

3 ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD

Una vez se ha obtenido una solución en RP, el siguiente problema que se debe abordar es la investigación de la estabilidad de esta solución. Por una lado, los métodos temporales descritos en el capítulo de introducción reproducen de tal modo el comportamiento del circuito que únicamente obtienen soluciones estables, a no ser que se utilicen técnicas especiales, por ejemplo de tiempo inverso. Por otro lado, la mayoría de los métodos de determinación directa del RP presentan la peculiaridad de obtener indistintamente soluciones estables e inestables.

La obtención de estas soluciones inestables, lejos de ser un efecto no deseado, permite profundizar en el conocimiento teórico de los sistemas y comprender mejor su funcionamiento. Así, el estudio de la estabilidad de una solución en función de un parámetro es particularmente útil ya que el conocimiento de los puntos de bifurcación puede asegurar el funcionamiento de ciertos circuitos, por ejemplo un divisor de frecuencia, en la zona deseada. Sea por uno u otro motivo, se hace evidente la necesidad de discernir las soluciones estables de las inestables.

En el método clásico la investigación de la estabilidad de un sistema de tiempo continuo se realiza perturbando las condiciones iniciales de las variables de estado que conducen directamente a una solución periódica. La evolución de estas perturbaciones al transcurrir el tiempo se determina a partir de las derivadas parciales de la solución respecto al tiempo y las variables de estado. Estas derivadas parciales, evaluadas transcurridos T segundos, constituyen los elementos de la llamada matriz de monodromía [Par-89]-[Sey-88] cuyos autovalores aportan directamente información sobre la estabilidad de la solución.

Evidentemente, el conocimiento de estas derivadas requiere de una solución expresada en forma analítica. Dado que, en general, no es posible obtener soluciones analíticas al tratar con sistemas no lineales, el estudio clásico de la estabilidad, basado en la matriz de monodromía, únicamente se puede realizar de forma numérica.

Dificultades añadidas aparecen al trabajar con sistemas en los que aparece retardo. En éstos, es necesario conocer las variables de estado en cada uno de los elementos dinámicos en todo un intervalo de tiempo de duración igual al retardo máximo del circuito¹. Esto es equivalente a decir que el número de condiciones iniciales es infinito y, en consecuencia, que la matriz de monodromía es de dimensiones infinitas. Este problema podría solventarse discretizando la solución, pero con ello abandonamos el dominio temporal continuo. Esto da una idea de las dificultades en estudiar la estabilidad de las soluciones de un circuito no lineal con parámetros distribuidos de forma analítica. La bibliografía más reciente de *IEEE Trans. Circuits Syst.* se limita al estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio, por ejemplo [Hos-94].

Los métodos de determinación directa de la respuesta en RP deben estudiar la estabilidad de las soluciones utilizando métodos numéricos. Así, en el método de HB la estabilidad de las soluciones se investiga usando técnicas de perturbación [Riz-85] o métodos de continuación [Hen-86]. Sin embargo, las soluciones obtenidas usando el método DTA–Gear admiten un estudio alternativo de la estabilidad, basado en la definición de estabilidad de un sistema continuo trasladada a un sistema discreto.

¹ A diferencia de los circuitos de parámetros concentrados en que únicamente es necesario conocer las variables de estado en un instante de tiempo, $t=0^-$.

Este capítulo se estructura del siguiente modo. En la primera sección se realiza la descripción del método de análisis de la estabilidad de las soluciones obtenidas utilizando el método DTA–Gear. A continuación se extienden los resultados a circuitos con alinealidades especiales. En la tercera sección se describe un método semi–analítico para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio en circuitos de parámetros distribuidos. Este método se utilizará como referencia para validar los resultados obtenidos al estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio del TDCC. Finalmente, se estudia la estabilidad de soluciones periódicas del TDCC.

3.1 Estabilidad de las soluciones

En [Mir-96] se describe un método numérico para estudiar la estabilidad de soluciones obtenidas utilizando el método DTA–Gear restringido a circuitos con parámetros concentrados. Este método se basa en la construcción de un mapeo implícito, cuyo Jacobiano aporta información acerca de la estabilidad de la solución obtenida. En esta referencia se demuestra la relación entre los autovalores de la matriz de monodromía y los autovalores del Jacobiano del mapeo implícito.

La extensión de este método a los circuitos con retardo es uno de los objetivos de esta tesis. No obstante, intentar buscar una relación entre los autovalores del Jacobiano del mapeo implícito y los de la matriz de monodromía carece de sentido en circuitos con retardo. Sin embargo, es posible chequear la validez del método numérico al contrastar los resultados con aquellos obtenidos de forma semi–analítica para puntos de equilibrio. La técnica que se describirá a continuación para determinar la estabilidad de las soluciones obtenidas utilizando el método DTA–Gear es tal que se realiza *a posteriori*, sin necesidad de modificar el método de análisis descrito en el capítulo 2. Además, la construcción del Jacobiano a partir del que se estudia la estabilidad se realiza utilizando las mismas matrices que forman parte de la formulación DTA–Gear. Este método se basa en la construcción de un mapeo implícito, en el cual una de las muestras de la VC se expresa a partir de m muestras anteriores. Estas m muestras anteriores, llamadas memoria del circuito, son suficientes para reconstruir todo un periodo de la solución. Así, las m muestras de un sistema discretizado desempeñan el papel que realizan las variables de estado en un sistema continuo. De este modo, basándonos en la definición de estabilidad de un sistema continuo trasladada a un sistema discreto, el estudio de la estabilidad de la solución se realiza observando la evolución de estas muestras al ser perturbadas. De forma similar a lo que ocurre con la matriz de monodromía, los autovalores del Jacobiano de este mapeo implícito, aportan información sobre la estabilidad de la solución.

Las ideas reseñadas anteriormente se aplican del siguiente modo. En primer lugar hay que fijar la memoria m de un sistema discretizado. En circuitos de parámetros concentrados, la memoria se define a partir del orden n del subcircuito lineal y del orden g de la discretización utilizada mediante la relación

$$m = ng . \quad (3.1)$$

Esta expresión indica que la derivada n -ésima de una muestra se aproxima utilizando esa muestra y las m muestras anteriores. En un circuito de parámetros distribuidos, como el de la Fig. 2. 11, la muestra retardada 2τ segundos se aproxima utilizando las q_2+g muestras anteriores a ésta, con $q_2\Delta < 2\tau < (q_2+1)\Delta$ y Δ la distancia entre muestras. Cada una de las sucesivas derivadas de una muestra retardada necesita de g muestras más. Así, considerando un circuito en el que se calcule la derivada n -ésima de una muestra retardada 2τ segundos la memoria es

$$m = q_2 + (n+1)g . \quad (3.2)$$

Fijada la memoria del circuito, observamos que cualquiera de las N ecuaciones de la formulación matricial DTA–Gear para circuitos autónomos²

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}) + c_2\mathbf{v}_b = \mathbf{0} , \quad (3.3)$$

se puede escribir como una combinación no lineal de $m+1$ muestras consecutivas de la VC del modo

$$\sum_{k=0}^m a_k x_{n-k} + \sum_{k=0}^m b_k^1 f(x_{n-k}) + \hat{c}_2 = 0 , \quad (3.4)$$

con

² Los resultados para circuitos excitados son exactamente los mismos que para circuitos autónomos, ya que en la linealización del sistema de ecuaciones alrededor de la solución desaparecen las excitaciones, sean éstas constantes o periódicas.

$$a_k = \mathbf{A}(k+1,1), \quad b_k^1 = \mathbf{B}_1(k+1,1) \text{ y } \hat{c}_2 = c_2 v_b. \quad (3.5)$$

Obsérvese que la muestra x_n de (3.4) se puede calcular de forma implícita a partir de las m muestras anteriores. Una vez calculada x_n , es posible calcular la siguiente muestra x_{n+1} a partir de x_n y de las $m-1$ muestras anteriores a x_n . Con esta idea en mente, y definiendo el subvector de m muestras de la VC

$$\mathbf{x}_n = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-m+1}]^T, \quad (3.6)$$

la ecuación (3.4) se puede ver como un mapeo implícito a través del cual el subvector \mathbf{x}_{n+1} se obtiene a partir del subvector anterior a éste, \mathbf{x}_n , mediante la relación

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi(\mathbf{x}_n). \quad (3.7)$$

Nótese que este mapeo podría ser utilizado para, partiendo de \mathbf{x}_n (unas condiciones iniciales), calcular el transitorio hasta obtener el RP. Consideremos ahora la obtención de una solución periódica \mathbf{x}^* de (3.3). Cualquier subvector \mathbf{x}_n^* de m elementos de \mathbf{x}^* es un punto fijo del mapeo φ repetido N veces a lo largo de un periodo. Así, el mapeo compuesto φ^N cumple la relación

$$\mathbf{x}_n^* = \mathbf{x}_{n+N}^* = \varphi^N(\mathbf{x}_n^*). \quad (3.8)$$

Definido este mapeo, podemos estudiar la estabilidad de la solución perturbando la memoria del circuito en un instante de tiempo arbitrario, por ejemplo

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1^* + \mathbf{w}_1. \quad (3.9)$$

La evolución de la perturbación \mathbf{w}_1 al cabo de un periodo informa sobre la estabilidad de la solución. La linealización del mapeo implícito alrededor de la solución en cada instante de tiempo permite obtener una expresión analítica de la evolución de esta perturbación. Efectivamente, la perturbación \mathbf{w}_2 en el siguiente instante de tiempo puede ser expresada en función de \mathbf{w}_1 usando la relación

$$\mathbf{x}_2 = \varphi(\mathbf{x}_1),$$

$$\mathbf{x}_2^* + \mathbf{w}_2 = \varphi(\mathbf{x}_1^* + \mathbf{w}_1) = \varphi(\mathbf{x}_1^*) + \mathbf{J}_2 \mathbf{w}_1, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{J}_2 \mathbf{w}_1.$$

Esta idea trasladada un instante de tiempo más adelante permite expresar \mathbf{w}_3 en función de \mathbf{w}_1 utilizando la expresión anterior y

$$\mathbf{x}_3 = \varphi(\mathbf{x}_2),$$

$$\mathbf{x}_3^* + \mathbf{w}_3 = \varphi(\mathbf{x}_2^* + \mathbf{w}_2) = \varphi^2(\mathbf{x}_1^*) + \mathbf{J}_3 \mathbf{J}_2 \mathbf{w}_1, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{J}_3 \mathbf{J}_2 \mathbf{w}_1.$$

Finalmente, con la repetición de este proceso N veces hasta completar un periodo se obtiene

$$\mathbf{x}_{N+1}^* + \mathbf{w}_{N+1} = \varphi^N(\mathbf{x}_1^*) + \mathbf{J} \mathbf{w}_1, \quad (3.12)$$

relación que utilizando (3. 8) se transforma en

$$\mathbf{x}_1^* + \mathbf{w}_{N+1} = \mathbf{x}_1^* + \mathbf{J} \mathbf{w}_1. \quad (3.13)$$

Antes de continuar, conviene realizar la definición de las matrices Jacobiano que han ido apareciendo en los desarrollos anteriores y que se ha obviado en aras de una mayor claridad. Así, definimos

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{N+1} \mathbf{J}_N \cdots \mathbf{J}_3 \mathbf{J}_2, \quad (3.14)$$

con

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x_n} & \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-m+1}} & \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-m}} \\ \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-2}} & \dots & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-m+1}} & \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-m}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

donde, teniendo en cuenta (3.4), los elementos de la primera fila de \mathbf{J}_n se calculan utilizando

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-k}} = \frac{a_k + b_k f'(x_{n-k})}{a_0 + b_0 f'(x_n)}. \quad (3.16)$$

