 + (2x_0 + z_0)i + (2Ny_0 + z_0)j + z_0ij) \\ &= \frac{1}{2}(1 + (1 + 2(y_1 - x_1))i + (1 + 2(Nz_1) - 2x_1)j + (1 - 2x_1)ij) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon^2) &= \frac{1}{2}(-1 + (2x_0 + z_0)i + (2Ny_0 + z_0)j + z_0ij) \\ &= \frac{1}{2}(-1 + (1 + 2(y_1 - x_1))i + (1 + 2(Nz_1) - 2x_1)j + (1 - 2x_1)ij), \end{aligned}$$

per a certes representacions $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, 3; \mathbb{Z})$ i $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O},3}^{(1)}, 1; \mathbb{Z})$. Si apliquem Φ a aquestes igualtats obtenim les expressions de les homografies i els corresponents punts el·líptics donades a l'enunciat. Notem que, com hem remarcat anteriorment, les dues possibilitats per a l'homografia γ donen el mateix punt el·líptic. \square

Utilitzant uns altres arguments, es troba també la descripció equivalent següent, en funció de la forma nòrmica ternària associada a l'àlgebra de quaternions, que generalitza la donada a [Als97].

8.1.15 Teorema. *Sigui $\Gamma(2p, N)$ el grup d'homografies definit a partir de l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_A(2p, N) = \mathbb{Z}[1, i, Nj, \frac{1+i+j+ij}{2}] \subseteq H_A(p)$, on $N \mid \frac{p-1}{2}$, lliure de quadrats. Aleshores, els conjunts de punts el·líptics de $X(2p, N)$ d'ordre 2 i d'ordre 3 són, respectivament,*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2(2p, N) &= \Gamma(2p, N) \setminus \tilde{\mathcal{P}}_2(2p, N) \cap \mathcal{H}, \\ \mathcal{P}_3(2p, N) &= \Gamma(2p, N) \setminus \tilde{\mathcal{P}}_3(2p, N) \cap \mathcal{H}, \end{aligned}$$

on $\tilde{\mathcal{P}}_2(2p, N)$ i $\tilde{\mathcal{P}}_3(2p, N)$ són els conjunts següents:

$$\left\{ \frac{b\sqrt{p} \pm 2\iota}{-c + d\sqrt{p}} : (b, c, d) \in \mathcal{R}(n_{H,3}, 4; \mathbb{Z}), b, c, d \text{ parells}, 2N \mid c - d \right\},$$

$$\left\{ \frac{b\sqrt{p} \pm \sqrt{3}i}{-c + d\sqrt{p}} : (b, c, d) \in \mathcal{R}(n_{H,3}, 3; \mathbb{Z}), b, c, d \text{ senars}, 2N | c - d \right\}.$$

Per a un punt el·líptic $\tau \in \tilde{\mathcal{P}}_2(2p, N) \cup \tilde{\mathcal{P}}_3(2p, N)$ donat per les expressions anteriors, $\tau = \tau(b, c, d)$, la matriu el·líptica corresponent és

$$\gamma_\tau = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b\sqrt{p} & c + d\sqrt{p} \\ -c + d\sqrt{p} & a - b\sqrt{p} \end{pmatrix},$$

on $a = 0$ si $\tau \in \tilde{\mathcal{P}}_2(2p, N)$ i $a = 1$ si $\tau \in \tilde{\mathcal{P}}_3(2p, N)$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\gamma \in \Gamma_e(2p, N)$ una homografia el·líptica. A partir de la descripció explícita del grup $\Gamma(2p, N)$, cf. 2.3.4, podem escriure $\gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b\sqrt{p} & c + d\sqrt{p} \\ -c + d\sqrt{p} & a - b\sqrt{p} \end{pmatrix}$, on a, b, c són enters, $a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod{2}$, $2N | c - d$, $\det(\gamma) = 1$ i $|a| < 2$. Per tant, tenim que els punts el·líptics són $\tau = \frac{b\sqrt{p} \pm \sqrt{a^2 - 4}}{-c + d\sqrt{p}}$, on $a = 0, 1, -1$; de fet, és suficient considerar $a = 0$ i

$a = 1$. Si $a = 0$, aleshores els punts el·líptics són els punts $\tau = \frac{b\sqrt{p} \pm 2i}{-c + d\sqrt{p}} \in \mathbb{C}$,

de manera que b, c, d són solucions enteres de l'equació $-pb^2 + c^2 - pd^2 = 4$, amb $b \equiv c \equiv d \equiv 0 \pmod{2}$ i $2N | c - d$; en particular, b, c, d parells.

Si $a = 1$, els punts el·líptics són els punts $\tau = \frac{b\sqrt{p} \pm \sqrt{3}i}{-c + d\sqrt{p}} \in \mathbb{C}$, tals que

b, c, d són una solució entera de l'equació $-pb^2 + c^2 - pd^2 = 3$, amb $b \equiv c \equiv d \equiv 1 \pmod{2}$ i $2N | c - d$; en particular, b, c, d són senars. L'equació anterior equival a considerar la forma nòrmica ternària associada a l'àlgebra de quaternions $n_{H,3}(Y, Z, T) = -pY^2 + Z^2 - pT^2$; així, cal estudiar el conjunt de representacions de 3 i 4 per $n_{H,3}$ sobre \mathbb{Z} , dependent de p , amb les condicions de paritat i divisibilitat anteriors.

Recordem que l'ordre dels punts el·líptics ve determinat directament pel valor de la traça de l'homografia de la qual és punt fix, cf. 2.2.6. També es pot calcular directament l'ordre de l'homografia que el fixa. \square

8.1.16 Remarca. Els punts el·líptics pertanyen a les semirectes incloses a \mathcal{H} , de pendent $\pm \frac{2}{b\sqrt{p}}$ o bé $\pm \frac{\sqrt{3}}{b\sqrt{p}}$, segons si són el·líptics d'ordre 2 o d'ordre 3, respectivament. \square

De manera anàloga, s'obtenen els resultats següents per a àlgebres poc ramificades de tipus B.

8.1.17 Teorema. Sigui $X(pq, N)$ la corba de Shimura determinada pel grup d'homografies quaternioniques $\Gamma(pq, N)$, per a $q \equiv 1 \pmod{4}$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, $N \mid \frac{q-1}{4}$, lliure de quadrats i $\text{mcd}(p, N) = 1$. Fixem l'àlgebra de quaternions $H_B(p, q)$ i l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_B(pq, N) = \mathbb{Z}[1, Ni, \frac{1+i}{2}, \frac{i+ij}{2}]$.

Aleshores, tots els punts el·líptics de $X(pq, N)$ tenen ordre 3 i $\mathcal{P}_3(pq, N) = \Gamma(pq, N) \setminus \tilde{\mathcal{P}}_3(pq, N) \cap \mathcal{H}$, on $\tilde{\mathcal{P}}_3(pq, N)$

$$= \left\{ \nu_0 = \frac{(2Nx_0 + y_0)\sqrt{p} \pm \sqrt{3}i}{q(z_0 - y_0\sqrt{p})} : (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_B(pq, N), 3}, 3; \mathbb{Z}) \right\} =$$

$$= \left\{ \nu_1 = \frac{(2Ny_1 + z_1)\sqrt{p} \pm \sqrt{3}i}{q((1-2x_1) - z_1\sqrt{p})} : (x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O}_B, 3}^{(1)}, 1; \mathbb{Z}) \right\}.$$

El conjunt d'homografies el·líptiques corresponent és

$\Gamma_e(pq, N) = \Gamma_3(pq, N) = \{\gamma_{\nu_0} : \nu_0 \in \mathcal{P}_3(pq, N)\} = \{\gamma_{\nu_1} : \nu_1 \in \mathcal{P}_3(pq, N)\}$, on

$$\gamma_{\nu_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 + (2Nx_0 + y_0)\sqrt{p} & z_0 + y_0\sqrt{p} \\ q(z_0 - y_0\sqrt{p}) & \pm 1 - (2Nx_0 + y_0)\sqrt{p} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{\nu_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 + (2Ny_1 + z_1)\sqrt{p} & (1-2x_1) + z_1\sqrt{p} \\ q((1-2x_1) - z_1\sqrt{p}) & \pm 1 - (2Ny_1 + z_1)\sqrt{p} \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓ: Vegem que no hi ha punts el·líptics d'ordre 2. En primer lloc, veiem que no hi ha immersions de $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ en $H_B(p, q)$. En efecte, tenim que $\left(\frac{-1}{q}\right) = 1$, per ser $q \equiv 1 \pmod{4}$, per la qual cosa el primer q descompon al cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. D'altra banda, el discriminant de l'àlgebra $H_B(p, q)$ és pq . Per tant, si apliquem el criteri 1.1.19, tenim que efectivament $\mathcal{I}(H_B(p, q), \mathbb{Q}(\sqrt{-1})) = \emptyset$. Notem que concorda amb les fórmules donades a 2.4. Ara, pels resultats 8.1.7 i 8.1.8 deduïm que $\Gamma_2(pq, N) = \emptyset$ i $\mathcal{P}_2(pq, N) = \emptyset$.

Determinem les homografies el·líptiques d'ordre 3. Sigui $\gamma \in \Gamma_3(pq, N)$. Existeixen representacions $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_B(pq, N), 3}, 3; \mathbb{Z})$ i $(x_1, y_1, z_1) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathcal{O}_B, 3}^{(1)}, 1; \mathbb{Z})$ que determinen una immersió $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}_B(pq, N), \Lambda(-3, 1))$, de manera que $\gamma = \Phi(\varphi(u))$, on u és una unitat de $\Lambda(-3, 1)$. Si apliquem

directament el teorema 8.1.10 (ii) a l'ordre $\mathcal{O}_B(pq, N)$, fixant la base normalitzada $\mathcal{B} = \{1, Ni, \frac{i+j}{2}, \frac{i-j}{2}\}$, tenim explícitament que

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}\Phi(1 + (2Nx_0 + y_0)i + z_0j + y_0i) = \\ &= \frac{1}{2}\Phi(1 + (2Ny_1 + z_1)i + (1 - 2x_1)j + z_1ij),\end{aligned}$$

o bé,

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2}\Phi(-1 + (2Nx_0 + y_0)i + z_0j + y_0ij) = \\ &= \frac{1}{2}\Phi(-1 + (2Ny_1 + z_1)i + (1 - 2x_1)j + z_1ij).\end{aligned}$$

Per tant, les homografies $\gamma \in \Gamma_3(pq, N)$ són de la forma

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 + (2Nx_0 + y_0)\sqrt{p} & z_0 + y_0\sqrt{p} \\ q(z_0 - y_0\sqrt{p}) & \pm 1 - (2Nx_0 + y_0)\sqrt{p} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \pm 1 + (2Ny_1 + z_1)\sqrt{p} & (1 - 2x_1) + z_1\sqrt{p} \\ q((1 - 2x_1) - z_1\sqrt{p}) & \pm 1 - (2Ny_1 + z_1)\sqrt{p} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Si en busquem els punts fixos, obtenim els punts el·líptics

$$\frac{(2Nx_0 + y_0)\sqrt{p} \pm \sqrt{3}\iota}{q(z_0 - y_0\sqrt{p})} = \frac{(2Ny_1 + z_1)\sqrt{p} \pm \sqrt{3}\iota}{q((1 - 2x_1) - z_1\sqrt{p})}. \quad \square$$

8.1.18 Teorema. Sigui $\Gamma(pq, N)$ el grup de matrius definit a partir de l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_B(pq, N) = \mathbb{Z}\{1, Ni, \frac{i+j}{2}, \frac{i-j}{2}\} \subseteq H_B(p, q)$, on N és lliure de quadrats, $N \mid \frac{q-1}{2}$, $i \text{ mcd}(p, N) = 1$. Aleshores, tots els punts el·líptics de $X(pq, N)$ tenen ordre 3 i pertanyen a les semirectes incloses a \mathcal{H} de pendent $\pm \frac{\sqrt{3}}{b\sqrt{p}}$. Explícitament, $\tilde{\mathcal{P}}_3(pq, N)$ és el conjunt

$$\left\{ \frac{b\sqrt{p} \pm \sqrt{3}\iota}{q(c - d\sqrt{p})} : (b, c, d) \in \mathcal{R}(n_{H,3}, 3; \mathbb{Z}), c \text{ senar}, 2N \mid b - d \right\}.$$

Per a un punt el·líptic $\tau = \tau(b, c, d) \in \tilde{\mathcal{P}}_3(pq, N)$ la matriu el·líptica corresponent és

$$\gamma_\tau = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + b\sqrt{p} & c + d\sqrt{p} \\ q(c - d\sqrt{p}) & 1 - b\sqrt{p} \end{pmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓ: És anàloga a la de la proposició 8.1.15, tenint en compte la descripció del grup quaterniònic $\Gamma(pq, 1)$, cf. 2.3.5. Així, una homografia $\gamma =$

$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + b\sqrt{p} & c + d\sqrt{p} \\ q(c - d\sqrt{p}) & a - b\sqrt{p} \end{pmatrix}$ és del grup $\Gamma(pq, N)$ si, i només si, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $a \equiv c \pmod{2}$, $2N|b - d$ i $\det(\gamma) = 1$.

Per 2.4.5 ja tenim que $e_2(pq, N) = 0$. Es pot veure també directament, utilitzant la interpretació com a representacions. En efecte, suposem que fos $\gamma \in \Gamma_2(pq, N)$. Aleshores, per 2.2.6 caldria que $\text{tr}(\gamma) = 0$. Per tant, hauria de ser $a = 0$ i c un enter parell. Com que $n(\gamma) = 1$, tindriem que $-pb^2 - qc^2 + pqd^2 = 4$. Així, la forma nòrmica $n_{H,3}(Y, Z, T) = -pY^2 - qZ^2 + pqT^2$ representaria 4. Ara bé, si plantegem la igualtat anterior mòdul q , tindriem que $-pY^2 \equiv 4 \pmod{q}$. En particular, $\left(\frac{-pY^2}{q}\right) = \left(\frac{4}{q}\right) = 1$. Però això no pot ser, perquè per hipòtesi $q \equiv 1 \pmod{4}$ i $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$. Per tant, $\Gamma_2(pq, N) = \emptyset$.

