UNIVERSITAT DE BARCELONA

Aritmètica d'ordres quaterniònics i uniformització hiperbòlica de corbes de Shimura

Montserrat Alsina i Aubach

UNIVERSITAT DE BARCELONA
Facultat de Matemàtiques
Departament d'Àlgebra i Geometria

ARITMÈTICA D'ORDRES QUATERNIÒNICS I UNIFORMITZACIÓ HIPERBÒLICA DE CORBES DE SHIMURA

Montserrat Alsina i Aubach

Capítol 9

Punts de multiplicació complexa en corbes de Shimura

Siguin D i N nombres naturals coprimers, D lliure de quadrats, amb un nombre parell de factors primers, i sigui $X(D,N)$ la corba de Shimura corresponent. Fixem una àlgebra de quaternions H de discriminant D i $\mathcal{O}(D,N) \subseteq H$, un ordre d'Eichler de nivell N.

Si φ és una immersió d'un cos quadràtic F en l'àlgebra de quaternions H, escrivim $\phi = \Phi \circ \varphi$, on Φ és la immersió de H en $M(2,\mathbb{R})$ fixada a 1.1.25.

9.1 Nombre de punts de multiplicació complexa

En primer lloc, precisem un parell de resultats per tal de donar la definició de punts de multiplicació complexa.

9.1.1 Lema. *Siguin $\gamma, \gamma' \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Aleshores, γ i γ' tenen els mateixos punts fixos si, i només si, existeixen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tals que $\gamma' = \lambda\gamma + \mu\,\mathrm{Id}$.*

DEMOSTRACIÓ: En efecte, posem

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

i considerem les equacions quadràtiques de coeficients reals $cZ^2 + (d-a)Z - b = 0$ i $c'Z^2 + (d'-a')Z - b' = 0$, que donen els punts fixos corresponents.

Els punts fixos coincideixen si, i només si, una equació és múltiple de l'altra. Si $\gamma' = \lambda\gamma + \mu\,\mathrm{Id}$, és clar que se satisfà aquesta condició. A la inversa, si tenim una equació múltiple de l'altra, per a obtenir la relació $\gamma' = \lambda\gamma + \mu\,\mathrm{Id}$ és suficient posar $\lambda := c'/c$ i $\mu := a' - \lambda a$. □

Utilitzant que les immersions conserven la norma i la traça, obtenim el corol·lari següent.

9.1.2 Corol·lari. *Sigui F un cos quadràtic tal que $\mathcal{I}(H,F) \neq \emptyset$. Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(H,F)$. Aleshores, totes les homografies $\gamma \in \Phi(\varphi(F^*))$ tenen els mateixos punts fixos. Si F és imaginari, aleshores tenen un únic punt fix en $\mathcal{H}$.* □

Donada una àlgebra de quaternions H, denotem per $\mathcal{J}(H)$ el conjunt de cossos quadràtics imaginaris F tals que $\mathcal{I}(H,F) \neq \emptyset$. Pel corol·lari anterior, podem definir una aplicació del conjunt d'immersions dels cossos de $\mathcal{J}(H)$ en H al semiplà de Poincaré:

$$\begin{array}{ccc} \cup_{F\in\mathcal{J}(H)}\mathcal{I}(H,F) & \to & \mathcal{H} \\ \varphi & \mapsto & z(\varphi), \end{array}$$

on $z(\varphi)$ és l'únic punt fix a $\mathcal{H}$ de $\varphi(\alpha)$ per a qualsevol $\alpha \in F^*$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

9.1.3 Definició. Sigui $X(D,N)$ un corba de Shimura fixada i fixem un ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D,N)$ de nivell N en una àlgebra de quaternions H de discriminant D. Sigui $F \in \mathcal{J}(H)$ i Λ un ordre de F. Diem que un punt $z \in \Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ és un punt de multiplicació complexa (CM) per Λ si existeix una immersió optimal $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D,N),\Lambda)$ tal que $z = z(\varphi)$. En aquest cas, diem que $j_{D,N}(z) \in X(D,N)(\mathbb{C})$ és un punt de $X(D,N)$ de multiplicació complexa per l'ordre $\Lambda(d,m)$.

Denotem per $\mathrm{CM}(D,N,d,m)$ el conjunt de punts de $\Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ de multiplicació complexa per l'ordre $\Lambda(d,m)$. □

9.1.4 Remarca. Sigui $z \in \mathcal{H}$ el punt fix d'una homografia $\gamma = \Phi(\omega) \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, per a cert $\omega \in H - \mathbb{Q}$. Aleshores, per 8.1.6, ω determina el cos quadràtic $F_\omega = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, on $d = \mathrm{tr}(\gamma)^2 - 4\det(\gamma)$, i tenim una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(H,F_\omega)$ determinada per $\varphi(\sqrt{d}) = \omega$. La immersió φ satisfà $z(\varphi) = z$. Notem que F_ω és necessàriament imaginari, ja que $\mathrm{Im}(z) > 0$ implica que $\mathrm{tr}(\gamma^2) - 4\det(\gamma) < 0$, la qual cosa justifica el nom de multiplicació complexa. □

9.1.5 Proposició. *Sigui $X(D,N)$ una corba de Shimura i $\Lambda(d,m)$ l'ordre quadràtic de conductor m en el cos quadràtic $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Sigui $\mathcal{O}(D,N)$*

un ordre quaterniònic que defineix $X(D,N)$. Aleshores, $\mathrm{CM}(D,N,d,m) \neq \emptyset$ *si, i només si, se satisfan les condicions equivalents següents:*

(i) $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m)) \neq \emptyset$.

(ii) $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda;\mathbb{Z}) \neq \emptyset$.

(iii) $\mathcal{H}^*(\mathbb{Z}+2\mathcal{O},\Lambda) \neq \emptyset$.

Si N és lliure de quadrats, les condicions anteriors són equivalents al fet que se satisfaci: $\mathrm{mcd}(D,m) = 1$, $\left(\frac{D_F}{p}\right) \neq 1$ *si* $p|D$ *i* $\left(\frac{D_F}{p}\right) \neq -1$ *si* $p|N$ *i* $p \nmid m$.

DEMOSTRACIÓ: L'existència d'un punt de $X(D,N)$ CM per $\Lambda(d,m)$ correspon directament a (i), per la definició. L'equivalència entre les condicions (i) i (ii) correspon al resultat 7.3.3. De manera anàloga, les condicions (i) i (iii) són equivalents per 7.4.2.

Finalment, en el cas que N sigui lliure de quadrats, cal tenir en compte que (i) és equivalent al fet que el nombre de classes $\nu(D,N,d,m;\mathcal{O}) \neq 0$, amb $\mathcal{O} = \mathcal{O}(D,N)$. Aleshores, apliquem els resultats per a aquest nombre de classes donats a 7.2.14 i la condició perquè hi hagi immersions d'un cos quadràtic en una àlgebra de quaternions, 7.1.4. □

El resultat anterior ens assegura que, donada una corba de Shimura $X(D,N)$, hi ha infinits ordres quadràtics $\Lambda(d,m)$ tals que $\mathrm{CM}(D,N,d,m) \neq \emptyset$. A continuació, d'una banda mostrem propietats sobre els punts CM en general; d'altra banda, presentem un criteri per tal de reduir-nos a un nombre finit d'ordres quadràtics.

9.1.6 Lema. *Un punt $j_{D,N}(z)$ de $X(D,N)$ és un punt el·líptic si, i només si, $z \in \Gamma(D,N)\backslash\mathcal{H}$ és de multiplicació complexa per l'anell d'enters de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, amb $d = -1$ o bé $d = -3$.*

DEMOSTRACIÓ: Els únics cossos quadràtics imaginaris que tenen unitats no racionals són precisament $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Sigui u una d'aquestes unitats. És clar que donada qualsevol immersió ϕ, tenim que $\phi(u) \in \Gamma(D,N)$; per tant, el seu punt fix a $\mathcal{H}$ és un punt el·líptic. □

En el corol·lari següent explicitem les condicions sobre els punts CM el·líptics per als casos no ramificat i poc ramificat de tipus A i tipus B.

9.1.7 Corol·lari. *Sigui $X(D,N)$ una corba de Shimura corresponent a una àlgebra de quaternions no ramificada o bé poc ramificada de tipus A o de tipus B.*

(i) $X(1,N)$ *té punts* CM *el·líptics si, i només si, tenim que* $\left(\frac{-1}{N}\right) \neq -1$ *o bé* $\left(\frac{-3}{N}\right) \neq -1$.

(ii) $X(2p,N)$ *té punts* CM *el·líptics si, i només si, tenim que* $\left(\frac{-1}{N}\right) \neq -1$ *o bé* $\left(\frac{-3}{p}\right) \neq 1$ *i* $\left(\frac{-3}{N}\right) \neq -1$.

(iii) $X(pq,N)$ *té punts* CM *el·líptics si, i només si, tenim que* $\left(\frac{-3}{p}\right) \neq 1$, $\left(\frac{-3}{q}\right) \neq 1$ *i* $\left(\frac{-3}{N}\right) \neq -1$. □

Així, tots els punts el·líptics són CM, però el recíproc, evidentment, no és cert. Notem que les homografies $\gamma \in \Gamma(D,N)$ el·líptiques satisfan que $\det(\gamma) = 1$ i $\mathrm{tr}(\gamma) \in \{0,1\}$. El lema següent mostra que, per als punts CM, sí que és possible imposar una condició en general.

9.1.8 Lema. *Sigui $z \in \mathrm{CM}(D,N,d,m)$, un punt* CM *per a un ordre quadràtic $\Lambda(d,m) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Aleshores, existeix $\gamma \in \Phi(\mathcal{O}(D,N)) \subseteq \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{tr}(\gamma) = 0$ i $\gamma(z) = z$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m))$ tal que $z = z(\varphi)$; és a dir, z és el punt fix comú de $\phi(F^*)$. Considerem $\gamma = \Phi(\varphi(m\sqrt{d}))$; és clar que $\gamma \in \phi(\Lambda(d,m)) \subseteq \Phi(\mathcal{O}(D,N))$ i satisfà $\mathrm{tr}(\gamma) = 0$. □

Ara bé, no és possible un resultat anàleg per al valor del determinant. No és cert que tots els punts CM siguin punts fixos d'una homografia amb un valor del determinant fixat a l'avançada. Una tal restricció sobre el valor del determinant ens porta a considerar restriccions sobre els ordres quadràtics pels quals tenim multiplicació complexa. Inspirant-nos en les rectes hiperbòliques principals destacades en el capítol anterior, donem la definició següent.

9.1.9 Definició. Sigui $z \in \mathrm{CM}(D,N,d,m)$, un punt CM per un ordre $\Lambda(d,m)$, corresponent a una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m))$. Diem que z és un punt de multiplicació complexa especial (CME) si és el punt fix d'una homografia $\gamma \in \phi(\Lambda(d,m)) \subseteq \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ de determinant igual a $D_{\mathcal{O}(D,N)} = DN$.

Denotem per $\mathrm{CME}(D,N,d,m) \subseteq \mathrm{CM}(D,N,d,m)$ el subconjunt de punts de multiplicació complexa especials per l'ordre $\Lambda(d,m)$. □

Notem que en el cas $D = N = 1$, és a dir, per a $\Gamma(1,1) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, els punts de multiplicació complexa especials són punts fixos d'homografies $\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Per tant, obtenim exactament els punts el·líptics. En la secció 9.3 donem punts de multiplicació complexa especials $\mathrm{CME}(D,N,d,m)$ per a algunes corbes $X(D,N)$.

A partir de la definició, obtenim directament el lema següent.

9.1.10 Lema. *Sigui $z \in \mathrm{CM}(D,N,d,m)$ un punt de $X(D,N)$ de multiplicació complexa per a un ordre $\Lambda(d,m)$. Aleshores, són equivalents:*

(i) $z \in \mathrm{CME}(D,N,d,m)$.

(ii) *Existeix $\alpha \in \Lambda(d,m)$ tal que $\mathrm{n}(\alpha) = D_{\mathcal{O}(D,N)}$.* □

Resumim en la proposició següent la caracterització dels punts de multiplicació complexa especials, a partir del lema anterior i de la proposició 9.1.5.

9.1.11 Proposició. *Sigui $X(D,N)$ una corba de Shimura i posem $\mathcal{O} = \mathcal{O}(D,N)$, l'ordre quaterniònic associat. Sigui $\Lambda = \Lambda(d,m)$ un ordre quadràtic. Són equivalents:*

(i) $\mathrm{CME}(D,N,d,m) \neq \emptyset$.

(ii) $\mathcal{R}(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z}) \neq \emptyset$ *i* $\mathcal{R}(n_{\Lambda,2}, D_{\mathcal{O}}; \mathbb{Z}) \neq \emptyset$.

La condició imposada als punts CME dóna restriccions sobre els ordres quadràtics, com mostrem a la proposició següent.

9.1.12 Proposició. *Donada una corba de Shimura $X(D,N)$, amb N lliure de quadrats, hi ha un nombre finit d'ordres quadràtics $\Lambda = \Lambda(d,m)$ tals que* $\mathrm{CME}(D,N,d,m) \neq \emptyset$. □

DEMOSTRACIÓ: Utilitzem la caracterització dels punts CME donada com a condició (iii) en el lema anterior. Sigui $\mathcal{O}$ l'ordre quaterniònic associat a la corba $X(D,N)$.

La condició d'existència de representacions de $D_{\mathcal{O}}$ per la forma nòrmica de Λ és independent de la base de Λ utilitzada per a fixar la forma $n_{\Lambda,\mathbb{Z}}$. Per tal de simplificar l'argument, utilitzem la forma nòrmica reduïda, donada a 4.5.4,

$$n_{\Lambda,2}(X,Y) = \begin{cases} X^2 - \dfrac{D_\Lambda}{4}Y^2 & \text{si } D_\Lambda \equiv 0 \mod 4, \\ X^2 + XY + \dfrac{1-D_\Lambda}{4}Y^2 & \text{si } D_\Lambda \equiv 1 \mod 4. \end{cases}$$

Els ordres quadràtics Λ són imaginaris; per tant, $D_\Lambda < 0$. Així, la forma nòrmica de l'ordre és definida positiva, independentment del valor de D_Λ mod 4. Notem que les solucions (x,y) de $n_{\Lambda,2}(X,Y) = D_{\mathcal{O}}$ han de satisfer $y \neq 0$, ja que $D_{\mathcal{O}}$ és lliure de quadrats, per la hipòtesi sobre N i les condicions sobre D i N imposades en iniciar el capítol per a considerar la corba de Shimura. Si $y \neq 0$, és clar que D_Λ només pot prendre un nombre finit de valors. En particular, si $D_\Lambda \equiv 0 \mod 4$, és necessari que $-D_\Lambda \leq 4D_{\mathcal{O}}$; si $D_\Lambda \equiv 1 \mod 4$, és necessari que $-D_\Lambda \leq 4D_{\mathcal{O}}-1$. Notem, però, que aquestes condicions no són suficients perquè existeixin solucions. □

9.1.13 Corol·lari. *Sigui $X(D,N)$ una corba de Shimura, amb N lliure de quadrats. Aleshores, com a molt hi ha $2DN$ ordres quadràtics que donen punts de $X(D,N)$ de multiplicació complexa especials.* □

Per construcció, obtenir els punts de $\mathrm{CM}(D,N,d,m)$ equival a obtenir les immersions de $\Lambda(d,m)$ en l'ordre quaterniònic $\mathcal{O}(D,N)$. Ara bé, cal tenir en compte que els punts complexos de la corba $X(D,N)$ provenen de $\Gamma(D,N)$-classes de punts de $\mathcal{H}$.

Fixem una corba de Shimura $X(D,N)$. Posem $\mathcal{O}(D,N)$ l'ordre d'Eichler i $\Gamma(D,N)$ el grup d'homografies quaterniòniques corresponents. Fixem un ordre quadràtic imaginari $\Lambda(d,m)$, de manera que $\mathrm{CM}(D,N,d,m) \neq \emptyset$. Donada una immersió $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m))$, considerem $z(\varphi) \in \mathcal{H}$ el punt fix de l'homografia $\Phi(\varphi(\alpha))$, per a $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. A continuació, provem la relació entre la $\mathcal{O}(D,N)^*_+$-equivalència d'immersions i la $\Gamma(D,N)$-equivalència dels punts fixos corresponents i donem la relació explícita entre els nombres de classes.

9.1.14 Remarca. Donada una immersió $\varphi \in \mathcal{I}(H,F)$, posem $-\varphi$ la composició de φ amb la conjugació de F; és a dir, $(-\varphi)(\sqrt{d}) := -\varphi(\sqrt{d})$, on $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Notem que $-\varphi$ és també una immersió de F en H, ja que satisfà $\mathrm{tr}((-\varphi)(\sqrt{d})) = -\mathrm{tr}(\sqrt{d}) = 0$ i $\mathrm{n}((-\varphi)(\sqrt{d})) = (-1)^2\,\mathrm{n}(\sqrt{d})$; és a dir, $-\varphi \in \mathcal{I}(H, F)$. A més, si F és un cos imaginari, φ i $-\varphi$ tenen els mateixos punts fixos. Anàlogament, si $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$, tenim que $-\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}, \Lambda)$. Les igualtats $-\varphi(\Lambda) = \varphi(\Lambda)$ i $-\varphi(F) = \varphi(F)$ ens asseguren que ambdues immersions són simultàniament o bé optimals o bé no optimals. □

9.1.15 Proposició. *Siguin $\varphi, \varphi' \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D,N), \Lambda(d,m))$. Aleshores, $z = z(\varphi)$ i $z' = z(\varphi')$ són $\Gamma(D,N)$-equivalents si, i només si, φ' és $\mathcal{O}(D,N)^*_+$-equivalent o bé a φ o bé a $-\varphi$.*

DEMOSTRACIÓ: Suposem que φ' és $\mathcal{O}(D,N)^*_+$-equivalent a $\pm\varphi$. Com que $z(\varphi) = z(-\varphi)$, ens podem reduir al cas que φ' és $\mathcal{O}(D,N)^*_+$-equivalent a φ. Per tant, existeix $\sigma \in \mathcal{O}(D,N)$, de norma $\mathrm{n}(\sigma) = 1$, tal que $\varphi'(\alpha) = \sigma^{-1}\varphi(\alpha)\sigma$, per a tot $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Com que Φ és una immersió, si posem $P := \Phi(\sigma)$, $\gamma := \Phi(\varphi(\alpha))$ i $\gamma' := \Phi(\varphi'(\alpha))$, la relació anterior és equivalent a $\gamma' = P^{-1}\gamma P$, amb $P \in \Gamma(D,N)$. Ara és clar que si γ fixa z, aleshores γ' fixa $P^{-1}z$. Així, $z' = P^{-1}z$ i, per tant, z i z' són $\Gamma(D,N)$-equivalents.

Recíprocament, suposem que $z(\varphi) = Pz(\varphi')$, per a certa homografia $P \in \Gamma(D,N)$. Sigui $\sigma \in \mathcal{O}^*_+$ tal que $\Phi(\sigma) = P$. Sigui $0 \neq \alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, de $\mathrm{tr}(\alpha) = 0$. Considerem les homografies $\gamma := \Phi(\varphi(\alpha))$ i $\gamma' := \Phi(\varphi'(\alpha))$, que fixen z i z', respectivament. Aleshores,

$$\gamma'' := \Phi(\varphi^\sigma(\alpha)) = \Phi(\sigma)^{-1}\Phi(\varphi(\alpha))\Phi(\sigma) = P^{-1}\gamma P$$

és una homografia que també fixa z'. Ara bé, dues homografies γ' i γ'' tenen el mateix punt fix si, i només si, existeixen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ tals que $\gamma' = \lambda\gamma'' + \mu\,\mathrm{Id}$, pel lema 9.1.1. D'una banda, com que Φ, φ i φ' conserven la traça, tenim que $\mathrm{tr}(\gamma') = \mathrm{tr}(\alpha) = \mathrm{tr}(\gamma'')$. D'altra banda, utilitzant la relació entre γ' i γ'' tenim que $\mathrm{tr}(\gamma') = \lambda\,\mathrm{tr}(\gamma'') + 2\mu$. Com que $\mathrm{tr}(\alpha) = 0$, deduïm que $\mu = 0$. Si considerem la norma, tenim que $\det(\gamma') = \mathrm{n}(\alpha) = \det(\gamma'')$, $\det(\gamma') = \lambda^2\det(\gamma'')$ i $\mathrm{n}(\alpha) \neq 0$, i deduïm que $\lambda^2 = 1$. Per tant, $\gamma' = \pm\gamma''$, com volíem demostrar. □

9.1.16 Lema. *Siguin H una àlgebra de quaternions indefinida i F un cos quadràtic imaginari. Sigui $\varphi \in \mathcal{I}(H, F)$ i considerem $-\varphi$. Aleshores, φ i $-\varphi$ no són $\mathcal{O}^*_+$-equivalents, per a cap ordre quaterniònic $\mathcal{O} \subseteq H$.*

DEMOSTRACIÓ: Fixem $\alpha \in F_0$, $\alpha \neq 0$, i posem $\gamma := \Phi(\varphi(\alpha))$. Tenim que $\det(\gamma) = n(\alpha) > 0$, per ser F imaginari. Per tant, apliquem 2.2.11 i se satisfà $P^{-1}\gamma P \neq -\gamma$, per a tot $P \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$. Així, no existeix $\sigma \in \mathcal{O}(D,N)^*_+$ que relacioni φ i $-\varphi$. □

A partir dels resultats anteriors i dels resultats del capítol 7, obtenim el teorema següent sobre el nombre de punts de $X(D,N)$ de multiplicació complexa per un ordre quadràtic fixat. Recordem que $\nu(D,N,d,m;\mathcal{O}(D,N)^*)$ denota el nombre de classes de $\mathcal{O}(D,N)^*$-equivalència d'immersions optimals de l'ordre quadràtic $\Lambda(d,m)$ en l'ordre quaterniònic $\mathcal{O}(D,N)$, per al qual es tenen fórmules explícites en 7.2.13.

9.1.17 Teorema. *Sigui $X(D,N)$ una corba de Shimura. Fixem un ordre $\mathcal{O}(D,N)$ quaterniònic associat a la corba i un ordre $\Lambda(d,m)$ quadràtic. Aleshores:*

(i) *El nombre de punts de $X(D,N)$ de multiplicació complexa per l'ordre $\Lambda(d,m)$ és finit. Denotem-lo per* $\mathrm{cm}(D,N,d,m)$.

(ii) $\mathrm{cm}(D,N,d,m)=\mathrm{h}(D,N,d,m)$.

DEMOSTRACIÓ: Els punts de $X(D,N)$ de multiplicació complexa per $\Lambda(d,m)$ es defineixen a partir de les immersions del conjunt $\mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m))$.

En la proposició 9.1.15 anterior hem provat que immersions $\mathcal{O}(D,N)^*_+$-equivalents donen el mateix punt CM. Com que el nombre de classes

$$\nu(D,N,d,m;\mathcal{O}(D,N)^*_+)$$

és finit, això ens assegura que el nombre de punts de $\mathrm{CM}(D,N,d,m)$ també és finit i és menor o igual que aquest.

Per 7.4.9, tenim que $\mathrm{h}(D,N,d,m)=\nu(D,N,d,m;\mathcal{O}(D,N)^*)$. Per tant, és suficient provar la igualtat $\mathrm{cm}(D,N,d,m)=\nu(D,N,d,m;\mathcal{O}(D,N)^*)$.

En la mateixa proposició 9.1.15 anterior hem provat que, llevat $\mathcal{O}(D,N)^*_+$-equivalència, l'única possibilitat perquè dues immersions donin el mateix punt és que una s'obtingui a partir de l'altra, conjugant en el cos quadràtic. Ara bé, el lema 9.1.16 anterior ens assegura que en aquest cas no són mai equivalents. Remarquem que, per 9.1.14, si $\varphi\in\mathcal{I}(\mathcal{O},\Lambda)$, aleshores $-\varphi\in\mathcal{I}(\mathcal{O},\Lambda)$. Això fa que el nombre de punts CM sigui exactament la meitat que $\nu(D,N,d,m;\mathcal{O}(D,N)^*_+)$.