Analicemos ahora en profundidad el resultado obtenido en (3.13). Esta expresión indica que la perturbación inicial se ha transformado al cabo de un periodo en una perturbación en la que interviene el Jacobiano \mathbf{J} del mapeo compuesto φ^N . Esquemáticamente, esta transformación se puede ver del modo

$$\mathbf{w}_1 \xrightarrow{T} \mathbf{J}\mathbf{w}_1. \quad (3.17)$$

Considerando la descomposición de la perturbación inicial como combinación lineal de los autovectores $\hat{\mathbf{w}}_i$ del Jacobiano del modo

$$\mathbf{w}_1 = \sum_{i=1}^m c_i \hat{\mathbf{w}}_i, \quad (3.18)$$

la evolución de la perturbación queda expresada, en última instancia, en función de los autovalores λ_i del Jacobiano mediante la relación

$$\hat{\mathbf{w}}_i \xrightarrow{T} \lambda_i \hat{\mathbf{w}}_i. \quad (3.19)$$

A partir de esta expresión, es posible determinar el valor de la perturbación al cabo de k periodos como

$$\hat{\mathbf{w}}_i \xrightarrow{kT} \lambda_i^k \hat{\mathbf{w}}_i. \quad (3. 20)$$

Llegados a este punto, la estabilidad de la solución obtenida utilizando el método DTA–Gear se determina a partir de los autovalores del Jacobiano del mapeo compuesto del siguiente modo:

1. En circuitos autónomos existe **siempre un autovalor igual a la unidad**, ya que este tipo de circuitos admite infinitas soluciones retardadas unas de las otras un tiempo arbitrario. Así, el autovector relacionado con el autovalor unidad es tal que al sumarse a la solución se obtiene la misma solución desplazada.
2. Si el resto de los autovalores tiene **módulo menor que la unidad**, entonces la **solución es estable**. Los autovectores asociados a estos autovalores irán decreciendo al transcurrir el tiempo según indica (3. 20).
3. Si al menos uno de los autovalores es de **módulo mayor que la unidad**, entonces la **solución es inestable**. Los autovectores asociados a estos autovalores crecerán al transcurrir el tiempo según indica (3. 20).
4. La existencia de otros autovalores de módulo igual a la unidad corresponde a casos especiales. Así, la existencia de un autovalor $\lambda=-1$ indica que la perturbación se repite cada dos periodos, según (3. 20) con $k=2$, informando de la existencia de una bifurcación de **desdoblamiento de órbitas**. Del mismo modo, la existencia de un autovalor

$$\lambda = e^{j \frac{2\pi}{k}}, \quad (3. 21)$$

indicaría la existencia de una solución de periodo k veces el de la solución estudiada. Por otro lado, cuando la fase de un autovalor de módulo unidad no es submúltiplo de 2π estamos ante una **bifurcación de Hopf**, la cual informa de la existencia de una solución cuasiperiódica. Finalmente, en circuitos excitados, la aparición de un autovalor unidad informa de la coexistencia de dos soluciones de igual periodo muy cercanas, hecho que únicamente puede aparecer en un **punto límite**.

Finaliza aquí la descripción de la técnica de análisis de la estabilidad de las soluciones obtenidas mediante la formulación DTA–Gear. Como se ha visto, este estudio se reduce al cálculo de los autovalores del Jacobiano del mapeo implícito de dimensiones $m \times m$, siendo m la memoria del circuito discretizado. Debe destacarse que el Jacobiano se construye directamente a partir de las mismas matrices que forman parte de la formulación DTA–Gear.

3.2 Reformulación de los resultados para alinealidades especiales

Los resultados anteriores son válidos para circuitos con una alinealidad estática controlada por una VC. En el capítulo 2 se ha modificado la formulación DTA–Gear para contemplar alinealidades estáticas con dos VC y alinealidades dinámicas. Veamos cómo se estudia la estabilidad de las soluciones obtenidas con estas formulaciones. Sobra decir que la clave en el estudio de la estabilidad se encuentra en la construcción de un mapeo implícito que relacione una muestra con las anteriores.

3.2.1 Alinealidad estática con dos variables de control

La formulación DTA–Gear obtenida para analizar circuitos con alinealidades estáticas controladas por dos VC se puede descomponer en dos sistemas de N ecuaciones cada uno, similares a los que aparecen al tratar con una alinealidad estática controlada por una VC:

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x}_a + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) + c_2 \mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x}_b + \mathbf{B}_3(T)\mathbf{f}(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) + c_4 \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Cualquiera de las N ecuaciones de cada uno de estos sistemas de ecuaciones se puede escribir como una combinación no lineal de $m+1$ muestras consecutivas de cada una de las dos VC del modo

$$\sum_{k=0}^m a_k x_{a,n-k} + \sum_{k=0}^m b_k^1 f(x_{a,n-k}, x_{b,n-k}) + \hat{c}_2 = 0, \quad (3.24)$$

$$\sum_{k=0}^m a_k x_{b,n-k} + \sum_{k=0}^m b_k^3 f(x_{a,n-k}, x_{b,n-k}) + \hat{c}_4 = 0, \quad (3.25)$$

donde se ha utilizado la misma notación para los coeficientes que en la sección anterior y m coincide con el valor dado en (3.2). Obsérvese que al existir dos ecuaciones que relacionan $2(m+1)$ muestras en total, una muestra de cada una de las dos VC se puede expresar a partir de las restantes $2m$ muestras. Este planteamiento nos conduce a definir el vector

$$\mathbf{x}_n = [x_{a,n}, x_{a,n-1}, \dots, x_{a,n-m+1}, x_{b,n}, x_{b,n-1}, \dots, x_{b,n-m+1}]^T, \quad (3.26)$$

formado por m muestras consecutivas de cada una de las dos VC: $2m$ muestras en total. Este vector permite construir el mapeo implícito

$$\mathbf{x}_{n+1} = \varphi(\mathbf{x}_n), \quad (3.27)$$

definido por las ecuaciones (3.24) y (3.25). A partir de esta expresión es posible repetir el razonamiento anterior hasta obtener el Jacobiano del mapeo implícito

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_N \mathbf{J}_{N-1} \cdots \mathbf{J}_3 \mathbf{J}_2, \quad (3.28)$$

cuyos autovalores determinan la estabilidad de la solución. La diferencia respecto al caso anterior estriba en las matrices \mathbf{J}_n , las cuales se definen a partir de

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_n^{aa} & \mathbf{J}_n^{ab} \\ \mathbf{J}_n^{ba} & \mathbf{J}_n^{bb} \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

con

$$\mathbf{J}_n^{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{i,n}}{\partial x_{j,n-1}} & \frac{\partial x_{i,n}}{\partial x_{j,n-2}} & \dots & \frac{\partial x_{i,n}}{\partial x_{j,n-m+1}} & \frac{\partial x_{i,n}}{\partial x_{j,n-m}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

donde, de acuerdo con (3.24) y (3.25), los elementos de la primera fila se calculan utilizando

$$\frac{\partial x_{a,n}}{\partial x_{a,n-k}} = -\frac{k_2 k_6 - k_3 k_5}{k_1 k_5 - k_2 k_4},$$

$$\frac{\partial x_{a,n}}{\partial x_{b,n-k}} = -\frac{k_2 k_8 - k_5 k_7}{k_1 k_5 - k_2 k_4},$$

$$\frac{\partial x_{b,n}}{\partial x_{a,n-k}} = -\frac{k_1 k_6 - k_3 k_4}{k_1 k_5 - k_2 k_4},$$

$$\frac{\partial x_{b,n}}{\partial x_{b,n-k}} = -\frac{k_3 k_8 - k_4 k_7}{k_1 k_5 - k_2 k_4},$$

con

$$k_1 = a_0 + b_0^1 f'_a(x_{a,n}, x_{b,n}),$$

$$k_2 = b_0^1 f'_b(x_{a,n}, x_{b,n}),$$

$$k_3 = a_k + b_k^1 f'_a(x_{a,n-k}, x_{b,n-k}),$$

$$k_4 = b_0^3 f'_a(x_{a,n}, x_{b,n}),$$

$$k_5 = a_0 + b_0^3 f'_b(x_{a,n}, x_{b,n}),$$

$$k_6 = b_k^3 f'_a(x_{a,n-k}, x_{b,n-k}),$$

$$k_7 = b_k^1 f'_b(x_{a,n-k}, x_{b,n-k}),$$

$$k_8 = a_k + b_k^3 f'_b(x_{a,n-k}, x_{b,n-k}).$$

Una vez definido el Jacobiano del mapeo implícito la estabilidad se estudia a partir de sus autovalores del modo indicado en el capítulo 3.1. Debe advertirse que si la memoria del circuito es m , las dimensiones del Jacobiano son $(2m) \times (2m)$, al existir dos VC.

3.2.2 Alinealidad dinámica

El estudio de la estabilidad de las soluciones de circuitos con alinealidad dinámica debe empezar con una redefinición de la memoria del circuito discretizado. Así, la memoria definida anteriormente

$$m = q_2 + (n+1)g, \quad (3.31)$$

se reconvierte ahora en

$$m_2 = q_2 + (n+2)g, \quad (3.32)$$

donde el incremento de la memoria en g unidades es causado por la alinealidad dinámica, cuyo valor en un instante determinado se evalúa a partir de las muestras de la variable de control en ese instante y en los g anteriores. Cualquiera de las N ecuaciones de la formulación DTA–Gear para alinealidades dinámicas

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(T)[\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{10}(T)\mathbf{x}] + c_2\mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (3.33)$$

se puede escribir como una combinación no lineal de m_2+1 muestras consecutivas de la VC del modo

$$\sum_{k=0}^m a_k x_{n-k} + \sum_{k=0}^m b_k^1 \left[g(x_{n-k}) \sum_{j=0}^g c'_j x_{n-k-j} \right] + \hat{c}_2 = 0, \quad (3.34)$$

con

$$c'_j = \mathbf{P}_{10}(j+1,1). \quad (3.35)$$

Para el resto de coeficientes se ha utilizado la notación de las secciones anteriores. El desarrollo de las expresiones que conducen a la obtención del Jacobiano a partir del cual se determina la estabilidad es idéntico al realizado en el capítulo 3.1. La única diferencia radica en el mapeo implícito que, en el caso que nos ocupa, viene determinado por (3.34), y que repercute en el cálculo de los elementos de la primera fila del Jacobiano

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-2}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-m_2+1}} & \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-m_2}} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

que se determinan a partir de

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-k}} = - \frac{a_k + b_k g'(x_{n-k}) \sum_{j=0}^g c'_j x_{n-k-j} + \sum_{j=0}^{\min\{k,g\}} b_{k-j} c'_j g(x_{n-k+j})}{a_0 + b_0 g'(x_n) \sum_{j=0}^g c'_j x_{n-j} + b_0 c'_0 g(x_n)}. \quad (3.37)$$

Definido el Jacobiano del mapeo implícito, la estabilidad se estudia a partir de sus autovalores del modo indicado en el capítulo 3.1. Las dimensiones del Jacobiano son en este caso $m_2 \times m_2$.

3.3 Estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio

La técnica para estudiar la estabilidad de soluciones obtenidas utilizando la formulación DTA–Gear se ha descrito con detalle para los distintos tipos de alinealidad. Puesto que éste es un método numérico, su fiabilidad no se puede demostrar, tan sólo comprobar. Precisamente con el objetivo de contrastar los resultados numéricos se describe en este capítulo la técnica desarrollada en [Hos-94]. En esta referencia se desarrolla un método, que llamaremos semi–analítico, para predecir el comportamiento caótico de circuitos con parámetros distribuidos. El método se basa en la determinación de la estabilidad de los puntos de equilibrio. Prescindiendo de si es posible determinar el comportamiento caótico de un circuito simplemente a partir de la estabilidad de sus puntos de equilibrio, nos centraremos en el modo de calcular la estabilidad de éstos.

