

## 4 RELACIÓN ENTRE MÉTODOS TEMPORALES Y FRECUENCIALES

---

En el primer capítulo se han descrito distintos métodos para analizar el RP de circuitos no lineales. Sin duda, el método de balance armónico (HB) merece una especial atención entre todos ellos. A pesar de ser un método que, excepto la evaluación de la alinealidad, se desarrolla en el dominio frecuencial, su relación con los métodos temporales (DTA) se demostrará de forma analítica en la primera sección de este capítulo. Una vez establecida la relación entre las formulaciones de análisis HB y DTA, parece lógico intentar relacionar el estudio de la estabilidad de las soluciones que se realiza en ambos métodos.

Un primer paso para relacionar el estudio de la estabilidad consiste en utilizar los criterios con que se estudia la estabilidad de las soluciones obtenidas en DTA–Gear para estudiar la estabilidad de las soluciones obtenidas en HB. Estos criterios se basan en la definición de estabilidad, estrictamente ligada al dominio temporal. Así, será necesario hacer uso de los resultados de la primera sección para trasladar el sistema de ecuaciones HB del dominio frecuencial al dominio temporal para, una vez en este dominio, estudiar la estabilidad de las soluciones. La aplicación de estas ideas sobre el oscilador de Van der Pol, permitirá comprobar bajo qué condiciones estos razonamientos son válidos. Si bien los resultados obtenidos tienen poca utilidad práctica, su análisis permite profundizar en el entendimiento del concepto de estabilidad y avanzar en el objetivo de relacionar el estudio de la estabilidad en ambos dominios, indicando el camino a seguir en la siguiente sección.

En la tercera sección se utilizarán los criterios con que se estudia la estabilidad de las soluciones HB para estudiar la estabilidad de las soluciones DTA. Una vez obtenida la formulación que permite estudiar la estabilidad en el dominio temporal, se realiza el desarrollo teórico necesario para trasladar esta formulación al dominio frecuencial. Las expresiones obtenidas coinciden con las utilizadas para estudiar la estabilidad en el dominio frecuencial [Riz-85]. En particular, se comprueba la coincidencia de estas expresiones al analizar el oscilador de Van der Pol.

Finalmente, y como aplicación, se determinan las regiones de funcionamiento del oscilador de Van der Pol utilizando el método DTA–Gear, comprobándose la plena coincidencia de los resultados con los obtenidos en [Bar-98] utilizando el método de HB.

## 4.1 Análisis: de la formulación HB a la DTA

El método de análisis del RP y de la estabilidad descrito en los capítulos anteriores se basa en la discretización de las ecuaciones de equilibrio que describen un circuito. Este método, al utilizar discretizaciones de Gear, se ha bautizado como DTA–Gear. No obstante, existen otras alternativas de discretización. Por un lado, podrían utilizarse otras familias de discretización, por ejemplo la de Adams–Moulton [Sch-91], de la que forma parte la conocida transformación bilineal. El uso de estas otras familias dificultaría la obtención de expresiones analíticas para el cálculo de las sensibilidades del sistema de ecuaciones y el estudio de la estabilidad. Por otro lado, y centrándonos en la discretización de Gear, hasta el momento se han utilizado discretizaciones de orden uno a cuatro. Cabe pensar en la posibilidad de incrementar el orden de discretización utilizado. Esta idea, llevada al límite, se traduce en expresar la derivada y el retardo de una variable en un instante de tiempo a partir de todas las muestras de un periodo de esta variable. A continuación se demostrará cómo dentro de este conjunto de métodos se encuentra el método de HB, en el que la derivada y el retardo de una variable se expresan a partir de  $N$  muestras de esta variable equiespaciadas a lo largo de un periodo  $T$ .

El método de HB se basa en la posibilidad de expresar toda solución periódica de periodo

$T = \frac{1}{2\pi\omega_0}$  a partir de su serie de Fourier de la forma:

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{jk\omega_0 t} . \quad (4.1)$$

El truncamiento de la serie de Fourier de  $x^*(t)$  da lugar a una aproximación de esta solución

$$x(t) = \sum_{k=-K}^K X_k e^{jk\omega_0 t} , \quad (4.2)$$

en la que únicamente aparecen  $N=2K+1$  coeficientes de su serie de Fourier. Consideremos en el dominio transformado de Laplace el mismo sistema de ecuaciones utilizado por el método DTA–Gear

$$A(s, e^{-s\tau})X(s) + B_1(s, e^{-s\tau})F(X) + B_2(s, e^{-s\tau})V_b(s) = 0, \quad (4.3)$$

correspondiente a un circuito no lineal con una alinealidad controlada por una variable de control. La aproximación de cada una de las variables que intervienen en esta ecuación utilizando el truncamiento de su serie de Fourier permite obtener la siguiente formulación en el dominio frecuencial<sup>1</sup>

$$\begin{bmatrix} A(0)X_0 \\ A(j\omega_0)X_1 \\ \vdots \\ A(jK\omega_0)X_K \\ A(-jK\omega_0)X_{-K} \\ \vdots \\ A(-j\omega_0)X_{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1(0)F(X)_0 \\ B_1(j\omega_0)F(X)_1 \\ \vdots \\ B_1(jK\omega_0)F(X)_K \\ B_1(-jK\omega_0)F(X)_{-K} \\ \vdots \\ B_1(-j\omega_0)F(X)_{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2(0)V_{b,0} \\ B_2(j\omega_0)V_{b,1} \\ \vdots \\ B_2(jK\omega_0)V_{b,K} \\ B_2(-jK\omega_0)V_{b,-K} \\ \vdots \\ B_2(-j\omega_0)V_{b,-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Cada uno de los vectores columna que aparece en la ecuación anterior puede ser visto como una operación de filtrado que, para la VC, se expresa en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_K \\ Y_{-K} \\ \vdots \\ Y_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(0) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A(j\omega_0) & & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \\ Y_K & \vdots & & A(jK\omega_0) & 0 & & \vdots \\ Y_{-K} & \vdots & \vdots & 0 & A(-jK\omega_0) & & X_{-K} \\ \vdots & & & \vdots & & \ddots & 0 \\ Y_{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & A(-j\omega_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_K \\ X_{-K} \\ \vdots \\ X_{-1} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

que en forma compacta se escribe

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}_{BH} \mathbf{X}. \quad (4.6)$$

Utilizando esta notación, podemos escribir (4.4) en forma matricial del modo

---

<sup>1</sup> Aunque las incógnitas de este sistema de ecuaciones son los  $2K+1$  coeficientes complejos del truncamiento de la serie de Fourier de la VC, su resolución requiere de una reformulación del sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son la parte real e imaginaria de estos coeficientes. Además, dado que en HB la existencia de retardo no modifica la formulación a utilizar, la notación se simplifica con el cambio  $A(s, e^{-s\tau}) \rightarrow A(s)$ .

$$\mathbf{A}_{\text{BH}} \mathbf{X} + \mathbf{B}_{1,\text{BH}} \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}_{2,\text{BH}} \mathbf{V}_b = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

Llegados a este punto es necesario introducir la transformada discreta de Fourier (DFT) como herramienta que nos permitirá trasladar (4.7) al dominio temporal. Definimos en primer lugar la matriz de dimensiones  $N \times N$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & \cdots & w^K & w^{-K} & \cdots & w^{-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & w^{N-1} & \cdots & w^{K(N-1)} & w^{-K(N-1)} & \cdots & w^{-(N-1)} \end{bmatrix}^*, \quad (4.8)$$

con

$$w = e^{j \frac{2\pi}{N}}. \quad (4.9)$$

A continuación definimos el vector de muestras de la VC  $x$

$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, \cdots, x_{N-1}]^T, \quad (4.10)$$

con

$$x_n = x(n\Delta). \quad (4.11)$$

Finalmente, el vector de coeficientes del truncamiento de la serie de Fourier de la VC se define mediante la notación utilizada en (4.6) como

$$\mathbf{X} = [X_0, X_1, \cdots, X_K, X_{-K}, \cdots, X_{-1}]^T. \quad (4.12)$$

Con estas definiciones previas estamos en condiciones de expresar la DFT<sup>2</sup> del vector de muestras  $\mathbf{x}$  como

---

<sup>2</sup> La definición formal de DFT puede diferir en una constante.

$$\mathbf{X} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{x}, \quad (4.13)$$

y la DFT inversa de  $\mathbf{X}$  como

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^* \mathbf{X}. \quad (4.14)$$

Sustituyendo la DFT (4.13) en la operación de filtrado (4.6) obtenemos

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{N} \mathbf{A}_{BH} \mathbf{W} \mathbf{x}, \quad (4.15)$$

expresión que al ser multiplicada por  $\mathbf{W}^*$  se transforma en

$$\mathbf{W}^* \mathbf{Y} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \mathbf{A}_{BH} \mathbf{W} \mathbf{x}. \quad (4.16)$$

Obsérvese que el primer término de esta ecuación es el vector de muestras de  $y$ , de modo que la operación de filtrado (4.6) expresada en el dominio frecuencial ha sido trasladada al dominio temporal. Esta operación de filtrado en el dominio temporal se escribe en forma compacta como

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_{DTA} \mathbf{x}, \quad (4.17)$$

donde

$$\mathbf{A}_{DTA} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \mathbf{A}_{BH} \mathbf{W}. \quad (4.18)$$

Los resultados anteriores son utilizados para convertir la formulación HB (4.7) en una formulación DTA:

$$\mathbf{A}_{DTA} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{1,DTA} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{2,DTA} \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (4.19)$$

Es posible demostrar, utilizando (4.18), que las matrices que aparecen en la formulación DTA son circulantes y, en general, llenas. Esto indica que estas matrices pueden ser obtenidas a partir de una discretización que exprese la derivada y el retardo en un instante

de tiempo como combinación lineal de un número igual o superior a todas las muestras de un periodo.

Este resultado demuestra que la formulación HB es equivalente a un caso particular de formulación DTA con una discretización concreta. Pero, ¿cuál es la discretización que utiliza el método de HB? Para responder a esta pregunta estudiaremos la primera columna de una de las matrices de la formulación DTA<sup>3</sup>. Definimos los elementos de la primera columna de (4. 18) mediante la notación

$$\mathbf{A}_{DTA}(:,1) = \frac{1}{N} \mathbf{W}^* \mathbf{A}_{BH} \mathbf{W}(:,1) = [A_0, A_1, \dots, A_{N-1}]^T, \quad (4. 20)$$

Cada uno de estos elementos se puede expresar como combinación lineal de un sumatorio en el que aparecen los elementos de la diagonal de  $\mathbf{A}_{HB}$

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-K}^K A(jk\omega_0) w^{kn}. \quad (4. 21)$$

Es posible relacionar el término de la derecha de la ecuación anterior, en que aparece la función de red  $A(s)$  evaluada a distintas frecuencias, con la respuesta impulsional de  $A(s)$  limitada en banda. Efectivamente [Pro-98]

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-K}^K A(jk\omega_0) w^{kn} = \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_b((n - lN)\Delta), \quad (4. 22)$$

donde  $h_b$  es la respuesta impulsional de  $A(s)$  limitada en banda según la definición

$$A_b(j\omega) = \begin{cases} A(j\omega), & |\omega| < \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases} \xrightarrow{IFT} h_b(t). \quad (4. 23)$$

El resultado obtenido en (4. 22) admite la siguiente lectura. La operación de filtrado de la señal  $x$  utilizando  $A(s)$  en el instante  $n\Delta$  se obtiene convolucionando las muestras de  $x$  con

---

<sup>3</sup> El estudio de una sola columna es suficiente al tratarse de matrices circulantes.

las muestras de la respuesta impulsional de  $A(s)$  limitada en banda  $h_b$ . Esta operación se escribe

$$y(n\Delta) = \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l\Delta) h_b((n-l)\Delta). \quad (4.24)$$

Al introducir la periodicidad de la solución  $x$ , la ecuación anterior se transforma en

$$y(n\Delta) = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} \left( x(k\Delta) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_b((n-k-lN)\Delta) \right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta) A_{n-k}, \quad (4.25)$$

donde

$$A_{n-k} = A_{n-k-N} = A_{n-k+N}. \quad (4.26)$$

Obsérvese que (4.25) es una de las  $N$  ecuaciones que se han obtenido al trasladar la formulación HB al dominio temporal. La consideración de las  $N$  ecuaciones de un periodo admite la notación matricial empleada en (4.17).



## Sumario

En esta sección se han desarrollado las expresiones necesarias para trasladar una formulación HB en el dominio frecuencial a una formulación DTA en el dominio temporal mediante el uso de la matriz de transformación entre dominios  $\mathbf{W}$ . Las consecuencias derivadas de este resultado pueden ser utilizadas para mejorar el coste computacional de resolución de una formulación DTA cualquiera. Efectivamente, la formulación matricial DTA con matrices de dimensiones  $N \times N$  puede ser trasladada al dominio frecuencial, obteniéndose una formulación vectorial con vectores de dimensiones  $N$ . Las ventajas de trabajar en el dominio frecuencial con un sistema de ecuaciones vectorial, y no matricial, deben ser contrastadas con los inconvenientes de utilizar DFT's directas e inversas para evaluar la alinealidad en el dominio temporal en cada iteración.