Finalment, la relació $\nu(D,N,d,m;\mathcal{O}(D,N)^*_+)=2\nu(D,N,d,m;\mathcal{O}(D,N)^*)$, donada a 7.2.19, completa la demostració. □

Si apliquem el resultat sobre el nombre de punts CM en el cas particular dels punts el·líptics, reobtenim les fórmules per al nombre de punts el·líptics de la corba $X(D,N)$, cf. 2.4.

9.1.18 Corol·lari. *En una corba de Shimura $X(D,N)$ amb N lliure de quadrats, hi ha un nombre finit de punts de multiplicació complexa especials. Denotem per* $\mathrm{cme}(D,N)$ *aquest nombre.*

DEMOSTRACIÓ: Pels resultats anteriors sabem que el nombre de punts de multiplicació complexa de $X(D,N)$ per a un ordre quadràtic fixat Λ és finit, i hem donat la manera de calcular-lo. Ara bé, com que N és lliure de quadrats, per 9.1.12, tenim que hi ha un nombre finit d'ordres quadràtics Λ, de manera que $X(D,N)$ té punts de multiplicació complexa per Λ especials. □

En la secció 9.3 mostrem taules amb el nombre de punts de multiplicació complexa per a ordres d'àlgebres de quaternions no ramificades i poc ramificades de tipus A i de tipus B.

9.2 Càlcul de punts de multiplicació complexa

A partir dels resultats del capítol 7 que relacionen les immersions i certes formes quadràtiques, la recerca dels punts CM es pot formular en termes de càlculs en formes quadràtiques. D'una banda, utilitzem la bijecció entre les immersions i les representacions de formes nòrmiques ternàries d'ordres quaterniònics. D'altra banda, tenim també una bijecció entre les immersions i certes formes quadràtiques binàries associades als ordres.

9.2.1 Teorema. *Sigui $X(D,N)$ una corba de Shimura i sigui $\Lambda(d,m)$ un ordre quadràtic. Considerem un ordre quaterniònic $\mathcal{O}(D,N)$ que defineixi el grup d'homografies $\Gamma(D,N)$ que uniformitza la corba i fixem una base normalitzada $\mathcal{B}$ d'aquest ordre. Aleshores, el conjunt de punts de $X(D,N)$ de multiplicació complexa per l'ordre quadràtic Λ es correspon amb*

$$\mathrm{CM}(D,N,d,m)=\Gamma(D,N)\backslash\{z\in\mathcal{H}:\gamma(z)=z,\gamma\in\Gamma(D,N,m,d)\},$$

on $\Gamma(D,N,m,d)$ és el conjunt d'homografies següent:

$$\left\{\Phi\left(\left(\frac{-kz}{m},\frac{2x}{m},\frac{2y}{m},\frac{2z}{m}\right)_{\mathcal{B}}\right):(x,y,z)\in\mathcal{R}^*\left(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3},-D_\Lambda;\mathbb{Z}\right)\right\},$$

on $k=0$ si l'ordre és parell i $k=1$ si l'ordre és senar.

Equivalentment,

$$\mathrm{CM}(D,N,d,m)=\Gamma(D,N)\backslash\{\tau(f):f\in\mathcal{H}^*((\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N));\Lambda)\}.$$

DEMOSTRACIÓ: Només cal veure que les homografies de $\Gamma(D,N,m,d)$ corresponen a les homografies que provenen d'immersions optimals de l'ordre quadràtic $\Lambda(d,m)$ en $\mathcal{O}(D,N)$. N'hi ha prou amb escollir una homografia $\gamma = \Phi(\varphi(\alpha))$ per a cada immersió $\varphi \in \mathcal{I}^*(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m))$, on $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$ qualsevol. La proposició 7.3.5 descriu les immersions $\varphi \in \mathcal{I}(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m))$, donant l'expressió de $\varphi(\sqrt{d})$ en funció de la base normalitzada fixada en l'ordre quaterniònic i d'una representació de $-D_\Lambda$ per la forma nòrmica $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}$, segons el valor de d mòdul 4.

Pel lema 9.1.1, podem canviar una homografia γ per $\gamma' := \lambda\gamma + \mu\,\mathrm{Id}$ i els punts fixos no varien, que és equivalent a escollir α de manera convenient. Considerem les homografies $\Phi(\varphi(m\sqrt{d}) = m\Phi(\varphi(\sqrt{d}))$ si $d \equiv 1 \mod 4$ i $\Phi(\varphi(2m\sqrt{d}) = 2m\Phi(\varphi(\sqrt{d}))$ si $d \equiv 2,3 \mod 4$. Així, independentment del valor de d, per a cada $(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{R}^*\,(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda;\mathbb{Z})$ fixem l'homografia

$$\gamma := \Phi\left(\left(\frac{-kz}{m},\frac{2x}{m},\frac{2y}{m},\frac{2z}{m}\right)_B\right).$$

Utilitzant la bijecció entre els conjunts de classes d'immersions optimals i de formes quadràtiques binàries $(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m))$-primitives, 7.4.7, obtenim la formulació en funció de punts associats a formes quadràtiques binàries. □

9.2.2 Remarca. A nivell de càlcul explícit d'immersions, és clar que l'ús de les dues vies és equivalent, ja que l'equació obtinguda en imposar que la forma binària corresponent tingui el determinant adequat és justament la que correspon a la representació per la forma ternària, cf. 6.3.7. □

A continuació ho explicitem per a ordres de les àlgebres no ramificades i poc ramificades de tipus A i B. En la secció 9.3 donem taules de punts CM i la seva representació gràfica.

9.2.3 Teorema. *Considerem la corba* $X(1,N) = X_0(N)$. *Fixem l'ordre d'Eichler* $\mathcal{O}_M(1,N) = \mathbb{Z}[1,\frac{j+ij}{2},N\frac{(-j+ij)}{2},\frac{1-i}{2}] \subseteq \left(\frac{1,-1}{\mathbb{Q}}\right)$. *Fixem* $\Lambda = \Lambda(d,m)$, *un ordre quadràtic. Aleshores,* $\mathrm{CM}(1,N,d,m)$ *és el conjunt de classes de* $\Gamma(1,N)$*-equivalència del conjunt de punts*

$$\left\{\frac{-z_0 \pm \sqrt{-D_\Lambda}\iota}{2Ny_0} \in \mathcal{H} : (x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_M(1,N),3}, -D_\Lambda;\mathbb{Z})\right\}.$$

o bé, equivalentment,

$$\left\{\frac{-b \pm \sqrt{-D_\Lambda}\iota}{2Na} \in \mathcal{H} : f = (Na,b,c),\ a,b,c \in \mathbb{Z},\ \mathrm{mcd}(a,b,c) = 1,\ \det_2(f) = -D_\Lambda\right\}.$$

DEMOSTRACIÓ: Apliquem la proposició 9.2.1. Tenim la base de l'ordre explícita, $\mathcal{B} = \{1, \frac{j+ij}{2}, N\frac{(-j+ij)}{2}, \frac{1-i}{2}\}$.

Fixada una representació $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_M(1,N)),3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$, obtenim l'homografia

$$\gamma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -z_0 & 2x_0 \\ 2Ny_0 & z_0 \end{pmatrix}$$

i es comprova que té com a punts fixos

$$\frac{-z_0 \pm \sqrt{-D_\Lambda}\iota}{2Ny_0}.$$

Cal escollir el signe de manera que ens doni un punt del semiplà de Poincaré.

De manera alternativa, podem explicitar els punts $\tau(f)$ associats a les formes binàries $f \in \mathcal{H}^*(\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}_M(1, N); \Lambda)$, donades per 7.4.11,

$$f = (Na, b, c), \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}, \operatorname{mcd}(a, b, c) = 1, \det_2(f) = -D_\Lambda. \square$$

Els resultats obtinguts coincideixen amb els anteriors.

En la secció 9.3 presentem taules amb la llista d'ordres quadràtics pels quals la corba $X(1, N)$ té punts de multiplicació complexa especials i el nombre de punts corresponents, per a $N \leq 25$ lliure de quadrats. Els resultats concorden amb els donats a [ABa].

Per als casos poc ramificats de tipus A i tipus B, explicitem el resultat de la proposició 9.2.1 de manera anàloga al càlcul de punts el·líptics explicitat en la secció 8.1. Així, obtenim els resultats següents.

9.2.4 Teorema. *Sigui $X(2p, N)$ la corba de Shimura determinada pel grup d'homografies quaterniòniques $\Gamma(2p, N)$, per a $p \equiv 3 \mod 4$, $N|\frac{p-1}{2}$ i lliure de quadrats. Fixem l'ordre d'Eichler següent*

$$\mathcal{O}_A(2p, N) = \mathbb{Z}[1, i, Nj, \frac{1+i+j+ij}{2}] \subseteq H_A(p),$$

donat respecte d'una base normalitzada, a partir de la qual obtenim la forma nòrmica ternària $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_A(2p,N)),3}$. Fixem un ordre quadràtic $\Lambda = \Lambda(d, m)$. Aleshores, $\mathrm{CM}(D, N, d, m)$ és el conjunt de classes de $\Gamma(D, N)$-equivalència del conjunt de punts

$$\left\{ \frac{(2x_0 + z_0)\sqrt{p} \pm \sqrt{-D_\Lambda}\iota}{-(2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p}} \in \mathcal{H} : (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_A(2p,N)),3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z}) \right\}.$$

DEMOSTRACIÓ: Apliquem 9.2.1 en el cas de $\mathcal{B} = \{1, i, Nj, \frac{1+i+j+ij}{2}\}$.

Fixada una representació $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z})$, obtenim l'homografia

$$\gamma = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (2x_0 + z_0)\sqrt{p} & (2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p} \\ -(2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p} & -(2x_0 + z_0)\sqrt{p} \end{pmatrix}$$

i es comprova que té com a punts fixos

$$\frac{(2x_0 + z_0)\sqrt{p} \pm \sqrt{-D_\Lambda}\iota}{-(2Ny_0 + z_0) + z_0\sqrt{p}}.$$

Només cal escollir el punt pertanyent al semiplà de Poincaré $\mathcal{H}$. □

Anàlogament, en el cas de les àlgebres poc ramificades de tipus B, obtenim el resultat següent.

9.2.5 Teorema. *Sigui $X(pq, N)$ la corba de Shimura determinada pel grup d'homografies quaternièniques $\Gamma(pq, N)$, per a $q \equiv 1 \mod 4$, $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, $N | \frac{q-1}{4}$, lliure de quadrats i $\mathrm{mcd}(p, N) = 1$. Fixem l'ordre d'Eichler*

$$\mathcal{O}_B(pq, N) = \mathbb{Z}[1, Ni, \frac{i + ij}{2}, \frac{1 + j}{2}] \subseteq H_B(p, q)$$

i un ordre quadràtic $\Lambda = \Lambda(d, m)$. Aleshores, $\mathrm{CM}(D, N, d, m)$ és el conjunt de classes de $\Gamma(D, N)$-equivalència del conjunt de punts

$$\left\{ \frac{(2Nx_0 + y_0)\sqrt{p} \pm \sqrt{-D_\Lambda}\iota}{q(z_0 - y_0\sqrt{p})} \in \mathcal{H} : (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}_B(pq,N),3}, -D_\Lambda; \mathbb{Z}) \right\}.$$

□

Si utilitzem l'explicitació de les immersions via les formes quadràtiques binàries els resultats són els mateixos, ja que recordem que la condició sobre el determinant de la forma binària és equivalent a la condició sobre la representació, cf. 6.3.7.

En la secció 9.3 donem taules de punts de multiplicació complexa per a la corba $X(6, 1)$, que correspon al cas poc ramificat de tipus A, i per a les corbes $X(10, 1)$ i $X(15, 1)$, que corresponen al cas poc ramificat de tipus B. Utilitzant els dominis fonamentals construïts en el capítol 8 mostrem també la seva representació gràfica.

9.2.6 Exemple. Considerem la corba de Shimura $X(1,11)$. Explicitem el procés de càlcul dels punts de $X(1,11)$ de multiplicació complexa per alguns ordres quadràtics $\Lambda(d,m)$

Els ordres quadràtics per als que hi ha punts de $X(1,11)$ de multiplicació complexa especials són:

$$\begin{array}{lll} \Lambda(-2,1), & \Lambda(-7,1), & \Lambda(-7,2), \\ \Lambda(-10,1), & \Lambda(-11,1), & \Lambda(-11,2), \\ \Lambda(-19,1), & \Lambda(-35,1), & \Lambda(-43,1). \end{array}$$

L'únic punt de $X(1,11)$ de multiplicació complexa especial per l'anell d'enters del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ és:

$$\tau = \frac{11+\sqrt{-11}}{66}.$$

Els punts de $X(1,11)$ de multiplicació complexa especials per l'anell d'enters del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$ són:

$$\tau_1 = \frac{5+\sqrt{-19}}{22}, \quad \tau_2 = \frac{-5+\sqrt{-19}}{22}.$$

Els punts de $X(1,11)$ de multiplicació complexa especials per l'anell d'enters del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{-35})$ són:

$$\tau_1 = \frac{-19+\sqrt{-35}}{66}, \tau_2 = \frac{-3+\sqrt{-35}}{22}, \tau_3 = \frac{3+\sqrt{-35}}{22}, \tau_4 = \frac{19+\sqrt{-35}}{66}.$$

Calculem representacions de $-D_\Lambda = 11, 19, 35$ per la forma quadràtica ternària $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}(X,Y,Z) = -Z^2 - 4NXY$ i obtenim immersions i les corresponents homografies, que tenen com a punts fixos els anteriors. Escrivim $\{\tau_i\}$, el conjunt de punts de multiplicació complexa per a cada ordre Λ_F, i posem γ_i, una homografia tal que el seu punt fix és τ_i. Recordem que podem calcular també els punts de multiplicació complexa en funció de formes quadràtiques binàries. Els punts de multiplicació complexa de $X(1,11)$ per un ordre quadràtic Λ donat, es troben a partir dels punts associats a formes quadràtiques binàries $f = (Na, b, c)$, amb $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tals que $\det_2(f) = -D_\Lambda$. Això correspon a igualar l'expressió $4Nac - b^2$ a 11, 19 i 35, respectivament. Observem que l'equació que cal resoldre és equivalent a l'anterior.

Per a $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$, tenim que $\nu(\mathcal{O}(1,11), \Lambda_F) = 1$, ja que $h(\mathbb{Q}(\sqrt{-11})) = 1$ i $p = 11$ no és inert ni descompon en $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Aplicant els resultats anteriors, obtenim

$$\gamma = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 11 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{amb punt fix } \tau = \frac{11+\sqrt{-11}}{22}.$$

Si considerem més solucions, obtenim per exemple

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 33 & -5 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -33 & -5 \end{pmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -11 & -5 \end{pmatrix}.$$

Es comprova que són homografies $\Gamma(1,11)$-equivalents a l'anterior; per tant, els punts fixos corresponents són $\Gamma(1,11)$-equivalents a τ:

$$\tau_1 = \frac{11+\sqrt{-11}}{66} = \tau, \quad \tau_2 = \frac{-11+\sqrt{-11}}{66} = \tau_3 \sim \tau.$$

Així, τ és l'únic punt de multiplicació complexa de $X(1,11)$ per l'ordre Λ_F amb $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$. Ara bé, notem que pertany a una aresta del domini fonamental fixat al capítol 3, per la qual cosa apareixeran els dos punts en la representació gràfica.

Per a $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$, tenim que $\nu(\mathcal{O}(1,11),\Lambda_F) = 2$, ja que $h(\mathbb{Q}(\sqrt{-19})) = 1$ i $p = 11$ descompon en $\mathbb{Q}(\sqrt{-19})$. En aquest cas, obtenim les homografies

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 11 & -2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix},$$

que corresponen als punts fixos següents, que no són $\Gamma(1,11)$-equivalents,

$$\tau_1 = \frac{5+\sqrt{-19}}{22}, \quad \tau_2 = \frac{-5+\sqrt{-19}}{22}.$$

Així, els punts τ_1 i τ_2 són els punts de $X(1,11)$ de multiplicació complexa per Λ_F especials, per a $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-19})$.

Finalment, comprovem que efectivament hi ha immersions optimals de l'anell d'enters de $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-35})$ en l'ordre $\mathcal{O}_0(11)$; concretament, $\nu(\mathcal{O}(1,11),\Lambda_F) = 4$, ja que $h(\mathbb{Q}(\sqrt{-35})) = 2$ i $p = 11$ descompon en $\mathbb{Q}(\sqrt{-35})$. Les representacions ens donen les homografies

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 33 & -9 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -11 & 1 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 11 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_4 = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ 33 & -9 \end{pmatrix}.$$

Es comprova que els punts fixos corresponents no són $\Gamma(1,11)$-equivalents, per la qual cosa són un sistema de representants dels punts de multiplicació complexa que cercàvem:

$$\tau_1 = \frac{-19+\sqrt{-35}}{66}, \tau_2 = \frac{-3+\sqrt{-35}}{22}, \tau_3 = \frac{3+\sqrt{-35}}{22}, \tau_4 = \frac{19+\sqrt{-35}}{66}.$$

Així, els punts τ_1, τ_2, τ_3 i τ_4 són els punts de $X(1,11)$ de multiplicació complexa per Λ_F especials, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-35})$.

En la figura 9.3 es troba la representació gràfica dels punts de multiplicació complexa de $X(1,11)$ calculats en aquest exemple, junt amb la resta de punts de multiplicació complexa especials, utilitzant el domini fonamental construït en el capítol 3. □

Com a aplicació de la interpretació dels punts del multiplicació complexa com a punts associats a formes quadràtiques binàries definides i la construcció explícita de dominis fonamentals de corbes de Shimura, donem la definició següent.

Més concretament, considerem la relació entre els punts del semiplà de Poincaré i les formes binàries definides amb coeficients reals, cf. 2.2.7. Aleshores, definim el concepte de forma quadràtica binària $\Gamma(D,N)$-reduïda relatiu a un domini fonamental fixat de la corba de Shimura $X(D,N)$, per a les formes binàries definides positives associades a l'ordre $\mathcal{O}(D,N)$).

9.2.7 Definició. Sigui $\mathcal{D}(D,N)$ un domini fonamental fixat de la corba de Shimura $X(D,N)$, definida a partir de l'ordre quaterniònic $\mathcal{O}(D,N)$. Donat un ordre quadràtic imaginari $\Lambda(d,m)$, considerem el conjunt $\mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ de formes quadràtiques binàries definides $(\mathcal{O}(D,N),\Lambda(d,m))$-primitives. Una forma binària $f \in \mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ diem que és $\Gamma(D,N)$-quasireduïda si $\tau(f) \in \mathcal{D}(D,N)$.

Sigui $f \in \mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ una forma $\Gamma(D,N)$-quasireduïda tal que $\tau(f)$ pertany a la vora del domini fonamental. Aleshores existeix $f' \neq f$, $f' \in \mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ tal que $\tau(f')$ també és a la vora del domini i és $\Gamma(D,N)$-equivalent a $\tau(f)$. En aquest cas, considerem només una de les dues formes binàries. Anomenem formes $\Gamma(D,N)$-reduïdes les formes $\Gamma(D,N)$-quasireduïdes tenint en compte aquesta elecció. □

El nombre de formes quadràtiques binàries definides de $\mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ que són $\Gamma(D,N)$-reduïdes es correspon amb el nombre de punts que determinen. Així obtenim el resultat següent.

9.2.8 Teorema. *Considerem el conjunt de formes binàries $\mathcal{H}^*(D,N,d,m)$.*

(i) *El nombre de formes de $\mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ que són $\Gamma(D,N)$-reduïdes és finit i és igual a $2\,\mathrm{h}(D,N,d,m)$.*

(ii) *El nombre de formes definides positives de* $\mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ *que són* $\Gamma(D,N)$*-reduïdes és igual a* $\mathrm{h}(D,N,d,m)$.

DEMOSTRACIÓ: És clar que a cada forma binària $f \in \mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ que sigui $\Gamma(D,N)$-reduïda li correspon un punt de multiplicació complexa $\tau(f)$, per l'ordre quadràtic $\Lambda = \Lambda(d,m)$, de manera que $\det_2(f) = -D_\Lambda = -D_F m^2$. Ara bé, aquesta correspondència no és injectiva. De fet, tenim que $f, g \in\in \mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ satisfan que $\det_2(f) = \det_2(g)$ i $\tau(f) = \tau(g)$ si, i només si, $g = -f$. Així, el nombre de formes binàries de $\mathcal{H}^*(D,N,d,m)$, $\Gamma(D,N)$-reduïdes de determinant parell fixat és el doble dels punts de multiplicació complexa. La demostració de (i) es completa aplicant la relació $\mathrm{cm}(D,N,d,m) = \mathrm{h}(D,N,d,m)$, donada en 9.1.17.

Per a veure (ii), només cal tenir en compte que en $\mathcal{H}^*(D,N,d,m)$ s'inclouen formes definides positives i formes definides negatives. □

D'aquesta manera es justifica la notació $\mathrm{h}(D,N,d,m)$ utilitzada en la secció 7.4, ja que coincideix amb l'ús habitual de la notació de formes quadràtiques binàries en el cas de coeficients enters.

En particular, tenim definit el concepte de forma $\Gamma(1,N)$-reduïda per a les formes binàries $f = (Na, b, c)$ definides positives, amb a, b, c enters primers entre si i N primer, a partir del domini fonamental $\mathcal{D}(1,N)$ donat a 3.2.4.

A més, també podem aplicar explícitament aquests resultats per a les formes binàries de coeficients semi-quadràtics que hem explicitat en els casos poc ramificats en què hem construït dominis fonamentals: $D = 6$, $D = 10$ i $D = 15$, amb $N = 1$.

9.3 Algoritmes, taules i gràfiques

En aquesta secció comentem breument les instruccions implementades per a determinar l'existència de punts de multiplicació complexa d'una corba de Shimura $X(D,N)$ per un ordre quadràtic fixat, i les instruccions per a calcular-ne el nombre i les coordenades. A continuació mostrem taules amb aquests càlculs explícits per al cas no ramificat i els casos poc ramificats tractats en el capítol anterior.

Fixem una corba de Shimura $X(D,N)$ i un ordre quaterniònic $\mathcal{O}(D,N)$. La majoria d'instruccions valen per a qualsevol corba de Shimura en general.

Per al cas de les àlgebres no ramificades i poc ramificades de tipus A i de tipus B, hem programat alguna instrucció amb la finalitat d'alleugerir els càlculs, utilitzant els resultats donats en les seccions anteriors.

En primer lloc, destaquem la implementació de les funcions lògiques següents: `isCMOrF` i `isCMOrFg`, que comproven l'existència de punts de la corba de Shimura $X(D,N)$ de multiplicació complexa pel cas de N lliure de quadrats i pel cas general, per un ordre quadràtic donat; anàlogament `isCMEOrF` i `isCMEOrFg` comproven l'existència de punts de multiplicació complexa especials. La segona de les instruccions requereix l'ús intern de la funció lògica `isDNrepOrF`, que comprova si la forma nòrmica reduïda de l'ordre quadràtic representa DN.

El nombre de punts de multiplicació complexa per un ordre quadràtic fixat s'obté amb la instrucció `cmOrF`, a partir dels paràmetres D, N, d, m.

Per a calcular explícitament els punts de $\mathcal{H}$ de multiplicació complexa tenim la instrucció `CMP`, que utilitza com a arguments una base de l'ordre quaterniònic i els paràmetres que determinen l'ordre quadràtic, i que, per tant, es pot utilitzar per a qualsevol corba de Shimura. Inclou també un argument opcional per tal de controlar la profunditat en la recerca de solucions.

Hem implementat també un algoritme per a obtenir la llista d'ordres quadràtics per als quals una corba $X(D,N)$ fixada té punts de multiplicació complexa especial, que ha donat lloc a la instrucció `CMEOrF`. Algunes variacions d'aquesta instrucció incorporen també el nombre de punts de multiplicació complexa per a aquest ordre, el nombre de classes d'ideals de l'ordre quadràtic, etc. A partir de la instrucció anterior, la instrucció `cme` dóna el nombre total de punts de multiplicació complexa especials d'una corba de Shimura.