Segui $\gamma \in \Gamma_3(pq, N)$. Aleshores, per 2.2.6 cal que $\text{tr}(\gamma) = 1$, la qual cosa ens assegura que $a = 1$ i c és un enter senar. Com que $n(\gamma) = 1$, tenim que $-pb^2 - qc^2 + pqd^2 = 3$; és a dir, cal que $(b, c, d) \in \mathcal{R}(n_{H,3}, 3; \mathbb{Z})$, on b, c, d satisfan les condicions de paritat i divisibilitat anteriors. \square

Per a la recerca d'homografies quaternioniques el·líptiques de $\Gamma(D, N)$ i els seus punts fixos, hem utilitzat l'equivalència entre immersions i representacions de formes ternàries. De manera alternativa, també podem utilitzar l'equivalència entre el conjunt d'immersions $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}, \Lambda)$ i el conjunt de formes binàries $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}, \Lambda)$, donada a 7.4.5.

En particular, pel que fa als punts fixos de les homografies, la relació amb les formes quadràtiques binàries és directa, pel lema 2.2.8. Això és especialment aplicable en la recerca de punts el·líptics. Així tenim el resultat general següent.

8.1.19 Proposició. *Segui $X(D, N)$ la corba de Shimura definida per un grup d'homografies quaternioniques $\Gamma(D, N)$. Segui $\mathcal{O}(D, N) \subseteq H$ un ordre d'Eichler associat a $\Gamma(D, N)$. Aleshores,*

$$\mathcal{P}_k(D, N) = \{\tau(f) : f \in \mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N)), \det_1(f) = \delta\},$$

on $\delta = 4$ si $k = 2$, i $\delta = 3$ si $k = 3$. \square

A partir d'aquest resultat, podem calcular l'expressió dels punts el·líptics per a les corbes de Shimura $X(D, N)$ corresponents als casos poc ramificats de tipus A i B, utilitzant la descripció dels conjunts de formes binàries associats donada en 7.4.12 i 7.4.14, respectivament. Per a l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_A(2p, N) \subseteq H_A(p)$, el resultat que obtenim és exactament el mateix que

hem obtingut en 8.1.15, relacionant la condició $\det_1(f) = \delta$ amb les representacions de la forma nòrmica ternària de l'àlgebra $n_{H,3}$, cf. 6.3.7. Per a l'àlgebra $H_B(p, q)$ i l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_B(pq, N)$, el resultat obtingut es correspon amb 8.1.18. De manera anàloga s'aplicaria també al cas no ramificat, que hem exclòs en iniciar aquest capítol.

8.1.3 Homotècies i simetries principals de $\Gamma(D, N)$

Pel teorema 8.1.7, totes les homografies hiperbòliques del grup $\Gamma(D, N)$ s'obtenen via immersions optimals d'ordres quadràtics de cossos reals en l'ordre $\mathcal{O}(D, N)$, a partir de les unitats quadràtiques. Alguns d'aquests ordres quadràtics tenen un paper especialment important.

Recordem que, al llarg de tot el treball, hem fixat la immersió $\Phi : H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right) \hookrightarrow M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a})) \subseteq M(2, \mathbb{R})$, donada a 1.1.25. Això fa que les unitats del cos quadràtic real $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ siguin especialment importants, sobretot la unitat fonamental. Aplicant els resultats anteriors, obtindrem homografies hiperbòliques especials.

8.1.20 Notació. Sigui a un enter positiu, lliure de quadrats. Sigui ε la unitat fonamental de $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Posem $\xi = \varepsilon$ si $n(\varepsilon) = 1$ i $\xi = \varepsilon^2$ si $n(\varepsilon) = -1$. Aleshores, denotem per h l'homografia hiperbòlica de $SL(2, \mathbb{R})$, obtinguda a partir de ξ ; és a dir,

$$h = \begin{pmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \xi' \end{pmatrix}. \square$$

Observem que l'acció de h ve donada per $h(z) = \xi^2 z$, on $\xi^2 \in \mathbb{R}$. D'aquí deduïm la seva interpretació geomètrica.

8.1.21 Lema. *L'homografia hiperbòlica h és una homotècia de centre 0 i raó ξ^2 . El seus dos punts fixos reals són, doncs, 0 i ∞ . \square*

8.1.22 Lema. *Donats D i N , en les condicions generals fixades en iniciar el capítol, considerem el grup d'homografies quaternioniques $\Gamma(D, N) \subseteq SL(2, \mathbb{R})$. Aleshores, existeix un únic $s \in \mathbb{N}$ tal que*

- (a) $h^s \in \Gamma(D, N)$.
- (b) Si $h^{s'} \in \Gamma(D, N)$, aleshores $s|s'$.

En particular, si $N = 1$, aleshores $s = 1$.

DEMOSTRACIÓ: Fixem una àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ de discriminant D i un ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D, N) \subseteq H$ de nivell N .

Considerem la immersió natural $i : \mathbb{Q}(\sqrt{a}) \hookrightarrow H$, donada per $i(\alpha) := \alpha$, de manera que $h = \Phi(i(\xi))$. Considerem l'ordre quadràtic de $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ definit per $\Lambda := (i^{-1}(\mathcal{O}(D, N))) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Fixat Λ , sabem que existeix un únic $k \in \mathbb{N}$ tal que ε^k és la unitat fonamental de l'ordre Λ . Si k és parell i $n(\varepsilon) = -1$, aleshores $n(\varepsilon^k) = n(\xi^{k/2}) = 1$ i considerem $s = k/2$. En cas contrari, considerem $s = k$. Així, $n(\xi^s) = 1$ i $i(\xi) \in \mathcal{O}(D, N)_+^*$. Per tant, $h^s = \Phi(\varphi(\xi^s)) \in \Gamma(D, N)$. És clar que aquest s satisfà les dues propietats (a) i (b) de l'enunciat.

En particular, per a l'ordre maximal $\mathcal{O}(D, 1)$ és clar que $s = 1$, ja que l'ordre quadràtic Λ obtingut és l'anell d'enters de $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$. \square

8.1.23 Definició. Fixat el grup d'homografies quaternioniques $\Gamma(D, N)$, el lema anterior determina una homografia hiperbòlica h^s , que anomenem homotècia principal de $\Gamma(D, N)$. \square

8.1.24 Lema. *Sigui h^s l'homotècia principal de $\Gamma(D, N)$.*

- (i) *Els punts z i $\varepsilon^{2sn}z$ són $\Gamma(D, N)$ -equivalents, per a tot $n \in \mathbb{Z}$.*
- (ii) *Sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)_{z_0}$. Aleshores, $\gamma^{h^{-sn}} := h^{sn}\gamma h^{-sn} \in \Gamma_{\varepsilon^{2sn}z_0}$, per a tot $n \in \mathbb{Z}$.*

DEMOSTRACIÓ: Tenim que $h^{sn} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{sn} & 0 \\ 0 & (\varepsilon^{sn})' \end{pmatrix}$. Per tant, $h^{sn}(z) = \varepsilon^{2sn}z$, per a $z \in \mathcal{H}$, ja que $n(\varepsilon)^s = 1$. Si apliquem que s satisfà (a), deduïm l'apartat (i).

Suposem que $\gamma \in \Gamma(D, N)$ és una matriu que té z_0 com a punt fix. Amb aquesta hipòtesi, i aplicant el càlcul anterior, tenim que $h^{sn}\gamma h^{-sn}(\xi^{2sn}z_0) = (\varepsilon^{2sn}z_0)$, la qual cosa demostra (ii). \square

8.1.25 Remarca. Fixada una àlgebra de quaternions H , a més del cos $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$, també hi ha altres cossos quadràtics reals pels quals podem assegurar en general que existeixen immersions en l'àlgebra de quaternions H ; per exemple, $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$. En aquest cas, de manera anàloga a l'anterior, obtindriem

una homografia hiperbòlica de $SL(2, \mathbb{R})$. Ara bé, per tal de relacionar-ho amb el grup $\Gamma(D, N)$ caldria fixar alguna immersió, ja que en aquest cas no hi ha una inclusió natural de $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ en H . Això es podria aconseguir fixant des de l'inici una immersió de H en $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{D}))$, enlloc de Φ . \square

Ara bé, a part de les homotècies principals, hi ha altres aplicacions en el semiplà de Poincaré amb un significat especial en els dominis fonamentals. Recordem que, donat un cercle en el pla complex, tenim definida l'aplicació inversió respecte del cercle, cf. 2.2. Si el cercle és una recta hiperbòlica, la inversió respecte del cercle l'anomenem simetria hiperbòlica.

A partir dels resultats sobre l'existència i el nombre d'immersions optimals, 7.2.13, obtenim fàcilment el lema següent.

8.1.26 Lema. *Sigui $\mathcal{O}(D, N)$ un ordre quaterniònic. Aleshores l'ordre quadràtic $\Lambda(-DN, 1)$ satisfà que*

$$\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(-DN, 1)) \neq \emptyset, \quad \nu(D, N, -DN, 1; \mathcal{O}(D, N)^*) = 2^t,$$

on $t = \#\{p : p^k | N, k \geq 2\}$. En particular, si N és lliure de quadrats, $\nu(D, N, -DN, 1; \mathcal{O}(D, N)^*) = 1$. \square

Per a cada immersió $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(-DN, 1))$, posem $\omega = \varphi(\sqrt{-DN})$. Tenim que $n(\omega) = DN$ i $\text{tr}(\omega) = 0$ i $\omega \in \mathcal{O}^*(D, N)$, ja que $\sqrt{-DN} \in \Lambda(-DN, 1)$. Així, en considerar l'aplicació $\tilde{\Phi}$ definida a 7.4.6, tenim una homografia $\eta := \tilde{\Phi}(\omega) \in SL(2, \mathbb{R})$.

Anàlogament, si $-DN \equiv 1 \pmod{4}$, aleshores considerem també les immersions $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D, N), \Lambda(-DN, 2))$, a partir de les quals també obtenim elements de $\mathcal{O}(D, N)$ de norma DN i traça 0, ja que $\sqrt{-DN} \in \Lambda(-DN, 2)$.

8.1.27 Definicions. Sigui η una homografia de norma DN i traça 0, construïda a partir d'una immersió en la forma indicada en el paràgraf anterior. Suposem que η no fixa l'infinit. Aleshores diem que el cercle d'isometria C_η associat a η és una recta hiperbòlica principal del grup $\Gamma(D, N)$. Una simetria hiperbòlica es diu principal respecte de $\Gamma(D, N)$ si és la simetria respecte d'una recta hiperbòlica principal de $\Gamma(D, N)$. \square

Remarquem que el càlcul de rectes, i simetries, principals es realitza a partir del càlcul d'immersions, per al qual utilitzem les formes quadràtiques.

Recordem que tota homografia η és la composició de la simetria hiperbòlica respecte del cercle C_η amb la simetria respecte de la recta L_η , determinada per η .

8.1.28 Lema. Sigui $\eta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una homografia tal que el cercle d'isometria C_η és principal. Aleshores L_η és la recta d'abcisa a/c .

DEMOSTRACIÓ: Siguin z_1, z_2 els punts fixos de η . Pels resultats sobre cercles d'isometria 3.1, l'abcisa que determina la recta L_η és $\frac{z_1+z_2}{2}$. Com que C_η és principal tenim que $\text{tr}(\eta) = 0$, per tant $d = -a$. Així l'equació dels punts fixos és $cZ^2 - 2aZ - b = 0$, per tant $\frac{z_1+z_2}{2} = a/c$. \square

També es pot raonar el lema anterior utilitzant directament 3.1.11 i els resultats d'aquesta secció, ja que η prové d'un cos imaginari, per la qual cosa és una homografia el·líptica. En qualsevol cas, notem que l'abcisa de L_η coincideix amb el centre del cercle d'isometria.

En particular, comparant amb el cas modular, ens interessem especialment pels casos en què L_η és l'eix imaginari. Això s'aconsegueix si, i només si, l'homografia η té zeros a la diagonal.

8.1.29 Cas poc ramificat de tipus A. Sigui $\mathcal{O}(2p, 1) \subseteq H_A(p)$ l'ordre maximal que correspon al grup d'homografies quaternioniques $\Gamma(2p, 1)$. Com a exemple, fixem $p = 3$. Considerem $\omega = -3j + ij$, que satisfà $n(\omega) = 6$ i $\text{tr}(\omega) = 0$. Aleshores,

$$\eta = \tilde{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -3 + \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\eta = C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{1 - \sqrt{3}}\right).$$

El cercle d'isometria C_η és una recta hiperbòlica principal i L_η és l'eix imaginari. Si posem $\omega' = i + 3j$, que també satisfà $n(\omega') = 6$ i $\text{tr}(\omega') = 0$, tenim que

$$\eta' = \tilde{\Phi}(\omega') = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -3 \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad C_{\eta'} = C(-1/\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}).$$

El cercle d'isometria $C_{\eta'}$ és una recta hiperbòlica principal i $L_{\eta'}$ és la recta d'abcisa $-1/\sqrt{3}$. \square

8.1.30 Cas poc ramificat de tipus B. Sigui $\mathcal{O}_B(pq, 1) \subseteq H_B(p, q)$, l'ordre maximal que correspon al grup d'homografies quaternioniques $\Gamma(pq, 1)$. En aquest cas, donem l'expressió d'una recta principal de $\Gamma(pq, 1)$ en funció de q . Considerem

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{q}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\eta = C(0, 1/\sqrt{q}).$$

El cercle d'isometria C_η és una recta hiperbòlica principal i L_η és l'eix imaginari. En efecte, $\eta = \tilde{\Phi}(ij)$, $n(ij) = pq$, $\text{tr}(ij) = 0$. \square

8.1.31 Remarca. Notem el paral·lelisme amb el cas no ramificat, $\Gamma(1, N) = \Gamma_0(N)$. Considerem

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_0(1, N), \quad n(\omega) = N, \quad \text{tr}(\omega) = 0.$$

Aleshores obtenim

$$\eta = \tilde{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}, \quad C_\eta = C(0, 1/\sqrt{N}).$$

El cercle d'isometria C_η és una recta hiperbòlica principal i L_η és l'eix imaginari.