Además, se ha demostrado que cada una de las operaciones de filtrado que se realiza en el dominio frecuencial sobre una variable puede ser vista en el dominio temporal como la convolución de esta variable con la respuesta impulsional limitada en banda de la función de red asociada a cada operación de filtrado. En [Pal-94] el mismo resultado se obtiene de forma gráfica al considerar las operaciones realizadas por el método de HB y el método DTA desde un punto de vista espectral.

El descubrimiento de las expresiones que permiten relacionar las formulaciones HB y DTA es un primer paso para abordar un problema mucho más complejo: la relación del estudio de la estabilidad de las soluciones obtenidas en el dominio temporal y el dominio frecuencial.

## 4.2 Estabilidad: la técnica DTA–Gear aplicada a las soluciones de HB

La transformación de un sistema de ecuaciones HB en un sistema de ecuaciones DTA da pie al estudio de la estabilidad de las soluciones obtenidas usando HB utilizando la técnica descrita en el capítulo 3. La secuencia utilizada para estudiar la estabilidad de las soluciones obtenidas usando HB es la siguiente: *a)* obtención de una solución con la formulación HB, *b)* transformación del sistema de ecuaciones en el punto solución en su formulación equivalente DTA, y *c)* estudio de la estabilidad de la solución en el dominio temporal a partir de los coeficientes de las matrices DTA.

### 4.2.1 Ejemplo ilustrativo

Resulta especialmente ilustrativo aplicar las ideas que irán apareciendo en esta sección sobre un circuito sencillo, en el que se puedan obtener resultados analíticos con los que contrastar los procedentes de aplicar los métodos de HB y DTA. Así, consideremos el circuito *RC* lineal de primer orden excitado por una señal senoidal representado en la Fig. 4. 1.

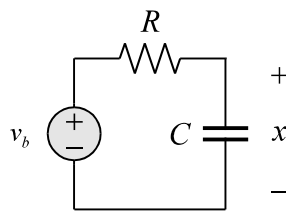


Fig. 4. 1. Circuito RC lineal con excitación senoidal. Ejemplo ilustrativo.

Con la intención de asemejar la notación con la utilizada anteriormente, se utilizará  $x$  para definir la tensión en terminales del condensador  $C$ . Considerando una excitación de periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

$$v_b(t) = \cos(\omega_0 t), \quad (4. 27)$$

la solución  $x$  de este circuito calculada de forma analítica es

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0 RC)^2 + 1}} \cos(\omega_0 t - \text{atan}(\omega_0 RC)). \quad (4.28)$$

La evolución de una perturbación en el instante  $t=0^-$  al transcurrir el tiempo también se determina de forma analítica. Así, al cabo de un periodo  $T$  la perturbación ha experimentado la siguiente variación

$$w(T) = w(0^-) e^{-\frac{T}{RC}}, \quad (4.29)$$

observándose que la estabilidad de la solución viene determinada por el signo de  $RC$ .

### Estudio de la estabilidad de una solución DTA–Gear

La discretización de la ecuación de equilibrio del circuito  $RC$

$$(RCs + 1)X(s) - V_b(s) = 0, \quad (4.30)$$

utilizando Gear–2,  $N=5$  muestras y considerando  $RC=1$  y  $T=1$  da lugar a

$$\begin{bmatrix} 8.5 & 0 & 0 & 2.5 & -10 \\ -10 & 8.5 & 0 & 0 & 2.5 \\ 2.5 & -10 & 8.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & -10 & 8.5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 & -10 & 8.5 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{v}_b = \mathbf{0}, \quad (4.31)$$

cuya solución es

$$\mathbf{x} = [0.0445, 0.1142, 0.0261, -0.0981, -0.0867]^T. \quad (4.32)$$

El circuito  $RC$  estudiado, constituido por un solo elemento dinámico, tiene memoria 1. No obstante, la memoria del circuito discretizado al utilizar Gear–2 es de  $m=2$ . De los dos autovalores que se obtienen al estudiar la estabilidad uno es cercano al del circuito continuo y el otro, próximo al cero, no aporta ninguna información. Los autovalores del sistema discretizado  $\tilde{\lambda}$  y del sistema continuo  $\lambda$  son

$$\tilde{\lambda} = 0.36190, \lambda = e^{-1} \cong 0.36788. \quad (4.33)$$

Se observa que el módulo de estos autovalores es menor que la unidad, indicando que la solución (4.32) es estable. La repetición del estudio con  $RC=-1$  da lugar a una solución distinta, con los autovalores

$$\tilde{\lambda} = 2.7508, \lambda = e^{+1} \cong 2.7183, \quad (4.34)$$

deduciéndose a partir de éstos que la solución obtenida es inestable. Se comprueba que al aumentar el número de muestras o el orden de discretización, el autovalor del sistema discretizado converge hacia el autovalor del sistema continuo. Además, es posible demostrar esta convergencia de forma analítica cuando el número de muestras  $N \rightarrow \infty$ , interviniendo en el desarrollo la definición del número  $e$ .

Entremos ahora en detalle en el modo en que se ha determinado la estabilidad de la solución (4.32). A partir de cualquiera de las ecuaciones del sistema (4.31) se construye el mapeo

$$8.5x_n - 10x_{n-1} + 2.5x_{n-2} - v_{b,n} = 0, \quad (4.35)$$

que, al tratarse de un circuito lineal, es explícito. Así, podemos expresar directamente una muestra a partir de las dos anteriores del modo

$$x_n = \frac{10}{8.5}x_{n-1} - \frac{2.5}{8.5}x_{n-2} + \frac{1}{8.5}v_{b,n}. \quad (4.36)$$

Es importante advertir que la expresión anterior puede ser utilizada para, partiendo de unas condiciones iniciales, calcular sucesivamente la siguiente muestra a partir de las dos anteriores hasta obtener la solución periódica (4.32). Efectivamente, como se observa en la Fig. 4.2, la aplicación repetida del mapeo (4.36) permite obtener el RP al cabo de cinco veces la constante de tiempo del circuito. Este proceso de cálculo de la solución se engloba dentro de los llamados métodos de integración.

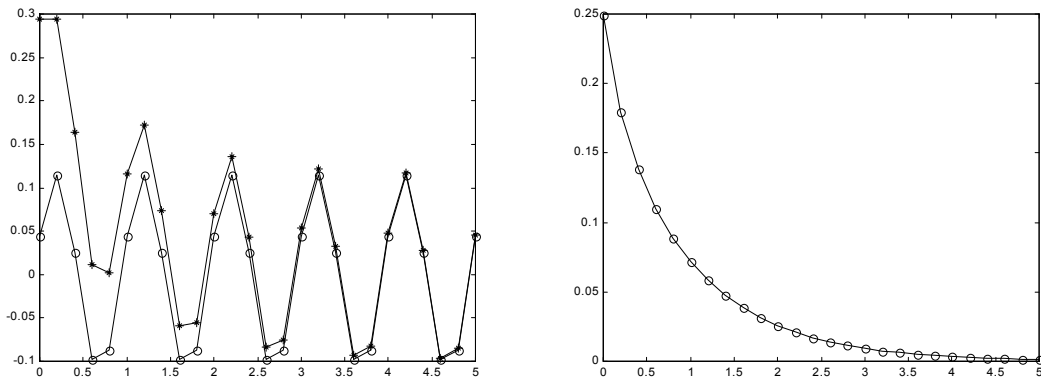


Fig. 4. 2. Evolución del transitorio (\*) en un circuito RC discretizado hasta alcanzar el RP (o) (izq.). La diferencia entre el RP y el transitorio decrece exponencialmente (der.).

Obsérvese que a pesar de ser el método DTA–Gear un método de determinación directa del RP, su origen se encuentra en una formulación parecida a la de un método de integración, a partir de la que es posible calcular el transitorio de un circuito. La periodicidad de la solución se considera en el último momento, obteniéndose unas matrices circulantes con las que únicamente se puede estudiar el RP. No obstante, siempre es posible recuperar, a partir de las matrices circulantes, la formulación que permite estudiar el transitorio, léase estabilidad, del circuito. Sirva todo ello para redundar en la afirmación que el estudio de la estabilidad realizado por el método DTA–Gear está intrínsecamente basado en la definición de estabilidad.

### Estudio de la estabilidad de una solución HB

Vamos a extrapolar el estudio de estabilidad realizado anteriormente a una solución obtenida con el método de HB. El objetivo es construir un mapeo que permita estudiar el transitorio del circuito. En el método de HB, la ecuación de equilibrio del circuito RC estudiado anteriormente

$$(RCs + 1)X(s) - V_b(s) = 0, \quad (4. 37)$$

utilizando  $N=5$  coeficientes de la serie de Fourier es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j2\pi+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j4\pi+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j4\pi+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -j2\pi+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_{-2} \\ X_{-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (4.38)$$

Con la resolución de este sistema de ecuaciones se obtiene una solución similar a la del método DTA–Gear<sup>4</sup>. Este sistema de ecuaciones puede ser trasladado al dominio temporal, obteniéndose la formulación DTA

$$\begin{bmatrix} 1 & 5.3448 & -3.3033 & 3.3033 & -5.3448 \\ -5.3448 & 1 & 5.3448 & -3.3033 & 3.3033 \\ 3.3033 & -5.3448 & 1 & 5.3448 & -3.3033 \\ -3.3033 & 3.3033 & -5.3448 & 1 & 5.3448 \\ 5.3448 & -3.3033 & 3.3033 & -5.3448 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (4.39)$$

La solución de la formulación DTA es idéntica, no similar, a la de la formulación HB. A partir de la matriz que aparece en la formulación DTA, es posible expresar una muestra a partir de las anteriores mediante el mapeo

$$x_n = 5.3448x_{n-1} - 3.3033x_{n-2} + 3.3033x_{n-3} - 5.3448x_{n-4} + v_{bn}. \quad (4.40)$$

Los autovalores del Jacobiano de este mapeo son

$$\tilde{\lambda} = \{2406.3, 1.6530 - 0.99944 \pm j0.31254\}, \quad (4.41)$$

comprobándose que el resultado no es, en modo alguno, correcto. Este desajuste entre los autovalores obtenidos y los esperados se analiza a continuación.

### Efectos de la respuesta impulsional limitada en banda

El motivo por el que el estudio de la estabilidad de una solución de HB utilizando la técnica DTA–Gear es incorrecto está directamente relacionado con la discretización de las

---

<sup>4</sup> Al tratarse de un circuito lineal el método de HB es exacto.

ecuaciones utilizando la respuesta impulsional  $h_b$  que, al ser limitada en banda, es infinita y no-causal. Remontémonos a la ecuación (4. 24), en la que aparece la convolución de  $h_b$  con  $x$ . En esta ecuación no se ha considerado la periodicidad de la solución, de modo que podría ser utilizada para estudiar el transitorio y, en consecuencia, la estabilidad del circuito. No obstante, la construcción de un mapeo que permita expresar una muestra a partir de las anteriores topa con ciertas dificultades:

1. **La respuesta impulsional  $h_b$  es de duración infinita, de modo que este hipotético mapeo debería considerar infinitas muestras.** La afirmación anterior tiene una segunda lectura: la discretización utilizada por el método de HB es tal que la memoria del circuito discretizado es infinita. En la práctica, este problema podría solventarse considerando nulos los términos de la respuesta impulsional menores que una cota. El error cometido en esta aproximación depende del valor de esta cota. Sin embargo, existe otro problema de más difícil solución.
2. **La respuesta impulsional  $h_b$  es no-causal, de modo que el valor de la perturbación en un instante de tiempo depende de su valor pasado, conocido, y de su valor futuro, desconocido.** Parece, pues, que todo intento de estudiar la estabilidad de un sistema no-causal nos lleva al absurdo, al expresar una muestra a partir de muestras futuras de valor desconocido. En la técnica empleada hasta el momento, únicamente se puede mitigar el efecto de la no-causalidad aumentando el ancho de banda en que se considera la solución, equivalente en el dominio temporal a aumentar el número de muestras por periodo.

Estamos ahora en condiciones de explicar el motivo por el que la técnica DTA–Gear es inadecuada para estudiar la estabilidad de soluciones HB. Nótese que al considerar la periodicidad de la solución, la ecuación (4. 24) se transforma en (4. 25), expresión perfectamente válida para estudiar el RP, pero en la que se ha perdido la información del transitorio. Esto es así porque, al considerar periodicidad, los términos de la respuesta impulsional distanciados un periodo se han solapado (sumado) para constituir los coeficientes de la matriz DTA, a diferencia del método DTA–Gear en que a partir de las

matrices circulantes es posible recuperar la información del transitorio<sup>5</sup>. Este solapamiento puede ser reducido considerando más de un periodo de la solución o introduciendo artificialmente pérdidas en el circuito para disminuir la duración de la respuesta impulsional.

Así, y a modo de conclusión, debe decirse que cuando se desee estudiar la estabilidad de las soluciones de HB utilizando la técnica DTA–Gear, la respuesta impulsional debe ser causal y finita. Ya que la limitación en banda impide que se cumplan estas restricciones, se pueden idear mecanismos que permitan obtener una respuesta impulsional cercana a la deseada. La utilización de estos mecanismos para analizar la estabilidad del oscilador de Van der Pol se realiza seguidamente.