De manera anàloga als punts de multiplicació complexa que hem anomenat especials, hom pot estar interessat en els punts dels ordres quadràtics que satisfacin altres condicions similars. Per exemple, pot ser interessant considerar els ordres quadràtics la forma nòrmica binària dels quals representi un divisor del discriminant de l'ordre quaterniònic $D_{\mathcal{O}} = DN$. Per tal de facilitar-ne el càlcul, presentem també una versió modificada de les instruccions anteriors, de manera que es pot introduir com a argument el nombre que volem que sigui representat per la forma binària. Així, tenim la sèrie d'instruccions modificades: `CMEMOrFg`, `cmeM`, `isCMEMOrFg`, etc., basades en la instrucció `isRrepOrF`.

Les taules següents contenen informació sobre els punts de multiplicació complexa especials de corbes $X(D, N)$.

El primer bloc de taules, 9.1-9.4, dóna la llista d'ordres quadràtics per als quals la corba $X(D, N)$ té punts de multiplicació complexa fins a $N \leq 25$, aproximadament, per a $D = 1, 6, 10, 15$.

A continuació donem taules amb els punts de multiplicació complexa especials calculats, junt amb la seva representació en el domini fonamental construït en aquest treball. Així, les figures 9.1-9.5 i les taules 9.5-9.9 corresponen als punts de multiplicació complexa especials de les corbes modulars $X(1,3)$, $X(1,11)$, $X(1,13)$ i $X(1,23)$, respectivament. Observem que, en els casos que tenim un nombre parell de punts de multiplicació complexa per un mateix ordre quadràtic, la simetria del domini fonamental construït fa que aquests punts siguin simètrics respecte l'eix imaginari. Anàlogament, les figures 9.6-9.8, junt amb les taules 9.10-9.12, mostren els punts de multiplicació complexa especials de les corbes de Shimura $X(6,1)$, $X(10,1)$ i $X(15,1)$, respectivament.

Taula 9.1 *Ordres quadràtics $\Lambda(d,m)$ tals que $X(1,N)$ té punts de multiplicació complexa especials per $\Lambda(d,m)$, on $N \leq 25$.*

N	(d,m)	h	cm
1	(-1, 1)	1	1
	(-3, 1)	1	1
	$\mathrm{cme}(1,1) = 2$		
2	(-1, 1)	1	1
	(-2, 1)	1	1
	(-7, 1)	1	2
	$\mathrm{cme}(1,2) = 4$		
3	(-2, 1)	1	2
	(-3, 1)	1	1
	(-3, 2)	1	1
	(-11, 1)	1	2
	$\mathrm{cme}(1,3) = 6$		
5	(-1, 1)	1	2
	(-1, 2)	1	2
	(-5, 1)	2	2
	(-11, 1)	1	2
	(-19, 1)	1	2
	$\mathrm{cme}(1,5) = 10$		
6	(-2, 1)	1	2
	(-5, 1)	2	4
	(-6, 1)	2	2
	(-15, 1)	2	4
	(-23, 1)	3	12
	$\mathrm{cme}(1,6) = 24$		
7	(-3, 1)	1	2
	(-3, 2)	1	2
	(-3, 3)	1	2
	(-6, 1)	2	4
	(-7, 1)	1	1
	(-7, 2)	1	1
	(-19, 1)	1	2
	$\mathrm{cme}(1,7) = 14$		
10	(-1, 1)	1	2
	(-1, 3)	2	4

N	(d,m)	h	cm
	(-6, 1)	2	4
	(-10, 1)	2	2
	(-15, 1)	2	4
	(-31, 1)	3	12
	(-39, 1)	4	16
	$\mathrm{cme}(1,10) = 44$		
11	(-2, 1)	1	2
	(-7, 1)	1	2
	(-7, 2)	1	2
	(-10, 1)	2	4
	(-11, 1)	1	1
	(-11, 2)	3	3
	(-19, 1)	1	2
	(-35, 1)	2	4
	(-43, 1)	1	2
	$\mathrm{cme}(1,11) = 22$		
13	(-1, 1)	1	2
	(-1, 2)	1	2
	(-1, 3)	2	4
	(-3, 1)	1	2
	(-3, 2)	1	2
	(-3, 3)	1	2
	(-3, 4)	2	4
	(-13, 1)	2	2
	(-43, 1)	1	2
	(-51, 1)	2	4
	$\mathrm{cme}(1,13) = 26$		
14	(-5, 1)	2	4
	(-7, 1)	1	2
	(-10, 1)	2	4
	(-13, 1)	2	4
	(-14, 1)	4	4
	(-31, 1)	3	12
	(-47, 1)	5	20

N	(d,m)	h	cm
	(-55, 1)	4	16
	cme$(1,14) = 66$		
15	(-6, 1)	2	4
	(-11, 1)	1	4
	(-11, 2)	3	12
	(-14, 1)	4	16
	(-15, 1)	2	2
	(-15, 2)	2	2
	(-35, 1)	2	4
	(-51, 1)	2	4
	(-59, 1)	3	12
	cme$(1,15) = 60$		
17	(-1, 1)	1	2
	(-1, 2)	1	2
	(-1, 4)	2	4
	(-2, 1)	1	2
	(-2, 2)	2	4
	(-13, 1)	2	4
	(-17, 1)	4	4
	(-19, 1)	1	2
	(-43, 1)	1	2
	(-59, 1)	3	6
	(-67, 1)	1	2
	cme$(1,17) = 34$		
19	(-2, 1)	1	2
	(-2, 3)	2	4
	(-3, 1)	1	2
	(-3, 2)	1	2
	(-3, 3)	1	2
	(-3, 5)	2	4
	(-10, 1)	2	4
	(-15, 1)	2	4
	(-15, 2)	2	4
	(-19, 1)	1	1
	(-19, 2)	3	3
	(-51, 1)	2	4
	(-67, 1)	1	2
	cme$(1,19) = 38$		

N	(d,m)	h	cm
21	(-3, 1)	1	2
	(-3, 2)	1	2
	(-3, 4)	2	4
	(-3, 5)	2	4
	(-5, 1)	2	8
	(-5, 2)	4	16
	(-17, 1)	4	16
	(-21, 1)	4	4
	(-35, 1)	2	4
	(-59, 1)	3	12
	(-83, 1)	3	12
	cme$(1,21) = 84$		
22	(-2, 1)	1	2
	(-2, 3)	2	4
	(-6, 1)	2	4
	(-7, 1)	1	4
	(-7, 3)	4	16
	(-13, 1)	2	4
	(-21, 1)	4	8
	(-22, 1)	2	2
	(-39, 1)	4	16
	(-79, 1)	5	20
	(-87, 1)	6	24
	cme$(1,22) = 104$		
23	(-7, 1)	1	2
	(-7, 2)	1	2
	(-11, 1)	1	2
	(-14, 1)	4	8
	(-19, 1)	1	2
	(-19, 2)	3	6
	(-22, 1)	2	4
	(-23, 1)	3	3
	(-23, 2)	3	3
	(-43, 1)	1	2
	(-67, 1)	1	2
	(-83, 1)	3	6
	(-91, 1)	2	4
	cme$(1,23) = 46$		

Taula 9.2 *Ordres quadràtics $\Lambda(d,m)$ tals que $X(6,N)$ té punts de multiplicació complexa especials per $\Lambda(d,m)$, on $N \leq 25$.*

N	(d,m)	h	cm
1	(-6, 1)	2	2
	$\mathrm{cme}(6,1) = 2$		
5	(-21, 1)	4	8
	(-30, 1)	4	4
	$\mathrm{cme}(6,5) = 12$		
7	(-6, 1)	2	4
	(-33, 1)	4	8
	(-42, 1)	4	4
	$\mathrm{cme}(6,7) = 16$		
11	(-30, 1)	4	8
	(-57, 1)	4	8
	(-66, 1)	8	8
	$\mathrm{cme}(6,11) = 24$		
13	(-42, 1)	4	8
	(-69, 1)	8	16
	(-78, 1)	4	4
	$\mathrm{cme}(6,13) = 28$		
17	(-21, 1)	4	8
	(-66, 1)	8	16
	(-93, 1)	4	8
	(-102, 1)	4	4
	$\mathrm{cme}(6,17) = 36$		
19	(-33, 1)	4	8
	(-78, 1)	4	8
	(-105, 1)	8	16
	(-114, 1)	8	8
	$\mathrm{cme}(6,19) = 40$		
23	(-57, 1)	4	8
	(-102, 1)	4	8
	(-129, 1)	12	24
	(-138, 1)	8	8
	$\mathrm{cme}(6,23) = 48$		

Taula 9.3 *Ordres quadràtics $\Lambda(d,m)$ tals que $X(10,N)$ té punts de multiplicació complexa especials per $\Lambda(d,m)$, on $N \leq 25$.*

N	(d,m)	h	cm
1	(-10, 1)	2	2
	cme$(10,1) = 2$		
3	(-5, 1)	2	4
	(-30, 1)	4	4
	cme$(10,3) = 8$		
7	(-5, 1)	2	4
	(-5, 3)	4	8
	(-70, 1)	4	4
	cme$(10,7) = 16$		
11	(-10, 1)	2	4
	(-85, 1)	4	8
	(-110, 1)	12	12
	cme$(10,11) = 24$		
13	(-30, 1)	4	8
	(-105, 1)	8	16
	(-130, 1)	4	4
	cme$(10,13) = 28$		
17	(-70, 1)	4	8
	(-145, 1)	8	16
	(-170, 1)	12	12
	cme$(10,17) = 36$		
19	(-10, 1)	2	4
	(-10, 3)	8	16
	(-165, 1)	8	16
	(-190, 1)	4	4
	cme$(10,19) = 40$		
21	(-110, 1)	12	48
	(-185, 1)	16	64
	(-210, 1)	8	8
	cme$(10,21) = 120$		
23	(-5, 1)	2	4
	(-130, 1)	4	8
	(-205, 1)	8	16
	(-230, 1)	20	20
	cme$(10,23) = 48$		

Taula 9.4 *Ordres quadràtics $\Lambda(d, m)$ tals que $X(15, N)$ té punts de multiplicació complexa especials per $\Lambda(d, m)$, on $N \leq 22$.*

N	(d, m)	h	cm
1	(-15, 1)	2	2
	(-15, 2)	2	2
	$\mathrm{cme}(15,1) = 4$		
2	(-30, 1)	4	4
	$\mathrm{cme}(15,2) = 4$		
7	(-105, 1)	8	8
	(-195, 1)	4	8
	$\mathrm{cme}(15,7) = 16$		
11	(-165, 1)	8	8
	(-435, 1)	4	8
	$\mathrm{cme}(15,11) = 16$		
13	(-195, 1)	4	4
	(-195, 2)	12	12
	(-555, 1)	4	8
	$\mathrm{cme}(15,13) = 24$		
14	(-210, 1)	8	8
	(-615, 1)	20	80
	$\mathrm{cme}(15,14) = 88$		
17	(-30, 1)	4	8
	(-255, 1)	12	12
	(-255, 2)	12	12
	(-795, 1)	4	8
	$\mathrm{cme}(15,17) = 40$		
19	(-15, 1)	2	4
	(-15, 2)	2	4
	(-15, 4)	4	8
	(-285, 1)	16	16
	(-915, 1)	8	16
	$\mathrm{cme}(15,19) = 48$		
22	(-105, 1)	8	16
	(-330, 1)	8	8
	(-1095, 1)	28	112
	$\mathrm{cme}(15,22) = 136$		

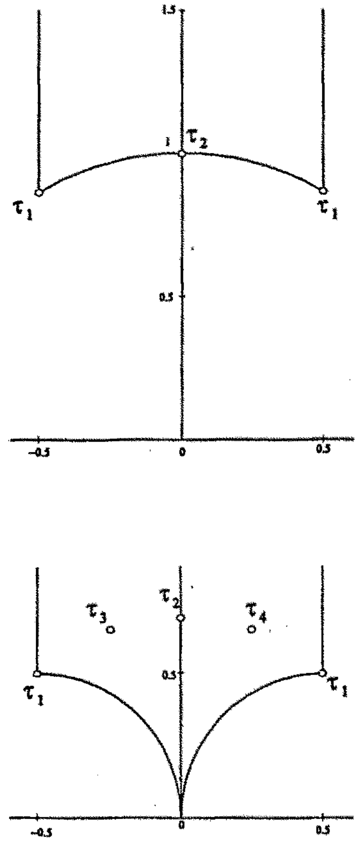

Figura 9.1: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en dominis fonamentals de $X(1,1)$ i $X(1,2)$.

Taula 9.5 *Els ordres quadràtics i els punts de multiplicació complexa especials de* $X(1,2)$.

(d,m)	n	$\mathrm{CM}(1,2,d,m)$
(-1, 1)	1	$\left\{\tau_1 = \dfrac{-1+\iota}{2} \sim \dfrac{1+\iota}{2}\right\}$
(-2, 1)	1	$\left\{\tau_2 = \dfrac{\sqrt{2}\iota}{2}\right\}$
(-7, 1)	2	$\left\{\tau_3 = \dfrac{-1+\sqrt{7}\iota}{4}, \tau_4 = \dfrac{1+\sqrt{7}\iota}{4}\right\}$

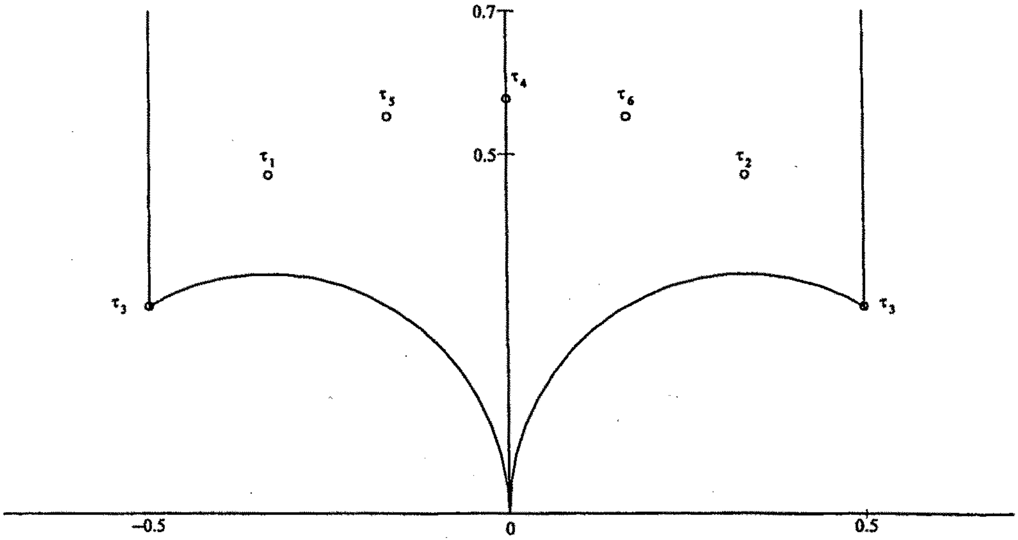

Figura 9.2: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en un domini fonamental de $X(1,3)$.

Taula 9.6 *Els ordres quadràtics i els punts de multiplicació complexa especials de* $X(1,3)$.

(d,m)	n	CM$(1,3,d,m)$
(-2, 1)	2	$\left\{\tau_1 = \dfrac{-1+\sqrt{2}\iota}{3}, \tau_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}\iota}{3}\right\}$
(-3, 1)	1	$\left\{\tau_3 = \dfrac{-3+\sqrt{3}\iota}{6} \sim \dfrac{3+\sqrt{3}\iota}{6}\right\}$
(-3, 2)	1	$\left\{\tau_4 = \dfrac{\sqrt{3}\iota}{3}\right\}$
(-11, 1)	2	$\left\{\tau_5 = \dfrac{-1+\sqrt{11}\iota}{6}, \tau_6 = \dfrac{1+\sqrt{11}\iota}{6}\right\}$

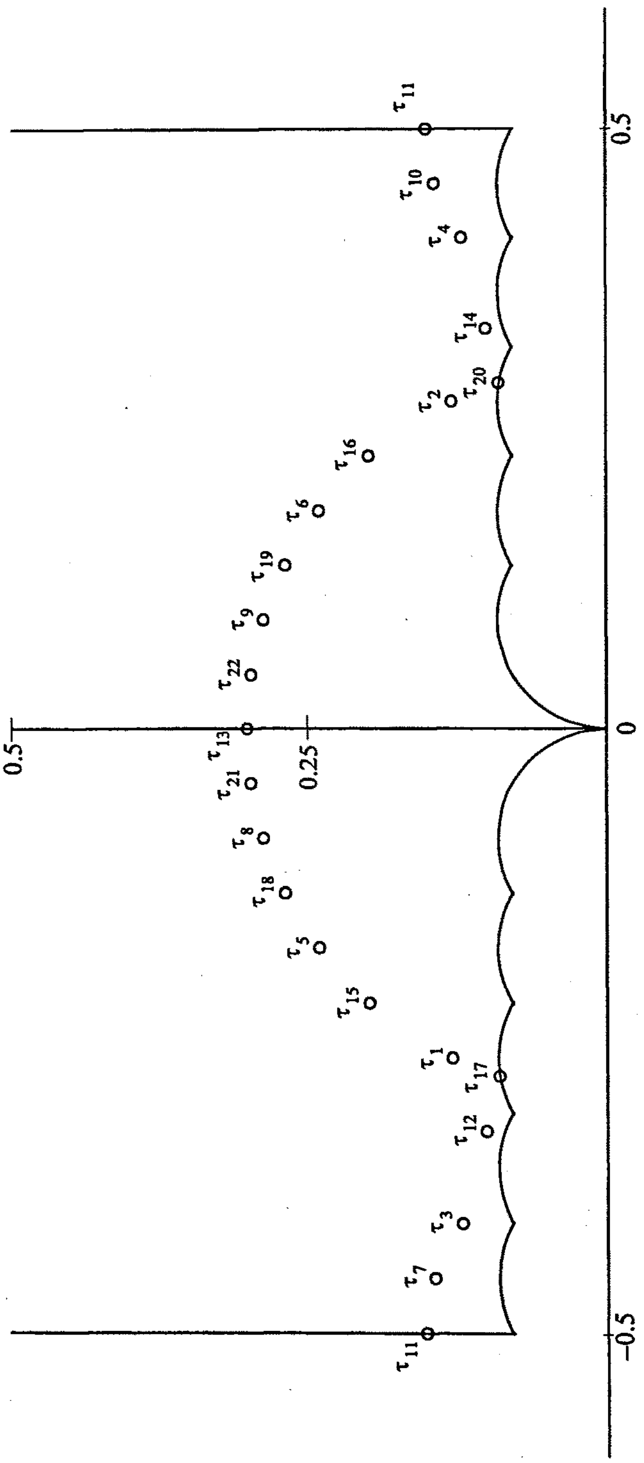

Figura 9.3: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en un domini fonamental de $X(1,11)$.

Taula 9.7 *Els ordres quadràtics i els punts de multiplicació complexa especials de $X(1,11)$.*

(d,m)	n	$\mathrm{CM}(1,11,d,m)$
(-2, 1)	2	$\left\{\tau_1 = \dfrac{-3+\sqrt{2}\iota}{11}, \tau_2 = \dfrac{3+\sqrt{2}\iota}{11}\right\}$
(-7, 1)	2	$\left\{\tau_3 = \dfrac{-9+\sqrt{7}\iota}{22}, \tau_4 = \dfrac{9+\sqrt{7}\iota}{22}\right\}$
(-7, 2)	2	$\left\{\tau_5 = \dfrac{-2+\sqrt{7}\iota}{11}, \tau_6 = \dfrac{2+\sqrt{7}\iota}{11}\right\}$
(-10, 1)	4	$\left\{\tau_7 = \dfrac{-10+\sqrt{10}\iota}{22}, \quad \tau_8 = \dfrac{-1+\sqrt{10}\iota}{11}, \quad \tau_9 = \dfrac{1+\sqrt{10}\iota}{11}, \quad \tau_{10} = \dfrac{10+\sqrt{10}\iota}{22}\right\}$
(-11, 1)	1	$\left\{\tau_{11} = \dfrac{-11+\sqrt{11}\iota}{22} \sim \dfrac{11+\sqrt{11}\iota}{22}\right\}$
(-11, 2)	3	$\left\{\tau_{12} = \dfrac{-11+\sqrt{11}\iota}{33}, \tau_{13} = \dfrac{\sqrt{11}\iota}{11}, \tau_{14} = \dfrac{11+\sqrt{11}\iota}{33}\right\}$
(-19, 1)	2	$\left\{\tau_{15} = \dfrac{-5+\sqrt{19}\iota}{22}, \tau_{16} = \dfrac{5+\sqrt{19}\iota}{22}\right\}$
(-35, 1)	4	$\left\{\tau_{17} = \dfrac{-19+\sqrt{35}\iota}{66}, \quad \tau_{18} = \dfrac{-3+\sqrt{35}\iota}{22}, \quad \tau_{19} = \dfrac{3+\sqrt{35}\iota}{22}, \quad \tau_{20} = \dfrac{19+\sqrt{35}\iota}{66}\right\}$
(-43, 1)	2	$\left\{\tau_{21} = \dfrac{-1+\sqrt{43}\iota}{22}, \tau_{22} = \dfrac{1+\sqrt{43}\iota}{22}\right\}$

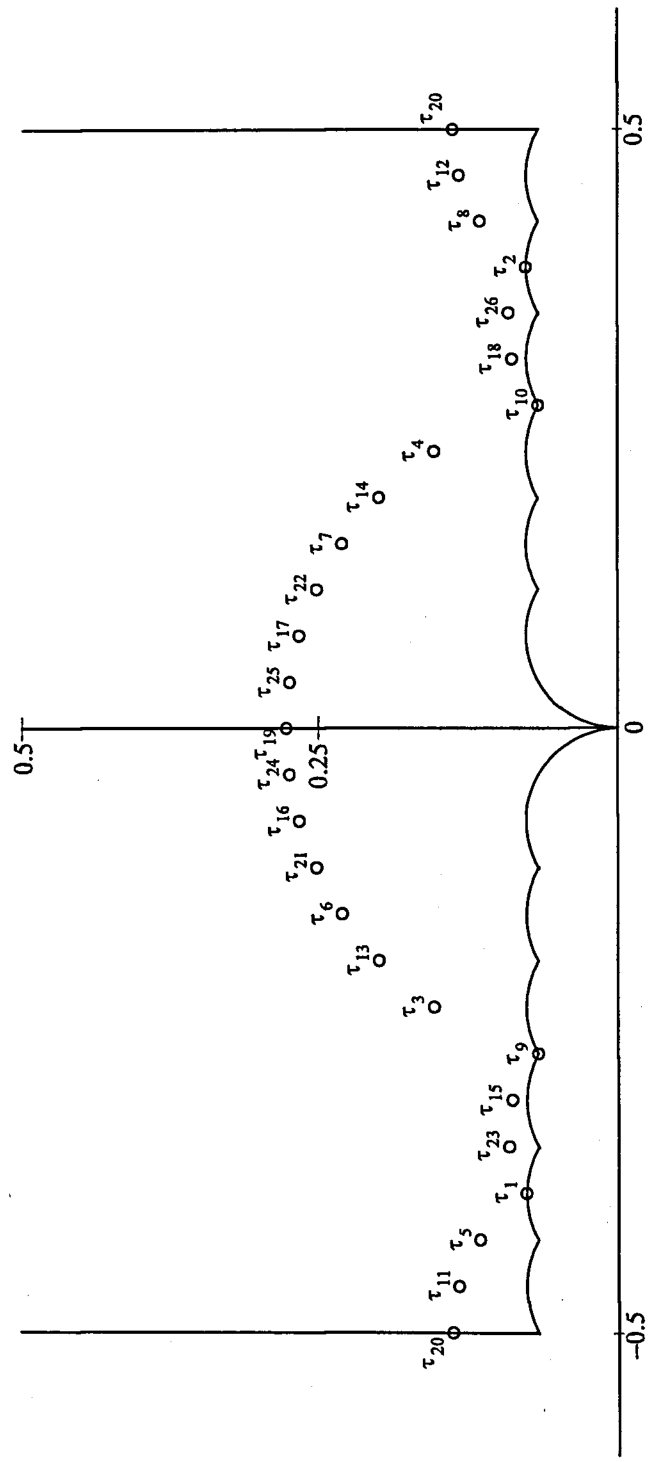

Figura 9.4: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en un domini fonamental de $X(1,13)$.

Taula 9.8 *Els ordres quadràtics i els punts de multiplicació complexa especials de* $X(1,13)$.