En el método semi–analítico, se formulan las ecuaciones de estado que describen un circuito con parámetros concentrados y distribuidos. Formuladas las ecuaciones de estado, se determina su Jacobiano en cada uno de los puntos de equilibrio. La ecuación característica de este Jacobiano en las variables s y $e^{s\tau_k}$ puede ser resuelta para la variable s , considerando su descomposición en parte real e imaginaria, usando algoritmos de resolución iterativos. Finalmente, el valor de la parte real de las soluciones de s determina la estabilidad de las soluciones [Hal-77].

Los desarrollos que aparecen en esta referencia se particularizarán desde un principio para el TDCC, circuito que se analizará en detalle en el capítulo 3.4. Utilizando esta técnica, se obtendrán expresiones analíticas, no incluidas en la referencia, que aportan información acerca de la estabilidad y el valor que toman los autovalores de forma asintótica, sin recurrir al uso de algoritmos iterativos.

Después de esta breve presentación del método pasemos a describirlo en detalle. El método semi–analítico de análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal con parámetros concentrados y distribuidos se basa en plantear las ecuaciones de equilibrio del circuito utilizando las variables de estado adecuadas. Estas variables de estado son la tensión en terminales de los condensadores del circuito, la corriente que

atraviesa los inductores del circuito y la tensión incidente o reflejada en las líneas de transmisión. Para el TDCC representado en la Fig. 3. 1 las variables de estado escogidas son la tensión v en terminales del condensador y la tensión reflejada v_2^- a la entrada de la línea de transmisión.

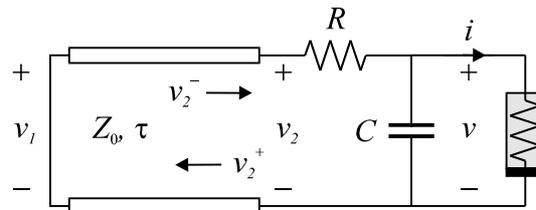


Fig. 3. 1. Circuito de Chua retardado (TDCC).

Utilizando estas variables de estado se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones que caracteriza el circuito

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ v_2^-(t+2\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R+Z_0)C} & \frac{2}{(R+Z_0)C} \\ -\frac{Z_0}{R+Z_0} & -\frac{R-Z_0}{R+Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v(t) \\ v_2^-(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{C} i(v). \quad (3.38)$$

Las ecuaciones de equilibrio se pueden particularizar con facilidad en los puntos de equilibrio, puesto que la derivada de v es nula y la variable v_2^- retardada coincide con la misma variable. Así, el sistema (3.38) particularizado en los puntos de equilibrio se escribe

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_{2,DC}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R+Z_0)C} & \frac{2}{(R+Z_0)C} \\ -\frac{Z_0}{R+Z_0} & -\frac{R-Z_0}{R+Z_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{DC} \\ v_{2,DC}^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{C} i(v_{DC}). \quad (3.39)$$

El conocimiento del valor de los puntos de equilibrio del circuito requiere la resolución de este sistema no lineal de dos ecuaciones y dos incógnitas de forma iterativa. No obstante, ya que la alinealidad del TDCC es lineal a tramos, es posible determinar el valor de los puntos de equilibrio de forma analítica. Una tercera alternativa para calcular el valor de las variables de estado en los puntos de equilibrio la constituye el análisis del circuito en continua, sustituyendo el condensador por un circuito abierto y la línea de transmisión por

un cortocircuito. De este modo, el TDCC queda reducido a una resistencia en paralelo con una alinealidad. La intersección de las respectivas características $i-v$ da la solución de v en los puntos de equilibrio. En la Fig. 3. 2 se comprueba gráficamente que cuando $R < -1/m_0$, existe un único punto de intersección situado en el origen y cuando $R > -1/m_0$ existen tres puntos de intersección : el origen y dos puntos simétricamente situados respecto al origen cuyo módulo es mayor que v_a . Es curioso constatar que cuando $R = -1/m_0$, existe todo un intervalo de posibles valores entre $-v_a$ y $+v_a$.

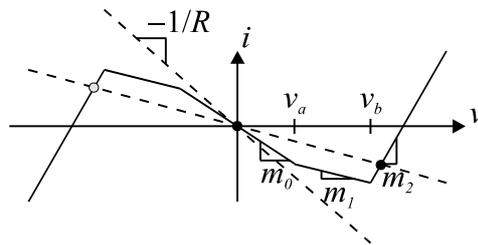


Fig. 3. 2. Intersección de la característica $i-v$ de la alinealidad del TDCC (—) y de la resistencia del circuito (- - -) para distintos valores de R .

Una vez determinado el valor de v , el valor de v_2^- se determina a partir de la segunda ecuación de (3. 39) como

$$v_{2,DC}^- = -\frac{Z_0}{2R} v_{DC} \quad (3. 40)$$

Conocido el valor de las variables de estado en los puntos de equilibrio, la dinámica del circuito se estudia linealizando el sistema alrededor de estos puntos. Así, el Jacobiano de (3. 38)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{v}(t)}{\partial v(t)} & \frac{\partial \dot{v}(t)}{\partial v_2^-(t)} \\ \frac{\partial v_2^-(t+2\tau)}{\partial v(t)} & \frac{\partial v_2^-(t+2\tau)}{\partial v_2^-(t)} \end{bmatrix}, \quad (3. 41)$$

evaluado en los puntos de equilibrio es

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -\frac{1+m_k(R+Z_0)}{(R+Z_0)C} & \frac{2}{(R+Z_0)C} \\ -\frac{Z_0}{R+Z_0} & -\frac{R-Z_0}{R+Z_0} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

donde m_k es la pendiente de la característica $i-v$ de la alinealidad del TDCC en los puntos de intersección. Como se comprueba en la Fig. 3. 2, únicamente existen tres posibles valores para m_k en función de v_{DC} según la relación

$$m_k = \begin{cases} m_0 & \text{si } |v_{DC}| < v_a \\ m_1 & \text{si } v_a < |v_{DC}| < v_b \\ m_2 & \text{si } |v_{DC}| > v_b \end{cases}. \quad (3.43)$$

El estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio se realiza añadiendo a cada una de las variables de estado las perturbaciones

$$\begin{aligned} w(t), & \quad t = 0^- \\ w_2^-(t), & \quad t = [-2\tau, 0) \end{aligned} \quad (3.44)$$

en los intervalos especificados. Así, sustituyendo en (3. 38) las relaciones

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ v_2^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{DC} + w(t) \\ v_{2,DC}^- + w_2^-(t) \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{v}(t) \\ v_2^-(t+2\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \dot{w}(t) \\ v_{2,DC}^- + w_2^-(t+2\tau) \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

y haciendo uso del Jacobiano, obtenemos una expresión que nos aporta información sobre la evolución de las perturbaciones:

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ w_2^-(t+2\tau) \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} w(t) \\ w_2^-(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ w_2^-(t) \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Al aplicar la transformada de Laplace sobre la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{bmatrix} sW(s) \\ e^{s2\tau}W_2^-(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ W_2^-(s) \end{bmatrix}, \quad (3.48)$$

expresión que se puede reconvertir en

$$\begin{bmatrix} J_{11} - s & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} - e^{s2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ W_2^-(s) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.49)$$

Al tratarse de un sistema homogéneo su determinante debe ser cero para que exista una solución no nula. Así, la resolución de la ecuación característica

$$se^{s2\tau} - e^{s2\tau}J_{11} - sJ_{22} + J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = 0, \quad (3.50)$$

para la variable compleja s ³

$$s = \sigma \pm j\omega, \quad (3.51)$$

permite determinar la evolución de las perturbaciones. Efectivamente, sustituyendo s por (3.51) en la transformada de Laplace de estas perturbaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ w_2^-(t+2\tau) \end{bmatrix} \xrightarrow{TL} \begin{bmatrix} sW(s) \\ e^{s2\tau}W_2^-(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma \pm j\omega)W(s) \\ e^{(\sigma \pm j\omega)2\tau}W_2^-(s) \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

y realizando su transformada inversa tras la sustitución, obtenemos una ecuación diferencial de primer orden en la perturbación w y una ecuación en diferencias en la perturbación w_2^- :

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ w_2^-(t+2\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\sigma \pm j\omega)w(t) \\ e^{(\sigma \pm j\omega)2\tau}w_2^-(t) \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

La resolución de la ecuación diferencial para las distintas soluciones de s permite expresar la evolución de la perturbación w como la siguiente combinación lineal

³ Se comprueba a partir de (3.50) que las raíces complejas siempre aparecen por pares conjugados.

$$w(t) = \sum_i e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i) k_i, \quad (3.54)$$

$$w(0) = \sum_i \cos(\phi_i) k_i. \quad (3.55)$$

En la resolución de la ecuación en diferencias debemos hacer intervenir las condiciones iniciales en un intervalo de duración 2τ . Con estas consideraciones, expresamos la solución de la ecuación en diferencias como

$$w_2^-(t) = w_2^-(t') \sum_i e^{\sigma_i n 2\tau} \cos(\omega_i n 2\tau + \phi_{2,i}) k_{2,i}, \quad (3.56)$$

$$1 = \sum_i \cos(\phi_{2,i}) k_{2,i}, \quad (3.57)$$

con

$$t = n 2\tau + t', \quad n > 0, \quad -2\tau < t' \leq 0. \quad (3.58)$$

A partir de (3.54) y (3.56) es inmediato comprobar que la parte real de s determina la estabilidad de la solución del siguiente modo:

1. Si todas las raíces de la ecuación característica se encuentran en el semiplano izquierdo, **parte real σ negativa**, entonces la **solución es estable**. Las soluciones asociadas a estas raíces irán decreciendo al transcurrir el tiempo con una constante de tiempo inversamente proporcional al módulo de la parte real de la raíz.
2. Si al menos una de las raíces de la ecuación característica se encuentran en el semiplano derecho, **parte real σ positiva**, entonces la **solución es inestable**.
3. La existencia de raíces imaginarias puras indica la existencia de otras soluciones. En concreto, $s=0$ indica que para el mismo parámetro otros puntos de equilibrio son posibles, caso que se produce cuando $R=-1/m_0$, como se observa en la Fig. 3. 2.

Finaliza aquí la descripción de los criterios que determinan la estabilidad de las soluciones de equilibrio del TDCC basados en el conocimiento de la parte real de las raíces de la ecuación característica. Al tratarse de una ecuación no lineal, su resolución requiere el uso

de algoritmos globalmente convergentes basados en el método de Newton. No obstante, puesto que es posible obtener resultados analíticos sobre el valor de estas raíces, el siguiente objetivo es obtener la máxima información sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio antes de recurrir al uso de algoritmos de resolución iterativos. Redefinamos la ecuación característica (3. 50) con el fin de facilitar los cálculos posteriores mediante la notación

$$se^{s2\tau} + a_1e^{s2\tau} + a_2s + a_3 = 0, \quad (3. 59)$$

donde

$$a_1 = \frac{1 + m_k(Z_0 + R)}{C(Z_0 + R)}, \quad (3. 60)$$

$$a_2 = -\frac{Z_0 - R}{Z_0 + R}, \quad (3. 61)$$

$$a_3 = a_1a_2 + \frac{2Z_0}{C(Z_0 + R)^2}. \quad (3. 62)$$

La descomposición de la solución en parte real e imaginaria utilizando $s = \sigma \pm j\omega$ transforma la ecuación característica en un sistema de dos ecuaciones no lineales:

$$e^{\sigma 2\tau} [(a_1 + \sigma) \cos(\omega 2\tau) - \omega \sin(\omega 2\tau)] + a_2\sigma + a_3 = 0, \quad (3. 63)$$

$$e^{\sigma 2\tau} [(a_1 + \sigma) \sin(\omega 2\tau) + \omega \cos(\omega 2\tau)] + a_2\omega = 0. \quad (3. 64)$$

Comprobemos qué soluciones reales admite este sistema de ecuaciones. Con $\omega=0$, la primera ecuación puede ser vista como una función en la variable σ

$$f(\sigma) = e^{\sigma 2\tau} (a_1 + \sigma) + a_2\sigma + a_3. \quad (3. 65)$$

Esta función presenta las siguientes propiedades:

- Cuando $\sigma \rightarrow +\infty$, $f(\sigma) \rightarrow +\infty$, propiedad que se cumple para cualquier parámetro del circuito.
- Cuando $\sigma \rightarrow -\infty$, $f(\sigma) \rightarrow -\infty \operatorname{sign}(a_2)$, propiedad que sólo depende del signo de a_2 .
- En el origen se cumple $f(0) = a_1 + a_3$.