#### 4.2.2 Aplicación al estudio del oscilador de Van der Pol

Con la intención de validar los razonamientos realizados en la sección anterior estudiaremos la estabilidad de las soluciones del oscilador de Van der Pol. Estas soluciones se obtienen utilizando una formulación HB. Obtenida una solución, el sistema de ecuaciones se traslada al dominio temporal. En este dominio aparece una formulación DTA a partir de la cual se intenta estudiar la estabilidad. El lector se preguntará si no sería posible obtener esta solución utilizando la formulación DTA en todo el proceso y no sólo en el estudio de la estabilidad. La respuesta es afirmativa. No obstante, la consideración del coste computacional de resolución de una y otra formulación es decisivo.

El estudio empezará con la obtención de distintos modos de plantear las ecuaciones de equilibrio del oscilador de Van der Pol. Aunque los resultados de análisis son idénticos en cada una de estas formulaciones, los resultados de estabilidad difieren enormemente, en función de las características de la respuesta impulsional de cada una de las formulaciones.

---

<sup>5</sup> En el método DTA–Gear únicamente podría producirse este solapamiento al muestrear insuficientemente la solución.



**Formulación de las ecuaciones de equilibrio**

El estudio del modelo circuital del oscilador de Van der Pol con alinealidad estática realizado en el capítulo 2.6 parte de la ecuación de equilibrio

$$(s^2 + 1)X(s) + sF(X) = 0, \quad (4.42)$$

con una alinealidad descrita en el dominio temporal por

$$f(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right). \quad (4.43)$$

El módulo de la respuesta impulsional limitada en banda de las funciones  $(s^2+1)$  y  $(s)$  es simétrico respecto al origen y, en consecuencia, no-causal, como se observa en la Fig. 4. 3 para la función  $(s)$ . Obsérvese que una simple operación algebraica permite transformar la ecuación de equilibrio anterior en

$$X(s) + \frac{s}{s^2 + 1} F(X) = 0. \quad (4.44)$$

En este caso, a diferencia del anterior, el módulo de la función de red que multiplica a la alinealidad disminuye con la frecuencia. De este modo, es posible controlar el efecto de la no-causalidad aumentando el ancho de banda en que se considera la solución. No obstante, existe un problema añadido de difícil solución. Éste consiste en que la respuesta impulsional, al ser senoidal, no se atenúa, debiendo considerarse siempre infinitos términos para estudiar la estabilidad. Esto es debido a la inexistencia de pérdidas en el circuito. Así, se puede pensar en añadir una conductancia de valor  $G$  en paralelo con la alinealidad para que la respuesta impulsional se atenúe con el tiempo. Sin embargo, al introducir la conductancia hemos variado el circuito y con ello la ecuación de equilibrio. Este efecto puede solventarse fácilmente con la introducción de una conductancia negativa de igual módulo que la anterior,  $-G$ , que pasa a formar parte de la alinealidad. Actuando de este modo, se obtiene la ecuación de equilibrio

$$X(s) + \frac{s}{s^2 + Gs + 1} F_G(G, X) = 0, \quad (4.45)$$

con una nueva alinealidad definida en el dominio temporal como

$$f_G(G, x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - xG. \quad (4.46)$$

Nótese que con esta última formulación es posible controlar, por un lado, el efecto de la causalidad considerando más o menos muestras y, por otro lado, la duración de la respuesta introduciendo más o menos pérdidas.

### Estudio comparativo de los resultados

Con la finalidad de obtener una base de datos de la que extraer conclusiones, se ha estudiado cada una de las tres formulaciones anteriores, realizando un barrido en el número de muestras y en el valor del parámetro  $\mu$ . Como referencia se han utilizado los resultados de estabilidad de las soluciones obtenidas a partir de una formulación DTA–Gear. Los resultados más representativos se analizan a continuación.

#### *Polinomios en el numerador*

Centrémonos en la formulación (4.42), en la que la variable de control y la alinealidad están multiplicadas por un polinomio en  $(s)$ . La respuesta impulsional limitada en banda de  $(s)$  se representa en la Fig. 4.3 en el intervalo  $t=[-T, 2T)$  con  $N=33$  muestras por periodo. Se comprueba que esta respuesta es fuertemente no-causal y de duración superior a un periodo. En la Fig. 4.4 (izq.) aparece la representación de los elementos de la primera columna de la matriz DTA. En el método DTA–Gear la respuesta impulsional a partir de la que se estudia la estabilidad se construye a partir de estos elementos. En el mismo eje, aparece una representación de la respuesta impulsional real en el intervalo  $t=[0, T)$ . La coincidencia de representaciones indicaría que el estudio de la estabilidad del método DTA–Gear se realiza correctamente. Sin embargo, se observa una divergencia apreciable en las proximidades de  $T$ . Esto es debido a que los elementos de la matriz DTA se han construido solapando la respuesta impulsional a intervalos de duración  $T$ . Así, la parte no-causal de la respuesta impulsional próxima al origen es la que hace divergir la respuesta impulsional considerada y la real, como se comprueba en la Fig. 4.4 (der.).

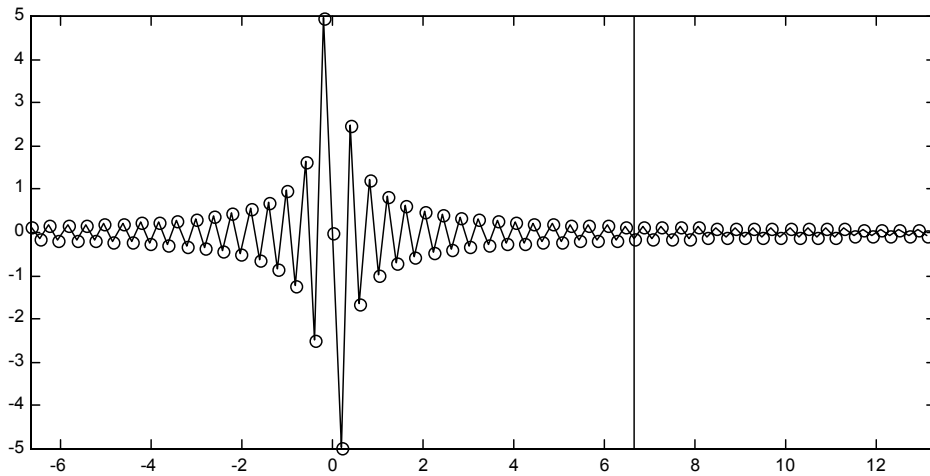


Fig. 4. 3. Respuesta impulsional de la función (s) en el intervalo  $t=[-T, 2T]$  con  $N=33$ .

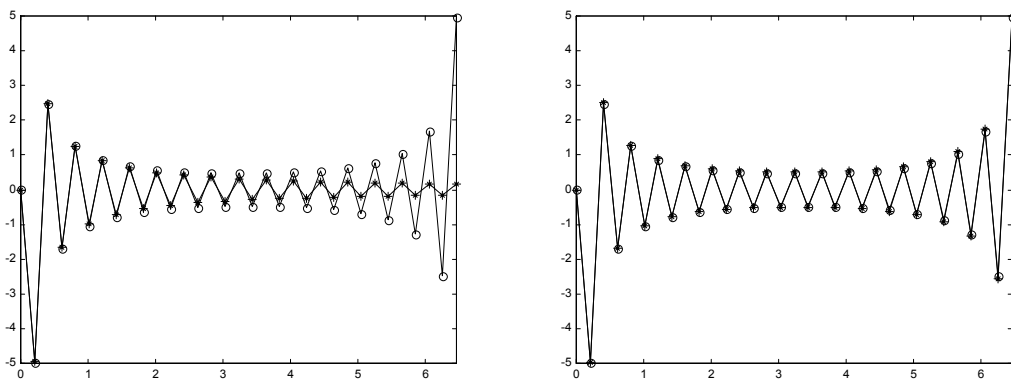


Fig. 4. 4. Elementos de la matriz DTA (o) y de la respuesta impulsional solapada (\*) considerando los intervalos  $t=[0, T]$  (izq.) y  $t=[-T, 2T]$  (der.).

Ante la gran diferencia existente entre la respuesta impulsional considerada y la real, los resultados no pueden acercarse, en modo alguno, a los esperados. Efectivamente, aunque los autovalores esperados con  $\mu=1$  son un autovalor unidad, uno de módulo inferior a la unidad y el resto próximos al origen, y con  $\mu=-1$  un autovalor unidad, uno de módulo superior a la unidad y el resto próximos al origen, en la Fig. 4. 5, se comprueba que la única coincidencia se encuentra en el autovalor unidad. No merece la pena realizar más comentarios sobre los valores obtenidos con otros parámetros, ya que redundan en la afirmación que los resultados de estabilidad no son los esperados.

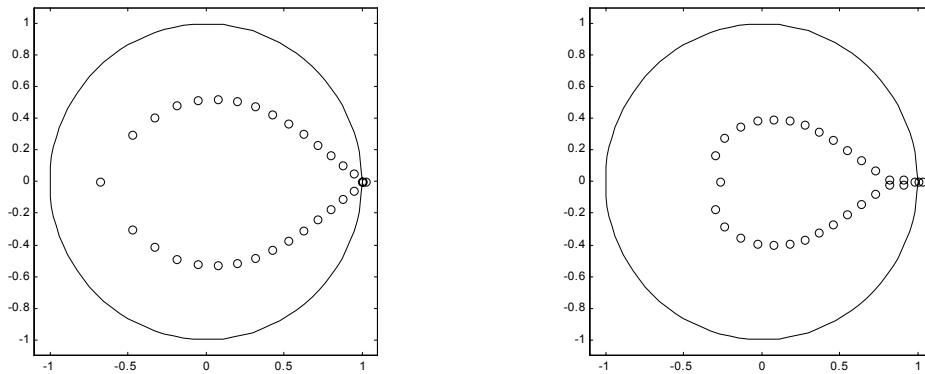


Fig. 4. 5. Autovalores (o) obtenidos con  $\mu=1$  (izq.) y  $\mu=-1$  (der.).

### *Polinomio en el denominador*

Consideremos a continuación la formulación (4. 44), en la que la alinealidad está multiplicada por la impedancia equivalente en terminales de ésta. Al tratarse de un circuito sin pérdidas, su respuesta impulsional no se atenúa al transcurrir el tiempo. Ante esta afirmación es evidente que la respuesta impulsional considerada al estudiar la estabilidad, a partir de  $N$  coeficientes, nunca coincidirá con la real, en la que intervienen infinitos coeficientes. Queda únicamente por reseñar que los resultados de simulación indican, erróneamente, que todas las soluciones obtenidas son inestables, independientemente del signo del parámetro  $\mu$ .

### *Introducción de pérdidas*

El problema anterior puede ser resuelto con la introducción de pérdidas en el circuito. El objetivo es conseguir una respuesta impulsional de duración inferior a un periodo de la solución. Empecemos considerando la formulación (4. 45) con  $G=1$ . En todas las simulaciones realizadas con  $\mu>0$  los autovalores se encuentran dentro del círculo unidad, excepto el autovalor unidad. Estos autovalores se acercan al origen a medida que se aumenta el número de muestras. A modo de ejemplo, sirva la Fig. 4. 6 para mostrar este recogimiento de los autovalores al aumentar el ancho de banda considerado. Parece, pues, que tanto la disminución de la respuesta impulsional como el aumento del ancho de banda mejoran significativamente los resultados de estabilidad.

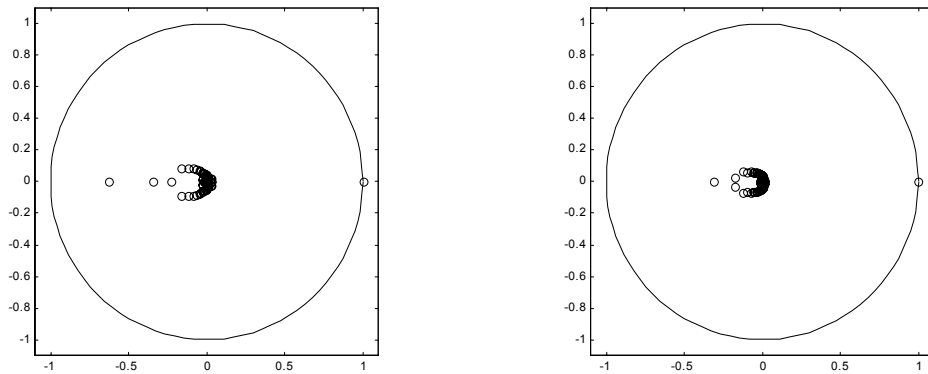


Fig. 4. 6. Acercamiento de los autovalores hacia el origen al aumentar el número de muestras de  $N=65$  (izq.) a  $N=129$  (der.) con  $\mu=4$  y pérdidas  $G=1$ .

Las simulaciones realizadas con  $\mu < 0$  indican que la estabilidad se determina de forma correcta. En concreto, la existencia de un único autovalor de módulo mayor que la unidad indica la inestabilidad de la solución.

Antes de avanzar conclusiones, resulta interesante observar que efectos tiene la introducción de mayores pérdidas en el circuito. El efecto más directo se observa en la atenuación de la respuesta impulsional, que es más rápida a mayores pérdidas. No obstante, como se observa en la Fig. 4. 7, el fenómeno de Gibbs creado por la no-causalidad de la respuesta impulsional no disminuye al aumentar las pérdidas.