(d,m)	n	$\mathrm{CM}(1,13,d,m)$
(-1, 1)	2	$\left\{\tau_1 = \frac{-5+\iota}{13}, \tau_2 = \frac{5+\iota}{13}\right\}$
(-1, 2)	2	$\left\{\tau_3 = \frac{-3+2\iota}{13}, \tau_4 = \frac{3+2\iota}{13}\right\}$
(-1, 3)	4	$\left\{\tau_5 = \frac{-11+3\iota}{26}, \tau_6 = \frac{-2+3\iota}{13}, \tau_7 = \frac{2+3\iota}{13}, \tau_8 = \frac{11+3\iota}{26}\right\}$
(-3, 1)	2	$\left\{\tau_9 = \frac{-7+\sqrt{3}\iota}{26}, \tau_{10} = \frac{7+\sqrt{3}\iota}{26}\right\}$
(-3, 2)	2	$\left\{\tau_{11} = \frac{-6+\sqrt{3}\iota}{13}, \tau_{12} = \frac{6+\sqrt{3}\iota}{13}\right\}$
(-3, 3)	2	$\left\{\tau_{13} = \frac{-5+3\sqrt{3}\iota}{26}, \tau_{14} = \frac{5+3\sqrt{3}\iota}{26}\right\}$
(-3, 4)	4	$\left\{\tau_{15} = \frac{-12+2\sqrt{3}\iota}{39}, \tau_{16} = \frac{-1+2\sqrt{3}\iota}{13}, \tau_{17} = \frac{1+2\sqrt{3}\iota}{13}, \tau_{18} = \frac{12+2\sqrt{3}\iota}{39}\right\}$
(-13, 1)	2	$\left\{\tau_{19} = \frac{\sqrt{13}\iota}{13}, \tau_{20} = \frac{-13+\sqrt{13}\iota}{26} \sim \frac{13+\sqrt{13}\iota}{26}\right\}$
(-43, 1)	2	$\left\{\tau_{21} = \frac{-3+\sqrt{43}\iota}{26}, \tau_{22} = \frac{3+\sqrt{43}\iota}{26}\right\}$
(-51, 1)	4	$\left\{\tau_{23} = \frac{-27+\sqrt{51}\iota}{78}, \tau_{24} = \frac{-1+\sqrt{51}\iota}{26}, \tau_{25} = \frac{1+\sqrt{51}\iota}{26}, \tau_{26} = \frac{27+\sqrt{51}\iota}{78}\right\}$

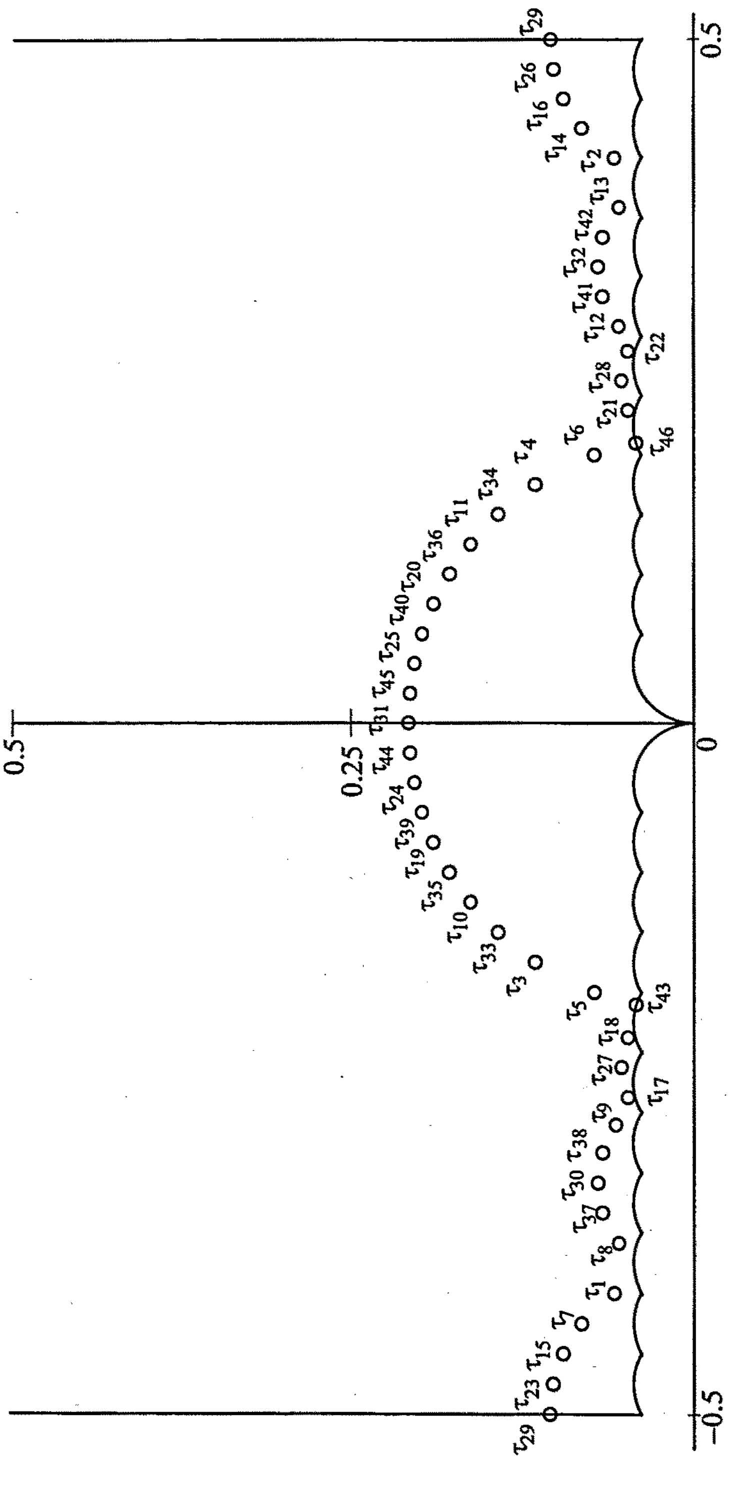

Figura 9.5: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en un domini fonamental de $X(1,23)$.

Taula 9.9 *Els ordres quadràtics i els punts de multiplicació complexa especials de* $X(1,23)$.

(d,m)	n	$\mathrm{CM}(1,23,d,m)$
(-7, 1)	2	$\left\{\tau_1=\frac{-19+\sqrt{7}\iota}{46},\ \tau_2=\frac{19+\sqrt{7}\iota}{46}\right\}$
(-7, 2)	2	$\left\{\tau_3=\frac{-4+\sqrt{7}\iota}{23},\ \tau_4=\frac{4+\sqrt{7}\iota}{23}\right\}$
(-11, 1)	2	$\left\{\tau_5=\frac{-9+\sqrt{11}\iota}{46},\ \tau_6=\frac{9+\sqrt{11}\iota}{46}\right\}$
(-14, 1)	8	$\left\{\tau_7=\frac{-20+\sqrt{14}\iota}{46},\ \tau_8=\frac{-26+\sqrt{14}\iota}{69},\ \tau_9=\frac{-20+\sqrt{14}\iota}{69},\ \tau_{10}=\frac{-3+\sqrt{14}\iota}{23},\right.$ $\left.\tau_{11}=\frac{3+\sqrt{14}\iota}{23},\ \tau_{12}=\frac{20+\sqrt{14}\iota}{69},\ \tau_{13}=\frac{26+\sqrt{14}\iota}{69},\ \tau_{14}=\frac{20+\sqrt{14}\iota}{46}\right\}$
(-19, 1)	2	$\left\{\tau_{15}=\frac{-21+\sqrt{19}\iota}{46},\ \tau_{16}=\frac{21+\sqrt{19}\iota}{46}\right\}$
(-19, 2)	6	$\left\{\tau_{17}=\frac{-25+\sqrt{19}\iota}{92},\ \tau_{18}=\frac{-21+\sqrt{19}\iota}{92},\ \tau_{19}=\frac{-2+\sqrt{19}\iota}{23},\right.$ $\left.\tau_{20}=\frac{2+\sqrt{19}\iota}{23},\ \tau_{21}=\frac{21+\sqrt{19}\iota}{92},\ \tau_{22}=\frac{25+\sqrt{19}\iota}{92}\right\}$
(-22, 1)	4	$\left\{\tau_{23}=\frac{-22+\sqrt{22}\iota}{46},\ \tau_{24}=\frac{-1+\sqrt{22}\iota}{23},\ \tau_{25}=\frac{1+\sqrt{22}\iota}{23},\ \tau_{26}=\frac{22+\sqrt{22}\iota}{46}\right\}$
(-23, 1)	3	$\left\{\tau_{27}=\frac{-23+\sqrt{23}\iota}{92},\ \tau_{28}=\frac{23+\sqrt{23}\iota}{92},\ \tau_{29}=\frac{-23+\sqrt{23}\iota}{46}\sim\frac{23+\sqrt{23}\iota}{46}\right\}$
(-23, 2)	3	$\left\{\tau_{30}=\frac{-23+\sqrt{23}\iota}{69},\ \tau_{31}=\frac{\sqrt{23}\iota}{23},\ \tau_{32}=\frac{23+\sqrt{23}\iota}{69}\right\}$
(-43, 1)	2	$\left\{\tau_{33}=\frac{-7+\sqrt{43}\iota}{46},\ \tau_{34}=\frac{7+\sqrt{43}\iota}{46}\right\}$
(-67, 1)	2	$\left\{\tau_{35}=\frac{-5+\sqrt{67}\iota}{46},\ \tau_{36}=\frac{5+\sqrt{67}\iota}{46}\right\}$
(-83, 1)	6	$\left\{\tau_{37}=\frac{-49+\sqrt{83}\iota}{138},\ \tau_{38}=\frac{-43+\sqrt{83}\iota}{138},\ \tau_{39}=\frac{-3+\sqrt{83}\iota}{46},\right.$ $\left.\tau_{40}=\frac{3+\sqrt{83}\iota}{46},\ \tau_{41}=\frac{43+\sqrt{83}\iota}{138},\ \tau_{42}=\frac{49+\sqrt{83}\iota}{138}\right\}$
(-91, 1)	4	$\left\{\tau_{43}=\frac{-47+\sqrt{91}\iota}{230},\ \tau_{44}=\frac{-1+\sqrt{91}\iota}{46},\ \tau_{45}=\frac{1+\sqrt{91}\iota}{46},\ \tau_{46}=\frac{47+\sqrt{91}\iota}{230}\right\}$

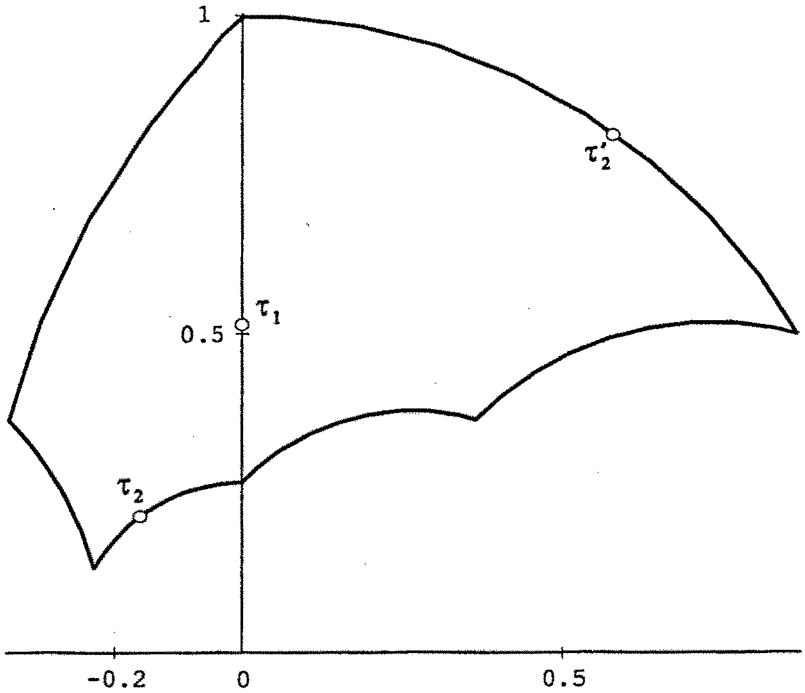

Figura 9.6: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en el domini fonamental de $X(6,1)$ fixat a 8.3.1.

Taula 9.10 *L'únic ordre quadràtic i els punts de multiplicació complexa especials de* $X(6,1)$ *en el domini fonamental fixat a* 8.3.1.

(d,m)	n	CM$(6,1,d,m)$
(-6,1)	2	$\left\{\tau_1 = \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\iota}{2},\ \tau_2 = \dfrac{3-2\sqrt{3}+(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})\iota}{3} \sim \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}\iota}{3}\right\}$

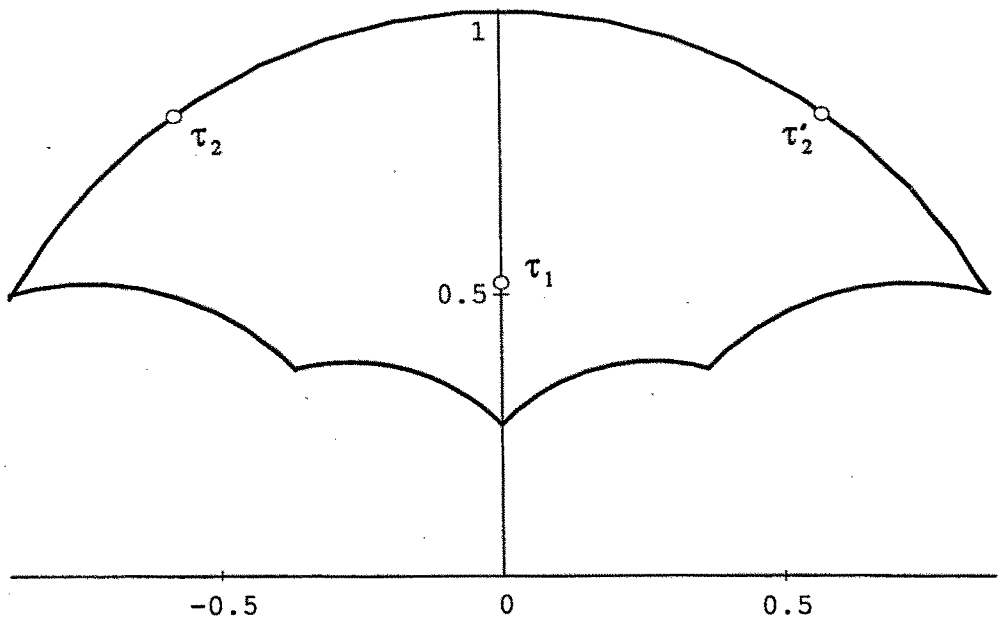

Figura 9.7: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en el domini fonamental de $X(6,1)$ fixat a 8.3.3.

Taula 9.11 *L'únic ordre quadràtic i els punts de multiplicació complexa especials de* $X(6,1)$ *en el domini fonamental fixat a* 8.3.3.

(d,m)	n	$\mathrm{CM}(6,1,d,m)$
(-6,1)	2	$\left\{\tau_1 = \dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})\iota}{2},\ \tau_2 = \dfrac{-\sqrt{3}+\sqrt{6}\iota}{3} \sim \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{6}\iota}{3}\right\}$

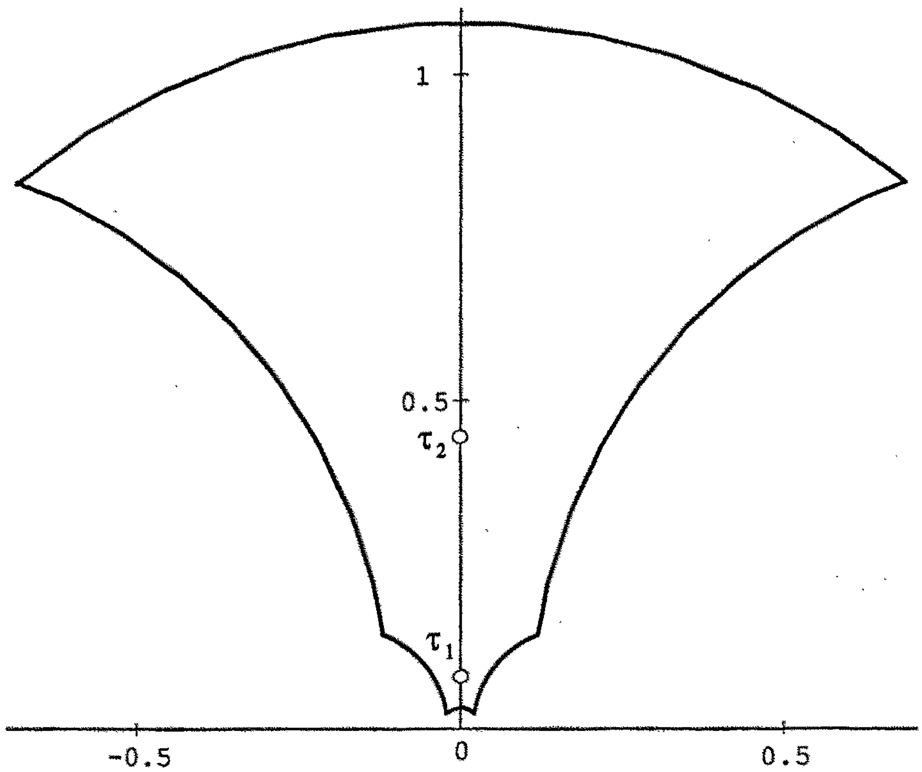

Figura 9.8: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en un domini fonamental de $X(10,1)$.

Taula 9.12 *L'únic ordre quadràtic i els punts de multiplicació complexa especials de* $X(10,1)$.

(d,m)	n	$\mathrm{CM}(10,1,d,m)$
(-10,1)	2	$\left\{\tau_1 = \dfrac{(3\sqrt{5}-2\sqrt{10})\iota}{5}, \tau_2 = \dfrac{\sqrt{5}\iota}{5}\right\}$

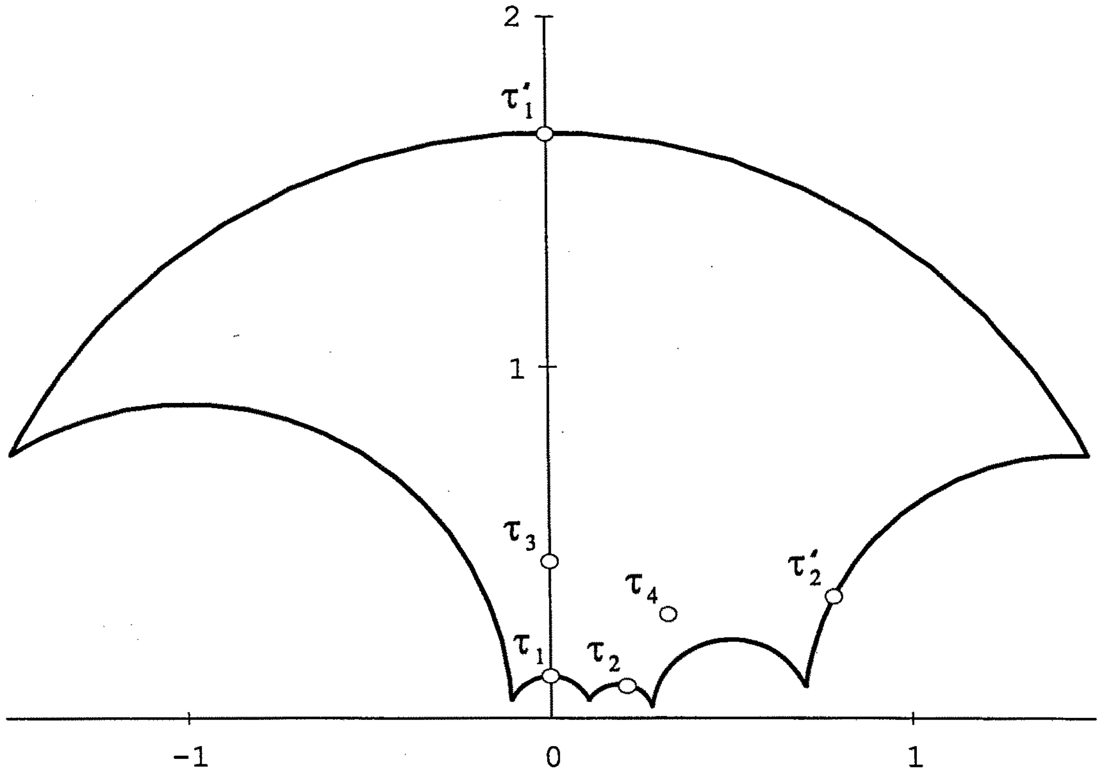

Figura 9.9: Representació dels punts de multiplicació complexa especials en un domini fonamental de $X(15,1)$.

Taula 9.13 *Els ordres quadràtics i els punts de multiplicació complexa especials de* $X(15,1)$.

(d,m)	n	$\mathrm{CM}(15,1,d,m)$
(-15,1)	2	$\left\{\tau_1 = \frac{(2\sqrt{5}-\sqrt{15})\iota}{5} \sim \frac{(2\sqrt{5}+\sqrt{15})\iota}{5},\ \tau_2 = \frac{15-5\sqrt{3}+(3\sqrt{5}-\sqrt{15})\iota}{30} \sim \frac{15+5\sqrt{3}+(3\sqrt{5}+\sqrt{15})\iota}{30}\right\}$
(-15,2)'	2	$\left\{\tau_3 = \frac{\sqrt{5}\iota}{5},\ \tau_4 = \frac{5+2\sqrt{5}\iota}{15}\right\}$

Capítol 10

El paquet `Poincare`

El paquet `Poincare` l'hem anat construint en simbiosi amb els resultats presentats en aquest treball. D'una banda, ha estat al servei de l'evolució dels resultats, donant suport per a realitzar els càlculs i comprovar experimentalment resultats sospitats. D'altra banda, s'ha enriquit constantment amb els resultats teòrics obtinguts, la qual cosa ha permès anar implementant nous algoritmes. És per això que no es pot deslligar de la redacció de cada part del treball, i en cada capítol hem comentat les instruccions relatives als conceptes i resultats del mateix capítol. Ara bé, tot i així, constitueix globalment una llibreria amb prou pes per si mateixa. Així, de manera independent al treball, pensem que és una bona eina per a l'aritmètica dels ordres quaterniònics i la uniformització hiperbòlica de les corbes de Shimura, ja que permet manipular quaternions, ordres quaterniònics, formes quadràtiques, immersions d'ordres, punts de corbes de Shimura, etc. En aquest sentit, en aquest capítol, precisem les característiques tècniques globals del paquet `Poincare`; donem un índex complet de les instruccions programades, per a facilitar-ne l'ús, i mostrem la sintaxi d'algunes de les seves instruccions.

10.1 Característiques principals

El paquet s'ha implementat sobre *Maple V Release 4.00a.* Conté unes 200 instruccions programades, referents a la manipulació d'àlgebres de quaternions i ordres quaterniònics, formes quadràtiques, constants i punts de corbes de Shimura, immersions, punts de multiplicació complexa, etc.

Per a utilitzar el paquet, cal gravar el fitxer `Poincare.m` en el directori */Ma-*

pleV4/Lib/. Les instruccions del paquet s'utilitzen seguint la sintaxi habitual del Maple; així, cal carregar prèviament tota la llibreria, de la manera següent:

```
> with(Poincare);
```

Tot i que en *Maple V* també es pot utilitzar una instrucció indicant la llibreria on està definida (`Poincare[instrucció]`(*arguments*);), recomanem de no ferho, ja que el paquet conté una rutina d'inicialització que evita conflictes de variables en l'ús de les àlgebres de quaternions, en referència amb les variables protegides, que s'executa automàticament en carregar la llibreria.

En el disseny del paquet hem utilitzat instruccions bàsiques del *Maple V* i també de les llibreries estàndard `linalg`, `numtheory` i `geometry`. Destaquem d'aquesta última el fet que defineix com a objectes els punts, les rectes i els cercles, i facilita la realització d'alguns càlculs amb aquests. Tot i així, no conté instruccions específiques referents a la geometria hiperbòlica. Aquests paquets no cal carregar-los explícitament, però han de ser al directori de llibreries.