Si N és senar, també podem considerar

$$\omega' = \begin{pmatrix} N & -\frac{N+1}{2} \\ 2N & -N \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_0(1, N), \quad n(\omega) = N, \quad \text{tr}(\omega) = 0.$$

Aleshores obtenim

$$\eta' = \tilde{\Phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} N & -\frac{N+1}{2} \\ 2N & -N \end{pmatrix}, \quad C_{\eta'} = C(1/2, 1/2\sqrt{N}).$$

El cercle d'isometria $C_{\eta'}$ és una recta hiperbòlica principal i $L_{\eta'}$ és la recta d'abcisa $1/2$. Canviant els signes de la matriu, obtenim η'' amb cercle $C_{\eta''} = C(-1/2, 1/2\sqrt{N})$ i $L_{\eta''}$ la recta d'abcisa $-1/2$. \square

8.2 Dominis fonamentals

En aquesta secció, estudiem els cercles d'isometria associats a homografies quaternioniques amb l'objectiu de construir dominis fonamentals per als grups d'unitats quaternioniques $\Gamma(D, N)$, amb $D > 1$. Les notacions relatives als cercles d'isometria i als dominis fonamentals les hem explicitades en el capítol 3, on hem calculat dominis fonamentals per al cas no ramificat.

Seguint el mètode dels cercles d'isometria, en primer lloc determinem el subgrup $\Gamma(D, N)_\infty$ i construïm un domini fonamental $\mathcal{D}_r(\Gamma(D, N)_\infty)$ que satisfà les propietats desitjades. A continuació, demostrem resultats sobre la interacció de l'homotècia principal i els cercles d'isometria associats a homografies de $\Gamma(D, N)$.

8.2.1 Construcció de $\mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty)$, per a $D > 1$

Sigui $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions indefinida de discriminant $D > 1$. Suposem que $a > 0$ i fixem el monomorfisme $\Phi : H \hookrightarrow M(2, \mathbb{R})$, donat a 1.1.25, que ens determina una immersió de H en $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a}))$. Sigui ε la unitat fonamental del cos quadràtic real $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$. Recordem que posem $\xi = \varepsilon$ si $n(\varepsilon) = 1$ i $\xi = \varepsilon^2$ si $n(\varepsilon) = -1$. Sigui $\Gamma(D, N)_\infty$ el subgrup de $\Gamma(D, N)$ format per les homografies que fixen l'infinít.

8.2.1 Notació. Donats dos nombres $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$, denotem per $S(r_1, r_2)$ la semicorona $\{z \in \mathcal{H} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$.

8.2.2 Proposició. *Sigui r un nombre real positiu. Sigui h^s l'homotècia principal de $\Gamma(D, N)$. Aleshores,*

$$(i) \quad \Gamma(D, N)_\infty = \langle h^s \rangle.$$

(ii) $S(r, \xi^{2s}r)$ és un domini fonamental en \mathcal{H} per l'acció de $\Gamma(D, N)_\infty$; és a dir,

$$\mathcal{D}_r(\Gamma(D, N)_\infty) = \{z \in \mathcal{H} : r \leq |z| \leq \xi^{2s}r\}.$$

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)$ tal que $\gamma(\infty) = \infty$. Sigui $\mathcal{O}(D, N)$ un ordre quaterniònic tal que $\Gamma(D, N) = \Phi(\mathcal{O}(D, N)_+^*)$. Utilitzant l'expressió genèrica dels elements enters de $\Phi(H)$ obtenim que

$$\gamma = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix}, \text{ amb } u \in \mathbb{Q}(\sqrt{a}),$$

ja que $\beta' = x - y\sqrt{a} = 0$ implica que $x = y = 0$ per ser $a \neq 1$; per tant, $\beta = 0$. Notem que només pot ser $a = 1$ en el cas no ramificat, $D = 1$; aleshores, la immersió Φ també té sentit i seria $\beta' = x - y$, però $\beta = x + y \neq 0$. Els elements obtinguts aleshores són les translacions.

Del fet que $\gamma \in \Gamma(D, N)$ deduïm que $\text{tr}(u) \in \mathbb{Z}$, $n(u) = 1$; per tant, u és una unitat de l'anell d'enters de $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ i ha de ser potència de la unitat ξ construïda a partir de la unitat fonamental. Així, existeix $m \in \mathbb{Z}$ tal que $u = \xi^m$ i, per tant, $\gamma = h^m$. Ara bé, si apliquem la notació i el resultat de 8.1.22, tenim que $s|m$ i $\gamma = h^m = (h^s)^n$ per cert $n \in \mathbb{Z}$, $s = s(D, N)$. Notem que $h^s \in \Gamma(D, N)_\infty$. Això ens diu que $\Gamma(D, N)_\infty$ és el grup cíclic infinit generat per h^s ; és a dir,

$$\Gamma(D, N)_\infty = \{h^{sn} : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Utilitzant la interpretació geomètrica de h , és clar que h^s és una homotècia de centre $(0, 0)$ i raó ξ^{2s} . Per tant, el domini fonamental de $\Gamma(D, N)_\infty = \langle h^s \rangle$ és una semicorona $S(r_1, r_2)$, amb $r_2 = \xi^{2s}r_1$. El valor de $r = r_1$ el podem escollir. \square

Observem que, fixada una semicorona $S = S(r, \xi^{2s}r)$, és clar que les semicorones $h^{sn}(S)$ recobreixen el semiplà de Poincaré; tenen radi cada cop més gran a mesura que n tendeix a l'infinit i radi cada cop més petit quan n tendeix a menys infinit.

8.2.3 Remarca. Notem el paral·lelisme d'aquesta construcció amb la del cas $D = 1$, on els elements que fixen l'infinit són les translacions. El resultat és clar si considerem l'àlgebra no ramificada $M(2, \mathbb{Q})$ i l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_0(1, N) \subseteq M(2, \mathbb{Z})$. Si considerem l'àlgebra de quaternions no ramificada $H = \left(\frac{1, -1}{\mathbb{Q}}\right)$ i l'ordre d'Eichler $\mathcal{O}_M(1, N) = \mathbb{Z} \left[1, \frac{j+ij}{2}, N\frac{-j+ij}{2}, \frac{1-i}{2}\right] \subseteq H$, observem que també s'obté el grup de les translacions amb el mateix argument que en la demostració anterior. \square

8.2.4 Remarca. D'alguna manera, comparant amb el cas modular, es tractaria de triar una semicorona bàsica, que faci el paper que fa la banda $\{z \in \mathcal{H} : |\operatorname{Re}(z)| \leq 1/2\}$ per al cas no ramificat. Ara bé, si analitzem més a fons el cas modular, observem que el domini fonamental escollit és invariant per la simetria respecte de la recta hiperbòlica que determina l'eix imaginari. Recordem que una simetria axial és un cas particular del que hem anomenat inversió del cercle, cf. 3.1, que és la composició de la conjugació complexa i una homografia. En aquest sentit, donada la representació del domini fonamental en forma de semicorona, té sentit determinar una recta hiperbòlica, que serà un semicercle amb centre 0, de manera que $\mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty)$ sigui invariant per la simetria hiperbòlica respecte d'aquesta recta; és a dir, que sigui invariant per la inversió respecte d'aquest cercle. El punt clau és escollir quina ha de ser aquesta recta hiperbòlica especial. Resumim aquests comentaris en el lema següent. \square

8.2.5 Lema. *sigui $r \in \mathbb{R}^+$. Un domini fonamental $\mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty)$ és invariant respecte de la simetria hiperbòlica donada per la recta hiperbòlica $C = C(0, r\xi^s)$ si, i només si, $\mathcal{D}_r(\Gamma(D, 1)_\infty) = S(r, \xi^{2s}r)$.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que $\mathcal{D}(\Gamma(D, 1)_\infty) = S(r, \xi^{2s}r)$ i considerem $C_1 = C(0, r)$ i $C_2 = C((0, 0), \xi^{2s}r)$ les rectes hiperbòliques que el delimiten. El punt mig entre els punts $r\iota$ i $\xi^{2s}r\iota$, segons la distància hiperbòlica δ definida a la

secció 2.1, és $(0, y)$ tal que $\delta(r, y) = \left| \log \left| \frac{y}{r} \right| \right| = \left| \log \left| \frac{\xi^{2s} r}{y} \right| \right| = \delta(y, \xi^{2s} r)$; és a dir, $y = \xi^s r$. Notem que hi ha infinites rectes hiperbòliques que passen pel punt $\xi^s r$ i no tenen intersecció amb les rectes hiperbòliques C_1 ni C_2 ; però cap d'aquelles és equidistant a aquestes dues rectes. Fixem la recta $C = C(0, \xi^s r)$ i sigui f la simetria hiperbòlica respecte d'aquesta recta. Per a veure que la semicorona és invariant, és suficient provar que $f(C_1) = C_2$. En efecte, expressant f en funció del centre i el radi de C , tenim que $f(z) = \frac{(\xi^s r)^2}{\bar{z}}$. En particular, $f(r) = \xi^{2s} r$ i $f(r\iota) = \xi^{2s} r\iota$; i com que les rectes van a parar a rectes, tenim que $f(C_1) = C_2$.

A la inversa, sigui $\mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty) = S(r', \xi^{2s} r')$ una semicorona invariant respecte de la simetria hiperbòlica donada per la recta hiperbòlica $C = C(0, \xi^s r)$, que denotem per f . Aleshores, $f(r'\iota) = \frac{(\xi^s r)^2 r'\iota}{(r')^2}$ ha de ser igual a $\xi^{2s} r'\iota$; per tant, $r' = r$. \square

8.2.6 Remarca. Com a conseqüència del resultat anterior, per a un grup quaterniònic $\Gamma(D, N)$, fixada una recta hiperbòlica $C = C(0, r)$, tenim tres dominis fonamentals especials de $\mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty)$ amb bones propietats respecte de C , que són els següents:

- (i) $S(r, \xi^{2s} r)$, de manera que C és l'aresta inferior.
- (ii) $S(\xi^{-2s} r, r)$, de manera que C és l'aresta superior.
- (iii) $S(\xi^{-s} r, \xi^s r)$, de manera que és invariant per la simetria respecte de C .

En el cas del domini fonamental $\mathcal{D}(\Gamma(1, N)_\infty)$, per als casos modulars podem fixar com a recta hiperbòlica destacada C el semieix imaginari. Entre els tres dominis fonamentals amb bones propietats respecte de C , que acabem de comentar, el domini fonamental habitual correspon al cas (iii). Notem que satisfà que en cada cicle parabòlic hi ha un únic vèrtex. En el cas que $D > 1$, no tenim punts parabòlics, per tant no podem aplicar un criteri anàleg per a decidir entre les tres possibilitats anteriors. En aquest sentit, n'hi haurà prou amb fixar una recta hiperbòlica C .

Per exemple, es pot fixar una recta hiperbòlica C que contingui punts el·líptics. Recordem, a més, la simetria dels punts el·líptics respecte de l'eix imaginari, cf. 2.2.16, de manera que com a mínim C contindrà dos punts el·líptics, que poden ser o no equivalents entre si. Aleshores, com que els

punts el·líptics no poden ser a l'interior del domini fonamental, escollirem un domini fonamental respecte de C segons les opcions (i) o bé (ii) anteriors.

També es pot fixar una recta C que sigui una recta hiperbòlica principal per a $\Gamma(D, N)$, en el sentit de 8.1.27. \square

8.2.2 Cercles d'isometria

A continuació estudiem els cercles d'isometria. Recordem que el mètode utilitzat en el capítol 3, per a la construcció dels dominis fonamentals, requeria que la regió determinada per la intersecció entre el domini fonamental $\mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty)$ i l'exterior de tots els cercles d'isometria fos no buida. En particular, cal que la intersecció dels exteriors de tots els cercles d'isometria sigui no buida. Aquest requisit no se satisfà pas en general per a $D > 1$. Els resultats següents mostren les obstruccions al mètode i suggereixen alternatives per a aconseguir un refinament del mètode.

En primer lloc, estudiem els cercles d'isometria corresponents a les homografies el·líptiques. A continuació, provem relacions entre cercles d'isometria associats a una homografia en general.

8.2.7 Lema. *Fixada una àlgebra de quaternions de divisió, H , sigui γ una homografia quaterniònica tal que el cercle d'isometria C_γ tingui centre $o_\gamma = (0, 0)$. Aleshores, γ és el·líptica d'ordre 2.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ una àlgebra de quaternions de discriminant D . En general, tenim que $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ b\beta' & \alpha' \end{pmatrix}$, utilitzant la representació Φ de H en $M(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a}))$, fixada a 1.1.25. La condició $o_\gamma = 0$ implica necessàriament $\alpha' = 0$; per ser $a > 1$, tenim que aleshores també $\alpha = 0$ i, per tant, $\text{tr}(\alpha) = 0$. Així, per 2.2.6, l'homografia γ és el·líptica d'ordre 2. \square

Observem que si tenim una homografia $\gamma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ b\beta' & \alpha' \end{pmatrix}$, amb $n(\beta) \in \mathbb{Z}$ i $|b| > 1$, aleshores el cercle d'isometria associat no pot ser de centre 0.