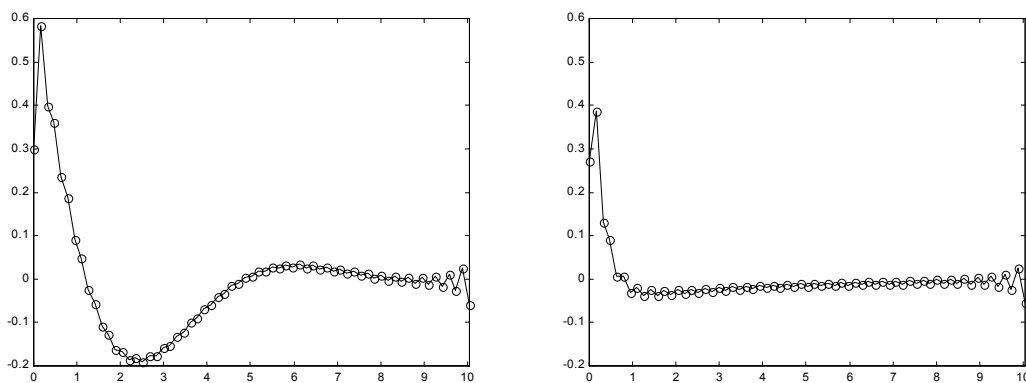


Fig. 4. 7. Variación de la respuesta impulsional considerada al aumentar las pérdidas de  $G=1$  (izq.) a  $G=4$  (der.), con  $N=65$ . Aunque la atenuación es mayor a mayores pérdidas, el efecto de la no-causalidad al final del periodo no disminuye.

Una comparación de los resultados obtenidos con  $G=1$  y  $G=4$  conduce a la siguiente conclusión: no se observan diferencias significativas en ningún caso, excepto con  $\mu < 0$ , en que el autovalor que evidencia la inestabilidad de la solución parece converger más rápido hacia la referencia al aumentar las pérdidas. En la siguiente tabla se muestra esta convergencia con  $\mu = -1$  al aumentar el número de muestras.

$\mu = -1$	$N=33$	$N=65$	$N=129$
Referencia	1707	1271	1189
Pérdidas, $G=4$	5548	1862	1183
Pérdidas, $G=1$	4625	2725	2219

## Sumario

En esta sección se ha comprobado bajo qué restricciones la técnica DTA–Gear puede ser utilizada para estudiar la estabilidad de soluciones obtenidas con una formulación HB, transformando ésta en una formulación DTA equivalente. La técnica DTA–Gear considera la estabilidad a partir de una respuesta impulsional estipulada por los elementos de la matriz DTA. La semejanza de la respuesta impulsional considerada con la real determina el éxito de estudio de la estabilidad. Esta semejanza requiere de dos condiciones. La primera es inmediata al considerar que la máxima memoria contemplada por una formulación DTA es menor a un periodo de la solución. Así, la respuesta impulsional real debe tener una duración inferior a un periodo. La segunda, parte del hecho que en el mapeo utilizado por la técnica DTA–Gear una muestra se expresa a partir de las anteriores. Es pues evidente que la respuesta impulsional debe ser causal. Ninguna de estas condiciones es cumplida por la respuesta impulsional limitada en banda utilizada por el método de HB. Aún así, se han articulado mecanismos que permiten reducir el efecto de la duración infinita y de la no-causalidad de la respuesta impulsional, hasta el punto de obtener resultados satisfactorios al analizar el oscilador de Van der Pol.

Con el fin de retomar el hilo argumental iniciado al principio de este capítulo, sinteticemos los resultados obtenidos hasta el momento y el camino a seguir. Una vez descubierto el nexo entre las formulaciones de HB y DTA, surge la posibilidad de estudiar la estabilidad de las soluciones de HB del mismo modo que se estudian las soluciones DTA–Gear. Esta idea topa con el escollo de la respuesta impulsional limitada en banda, su no-causalidad y su duración infinita. Ante este tropiezo aparecen las siguientes preguntas: si la técnica DTA–Gear, basada en la definición de estabilidad, no es aplicable a las soluciones de HB, ¿con qué criterios se estudia la estabilidad de las soluciones de HB en el dominio frecuencial?, ¿son estos criterios trasladables al dominio temporal? La respuesta a estas preguntas aparece en la siguiente sección.

### 4.3 Estabilidad: de la formulación DTA a la HB

En esta sección se pretende completar el objetivo marcado al inicio de este capítulo: relacionar el estudio del RP y la estabilidad en los dominios temporal y frecuencial. En la primera sección de este capítulo se han derivado las expresiones necesarias para trasladar una formulación HB al dominio temporal. En esta sección se demostrará que los criterios usados para estudiar la estabilidad en el dominio frecuencial pueden ser utilizados en el dominio temporal, obteniéndose una formulación que al ser trasladada al dominio frecuencial coincide con la obtenida en el método de HB. En una primera parte se comparan los criterios utilizados por el método de HB y el método DTA–Gear para estudiar la estabilidad en sus respectivos dominios. En una segunda parte, se utilizan los criterios de HB para el estudio de la estabilidad en el dominio temporal, obteniéndose una formulación DTA que, posteriormente, se traslada al dominio frecuencial. Finalmente, los desarrollos realizados se extienden a los circuitos con alinealidades dinámicas, con el fin de contrastar los resultados obtenidos al analizar el oscilador de Van der Pol.

#### 4.3.1 Estabilidad en el dominio frecuencial

En este punto se pretenden dejar establecidas las diferencias en cuanto a la filosofía de análisis de la estabilidad de la que parten, por un lado el método DTA–Gear y por otro el método de HB. De hecho, estas diferencias ya empiezan con la filosofía empleada al formular el sistema de ecuaciones que permite determinar la solución. Empecemos, pues, por diferenciar el método de análisis del RP.

El método DTA–Gear realiza un estudio local de la solución. Así, por ejemplo, la derivada se calcula a partir de unas muestras próximas, cuanto más mejor, al punto de cálculo de la derivada. No hace ningún uso del conocimiento de la periodicidad de la solución para calcular esta derivada. En contraposición, el método de HB está basado desde un principio en el conocimiento de la periodicidad de la solución. Es por este motivo que al trasladar la formulación de HB al dominio temporal aparecen matrices llenas, indicando que el cálculo de, por ejemplo, la derivada se realiza utilizando todas las muestras de un periodo. Estas



diferencias en el planteamiento del análisis de la solución serán determinantes a la hora de abordar el estudio de la estabilidad de la solución obtenida.

Sinteticemos, antes de continuar, el criterio utilizado por el método DTA–Gear al estudiar la estabilidad. Éste se basa en expresar una de las muestras a partir de las anteriores mediante un mapeo implícito. Este mapeo se transforma en explícito al linealizarlo alrededor de la solución, de modo que se puede expresar de forma directa el valor de la perturbación en un instante determinado a partir del valor de la perturbación en los instantes anteriores. Nótese que el valor de esta perturbación queda perfectamente determinado a partir de *únicamente* los valores anteriores y que por esta razón no es necesario hacer ninguna suposición acerca de los valores futuros de la perturbación. Finalmente, el valor de esta perturbación al cabo de un periodo determina la estabilidad de la solución. Este estudio se concreta en la determinación de los autovalores de una matriz de dimensiones  $m \times m$  donde  $m$  es la memoria del circuito discretizado. Así, y a modo de resumen, el estudio de la estabilidad en el dominio temporal usando discretizaciones de Gear se realiza sin ninguna suposición de la evolución de la perturbación.

El método de HB parte de un planteamiento totalmente distinto, ya que el inicio de todo el razonamiento se basa en el conocimiento *a priori* del tipo de perturbación que aparecerá en el circuito. Si trasladamos el método de HB al dominio temporal comprenderemos que ésta es una exigencia necesaria para estudiar la estabilidad. Así, en el dominio temporal la operación de filtrado de  $X(s)$  con una función  $H(s)$  es equivalente a convolucionar  $x$  con la respuesta impulsional  $H(s)$  limitada en banda:  $h_b$ . A causa de la limitación en banda de la respuesta impulsional,  $h_b$  es no causal. Así, un mapeo construido en el dominio temporal relacionará una muestra con las anteriores y, atención, también las posteriores.

Con este condicionante sólo se puede llegar a hacer un estudio de la evolución de la perturbación planteando un sistema de ecuaciones en el que interviene el tipo de evolución de esta perturbación. Este tipo de evolución, que en el dominio temporal aparece como multiplicador de Floquet y en el dominio frecuencial como exponente de Floquet, se determina en la práctica forzando que el determinante del sistema de ecuaciones planteado sea nulo. El cálculo de estos multiplicadores o exponentes de Floquet requiere de un coste computacional que hace ineficiente el estudio de la estabilidad mediante esta estrategia.

Por ello se han desarrollado algoritmos que evitan el cálculo de los exponentes de Floquet y realizan un estudio cualitativo de la estabilidad, basado en el diagrama de Nyquist [Riz-85].

Veamos como se realizaría el estudio de la estabilidad de una solución obtenida a partir de una formulación de HB conocido el tipo de perturbación. Empecemos por plantear este estudio en el dominio temporal, para después trasladarlo al dominio frecuencial y ver cómo coincide con el usualmente planteado en este dominio.

### 4.3.2 Obtención de la formulación DTA

A continuación se reproducirá el estudio de estabilidad que se realiza en el método DTA–Gear utilizando criterios de HB. Consideremos como primer objetivo la obtención de la variable de control de la alinealidad de la siguiente ecuación

$$A(s, e^{-s\tau})X(s) + B_1(s, e^{-s\tau})F(X) + B_2(s, e^{-s\tau})V_b(s) = 0, \quad (4.47)$$

En el método de HB se debe resolver un sistema de ecuaciones donde las matrices son diagonales y las incógnitas la serie de Fourier truncada de la variable de interés:

$$\mathbf{A}_{\text{BH}} \mathbf{X} + \mathbf{B}_{1,\text{BH}} \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \mathbf{B}_{2,\text{BH}} \mathbf{V}_b = \mathbf{0}. \quad (4.48)$$

La traslación del sistema anterior al dominio temporal da lugar a

$$\mathbf{A}_{\text{DTA}} \mathbf{x} + \mathbf{B}_{1,\text{DTA}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{2,\text{DTA}} \mathbf{v}_b = \mathbf{0}. \quad (4.49)$$

En la ecuación anterior definimos

$$\mathbf{A}_{\text{DTA}} = \begin{bmatrix} A_0 & A_{-1} & \cdots & A_{-N+1} \\ A_1 & A_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{-1} \\ A_{N-1} & \cdots & A_1 & A_0 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

y

$$\mathbf{x} = [x_{-K}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_K]^T. \quad (4.51)$$

Esta notación difiere de la utilizada con anterioridad en que no se ha utilizado, a pesar de cumplirse, la equivalencia

$$A_{-k} = A_{-k+N}, \quad (4.52)$$

y se ha cambiado el origen de tiempo de los vectores. El resto de matrices y variables se definen con la misma notación. Nótese que el número de incógnitas es  $N=2K+1$ .

Es importante recordar la relación entre los elementos de la matriz (4.50) y las muestras de la respuesta impulsional de  $A(s)$  limitada en banda:

$$A_n = \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{b,A}((n-lN)\Delta). \quad (4.53)$$

El sumatorio que caracteriza  $A_n$  se obtiene al considerar la periodicidad de la solución. Puesto que nuestro objetivo es estudiar la estabilidad de esta solución, es decir el transitorio, debemos recuperar la expresión inmediatamente anterior a la presunción de periodicidad. Esta expresión, particularizada para (4.49), es

$$\Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l\Delta)h_{b,A}((n-l)\Delta) + f(x(l\Delta))h_{b,B_1}((n-l)\Delta) + v_b(l\Delta)h_{b,B_2}((n-l)\Delta) = 0. \quad (4.54)$$

Supongamos ahora una solución periódica  $x^*$  de (4.49), y también de (4.54), para  $n \in \{-K, \dots, K\}$ , a la que se añade una perturbación del modo

$$x(l\Delta) = x^*(l\Delta) + w(l\Delta). \quad (4.55)$$

La sustitución de esta expresión en (4.54) y su posterior linealización da lugar a una expresión en la que aparecen las muestras de la perturbación:

$$\Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l\Delta) \left( h_{b,A}((n-l)\Delta) + f'(x(l\Delta))h_{b,B_1}((n-l)\Delta) \right) = 0. \quad (4.56)$$