Seguint les notacions estàndard, cf. capítol 1, les variables i, j, k tenen un significat especial en les àlgebres de quaternions. Per a evitar conflictes, aquestes variables estan protegides, de manera que no se'ls pot assignar cap valor. Els paràmetres a i b també tenen un significat especial, i també estan protegits. Ara bé, aquests valors sí que han de ser assignats per a fixar una àlgebra de quaternions; per a tal fi, cal utilitzar la instrucció `defQuatAlg`. Per seguretat, en carregar el paquet `Poincare`, una rutina d'inicialització esborra els valors d'aquests paràmetres, si en tenien prèviament algun d'assignat.

Un quaternió ω és una combinació lineal de coeficients a $\mathbb{Q}$ de les variables i, j, k. Un ordre quaterniònic $\mathcal{O}$ es determina per una llista de quatre quaternions, $[v_1, v_2, v_3, v_4]$, de manera que $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Hem programat una instrucció per a comprovar que efectivament la llista defineix un ordre, `isOrder`. La majoria d'instruccions relatives als ordres quaterniònics incorporen un argument opcional, `true`, que executa aquesta instrucció. Aquesta comprovació requereix, evidentment, que l'àlgebra de quaternions hagi estat fixada donant valors numèrics als paràmetres a i b (amb la instrucció `defQuatAlg`).

Donada la diversitat d'àmbits d'aplicació del paquet, hem escollit els noms de les instruccions de manera que mostrin el tipus d'objectes que hi intervenen o l'àmbit en el qual s'inclouen. Així, els noms de les instruccions incorporen: `H`, si es refereixen a àlgebres de quaternions; `F`, si es refereixen als cossos quadràtics; `Or`, si hi intervenen ordres; `f`, per a les formes quadràtiques; `M`, si fan referència a matrius; `X`, per a la corba de Shimura; `X1`, per a la corba modular, que correspon a fixar $D = 1$; `Hyp`, si pertanyen a l'àmbit de la geometria hiperbòlica, i en particular `L`, `Pol` o bé `S`, segons si es refereixen a una recta, un polígon o una semicorona, respectivament; `Hom` en referència amb homografia; `IC`, per als cercles d'isometria. Hem reservat les lletres `A` i `B` per a denotar les instruccions específiques per als casos poc ramificats de tipus A i de tipus B, respectivament. Afegim `q` al davant de les instruccions que tenen un significat en altres contextos, com ara la norma i la traça, per a remarcar la seva especificitat en relació amb els quaternions. L'ús de majúscules en l'interior d'un nom facilita la identificació de les parts del nom que corresponen a mots abreviats. De totes maneres, hem intentat no abusar de les majúscules, i els adjectius els escrivim, majoritàriament, en minúscula.

Observem que els missatges que acompanyen les dades de sortida de les instruccions programades han estat redactats en català. Això permet distingir-los dels missatges enviats directament pel *Maple V*, que són en anglès.

10.2 Descripció de les instruccions

`A2f(`M`)`

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f.
Dóna la matriu parella $A_2(f)$ associada a f.

`adH3(`a, b`)`

$a, b \in \mathbb{Z}$, que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna la matriu de la forma quadràtica adjunta de la forma nòrmica ternària associada a l'àlgebra H.

`adH4(`a, b`)`

$a, b \in \mathbb{Z}$, que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna la matriu de la forma quadràtica adjunta de la forma nòrmica quaternària associada a l'àlgebra H.

`adf(`M`)`

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f.
Dóna la matriu $A(\mathrm{ad}(f))$ de la forma quadràtica adjunta de f.

`angHyp(`z_1, z_2, z_3`)`

$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$.

Dóna el valor (possiblement no exacte) de l'angle hiperbòlic determinat pels punts ordenats z_1, z_2, z_3 expressat en funció de π, a partir de les rectes hiperbòliques determinades pels punts. L'aproximació es deu a la conversió del valor decimal de l'angle, en 10 dígits, en un múltiple racional de π.

`angHype`(z_1, z_2, z_3)
$z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$.
Dóna el valor de l'angle hiperbòlic determinat pels punts ordenats z_1, z_2, z_3, a partir de les rectes hiperbòliques determinades pels punts.

`belongNOr`(l, σ)
l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$; σ un quaternió.
Funció lògica. Respon *true* si $\sigma \in \mathrm{Nor}(\mathcal{O})$ i *false* en cas contrari. Argument opcional `true`.

`bfH`(ω)
ω quaternió.
Dóna la matriu $A(f_{\Phi(\omega)})$ de la forma quadràtica binària associada al quaternió ω.

`bfHom`(a, b, c, d)
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, que defineixen l'homografia $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.
Dóna la matriu $A(f_\gamma)$ de la forma quadràtica binària associada a l'homografia γ.

`bfHomM`(γ)
$\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.
Dóna la matriu $A(f_\gamma)$ de la forma quadràtica binària associada a l'homografia γ.

`bfOr`(l)
l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna la matriu de la forma quadràtica binària associada a un element genèric de l'ordre $\mathcal{O}$, respecte de la base l. Argument opcional `true`.

`bnfF`(d)
$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
Dóna la matriu de la forma quadràtica nòrmica binària associada al cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, respecte de la base $\{1, \sqrt{d}\}$.

`bnfLatF`(d, x, y)
$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $x, y \in \mathbb{Q}$.

Dóna la matriu de la forma quadràtica nòrmica associada a la xarxa de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de $\mathbb{Z}$-base $\{1, x + y\sqrt{d}\}$.

`bnfOrF`(d, m)

$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.

Dóna la matriu de la forma quadràtica nòrmica associada a l'ordre quadràtic de $\mathbb{Q}(\sqrt{d'})$ de conductor m, respecte de la base $\{1, mw\}$, on $w = \sqrt{d'}$ si $d' \equiv 2, 3 \mod 4$ i $w = \frac{1+\sqrt{d'}}{2}$ si $d' \equiv 1 \mod 4$; d' és la part de d lliure de quadrats.

`canH`(p, q)

p, q nombres primers.

Dóna una llista $[a, b]$, on $a, b \in \mathbb{Z}$ són tals que $\left(\frac{p,q}{\mathbb{Q}}\right) \simeq \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$, seguint el teorema 1.1.29.

`canHdisc`(p, q)

p, q nombres primers, $p \neq q$.

Dóna una llista $[a, b]$, on $a, b \in \mathbb{Z}$ són tals que la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$ té discriminant $D_H = pq$, seguint el teorema 1.1.31.

`cenIC`(γ)

$\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Dóna el centre del cercle d'isometria associat a l'homografia γ.

`cirInv`(o, r)

$o \in \mathbb{C}$; $r \in \mathbb{R}$.

Dóna la funció inversió respecte del cercle de centre o i radi r, en el pla complex.

`cme`(D, N)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$.

Dóna el nombre de punts de multiplicació complexa especials de la corba de Shimura $X(D, N)$.

`cmeM`(D, N, R)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$; $R \in \mathbb{Z}^+$.

Dóna el nombre de punts de multiplicació complexa especials modificats de valor R de la corba de Shimura $X(D, N)$.

`CMEMOrF`(D, N, R)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(D, N) = 1$; $R \in \mathbb{Z}^+$.
Dóna la llista completa de parelles (d, m) tals que els ordres quadràtics $\Lambda(d, m) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m són de multiplicació complexa especial modificats de valor R per a la corba de Shimura $X(D, N)$.

`CMEOrF`(D, N)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna la llista completa de parelles (d, m) tals que els ordres quadràtics $\Lambda(d, m) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m són de multiplicació complexa especial per a la corba de Shimura $X(D, N)$.

`CMEOrFhn`(D, N)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna la llista completa de ternes $[(d, m), h(d, m), \text{cm}(D, N, d, m)]$ tals que els ordres quadràtics $\Lambda(d, m) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m són de multiplicació complexa especial per a la corba de Shimura $X(D, N)$, on $h(d, m)$ denota el nombre de classes d'ideals de ordre $\Lambda(d, m)$, i $\text{cm}(D, N, d, m)$ el nombre de punts de multiplicació complexa de $X(D, N)$ per l'ordre $\Lambda(d, m)$.

`CMEOrFn`(D, N)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna la llista completa $[(d, m), \text{cm}(D, N, d, m)]$ tals que els ordres quadràtics $\Lambda(d, m) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m són de multiplicació complexa especial per a la corba de Shimura $X(D, N)$, on $\text{cm}(D, N, d, m)$ denota el nombre de punts de multiplicació complexa de $X(D, N)$ per l'ordre $\Lambda(d, m)$.

`cmOrF`(D, N, d, m)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.
Dóna el nombre de punts de $X(D, N)$ de multiplicació complexa per l'ordre quadràtic $\Lambda(d, m)$.

`CMP`(l, d, m, r)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$; $r > 0$ paràmetre opcional (per defecte val 5; es

recomana $r \leq 10$).
Dóna una llista de punts de la corba de Shimura determinada per l'ordre $\mathcal{O}$, suposant que sigui un ordre d'Eichler d'una àlgebra de quaternions indefinida, de multiplicació complexa per l'ordre quadràtic $\Lambda(d, m) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de conductor m, a partir de solucions (x_1, x_2, x_3) de l'equació $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O},3}(X_1, X_2, X_3) = -D_\Lambda$, $|x_i| < r$.

`ConjOr`(l, σ)
l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$; σ quaternió invertible.
Dóna una llista de 4 quaternions $[v_1, v_2, v_3, v_4]$, $\mathbb{Z}$-base de l'ordre obtingut en conjugar l'ordre $\mathcal{O}$ per l'element σ; és a dir, tal que $\sigma^{-1}\mathcal{O}\sigma = \mathbb{Z}[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Argument opcional `true`.

`contf`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$.
Dóna el contingut de la forma quadràtica f.

`coorOr`(ω, l)
ω un quaternió; l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna les coordenades de ω respecte de l. Argument opcional `true`.

`cyclesX1`(p)
p nombre primer.
Dóna els cicles d'un domini fonamental de la corba $X_0(p)$.

`d1f`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, de determinant quadrat.
Dóna el valor $d_1(f)$, associat a la forma quadràtica f.

`d1gf`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb valor absolut del determinant quadrat.
Dóna el valor $d_1^+(f)$, associat a la forma quadràtica f.

`d2f`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, de determinant quadrat.
Dóna el valor $d_2(f)$, associat a la forma quadràtica f.

`d2gf`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb valor absolut del determinant quadrat.
Dóna el valor $d_2^+(f)$, associat a la forma quadràtica f.

`defHypL`(z_1, z_2)

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_1), \mathrm{Im}(z_2) \geq 0$.

Defineix la recta hiperbòlica que passa pels dos punts z_1, z_2, com a objecte geomètric.

`defHypPol`(l)

$l = [z_1, \ldots, z_n]$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$.

Defineix el polígon hiperbòlic donat pels n punts de l, com a objecte geomètric.

`defIC`(γ)

$\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

Defineix el cercle d'isometria associat a l'homografia γ, com a objecte geomètric.

`defQuatAlg`(a, b)

$a, b \in \mathbb{Q}^*$.

Fixa la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $\left(\dfrac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$.

`defsS`(r_1, r_2)

$r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$.

Defineix el cercles de centre 0 i radi r_1, r_2, com a objectes geomètrics.

`denOr`(l)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.

Dóna el denominador de l'ordre $\mathcal{O}$, $m_{\mathcal{O}}$.

`det1f`(M)

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f.

Dóna el determinant de la forma quadràtica f, $\det_1(f)$.

`det1nfH`(a,b)

$a, b \in \mathbb{Z}$, que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\dfrac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$.

Dóna el determinant de les formes nòrmiques quaternària i ternària, associades a l'àlgebra H, $\det_1(n_{H,4}) = \det_1(n_{H,3})$.

`det2f`(M)

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f.

Dóna el determinant parell $\det_2(f)$ de la forma quadràtica f.

`diagf`(M)

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f.

Dóna la matriu d'una forma quadràtica diagonal $\mathbb{Q}$-equivalent a f.

`discf(`M`)`

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$.
Dóna el $\mathbb{Q}$-discriminant $\mathrm{disc}_{\mathbb{Q}}(f)$ de la forma quadràtica f.

`DiscH(`a,b`)`

$a, b \in \mathbb{Z}$, diferents de 0.
Dóna el discriminant D_H de la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.

`DiscOr(`l`)`

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna el discriminant de l'ordre $\mathcal{O}$, $D_{\mathcal{O}}$. Argument opcional `true`. Necessita que s'hagin assignat valors als paràmetres a i b amb la instrucció `defQuatAlg`.

`DiscOrg(`l`)`

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna el discriminant $D_{\mathcal{O}}$ de l'ordre $\mathcal{O}$. La diferència amb `DiscOr` és que admet paràmetres.

`discpf(`M`)`

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$.
Dóna el discriminant a $\mathbb{Q}_p$ $\mathrm{disc}_{\mathbb{Q}_p}(f)$ de la forma quadràtica f.

`Disthip(`z_1, z_2`)`

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_1), \mathrm{Im}(z_2) \geq 0$.
Dóna la distància hiperbòlica $\delta(z_1, z_2)$ entre els punts z_1, z_2.

`e1X1(`p`)`

p nombre primer.
Dóna el nombre $n_1(1,p)$ de cicles accidentals del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`E2HomP(`l`)`

l_1 llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D,N)$; $D \in \mathbb{N}$ producte d'un nombre parell de primers diferents.
Dóna una llista d'homografies el·líptiques d'ordre 2 i els punts el·líptics corresponents de la corba de Shimura $X(D,N)$. El paràmetre opcional `r` permet controlar la profunditat de la recerca de representacions; per defecte val 5; és recomanable assignar-li valors ≤ 10.

`E2HomPRep(`l_1, l_2`)`

l_1 llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D,N)$; $D \in \mathbb{N}$

producte d'un nombre parell de primers diferents; $l_2 = [x_1, x_2, x_3] \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 4; \mathbb{Z})$; és a dir, $x_i \in \mathbb{Z}$ tals que $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}(x_1, x_2, x_3) = 4$. (Per exemple, un element de la llista obtinguda amb `FindRepE2`(l_1).) Dóna una homografia d'ordre 2 i el punt el·líptic corresponent de la corba de Shimura $X(D, N)$, en forma de llista.

`e2X`(D, N)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna el nombre $e_2(D, N)$ de cicles el·líptics d'ordre 2 de la corba de Shimura $X(D, N)$.

`e2X1`(p)

p nombre primer.
Dóna el nombre $e_2(1, p)$ de cicles el·líptics d'ordre 2 de la corba $X(1, p) = X_0(p)$.

`E3HomP`(l)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D, N)$; $D \in \mathbb{N}$ producte d'un nombre parell de primers diferents.
Dóna una llista d'homografies el·líptiques d'ordre 3 i els punts el·líptics corresponents de la corba de Shimura $X(D, N)$. El paràmetre opcional `r` permet controlar la profunditat de la recerca de representacions; per defecte val 5; és recomanable assignar-li valors ≤ 10.

`E3HomPRep`(l_1, l_2)

l_1 llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D, N)$; $D \in \mathbb{N}$ producte d'un nombre parell de primers diferents; $l_2 = [x_1, x_2, x_3] \in \mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 3; \mathbb{Z})$; és a dir, $x_i \in \mathbb{Z}$ tals que $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}(x_1, x_2, x_3) = 3$. (Per exemple, un element de la llista obtinguda amb `FindRepE2`(l_1).) Dóna una homografia d'ordre 3 i el punt el·líptic corresponent de la corba de Shimura $X(D, N)$, en forma de llista.

`e3X`(D, N)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna el nombre $e_3(D, N)$ de cicles el·líptics d'ordre 3 de la corba de Shimura $X(D, N)$.

`e3X1`(p)

p nombre primer.
Dóna el nombre $e_3(1, p)$ de cicles el·líptics d'ordre 3 de la corba $X(1, p) = X_0(p)$.

`einfX`(D, N)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna el nombre $e_\infty(D, N)$ de cicles parabòlics de la corba de Shimura $X(D, N)$.

`einfX1`(p)

p nombre primer.
Dóna el nombre $e_\infty(1, p)$ de cicles parabòlics de la corba $X(1, p) = X_0(p)$.

`embH`(ω)

ω quaternió.
Dóna la matriu $\Phi(\omega) \in \mathrm{M}(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a}))$, imatge de la immersió fixada a 1.1.25, suposant que $a > 0$. Necessita que s'hagin assignat valors als paràmetres a i b, amb la instrucció `defQuatAlg`.

`embHg`(ω)

ω quaternió.
Dóna la matriu $\Phi(\omega) \in \mathrm{M}(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a}))$, imatge de la immersió fixada a 1.1.25, sense comprovar si $a > 0$. No cal haver fixat prèviament els valors dels paràmetres a i b amb la instrucció `defQuatAlg`.

`embOr`(l)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna la matriu de $\mathrm{M}(2, \mathbb{Q}(\sqrt{a}))$ imatge d'un element genèric de l'ordre $\mathcal{O}$, per la immersió fixada a 1.1.25, si $a > 0$. Necessita que s'hagin assignat valors als paràmetres a i b amb la instrucció `defQuatAlg`. Argument opcional `true`.

`eqHypL`(z_1, z_2)

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$.
Dóna l'equació de la recta hiperbòlica que passa pels dos punts z_1, z_2.

`eqHypPol`(l)

$l = [z_1, \ldots, z_n]$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$.
Dóna les equacions de les rectes hiperbòliques que contenen les arestes del polígon hiperbòlic donat pels n punts de l.

`EqOr`(l_1, l_2)

l_1, l_2 llistes de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-bases d'uns ordres $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, resp.
Funció lògica. Retorna *true* si els dos ordres són iguals, i *False* en cas contrari. Arguments opcionals `true`.

`Euler(`n`)`

$n \in \mathbb{N}$.

Dóna la funció d'Euler $\varphi(n) := n\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p})$ de n.

`expf(`M`)`

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f.

Dóna l'expressió polinòmica de la forma quadràtica f.

`FindCond(`z_1, z_2`)`

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Dóna condicions sobre $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ per tal que $\gamma = \begin{pmatrix} x+y\sqrt{a} & z+t\sqrt{a} \\ b(z-t\sqrt{a}) & x-y\sqrt{a} \end{pmatrix}$ satisfaci $\gamma(z_1) = z_2$. Concretament, s'obté una forma binària que ha de representar el determinant de γ. S'aplica especialment quan a i b són els paràmetres que fixen una àlgebra de quaternions.

`FindRepf(`M, δ, r`)`

M matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, de 2,3 o bé 4 variables; $\delta \in \mathbb{Z}$; $r > 0$ argument opcional (per defecte val 5; es recomana $r \leq 10$).

Busca representacions de δ per la forma quadràtica f, amb $|x_i| \leq r$, per la forma nòrmica ternària de l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, on Λ és l'ordre de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

`FindRepOr(`l, d, m, r`)`

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$, $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$; $m \in \mathbb{N}$; $r > 0$ argument opcional (per defecte val 5; es recomana $r \leq 10$).

Busca representacions (x_1, x_2, x_3) de $-D_\Lambda$, amb $|x_i| \leq r$, per la forma nòrmica ternària de l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, on Λ és l'ordre de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

`FindRepOrE2(`l, r`)`

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D, N)$; $r > 0$ paràmetre opcional (per defecte val 5; es recomana $r \leq 10$).

Dóna una llista de representacions de $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 4; \mathbb{Z})$ menors que r; és a dir, una llista de tripletes x_1, x_2, x_3 que siguin solució de $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}(X_1, X_2, X_3) = 4$, amb $|x_i| < r$. A partir d'aquestes solucions podem determinar homografies i punts el·líptics d'ordre 2 de la corba de Shimura $X(D, N)$ utilitzant `E2HomPRep`, que implementa el resultat 8.1.10.

`FindRepOrE3(`l, r`)`

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}(D, N)$; $r > 0$

paràmetre opcional (per defecte val 5; es recomana $r \leq 10$).
Dóna una llista de representacions de $\mathcal{R}^*(n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}, 3; \mathbb{Z})$ menors que r; és a dir, una llista de tripletes x, y, z que siguin solució de $n_{\mathbb{Z}+2\mathcal{O}(D,N),3}(X, Y, Z) = 3$, amb $|x_i| < r$. A partir d'aquestes solucions podem determinar homografies i punts el·líptics d'ordre 3 de la corba de Shimura $X(D, N)$ utilitzant `E2HomPRep`, que implementa el resultat 8.1.10.

`fixPHom`(a, b, c, d)
a, b, c, d nombres reals, que defineixen $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.
Dóna la llista de punts fixos de γ continguts en $\mathcal{H} \cup \mathbb{R}$.

`fixPHomM`(γ)
$\gamma \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.
Dóna la llista de punts fixos de γ continguts en $\mathcal{H} \cup \mathbb{R}$.

`Fquat`(ω)
ω quaternió invertible.
Dóna l'enter d lliure de quadrats tal que ω prové d'una immersió de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ en H.

`fundDiscF`(d)
$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$.
Dóna el discriminant fonamental del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

`geneX1`(p)
p nombre primer.
Dóna una llista de generadors del grup $\Gamma_0(p)/\pm \mathrm{Id}$.

`genusX`(D, N)
$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna el gènere de la corba de Shimura $X(D, N)$, $g(D, N)$.

`genusX1()`
p nombre primer.
Dóna el gènere de la corba $X(1, p) = X_0(p)$, $g(1, p)$.

`HermiteOr`(l)
l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna la base d'Hermite de l'ordre $\mathcal{O}$.

`hF`(d)
$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$.

Dóna el nombre de classes d'ideals del cos $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, per als d que, lliurats de quadrats, siguin de valor absolut inferior a 100. En cas contrari, funciona com a paràmetre.

`Hilbert(`a, b, p`)`

a, b enters; $p \geq 2$ nombre primer.
Retorna el símbol de Hilbert $(a, b)_p$. Per a $p \neq 2$, utilitza la instrucció del símbol de Legendre `numtheory[L]`.

`Hnf3(`M`)`

M matriu d'una forma quadràtica ternària f de coeficients enters, de determinant quadrat, $\det_1(f) = \lambda^2$.
Dóna una parella d'enters (a, b) tals que la forma nòrmica ternària associada a l'àlgebra de quaternions $H = \left(\dfrac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ és $\mathbb{Q}$-equivalent a f.

`Hnf4(`M`)`

M matriu d'una forma quadràtica quaternària f de coeficients enters, no definida negativa, de determinant quadrat, $\det_1(f) = \lambda^2$.
Dóna una parella d'enters (a, b) tals que la forma nòrmica quaternària associada a l'àlgebra de quaternions $H = \left(\dfrac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ és $\mathbb{Q}$-equivalent a f.

`Hom(`a, b, c, d`)`

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$, que defineixen una homografia $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.
Dóna l'homografia γ com a funció.

`HomM(`γ`)`

$\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.
Dóna l'homografia γ com a funció.

`hOrF(`d, m`)`

$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.
Dóna el nombre de classes d'ideals de l'ordre quadràtic de conductor m del cos $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

`hqqOr(`D, N, d, m`)`

$D \in \mathbb{N}$ producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.
Dóna el nombre de classes d'immersions optimals de l'ordre quadràtic de conductor m del cos $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ en un ordre d'Eichler de nivell N d'una àlgebra de quaternions de discriminant D, mòdul $\mathcal{O}^*$.

`hqqOrp`(D, N, d, m, p)

$D \in \mathbb{N}$ producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$; p primer.
Dóna el nombre de classes d'immersions optimals locals de l'ordre quadràtic de conductor m del cos $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ localitzat en p, en un ordre d'Eichler de nivell N d'una àlgebra de quaternions de discriminant D localitzat en p, mòdul $\mathcal{O}_p^*$-equivalència.

`Htf3`(M)

M matriu d'una forma quadràtica ternària f de coeficients enters, de determinant $\det_1(f) = -\lambda^2$.
Dóna una parella d'enters (a, b) tals que la forma traça ternària associada a l'àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ és $\mathbb{Q}$-equivalent a f.

`Htf4`(M)

M matriu d'una forma quadràtica ternària f de coeficients enters, de determinant $\det_1(f) = -\lambda^2$.
Dóna una parella d'enters (a, b) tals que la forma traça quaternària associada a l'àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$ és $\mathbb{Q}$-equivalent a f.