De las propiedades anteriores se extraen las siguientes conclusiones:

- La consideración de a) y b) simultáneamente, permite afirmar que si $a_2 > 0$, existe una solución real.
- Más restrictivo es el resultado que aparece al considerar a) y c) simultáneamente. Entonces se puede afirmar que si $(a_1 + a_3) < 0$, existe al menos una solución con parte real positiva. En este caso, la solución es inestable. Obsérvese que esta es una condición suficiente, no necesaria, para asegurar la inestabilidad de la solución.

Una vez estudiado el caso en que $\omega = 0$, pasemos a estudiar el comportamiento asintótico en el otro extremo frecuencial $\omega \rightarrow +\infty$ ⁴. El sistema de ecuaciones (3. 63) y (3. 64) se transforma en

$$\sin(\omega 2\tau) = 0, \quad (3. 66)$$

$$e^{\sigma 2\tau} \cos(\omega 2\tau) + a_2 = 0. \quad (3. 67)$$

El cumplimiento de la primera ecuación fuerza el resultado

$$\omega = \frac{n\pi}{2\tau}, \quad (3. 68)$$

que al ser sustituido en la segunda ecuación nos conduce a

⁴ El estudio en $\omega \rightarrow -\infty$ da lugar a las mismas soluciones conjugadas.

$$e^{\sigma 2\tau}(-1)^n + a_2 = 0. \quad (3.69)$$

Si $a_2 > 0$, esta última ecuación se cumple para n impar y si $a_2 < 0$, para n par. En cualquiera de los dos casos, podemos expresar σ cuando $\omega \rightarrow +\infty$ del modo

$$\sigma = \frac{1}{2\tau} \ln|a_2| = \frac{1}{2\tau} \ln \left| \frac{R - Z_0}{R + Z_0} \right|. \quad (3.70)$$

Las ecuaciones anteriores informan de la existencia de infinitas soluciones situadas sobre una recta paralela al eje imaginario, cuya parte imaginaria en función del signo de a_2 es

$$\omega_k = \begin{cases} (2k+1) \frac{\pi}{2\tau} & a_2 > 0 \\ 2k \frac{\pi}{2\tau} & a_2 < 0 \end{cases}. \quad (3.71)$$

Las aproximaciones obtenidas para s cuando $\omega \rightarrow +\infty$ pueden ser mejoradas con el fin de obtener unas expresiones que permitan inicializar tan cerca de la solución como sea posible el algoritmo iterativo de resolución de la ecuación característica. Así, sustituyendo

$$\omega_k = \begin{cases} (2k+1) \frac{\pi}{2\tau} + \phi_k & a_2 > 0 \\ 2k \frac{\pi}{2\tau} + \phi_k & a_2 < 0 \end{cases}, \quad (3.72)$$

en (3.63) y tras una aproximación de Taylor de primer orden de las funciones seno y coseno obtenemos

$$\phi_k = \begin{cases} \frac{a_3 - a_2 a_1}{a_2 \omega_k} & a_2 > 0 \\ -\frac{a_3 - a_2 a_1}{a_2 \omega_k} & a_2 < 0 \end{cases}, \quad (3.73)$$

donde ω_k se aproxima utilizando (3.71).

Los resultados obtenidos hasta el momento, aportaciones originales de esta tesis, se pueden sumarizar del siguiente modo. Por una parte, el estudio de las soluciones reales determina

en algunos casos la estabilidad de los puntos de equilibrio. Por otra parte, se han obtenido las expresiones aproximadas de las soluciones cuando $\omega \rightarrow +\infty$ para la parte real según (3. 70) y la parte imaginaria según (3. 72) y (3. 73).

Llegados a este punto, debemos reflexionar sobre algunos aspectos relevantes en la forma de determinar la estabilidad del método semi-analítico descrito. La estabilidad de estos puntos no se determina de forma explícita, sino resolviendo un par de ecuaciones no lineales (3. 63) y (3. 64) con las incógnitas σ y ω . Otro aspecto importante es el hecho que el número de soluciones de este sistema de ecuaciones es infinito. En concreto, hemos visto que cuando $\omega \rightarrow +\infty$, existen infinitas soluciones con parte real fija y parte imaginaria múltiplo par o impar de una cantidad. A causa de esta peculiaridad nunca se podrán calcular todas las soluciones de la ecuación característica. Esto deja un cierto vacío a la hora de determinar con seguridad la estabilidad de una solución. Si bien, como hemos visto, en algunos casos es posible asegurar la existencia de una solución real en el semiplano positivo, y con ello la inestabilidad del punto de equilibrio, en general no será posible determinar con rotundidad la estabilidad de los puntos de equilibrio. En la misma referencia [Hos-94] se dice refiriéndose al TDCC:

“The simulation results indicate that each equilibrium point has one real root γ , and an infinite number of complex conjugate pols, $\sigma \pm j\omega$ ”,

confirmando que el estudio de la estabilidad se realiza en este método a partir de resultados de simulación y no de forma analítica.

Queda todavía un último punto por tratar. Éste hace referencia al hecho que nuestro objetivo final es comparar los resultados obtenidos a partir del método semi-analítico y los obtenidos usando el método numérico DTA-Gear. Dado que de forma intrínseca los resultados del método semi-analítico se obtienen en el plano s , y los del método DTA-Gear en el plano z , es obligado utilizar una transformación de un plano a otro para contrastar los resultados.

La estabilidad de una formulación DTA-Gear se determina estudiando la evolución de cada una de las perturbaciones linealmente independientes al cabo de un periodo T del modo

$$w|_{\text{DTA-Gear}}(n\Delta + T) = \lambda w|_{\text{DTA-Gear}}(n\Delta), \quad (3.74)$$

con λ en el plano z . En el método semi-analítico, la expresión equivalente a la anterior para ambas perturbaciones, siempre que $T > 2\tau$, es

$$w(t + T) = e^{(\sigma + j\omega)T} w(t), \quad (3.75)$$

con $\sigma + j\omega$ en el plano s . Así, un criterio para realizar la transformación entre planos es el de igualar las dos expresiones anteriores. Desde este punto de vista, la transformación a usar debe ser

$$z = e^{sT}. \quad (3.76)$$

Esta transformación no tiene en cuenta que el circuito estudiado, una vez realizada la discretización, ya no es el mismo. Esta discretización consiste en aproximar la derivada y el retardo de una función a partir de las muestras de esa función. Así, considerando una discretización de primer orden para facilitar los desarrollos, la transformación a usar al discretizar el operador derivada es

$$s = \frac{1 - z_i^{-1}}{\Delta}, \quad (3.77)$$

y al discretizar el operador retardo

$$e^{s2\tau} = (1 - e_2)z_i^{q_2} + e_2 z_i^{q_2+1}. \quad (3.78)$$

Ya que z relaciona dos muestras separadas $T = N\Delta$ y z_i dos muestras separadas Δ , se define la relación

$$z_i^N = z. \quad (3.79)$$

Así, otro criterio más acertado consiste en utilizar la transformación que permite, por una parte, que se cumpla

$$s e^{s2\tau} + a_1 e^{s2\tau} + a_2 s + a_3 = 0 \quad (3.80)$$

en el plano s y, por otra parte, que se cumpla

$$\frac{1-z_i^{-1}}{\Delta} \left[(1-e_2)z_i^{q_2} + e_2 z_i^{q_2+1} \right] + a_1 \left[(1-e_2)z_i^{q_2} + e_2 z_i^{q_2+1} \right] + a_2 \frac{1-z_i^{-1}}{\Delta} + a_3 = 0 \quad (3.81)$$

en el plano z . Esta última afirmación requiere de un análisis detallado. En un circuito de parámetros únicamente distribuidos, la transformación a usar es la empleada al discretizar el operador retardo. Extrapolando este resultado, se puede afirmar que en un circuito de parámetros concentrados, la transformación a usar es la empleada al discretizar el operador derivada⁵. La pregunta que surge ahora es: ¿cuál de las discretizaciones se debe usar en un circuito de parámetros concentrados y distribuidos? Aparentemente las dos, pero ¿cómo utilizar las dos al mismo tiempo?. El modo de utilizar las dos al mismo tiempo está implícitamente indicado en las dos ecuaciones anteriores. Ya que el uso de esta transformación implícita es incómodo desde un punto de vista práctico, hay que buscar alternativas.

Hasta el momento han aparecido varias expresiones, candidatas todas ellas a ser utilizadas para trasladar los resultados, por ejemplo, del plano z al plano s . Esto puede crear cierta confusión en el lector. No obstante, las dudas desaparecen al constatar que cuando $\Delta \rightarrow 0$, las expresiones utilizadas en la discretización del operador derivada y retardo converge hacia

$$e^{s\Delta} = z_i, \quad (3.82)$$

expresión que elevada a la potencia N coincide con (3.76). Así, todas las transformaciones presentadas son equivalentes si la frecuencia de muestreo es suficientemente elevada.

⁵ Esta es la técnica utilizada para estudiar la estabilidad de las discretizaciones en los métodos de integración [Rod-98].

Ya que la utilización de la transformación implícita es de difícil implementación, y no existe posibilidad de fijar un criterio que permita decidir entre las dos transformaciones de discretización del operador derivada o retardo, como norma general⁶, se utilizará la transformación (3. 76). Si utilizando esta transformación los autovalores obtenidos por el método semi-analítico y el método DTA–Gear coinciden, entonces podemos afirmar:

1. El método DTA–Gear estudia la estabilidad de forma correcta, no sólo cualitativamente, al determinar si un punto de equilibrio es estable o inestable, sino cuantitativamente al coincidir el valor de cada uno de los autovalores.
2. El circuito discretizado se comporta del mismo modo que el circuito continuo y, en consecuencia, el número de puntos utilizados para discretizar el sistema es suficientemente elevado.

Sumario

Finaliza aquí la descripción del método semi-analítico para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio particularizado para el TDCC. Por un lado, se han obtenido sencillas expresiones que permiten, en algunos casos, determinar directamente la estabilidad de los puntos de equilibrio. Por otro lado, el valor que toman las soluciones de la ecuación característica de forma asintótica se ha determinado de forma analítica. Estos resultados se utilizan y particularizan para los parámetros del TDCC estudiado en el capítulo 2.7, obteniendo así una referencia con la que validar los resultados obtenidos utilizando el método DTA–Gear.

⁶ En los casos en que se observen divergencias grandes entre unos y otros resultados, éstos se atribuirán a un cálculo incorrecto del retardo. Efectivamente, se comprobará como al utilizar la transformación de discretización del operador retardo esta divergencia desaparece.

3.4 Estabilidad de los puntos de equilibrio del TDCC

El objetivo de esta sección es validar el método numérico de estudio de la estabilidad de las soluciones obtenidas al utilizar la formulación DTA–Gear. Esta validación se realiza sobre el TDCC con los mismos valores que aparecen en el capítulo 2.7, con $R=1.85\text{k}\Omega$. Se ha escogido este circuito por ser representativo del tipo de circuitos a los que aplica el método DTA–Gear y por existir resultados semi–analíticos [Hos-94] que se utilizan como referencia. El primer paso, pues, consiste en obtener esta referencia.