8.2.8 Proposició. *Fixem l'àlgebra de quaternions $H_A(p)$. Considerem el conjunt d'homografies el·líptiques d'ordre 2, $\Gamma_2(2p, 1)$. Aleshores,*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_2(2p, 1)} \text{ext}(C_\gamma) = \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓ: Tenim que $e_2(2p, 1) = 2$ i observem que l'homografia $\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \Gamma_2(2p, 1)$, per a tot $p \equiv 3 \pmod{4}$. El cercle d'isometria associat és $C_\gamma = C(0, 1)$ i el punt elíptic corresponent és $z = \iota$, on $\iota^2 = -1$. Considerem l'homotècia principal h , generadora de $\Gamma(2p, 1)_\infty$. És clar que, quan n tendeix a l'infinit, $h^n(\iota) = \xi^{2n}\iota$ és un punt elíptic d'ordre 2, situat a l'eix imaginari, amb valor absolut que tendeix a l'infinit. Per les propietats dels cercles d'isometria de les homografies el·líptiques d'ordre 2, 3.1.11, el radi del cercle corresponent tendeix a infinit. Per tant, l'exterior de la unió de tots els cercles d'isometria és clarament el conjunt buit. \square

La proposició anterior mostra que el mètode dels cercles d'isometria, tal com s'utilitzava en el capítol 3, no es pot aplicar a les corbes de Shimura de tipus A, per a cap valor de p . L'obstrucció és la consideració simultània d'homografies relacionades per l'homotècia principal i, sobretot, el fet que hi hagi cercles d'isometria que continguin el punt 0 en el seu interior.

Notem que, per aplicar el mètode dels cercles d'isometria, ens podem reduir a considerar les homografies de $\Gamma(D, N)' = \Gamma(D, N) - \Gamma(D, N)_\infty$ tals que els seus cercles d'isometria tinguin intersecció amb una semicorona, domini fonamental per a l'acció de $\Gamma(D, N)_\infty$, fixada. En els resultats següents estudiem l'acció induïda per l'homotècia principal en la resta d'homografies, en relació amb els cercles d'isometria associats. En particular, obtenim resultats que generalitzen el resultat provat per a homografies el·líptiques en 8.2.8, en relació amb el fet que el punt 0 pertanyi o no a l'interior dels cercles.

8.2.9 Lema. *Sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)$. Sigui $h = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u' \end{pmatrix} \in \Gamma(D, N)_\infty$. Aleshores,*

- (i) $C_{h\gamma}$ és un cercle d'isometria de centre $o_{h\gamma} = o_\gamma$ i radi $r_{h\gamma} = |u|r_\gamma$.
- (ii) $C_{\gamma h}$ és un cercle d'isometria de centre $o_{\gamma h} = \frac{1}{u^2}o_\gamma$ i radi $r_{\gamma h} = \frac{1}{|u|}r_\gamma$.
- (iii) $C_{h\gamma h^{-1}}$ és un cercle d'isometria de centre $o_{h\gamma h^{-1}} = u^2o_\gamma$ i radi $r_{h\gamma h^{-1}} = |u|^2r_\gamma$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a, b, c i d són nombres reals. El seu cercle d'isometria és $C_\gamma = C(-d/c, 1/|c|)$.

Explicitem les homografies:

$$h\gamma = \begin{pmatrix} ua & ub \\ u'c & u'd \end{pmatrix}, \quad \gamma h = \begin{pmatrix} ua & u'b \\ uc & u'd \end{pmatrix}, \quad h\gamma h^{-1} = \begin{pmatrix} a & u^2b \\ (u')^2c & d \end{pmatrix}.$$

Els cercles d'isometria associats són, respectivament:

$$C_{h\gamma} = C\left(\frac{-d}{c}, \left|\frac{u}{c}\right|\right), \quad C_{\gamma h} = C\left(\frac{-d}{u^2c}, \left|\frac{1}{uc}\right|\right), \quad C_{h\gamma h^{-1}} = C\left(\frac{-u^2d}{c}, \left|\frac{u^2}{c}\right|\right).$$

□

8.2.10 Remarca. Observem que els cercles d'isometria associats a elements del grup $\Gamma(D, N)$ no tenen ni radis ni centres acotats (cf. 3.1.14). □

8.2.11 Lema. Sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)$ i considerem el cercle d'isometria associat C_γ . Fixem un domini fonamental $S = \mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty)$. Aleshores, $0 \in \text{int}(C_\gamma)$ si, i només si, C_γ té intersecció amb un nombre infinit de transformats $h^s(S)$.

□

8.2.12 Proposició. Considerem l'homotècia principal h^s de $\Gamma(D, N)$ i sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)$. Fixem un domini fonamental $S = \mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty)$. Aleshores existeix $n \in \mathbb{Z}$ tal que $C_{h^{sn}\gamma h^{-sn}} \cap S \neq \emptyset$.

DEMOSTRACIÓ: Considerem el cercle d'isometria associat C_γ . Sigui $z \in C_\gamma \cap \mathcal{H}$, $|z - o_\gamma| = r_\gamma$. Sigui m l'únic enter tal que $h^{sm}(z) = \xi^{2sm}z \in S$. Notem que $\xi^{2sm} \in \mathbb{R}^+$; per tant, $|\xi^{2sm}z - \xi^{2sm}o_\gamma| = \xi^{2sm}r_\gamma$. Pel lema 8.2.9(iii), la igualtat anterior és exactament $|\xi^{2m}z - o_{h^{sm}\gamma h^{-sm}}| = r_{h^{sm}\gamma h^{-sm}}$; és a dir, $\xi^{2m}z \in C_{h^{sm}\gamma h^{-sm}}$. Aleshores, només cal considerar n igual a m per a algun $z \in C_\gamma \cap \mathcal{H}$. □

8.2.13 Proposició. Fixem una semicorona $S = \mathcal{D}(\Gamma(D, N)_\infty)$. Sigui $\gamma \in \Gamma(D, N)$ tal que el cercle d'isometria C_γ satisfaci $C_\gamma \cap S \neq \emptyset$. Sigui h^s l'homotècia principal de $\Gamma(D, N)$.

- (i) Si $C_\gamma \subseteq S$, aleshores $(\cap_n \text{ext}(C_{h^{sn}\gamma h^{-sn}})) \cap S = \text{ext}(C_\gamma) \cap S$.
- (ii) Si $C_\gamma \subseteq (S \cup h^{-s}S)$, aleshores $(\cap_n \text{ext}(C_{h^{sn}\gamma h^{-sn}})) \cap S = (\text{ext}(C_\gamma) \cap \text{ext}(C_{h^s\gamma h^{-s}})) \cap S$.
- (iii) Si $(0, 0) \in \text{int}(C_\gamma)$, aleshores $(\cap_n \text{ext}(C_{h^{sn}\gamma h^{-sn}})) \cap S = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓ: Sigui $n \in \mathbb{Z}$ qualsevol. Fixada n , per alleugerir la notació posem $\eta := h^{sn}\gamma h^{-sn}$. Sigui $S = S(r, \xi^{2s}r)$.

Suposem que el cercle C_γ està totalment contingut en la semicorona S . En particular, $(0,0) \notin \text{int}(C_\gamma)$. Pel lema 8.2.9, C_η té centre $o_\eta = \xi^{2ns}o_\gamma$ i radi $r_\eta = |\xi^{2ns}|r_\gamma$; per tant, C_η està totalment contingut en la semicorona $\xi^{2ns}S$. D'aquí deduïm que $(\bigcap_n C_{h^{sn}\gamma h^{-sn}}) \cap S = C_\gamma \cap S$, la qual cosa demostra (i).

De manera anàloga, si suposem que C_γ està contingut en la unió de les semicorones S i $h^{-s}(S) = \xi^{-2s}S$, tenim que el cercle C_η està inclòs en la unió de les semicorones $\xi^{2ns}S$ i $\xi^{2ns-1}S$, i deduïm (ii). Notem que, en aquest cas, també tenim $(0,0) \notin \text{int}(C_\gamma)$.

Suposem ara $(0,0) \in \text{int}(C_\gamma)$. Pel lema 8.2.9, és clar que $(0,0) \in \text{int}(C_\eta)$. És clar que, $n \rightarrow \infty$, el radi dels cercles corresponents també tendeix a l'infinit. Per tant, $S \subseteq \bigcup_n \text{int}(C_{h^{sn}\gamma h^{-sn}})$, i deduïm (iii). \square

Com a aplicació dels resultats anteriors, mostrem que, per a les corbes de Shimura corresponents a ordres d'àlgebres poc ramificades de tipus A i B, els conjunts de punts el·líptics diferents del considerat a 8.2.8 no suposen cap obstrucció, llevat d'uns quants casos concrets.

8.2.14 Proposició. Fixem l'àlgebra de quaternions $H_A(p) = \left(\frac{p, -1}{\mathbb{Q}}\right)$. Considerem el conjunt d'homografies $\Gamma_3(2p, N)$. Aleshores, si $p \neq 3$,

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_3(2p, N)} \text{ext}(C_\gamma) \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓ: És suficient provar-ho per a $N = 1$, ja que $\Gamma(2p, N) \subseteq \Gamma(2p, 1)$. Sigui $\gamma \in \Gamma_3(2p, 1)$. Per 8.1.15, tenim que

$$\gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + b\sqrt{p} & c + d\sqrt{p} \\ -c + d\sqrt{p} & 1 - b\sqrt{p} \end{pmatrix}, \text{ on } b, c, d \in \mathbb{Z} \text{ senars, } n_{H,3}(b, c, d) = 3.$$

El cercle d'isometria C_γ corresponent té centre $o_\gamma = \frac{b\sqrt{p}-1}{-c+d\sqrt{p}}$ i radi $r_\gamma = \frac{2}{|c-d\sqrt{p}|}$. Veurem que $0 \in C_\gamma$ només per a $p = 3$, de la qual cosa es dedueix el resultat.

Comparem $|o_\gamma|$ i r_γ . Podem suposar $b > 0$; per tant, $|b\sqrt{p}-1| = b\sqrt{p}-1$. En efecte, si fos $b = 0$, com que c i d són senars, $c^2 - pd^2 = 3$ implicaria

$2|p$. Així, la desigualtat $|o_\gamma| > r_\gamma$ equival a $b\sqrt{p} > 3$. Per a $b \geq 3$, és clar que se satisfà. Per a $b = 2$, se satisfà per a tot primer $p > 2$; notem que, efectivament, tenim que $p \neq 2$, ja que $p \equiv 3 \pmod{4}$. Si $b = 1$, tenim que $|o_\gamma| > r_\gamma$ per als primers $p \geq 11$. Ara bé, per a $p = 7$ no hi ha cap homografia el·líptica amb $b = 1$, ja que $n_{H,3}(1, c, d) = 3$ equival a l'equació $c^2 - 7d^2 = 10$ i es comprova que $c^2 \equiv 3 \pmod{7}$ no té solució. Així, queda només el cas $p = 3$, en el qual sí que hi ha homografies que no satisfan la desigualtat; per tant, només ens cal excloure aquest cas. \square

8.2.15 Proposició. *Fixem l'àlgebra de quaternions $H_B(p, q)$. Considerem el subconjunt d'homografies $\Gamma_e(pq, N)$. Aleshores, per a $(p, q) \neq (2, 5)$ i $(p, q) \neq (7, 5)$,*

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma_e(pq, N)} \text{ext}(C_\gamma) \neq \emptyset.$$

DEMOSTRACIÓ: Com en la proposició anterior, és suficient provar-ho per a $N = 1$. Sabem que $\Gamma_e(pq, 1) = \Gamma_3(pq, 1)$ i que $\gamma \in \Gamma_3(pq, 1)$ és

$$\gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + b\sqrt{p} & c + d\sqrt{p} \\ q(c - d\sqrt{p}) & 1 - b\sqrt{p} \end{pmatrix},$$

amb $b, c, d \in \mathbb{Z}$ tals que $n_{H,3}(b, c, d) = 3$, c senar i $b \equiv d \pmod{2}$, per 8.1.18.

El cercle d'isometria C_γ corresponent té centre $o_\gamma = \frac{b\sqrt{p} - 1}{q(c - d\sqrt{p})}$ i radi $r_\gamma = \frac{2}{q|c - d\sqrt{p}|}$. Veurem que $0 \notin C_\gamma$, suposant que no estem en els casos $H = \left(\frac{2, 5}{\mathbb{Q}}\right) \circ H = \left(\frac{7, 5}{\mathbb{Q}}\right)$, de la qual cosa es dedueix el resultat.

Comparem $|o_\gamma|$ i r_γ . Per a $b = 0$, hauria de ser $q = 3$, però $q \equiv 1 \pmod{4}$. Així, podem suposar $b > 0$ i, per tant, la desigualtat $|o_\gamma| > r_\gamma$ equival a $b\sqrt{p} > 3$. Per a $b \geq 3$ és clar que se satisfà la desigualtat. Per a $b = 2$, també se satisfà per a tot primer $p > 2$. Observem que el cas $b = 2$ i $p = 2$ no és possible, ja que $n_{H,3}(2, c, d) = 3$ equival a l'equació $q(-c^2 + 2d^2) = 11$ i aquesta no té solució per a cap primer $q \equiv 1 \pmod{4}$. Si $b = 1$, tenim que $|o_\gamma| > r_\gamma$ per als primers $p \geq 11$. Ara bé, per a $p = 3, 5$ no hi ha cap homografia el·líptica amb $b = 1$, ja que $n_{H,3}(1, c, d) = 3$ equival a l'equació $q(-c^2 + pd^2) = 3 + p$, que no té solució per a cap primer $q \equiv 1 \pmod{4}$. Per a $p = 2$, la condició $b = 1$ determina $q = 5$. Per a $p = 7$, s'obté també només $q = 5$. Així, la desigualtat se satisfà sempre excepte en aquests dos casos. \square

8.3 Construcció de dominis fonamentals

Els resultats de la secció anterior demostren l'existència teòrica de dominis fonamentals a partir del mètode generalitzat dels cercles d'isometria. En aquesta secció presentem construccions efectives de dominis fonamentals combinant els resultats dels capítols anteriors.