`HWinvf`(M, p)

M, matriu d'una forma quadràtica f, de coeficients a $\mathbb{Z}$; p, primer.
Dóna l'invariant de Hasse-Witt de la forma quadràtica f a $\mathbb{Q}_p$.

`ImHRep`(l, d, m, l_1)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$; l_1 llista de tres enters que és una representació de $-D_\Lambda$, per la forma nòrmica ternària de l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, on Λ és l'ordre de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Dóna el quaternió $\varphi(\sqrt{d})$, on φ és la immersió de l'ordre quadràtic Λ en l'ordre quaterniònic $\mathcal{O}$ determinada per la representació l_1.

`ImMRep`(l, d, m, l_1)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$; l_1 llista de tres enters que és una representació de $-D_\Lambda$, per la forma nòrmica ternària de l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$, on Λ és l'ordre de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Dóna la matriu $\Phi(\varphi(\sqrt{d}))$, on φ és la immersió de l'ordre quadràtic Λ en l'ordre quaterniònic $\mathcal{O}$ determinada per la representació l_1.

`IncOr`(l_1, l_2)

l_1, l_2 llistes de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-bases d'uns ordres $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, resp.
Funció lògica. Retorna *true* si l'ordre definit per l_1 està inclòs en l'ordre definit per l_2, i retorna *False* en cas contrari. Arguments opcionals `true`.

`IndMaxOr`(l)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna l'índex de $\mathcal{O}$ en un ordre maximal qualsevol que el contingui. Argument opcional `true`.

`IndOr`(l_1, l_2)

l_1, l_2 llistes de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-bases d'uns ordres $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, resp.
Retorna l'índex de l'ordre $\mathcal{O}_1$ en l'ordre $\mathcal{O}_2$, comprovant prèviament que $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2$. Arguments opcionals `true`.

`IntConjOr`(l, σ)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna llista de 4 quaternions, base de l'ordre intersecció de $\mathcal{O}$ i l'ordre conjugat de $\mathcal{O}$ per σ. Argument opcional `true`. Notem que, si s'aplica a un ordre maximal, s'obté un ordre d'Eichler.

`IntOr`(l_1, l_2)

l_1, l_2 llistes de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-bases d'ordres $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$, resp.
Dóna llista de 4 quaternions, base de l'ordre intersecció de $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$. Arguments opcionals `true`. Notem que, si s'aplica a ordres maximals, s'obtenen ordres d'Eichler.

`isCMEMOrFg`(D, N, d, m, R)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$; $R \in \mathbb{Z}^+$.
Funció lògica. Respon *true* si la corba de Shimura $X(D, N)$ té punts de multiplicació complexa especials modificats de valor R per l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; respon *false* en cas contrari.

`isCMEOrF`(D, N, d, m)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, lliure de quadrats, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.
Funció lògica. Respon *true* si la corba de Shimura $X(D, N)$ té punts de multiplicació complexa especials per l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; respon *false* en cas contrari.

`isCMEOrFg`(D, N, d, m)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, no necessàriament lliure de quadrats, $\text{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.

Funció lògica. Respon *true* si la corba de Shimura $X(D, N)$ té punts de multiplicació complexa especials per l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; respon *false* en cas contrari.

`isCMOrF`(D, N, d, m)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, lliure de quadrats, $\text{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.

Funció lògica. Respon *true* si la corba de Shimura $X(D, N)$ té punts de multiplicació complexa per l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; respon *false* en cas contrari.

`isCMOrFg`(D, N, d, m)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers; $N \in \mathbb{N}$, no necessàriament lliure de quadrats, $\text{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.

Funció lògica. Respon *true* si la corba de Shimura $X(D, N)$ té punts de multiplicació complexa per l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; respon *false* en cas contrari.

`isDNrepOrF`(D, N, d, m)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\text{mcd}(D, N) = 1$; $d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$.

Funció lògica. Respon *true* si la forma nòrmica binària reduïda de l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ representa el valor DN; respon *false* en cas contrari.

`isRrepOrF`(d, m, R)

$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $m \in \mathbb{N}$; $R \in \mathbb{Z}^+$.

Funció lògica. Respon *true* si la forma nòrmica binària reduïda de l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ representa el valor R; respon *false* en cas contrari.

`isIsotf`(M, p)

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f, de coeficients a $\mathbb{Z}$; p, primer.

Funció lògica. Respon *true* si f és una forma $\mathbb{Q}_p$-isòtropa; respon *false* en cas contrari.

`isK1f`(M)

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f, de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb

determinant igual a un quadrat.
Funció lògica. Respon *true* si f és una K_1-forma i *false* en cas contrari.

`isK2f(`M`)`
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f, de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb determinant parell igual a un quadrat.
Funció lògica. Respon *true* si f és una K_2-forma i *false* en cas contrari.

`isK1gf(`M`)`
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f, de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb valor absolut del determinant igual a un quadrat.
Funció lògica. Respon *true* si f és una K_1^+-forma i *false* en cas contrari.

`isK2gf(`M`)`
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f, de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb valor absolut del determinant parell igual a un quadrat.
Funció lògica. Respon *true* si f és una K_2^+-forma i *false* en cas contrari.

`isMaxOrder(`l`)`
l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Funció lògica. Respon *true* si $\mathcal{O}$ és un ordre maximal i *false* en cas que no sigui ordre o que no sigui maximal. Amb l'argument opcional `true` dóna el motiu pel qual no és ordre maximal, si aquest és el cas.

`isnBasisOr(`l`)`
l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Funció lògica. Respon *true* si l és una base normalitzada de l'ordre $\mathcal{O}$ i *false* en cas contrari.

`isOrder(`l`)`
l llista de 4 quaternions.
Funció lògica. Respon *true* si la llista l defineix un ordre i respon *false* en cas contrari. Si es posa l'argument opcional `true` al final, escriu el motiu pel qual no és ordre, si aquest és el cas. Necessita que s'hagin assignat valors als paràmetres a i b amb la instrucció `defQuatAlg`.

`isPrimbfA(`p, N, ω`)`
$p \equiv 3 \mod 4$ nombre primer; $N \in \mathbb{N}$, $N|(p-1)/2$, lliure de quadrats; ω quaternió de $H_A(p)$.
Funció lògica. Respon *true* si la forma binària $f_{\Phi(\omega)}$ és $\mathcal{O}_A(2p, N)$-primitiva; respon *false* en cas contrari.

`isPrimbfB`(p,q,N,ω)

p,q primers, $q\equiv 1 \mod 4$ i $\left(\dfrac{p}{q}\right) = -1$; $N\in\mathbb{N}$ lliure de quadrats, tal que $\mathrm{mcd}(N,p)=1$ i $N|(q-1)/4$; ω quaternió de $H_B(p,q)$.
Funció lògica. Respon *true* si la forma binària $f_{\Phi(\omega)}$ és $\mathcal{O}_B(pq,N)$-primitiva; respon *false* en cas contrari.

`isPrimf`(M)

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f, de coeficients a $\mathbb{Z}$.
Funció lògica. Respon *true* si la forma quadràtica f és primitiva i *false* en cas contrari.

`isRrepOrF`(d,m,R)

$d\in\mathbb{Z}$, $d\neq k^2$ per a tot $k\in\mathbb{Z}$; $m\in\mathbb{N}$.
Funció lògica. Respon *true* si la forma nòrmica binària reduïda de l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ representa el valor R; respon *false* en cas contrari.

`kappa`(l,σ)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$; σ quaternió de $\mathrm{Nor}(\mathcal{O})$.
Dóna la matriu $\kappa(\sigma)\in\mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$, cf. 7.3.13.

`leq`(z_1,z_2)

$z_1,z_2\in\mathbb{C}$.
Funció lògica. Respon *true* si $\mathrm{Re}(z_1)\leq\mathrm{Re}(z_2)$.

`McbOr`(l_1,l_2)

l_1,l_2, llistes de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-bases d'uns ordres $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, resp.
Dóna la matriu de canvi de base de la base l_1 a la base l_2. Arguments opcionals `true`.

`Mcoor`(l)

l llista de quaternions.
Retorna una matriu que té per columnes les coordenades dels quaternions de la llista l respecte de la base $\{1,i,j,ij\}$.

`multHom`(a,b,c,d)

$a,b,c,d\in\mathbb{R}$, que defineixen una homografia $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.
Dóna el multiplicador de l'homografia γ.

`n1X1`(p)

p nombre primer.
Dóna el nombre $n_1(1,p)$ de vèrtexs accidentals del domini fonamental de la corba $X(1,p)=X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`n2X1`(p)

p nombre primer.

Dóna el nombre $n_2(1,p)$ de vèrtexs el·líptics d'ordre 2 del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`n3X1`(p)

p nombre primer.

Dóna el nombre $n_3(1,p)$ de vèrtexs el·líptics d'ordre 3 del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`nBasisOr`(l)

l llista $[1, v_2, v_3, v_4]$, v_i quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.

Dóna una base normalitzada de l'ordre $\mathcal{O}$. Argument opcional `true`.

`nBasisZ2Or`(l)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.

Dóna una llista, $\mathbb{Z}$-base normalitzada de l'ordre $\mathbb{Z} + 2\mathcal{O}$. Argument opcional `true`.

`neX`(D,N)

$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D,N) = 1$.

Dóna el nombre de vèrtexs $n_e(D,N)$ d'un domini fonamental de la corba de Shimura $X(D,N)$ que tingui tots els vèrtexs el·líptics, si aquest existeix.

`nfH3`(a,b)

$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\dfrac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.

Dóna la matriu $A(n_{H,3})$ de la forma nòrmica ternària associada a l'àlgebra H.

`nfH4`(a,b)

$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\dfrac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.

Dóna la matriu $A(n_{H,4})$ de la forma nòrmica quaternària associada a l'àlgebra H.

`nfOr3`(l)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.

Dóna la matriu $A(n_{\mathcal{O},3})$ de la forma nòrmica ternària associada a l'ordre $\mathcal{O}$ respecte de la base l si aquesta és normalitzada; en cas contrari, calcula una base normalitzada de $\mathcal{O}$ i la indica. Argument opcional `true`.

`nfOr4(`l`)`

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna la matriu $A(n_{\mathcal{O},3})$ de la forma nòrmica quaternària associada a l'ordre $\mathcal{O}$, respecte de la base l si aquesta és normalitzada; en cas contrari, calcula una base normalitzada de $\mathcal{O}$ i la indica. Argument opcional `true`.

`ninfX1(`p`)`

p nombre primer.
Dóna el nombre $n_\infty(1,p)$ de vèrtexs parabòlics del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`nivf(`M`)`

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f.
Dóna el nivell $\mathrm{N}(f)$ de la forma quadràtica f.

`nivnfH(`a,b`)`

$a,b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna el nivell de les formes nòrmiques quaternària i ternària, associades a l'àlgebra H, $\mathrm{N}(n_{H,4}) = \mathrm{N}(n_{H,3})$.

`NivOr(`l`)`

l llista de 4 quaternions, base d'un ordre d'Eichler $\mathcal{O}$.
Dóna el nivell de l'ordre $\mathcal{O}$, suposant que sigui un ordre d'Eichler, $\mathrm{N}_{\mathcal{O}}$. Argument opcional `true`.

`nvX1(`p`)`

p nombre primer.
Dóna el nombre total de vèrtexs $n(1,p)$ del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$ construït en el capítol 3.

`OrM(`M`)`

$M \in \mathrm{M}(4,\mathbb{Q})$.
Dóna la llista l de les columnes de M. Si M és la matriu de coordenades d'un ordre $\mathcal{O}$, l és una base de l'ordre $\mathcal{O}$; en aquest sentit, és la instrucció inversa de `Mcoor`. Amb l'argument opcional `true`, comprova si efectivament determina un ordre.

`pairEdX1(`p`)`

p nombre primer.
Dóna les parelles d'arestes que s'identifiquen, del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$ construït en el capítol 3.

`ParOr`(l)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna la paritat de l'ordre $\mathcal{O}$: *0* si l'ordre és parell i *1* si l'ordre és senar.
Argument opcional `true`.

`plotFDX1`(p)

p nombre primer.
Dóna la representació gràfica del domini fonamental de la corba modular $X(1,p) = X_0(p)$ construït en el capítol 3.

`plotHypL`(z_1, z_2)

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_1), \mathrm{Im}(z_2) \geq 0$.
Dóna la representació gràfica de la recta hiperbòlica que passa pels dos punts z_1, z_2.

`plotHypPol`(l)

l una llista $[z_1, \ldots, z_n]$, $z_i \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$.
Dóna la representació gràfica del polígon hiperbòlic definit pels punts de l.

`polH3`(a, b)

$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna la matriu $A(\mathrm{pol}(n_{H,3}))$ de la forma quadràtica polar de la forma nòrmica ternària de l'àlgebra H.

`polH4`(a, b)

$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna la matriu $A(\mathrm{pol}(n_{H,4}))$ de la forma quadràtica polar de la forma nòrmica quaternària de l'àlgebra H.

`polf`(M)

M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f.
Dóna la matriu $A(\mathrm{pol}(f))$ de la forma quadràtica polar de la forma f.

`prHom`(d, x, y, s)

$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$; $x, y \in \mathbb{Q}$ tals que $x + y\sqrt{d}$ és la unitat fonamental de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$; $s \in \mathbb{N}$.
Dóna la matriu corresponent a l'homotècia principal que prové de la unitat fonamental $(x + y\sqrt{d})^s$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

`Psip`(n, p)
$n \in \mathbb{N}$, p primer.
Dóna el valor de la funció aritmètica $\psi_p(n) = p^{v_p(n)}(1 + \frac{1}{p})$.

`qbar`(ω)
ω quaternió.
Dóna el conjugat $\overline{\omega}$ de ω.

`qcoeffs`(ω)
ω quaternió.
Dóna una llista formada pels coeficients del quaternió ω; és a dir, una llista amb les coordenades de ω respecte de la base $\{1, i, j, ij\}$.

`qconj`(ω, σ)
ω quaternió, σ quaternió invertible.
Dóna el conjugat de ω per σ; és a dir, $\sigma^{-1}\omega\sigma$.

`qinv`(ω)
ω quaternió invertible.
Dóna l'invers ω^{-1} de ω.

`qmul`(ω_1, ω_2)
ω_1, ω_2 quaternions.
Dóna el producte dels dos quaternions, $\omega_1 \cdot \omega_2$. Notem que el producte també es pot indicar amb el símbol $\&q$: $\omega_1 \&q \omega_2$ dóna també $\omega_1 \cdot \omega_2$.

`qnorm`(ω)
ω quaternió.
Dóna la norma $\mathrm{n}(\omega)$ de ω.

`qtrace`(ω)
ω quaternió.
Dóna la traça $\mathrm{tr}(\omega)$ de ω.

`quadOr`(l, μ)
l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$, $\mu \in \mathbb{Z}$.
Dóna l'expressió $n^{(\mu)}_{\mathcal{O},3}(X, Y, Z)$, tal que els punts enters de la quàdrica $n^{(\mu)}_{\mathcal{O},3}(X, Y, Z) = \delta$ corresponen als quaternions de l'ordre $\mathcal{O}$ de norma δ i traça μ. Utilitza la base l si aquesta és normalitzada; en cas contrari, calcula una base normalitzada de $\mathcal{O}$ i la indica. Argument opcional `true`.

`radIC(`γ`)`
$\gamma \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$.
Dóna el radi del cercle d'isometria associat a l'homografia γ.

`rec1f(`M`)`
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, de determinant igual a un quadrat.
Dóna la matriu $A(\mathrm{rec}_1(f))$ de la forma quadràtica 1-recíproca de la forma f.

`rec1gf(`M`)`
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb valor absolut del determinant igual a un quadrat.
Dóna la matriu $A(\mathrm{rec}_1^+(f))$ de la forma quadràtica 1-recíproca de la forma f.

`rec1H3(`a,b`)`
$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna la matriu $A(\mathrm{rec}_1(n_{H,3}))$ de la forma quadràtica 1-recíproca de la forma nòrmica ternària associada a l'àlgebra H.

`rec1H4(`a,b`)`
$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna la matriu $A(\mathrm{rec}_1(n_{H,4}))$ de la forma quadràtica 1-recíproca de la forma nòrmica quaternària associada a l'àlgebra H.

`rec2f(`M`)`
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb determinant parell igual a un quadrat.
Dóna la matriu $A(\mathrm{rec}_2(f))$ de la forma quadràtica 2-recíproca de la forma f.

`rec2gf(`M`)`
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$, amb valor absolut del determinant parell igual a un quadrat.
Dóna la matriu $A(\mathrm{rec}_2^+(f))$ de la forma quadràtica 2-recíproca de la forma f.

`rec2H4(`a,b`)`
$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$.

Dóna la matriu $A(\mathrm{rec}_2(n_{H,4}))$ de la forma quadràtica 2-recíproca de la forma nòrmica quaternària associada a l'àlgebra H.

`redbnf0rF`(d, m)
$d \in \mathbb{Z}$, $d \neq k^2$ per a tot $k \in \mathbb{Z}$. $m \in \mathbb{N}$.
Dóna la forma nòrmica binària reduïda de l'ordre quadràtic de conductor m del cos quadràtic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

`relX1`(p)
p nombre primer.
Dóna les relacions del grup $\Gamma_0(p)/\pm \mathrm{Id}$ corresponents als generadors donats per la instrucció `geneX1`(p).

`S1f`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$.
Dóna la llista de nombres primers p per als quals la forma quadràtica f és $\mathbb{Q}_p$-anisòtropa.

`S2f`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$.
Dóna la llista de nombres primers p per als quals l'invariant de Hasse-Witt de la forma quadràtica f a $\mathbb{Q}_p$ és igual a -1.

`Sf`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{Z}$.
Dóna una llista de nombres primers crítics per a f.

`signf`(M)
M, matriu $A(f)$ d'una forma quadràtica f de coeficients a $\mathbb{R}$.
Dóna la signatura de la forma quadràtica f.

`sqfr`(d)
$d \in \mathbb{Z}$.
Dóna la part de d lliure de quadrats.

`symcS`(r, ε, k, s)
$r \in \mathbb{R}^+$; ε unitat fonamental d'un cos quadràtic real $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$; k igual a $\mathrm{n}(\varepsilon)$; $s \in \mathbb{N}$ tal que ε^s és la unitat fonamental d'un ordre quadràtic $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.
Dóna els dos radis corresponents a la semicorona simètrica respecte de la recta hiperbòlica de centre 0 i radi r, domini fonamental del grup $< h >$, on h és l'homotècia principal que correspon a la unitat fonamental de l'ordre quadràtic Λ.

`symiS`(r, ε, k, s)

$r \in \mathbb{R}^+$; ε unitat fonamental d'un cos quadràtic real $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$; k igual a $\mathrm{n}(\varepsilon)$; $s \in \mathbb{N}$ tal que ε^s és la unitat fonamental d'un ordre quadràtic $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.
Dóna els dos radis corresponents a la semicorona de radi inferior r, domini fonamental del grup $< h >$, on h és l'homotècia principal que correspon a la unitat fonamental de l'ordre quadràtic Λ.

`symLIC`(γ)

$\gamma \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.
Dóna l'abscissa de la recta L_γ tal que l'homografia γ és composició de la simetria hiperbòlica respecte de C_γ i la simetria hiperbòlica respecte de L_γ, on C_γ és el cercle d'isometria associat a l'homografia γ.

`symsS`(r, ε, k, s)

$r \in \mathbb{R}^+$; ε unitat fonamental d'un cos quadràtic real $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$; k igual a $\mathrm{n}(\varepsilon)$; $s \in \mathbb{N}$ tal que ε^s és la unitat fonamental d'un ordre quadràtic $\Lambda \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{a})$.
Dóna els dos radis corresponents a la semicorona de radi superior r, domini fonamental del grup $< h >$, on h és l'homotècia principal que correspon a la unitat fonamental de l'ordre quadràtic Λ.

`tfH3`(a, b)

$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\dfrac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna la matriu $A(tr_{H,3})$ de la forma traça ternària associada a l'àlgebra H.

`tfH4`(a, b)

$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\dfrac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$.
Dóna la matriu $A(tr_{H,4})$ de la forma traça quaternària associada a l'àlgebra H.

`tfOr4`(l)

l llista de 4 quaternions, $\mathbb{Z}$-base d'un ordre $\mathcal{O}$.
Dóna la matriu $A(t_{\mathcal{O},4})$ de la forma traça quaternària associada a l'ordre $\mathcal{O}$, respecte de la base l. Argument opcional `true`.

`typeH`$(a, b,$ `T`$)$

$a, b \in \mathbb{Z}$ que defineixen la $\mathbb{Q}$-àlgebra de quaternions $H = \left(\dfrac{a, b}{\mathbb{Q}}\right)$; `T`, un dels símbols `M`, `A` o bé `B`.

Funció lògica. Respon *true* si l'àlgebra H és no ramificada, poc ramificada de tipus A o bé poc ramificada de tipus B, segons si el símbol `T` és `M`, `A` o bé `B`, respectivament. Retorna *false* en cas contrari.

`typeHom(`a, b, c, d`, tipus)`
$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ que defineixen una homografia $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.
`tipus`, una de les paraules `elliptic`, `hyperbolic` o bé `parabolic`.
Funció lògica. Respon *true* si l'homografia γ és el·líptica, hiperbòlica o parabòlica, segons si la paraula `tipus` és `elliptic`, `hyperbolic` o bé `parabolic`, respectivament. Retorna *false* en cas contrari.

`type(`ω`, purequaternion)`
ω.
Funció lògica. Respon *true* si ω és un quaternió pur i retorna *false* en cas contrari.

`type(`ω`, quaternion)`
ω.
Funció lògica. Respon *true* si ω és un quaternió i retorna *false* en cas contrari.

`valp(`n`, `p`)`
$n \in \mathbb{Z}$, p primer.
Dóna la valoració p-àdica $v_p(n)$ de n.

`vaX1(`p`)`
p primer.
Dóna la llista de vèrtexs accidentals del domini fonamental de la corba $X(1, p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`ve2X1(`p`)`
p nombre primer.
Dóna la llista de vèrtexs el·líptics d'ordre 2 del domini fonamental de la corba $X(1, p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`ve3X1(`p`)`
p nombre primer.
Dóna la llista de vèrtexs el·líptics d'ordre 3 del domini fonamental de la corba $X(1, p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`vintX1(`p`)`
p nombre primer.

Dóna la llista de vèrtexs que s'obtenen com a intersecció de cercles d'isometria del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`volhX`(D, N)
$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna el volum hiperbòlic $V_h(D, N)$ d'un polígon que sigui domini fonamental de la corba de Shimura $X(D, N)$.

`volhX1`(p)
p nombre primer.
Dóna el volum hiperbòlic $V_h(1, p)$ d'un polígon que sigui domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$.

`volHypPol`(l)
$l = [z_1, \ldots, z_n]$, $z_1 \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z_i) \geq 0$.
Dóna el volum hiperbòlic del polígon determinat pels n punts de l, en funció de π.

`volX`(D, N)
$D \in \mathbb{N}$, producte d'un nombre parell de primers diferents; $N \in \mathbb{N}$, $\mathrm{mcd}(D, N) = 1$.
Dóna el volum hiperbòlic normalitzat $V(D, N)$ d'un polígon que sigui domini fonamental de la corba de Shimura $X(D, N)$.

`volX1`(p)
p nombre primer.
Dóna el volum hiperbòlic normalitzat $V(1, p)$ d'un polígon hiperbòlic que sigui domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$.

`vpX1`(p)
p nombre primer.
Dóna la llista de vèrtexs parabòlics del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3.

`vtcX1`(p)
p nombre primer.
Dóna la llista total dels vèrtexs del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3, classificats segons el seu tipus.

`vtoX1`(p)
p nombre primer.

Dóna la llista total dels vèrtexs del domini fonamental de la corba $X(1,p) = X_0(p)$, construït en el capítol 3, ordenats segons ordre creixent de la seva part real.