Sin embargo, el mapeo derivado de esta ecuación expresa una muestra a partir de las anteriores y las posteriores. Llegados a este punto, la única salida posible consiste en expresar las muestras futuras a partir de las anteriores. Esta estrategia requiere descomponer la perturbación  $w$  como combinación lineal de las perturbaciones linealmente independientes  $w_i$  del modo:

$$w = \sum_i c_i w_i . \quad (4. 57)$$

Asumiendo conocida la evolución de cada una de las perturbaciones  $w_i$  mediante el multiplicador de Floquet  $\lambda_i$  asociado

$$w_i((n + N)\Delta) = w_i(n\Delta)\lambda_i , \quad (4. 58)$$

cualquier muestra de  $w_i$  puede ser expresada a partir de un conjunto de  $N$  muestras utilizando

$$w_i((n + kN)\Delta) = w_i(n\Delta)\lambda_i^k , \quad (4. 59)$$

con  $n = \{-K, \dots, K\}$ . Obsérvese que el entero  $k$  puede ser mayor que la unidad y tanto positivo como negativo, con lo cual no solo solucionamos el problema de la no-causalidad sino también el de la respuesta impulsional infinita. Toda vez que las perturbaciones  $w_i$  son linealmente independientes, podemos estudiar (4. 56) sustituyendo  $w$  por  $w_i$  sin que por ello se altere ninguno de los resultados obtenidos. En adelante, y con el fin de simplificar la notación, cuando aparezca  $w$  y  $\lambda$  se entenderá que llevan asociado el subíndice  $i$ . Así, la utilización de (4. 59) en (4. 56) nos conduce a

$$\Delta \sum_{k=-K}^K w(k\Delta) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda^l \left( h_{b,A}((n - k - lN)\Delta) + f'(x(k\Delta)) h_{b,B_1}((n - k - lN)\Delta) \right) = 0 , \quad (4. 60)$$

donde se ha considerado la periodicidad de  $f(x)$ . Definiendo

$$A_n^\lambda = \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda^l h_{b,A}((n - lN)\Delta) , \quad (4. 61)$$

$$B_n^\lambda = \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda^l h_{b,B_1}((n-lN)\Delta), \quad (4.62)$$

escribimos (4.60) del modo

$$\Delta \sum_{k=-K}^K w(k\Delta) (A_{n-k}^\lambda + f'(x(k\Delta))B_{n-k}^\lambda) = 0. \quad (4.63)$$

Partiendo de esta expresión existen dos posibilidades de estudiar la estabilidad. La primera consiste en reproducir el estudio de estabilidad realizado en el método DTA–Gear basado en la construcción de un mapeo en el que, en el caso que estamos considerando, interviene  $\lambda$ . Así, particularizando por ejemplo para  $n=K$ , una muestra de la perturbación se obtiene a partir de las  $N-1$  anteriores del modo

$$w(K\Delta) = \frac{\sum_{k=-K}^{K-1} w(k\Delta) (A_{K-k}^\lambda + f'(x(k\Delta))B_{K-k}^\lambda)}{A_0^\lambda + f'(x(K\Delta))B_0^\lambda}. \quad (4.64)$$

Definiendo el subvector de muestras de la perturbación

$$\mathbf{w}_n = [w_{n+K}, \dots, w_{n+1}, w_n, w_{n-1}, \dots, w_{n-K+1}], \quad (4.65)$$

con

$$w_n = w(n\Delta), \quad (4.66)$$

podemos observar la evolución de la perturbación al cabo de un periodo mediante la relación

$$\mathbf{w}_N = \mathbf{J}(\lambda)\mathbf{w}_0 = \lambda\mathbf{w}_0, \quad (4.67)$$

con

$$\mathbf{J}(\lambda) = \mathbf{J}_{N+1}(\lambda)\mathbf{J}_N(\lambda)\cdots\mathbf{J}_2(\lambda), \quad (4.68)$$

y

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} b_{n,1}^\lambda & b_{n,2}^\lambda & \cdots & b_{n,N-2}^\lambda & b_{n,N-1}^\lambda \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

donde

$$b_{n,i}^\lambda = -\frac{A_i^\lambda + f'(x((K+n-i)\Delta))B_i^\lambda}{A_0^\lambda + f'(x((K+n)\Delta))B_0^\lambda}. \quad (4.70)$$

Finalmente, reordenando (4.67), se obtiene el sistema de ecuaciones homogéneo

$$(\mathbf{J}(\lambda) - \lambda \mathbf{I})\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \quad (4.71)$$

cuyo determinante ha de ser cero para que exista solución no nula. Así, la resolución de

$$\det(\mathbf{J}(\lambda) - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (4.72)$$

indica los posibles valores de puede tomar el multiplicador de Floquet.

Es el momento de hacer balance. Introduciendo el multiplicador de Floquet  $\lambda$  como incógnita en el sistema de ecuaciones (4.56), se ha abordado el problema del estudio de la estabilidad desde la misma perspectiva utilizada por el método DTA–Gear. Adviértase que la única diferencia entre los desarrollos actuales y los realizados en el capítulo 3 consiste en la introducción de  $\lambda$ . Asimismo, obsérvese que el estudio de estabilidad realizado en el capítulo 4.2 coincide con el actual cuando  $\lambda=1$ . Esto explica que en las simulaciones realizadas al analizar el oscilador de Van der Pol el autovalor unidad aparece correctamente calculado en todos los casos.

Comentábamos al obtener (4.63) que teníamos dos posibilidades para estudiar la estabilidad. La primera de ellas ya se ha realizado. La segunda, más acorde con la filosofía utilizada en HB, nos permitirá relacionar los dos métodos de análisis. Ésta consiste en plantear un sistema de  $N$  ecuaciones particularizando (4.63) para  $N$  instantes de tiempo; esto es  $n=\{-K, \dots, K\}$ . Procediendo de este modo se obtiene el sistema de ecuaciones

$$(\mathbf{A}_{\text{DTA}}(\lambda) + \mathbf{B}_{1,\text{DTA}}(\lambda)\mathbf{F}'(\mathbf{x}))\mathbf{w}_0 = \mathbf{M}_{\text{DTA}}(\lambda)\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \quad (4.73)$$

con

$$\mathbf{A}_{\text{DTA}}(\lambda) = \begin{bmatrix} A_0^\lambda & A_{-1}^\lambda & \cdots & A_{-N+1}^\lambda \\ A_1^\lambda & A_0^\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{-1}^\lambda \\ A_{N-1}^\lambda & \cdots & A_1^\lambda & A_0^\lambda \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\mathbf{B}_{1,\text{DTA}}(\lambda) = \begin{bmatrix} B_0^\lambda & B_{-1}^\lambda & \cdots & B_{-N+1}^\lambda \\ B_1^\lambda & B_0^\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{-1}^\lambda \\ B_{N-1}^\lambda & \cdots & B_1^\lambda & B_0^\lambda \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

$$\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f'(x(-K\Delta)) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & f'(x(K\Delta)) \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

donde desconocemos las  $N$  muestras de la perturbación a lo largo de un periodo y el multiplicador de Floquet  $\lambda$ . Obsérvese que nuevamente estamos ante un sistema homogéneo, con lo cual para que exista una solución no nula se debe cumplir

$$\det(\mathbf{M}_{\text{DTA}}(\lambda)) = 0. \quad (4.77)$$

El valor de los posibles exponentes de Floquet que anulan el determinante anterior determina la estabilidad de la solución. La formulación (4.73) se ha obtenido utilizando los mismos criterios con que se estudia la estabilidad en el método de HB. Así, con la traslación de esta formulación al dominio frecuencial se debe obtener la misma formulación utilizada por HB. Veámoslo.

### 4.3.3 Traslación a la formulación HB

La traslación de (4.73) al dominio frecuencial precisa de una transformación artificial. Esta transformación consiste en expresar la perturbación en función de una señal periódica,

ya que en el dominio frecuencial únicamente se consideran este tipo de señales. Anteriormente se ha usado la expresión (4. 59) para relacionar muestras distanciadas un periodo, que reformulada para el dominio de tiempo continuo es

$$w(t + T) = w(t)\lambda. \quad (4. 78)$$

La perturbación  $w$  puede ser descompuesta, de forma artificial, mediante la relación

$$w(t) = w_p(t)(\lambda_0)^t, \quad (4. 79)$$

donde

$$w_p(t + T) = w_p(t), \quad (4. 80)$$

$$\lambda_0^T = \lambda. \quad (4. 81)$$

Nótese que la periodicidad de  $w_p$  permite que (4. 78) se continúe cumpliendo. Discretizando las relaciones anteriores, podemos expresar la perturbación a partir de una señal periódica mediante la relación

$$\begin{bmatrix} w(-K\Delta) \\ \vdots \\ \vdots \\ w(K\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0^{-K\Delta} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_0^{K\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_p(-K\Delta) \\ \vdots \\ \vdots \\ w_p(K\Delta) \end{bmatrix}. \quad (4. 82)$$

La expresión anterior en forma compacta se escribe

$$\mathbf{w}_0 = \Lambda \mathbf{w}_p. \quad (4. 83)$$

Sustituyendo esta expresión en (4. 73), multiplicando toda la expresión por la matriz inversa de  $\Lambda$  y utilizando la propiedad conmutativa del producto de matrices diagonales, tenemos

$$\left( \Lambda^{-1} \mathbf{A}_{\text{DTA}}(\lambda) \Lambda + \Lambda^{-1} \mathbf{B}_{1,\text{DTA}}(\lambda) \Lambda \mathbf{F}'(\mathbf{x}) \right) \mathbf{w}_p = \mathbf{0}. \quad (4. 84)$$



Realizando el producto de las matrices que intervienen en la expresión anterior, ésta se reescribe del modo

$$\left(\widehat{\mathbf{A}}_{\text{DTA}}(\lambda_0) + \widehat{\mathbf{B}}_{1,\text{DTA}}(\lambda_0)\mathbf{F}'(\mathbf{x})\right)\mathbf{w}_p = \mathbf{0}. \quad (4.85)$$

Centrémonos en la primera matriz DTA, puesto que los desarrollos que realizaremos a continuación son equivalentes para la segunda matriz. Así, los elementos de la primera matriz son

$$\widehat{\mathbf{A}}_{\text{DTA}}(\lambda_0) = \begin{bmatrix} A_0^{\lambda_0} & A_{-1}^{\lambda_0} & \cdots & A_{-N+1}^{\lambda_0} \\ A_1^{\lambda_0} & A_0^{\lambda_0} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & A_{-1}^{\lambda_0} \\ A_{N-1}^{\lambda_0} & \cdots & A_1^{\lambda_0} & A_0^{\lambda_0} \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

con

$$A_n^{\lambda_0} = A_n^\lambda \lambda_0^{-n\Delta}. \quad (4.87)$$

Mediante la relación (4.61) podemos expresar cada uno de los elementos en función de la respuesta impulsional de  $A(s)$  limitada en banda y de  $\lambda_0$  del modo

$$A_n^{\lambda_0} = \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} \lambda_0^{-(n-lN)\Delta} h_{b,A}((n-lN)\Delta), \quad (4.88)$$

que puede ser reescrita como

$$A_n^{\lambda_0} = \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{b,\bar{A}}((n-lN)\Delta), \quad (4.89)$$

utilizando

$$h_{b,\bar{A}}(t) = \lambda_0^{-t} h_{b,A}(t). \quad (4.90)$$

En la expresión anterior está la clave de todo el desarrollo, ya que es conocido que a la respuesta impulsional  $h_{b,A}$  le corresponde en el dominio frecuencial una matriz diagonal formada por los elementos  $A(jk\omega_0)$ . Del mismo modo, a la respuesta impulsional  $h_{b,\bar{A}}$  le

corresponde en el dominio frecuencial una matriz diagonal formada por los elementos  $\widehat{A}(jk\omega_0)$ . Sin embargo, ¿cuál es la relación entre  $\widehat{A}$  y  $A$ ? Para ello debemos usar la relación (4. 90) entre las respuestas impulsionales de ambas funciones. Así, si

$$h_{b,A}(t) \xrightarrow{TF} A_b(j\omega') = \begin{cases} A(j\omega'), & |\omega'| < \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega'| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}, \quad (4. 91)$$

entonces, expresando

$$\lambda_0 = e^{\sigma+j\omega}, \quad (4. 92)$$

tenemos

$$h_{b,\widehat{A}}(t) = e^{-(\sigma+j\omega)t} h_{b,A}(t) \xrightarrow{TF} \widehat{A}_b(j\omega') = A_b(j\omega'+(\sigma + j\omega)), \quad (4. 93)$$

expresión obtenida realizando un cambio de variable en la integral que define la transformada de Fourier. Así, a la respuesta impulsional  $h_{b,\widehat{A}}$  le corresponde en el dominio frecuencial una matriz diagonal formada por los elementos  $A(jk\omega_0 + (\sigma + j\omega))$ .