El coneixement dels ordres explícits, els resultats sobre els conjunts de vèrtexs el·líptics, el càlcul d'immersions a partir de formes quadràtiques i el càlcul del volum hiperbòlic, ens donen informació explícita del quocient $\Gamma(D, N) \backslash \mathcal{H}$ i ens permeten fer efectiva la construcció de dominis fonamentals explícits. Si, a més, utilitzem els resultats que hem obtingut en les seccions anteriors sobre les homotècies i simetries principals, i els cercles d'isometria, el resultat és més reeixit i donem una interpretació geomètrica del domini fonamental.

En primer lloc, fem un breu esbós del procés. A continuació, ho il·lustrem amb la construcció explícita d'exemples, entre els quals hi ha algun cas dels que han quedat exclosos en la secció anterior. Comentarem també la relació de les arestes dels dominis fonamentals trobats amb els cercles d'isometria d'homografies quaterniòniques del grup i un domini fonamental del subgrup d'homografies que fixen l'infinit. Hem escollit els exemples de manera que incloguin casos de tipus A i de tipus B, amb diferents relacions amb els cercles d'isometria. Hem tingut especial interès en l'estudi de casos per a $N = 1$, de manera anàloga al cas modular, on inicialment (en temps de Gauss) l'estudi es va centrar en un domini fonamental per l'acció de $SL(2, \mathbb{Z})$.

Les representacions gràfiques i les taules de constants es poden trobar a la secció 8.4.

8.3.1 Comentaris generals

Considerem una corba de Shimura $X(D, N)$, amb $D > 1$, i posem $\Gamma(D, N)$, el grup d'homografies quaterniòniques que l'uniformitza. Volem trobar un domini fonamental de $X(D, N)$ que satisfaci la hipòtesi que tots els vèrtexs siguin punts el·líptics, si això és possible. En particular, cal que almenys un dels valors $e_2(D, N)$ i $e_3(D, N)$ sigui no nul.

En primer lloc, a partir de les fórmules explicitades en la secció 2.4 calculem les constants associades a la corba de Shimura $X(D, N)$: $e_2(D, N)$, $e_3(D, N)$, $g(D, N)$ i $V(D, N)$. Ens cal trobar un polígon hiperbòlic, amb $n_e(D, N)$ vèrtexs el·líptics (cf. 2.4.7), que tingui associades les constants anteriors.

Així doncs, necessitem calcular explícitament punts el·líptics. Utilitzem els resultats sobre els ordres d'Eichler $\mathcal{O}(D, N)$ donats en el capítol 1 i explicitem el grup d'homografies quaterniòniques $\Gamma(D, N)$. Per a les àlgebres poc ramificades de tipus A i B, n'hem donat resultats a 2.3. Considerem les formes nòrmiques associades a $\mathcal{O}(D, N)$ i $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}(D, N)$, i estudiem les seves representacions, la qual cosa ens permet fer una recerca efectiva d'homografies el·líptiques, cf. 8.1. En particular, hem donat resultats generals per a ordres quaterniònics de les àlgebres poc ramificades de tipus A i B.

Per tal d'escollir un conjunt de punts el·líptics adequat, analitzem les relacions entre els punts el·líptics trobats, buscant quins són $\Gamma(D, N)$ -equivalents. Les mateixes homografies el·líptiques donen sovint algunes relacions. Per a establir més relacions, utilitzem les immersions i de nou la seva connexió amb les formes quadràtiques, que ens permeten obtenir homografies hiperbòliques a partir d'unitats fonamentals d'ordres quadràtics; en particular, utilitzem el generador del grup $\Gamma(D, N)_\infty$; és a dir, l'homotècia principal. Notem que ens caldrà provar també la no-equivalència de punts, la qual cosa es resol també en termes de representacions de formes nòrmiques.

A partir dels càlculs anteriors podem realitzar temptatives per a determinar un polígon hiperbòlic, de $n_e(D, N)$ vèrtexs el·líptics, amb els cicles adequats segons $e_2(D, N)$, $e_3(D, N)$, que tingui les arestes identificades dos a dos, la qual cosa determina ja el gènere. Donat un polígon hiperbòlic escollit com a candidat, comprovem si el seu volum hiperbòlic és l'adequat. En cas afirmatiu, és clar que el polígon escollit és el domini fonamental corresponent a l'acció per un subgrup de $\Gamma(D, N)$. Ara bé, el quocient que defineix té els mateixos invariants que el quocient definit per $\Gamma(D, N)$. Aplicant el teorema de Hurwitz, obtenim que el quocient és el mateix i, per tant, el polígon obtingut és un domini fonamental de $X(D, N)$. Recordem que, a partir d'un domini fonamental, l'aparellament de les arestes ens dóna una presentació explícita del grup $\Gamma(D, N)$.

Per a situar el possible domini, podem fer ús de les simetries i les homotècies principals, la qual cosa dóna criteris per a escollir entre els punts el·líptics. Així, podem fixar una semicorona que sigui domini fonamental per l'acció de $\Gamma(D, N)_\infty$ amb bones propietats respecte de rectes hiperbòliques concretes. Per exemple, que sigui invariant respecte de la simetria hiperbòlica donada per certa recta hiperbòlica principal. Fixada la semicorona, només cal buscar punts el·líptics en la seva vora i el seu interior. O bé, a la inversa, podem fixar una semicorona a partir d'alguns punts el·líptics trobats prèviament, tal com hem indicat a 8.2.6.

Notem que els càlculs que es requereixen en el procés indicat per a determinar un domini fonamental són laboriosos, sobretot pel que fa a la recerca de formes nòrmiques i a les seves representacions, utilitzades per a trobar punts el·líptics i relacions entre aquests. En aquest sentit, en el paquet Poincare hem implementat instruccions que, si bé no resolen completament el problema de la recerca de representacions de formes ternàries, faciliten els càlculs. Algunes d'aquestes instruccions fan referència al càlcul d'immersions i ja han estat comentades en els capítols anteriors. En particular, hem utilitzat aquestes instruccions en els resultats que presentem a continuació sobre dominis fonamentals explícits.

8.3.2 Domini fonamental per a $X(6,1)$

El teorema següent explicita un domini fonamental per a la corba de Shimura ramificada $X(6,1)$ amb la propietat que tots els vèrtexs són el·líptics. Conté també els valors de les constants, les dades sobre les relacions entre els vèrtexs. Recordem que, en aquest cas, no es podia aplicar el mètode general dels cercles d'isometria, ja que la regió determinada per la intersecció de l'exterior de tots els cercles d'isometria és buida, per 8.2.14.

8.3.1 Teorema. *Considerem la corba de Shimura $X(6,1)$. Aleshores:*

(i) *El polígon hiperbòlic determinat pels punts $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, on*

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-1 + \iota}{1 + \sqrt{3}}, & v_2 &= \frac{-\sqrt{3} + \iota}{4 + 2\sqrt{3}}, & v_3 &= (2 - \sqrt{3})\iota, \\ v_4 &= \frac{1 + \iota}{1 + \sqrt{3}}, & v_5 &= \frac{\sqrt{3} + \iota}{2}, & v_6 &= \iota, \end{aligned}$$

és un domini fonamental per a la corba de Shimura $X(6,1)$ en el semipla de Poincaré.

(ii) *Tots els vèrtexs són el·líptics i les homografies el·líptiques corresponents*

són:

$$\gamma_{v_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \\ -3 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{v_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 4 - 2\sqrt{3} \\ -4 - 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{v_3} = \begin{pmatrix} 0 & -2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{v_4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$\gamma_{v_5} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \gamma_{v_6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (iii) El volum hiperbòlic és $V_h(6, 1) = \frac{2\pi}{3}$; el gènere és $g(6, 1) = 0$.
- (iv) El nombre de vèrtexs el·líptics d'ordre 2 és $n_2(6, 1) = 4$. Hi ha $e_2(6, 1) = 2$ cicles el·líptics d'ordre 2, $\{v_2, v_6\}$ i $\{v_3, v_5\}$. Les relacions entre aquests vèrtexs són $\gamma_{v_1}(v_2) = v_6$ i $\gamma_{v_4}(v_3) = v_5$.
- (v) El nombre de vèrtexs el·líptics d'ordre 3 és $n_3(6, 1) = 2$. Hi ha $e_3(6, 1) = 2$ cicles el·líptics d'ordre 3, que són $\{v_1\}$ i $\{v_4\}$.
- (vi) L'homotècia principal de $\Gamma(6, 1)$ és

$$h = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (vii) L'aparellament de les arestes ve donat per:

$$\begin{array}{ll} (v_1v_2, v_1v_6) & \text{per l'homografia } \gamma_{v_1}, \\ (v_2v_3, v_6v_5) & \text{per l'homografia } \gamma, \\ (v_3v_4, v_5v_4) & \text{per l'homografia } \gamma_{v_4}, \end{array}$$

$$\text{on } \gamma = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} & -1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (viii) Tenim la presentació del grup $\Gamma(6, 1)/\pm \text{Id}$ següent:

$$\langle \gamma_{v_1}, \gamma_{v_4}, \gamma : \gamma_{v_1}^3 = \gamma_{v_4}^3 = (\gamma^{-1}\gamma_{v_1})^2 = (\gamma^{-1}\gamma_{v_4})^2 = 1 \rangle.$$

- (ix) Les arestes v_2v_3 i v_6v_5 són arcs dels cercles d'isometria $C_{\gamma_{v_3}}$ i $C(\gamma_{v_6})$.
- (x) El domini fonamental obtingut està inclòs en les semicorones $S(r_1, r_3)$ i $S(r_2, r_4)$, que són dominis fonamentals per l'acció de $\Gamma(6, 1)_\infty$, simètrics respecte de les rectes hiperbòliques principals $C(0, r_2)$ i $C(0, r_3)$ respectivament, on $r_1 = 7 - 4\sqrt{3}$, $r_2 = 2 - \sqrt{3}$, $r_3 = 1$, $r_4 = 2 + \sqrt{3}$.

(xi) El domini fonamental obtingut és invariant respecte de l'homografia $w \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$,

$$w = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & -3 + \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

que té associada la recta hiperbòlica principal $C_w = C \left(0, \frac{\sqrt{6}}{3 + \sqrt{3}} \right)$.

DEMOSTRACIÓ: Les constants associades a la corba de Shimura $X(6, 1)$ són $e_2(6, 1) = 2$, $e_3(6, 1) = 2$, $g(6, 1) = 0$ i $V_h(6, 1) = \frac{2\pi}{3}$. Un domini fonamental de $X(6, 1)$ en \mathcal{H} amb tots els vèrtexs el·líptics, si existeix, ha de tenir $n_e(6, 1) = 6$ vèrtexs.

Aplicant les descripcions donades a 8.1.14 i/o 8.1.15, a partir de representacions per formes nòrmiques, trobem punts el·líptics d'ordre 2 i d'ordre 3. Per exemple, tenim els següents punts el·líptics d'ordre 2, amb les homografies el·líptiques que els fixen corresponents:

$$A_1 = \iota, \quad \gamma_{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = (2 - \sqrt{3})\iota, \quad \gamma_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & -2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \frac{-\sqrt{3} + \iota}{2}, \quad \gamma_{A_3} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ -2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \frac{\sqrt{3} + \iota}{2}, \quad \gamma_{A_4} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \frac{-\sqrt{3} + \iota}{4 + 2\sqrt{3}}, \quad \gamma_{A_5} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 4 - 2\sqrt{3} \\ -4 - 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \frac{\sqrt{3} + \iota}{4 + 2\sqrt{3}}, \quad \gamma_{A_6} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -4 + 2\sqrt{3} \\ 4 + 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Els punts següents són el·líptics d'ordre 3:

$$B_1 = \frac{-1 + \iota}{1 + \sqrt{3}}, \quad \gamma_{B_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \\ -3 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \frac{1 + \iota}{1 + \sqrt{3}}, \quad \gamma_{B_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Les homografies el·líptiques anteriors ens donen algunes relacions entre aquests punts:

$$\begin{aligned}\gamma_{B_1}(B_1) &= B_1, & \gamma_{B_1}(A_1) &= A_5, \\ \gamma_{B_2}(B_2) &= B_2, & \gamma_{B_2}(A_2) &= A_4.\end{aligned}$$

Provarem que el polígon determinat per $(B_1, A_5, A_2, B_2, A_4, A_1)$, que reanomenem $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ satisfà les condicions desitjades.

Es comprova que els dos vèrtexs el·líptics d'ordre 3, v_1 i v_4 , no són $\Gamma(6, 1)$ -equivalents; així, ja tenim dos cicles d'ordre 3. Notem que l'angle del polígon hiperbòlic escollit en cada un d'aquest vèrtexs és $\frac{2\pi}{3}$; per tant, cadascun ha de constituir individualment un cicle. De la mateixa manera, es comprova que $\{v_2, v_6\}$ i $\{v_3, v_5\}$ formen dos cicles d'ordre 2; els angles en aquests vèrtexs també satisfan la condició que la suma en cada cicle sigui π . Per a l'aparellament de les arestes, cal trobar una homografia que porti l'aresta v_2v_3 a v_6v_5 . Efectivament,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 3 + \sqrt{3} & -1 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ satisfà } \begin{aligned} \gamma(v_2) &= v_6, \\ \gamma(v_3) &= v_5. \end{aligned}$$

El volum hiperbòlic d'aquest polígon és $\frac{2\pi}{3}$, que en efecte coincideix amb el volum hiperbòlic de $\Gamma(6, 1) \backslash \mathcal{H}$. Notem que la comprovació dels angles en els vèrtexs i la suma d'angles en els cicles ja determinen que el valor del volum hiperbòlic sigui el que ha de ser. Per tant, efectivament aquest polígon hiperbòlic és un domini fonamental per a la corba de Shimura $X(6, 1)$.