10.3 Sintaxi de les instruccions programades

A títol indicatiu, mostrem la sintaxi d'algunes de les instruccions programades.

```
Poincare_canHdisc := proc(pp::integer, qq::integer)
local l, r, p, q;
    p := pp;
    q := qq;
    if not isprime(p) or not isprime(q) or p = q then
        ERROR(`els arguments han de ser dos nombres primers diferents`)
    fi;
    if q < p then l := p; p := q; q := l fi;
    if p = 2 and q mod 4 = 3 mod 4 then RETURN([q, -1]) fi;
    if p mod 4 = 3 mod 4 and q mod 4 = 3 mod 4 then RETURN([p*q, -1]) fi;
    if numtheory[L](p, q) ≠ 1 then RETURN([p, q]) fi;
    r := 2;
    if p = 2 then while not (numtheory[L](r, 2) = -1) or
        not ((numtheory[L](r, q) + q) mod 4 = 0 mod 4) do r := nextprime(r)
        od
    else while not ((numtheory[L](r, p) + p) mod 4 = 0 mod 4) or
        not ((numtheory[L](r, q) + q) mod 4 = 0 mod 4) do r := nextprime(r)
        od
    fi;
    [p*q, -r]
end
```

```
Poincare_nBasisOr := proc(l::list(quaternion))
local a, ii, jj, s, P, resultat;
    if type(args[nargs], boolean) and args[nargs] then
        if not isOrder(l, true) then RETURN( ) fi
    fi;
    P := Mcoor(l);
    for jj from 2 to 4 do
        s := signum(P[1, jj]);
        if s ≠ 0 then for ii to 4 do P[ii, jj] := s*P[ii, jj] od fi
    od;
    for jj from 2 to 4 do P[1, jj] := P[1, jj] - floor(P[1, jj]) od;
    if P[1, 4] = 0 then
        if P[1, 3] = 0 then
            if P[1, 2] ≠ 0 then
```

```
                for ii to 4 do a := P[ii, 2]; P[ii, 2] := P[ii, 4]; P[ii, 4] := a od
            fi
        else for ii to 4 do a := P[ii, 3]; P[ii, 3] := P[ii, 4]; P[ii, 4] := a od
        fi
    fi;
    if P[1, 2] = 1 / 2 then for ii to 4 do P[ii, 2] := P[ii, 2] - P[ii, 4] od fi;
    if P[1, 3] = 1 / 2 then for ii to 4 do P[ii, 3] := P[ii, 3] - P[ii, 4] od fi;
    OrM(P)
end

Poincare_isMaxOrder := proc(l::list(quaternion))
local s, t;
    if type(args[nargs], boolean) and args[nargs] then s := true else s := false fi
    ;
    t := isOrder(l, s);
    if s then
        if t = false then RETURN(false) fi;
        if DiscOr(l) = DiscH(a, b) then print(maximal); RETURN(true) fi;
        print(`però no és maximal`);
        RETURN(false)
    fi;
    t and DiscOr(l) = DiscH(a, b)
end

Poincare_plotHypL := proc(uu::{complex, name}, vv::{complex, name})
local u, v, eq, o, rh, x1, x2, y2, aa, bb, l;
    with(geometry);
    _EnvHorizontalName := x;
    _EnvVerticalName := y;
    if uu ≠ ∞ then point(u, ℜ(uu), ℑ(uu)) fi;
    if vv ≠ ∞ then point(v, ℜ(vv), ℑ(vv)) fi;
    defHypL(uu, vv, rh);
    if uu = ∞ or vv = ∞ or ℜ(uu) = ℜ(vv) then
        x1 := min(ℜ(uu), ℜ(vv)) - 1;
        x2 := min(ℜ(uu), ℜ(vv)) + 1;
        y2 := 1.2*max(ℑ(uu), ℑ(vv))
    else
        center(o, rh);
        aa := min(ℜ(uu), ℜ(vv), coordinates(o)[1]);
        bb := max(ℜ(uu), ℜ(vv), coordinates(o)[1]);
        x1 := aa - .2*(bb - aa);
        x2 := bb + .2*(bb - aa);
        y2 := radius(rh)
    fi;
    if uu = ∞ or vv = ∞ or ℜ(uu) = ℜ(vv) then
        l := [rh];
        if uu ≠ ∞ then l := [op(l), u] fi;
        if vv ≠ ∞ then l := [op(l), v] fi;
```

```
        draw(l, axes = NORMAL, scaling = CONSTRAINED,
            axesfont = [TIMES, ROMAN, 8], font = [SYMBOL, 10],
            symbol = CIRCLE, color = black, view = [x1 .. x2, 0 .. y2],
            printtext = False)
    else draw([u, v, o, rh], axes = NORMAL, scaling = CONSTRAINED,
        axesfont = [TIMES, ROMAN, 8], font = [SYMBOL, 10],
        symbol = CIRCLE, color = black, view = [x1 .. x2, 0 .. y2],
        printtext = False)
    fi
end
```

```
Poincare_cyclesX1 := proc(p::integer)
local s, nc, cicles, r0, c, r, a, gs, ii, jj, ciclesidx;
    nc := e1X1(p) + e3X1(p);
    cicles := [seq(0, ii = 1 .. nc)];
    r0 := -(p - 1) / 2;
    c := [r0];
    for ii to nc do
        r := r0;
        s := 1;
        while r ≠ r0 or s = 1 do
            s := 0;
            if r ≠ (p - 1) / 2 + 1 then
                a := (-1 / r) mod p; if (p - 1) / 2 < a then a := a - p fi
            else a := -(p - 1) / 2 - 1
            fi;
            if a + 1 ≠ r0 then c := [op(c), a + 1] fi;
            r := a + 1
        od;
        cicles[ii] := c;
        gs := map(op, cicles);
        r0 := r0 + 1;
        while (member(r0, gs) or r0 = 0 or r0 = 1) and r0 < (p - 1) / 2 do
            r0 := r0 + 1
        od;
        c := [r0]
    od;
    ciclesidx := [seq(0, ii = 1 .. nc)];
    for ii to nc do
        ciclesidx[ii] := [seq(0, jj = 1 .. nops(cicles[ii]))];
        for jj to nops(cicles[ii]) do ciclesidx[ii][jj] := idx(cicles[ii][jj], p) od
    od;
    ciclesidx
end
```

```
Poincare_nfOr3 := proc(l::list(quaternion))
local par, R;
```

```
    if type(args[nargs], boolean) and args[nargs] then
        if not isOrder(l, true) then RETURN( ) fi
    fi;
    par := ParOr(nBasisOr(l));
    if par = 0 then R := array([[0, 0, 0], [1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]])
    else R := array([[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1], [-2, 0, 0]])
    fi;
    evalm(((linalg[transpose](R)) &* (nfOr4(l))) &* R)
end


Poincare_bfOr := proc(l::list(quaternion))
local ll, vv;
    if type(args[nargs], boolean) and args[nargs] then
        if not isOrder(l, true) then RETURN( ) fi
    fi;
    ll := nBasisOr(l);
    vv := evalm((McbOr(l, ll)) &* (linalg[transpose]([[x, y, z, t]])));
    if ParOr(ll) = 0 then bfH(vv[2, 1]*ll[2] + vv[3, 1]*ll[3] + vv[4, 1]*ll[4])
    else bfH(vv[1, 1]*ll[1] + vv[2, 1]*ll[2] + vv[3, 1]*ll[3] - 2*vv[1, 1]*ll[4])
    fi
end


Poincare_K := proc(l::list(quaternion), σ::quaternion)
    if type(args[nargs], boolean) and args[nargs] then
        if not isOrder(l, true) then RETURN( ) fi
    fi;
    if not (l[1] = 1 and qtrace(l[2]) = 0 and qtrace(l[3]) = 0 and
    (qtrace(l[4]) = 0 or qtrace(l[4]) = 1)) then
        ERROR(
        `el primer argument ha de ser una base normalitzada d'un ordre`)
    fi;
    linalg[submatrix](
        McbOr([1, qconj(l[2], σ), qconj(l[3], σ), qconj(l[4], σ)], l), 2 .. 4,
        2 .. 4)
end


Poincare_ImMRep := proc(l::list(quaternion), d::integer, m::integer, xyz::list(integer))
local A, rep, dd, q;
    if type(args[nargs], boolean) and args[nargs] then
        if not isOrder(l, true) then RETURN( ) fi
    fi;
    if d = 0 then ERROR(`el segon argument ha de ser diferent de zero`) fi;
    if m ≤ 0 then ERROR(`el tercer argument ha de ser positiu`) fi;
    if not (l[1] = 1 and qtrace(l[2]) = 0 and qtrace(l[3]) = 0 and
    (qtrace(l[4]) = 0 or qtrace(l[4]) = 1)) then
        ERROR(
        `el primer argument ha de ser una base normalitzada d'un ordre`)
```

```
    fi;
    A := nfOr3(nBasisZ2Or(l));
    rep := array([[xyz[1], xyz[2], xyz[3]]]);
    if evalm((rep &* A) &* (linalg[transpose](rep)))[1, 1] ≠
    − fundDiscF(d)*m^2 then
        ERROR(`l'últim argument no és una representació de ...`)
    fi;
    dd := sqfr(d);
    if dd mod 4 = 1 then q := − xyz[3]*qtrace(l[4])*l[1] / m
        + 2*(xyz[1]*l[2] + xyz[2]*l[3] + xyz[3]*l[4]) / m
    else q := (
        − xyz[3]*qtrace(l[4])*l[1] / 2 + xyz[1]*l[2] + xyz[2]*l[3]
        + xyz[3]*l[4]) / m
    fi;
    embH(q)
end
```

```
Poincare_isPrimbfA := proc(p::integer, N::integer, w::quaternion)
local A, ii, ww;
    if not isprime(p) or p = 3 mod 4 then ERROR(
        `el primer argument ha de ser un nombre primer congüent amb 3 mòdul \
        4`)
    fi;
    if (p − 1) / 2 mod N = 0 then ERROR(`el nivell N ha de dividir (p-1)/2`) fi;
    if sqfr(N) ≠ N then ERROR(`el nivell N no és lliure de quadrats`) fi;
    A := Mcoor([1, 2*i, 2*N*j, i + j + k]);
    A := evalm((A^(−1)) &* (Mcoor([w])));
    for ii to 4 do
        if not type(A[ii, 1], integer) then
            ERROR(`el quaternió no pertany a Z+2O_A(2p,N)`)
        fi
    od;
    ww := qcoeffs(w);
    is(gcd((ww[4] − ww[2]) / 2, (ww[4] − ww[3]) / 2*N, ww[4]) = 1)
end
```

```
Poincare_isDNrepOrF := proc(DD::integer, N::integer, d::integer, m::integer)
local df, M, res, aa, bb, xx, yy, s, dn, txx, tyy;
    df := fundDiscF(d);
    res := DD*N;
    if 4*res < − df*m^2 then RETURN(false) fi;
    if − df*m^2 = 4*res then RETURN(true) fi;
    M := redbnfOrF(d, m);
    if df*m^2 mod 4 = 0 then
        txx := evalf(sqrt(res − 1));
        for xx from 0 to txx do
            tyy := evalf(2*sqrt(− res / df) / m);
            for yy from 0 to tyy do
```

```
                if M[1, 1]*xx^2 + (M[1, 2] + M[2, 1])*xx*yy + M[2, 2]*yy^2
                = res then RETURN(true)
                fi
            od
        od;
        RETURN(false)
    else
        tyy := evalf(2*sqrt(res / (- df*m^2)));
        for yy to tyy do
            s := evalf(sqrt(res + df*m^2*yy^2 / 4));
            for xx from floor(-s - yy / 2) to s - yy / 2 do
                if M[1, 1]*xx^2 + (M[1, 2] + M[2, 1])*xx*yy + M[2, 2]*yy^2
                = res then RETURN(true)
                fi
            od
        od;
        RETURN(false)
    fi
end
```

```
Poincare_CMP := proc(l::list, d::integer, m::integer, r::integer)
local DD, N, punts, rep, nl, ii, M, P;
    if 0 ≤ d then RETURN(`el segon paràmetre ha de ser negatiu `) fi;
    DD := DiscH(a, b);
    N := NivOr(l);
    if not isCMOrF(DD, N, d, m) then
        RETURN(
        `la corba no té punts de multiplicació complexa per aquest ordre`)
    fi;
    punts := [ ];
    rep := FindRepOr(l, d, m, r);
    nl := nops(rep);
    if nl = 0 then RETURN(
        `No he trobat punts CM; prova un paràmetre de profunditat superior`)
    fi;
    for ii to nl do
        M := ImHRep(l, d, m, rep[ii]);
        P := op(fixPHomM(M));
        punts := [op(punts), P]
    od;
    punts
end
```

```
Poincare_cme := proc(DD::integer, N::integer, r::integer)
local dn, res, d, df, m, tm, dn4;
    dn := DD*N;
    dn4 := - 4*dn;
    res := 0;
```

```
        for d from -1 by -1 to dn4 do
            if sqfr( d ) = d then
                df := fundDiscF( d );
                tm := evalf( 2*sqrt( - dn / df ) );
                for m to tm do
                    if isCMEMOrF( DD, N, d, m, r ) then
                        res := res + hqqOr( DD, N, d, m )
                    fi
                od
            fi
        od;
        res
    end
```

Índex taules

2 Corbes de Shimura

3 Uniformització hiperbòlica de corbes de Shimura: cas no ramificat

5 Àlgebres de quaternions i formes quadràtiques

6 Ordres quaterniònics i formes quadràtiques

7 Immersions i formes quadràtiques

Índex de figures

9 Punts de multiplicació complexa en corbes de Shimura

Treballs de Shimura

A continuació donem una relació parcial de publicacions de G. Shimura relacionades amb les varietats que porten el seu nom.

(1) S. Koizumi and G. Shimura, *On specializations of abelian varieties*, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo **9** (1959), 187–211.

(2) M. Kuga and G. Shimura, *On vector differential forms attached to automorphic forms*, J. Math. Soc. Japan **12** (1960), 258–270.

(3) ———, *On the zeta function of a fibre variety whose fibres are abelian varieties*, Annals of Math. (2) **82** (1965), 478–539.

(4) Y. Matsushima and G. Shimura, *On the cohomology groups attached to certain vector valued differential forms on the product of the upper half planes*, Annals of Math. (2) **78** (1963), 417–449.

(5) G. Shimura and Y. Taniyama, *Complex multiplication of abelian varieties and its applications to number theory*, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1961, Publications of the Mathematical Society of Japan, 6.

(6) ———, *A note on the normalization-theorem of an integral domain*, Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo **4** (1954), 1–8.

(7) ———, *Reduction of algebraic varieties with respect to a discrete valuation of the basic field*, Amer. J. Math. **77** (1955), 134–176.

(8) ———, *On complex multiplications*, Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko, 1955 (Tokyo), Science Council of Japan, 1956, pp. 23–30.

(9) ———, *La fonction ζ du corps des fonctions modulaires elliptiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **244** (1957), 2127–2130.

(10) ———, *Correspondances modulaires et les fonctions ζ de courbes algébriques*, J. Math. Soc. Japan **10** (1958), 1–28.

(11) ———, *Fonctions automorphes et correspondances modulaires*, Proc. Internat. Congress Math. 1958, Cambridge Univ. Press, New York, 1958, pp. 330–338.

(12) ———, *Fonctions automorphes et variétés abéliennes*, Séminaire Bourbaki; 10e année: 1957/1958. Textes des conférences; Exposés 152 à 168; 2e éd. corrigée, Exposé 167, Secrétariat mathématique, Paris, 1958, p. 9.

(13) ———, *Automorphic functions and number theory. I*, Sûgaku **11** (1959/1960), 193–205.

(14) ———, *On the theory of automorphic functions*, Annals of Math. (2) **70** (1959), 101–144.

(15) ———, *Sur les intégrales attachées aux formes automorphes*, J. Math. Soc. Japan **11** (1959), 291–311.

(16) ———, *Automorphic functions and number theory. II*, Sûgaku **13** (1961/1962), 65–80.

(17) ———, *On the zeta-functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions*, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 275–331.

(18) ———, *On Dirichlet series and abelian varieties attached to automorphic forms*, Annals of Math. (2) **76** (1962), 237–294.

(19) ———, *On the class-fields obtained by complex multiplication of abelian varieties*, Osaka Math. J. **14** (1962), 33–44.

(20) ———, *Arithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms*, J. Math. Soc. Japan **15** (1963), 33–65.

(21) ———, *On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions*, Annals of Math. (2) **78** (1963), 149–192.

(22) ———, *On modular correspondences for $Sp(n, Z)$ and their congruence relations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **49** (1963), 824–828.

(23) ———, *Arithmetic of unitary groups*, Annals of Math. (2) **79** (1964), 369–409.

(24) ———, *Class-fields and automorphic functions*, Annals of Math. (2) **80** (1964), 444–463.

(25) ———, *On purely transcendental fields automorphic functions of several variable*, Osaka J. Math. **1** (1964), no. 1, 1–14.

(26) ———, *On the field of definition for a field of automorphic functions*, Annals of Math. (2) **80** (1964), 160–189.

(27) ———, *On the field of definition for a field of automorphic functions. II*, Annals of Math. (2) **81** (1965), 124–165.

(28) ———, *Moduli and fibre systems of abelian varieties*, Annals of Math. (2) **83** (1966), 294–338.

(29) ———, *Moduli of abelian varieties and number theory*, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, pp. 312–332.

(30) ———, *On the field of definition for a field of automorphic functions. III*, Annals of Math. (2) **83** (1966), 377–385.

(31) ———, *A reciprocity law in non-solvable extensions*, J. Reine Angew. Math. **221** (1966), 209–220.

(32) ———, *Algebraic number fields and symplectic discontinuous groups*, Annals of Math. (2) **86** (1967), 503–592.

(33) ———, *Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves*, Annals of Math. (2) **85** (1967), 58–159.

(34) ———, *Discontinuous groups and abelian varieties*, Math. Ann. **168** (1967), 171–199.

(35) ———, *Algebraic varieties without deformation and the Chow variety*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 336–341.

(36) ———, *Automorphic functions and number theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1968, Lecture Notes in Mathematics, No. 54.

(37) ———, *Number fields and zeta functions associated with discontinuous groups and algebraic varieties*, Proc. Internat. Congr. Math. (Moscow, 1966), Izdat. "Mir", Moscow, 1968, pp. 290–299.

(38) ———, *Local representation of Galois groups*, Annals of Math. (2) **89** (1969), 99–124.

(39) ———, *On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains*, Annals of Math. (2) **91** (1970), 144–222.

(40) ———, *On canonical models of arithmetic quotients of bounded symmetric domains. II*, Annals of Math. (2) **92** (1970), 528–549.

(41) ———, *Class fields over real quadratic fields and Hecke operators*, (1971), 17.

(42) ———, *Class fields over real quadratic fields in the theory of modular functions*, (1971), 169–188. Lecture Notes in Math., Vol. 185.

(43) ———, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 11. Iwanami Shoten, Publishers, Tokyo, 1971, Kanô Memorial Lectures, No. 1.

(44) ———, *On arithmetic automorphic functions*, (1971), 343–348.

(45) ———, *On elliptic curves with complex multiplication as factors of the Jacobians of modular function fields*, Nagoya Math. J. **43** (1971), 199–208.

(46) ———, *On the zeta-function of an abelian variety with complex multiplication.*, Annals of Math. (2) **94** (1971), 504–533.

(47) ———, *Class fields over real quadratic fields and Hecke operators*, Annals of Math. (2) **95** (1972), 130–190.

(48) ———, *On the field of rationality for an abelian variety*, Nagoya Math. J. **45** (1972), 167–178.

(49) ———, *Complex multiplication*, (1973), 37–56. Lecture Notes in Math., Vol. 320, Notes by Willem Kuyk.

(50) ———, *Modular forms of half integral weight*, (1973), 57–74. Lecture Notes in Math., Vol. 320.

(51) ———, *On modular forms of half integral weight*, Annals of Math. (2) **97** (1973), 440–481.

(52) ———, *On the factors of the jacobian variety of a modular function field*, J. Math. Soc. Japan **25** (1973), 523–544.

(53) G. Shimura, *Vvedenie v arifmeticheskuyu teoriyu avtomorfnykh funktsiĭ*, Izdat. "Mir", Moscow, 1973, Translated from the English by A. A. Belcskiĭ, Edited by S. G. Gindikin.

(54) G. Shimura, *On the trace formula for Hecke operators*, Acta Math. **132** (1974), no. 3-4, 245–281.

(55) ———, *Correction to: "Complex multiplication"*, (1975), p. 145. Lecture Notes in Math., Vol. 476.

(56) ———, *Correction to: "Modular forms of half integral weight" (modular functions of one variable, i (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 57–74, Lecture Notes in Math., Vol. 320, Springer, Berlin, 1973)*, (1975), p. 145. Lecture Notes in Math., Vol. 476.

(57) ———, *On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables*, Annals of Math. (2) **102** (1975), no. 3, 491–515.

(58) ———, *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. London Math. Soc. (3) **31** (1975), no. 1, 79–98.

(59) ———, *On the real points of an arithmetic quotient of a bounded symmetric domain*, Math. Ann. **215** (1975), 135–164.

(60) ———, *The special values of the zeta functions associated with cusp forms*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), no. 6, 783–804.

(61) ———, *Theta functions with complex multiplication*, Duke Math. J. **43** (1976), no. 4, 673–696.

(62) ———, *On abelian varieties with complex multiplication*, Proc. London Math. Soc. (3) **34** (1977), no. 1, 65–86.

(63) ———, *On the derivatives of theta functions and modular forms*, Duke Math. J. **44** (1977), no. 2, 365–387.

(64) ———, *On the periods of modular forms*, Math. Ann. **229** (1977), no. 3, 211–221.

(65) ———, *Unitary groups and theta functions*, (1977), 195–200.

(66) ———, *The arithmetic of automorphic forms with respect to a unitary group*, Annals of Math. (2) **107** (1978), no. 3, 569–605.

(67) ———, *On certain reciprocity-laws for theta functions and modular forms*, Acta Math. **141** (1978), no. 1-2, 35–71.

(68) ———, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 3, 637–679.

(69) ———, *Automorphic forms and the periods of abelian varieties*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979), no. 3, 561–592.

(70) ———, *The arithmetic of certain zeta functions and automorphic forms on orthogonal groups*, Annals of Math. (2) **111** (1980), no. 2, 313–375.

(71) ———, *On some problems of algebraicity*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978) (Helsinki), Acad. Sci. Fennica, 1980, pp. 373–379.

(72) ———, *Arithmetic of differential operators on symmetric domains*, Duke Math. J. **48** (1981), no. 4, 813–843.

(73) ———, *Corrections to: "The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms" [Duke Math. J.* **45** *(1978), no. 3, 637–679]*, Duke Math. J. **48** (1981), no. 3, 697.

(74) ———, *The critical values of certain zeta functions associated with modular forms of half-integral weight*, J. Math. Soc. Japan **33** (1981), no. 4, 649–672.

(75) ———, *On certain zeta functions attached to two Hilbert modular forms. II. The case of automorphic forms on a quaternion algebra*, Ann. of Math. (2) **114** (1981), no. 3, 569–607.

(76) ———, *On certain zeta functions attached to two Hilbert modular forms. I. The case of Hecke characters*, Annals of Math. (2) **114** (1981), no. 1, 127–164.

(77) ———, *The periods of certain automorphic forms of arithmetic type*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), no. 3, 605–632 (1982).

(78) ———, *Confluent hypergeometric functions on tube domains*, Math. Ann. **260** (1982), no. 3, 269–302.

(79) ———, *Models of an abelian variety with complex multiplication over small fields*, J. Number Theory **15** (1982), no. 1, 25–35.

(80) ———, *Algebraic relations between critical values of zeta functions and inner products*, Amer. J. Math. **105** (1983), no. 1, 253–285.

(81) ———, *On Eisenstein series*, Duke Math. J. **50** (1983), no. 2, 417–476.

(82) ———, *Differential operators and the singular values of Eisenstein series*, Duke Math. J. **51** (1984), no. 2, 261–329.

(83) ———, *On differential operators attached to certain representations of classical groups*, Invent. Math. **77** (1984), no. 3, 463–488.

(84) ———, *Corrections to: "On Eisenstein series" [Duke Math. J.* **50** *(1983), no. 2, 417–476; MR 84k:10019]*, Duke Math. J. **52** (1985), no. 2, 314.

(85) ———, *On Eisenstein series of half-integral weight*, Duke Math. J. **52** (1985), no. 2, 281–314.