Ahora, estamos en condiciones de trasladar (4. 85) al dominio frecuencial. Así, obtenemos<sup>6</sup>

$$\frac{1}{N} \mathbf{W} \widehat{\mathbf{A}}_{\text{DTA}}(\lambda_0) \mathbf{W}^* \mathbf{W}_p + \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{B}_{\text{1,DTA}}(\lambda_0) \mathbf{W}^* \mathbf{F}' \mathbf{W}_p = \mathbf{0}, \quad (4. 94)$$

donde

$$\mathbf{F}' \mathbf{W}_p = \frac{1}{N} \mathbf{W} \begin{bmatrix} f'(x(-K\Delta))w_p(-K\Delta) \\ \vdots \\ \vdots \\ f'(x(K\Delta))w_p(K\Delta) \end{bmatrix}, \quad (4. 95)$$

---

<sup>6</sup> La matriz  $\mathbf{W}$  se diferencia de la utilizada anteriormente en un intercambio de filas y columnas.

es la DFT del producto de dos vectores periódicos. Así, su DFT también se puede expresar a partir de la convolución de las respectivas DFT's, de modo que (4. 95) se convierte en

$$\mathbf{F}'\mathbf{W}_p = \begin{bmatrix} F'_0 & F'_{-1} & \cdots & F'_{-N+1} \\ F'_1 & F'_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & F'_{-1} \\ F'_{N-1} & \cdots & F'_{-1} & F'_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{p,-K} \\ \vdots \\ \vdots \\ W_{p,K} \end{bmatrix}. \quad (4. 96)$$

Finalmente, utilizando

$$\mathbf{A}_{\text{BH}}(\lambda_0) = \frac{1}{N} \mathbf{W} \widehat{\mathbf{A}}_{\text{DTA}}(\lambda_0) \mathbf{W}^*, \quad (4. 97)$$

obtenemos la formulación

$$(\mathbf{A}_{\text{BH}}(\lambda_0) + \mathbf{B}_{1,\text{BH}}(\lambda_0)\mathbf{F}')\mathbf{W}_p = \mathbf{M}_{\text{BH}}(\lambda_0)\mathbf{W}_p = \mathbf{0}, \quad (4. 98)$$

con la que se estudia la estabilidad en el método de HB, donde las matrices diagonales se construyen usando  $A(s)$  y  $B_1(s)$  a través de la relación indicada en (4. 93) según la notación

$$\mathbf{A}_{\text{BH}}(\lambda_0) = \begin{bmatrix} A(-jK\omega_0 + (\sigma + j\omega)) & & & \\ & \ddots & & \\ & & A(\sigma + j\omega) & \\ & & & \ddots \\ & & & & A(jK\omega_0 + (\sigma + j\omega)) \end{bmatrix}. \quad (4. 99)$$

Obsérvese que al cambiar de dominio, los multiplicadores de Floquet se han transformado en exponentes de Floquet, por lo que sería posible reescribir (4. 98) como

$$\mathbf{M}_{\text{BH}}(\sigma + j\omega)\mathbf{W}_p = \mathbf{0}. \quad (4. 100)$$

La resolución de

$$\det(\mathbf{M}_{\text{BH}}(\sigma + j\omega)) = 0, \quad (4. 101)$$

nos indica los posibles valores que puede tomar el exponente de Floquet. En este caso, la estabilidad viene determinada por la parte real del exponente de Floquet:  $\sigma$ .

Finaliza aquí la demostración de la interrelación entre el estudio de la estabilidad en el dominio temporal y el dominio frecuencial, el cual se basa en la introducción desde un inicio del multiplicador de Floquet. Asimismo, nótese que la obtención de un resultado en el dominio frecuencial precisa de la descomposición de la perturbación en el producto del multiplicador de Floquet y una señal periódica, puesto que el método de HB trabaja con señales intrínsecamente periódicas. Esta descomposición no es necesaria cuando el estudio se realiza en el dominio temporal. Así, la formulación DTA (4. 73), en que aparece la perturbación  $w$ , es transformada en (4. 85), formulación en que parece la señal periódica  $w_p$ , para finalmente ser trasladada al dominio frecuencial obteniéndose (4. 98).

### **Aplicación al oscilador de Van der Pol con alinealidad estática**

Con el fin de ilustrar los desarrollos realizados, particularicemos la formulación de HB para el oscilador de Van der Pol modelado con una alinealidad estática. Reproducimos, por comodidad, la ecuación de partida

$$(LCs^2 + 1)X(s) + LsF(X) = 0, \quad (4. 102)$$

con una alinealidad descrita en el dominio temporal por

$$f(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right), \quad (4. 103)$$

cuya derivada es

$$f'(x) = \mu(x^2 - 1). \quad (4. 104)$$

La expresión (4. 98) obtenida es

$$\left(LC(\mathbf{D}^2 + \mathbf{D}^0) + L\mathbf{D}^1\mathbf{F}'\right)\mathbf{W}_p = \mathbf{0}, \quad (4. 105)$$

con

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (-jK\omega_0 + (\sigma + j\omega)) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & (\sigma + j\omega) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & (jK\omega_0 + (\sigma + j\omega)) \end{bmatrix}. \quad (4.106)$$

El lector habrá advertido que si en la ecuación de partida (4.102) las funciones de red son polinomios en  $s$  es inmediato construir la formulación de estudio de la estabilidad sin más que sustituir  $s$  por  $\mathbf{D}$  y la alinealidad por la matriz de los términos de la serie de Fourier de (4.104) calculada en la solución de la que se investiga la estabilidad.

Es necesario advertir que durante el cálculo de la solución de HB, para evitar el fenómeno de *aliasing* en el cálculo de los  $N=2K+1$  términos de la DFT de  $f(x)$ , es necesario utilizar más de  $N$  muestras. Concretamente, puesto que  $f(x)$  del oscilador de Van der Pol es una alinealidad polinómica de tercer grado, se deberán utilizar  $N'=6K+1$  muestras (el triple de armónicos necesarios). Una vez calculados los  $N'$  términos de la serie de Fourier sólo utilizaremos los  $N$  primeros. Una técnica parecida debe utilizarse al estudiar la estabilidad de la solución obtenida. Así, en la construcción de la matriz  $\mathbf{F}'$ , deben calcularse  $N_2=4K+1$  términos de la serie de Fourier de  $f'(x)$  para evitar el *aliasing* que se produciría al multiplicar por la DFT de  $w_p$ . En el oscilador de Van der Pol, puesto que  $f'(x)$  es una alinealidad polinómica de segundo grado, se deberá utilizar  $N_2'=8K+1$  muestras (el doble de armónicos necesarios).

El estudio del oscilador de Van der Pol modelado con una alinealidad estática no presenta ningún inconveniente a la hora de obtener resultados igual de precisos que otros modelos<sup>7</sup>. Sin embargo, y únicamente con la finalidad de comprobar que la formulación obtenida al trasladar la estabilidad del dominio temporal al dominio frecuencial coincide con la obtenida por [Bar-98], se va a extender el método para alinealidades dinámicas.

---

<sup>7</sup> En el capítulo 2.6 se ha comprobado que estos resultados son incluso mejores que en el modelo con alinealidad dinámica.

#### 4.3.4 Reformulación de las expresiones para alinealidades dinámicas

Para desarrollar el estudio de la estabilidad de circuitos que incorporen alinealidades dinámicas, tomaremos el mismo punto de partida que el utilizado para alinealidades estáticas

$$A(s, e^{-s\tau})X(s) + B_1(s, e^{-s\tau})F(X, \dot{X}) + B_2(s, e^{-s\tau})V_b(s) = 0, \quad (4. 107)$$

sólo que ahora la alinealidad en el dominio temporal se expresa del modo

$$f(x) = g(x)\dot{x}. \quad (4. 108)$$

Con esta alinealidad, la ecuación (4. 54) se transforma en

$$\Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l\Delta)h_{b,A}((n-l)\Delta) + g(x(l\Delta))\dot{x}(l\Delta)h_{b,B_1}((n-l)\Delta) + v_b(l\Delta)h_{b,B_2}((n-l)\Delta) = 0, \quad (4. 109)$$

con lo cual, al añadir una perturbación  $w$  a una solución  $x^*$ , linealizar y despreciar los términos en que aparece la perturbación elevada al cuadrado obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l\Delta) \left( h_{b,A}((n-l)\Delta) + g'(x(l\Delta))\dot{x}(l\Delta)h_{b,B_1}((n-l)\Delta) \right) \\ + \Delta \sum_{l=-\infty}^{\infty} g(x(l\Delta))\dot{w}(l\Delta)h_{b,B_1}((n-l)\Delta) \end{aligned} \right\} = 0, \quad (4. 110)$$

donde

$$\dot{w}(l\Delta) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} w(j\Delta)h_{b,D}((l-j)\Delta), \quad (4. 111)$$

con  $h_{b,D}$  la respuesta impulsional de la función  $D(s)=s$ , operador derivada, limitada en banda.

El primer sumatorio de (4. 110) es formalmente idéntico a (4. 56), con la diferencia que en lugar de  $f'(x)$  aparece  $g'(x)\dot{x}$ . Así, podemos determinar de forma directa los términos que le corresponden en el dominio frecuencial:

$$(\mathbf{A}_{\text{BH}}(\lambda_0) + \mathbf{B}_{1,\text{BH}}(\lambda_0)(\mathbf{G}'\dot{\mathbf{X}}))\mathbf{W}_p, \quad (4.112)$$

donde

$$(\mathbf{G}'\dot{\mathbf{X}})\mathbf{W}_p = \frac{1}{N} \mathbf{W} \begin{bmatrix} g'(x(-K\Delta))\dot{x}(-K\Delta)w_p(-K\Delta) \\ \vdots \\ g'(x(K\Delta))\dot{x}(K\Delta)w_p(K\Delta) \end{bmatrix}, \quad (4.113)$$

puede ser visto como la DFT del producto de dos vectores periódicos:  $g'(x)\dot{x}$  y  $w$ . Así, su DFT también se puede expresar a partir de la convolución de las respectivas DFT's, de modo que (4.113) se convierte en

$$(\mathbf{G}'\dot{\mathbf{X}})\mathbf{W}_p = \begin{bmatrix} G'\dot{X}_0 & G'\dot{X}_{-1} & \cdots & G'\dot{X}_{-N+1} \\ G'\dot{X}_1 & G'\dot{X}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & G'\dot{X}_{-1} \\ G'\dot{X}_{N-1} & \cdots & G'\dot{X}_1 & G'\dot{X}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{-K} \\ \vdots \\ \vdots \\ W_K \end{bmatrix}. \quad (4.114)$$

El segundo sumatorio de (4.110) requiere de una atención especial. Utilizando

$$\begin{bmatrix} \dot{w}(-K\Delta) \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{w}(K\Delta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0^\lambda & D_{-1}^\lambda & \cdots & D_{-N+1}^\lambda \\ D_1^\lambda & D_0^\lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & D_{-1}^\lambda \\ D_{N-1}^\lambda & \cdots & D_1^\lambda & D_0^\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(-K\Delta) \\ \vdots \\ \vdots \\ w(K\Delta) \end{bmatrix}, \quad (4.115)$$

y

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} g(x(-K\Delta)) & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & g(x(K\Delta)) \end{bmatrix}, \quad (4.116)$$

se obtiene

$$\mathbf{B}_{1,\text{DTA}}(\lambda)\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{D}_{\text{DTA}}(\lambda)\mathbf{w}_0. \quad (4.117)$$

Con la sustitución del vector perturbación por la relación indicada en (4. 83) se obtiene

$$\left(\Lambda^{-1}\mathbf{B}_{1,\text{DTA}}(\lambda)\Lambda\right)\mathbf{G}(\mathbf{x})\left(\Lambda^{-1}\mathbf{D}_{\text{DTA}}(\lambda)\Lambda\right)\mathbf{w}_p, \quad (4. 118)$$

donde se ha utilizado la propiedad conmutativa del producto de matrices diagonales. Esta expresión en forma compacta se escribe

$$\widehat{\mathbf{B}}_{1,\text{DTA}}(\lambda_0)\mathbf{G}(\mathbf{x})\widehat{\mathbf{D}}_{\text{DTA}}(\lambda_0)\mathbf{w}_p. \quad (4. 119)$$

Es el momento de trasladar la formulación actual al dominio frecuencial haciendo uso de las matrices de transformación  $\mathbf{W}$ . Así, obtenemos

$$\left(\frac{1}{N}\mathbf{W}\widehat{\mathbf{B}}_{1,\text{DTA}}(\lambda_0)\mathbf{W}^*\right)\left(\frac{1}{N}\mathbf{W}\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{W}^*\right)\left(\frac{1}{N}\mathbf{W}\widehat{\mathbf{D}}_{\text{DTA}}(\lambda_0)\mathbf{W}^*\right)\mathbf{w}_p. \quad (4. 120)$$

Nótese que el término

$$\mathbf{W}^* \frac{1}{N} \mathbf{W} = \mathbf{I}, \quad (4. 121)$$

se ha introducido cuantas veces ha sido necesario en (4. 120) puesto que no altera el resultado al tratarse de la matriz identidad. El siguiente paso consiste en reformular cada uno de los paréntesis de (4. 120). Así, obtenemos

$$\mathbf{B}_{1,\text{BH}}(\lambda_0)\mathbf{GDW}_p, \quad (4. 122)$$

con  $\mathbf{D}$  definida en (4. 106). Añadiendo este término a (4. 112) obtenemos la formulación que determina la estabilidad de una solución HB con alinealidad dinámica. Esta formulación es

$$\left(\mathbf{A}_{\text{BH}}(\lambda_0) + \mathbf{B}_{1,\text{BH}}(\lambda_0)\left(\mathbf{G}'\dot{\mathbf{X}}\right) + \mathbf{B}_{1,\text{BH}}(\lambda_0)\mathbf{GD}\right)\mathbf{w}_p = \mathbf{0}. \quad (4. 123)$$

Antes de continuar es necesario especificar los elementos de la matriz  $\mathbf{G}$ . Estos elementos dados por



$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} G_0 & G_{-1} & \cdots & G_{-N+1} \\ G_1 & G_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & G_{-1} \\ G_{N-1} & \cdots & G_1 & G_0 \end{bmatrix}, \quad (4.124)$$

corresponden a los coeficientes de la serie de Fourier de  $g(x)$ . El lector puede comprobar que éstos no coinciden con los indicados por la relación implícita al observar (4.120) y (4.122):

$$\mathbf{G} = \frac{1}{N} \mathbf{W} \mathbf{G}(\mathbf{x}) \mathbf{W}^*. \quad (4.125)$$

De utilizarse esta relación se estaría produciendo un *aliasing* tremendo en el cálculo de

$$g(x) \dot{w}_p, \quad (4.126)$$

producto que aparece en el segundo sumatorio de (4.110). Para evitar este *aliasing* se debe utilizar el doble de armónicos de los que se obtienen con (4.125). Obsérvese que estas consideraciones no quitan generalidad al desarrollo, puesto que sería posible utilizar una estrategia parecida a la empleada en (4.94) a (4.96). En aras de un mejor entendimiento del desarrollo esta opción se ha desestimado.