Les relacions entre els vèrtexs donen l'aparellament de les arestes. Així, tenim que l'homografia γ_{v_1} porta l'aresta v_1v_2 a v_1v_6 ; l'homografia γ_{v_4} porta l'aresta v_3v_4 a v_5v_4 i l'homografia γ porta l'aresta v_2v_3 a v_6v_5 . A partir de l'aparellament de les arestes, es comprova que efectivament el gènere és 0 i obtenim la presentació del grup $\Gamma(6, 1) / \pm \text{Id}$ següent:

$$\langle \gamma_{v_1}, \gamma_{v_4}, \gamma : \gamma_{v_1}^3 = 1, \gamma_{v_4}^3 = 1, (\gamma^{-1}\gamma_{v_1})^2 = 1, (\gamma^{-1}\gamma_{v_4})^2 = 1 \rangle.$$

En la secció 8.4 podeu trobar la representació gràfica, amb l'aparellament d'arestes indicat.

Utilitzant el llenguatge dels cercles d'isometria, tenim que les arestes v_2v_3 i v_6v_5 , del domini fonamental trobat, corresponen a arcs dels cercles d'isometria $C_{\gamma_{v_3}}$ i $C_{\gamma_{v_6}}$, respectivament.

Un domini fonamental de $\Gamma(6, 1)_\infty$ és una semicorona de la forma $S(r, \varepsilon^2 r)$, on $\varepsilon = 2 + \sqrt{3}$, unitat fonamental de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Apliquem 8.2.5 i només cal

comprovar que, en efecte, per a $r_2 = |v_3| = 2 - \sqrt{3}$ tenim que $r_3 = |v_6| = 1 = \varepsilon r_2$.

Finalment, es comprova directament que el domini fonamental trobat és invariant respecte de l'homografia $w \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) - \Gamma(6, 1)$ donada a l'enunciat, veient que w és una involució tal que $w(v_1) = v_4$, $w(v_2) = v_5$, $w(v_3) = v_6$. \square

8.3.2 Remarca. Notem que no se satisfà que el domini fonamental trobat estigui inclòs en l'exterior dels cercles d'isometria $C_{\gamma_{A_2}}$ i $C_{\gamma_{A_1}}$. Observem que hi ha simetria respecte de l'eix imaginari en el conjunt de punts el·líptics, cf. 2.2.16, però el domini fonamental determinat no és simètric respecte de l'eix imaginari. \square

Evidentment, no es pot determinar unívocament un domini fonamental d'una corba de Shimura de manera que satisfaci propietats anàlogues a les anteriors. Ho il·lustrem per a la corba $X(6, 1)$ donant un altre possible domini fonamental construït de manera similar a l'anterior. La representació d'aquest dos dominis es troba en les figures 8.1 i 8.2, respectivament.

8.3.3 Teorema. *Considerem la corba de Shimura $X(6, 1)$. Aleshores:*

(i) *El polígon hiperbòlic determinat pels punts $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, on*

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-\sqrt{3} + \iota}{2}, & v_2 &= \frac{-1 + \iota}{1 + \sqrt{3}}, & v_3 &= (2 - \sqrt{3})\iota, \\ v_4 &= \frac{1 + \iota}{1 + \sqrt{3}}, & v_5 &= \frac{\sqrt{3} + \iota}{2}, & v_6 &= \iota, \end{aligned}$$

és un domini fonamental per a la corba de Shimura $X(6, 1)$ en el semipla de Poincaré.

(ii) *Tots els vèrtexs són el·líptics i les homografies el·líptiques corresponents són:*

$$\begin{aligned} \gamma_{v_1} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2 \\ -2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, & \gamma_{v_2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \\ -3 - \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ \gamma_{v_3} &= \begin{pmatrix} 0 & -2 + \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}, & \gamma_{v_4} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{3} & -3 + \sqrt{3} \\ 3 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}, \\ \gamma_{v_5} &= \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}, & \gamma_{v_6} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (iii) El volum hiperbòlic és $V_h(6,1) = \frac{2\pi}{3}$; el gènere és $g(6,1) = 0$.
- (iv) El nombre de vèrtexs el·líptics d'ordre 2 és $n_2(6,1) = 4$. Hi ha $e_2(6,1) = 2$ cicles el·líptics d'ordre 2, $\{v_6\}$ i $\{v_1, v_3, v_5\}$. Les relacions entre aquests vèrtexs són $\gamma_{v_2}(v_3) = v_1$ i $\gamma_{v_4}(v_3) = v_5$.
- (v) El nombre de vèrtexs el·líptics d'ordre 3 és $n_3(6,1) = 2$. Hi ha $e_3(6,1) = 2$ cicles el·líptics d'ordre 3, que són $\{v_2\}$ i $\{v_4\}$.
- (vi) L'homotècia principal de $\Gamma(6,1)$ és

$$h = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (vii) L'aparellament de les arestes ve donat per:

$$\begin{array}{ll} (v_2v_3, v_2v_1) & \text{per l'homografia } \gamma_{v_2}, \\ (v_3v_4, v_5v_4) & \text{per l'homografia } \gamma_{v_4}, \\ (v_5v_6, v_1v_6) & \text{per l'homografia } \gamma_{v_6}. \end{array}$$

- (viii) Tenim la presentació del grup $\Gamma(6,1)/\pm \text{Id}$ següent:

$$\langle \gamma_{v_2}, \gamma_{v_4}, \gamma_{v_6} : \gamma_{v_2}^3 = \gamma_{v_4}^3 = \gamma_{v_6}^2 = (\gamma_{v_2}^{-1} \gamma_{v_6} \gamma_{v_4})^2 = 1 \rangle.$$

- (ix) Les arestes v_5v_6 i v_6v_1 són arcs del cercle d'isometria corresponent a l'homografia γ_{v_6} , el·líptica d'ordre 2.
- (x) El domini fonamental obtingut està inclòs en les semicorones $S(r_1, r_3)$ i $S(r_2, r_4)$, que són dominis fonamentals per l'acció de $\Gamma(6,1)_\infty$, simètrics respecte de la rectes hiperbòliques principals $C(0, r_2)$ i $C(0, r_3)$ respectivament, on $r_1 = 7 - 4\sqrt{3}$, $r_2 = 2 - \sqrt{3}$, $r_3 = 1$, $r_4 = 2 + \sqrt{3}$.
- (xi) El domini fonamental obtingut és simètric respecte de l'eix imaginari.
□

8.3.3 Domini fonamental per a $X(10,1)$

8.3.4 Teorema. Considerem la corba de Shimura $X(10,1)$. Aleshores:

(i) El polígon hiperbòlic determinat pels punts $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, on

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(-1 + \sqrt{2})}, & v_2 &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(1 + \sqrt{2})}, & v_3 &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(7 + 5\sqrt{2})}, \\ v_4 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(7 + 5\sqrt{2})}, & v_5 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(1 + \sqrt{2})}, & v_6 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}i}{5(-1 + \sqrt{2})}, \end{aligned}$$

és un domini fonamental per a la corba de Shimura $X(10, 1)$ en el semiplà de Poincaré.

(ii) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 3 i les homografies el·líptiques corresponents són:

$$\begin{aligned} \gamma_{v_1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ 5(1 - \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, & \gamma_{v_2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ -5(1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ \gamma_{v_3} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{2} \\ -5(7 + 5\sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, & \gamma_{v_4} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 7 - 5\sqrt{2} \\ 5(7 + 5\sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, \\ \gamma_{v_5} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 5(1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}, & \gamma_{v_6} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \\ 5(-1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) El volum hiperbòlic és $V_h(10, 1) = \frac{4}{3}\pi$; el gènere és $g(10, 1) = 0$.

(iv) El nombre de vèrtexs el·líptics d'ordre 3 és $n_3(10, 1) = 6$. Hi ha $e_3(10, 1) = 4$ cicles el·líptics d'ordre 3, que són $\{v_1, v_3\}$, $\{v_4, v_6\}$, $\{v_2\}$ i $\{v_5\}$. Les relacions entre aquests vèrtexs són $\gamma_{v_2}(v_3) = v_1$ i $\gamma_{v_5}(v_4) = v_6$.

(v) L'homotècia principal de $\Gamma(10, 1)$ és

$$h = \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(vi) L'aparellament de les arestes ve donat per:

$$\begin{aligned} (v_2v_3, v_2v_1) & \text{ per l'homografia } \gamma_{v_2}, \\ (v_3v_4, v_1v_6) & \text{ per l'homografia } h, \\ (v_4v_5, v_6v_5) & \text{ per l'homografia } \gamma_{v_5}. \end{aligned}$$

(vii) Tenim la presentació del grup $\Gamma(10, 1)/\pm \text{Id}$ següent:

$$\langle h, \gamma_{v_2}, \gamma_{v_5} : \gamma_{v_2}^3 = \gamma_{v_5}^3 = (h^{-1}\gamma_{v_2})^3 = (h^{-1}\gamma_{v_5})^3 = 1 \rangle.$$

- (viii) La resta de les arestes corresponen a arcs de cercles d'isometria de la forma següent: $v_1v_2 \subseteq C_{\gamma_{v_1}^{-1}}$, $v_2v_3 \subseteq C_{\gamma_{v_2}^{-1}}$, $v_4v_5 \subseteq C_{\gamma_{v_5}^{-1}}$ i $v_5v_6 \subseteq C_{\gamma_{v_6}^{-1}}$.
- (ix) Les arestes v_3v_4 i v_1v_6 determinen una semicorona $S(r_1, r_3)$, que és un domini fonamental per l'acció de $\Gamma(10, 1)_\infty$. Se satisfà que el domini fonamental obtingut és la intersecció entre la semicorona $S(r_1, r_3)$ i l'exterior d'aquests cercles d'isometria.
- (x) El domini fonamental obtingut és invariant respecte de l'homografia

$$w = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \sqrt{2} \\ 5(1 + \sqrt{2}) & 0 \end{pmatrix},$$

i és simètric respecte de l'eix imaginari i la recta hiperbòlica principal

$$C_w = C \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}(1 + \sqrt{2})} \right).$$

DEMOSTRACIÓ: Les constants associades a la corba de Shimura $X(10, 1)$ són $e_2(10, 1) = 0$, $e_3(10, 1) = 4$, $g(10, 1) = 0$ i $V_h(10, 1) = \frac{4}{3}\pi$.

En un domini fonamental en què tots els vèrtexs fossin el·líptics, aplicant 2.4.8 hi hauria d'haver $n_e(10, 1) = 6$ vèrtexs. Busquem punts el·líptics d'ordre 3, segons les descripcions donades a 8.1.17 i/o 8.1.18. Entre altres, obtenim els punts i les corresponents homografies següents. Notem que, tenint en compte els canvis de signe, obtenim les solucions agrupades de 4 en 4. A més, els punts són simètrics respecte de l'eix imaginari.

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}\iota}{5(-1 + \sqrt{2})} & \gamma_{B_1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 + \sqrt{2} \\ 5(1 - \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ B_2 &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}\iota}{5(1 + \sqrt{2})} & \gamma_{B_2} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 + \sqrt{2} \\ -5(1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ B_3 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\iota}{5(1 + \sqrt{2})} & \gamma_{B_3} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 5(1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \\ B_4 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\iota}{5(-1 + \sqrt{2})} & \gamma_{B_4} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -1 - \sqrt{2} \\ 5(-1 + \sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_5 &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}\iota}{5(-7 + 5\sqrt{2})} & \gamma_{B_5} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 7 + 5\sqrt{2} \\ 5(7 - 5\sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
B_6 &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}\iota}{5(7 + 5\sqrt{2})} & \gamma_{B_6} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -7 + 5\sqrt{2} \\ -5(7 + 5\sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
B_7 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\iota}{5(7 + 5\sqrt{2})} & \gamma_{B_7} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 7 - 5\sqrt{2} \\ 5(7 + 5\sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \\
B_8 &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}\iota}{5(-7 + 5\sqrt{2})} & \gamma_{B_8} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & -7 - 5\sqrt{2} \\ 5(-7 + 5\sqrt{2}) & 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Busquem relacions entre aquests punts el·líptics, a partir de les mateixes homografies el·líptiques que els fixen. Seleccionem les següents:

$$\begin{aligned}
\gamma_{B_2}(B_2) &= B_2, & \gamma_{B_2}(B_6) &= B_1, \\
\gamma_{B_3}(B_3) &= B_3, & \gamma_{B_4}(B_7) &= B_4.
\end{aligned}$$

D'altra banda, l'homografia hiperbòlica distingida que fixa l'infinit és

$$h = \begin{pmatrix} 3 + 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 3 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ i satisfà } h(B_6) = B_1, h(B_7) = B_4.$$

Així, tenim els conjunts de vèrtexs equivalents: $\{B_1, B_6\}$, $\{B_4, B_7\}$, $\{B_2\}$ i $\{B_3\}$. Es comprova que els vèrtexs de dos conjunts diferents no són equivalents, per la qual cosa ja tenim 6 punts el·líptics d'ordre 3 que es reparteixen en 4 cicles.

Considerem el polígon hiperbòlic format pels 6 punts el·líptics:

$$(B_1, B_2, B_6, B_7, B_3, B_4).$$

A partir d'ara podem $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ aquest polígon hiperbòlic. Es comprova que les relacions anteriors donen l'aparellament de les arestes indicat. El seu volum hiperbòlic és $\frac{4}{3}\pi$. Per tant, efectivament aquest polígon hiperbòlic és un domini fonamental per a la corba de Shimura $X(10, 1)$. En la figura 8.3 el representem gràficament, indicant les parelles d'arestes.