(86) ———, *On the Eisenstein series of Hilbert modular groups*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), no. 3, 1–42.

(87) ———, *Errata: "On a class of nearly holomorphic automorphic forms"*, Annals of Math. (2) **123** (1986), no. 3, 613.

(88) ———, *On a class of nearly holomorphic automorphic forms*, Ann. of Math. (2) **123** (1986), no. 2, 347–406.

(89) ———, *Corrections to: "On Eisenstein series of half-integral weight" [Duke Math. J.* **52** *(1985), no. 2, 281–314]*, Duke Math. J. **55** (1987), no. 4, 837–838.

(90) ———, *Corrections to: "On the Eisenstein series of Hilbert modular groups" [Rev. Mat. Iberoamericana* **1** *(1985), no. 3, 1–42]*, Duke Math. J. **55** (1987), no. 4, 838.

(91) ———, *Nearly holomorphic functions on Hermitian symmetric spaces*, Math. Ann. **278** (1987), no. 1-4, 1–28.

(92) ———, *On Hilbert modular forms of half-integral weight*, Duke Math. J. **55** (1987), no. 4, 765–838.

(93) ———, *On the critical values of certain Dirichlet series and the periods of automorphic forms*, Invent. Math. **94** (1988), no. 2, 245–305.

(94) ———, *L-functions and eigenvalue problems*, Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 1989, pp. 341–396.

(95) ———, *Yutaka Taniyama and his time. Very personal recollections*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), no. 2, 186–196.

(96) ———, *Invariant differential operators on Hermitian symmetric spaces*, Annals of Math. (2) **132** (1990), no. 2, 237–272.

(97) ———, *On the fundamental periods of automorphic forms of arithmetic type*, Invent. Math. **102** (1990), no. 2, 399–428.

(98) ———, *Some old and recent arithmetical results concerning modular forms and related zeta functions*, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Derg. **49** (1990), 45–56 (1993), International Symposium on Algebra and Number Theory (Silivri, 1990).

(99) ———, *The critical values of certain Dirichlet series attached to Hilbert modular forms*, Duke Math. J. **63** (1991), no. 3, 557–613.

(100) ———, *On arithmeticity of the values and periods of various zeta functions*, Sūgaku **45** (1993), no. 2, 111–127.

(101) ———, *On the Fourier coefficients of Hilbert modular forms of half-integral weight*, Duke Math. J. **71** (1993), no. 2, 501–557.

(102) ———, *On the transformation formulas of theta series*, Amer. J. Math. **115** (1993), no. 5, 1011–1052.

(103) ———, *Differential operators, holomorphic projection, and singular forms*, Duke Math. J. **76** (1994), no. 1, 141–173.

(104) ———, *Euler products and Fourier coefficients of automorphic forms on symplectic groups*, Invent. Math. **116** (1994), no. 1-3, 531–576.

(105) ———, *Fractional and trigonometric expressions for matrices*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 8, 744–758.

(106) ———, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994, Reprint of the 1971 original, Kanô Memorial Lectures, 1.

(107) ———, *Arithmeticity of the special values of various zeta functions and the periods of Abelian integrals [translation of Sūgaku* **45** *(1993), no. 2, 111–127]*, Sugaku Expositions **8** (1995), no. 1, 17–38, Sugaku Expositions.

(108) ———, *Eisenstein series and zeta functions on symplectic groups*, Invent. Math. **119** (1995), no. 3, 539–584.

(109) ———, *Fonctions automorphes et variétés abéliennes*, Séminaire Bourbaki, Vol. 4, Soc. Math. France, Paris, 1995, pp. Exp. No. 167, 403–411, errata p. 217.

(110) ———, *Zeta functions and Eisenstein series on metaplectic groups*, Invent. Math. **121** (1995), no. 1, 21–60.

(111) ———, *Convergence of zeta functions on symplectic and metaplectic groups*, Duke Math. J. **82** (1996), no. 2, 327–347.

(112) ———, *Euler products and Eisenstein series*, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1997.

(113) ———, *Zeta functions and Eisenstein series on classical groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **94** (1997), no. 21, 11133–11137, Elliptic curves and modular forms (Washington, DC, 1996).

(114) ———, *Abelian varieties with complex multiplication and modular functions*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

(115) ———, *André Weil as I knew him*, Notices Amer. Math. Soc. **46** (1999), no. 4, 428–433.

(116) ———, *An exact mass formula for orthogonal groups*, Duke Math. J. **97** (1999), no. 1, 1–66.

(117) ———, *Generalized Bessel functions on symmetric spaces*, J. Reine Angew. Math. **509** (1999), 35–66.

(118) ———, *Some exact formulas on quaternion unitary groups*, J. Reine Angew. Math. **509** (1999), 67–102.

(119) ———, *On the Fourier coefficients of modular forms of several variables*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II **1975**, no. 17, 261–268.

(120) ———, *The periods of abelian varieties with complex multiplication and the special values of certain zeta functions*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **1980**, no. 2, 103–106, Abelian functions and transcendental numbers (Colloq., École Polytech., Palaiseau, 1979) (French).

(121) *1996 Steele Prizes*, Notices Amer. Math. Soc. **43** (1996), no. 11, 1340–1347.

Bibliografia

[ABa] A. Arenas i P. Bayer, *Complex multiplication points on modular curves*, per aparèixer a *Rev. Real Acad. Ciencias Físicas, Exactas y Naturales.*

[ABb] A. Arenas i P. Bayer, *Heegner points on modular curves*, per aparèixer a *Rev. Real Acad. Ciencias Físicas, Exactas y Naturales.*

[Alb34] A. A. Albert, *Integral domains of rational generalized quaternion algebras*, Bull. American Mathematical Society **40** (1934), 164–176.

[Alb35] A. A. Albert, *Involutorial simple algebras and real Riemann matrices*, Annals of Math. **36** (1935), 886-964.

[Als97] M. Alsina, *Fundamental domains of the upper half plane by the action of matrix groups*, Meeting on matrix analysis and applications, Dept. Mat. Apl. I, Fac. Informática y Estadística, Univ. de Sevilla, 1997, pp. 1–20.

[Als99a] M. Alsina, *Dominios fundamentales modulares*, per aparèixer a *Rev. Real Acad. Ciencias Físicas, Exactas y Naturales*, 1999.

[Als99b] M. Alsina, *VIII Encuentros de geometría computacional*, Treballs d'informàtica i tecnologia, núm. 1, cap. Dominios fundamentales geométricos de $\Gamma_0(p)$, pp. 213–230, Univ. Jaume I, 1999.

[Apo76] T.M. Apostol, *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Springer-Verlag, 1976.

[Are87] A. Arenas, *On integral representations by quadratic forms*, Linear and Multilinear Algebra **22** (1987), 149–160.

[BBCO93] C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen i M. Olivier, *Software: PARI*, (1993).

[BC91] J-F. Boutot i H. Carayol, *Courbes modulaires et courbes de Shimura*, Astérisque, vol. 196-197, cap. Uniformisation p-adique des courbes de Shimura: les théorèmes de Cerednik et Drinfeld, pp. 45–158, Soc. Math. de France, 1991.

[BD98] M. Bertolini i H. Darmon, *Heegner points, p-adic L-functions and the Cerednik-Drinfeld uniformization*, Invent. Math., **131** (1998), 453–491.

[Bes95] A. Besser, *CM cycles over Shimura curves*, J. Algebraic Geometry **4** (1995), 659–691.

[BLR91] N. Boston, H. Lenstra, i A. Ribet, *Quotients of group rings from two-dimensional representations*, C. R. Acad. Sci. Paris **312** (1991), 323–328.

[Bra24] H. Brandt, *Der Kompositionsbegriff bei den quaternären quadratischen Formen*, Math. Annalen **91** (1924), 300–315.

[Bra28] H. Brandt, *Idealtheorie in Quaternionenalgebren*, Math. Annalen **99** (1928), 1–29.

[Bra43] H. Brandt, *Zur Zahlentheorie der Quaternionen*, Jahresbericht Deutsche Math. Verein **53** (1943), 23–57.

[Brz80] J. Brzezinski, *Arithmetical quadratic surfaces of genus 0, I*, Math. Scand. **46** (1980), 183–208.

[Brz82] J. Brzezinski, *A characterization of Gorenstein orders in quaternion algebras*, Math. Scand. **50** (1982), 19–24.

[Brz83] J. Brzezinski, *On orders in quaternion algebras*, Comm. in Algebra **11** (1983), 501–522.

[Brz90] J. Brzezinski, *On automorphisms of quaternion orders*, J. reine angew. Math. **403** (1990), 166–186.

[Brz95] J. Brzezinski, *Definite quaternion orders of class number one*, J. de Théorie des Nombres de Bordeaux **7** (1995), 93–96.

[BS66] Z.I. Borevich i I.R. Shafarevich, *Number theory*, Academic Press, 1966.

[BT92] P. Bayer i A. Travesa (eds.), *Corbes modulars: Taules*, Notes del Seminari de Teoria de Nombres (UB-UAB-UPC), 1992.

[BTa] P. Bayer i A. Travesa, *Formas cuadráticas ternarias e inmersiones matriciales de órdenes cuadráticos*, per aparèixer a *Rev. Real Acad. Ciencias Físicas, Exactas y Naturales.*

[BTb] P. Bayer i A. Travesa, *Inmersiones de órdenes cuadráticos en el orden generado por* $\Gamma_0(N)$, per aparèixer a *Rev. Real Acad. Ciencias Físicas, Exactas y Naturales.*

[BTc] P. Bayer i A. Travesa, *Órdenes matriciales generados por grupos de congruencia*, per aparèixer a *Rev. Real Acad. Ciencias Físicas, Exactas y Naturales.*

[Buz97] K. Buzzard, *Integral models of certain Shimura curves*, Duke Math. J. **87** (1997), 591–612.

[Car83] H. Carayol, *Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura*, C. R. Acad. Sc. Paris **296** (1983), 557–560.

[Car86] H. Carayol, *Sur la mauvaise réduction des courbes de Shimura*, Compositio Math. **59** (1986), 151–230.

[Cer76] I.V. Cerednik, *Uniformization of algebraic curves by discrete arithmetic subgroups of* $\mathrm{PGL}_2(K_w)$ *with compact quotients*, Math. USSR Sb. **29** (1976), 55–78.

[Coh95] H. Cohen, *A course in computational algebraic number theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 138, Springer-Verlag, 1995.

[CSS97] G. Cornell, J. H. Silverman, i G. Stevens (eds.), *Modular forms and Fermat's last theorem*, Springer-Verlag, 1997, Papers from the Instructional Conference on Number Theory and Arithmetic Geometry held at Boston University, Boston, MA, 1995.

[DDT97] H. Darmon, F. Diamond, i R. Taylor, *Fermat's last theorem*, Elliptic curves, modular forms & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Internat. Press, 1997, pp. 2–140.

[Del71] P. Deligne, *Travaux de Shimura*, Séminaire Bourbaki 23 année 1970-71, Lecture Notes in Math., núm. 244, Springer-Verlag, 1971, pp. 123–165.

[Del79] P. Deligne, *Variétés de Shimura: interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 1979, pp. 247–290.

[Deu68] M. Deuring, *Algebren*, Springer-Verlag, 1968.

[Dia97a] F. Diamond, *The refined conjecture of Serre*, Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993), Internat. Press, 1997, pp. 22–37.

[Dia97b] F. Diamond, *The Taylor-Wiles construction and multiplicity one*, Invent. Math. **128** (1997), 379–391.

[DR73] P. Deligne i M. Rapoport, *Les schémas de modules de courbes elliptiques*, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp), Lecture Notes, vol. 349, Springer-Verlag, 1973, pp. 143–316.

[Dri76] V.G. Drinfeld, *Coverings of p-adic symmetric regions*, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 107–115.

[DT94] F. Diamond i R. Taylor, *Nonoptimal levels of mod l modular representations*, Invent. Math. **115** (1994), 435–462.

[Eic37] M. Eichler, *Bestimmung der Idealklassenzahl in gewissen normalen einfachen Algebren*, J. reine angew. Math. **176** (1937), 192–202.

[Eic38] M. Eichler, *Über die Idealklassenzahl hyperkomplexer Systeme*, Math. Z. **43** (1938), 481–494.

[Eic55a] M. Eichler, *Über die Darstellbarkeit von Modulformen durch Thetareihen*, J. reine angew. Math. **195** (1955), 156–171.

[Eic55b] M. Eichler, *Zur Zahlentheorie der Quaternionen-Algebren*, J. reine angew. Math. **195** (1955), 127–151.

[Eic58] M. Eichler, *Quadratische Formen und Modulfunktionen*, Acta Arith. **4** (1958), 217–239.

[Elk98] N.D. Elkies, *Shimura curve computations*, Lect. Notes in Computer Science **1423** (1998), 1–49.

[FJ95] G. Faltings i B. W. Jordan, *Crystalline cohomology and* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Q})$, Israel J. Math. **90** (1995), 1–66.

[For51] L. R. Ford, *Automorphic functions*, 2na ed., Chelsea, 1951.

[FK1897] R. Fricke i F. Klein, *Vorlesungen Über die Theorie der automorphen Funktionen*, Leipizig, 1897.

[Fri1893] R. Fricke, *Zur gruppentheoretischen Grundlegung der automorphen Funktionen*, Math. Ann. **42** (1893), 564–597.

[Gau1801] C.F. Gauss, *Disquisitiones arithmeticae*, Gerh. Fleischer, 1801. Traducció al català per G. Pascual, IEC, Soc. Cat. Mat, 1996.

[Ger79] P. Gerardin, *Variétés de Shimura et fonctions L*, Publ. Math. Univ. Paris VII, núm. 6, cap. Algebres de quaternions, pp. 145–155, L. Breen and J.P. Labesse, 1979.

[God78] R. Godement, *Algebra*, Ed. Tecnos, 1978.

[GKZ87] B. Gross, W. Kohnen, i D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series II*, Math. Annalen **278** (1987), 497–562.

[GZ86] B. Gross i D. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Invent. Math. **84** (1986), 225-320.

[Hij74] H. Hijikata, *Explicit formula of the traces of Hecke operators for* $\gamma_0(n)$, J. Math. Soc. Japan. **26** (1974), 56-82.

[HM95] K. Hashimoto i N. Murabayashi, *Shimura curves as intersections of Humbert surfaces and defining equations of QM-curves of Genus two*, Tôhoku Math. J. **47** (1995), 271–296.

[Iha68] Y. Ihara, *The congruence monodromy problem*, J. Math. Soc. Japan **20** (1968), 107–121.

[Iha69] Y. Ihara, *On congruence monodromy problems*, Lecture Notes Univ. Tokyo, vol. 1-2, 1969.

[Ish75] N. Ishii, *An application of the Fricke formula for quaternion groups*, Mathematica Japonicae **20** (1975), 171–177.

[Ji98] S. Ji, *Analogs of* $\Delta(z)$ *for triangular Shimura curves*, Acta Arith. **85** (1998), 97–108.

[JL85] B.W. Jordan i R. Livné, *Local diophantine properties of Shimura curves*, Math. Annalen **270** (1985), 235–248.

[JL86] B.W. Jordan i R. Livné, *On the Néron model of jacobians of Shimura curves*, Compositio Math. **60** (1986), 227–236.

[JL87] B.W. Jordan i R. Livné, *Divisor classes on Shimura curves rational over local fields*, J. reine angew. Math. **378** (1987), 46–52.

[JL89] B.W. Jordan i R. Livné, *Conjecture epsilon for weight $k > 2$*, Bull. Amer. Math. Soc. **21** (1989), 51–56.

[JL99] B.W. Jordan i R. Livné, *On Atkin-Lehner quotients of Shimura curves*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 681–685.

[Jon67] B.W. Jones, *The arithmetic theory of quadratic forms*, The mathematical association of America, 1967.

[Jor81] B.W. Jordan, *On the diophantine arithmetic of Shimura curves*, Ph.D. thesis, Harvard University, 1981.

[Jor84] B.W. Jordan, *p-adic points on Shimura curves*, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1982-83 (M.J. Bertin i C. Goldstein, eds.), Progress in Math., vol. 51, Birkhäuser, 1984, pp. 135–142.

[Jor86] B.W. Jordan, *Points on Shimura curves rational over number fields*, J. reine angew. Math. **371** (1986), 92–114.

[Kam90] S. Kamienny, *Points on Shimura curves over fields of even degree*, Math. Annalen **286** (1990), 731–734.

[Kit93] Y. Kitaoka, *Arithmetic of quadratic forms*, Cambridge Tracts in Mathematics, núm. 106, Cambrigde University Press, 1993.

[KM85] N. M. Katz i B. Mazur, *Arithmetic moduli of elliptic curves*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985.

[Kur79] A. Kurihara, *On some exemples of equations defining Shimura curves and the Mumford uniformization*, J. Fac. Sci. Tokyo **25** (1979), 277–300.

[Kur94] A. Kurihara, *On p-adic Poincaré series and Shimura curves*, Internat. J. Math. **5** (1994), 747–763.

[Lat36] C.G. Latimer, *The quadratic subfields of a generalized quaternion algebra*, Duke Math. J. **2** (1936), 681–684.

[Lat37] C.G. Latimer, *The classis of integral sets in a quaternion algebra*, Duke Math. J. **3** (1937), 237–247.

[Leh64] J. Lehner, *Discontinuous groups and automorphic functions*, Mathematical Surveys n.8, American Mathematical Society, 1964.

[Leh92] J.L. Lehman, *Levels of positive definite ternary quadratic forms*, Math. of Computation **58** (1992), 399–417.

[Lin93] S. Ling, *Shimura subgroups of jacobians of Shimura curves*, Proceedings of the Amer. Math. Soc. **118** (1993), 385–390.

[Llo] P. Llorente, *Correspondencia entre formas ternarias enteras y órdenes cuaterniónicos*, per aparèixer a *Rev. Real Acad. Ciencias Físicas, Exactas y Naturales.*

[Mic81a] J.F. Michon, *Courbes de Shimura de genre 1*, Séminaire Delange-Pisot-Poitou (1981).

[Mic81b] J.F. Michon, *Courbes de Shimura hyperelliptiques*, Bull. Soc. Math. France **109** (1981), 217–225.

[Mor81] Y. Morita, *Reduction mod $\mathfrak{p}$ of Shimura curves*, Hokkaido Math. J. **10** (1981), 209–238.

[MR91] B. Mazur i K. A. Ribet, *Courbes modulaires et courbes de Shimura*, Astérisque, vol. 196-197, cap. Two-dimensional representations in the arithmetic of modular curves, pp. 215–255, Soc. Math. de France, 1991.

[Ogg69] A. Ogg, *Modular forms and Dirichlet series*, Mathematics Lecture Note Series, W.A. Benjamin, Inc., 1969.

[Ogg74] A.P. Ogg, *Hyperelliptic modular curves*, Bull. Soc. math. France **102** (1974), 449–462.

[Ogg83] A.P. Ogg, *Real points on Shimura curves*, Progress in mathematics, núm. 35, Birkhäuser, 1983, pp. 277–303.

[Ogg85] A.P. Ogg, *Mauvaise réduction des courbes de Shimura*, Progress in mathematics, núm. 59, Birkhäuser, 1985, pp. 199–217.

[Piz73] A. Pizer, *Type numbers of Eichler orders*, J. reine angew. Math. **264** (1973), 76–102.

[Piz76a] A. Pizer, *On the arithmetic of quaternion algebras I*, Acta Arith. **31** (1976), 61–89.

[Piz76b] A. Pizer, *On the arithmetic of quaternion algebras II*, J. Math. Soc. Japan **28** (1976), 676–688.

[Piz80] A. Pizer, *An algorithm for computing modular forms on $\Gamma_0(N)^*$*, Journal of Algebra **64** (1980), 340–390.

[Poi1887] H. Poincaré, *Les fonctions fuchsiennes et l'arithmétique*, J. Math. 4 (1887), 405–464, en *Ouvres Completes* vol.II, 463-511, Gauthier-Villars, 1952.

[Ray70] M. Raynaud, *Specialisation du foncteur de Picard*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **38** (1970), 27–76.

[Rei75] I. Reiner, *Maximal Orders*, Academic Press, 1975.

[Rib80] K.A. Ribet, *Sur les variétés abéliennes à multiplications réelles*, C.R. Acad. Sci. Paris **291** (1980), 121–123.

[Rib89] K.A. Ribet, *Bimodules and abelian surfaces*, Advanced Studies in Pure Mathematics **17** (1989), 359–407.

[Rib90] K.A. Ribet, *On modular representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ *arising from modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 431–476.

[Rib91] K.A. Ribet, *Lowering the levels of modular representations without multiplicity one*, Duke Math. J. **62** (1991), 15–19.

[Rib94] K. A. Ribet, *Report on mod l representations of* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Motives* (Seattle, WA, 1991), Amer. Math. Soc., 1994, pp. 639–676.

[RT97] K. A. Ribet i S. Takahashi, *Parametrizations of elliptic curves by Shimura curves and by classical modular curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **94** (1997), 11110–11114, Elliptic curves and modular forms (Washington, DC, 1996).

[Rob89] D. P. Roberts, *Shimura curves analogous to* $X_0(N)$, Ph.D. thesis, Harvard University, 1989.

[Ser73] J.P. Serre, *A course in arithmetic*, Graduate texts in Mathematics, núm. 7, Springer-Verlag, 1973.

[Ser79] J.P. Serre, *Local fields*, Graduate texts in Mathematics, núm. 67, Springer-Verlag, 1979.

[Ser87] J. Serre, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Duke Math. J. **54** (1987), 179–230, en *Oeuvres-Collected Papers*, vol. IV, Springer-Verlag, 2000.

[Shi59] G. Shimura, *On the theory of automorphic functions*, Annals of Math. **70** (1959), 101–144.

[Shi61] G. Shimura, *On the zeta-functions of the algebraic curves uniformized by certain automorphic functions*, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 275–331.

[Shi63] G. Shimura, *On analytic families of polarized abelian varieties and automorphic functions*, Annals of Math. **78** (1963), 149–192.

[Shi65] G. Shimizu, *On zeta functions of quaternion algebras*, Annals of Math. **81** (1965), 166–193.

[Shi66] G. Shimura, *Moduli and fibre systems of abelian varieties*, Annals of Math. **83** (1966), 294–338.

[Shi67] G. Shimura, *Construction of class fields and zeta functions of algebraic curves*, Annals of Math. **85** (1967), 58–159.

[Shi70a] G. Shimura, *On canonical models of arithmetic quotients of bounded symetric domains I*, Annals of Math. **91** (1970), 144–222.

[Shi70b] G. Shimura, *On canonical models of arithmetic quotients of bounded symetric domains II*, Annals of Math. **92** (1970), 528–549.

[Shi71] G. Shimura, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Princeton University Press, 1971.

[Shi75] G. Shimura, *On the real points of arithmetic quotient of a bounded symetric domain*, Math. Annalen **215** (1975), 135–164.

[Sie35] C.L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, Annals of Math. **36** (1935), 527–606, en *Gesammelte Abhandlungen*, vol. I, Springer-Verlag, 1966.

[Sie44] C.L. Siegel, *On the theory of indefinite quadratic forms*, Annals of Math. **45** (1944), 577–622, en *Gesammelte Abhandlungen*, vol. II, Springer-Verlag, 1966.

[Sie71] C.L. Siegel, *Topics in complex function theory vol. II*, Wiley-Interscience, 1971.

[Tak75] K. Takeuchi, *A characterization of arithmetic fuchsian groups*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 600–612.

[Tak77a] K. Takeuchi, *Arithmetic triangle groups*, J. Math. Soc. Japan **29** (1977), 91–106.

[Tak77b] K. Takeuchi, *Commensurability classes of arithmetic triangle groups*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, I.A. **24** (1977), 201–212.

[TW95] R. Taylor i A. Wiles, *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Annals of Math. **141** (1995), 553–572.

[vdP89] M. van-der Put, *Les courbes de Shimura*, Séminaire de Theorie des Nombres de Bordeaux **1** (1989), 89–102.

[Vig80] M.F. Vigneras, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Lecture Notes in Math., núm. 800, Springer-Verlag, 1980.

[Wil95] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Math. **141** (1995), 443–551.

[Zag81] D. Zagier, *Zetafunktionen und quadratische Körper*, Hochschultex, Springer-Verlag, 1981.