### Aplicación al oscilador de Van der Pol con alinealidad dinámica

Puesto que el objetivo que nos proponemos a continuación es comprobar que (4.123) coincide con la formulación obtenida por [Bar-98] al analizar el oscilador de Van der Pol, partiremos de la misma expresión en el dominio transformado de Laplace utilizada por esta referencia. Obviaremos, eso sí, el hecho que el circuito es excitado, puesto que las excitaciones no intervienen en el estudio de la estabilidad de una solución, únicamente en la determinación de la solución. Así, partimos de

$$(LCs^2 - \mu Ls + 1)X(s) + F(X, \dot{X}) = 0, \quad (4.127)$$

con una alinealidad descrita en el dominio temporal por

$$f(x) = \mu L x^2 \dot{x}. \quad (4.128)$$

Obsérvese que  $x$  corresponde a la corriente que circula por el inductor en el circuito original de la figura 2.10 de [Bar-98]. Para el cálculo de la estabilidad necesitamos explicitar las siguientes funciones:

$$g(x) = \mu L x^2, \quad (4.129)$$

$$g'(x)\dot{x} = 2\mu L x \dot{x}. \quad (4.130)$$

Hechas estas definiciones no queda más que particularizar (4.127) utilizando (4.106). Así, se obtiene

$$\left( (LCD^2 - \mu LD^1 + D^0) + (G' \dot{X}) + GD \right) \mathbf{W}_p = \mathbf{0}. \quad (4.131)$$

Fácilmente se puede comprobar que (4.131) coincide término a término con la expresión (2.57) de [Bar-98] que reproducimos a continuación:

$$\left( (LCD^2 - \mu LD^1 + D^0) - \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}_1 \mathbf{D} \right) \Phi_1 = \mathbf{0}. \quad (4.132)$$

Efectivamente, las matrices  $\mathbf{D}$  se han definido del mismo modo, el vector perturbación proviene en ambos casos de la corriente que circula por el inductor, y las restantes matrices, provienen de obtener los coeficientes de la serie de Fourier de (4.129), (4.130) las unas y de (2.53), (2.54) de [Bar-98] las otras, las cuales coinciden.

Obsérvese que aunque el número de exponentes de Floquet obtenidos es de  $N$ , en general la memoria  $m$  del circuito es inferior. Ocurre que al calcular el valor de los multiplicadores de Floquet al cabo de un periodo a partir de  $N$  exponentes de Floquet, se obtienen únicamente  $m$  valores distintos. Esto es debido a que la parte imaginaria de varios de estos exponentes se encuentran distanciados un múltiplo de  $2\pi/T$ .

## 4.4 Determinación de las regiones de funcionamiento del oscilador de Van der Pol

En las secciones previas se ha estudiado la interrelación de los métodos de análisis en el dominio temporal (DTA) y en el dominio frecuencial (HB). Fruto de este estudio se ha establecido un gran número de conexiones entre ambos métodos, tanto en lo referente al análisis del RP como de la estabilidad. Tanto es así, que cualquier formulación existente en el dominio temporal tiene una formulación equivalente en el dominio frecuencial y a la inversa.

No obstante, el método DTA-Gear emplea una filosofía de discretización totalmente distinta a la utilizada por el método de HB, de modo que la pregunta que surge a continuación es si los resultados de análisis del RP y de la estabilidad al aplicar ambos métodos, DTA-Gear y HB, sobre un mismo circuito coinciden. Con el objetivo de responder a esta pregunta, en esta sección se estudia el oscilador de Van der Pol excitado. Este estudio se realiza con el método DTA-Gear y se comparan los resultados con los obtenidos con el método de HB en [Bar-98]. Los parámetros son tales que en el circuito aparecen bifurcaciones de distinto tipo que, utilizando la misma nomenclatura empleada en la referencia anterior, son:

1. *Bifurcación de Hopf*. Esta bifurcación indica la existencia de un punto en el que interseccionan una rama-solución periódica y una cuasiperiódica. En el plano  $z$  esto es equivalente a que dos autovalores complejos conjugados atraviesen el círculo unidad con una fase cuya relación con  $2\pi$  es irracional. Aunque el método DTA-Gear detecta el régimen de funcionamiento cuasiperiódico del circuito, no es posible encontrar soluciones cuasiperiódicas.
2. *Bifurcación de tipo D*. Al variar un parámetro del circuito, se alcanza un punto más allá del cual no existe solución. No obstante, aparecen nuevas soluciones al cambiar el sentido en que varía este parámetro. Así, a un mismo valor del parámetro le corresponden dos soluciones. En este punto, llamado límite, se observa un cambio en la estabilidad de las soluciones. En el plano  $z$  esto es equivalente a que un autovalor atravesase el círculo unidad con fase nula por  $z=1$ . La obtención de la rama-solución

existente después de un punto límite utilizando el método DTA–Gear requiere de una correcta inicialización, basada en el conocimiento del autovector correspondiente al autovalor que atraviesa el círculo unidad.

3. *Bifurcación de tipo I*. Esta bifurcación indica la existencia de un punto en el que interseccionan una rama-solución de periodo  $n$  y una de periodo  $2n$ . En el plano  $z$  esto es equivalente a que un autovalor atravesase el círculo unidad con fase  $\pi$ . También en este caso, a un mismo parámetro le corresponde más de una solución. Así, la técnica comentada anteriormente, basada en el conocimiento del autovector correspondiente al autovalor que atraviesa el círculo unidad, debe ser utilizada para obtener la rama-solución de periodo doble.

El oscilador de Van der Pol analizado, con alinealidad estática, parte de la ecuación en el dominio transformado de Laplace

$$(LCs^2 + 1)X(s) + LsF(X) + V_b(s) = 0, \quad (4.133)$$

con una alinealidad descrita en el dominio temporal por

$$f(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right), \quad (4.134)$$

y una excitación

$$v_b(t) = -B_0 - B_1 \cos(\omega_g t). \quad (4.135)$$

La notación escogida ha sido tal que los parámetros  $L$ ,  $C$ ,  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $\omega_g$  y  $\mu$  coinciden con los empleados en la referencia [Bar-98].

Realicemos la simulación para dos conjuntos de parámetros distintos, suficientes para ilustrar cómo se detectan los distintos puntos de bifurcación y cómo se obtienen las soluciones de las ramas que aparecen en cada uno de estos puntos.

### Primer ejemplo con bifurcación de Hopf

En este primer ejemplo se trabaja con el siguiente conjunto de valores:  $L=1H$ ,  $C=1F$ ,  $\mu=0.2$ ,  $B_0=0.5$  y  $\omega_g=1.85$  rad/s. El parámetro en función del que se estudia la estabilidad es la amplitud de la excitación, variando su valor en el intervalo  $B_1=(0,5)$ . La determinación de la solución en RP se ha realizado utilizando  $N=32$  muestras por periodo con una discretización Gear-2.

El proceso empieza encontrando una primera solución para  $B_1=5$ . Existen distintos modos de inicializar el proceso para obtener esta primera solución. Una de las estrategias consiste en empezar analizando el circuito con  $\mu=0$ , cuya solución es conocida al tratarse de un circuito lineal. Posteriormente se va aumentando el valor de  $\mu$  hasta alcanzar el valor deseado. En cada nueva iteración se utiliza como inicialización el resultado de la anterior iteración. En el caso actual, al tratarse de un circuito con una alinealidad débil,  $\mu=0.2$ , la solución se obtiene directamente inicializando con la solución de  $\mu=0$ <sup>8</sup>. Una vez obtenida esta primera solución, se varía  $B_1$  manteniendo  $\mu$  fijo. Cada nueva iteración utilizará como inicialización la solución obtenida en la iteración anterior.

Nótese que no se utiliza ningún mecanismo, léase método de continuación, que permita un mayor refinamiento de la inicialización basado en observar como evoluciona la solución al variar un parámetro del circuito. La simple estrategia de inicializar con la solución anterior permite el seguimiento de una rama-solución periódica. Hasta el segundo ejemplo, no será necesario utilizar técnicas más avanzadas para *saltar* de una rama-solución a otra.

La estabilidad de cada una de las soluciones obtenidas se determina sobre la base de la situación de los autovalores en el plano  $z$ . Dado que la memoria de un circuito de segundo orden discretizado con Gear-2 es de cuatro, y la memoria del circuito continuo es de dos, se espera que dos de estos autovalores no aporten información, situándose muy próximos al origen.

---

<sup>8</sup> En circuitos en los que esta estrategia no diera resultado, siempre es posible obtener una primera solución utilizando un método de integración.

Sirvan las Fig. 4. 8 a Fig. 4. 10 para ilustrar el cambio de comportamiento del circuito en función del parámetro  $B_1$ . El lector observará que al disminuir el parámetro  $B_1$ , los autovalores contenidos en un inicio dentro del círculo unidad, Fig. 4. 8 (izq.), se desplazan hacia la izquierda sobre el eje real, Fig. 4. 8 (der.). Al aproximarse a la circunferencia unidad, éstos se convierten en un par de autovalores complejos conjugados, Fig. 4. 9 (izq.). Al continuar disminuyendo  $B_1$ , este par de autovalores se continúa desplazando hacia la izquierda y alejándose del eje real, Fig. 4. 10, atravesando la circunferencia unidad aproximadamente cuando  $B_1=3$ , Fig. 4. 9 (der.). De estas gráficas se desprende que para valores de  $B_1 < 3$  la rama-solución sobre la que se ha estado obteniendo soluciones es inestable. Asimismo, el valor imaginario de los autovalores en  $B_1=3$  indica que en este punto se produce una bifurcación de Hopf. Así, aparece una nueva rama de soluciones cuasiperiódicas, imposible de seguir mediante el método DTA-Gear. El valor de la nueva frecuencia introducida en el circuito se puede determinar a partir de la fase de los autovalores al cruzar la circunferencia unidad. Así, llamando a la frecuencia excitación  $\omega_g$ , a la nueva frecuencia  $\omega_0$ , a la frecuencia de la perturbación  $\omega$  y a la fase de uno de los autovalores  $\phi$ , se cumple

$$e^{j\omega T} = e^{j(\omega_g - \omega_0)T} = e^{j\phi}, \quad (4. 136)$$

de donde se obtiene  $\omega$  y  $\omega_0$  según

$$\omega = \phi \frac{1}{T} = \phi \frac{\omega_g}{2\pi}, \quad \omega_0 = \omega_g \left(1 - \frac{\phi}{2\pi}\right). \quad (4. 137)$$

A partir de la fase del autovalor de la Fig. 4. 9 (der.) se obtiene

$$\omega = 0.88555 \text{ rad/s}, \quad \omega_0 = 0.96450 \text{ rad/s}. \quad (4. 138)$$

Si deseáramos determinar con más precisión el valor de  $\omega$ ,  $\omega_0$  y  $B_1$  en el que se produce la bifurcación de Hopf, se debería aumentar el número de muestras por periodo. Queda tan sólo por decir que los resultados obtenidos en este ejemplo coinciden con los obtenidos al utilizar el método de HB y representados de forma gráfica en la Figura 2.11 de [Bar-98].

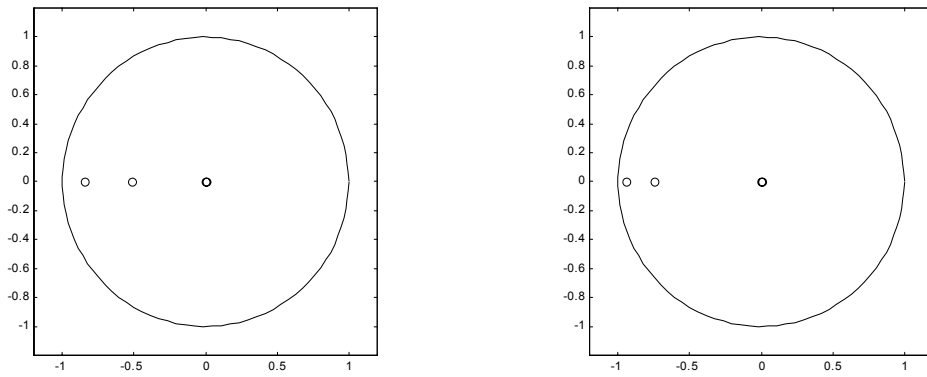


Fig. 4. 8. Autovalores de las soluciones estables obtenidas con  $B_1=5$  (izq.) y  $B_1=4$  (der.).

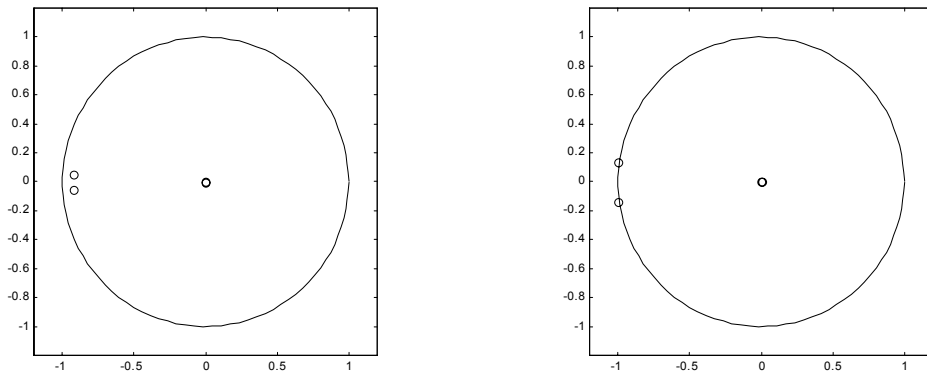


Fig. 4. 9. Autovalores de las soluciones obtenidas con  $B_1=3.5$  (izq.) y  $B_1=3$  (der.).