Comprovem que el gènere és 0. A més, obtenim la presentació del grup $\Gamma(10, 1)/\pm \text{Id}$ següent:

$$\langle h, \gamma_{v_2}, \gamma_{v_3} : \gamma_{v_2}^3 = 1, \gamma_{v_3}^3 = 1, (h^{-1}\gamma_{v_2})^3 = 1, (h^{-1}\gamma_{v_3})^3 = 1 \rangle.$$

Si interpretem el domini fonamental a través dels cercles d'isometria s'observa que bona part de les arestes són arcs de cercles d'isometria, tal com es descriu a l'enunciat. Les arestes v_3v_4 i v_1v_6 estan contingudes en els dos cercles $C(0, r_1)$ i $C(0, r_3)$, on $r_1 = |v_3|$ i $r_3 = |v_1|$. Aquests cercles determinen la semicorona $S(r_1, r_3)$ que és un domini fonamental de $\Gamma(10, 1)_\infty$, ja que l'homografia h relaciona aquestes dues arestes. Sigui ε_2 la unitat fonamental de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Comprovem que $\varepsilon_3 r_1 = r_2$ i $\varepsilon_2 r_2 = r_3$, la qual cosa, utilitzant 8.2.5, demostra que $S(r_1, r_3)$ és simètrica respecte de $C(0, r_2)$, $r_2 = |v_2|$.

És clar que se satisfà que el domini fonamental és la intersecció entre la semicorona i l'exterior dels cercles d'isometria dels quals formen part les altres arestes.

La simetria respecte de l'eix imaginari és evident. Així mateix, és fàcil comprovar la invariància del domini fonamental fixat per l'homografia w i per la simetria hiperbòlica respecte de C_w . Notem que els tres fets estan relacionats, ja que l'homografia w és composició de les dues simetries, donat que L_w és precisament l'eix imaginari. \square

8.3.5 Remarca. Notem, però, que el domini fonamental descrit en el teorema anterior, no s'obté com a aplicació del mètode general dels cercles d'isometria. Caldria considerar tots els cercles d'isometria; en particular, els cercles associats a les homografies el·líptiques γ_v . En aquest cas, ja hem notat (cf. 8.2.15) que és un cas exclòs del mètode general. \square

8.3.6 Remarca. Notem també que, a diferència dels dominis fonamentals per als casos no ramificats del capítol 3, l'aparellament d'arestes no es realitza aparellant per γ els cercles C_γ i $C_{\gamma^{-1}}$. \square

8.3.4 Domini fonamental per a $X(15, 1)$

8.3.7 Teorema. *Considerem la corba de Shimura $X(15, 1)$. Aleshores:*

(i) *El polígon hiperbòlic determinat pels punts $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, on*

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{-2 + \iota}{5(2 - \sqrt{3})}, & v_2 &= \frac{-2 + \iota}{5(2 + \sqrt{3})}, & v_3 &= \frac{2 + \iota}{5(2 + \sqrt{3})}, \\ v_4 &= \frac{8 + \iota}{5(4 + \sqrt{3})}, & v_5 &= \frac{8 + \iota}{5(4 - \sqrt{3})}, & v_6 &= \frac{2 + \iota}{5(2 - \sqrt{3})}, \end{aligned}$$

és un domini fonamental per a la corba de Shimura $X(15, 1)$ en el semiplà de Poincaré.

(ii) Tots els vèrtexs són el·líptics d'ordre 3 i les homografies el·líptiques corresponents són $\gamma_{v_i} = \frac{1}{2}g_{v_i}$, on

$$g_{v_1} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} & 3 + 2\sqrt{3} \\ 5(3 - 2\sqrt{3}) & 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad g_{v_2} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} & -3 + 2\sqrt{3} \\ 5(-3 - 2\sqrt{3}) & 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$g_{v_3} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} & 3 - 2\sqrt{3} \\ 5(3 + 2\sqrt{3}) & 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad g_{v_4} = \begin{pmatrix} 1 + 8\sqrt{3} & 3 - 4\sqrt{3} \\ 5(3 + 4\sqrt{3}) & 1 - 8\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$g_{v_5} = \begin{pmatrix} 1 + 8\sqrt{3} & -3 - 4\sqrt{3} \\ 5(-3 + 4\sqrt{3}) & 1 - 8\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad g_{v_6} = \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} & -3 - 2\sqrt{3} \\ 5(-3 + 2\sqrt{3}) & 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(iii) El volum hiperbòlic és $V_h(15, 1) = \frac{8}{3}\pi$; el gènere és $g(15, 1) = 1$.

(iv) L'homotècia principal de $\Gamma(15, 1)$ és

$$h = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(v) Tenim $n_3(15, 1) = 6$ vèrtexs el·líptics d'ordre 3. Hi ha $e_3(15, 1) = 2$ cicles el·líptics d'ordre 3, que són $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ i $\{v_3, v_6\}$. Les relacions entre aquests vèrtexs són

$$\begin{aligned} h(v_2) &= v_1 & h(v_3) &= v_6, \\ k(v_1) &= v_5, & k(v_2) &= v_4, \\ \gamma(v_6) &= v_3, & \gamma(v_5) &= v_4, \end{aligned}$$

on

$$k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 + 3\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 5(\sqrt{3}) & -4 - 3\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(vi) L'aparellament de les arestes ve donat per:

$$\begin{aligned} (v_1v_2, v_5v_4) & \text{ per l'homografia } k, \\ (v_2v_3, v_1v_6) & \text{ per l'homografia } h, \\ (v_3v_4, v_6v_5) & \text{ per l'homografia } \gamma^{-1}. \end{aligned}$$

(vii) $\Gamma(15, 1)/\pm \text{Id} = \langle h, k, \gamma : (\gamma h)^3 = (h k^{-1} \gamma k)^3 = 1 \rangle$.

(viii) El domini fonamental obtingut està inclòs en la semicorona $S(r_1, r_3)$, que és un domini fonamental per l'acció de $\Gamma(15, 1)_\infty$, simètric respecte de la recta hiperbòlica principal $C(0, r_2)$, on $r_1 = \sqrt{5}(2 - \sqrt{3})/5$, $r_2 = \sqrt{5}/5$, $r_3 = \sqrt{5}(2 + \sqrt{3})/5$. Les arestes v_2v_3 i v_1v_6 formen part dels semicercles que determinen la semicorona, els quals són, a més, rectes principals.

(ix) La resta de les arestes corresponen a arcs de cercles d'isometria de la forma següent: $v_1v_2 \subseteq C_{\gamma_{v_1}}$, $v_3v_4 \subseteq C_{\gamma_{v_2}}$, $v_4v_5 \subseteq C_{\gamma_{v_5}}$ i $v_5v_6 \subseteq C_{\gamma_{v_6}}$. Se satisfà que el domini fonamental és la intersecció entre la semicorona $S(r_1, r_3)$ i l'exterior d'aquests cercles d'isometria.

(x) El domini fonamental obtingut és simètric respecte de la recta hiperbòlica principal $C(0, \sqrt{5}/5)$.

DEMOSTRACIÓ: Les constants associades a la corba de Shimura $X(15, 1)$ són $e_2(15, 1) = 0$, $e_3(15, 1) = 2$, $g(15, 1) = 1$ i $V_h(15, 1) = \frac{8}{3}\pi$.

En un domini fonamental en què tots els vèrtexs fossin el·líptics, aplicant 2.4.8 hi hauria d'haver $n_e(15, 1) = 6$ vèrtexs. Busquem punts el·líptics d'ordre 3, segons les descripcions donades a 8.1.17 i/o 8.1.18. Entre altres, obtenim els punts i les corresponents homografies següents. Notem que els punts són simètrics respecte de l'eix imaginari.

$$B_1 = \frac{-2 + \iota}{5(2 - \sqrt{3})} \quad \gamma_{B_1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} & 3 + 2\sqrt{3} \\ 5(3 - 2\sqrt{3}) & 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \frac{-2 + \iota}{5(2 + \sqrt{3})} \quad \gamma_{B_2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} & -3 + 2\sqrt{3} \\ 5(-3 - 2\sqrt{3}) & 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B_3 = \frac{2 + \iota}{5(2 + \sqrt{3})} \quad \gamma_{B_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} & 3 - 2\sqrt{3} \\ 5(3 + 2\sqrt{3}) & 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B_4 = \frac{2 + \iota}{5(2 - \sqrt{3})} \quad \gamma_{B_4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{3} & -3 - 2\sqrt{3} \\ 5(-3 + 2\sqrt{3}) & 1 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B_5 = \frac{-8 + \iota}{5(4 - \sqrt{3})} \quad \gamma_{B_5} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 8\sqrt{3} & 3 + 4\sqrt{3} \\ 5(3 - 4\sqrt{3}) & 1 - 8\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B_6 = \frac{-8 + \iota}{5(4 + \sqrt{3})} \quad \gamma_{B_6} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 8\sqrt{3} & -3 + 4\sqrt{3} \\ 5(-3 - 4\sqrt{3}) & 1 - 8\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B_7 = \frac{8 + \iota}{5(4 + \sqrt{3})} \quad \gamma_{B_7} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 8\sqrt{3} & 3 - 4\sqrt{3} \\ 5(3 + 4\sqrt{3}) & 1 - 8\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$B_8 = \frac{8 + \iota}{5(4 - \sqrt{3})} \quad \gamma_{B_8} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 8\sqrt{3} & -3 - 4\sqrt{3} \\ 5(-3 + 4\sqrt{3}) & 1 - 8\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Busquem relacions entre aquests punts el·líptics. En aquest cas, les homografies el·líptiques que els fixen no ens en donen cap. Si considerem l'homotècia principal h , tenim

$$h = \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad h(B_1) = B_2, \quad h(B_3) = B_4.$$

Per a trobar altres relacions busquem noves homografies hiperbòliques, aplicant els resultats d'immersions a unitats fonamentals d'ordres quadràtics reals. Considerem el cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, que escindeix $H_B(3, 5)$. L'unitat fonamental de l'anell d'enters és $\varepsilon_5 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, de norma $n(\varepsilon_5) = -1$. Fixant una immersió φ de l'anell d'enters de $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ en $\mathcal{O}(15, 1)$, obtenim l'homografia

$$k = \Phi(\varphi(\varepsilon_5^2)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{que satisfà } k(B_2) = B_8 \text{ i } k(B_1) = B_7.$$

Busquem directament altres relacions entre els vèrtexs. Trobem:

$$\gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 + 3\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 5(\sqrt{3}) & -4 - 3\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \text{que satisfà } \gamma(B_4) = B_3 \text{ i } \gamma(B_8) = B_7.$$

Així, tenim els conjunts de vèrtexs equivalents $\{B_1, B_2, B_5, B_6\}$ i $\{B_3, B_4\}$. Es comprova que els vèrtexs de dos conjunts diferents no són equivalents, per la qual cosa ja tenim 6 punts el·líptics d'ordre 3 que es reparteixen en 2 cicles.

Considerem el polígon hiperbòlic format pels 6 punts el·líptics:

$$(B_1, B_2, B_3, B_7, B_8, B_4).$$

Numerem els vèrtexs d'aquest polígon amb la notació $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$. Es comprova que les relacions anteriors donen un aparellament de les arestes. El seu volum hiperbòlic és $\frac{8}{3}\pi$. Per tant, efectivament aquest polígon hiperbòlic és un domini fonamental per a la corba de Shimura $X(15, 1)$. El representem gràficament en la figura 8.4, indicant l'aparellament de les arestes.

Comprovem que el gènere és 1. A més, obtenim la presentació del grup $\Gamma(15, 1)/\pm \text{Id}$ següent:

$$\langle h, k, \gamma : (\gamma h)^3 = 1, (hk^{-1}\gamma k)^3 = 1 \rangle.$$

Si interpretem el domini fonamental a través dels cercles d'isometria, s'observa que bona part de les arestes són arcs de cercles d'isometria, tal i com es descriu a l'enunciat. Les arestes v_2v_3 i v_1v_6 formen part dels dos cercles $C(0, r_1)$ i $C(0, r_3)$, on $r_1 = |v_2|$ i $r_3 = |v_1|$. Aquests cercles determinen la semicorona $S(r_1, r_3)$ que és un domini fonamental de $\Gamma(15, 1)_\infty$, ja que l'homografia h relaciona aquestes dues arestes. Denotem per ε_3 la unitat fonamental de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Posem que $r_2 := \varepsilon_3 r_1 = \sqrt{5}/5$; es comprova que $\varepsilon_3 r_2 = r_3$, la qual cosa, utilitzant 8.2.5, demostra que $S(r_1, r_3)$ és simètrica respecte de $C(0, r_2)$. Les rectes hiperbòliques definides per $C(0, r_i)$ són rectes principals, ja que provenen de les homografies η_i següents:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 0 & 3 - 2\sqrt{3} \\ 5(3 + 2\sqrt{3}) & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 0 & -3 - 2\sqrt{3} \\ 5(-3 + 2\sqrt{3}) & 0 \end{pmatrix}.$$

És clar que se satisfà que el domini fonamental és la intersecció entre la semicorona i l'exterior dels cercles d'isometria dels quals formen part les altres arestes.

Finalment, es comprova que el domini fonamental de $X(15, 1)$ és invariant per la simetria hiperbòlica respecte de la recta hiperbòlica principal $C(0, r_2)$. \square

8.4 Algoritmes, taules i gràfiques

En aquesta secció comentem les instruccions implementades relacionades amb la construcció del domini fonamental de les corbes de Shimura $X(D, N)$, $D > 1$. Presentem també els gràfics dels dominis fonamentals per als casos explicitats en la secció anterior i taules que recullen les dades relatives a cada domini fonamental, de manera anàloga a la secció 3.3, en què presentàvem exemples en el cas modular.

Hem implementat instruccions per a facilitar la construcció de dominis fonamentals, seguint els comentaris generals de la secció 8.3. En primer lloc,

notem que les constants associades a la corba de Shimura $X(D, N)$ es calculen amb les instruccions comentades en el capítol 2.