3.4.1 Estudio semi–analítico. Obtención de una referencia

En el TDCC con $R=1.85\text{k}\Omega$ se cumple $R > -1/m_0$, con lo cual existen tres puntos de equilibrio. Éstos se calculan de forma analítica para $v_1 = \{-3.8614, 0, +3.8614\}$ y utilizando (3.40) para $v_2^- = \{+0.44275, 0, -0.44275\}$. El estudio de la estabilidad de cada uno de estos puntos requiere del cálculo del Jacobiano del sistema de ecuaciones en variables de estado. Este Jacobiano depende de la pendiente de la alinealidad de la Fig. 3.2 que para cada punto de equilibrio es $\{m_1, m_0, m_1\}$. Se comprueba así que los puntos de equilibrio distintos de cero presentan la misma dinámica. Por este motivo, en adelante consideraremos la estabilidad de dos puntos: *punto de equilibrio cero* y *punto de equilibrio distinto de cero*. Los valores de los coeficientes de la ecuación característica

$$se^{s2\tau} + a_1e^{s\tau} + a_2s + a_3 = 0, \quad (3.83)$$

particularizados para el TDCC que se está analizando son

$$a_1^0 = -4.7696, \quad a_2^0 = 0.62692, \quad a_3^0 = -1.3497, \quad (3.84)$$

$$a_1^1 = 0.30616, \quad a_2^1 = 0.62692, \quad a_3^1 = 1.8324, \quad (3.85)$$

donde el superíndice de los coeficientes indica si el punto de equilibrio es cero (superíndice ‘0’) o distinto de cero (superíndice ‘1’). A continuación estudiaremos la estabilidad de las soluciones continuas a partir de estos coeficientes.

Soluciones reales de la ecuación característica

En ambos puntos de equilibrio se cumple $a_2 > 0$, con lo cual la ecuación característica tiene al menos una solución real. Por otro lado, en el punto de equilibrio cero se cumple $a_1 + a_3 < 0$, de modo que, al existir una solución real positiva, se puede afirmar con rotundidad que **la solución continua cero es inestable**. En el punto de equilibrio distinto de cero $a_1 + a_3 > 0$. En este caso tan sólo se puede afirmar que existe una solución real negativa. En la Fig. 3. 3 aparece representado el valor de la ecuación característica en función de s real, comprobándose los resultados anteriores.

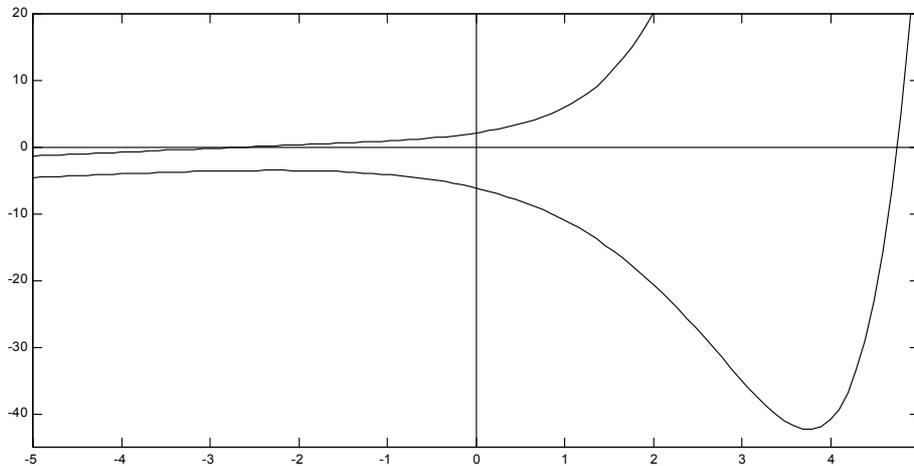


Fig. 3. 3. Solución real positiva (+4.7555) en el punto de equilibrio cero (gráf. inf.) y negativa (-2.6603) en el punto de equilibrio distinto de cero (gráf. sup.) de la ecuación característica del TDCC.

Soluciones asintóticas de la ecuación característica

La parte real de la ecuación característica cuando $\omega \rightarrow +\infty$ se expresa en función de a_2 y del retardo de la línea de transmisión. Así, el valor de la parte real que toman las soluciones de la ecuación característica de forma asintótica es

$$\sigma = -0.46694. \quad (3. 86)$$

Asimismo, el valor de la parte imaginaria que toman las soluciones de la ecuación característica de forma asintótica es

$$\omega_k = (2k + 1)\pi + \phi_k. \quad (3.87)$$

donde ϕ_k es el único término que diferencia los autovalores asintóticos de los distintos puntos de equilibrio. Ya que este término tiende a cero al aumentar k , se comprueba que las soluciones de ambos puntos de equilibrio convergen de forma asintótica. En la Fig. 3. 4 aparece una representación simultánea de las soluciones de la ecuación característica de los puntos de equilibrio, verificándose que las soluciones se sitúan equiespaciadas una distancia 2π sobre una recta paralela al eje imaginario.

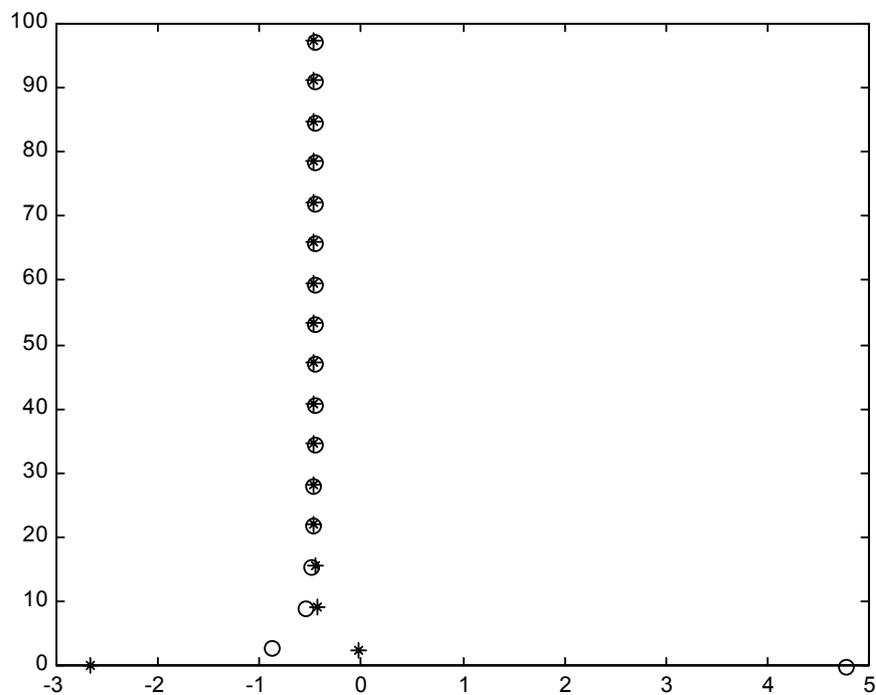


Fig. 3. 4. Autovalores en el plano s de los puntos de equilibrio del TDCC con $R=1.85k\Omega$.

Punto de equilibrio cero (o) y distinto de cero (*).

Obsérvese que al existir infinitas soluciones sobre esta recta, es obligado limitar el valor del eje vertical de representación. Por otra parte, con el fin de visualizar el máximo de soluciones, únicamente se representa el eje frecuencial positivo, dando por supuesto que la aparición de una solución compleja indica la existencia de su par conjugado. Estos mismos criterios serán utilizados en las representaciones que vendrán a continuación.

3.4.2 Aplicación del método DTA–Gear

Obtenida la referencia, pasemos a estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio del TDCC utilizando el método DTA–Gear. Recordemos que el estudio de la estabilidad se realiza a partir de las matrices utilizadas para plantear un sistema de ecuaciones con N incógnitas: el periodo y $N-1$ muestras de la variable de control. Así, el estudio de estabilidad se debe realizar considerando una solución periódica de N muestras, todas ellas del mismo valor. Se observa que sea cual sea el periodo que escojamos, el punto de equilibrio es una solución del sistema de ecuaciones. Sin embargo, el estudio de la estabilidad se debe realizar considerando un periodo mayor que el retardo máximo del circuito. Dado que el valor normalizado de 2τ es la unidad, el periodo de oscilación a considerar debe ser $T > 1$.

Centrémonos en el uso de la transformación

$$z = e^{sT}, \quad (3.88)$$

con la que podemos trasladar el estudio de la estabilidad del plano z al plano s utilizando

$$s = \frac{1}{T} \ln(z). \quad (3.89)$$

Expresando el número complejo z en su forma exponencial

$$z = |z| e^{j(\omega + 2k\pi)}, \quad (3.90)$$

se calcula la parte real e imaginaria de s como

$$s = \frac{1}{T} (\ln(|z|) + j(\omega + 2k\pi)). \quad (3.91)$$

Obsérvese que la parte imaginaria de s no queda unívocamente determinada. En el caso particular que nos ocupa, el estudio de la estabilidad de las soluciones continuas, es posible evitar esta ambigüedad. Recordemos que z corresponde a los autovalores del Jacobiano del mapeo implícito:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{N+1} \mathbf{J}_N \cdots \mathbf{J}_2. \quad (3.92)$$

Este Jacobiano se descompone en el producto de matrices que indican la evolución parcial de la perturbación de un instante de tiempo al siguiente. Al tratar con una solución continua todas estas matrices son idénticas, de modo que el Jacobiano se puede expresar como

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i^N. \quad (3.93)$$

Usando la siguiente propiedad para matrices diagonalizables

$$\mathbf{J}_i = \Lambda \mathbf{D}_i \Lambda^{-1}, \quad (3.94)$$

donde \mathbf{D}_i es una matriz diagonal

$$\mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} \lambda_{i,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{i,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{i,m} \end{bmatrix}, \quad (3.95)$$

formada por los autovalores de \mathbf{J}_i , reescribimos el Jacobiano del modo

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_i^N = \Lambda \mathbf{D}_i^N \Lambda^{-1} = \Lambda \mathbf{D} \Lambda^{-1}, \quad (3.96)$$

donde \mathbf{D} es una matriz diagonal

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

formada por los autovalores de \mathbf{J} . Así, utilizando (3.96) es posible expresar los autovalores de \mathbf{J} en función de los autovalores de \mathbf{J}_i sin más que usar la relación

$$\lambda_n = \lambda_{i,n}^N, \quad 1 \leq n \leq m. \quad (3.98)$$

Considerando que los autovalores λ_i se han obtenido en el plano z_i es posible utilizar la transformación

$$s = \frac{N}{T} (\ln(|z_i|) + j\omega_i), \quad (3.99)$$

en la que no hay ambigüedad en cuanto a la parte imaginaria de s ⁷.

Queda por tratar un último detalle referente a la transformación (3.99). En el método DTA–Gear, el número de autovalores que se obtienen es igual a la memoria m del circuito. Algunos de estos autovalores son cero⁸ como consecuencia de la alteración de la memoria real del circuito al ser discretizado. Estos autovalores son eliminados antes de realizar la transformación, ya que no aportan información acerca de la estabilidad de la solución, restando m' autovalores. La pregunta que surge a continuación es: si el número de soluciones de la ecuación característica es infinito, ¿cuáles son las m' soluciones obtenidas por el método DTA–Gear? Parece razonable suponer que las soluciones obtenidas serán aquellas que llevan asociadas perturbaciones de variación lenta. Al observar la Fig. 3.4 se advierte que las soluciones de variación rápida se encuentran sobre una recta paralela al eje imaginario, de modo que la respuesta a la pregunta anterior es: las soluciones obtenidas por el método DTA–Gear son las m' primeras soluciones del método semi-analítico ordenadas de menor a mayor módulo de la parte imaginaria. El mismo razonamiento conduce a afirmar que si se aumenta el número de muestras por periodo las nuevas soluciones halladas corresponden a las siguientes soluciones sobre la recta paralela al eje imaginario. Dado que estas nuevas soluciones no aportan más información que las anteriores, la estabilidad de un punto de equilibrio se puede determinar con un número finito de soluciones de la ecuación característica.

⁷ En esta expresión el valor de la parte imaginaria está unívocamente determinada puesto que, en un sistema bien muestreado, la perturbación no puede experimentar una variación en fase superior a 2π .

⁸ En [Mir-96] se demuestra que en circuitos de parámetros concentrados la multiplicidad de estos ceros artificiales es proporcional al orden de discretización y al orden del multipuerto lineal.

3.4.3 Comparación de resultados

Usando la transformación (3. 99) se está finalmente en condiciones de comparar los resultados numéricos del método DTA–Gear con la referencia semi–analítica. Los parámetros empleados en una primera simulación son: retardo máximo del circuito normalizado $2\tau=1$, número de muestras por periodo $N=64$, periodo de la solución continua $T=1.27$ y punto de equilibrio cero. En la Fig. 3. 5 se ilustran los resultados obtenidos para distintos ordenes de discretización. Estos son *a)* los autovalores situados sobre la recta paralela al eje imaginario se distancian de la referencia al aumentar el valor de su parte imaginaria, *b)* en Gear–4 el error de cálculo de los autovalores es mayor que en Gear–3 y *c)* se comprueba que únicamente en Gear–1 se comete un error considerable al calcular la solución real positiva. Analicemos en detalle cada una de estas observaciones.

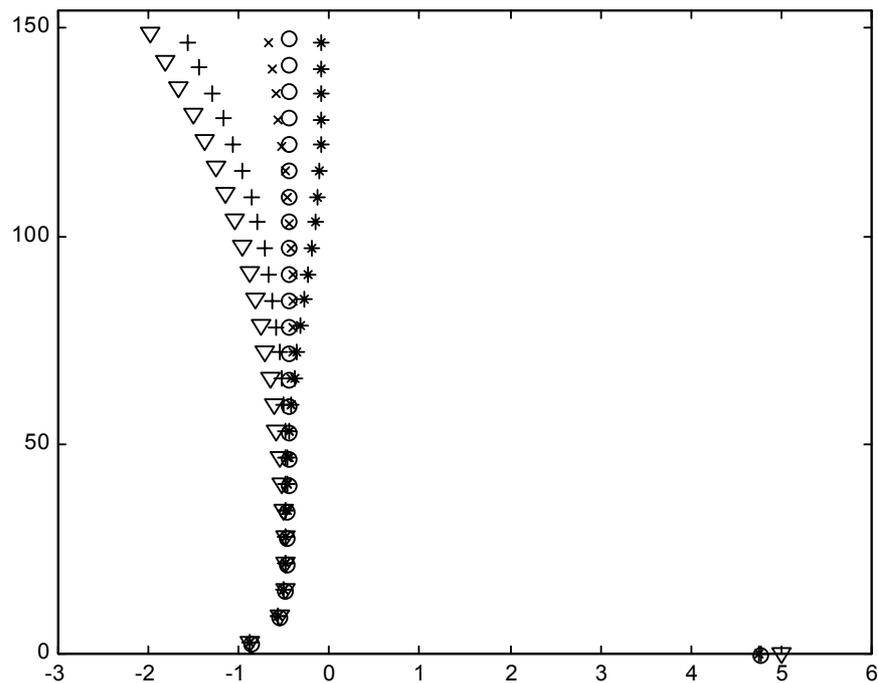


Fig. 3. 5. Autovalores del punto de equilibrio cero del TDCC con $N=64$, $T=1.27$ y $e=0.39370$.

Referencia (o), Gear–1 (∇), Gear–2 (+), Gear–3 (x) y Gear–4 (*).

El análisis de los resultados obtenidos en esta primera simulación necesita de la utilización de las expresiones derivadas en el capítulo 2.5. En este capítulo se fijaron unas cotas para el error introducido en la discretización de los operadores derivada y retardo. Por un lado se comprueba que el error es menor cuanto mayor es el orden de discretización utilizado. Por otro lado, el error del operador retardo está en función de la distancia normalizada $e=[0 \dots 1]$ existente entre el instante de tiempo en que se desea calcular la muestra retardada y la siguiente muestra de la VC. El error de discretización es nulo en los extremos $e=\{0,1\}$, en que el retardo coincide con una muestra. Este error, en función del orden de discretización, es máximo cuando

$$e(1) = 0.5, \quad e(2) = 0.42265, \quad e(3) = 0.38196, \quad e(4) = 0.35557. \quad (3.100)$$

En la primera simulación realizada con $T=1.27$, la distancia normalizada vale $e=0.39370$. Así, el error que se está produciendo en los órdenes de discretización mayores que uno es muy cercano al máximo. Con el objetivo de comprobar como afecta el error de discretización del operador retardo en la precisión en el cálculo de los autovalores, realizamos una simulación con $T=1.29$, con lo cual $e=0.61240$. El error de discretización es menor en todos los ordenes de discretización excepto en Gear-1 que es similar. No obstante, únicamente se observa una disminución considerable en el error de cálculo de los autovalores asintóticos en Gear-2, como se puede apreciar en la Fig. 3. 6. Además, se observa que en Gear-4 el error de cálculo de los autovalores continúa siendo mayor que en Gear-3 y, esto es una novedad, mayor que en Gear-2.

Con el fin de confirmar la idea que a menor error de discretización, menor error en el cálculo de los autovalores, realizamos una nueva simulación con $T=1.31$. Este valor sitúa el retardo muy cercano a una muestra, $e=0.85496$, comprobándose en la Fig. 3. 7 que el error de cálculo de los autovalores de frecuencia alta es menor que en las anteriores simulaciones. No obstante, sorprende el hecho que el error de cálculo de los autovalores en Gear-4 es similar al cometido en Gear-1, y que los mejores resultados se obtienen al utilizar Gear-2.

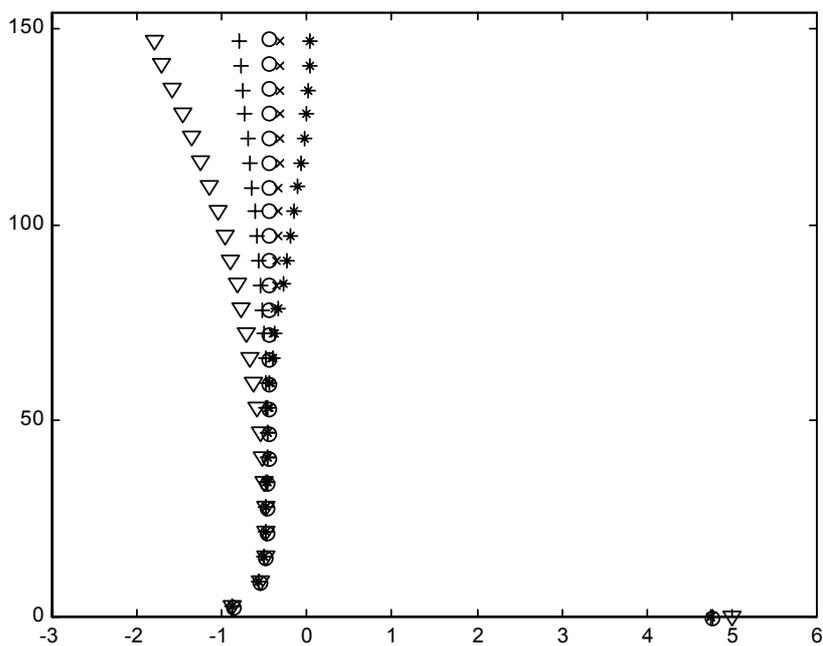


Fig. 3. 6. Autovalores del punto de equilibrio cero del TDCC con $N=64$, $T=1.29$ y $e=0.61240$.
Referencia (o), Gear-1 (∇), Gear-2 (+), Gear-3 (x) y Gear-4 (*).

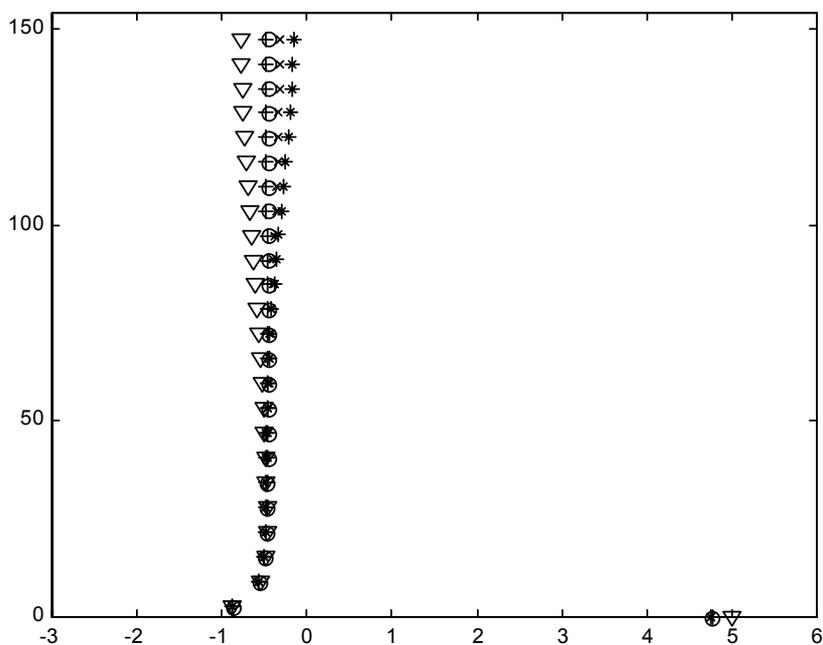


Fig. 3. 7. Autovalores del punto de equilibrio cero del TDCC con $N=64$, $T=1.31$ y $e=0.85496$.
Referencia (o), Gear-1 (∇), Gear-2 (+), Gear-3 (x) y Gear-4 (*).

En las simulaciones realizadas hasta el momento parece ser que el error cometido en la discretización del operador retardo tiene una influencia notoria en la precisión de cálculo de los autovalores de alta frecuencia. Esta idea es llevada a un extremo realizando una simulación con $T=1.28$. Este periodo es tal que el retardo coincide con una muestra, $e=0$, de modo que no existe error en el cálculo del operador retardo. En la Fig. 3. 8 se observa una coincidencia muy superior a la aparecida hasta el momento entre los autovalores obtenidos de forma numérica y la referencia.

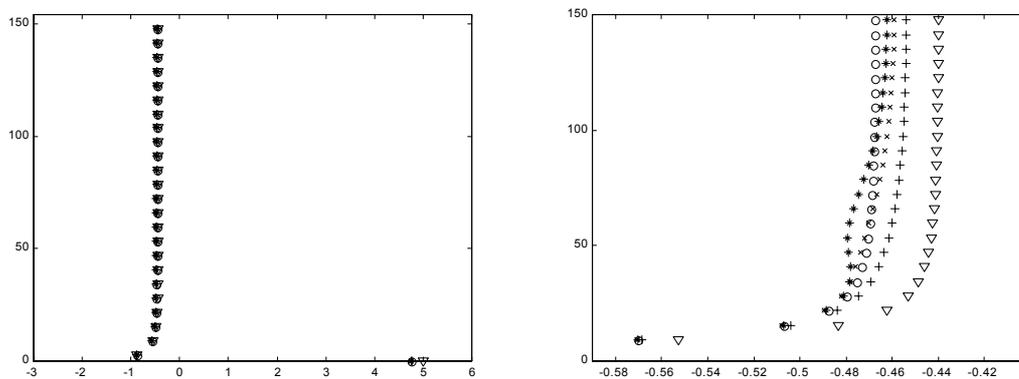


Fig. 3. 8. Autovalores del punto de equilibrio cero del TDCC con $N=64$, $T=1.28$ y $e=0$.
Referencia (o), Gear-1 (∇), Gear-2 (+), Gear-3 (x) y Gear-4 (*).