Per al càlcul dels punts el·líptics i les homografies el·líptiques, a partir de les immersions, es poden utilitzar les instruccions comentades en el capítol anterior junt amb els resultats de la secció 8.1. Tot i així, per tal de facilitar l'ús del paquet, hem incorporat instruccions explícites. Així, les instruccions `FindRep0rE2` i `FindRep0rE3` s'encarreguen de fer la recerca de les representacions que necessitem per a determinar els punts el·líptics d'ordre 2 i d'ordre 3, respectivament. A continuació es poden utilitzar les instruccions `E2HomPRep` i `E3HomPRep`, que ens donen l'homografia i el punt el·líptic corresponent a partir d'una representació concreta. Amb les instruccions `E2HomP` i `E3HomP`, incorporem els dos algoritmes anteriors, i aconseguim una llista d'homografies i punts el·líptics. En general, en les instruccions que busquen representacions incloem un paràmetre opcional per a controlar la profunditat de la recerca.

Per a buscar relacions entre punts el·líptics concrets, utilitzem instruccions referents a les homografies, comentades també en el capítol 2. A més, hem incorporat la instrucció `FindCond`, que dona condicions per a que dos punts estiguin relacionats; és especialment útil quan cal veure que dos punts no són equivalents. Per a treballar amb el polígon hiperbòlic, recomanem l'ús de les instruccions relatives a la geometria hiperbòlica.

Hem implementat també instruccions en relació amb l'homotècia principal i el domini fonamental del grup que genera. Així, `prHom` dona l'homotècia principal, com a homografia, a partir de la unitat fonamental de l'ordre quadràtic corresponent. Pel que fa a la semicorona, domini fonamental de grup generat per l'homotècia principal, tenim les instruccions `symcS`, `symiS` i `symsS`, que utilitzen diferents criteris (cf. remarca 8.2.6) a partir d'un cercle de radi fixat. Finalment, la instrucció `defsS` defineix els cercles que determinen la semicorona com a objectes geomètrics.

D'altra banda, per a explicitar el fet que tots els elements de l'àlgebra de quaternions provenen d'immersions, tenim la instrucció `Fquat`. A partir d'un quaternió $\omega \in H^*$, la instrucció dona el cos quadràtic F_ω tal que ω s'obté a partir d'una immersió de F_ω en H .

Les figures 8.1 i 8.2 representen, respectivament, els dos possibles dominis fonamentals per a la corba de Shimura $X(6, 1)$ donats en els teoremes 8.3.1 i 8.3.3. Resumim les dades corresponents en les taules 8.1 i 8.2. Notem que tenen propietats diferents respecte de les simetries. Així, el de la figura 8.2 és simètric respecte de l'eix imaginari, mentre que el de la figura 8.1 ho és respecte d'una recta principal, que es mostra també en la figura.

El domini fonamental construït per a la corba de Shimura $X(10, 1)$, cf. 8.3.4, el mostrem en la figura 8.3. Representem també la intersecció del cercle d'isometria C_w amb el domini fonamental. Es pot observar gràficament que C_w és un eix de simetria del domini i que l'homografia w deixa invariant el domini. La taula 8.3 conté els punts i els cicles explícits.

Anàlogament, reproduïm el domini fonamental trobat a 8.3.7 per a la corba de Shimura $X(15, 1)$ en la figura 8.4. En aquest cas representem també la recta hiperbòlica principal que ens dona un eix de simetria del domini. En la taula 8.4 presentem les dades sobre els punts i els cicles.

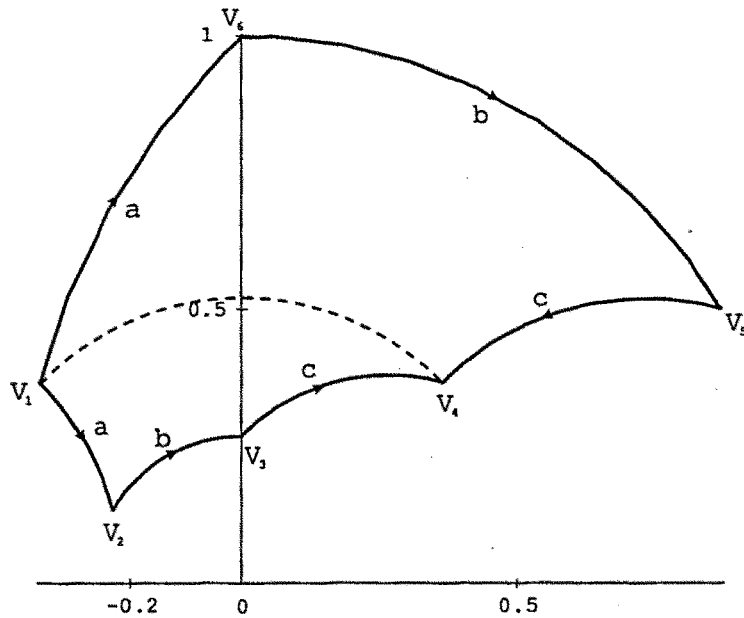


Figura 8.1: Domini fonamental de $X(6,1)$, segons 8.3.1.

Taula 8.1 Cicles el·líptics de la corba de Shimura $X(6,1)$ i presentació del grup $\Gamma(6,1)/\pm \text{Id}$, segons 8.3.1.

k	$n_k(6,1)$	$e_k(6,1)$	cicles d'ordre k de $\Gamma(6,1)$
2	4	2	$\{v_6, v_2\}$ i $\{v_3, v_5\}$
3	2	2	$\{v_1\}$ i $\{v_4\}$
generadors			relacions
$\gamma_{v_1}, \gamma_{v_4}, \gamma$			$\gamma_{v_1}^3 = 1, \gamma_{v_4}^3 = 1, (\gamma^{-1}\gamma_{v_1})^2 = 1, (\gamma^{-1}\gamma_{v_4})^2 = 1$

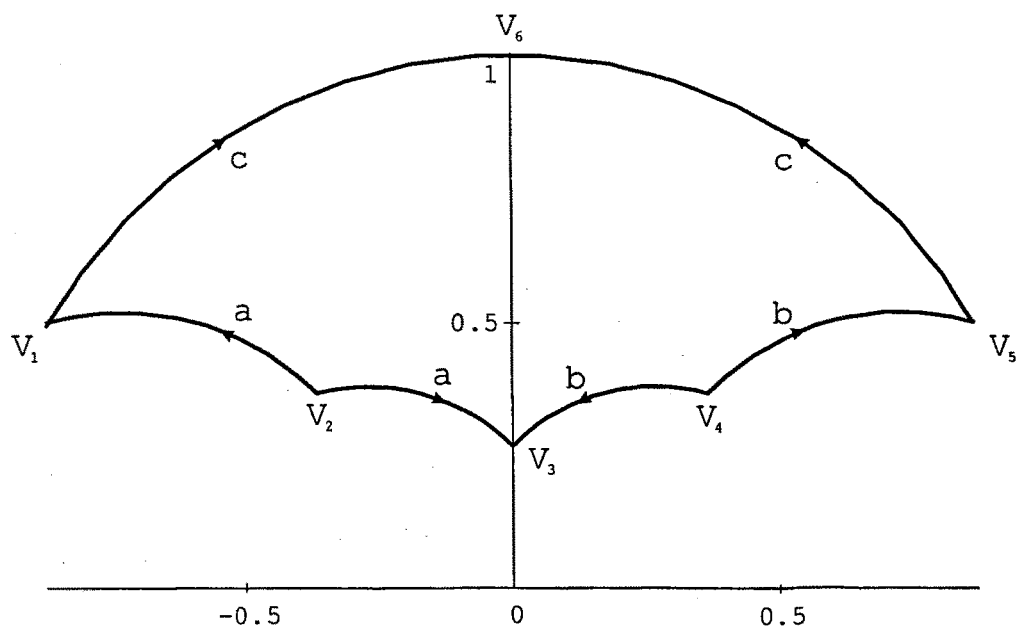
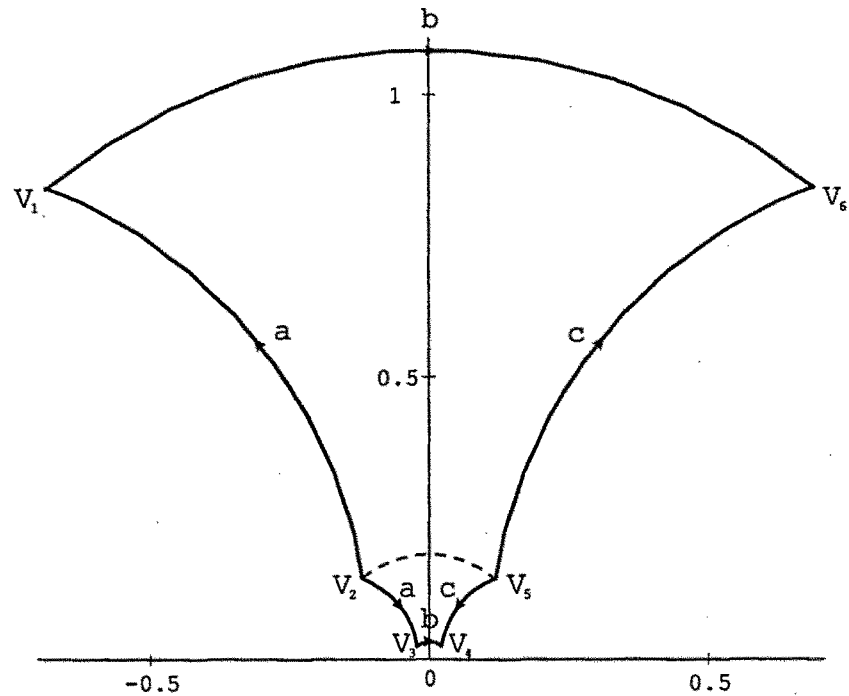


Figura 8.2: Domini fonamental de $X(6,1)$, segons 8.3.3.

Taula 8.2 Cicles el·líptics de la corba de Shimura $X(6,1)$ i presentació del grup $\Gamma(6,1)/\pm \text{Id}$, segons 8.3.3.

k	$n_k(6,1)$	$e_k(6,1)$	cicles d'ordre k de $\Gamma(6,1)$
2	4	2	$\{v_6\}$ i $\{v_1, v_3, v_5\}$
3	2	2	$\{v_2\}$ i $\{v_4\}$
generadors		relacions	
$\gamma_{v_2}, \gamma_{v_4}, \gamma_{v_6}$		$\gamma_{v_2}^3 = 1, \gamma_{v_4}^3 = 1, \gamma_{v_6}^2 = 1, (\gamma_{v_2}^{-1} \gamma_{v_6} \gamma_{v_4})^2 = 1$	

Figura 8.3: Domini fonamental de $X(10, 1)$.Taula 8.3 Cicles el·líptics de la corba de Shimura $X(10, 1)$ i presentació del grup $\Gamma(10, 1)/\pm \text{Id}$.

k	$n_k(10, 1)$	$e_k(10, 1)$	cicles d'ordre k de $\Gamma(10, 1)$
2	0	0	
3	6	4	$\{v_2\}, \{v_5\}, \{v_1, v_3\}, \{v_4, v_6\}$
generadors		relacions	
$\gamma_{v_2}, \gamma_{v_5}, h$		$\gamma_{v_2}^3 = 1, \gamma_{v_5}^3 = 1, (h^{-1}\gamma_{v_2})^3 = 1, (h^{-1}\gamma_{v_5})^3 = 1$	

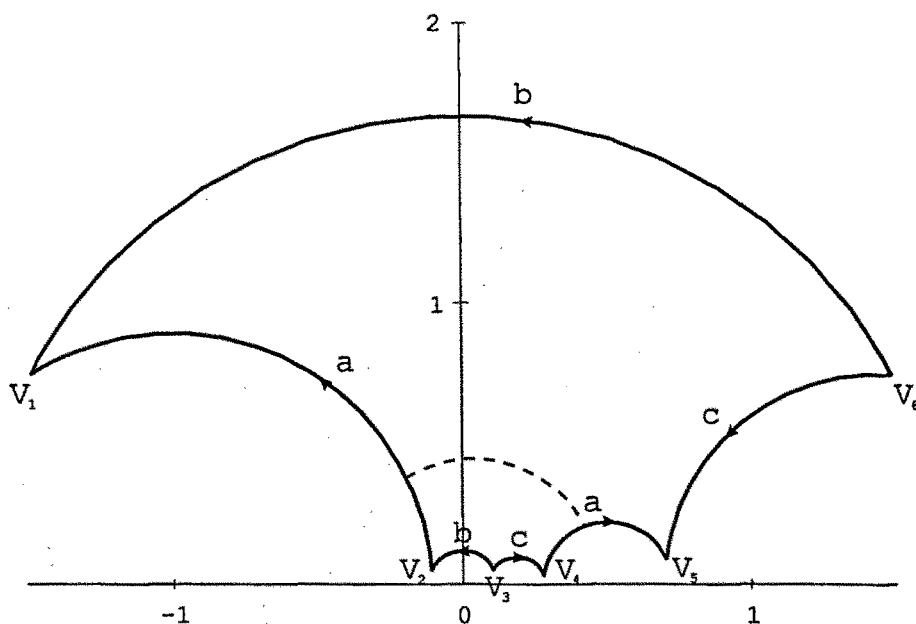


Figura 8.4: Domini fonamental de $X(15, 1)$.

Taula 8.4 Cicles el·líptics de la corba de Shimura $X(15, 1)$ i presentació del grup $\Gamma(15, 1)/\pm \text{Id}$.

k	$n_k(15, 1)$	$e_k(15, 1)$	cicles d'ordre k de $\Gamma(15, 1)$
2	0	0	
3	6	2	$\{v_1, v_2, v_4, v_5\}, \{v_3, v_6\}$
generadors		relacions	
h, k, γ		$(\gamma h)^3 = 1, (hk^{-1}\gamma k)^3 = 1$	