Hasta el momento se ha comprobado que el error de discretización del operador derivada tiene un efecto determinante en la precisión de cálculo de los autovalores situados en la recta paralela al eje frecuencial. No obstante, ¿en qué modo influye el error de discretización del operador derivada? En la última simulación realizada encontramos la respuesta, puesto que en ésta todo el error cometido proviene de la discretización del operador derivada. Al realizar una ampliación de los resultados alrededor de la recta paralela al eje frecuencial se comprueba que los autovalores son más próximos a la referencia al aumentar el orden de discretización, como se comprueba en la Fig. 3. 8.

De los resultados obtenidos hasta el momento se extraen las siguientes conclusiones:

1. **La precisión de cálculo de los autovalores de alta frecuencia esta directamente relacionada con el error de discretización del operador retardo.** La comparación de los resultados de la Fig. 3. 8 con las anteriores son concluyentes. Este resultado parece razonable si tenemos en cuenta que los infinitos autovalores situados sobre la recta paralela al eje frecuencial provienen de la existencia de parámetros distribuidos en el circuito. Por otro lado, los autovalores con parte imaginaria grande van asociados a perturbaciones de variación rápida. Así, es lógico que estos autovalores se evalúen peor, ya que requieren de una frecuencia de muestreo mayor.
2. Cuando el retardo no coincide con una muestra del circuito, **un mayor orden de discretización no asegura una mayor precisión en el cálculo de los autovalores de alta frecuencia.** Este resultado puede ser explicado sobre la base de dos fenómenos que coexisten en circuitos discretizados: el error de discretización por un lado y la variación de la memoria real del circuito como resultado de esta discretización⁹. Aunque un orden de discretización elevado implica un menor error en la discretización, cuando el retardo es cercano a una muestra, el segundo fenómeno toma relevancia frente al primero. Se llega así a **una situación de compromiso en la que las discretizaciones de Gear-2 y Gear-3 se comportan mejor** ante los fenómenos mencionados¹⁰.
3. De lo dicho hasta el momento, el lector puede sacar la conclusión errónea que el error en la discretización del operador derivada no repercute en la precisión de cálculo de los autovalores de alta frecuencia. No obstante, se ha comprobado que **cuando el error en el cálculo de los autovalores es cometido íntegramente por el operador derivada, a mayor orden de discretización mayor precisión en el cálculo de los autovalores de alta frecuencia** (Fig. 3. 8).

⁹ En el capítulo 5.2 se profundizará en este fenómeno al estudiar circuitos con líneas de transmisión RLCC.

¹⁰ El análisis de la estabilidad del TDCC en régimen de funcionamiento periódico confirma esta afirmación.

4. En los puntos anteriores se ha centrado la atención en la evolución de los autovalores que se sitúan paralelos al eje frecuencial, cuya precisión de cálculo depende en gran medida del operador retardo. Un estudio del autovalor real que determina la estabilidad del punto de equilibrio conduce a resultados parecidos para el operador derivada. Efectivamente, se comprueba que en todas las simulaciones, sea cual sea el error de discretización del operador retardo, el autovalor real positivo calculado en Gear-1 está sensiblemente distanciado de la referencia. Una ampliación de la zona de estudio demuestra que **a mayor orden de discretización mayor precisión en el cálculo del autovalor real positivo independientemente del error de discretización del operador retardo**. Este resultado concuerda con el hecho que en el método semi-analítico la existencia de una solución real positiva se determina a partir de unos coeficientes en los que no interviene en ningún momento el retardo de la línea.

En todas las simulaciones anteriores se ha utilizado la transformación (3. 99) para trasladar los resultados del plano z al plano s . Esta transformación es exacta para un sistema continuo y aproximada para un sistema discretizado. En su momento se discutieron otras posibles alternativas entre las que se encontraban la transformación equivalente del operador derivada y la transformación equivalente del operador retardo. Las conclusiones anotadas en los párrafos anteriores inducen a la realización del siguiente experimento. Sobre un mismo ejemplo, realicemos las tres transformaciones reseñadas con anterioridad y representemos simultáneamente los resultados junto a la referencia. La Fig. 3. 9 ilustra estos resultados, observándose que la transformación equivalente al operador derivada es válida únicamente para los autovalores con parte imaginaria nula y pequeña, y la transformación equivalente al operador retardo es, sorprendentemente, válida para todos los autovalores, sin cometerse el error realizado en la transformación de un sistema continuo a altas frecuencias.

Finalmente, queda un último experimento numérico por realizar. Este consiste en comprobar el efecto producido por el aumento del número de muestras al estudiar la estabilidad del punto de equilibrio cero del TDCC. Evidentemente, a más muestras, menor es el error introducido por los operadores derivada y retardo para un mismo orden de discretización. Con el fin de independizar el estudio de la distancia del retardo a una muestra se ha escogido una combinación de número de muestras y periodo tal que el

retardo coincida con una muestra. En las Fig. 3. 10 y Fig. 3. 11 se observa esta evolución al variar de $N=256$ a $N=512$, verificándose una excelente concordancia entre los resultados numéricos y la referencia. En el eje horizontal se han ordenado los autovalores con parte imaginaria positiva en orden creciente, observándose que el error al calcular los autovalores de frecuencia baja, aquellos que determinan la estabilidad, es prácticamente nulo. La Fig. 3. 12 ilustra la disposición de los autovalores λ en el plano z , observándose que la recta paralela al eje imaginario del plano s se convierte en una circunferencia en el plano z . Esta gráfica se debe completar añadiendo un autovalor de valor ≈ 120 , que no se incluye en la representación para facilitar su lectura. En adelante los autovalores aparecerán representados en el plano z .

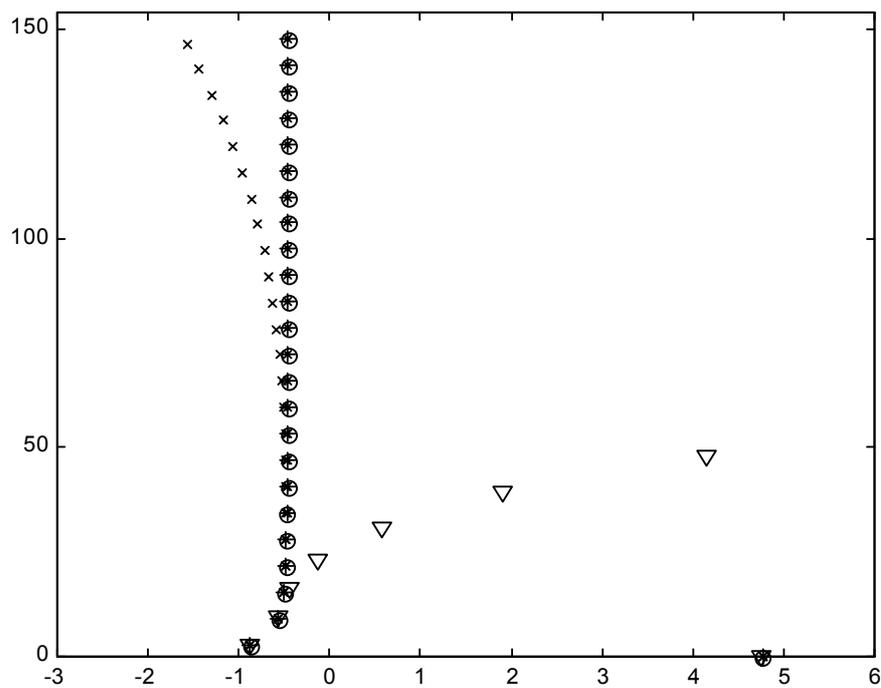


Fig. 3. 9. Autovalores del punto de equilibrio cero del TDCC utilizando distintas transformaciones. Referencia (o), sistema continuo (x), operador derivada (∇) y retardo (*) con Gear-2, $N=64$ y $T=1.27$.

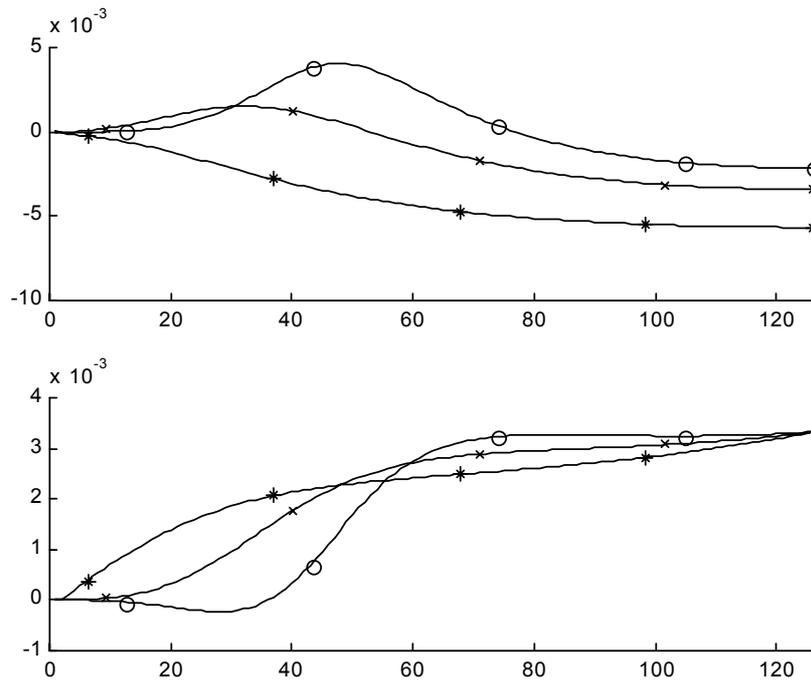


Fig. 3. 10. Error relativo de la parte real (gráf. sup.) y absoluto de la parte imaginaria (gráf. inf.) en el cálculo de los autovalores del punto de equilibrio cero del TDCC con $N=256$. Gear-2 (*), Gear-3 (x) y Gear-4 (o).

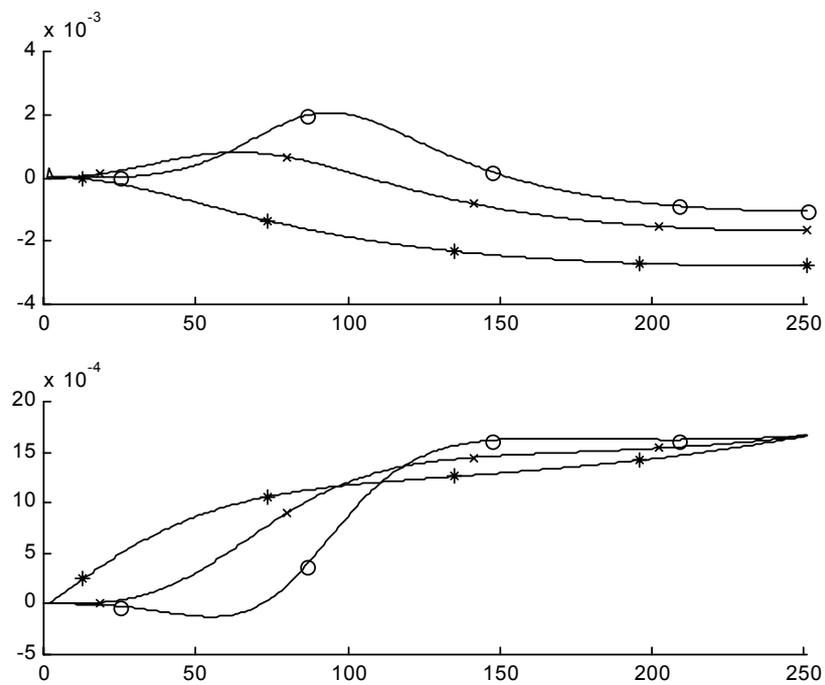


Fig. 3. 11. Error relativo de la parte real (gráf. sup.) y absoluto de la parte imaginaria (gráf. inf.) en el cálculo de los autovalores del punto de equilibrio cero del TDCC con $N=512$. Gear-2 (*), Gear-3 (x) y Gear-4 (o).

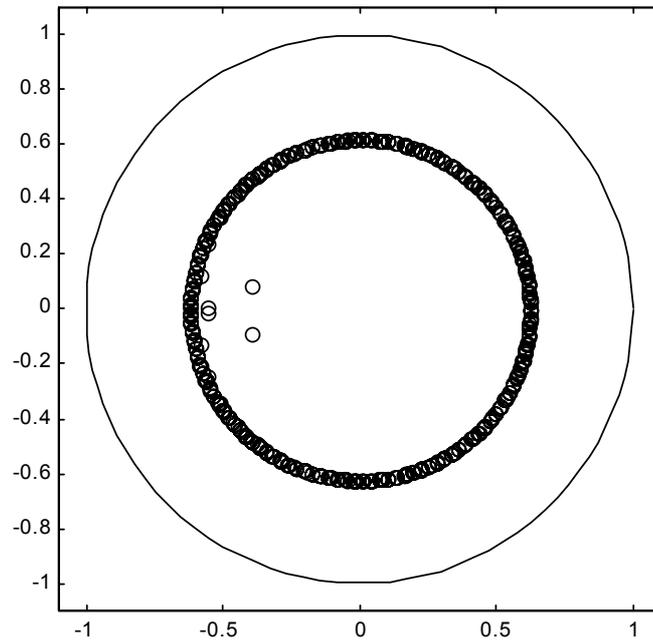


Fig. 3. 12. Autovalores del punto de equilibrio cero del TDCC en el plano z . El autovalor que determina la inestabilidad de la solución no aparece representado por su elevado valor (≈ 120).

Puntos de equilibrio distintos de cero

Una repetición del estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio distintos de cero confirma la inexistencia de autovalores con parte real positiva en el plano s . Todos los resultados vienen a confirmar y corroborar las conclusiones derivada del estudio del punto de equilibrio cero, por lo que sería redundante anotar nuevamente los resultados de este estudio.

Estabilidad de los puntos de equilibrio al variar el parámetro R

Una disminución del valor del parámetro $R=1.85\text{k}\Omega$ no altera la estabilidad del punto de equilibrio cero. En cambio, el estudio de la evolución de los autovalores del punto de equilibrio distinto de cero apunta a un cambio cualitativo de la dinámica del circuito alrededor de $R=1.82\text{k}\Omega$. Efectivamente, la Fig. 3. 13 muestra como un par de autovalores complejos conjugados traspasa el círculo unidad al disminuir el valor de R . El paso por un punto cercano a -1 indica que la perturbación asociada a este par de autovalores es aproximadamente de periodo doble al de la solución hallada. En la simulación realizada se

ha considerado una solución continua de periodo $T=1.28$, de modo que la perturbación debe ser de periodo $T^p \approx 2.56$, valor que se aproxima al obtenido al analizar este mismo circuito en el capítulo 2.7. Siguiendo el razonamiento utilizado en [Hos-94], si no existen soluciones continuas estables en el circuito TDCC con $R=1.82\text{k}\Omega$, entonces son de esperar soluciones periódicas, cuasiperiódicas o caóticas.

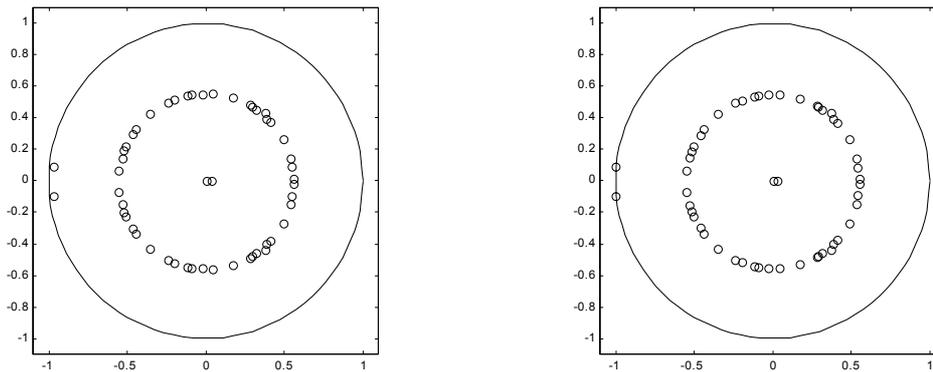


Fig. 3. 13. Evolución de los autovalores (o) del punto de equilibrio distinto de cero del TDCC al variar el parámetro de $R=1.85\text{k}\Omega$ (izq.) a $R=1.82\text{k}\Omega$ (der.) con $T=1.28$. Los autovalores de módulo 0.97725 (izq.) traspasan el círculo unidad con módulo 1.0042 (der.) indicando que la solución es inestable.

Sumario

En esta sección se ha validado la eficacia del método DTA–Gear en el estudio de la estabilidad de las soluciones continuas del TDCC. El estudio del método semi–analítico que se usa como referencia ha derivado en la obtención de resultados analíticos suficientes, aunque no necesarios, para asegurar la inestabilidad de los puntos de equilibrio. Asimismo, se ha demostrado la existencia de infinitas soluciones sobre una recta paralela al eje frecuencial. Se ha comprobado que todos los autovalores obtenidos usando DTA–Gear sobre el TDCC discretizado tienen su correspondencia con los obtenidos usando el método semi–analítico sobre el TDCC continuo. La divergencia entre los resultados se puede controlar, acotando el error que se produce, principalmente, al calcular el retardo. Por otro lado aunque el número de autovalores obtenidos usando DTA–Gear es finito, frente al infinito número de autovalores del circuito sin discretizar, el estudio de la estabilidad no se ve comprometido. Esto es así porque los autovalores que quedan sin determinar corresponden a las soluciones de frecuencia mayor paralelas al eje imaginario, cuya parte real es negativa y no altera el resultado de la estabilidad. Una conclusión importante es la robustez de las discretizaciones Gear–2 y Gear–3 en el estudio de la estabilidad, al ser un buen compromiso entre la precisión en el cálculo de la solución y la no alteración de la memoria real del circuito.

La comparación de los resultados se ha realizado utilizando una transformación del plano z al plano s . Un estudio de las distintas transformaciones a utilizar ha permitido confirmar la hipótesis que los autovalores con parte imaginaria elevada están fuertemente relacionados con el subcircuito de parámetros distribuidos y los autovalores con parte imaginaria nula y pequeña están relacionados con el subcircuito de parámetros concentrados.

Finalmente, se ha estudiado la evolución de los autovalores en el plano z al variar el parámetro R , observándose un cambio en la estabilidad del punto de equilibrio distinto de cero y prediciéndose el periodo de la perturbación que inestabiliza la solución continua. En el capítulo 2.7 se ha obtenido la solución de periodo–1 asociada a esta perturbación, confirmándose su existencia y el valor de su periodicidad. A continuación se estudiará la estabilidad de esta solución periódica y su evolución al variar el valor del parámetro R .

3.5 Estabilidad de soluciones periódicas del TDCC

Ante la inexistencia de soluciones continuas estables del TDCC con $R=1.82\text{k}\Omega$, debe existir una solución periódica, cuasiperiódica o caótica. En el capítulo 2.7 se ha obtenido una solución de periodo-1 para este parámetro. Los autovalores correspondientes a esta solución aparecen en la Fig. 3. 14. Se comprueba la existencia de todos los autovalores dentro del círculo unidad excepto un autovalor próximo a la unidad característico de circuitos autónomos. La cercanía de este autovalor a la unidad aporta información acerca de la precisión con que se ha calculado la solución. Con $R=1.82\text{k}\Omega$ este autovalor vale $\lambda_1=1.0026$. Se concluye, pues, que la solución de periodo-1 obtenida es estable.

Al disminuir el valor del parámetro R se observa que uno de los autovalores se desplaza sobre el eje real hacia la izquierda. Al alcanzar el valor $R=1.80\text{k}\Omega$, este autovalor ha traspasado la circunferencia unidad, $\lambda_2=-1.2053$, con lo cual la solución obtenida es inestable. En esta solución, el autovalor más cercano a la unidad vale $\lambda_1=0.99883$.

El punto a través del cual el autovalor ha cruzado la circunferencia unidad aporta información sobre el régimen de funcionamiento del circuito. En este caso, el cruce por -1 informa de la existencia de una solución de periodo-2. El modo en que se inicializa el proceso iterativo para obtener esta solución se describe en el capítulo 5.1.

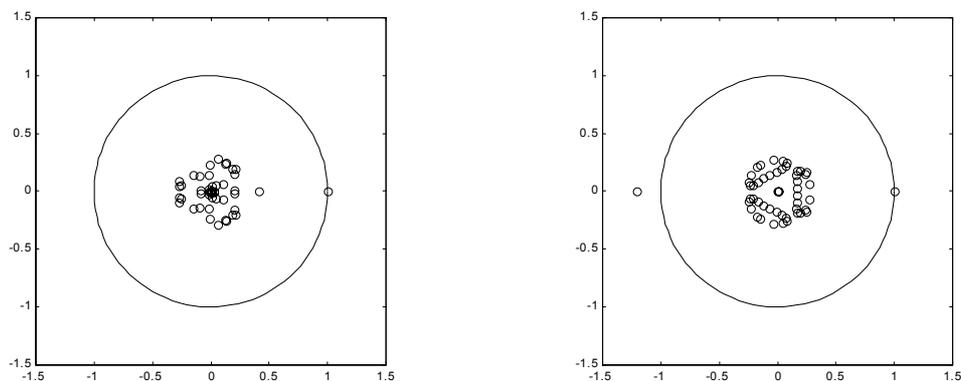


Fig. 3. 14. Autovalores de dos soluciones de periodo-1 del TDCC con $N=128$ y Gear-2.
Solución estable con $R=1.82\text{k}\Omega$ (izq.) y solución inestable con $R=1.8\text{k}\Omega$ (der.)

3.6 Conclusiones

En este capítulo se ha descrito un método para estudiar la estabilidad de las soluciones obtenidas al utilizar la formulación DTA–Gear. Este método se basa en la definición de estabilidad en el dominio temporal. Su aplicación se realiza *a posteriori* a partir de las mismas matrices que se han utilizado en la determinación de la solución. Al tratarse de un método numérico su validación requiere el contraste con métodos analíticos o semi–analíticos. La escasa existencia de estos métodos obliga al estudio de los puntos de equilibrio del TDCC para compararlos con los obtenidos en la referencia [Hos-94]. Los resultados son plenamente satisfactorios. Por un lado se obtienen expresiones analíticas que permiten obtener el máximo de información sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio sin ser necesario ningún método de resolución iterativo. Por otro lado, un estudio detallado de las diferencias entre los resultados de ambos métodos al variar el error de discretización y la transformación entre planos permite relacionar unos autovalores con el subcircuito de parámetros concentrados y otros con el subcircuito de parámetros distribuidos. Finalmente, la evolución de los autovalores de los puntos de equilibrio evidencia que para un cierto valor del parámetro R no existen soluciones continuas estables en el TDCC, siendo forzosa la existencia de otro tipo de soluciones. El estudio de la estabilidad de la solución de periodo–1 obtenida en el capítulo anterior confirma la existencia de esta solución estable. Un nuevo estudio de la evolución de los autovalores al variar el parámetro R advierte del cambio en el régimen de funcionamiento del TDCC, al aparecer una solución inestable.

Si bien la obtención de soluciones inestables no tiene más utilidad práctica que la de conocer qué solución no tomará el circuito, en el campo teórico su interés no es nada despreciable. Un estudio minucioso de la evolución de los autovalores en el plano complejo y su significado permite prever fenómenos tales como el desdoblamiento de órbitas de una solución al variar un parámetro del circuito. Este tema se analizará con detalle al estudiar el oscilador de Van der Pol en el capítulo siguiente. Por el momento, podemos avanzar que la técnica descrita para analizar la estabilidad de soluciones DTA–Gear permite no sólo detectar la estabilidad de una solución, sino también determinar el régimen de funcionamiento de un circuito al localizar los distintos puntos de bifurcación que aparecen al variar un parámetro del mismo.