Se observa la aparición de una bifurcación de Hopf alrededor de  $B_1=3$ .

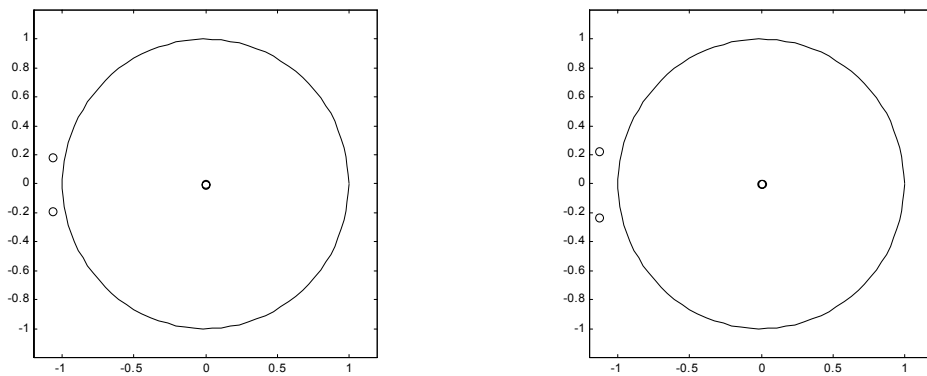


Fig. 4. 10. Autovalores de las soluciones inestables obtenidas con  $B_1=2.5$  (izq.) y  $B_1=2$  (der.).

### Segundo ejemplo con bifurcaciones de tipo I y D

En el ejemplo anterior se ha comprobado como el método DTA–Gear detecta las bifurcaciones de Hopf. En este segundo ejemplo se comprobará cómo también es posible detectar bifurcaciones de tipo I y D. Se mantienen los valores de todos los parámetros del ejemplo anterior excepto la frecuencia de la excitación que se fija a  $\omega_g = 1.95$  rad/s. Del mismo modo que en el ejercicio anterior, la estabilidad de las soluciones se estudia en función de la amplitud de la excitación, variando su valor en el intervalo  $B_1=(0,8)$ . La determinación de la solución en RP se ha realizado utilizando  $N=32$  muestras por periodo con una discretización de Gear–2.

#### *Detección de bifurcaciones de tipo I*

El proceso empieza encontrando una primera solución para  $B_1=8$  inicializando con una solución de  $\mu=0$ . A partir de esta primera solución se va decrementando el valor de  $B_1$ , observándose en las Fig. 4. 11 a Fig. 4. 14 la evolución de los autovalores en el plano  $z$ . Los autovalores contenidos en un inicio dentro del círculo unidad, Fig. 4. 11 (izq.), se desplazan hacia la izquierda sobre el eje real al disminuir el parámetro  $B_1$ , Fig. 4. 11 (der.). Se comprueba que en  $B_1=5$  uno de los autovalores ha cruzado la circunferencia unidad con fase  $\pi$ , indicando que se ha producido una bifurcación de tipo I, Fig. 4. 12 (izq.)<sup>9</sup>. A partir de este punto, las soluciones obtenidas serán inestables. Al continuar decrementando el parámetro  $B_1$ , el autovalor que permanece dentro del círculo unidad continúa desplazándose hacia la izquierda hasta cruzarlo con fase  $\pi$  alrededor de  $B_1=2.5$ , Fig. 4. 13 (der.), indicando la aparición de una nueva bifurcación de tipo I. La disminución del parámetro  $B_1$  coloca los dos autovalores fuera del círculo unidad, Fig. 4. 14. En la Fig. 4. 28 se observa cómo en este primer barrido, se ha seguido una rama-solución de periodo–1, detectándose dos bifurcaciones de periodo y obteniéndose soluciones inestables a partir de la primera bifurcación.

---

<sup>9</sup> Un estudio detallado demuestra que el cruce se produce alrededor de  $B_1=5.2$  con  $N=32$  muestras y de  $B_1=5.1$  con  $N=64$ .



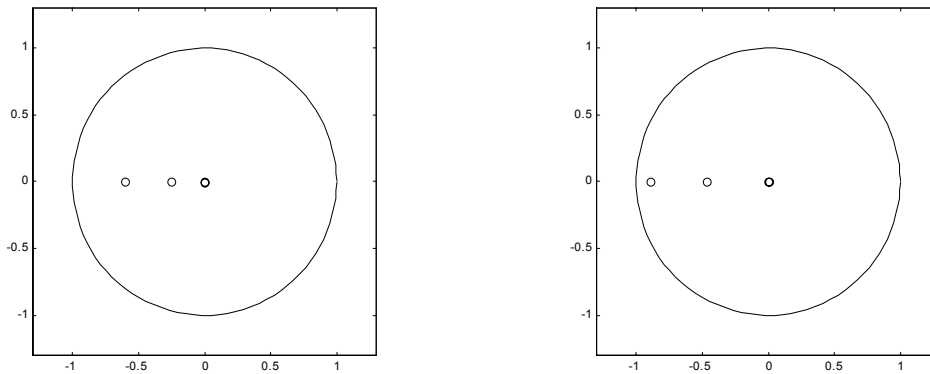


Fig. 4. 11. Autovalores de las soluciones estables obtenidas con  $B_1=8$  (izq.) y  $B_1=6$  (der.).

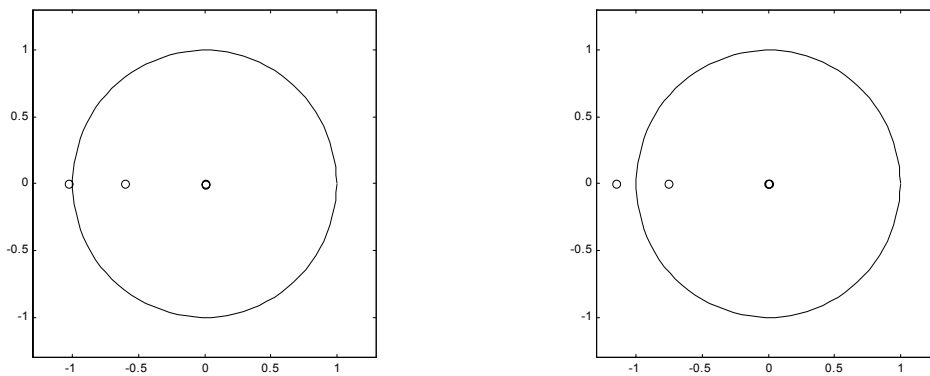


Fig. 4. 12. Autovalores de las soluciones obtenidas con  $B_1=5$  (izq.) y  $B_1=4$  (der.).

Se observa la aparición de una bifurcación de periodo alrededor de  $B_1=5$ .

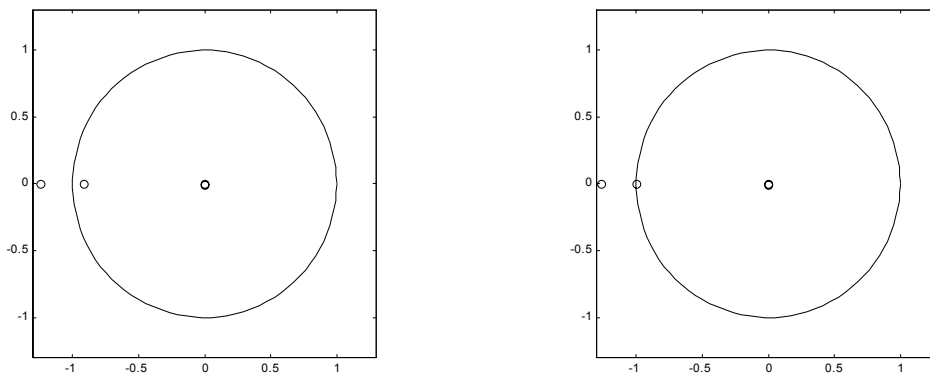


Fig. 4. 13. Autovalores de las soluciones inestables obtenidas con  $B_1=3$  (izq.) y  $B_1=2.5$  (der.).

Se observa la aparición de una segunda bifurcación de periodo alrededor de  $B_1=2.5$ .

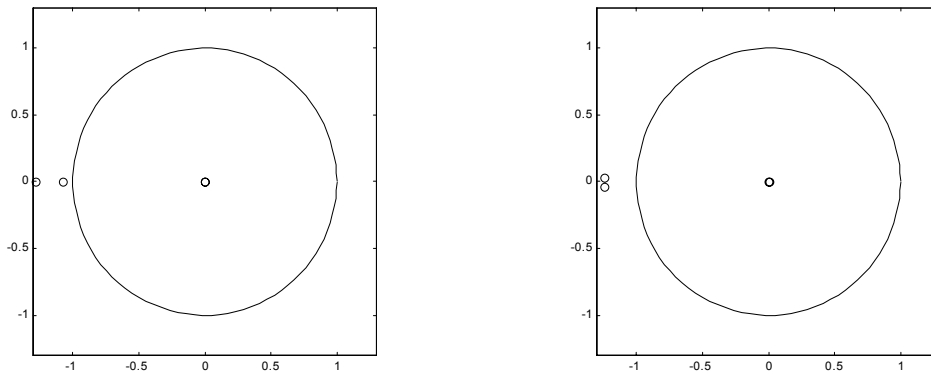


Fig. 4. 14. Autovalores de las soluciones inestables obtenidas con  $B_1=2$  (izq.) y  $B_1=1$  (der.).

### Seguimiento de las soluciones de periodo-2

Obsérvese que una vez alcanzado el primer punto de bifurcación, las soluciones de periodo-1 obtenidas son inestables, mientras que en el punto de bifurcación se espera encontrar soluciones de periodo-2 estables<sup>10</sup>. Así, el problema ahora consiste en encontrar una solución de periodo-2 estable para el parámetro  $B_1=5$ . Una primera aproximación consiste en inicializar con dos periodos de una solución de periodo-1 del modo

$$\mathbf{x}_{\text{periodo-2}} \cong \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\text{periodo-1}}; \mathbf{x}_{\text{periodo-1}} \end{bmatrix}. \quad (4. 139)$$

Obsérvese que el número de muestras de la solución de periodo-2,  $2N$ , es doble al de la solución de periodo-1,  $N$ . Si no se introduce ningún término adicional, el algoritmo convergerá hacia la rama de periodo-1<sup>11</sup>. Surge, pues, la necesidad de idear mecanismos para conseguir acercarnos a la rama de periodo-2. Una primera alternativa consiste en utilizar la información proporcionada por el punto de cruce del autovalor. Éste indica que la perturbación se repetirá cada dos periodos. Así, podemos añadir una señal senoidal de periodo-2 a la aproximación indicada en (4. 139)

---

<sup>10</sup> Este tipo de bifurcación recibe el nombre de *supercritical pitchfork bifurcation*.

<sup>11</sup> Nótese que si  $x^*$  es una solución de periodo-1, entonces un número entero de periodos de  $x^*$  también es solución.

$$\mathbf{x}_{|\text{periodo-2}} \cong \left[ \mathbf{x}_{|\text{periodo-1}}; \mathbf{x}_{|\text{periodo-1}} \right] + \mathbf{c}, \quad (4.140)$$

con

$$\mathbf{c} = \left[ A \cos(\phi), A \cos\left(\frac{\pi}{N} + \phi\right), \dots, A \cos\left((2N-1)\frac{\pi}{N} + \phi\right) \right]^T. \quad (4.141)$$

Enseguida se advierte que esta es una aproximación tosca, restringida a los circuitos con alinealidades débiles, al no considerar todos los posibles armónicos asociados a esta nueva frecuencia<sup>12</sup>. Por otro lado, esta alternativa se basa en el tanteo del valor de dos parámetros desconocidos: la amplitud y la fase de la señal senoidal.

Otra alternativa, más refinada, y que saca el máximo provecho del estudio de estabilidad, consiste en considerar el autovector asociado al autovalor que cruza por  $z=-1$ . Este autovector, de una longitud igual a la memoria  $m$  del circuito discretizado se define

$$\mathbf{p}_m = [p_m, p_{m-1}, \dots, p_1]. \quad (4.142)$$

En el circuito que consideramos la memoria es  $m=4$ . El resto de muestras hasta completar dos periodos se calcula utilizando el Jacobiano construido a partir de la formulación DTA–Gear, obteniéndose, utilizando (3.15) y (3.16), las muestras necesarias mediante la relación

$$p_n = -\frac{\sum_{k=1}^m p_{n-k} (a_k + b_k f'(x_{n-k}))}{a_0 + b_0 f'(x_n)}, \quad n > m. \quad (4.143)$$

Una vez calculadas las  $2N$  muestras del vector perturbación, éste debe ser sometido a un proceso de normalización. Efectivamente, puesto que el autovector se ha calculado a partir de un autovalor que no coincide exactamente con  $z=-1$ , este autovector tenderá a crecer o decrecer. Así, el vector es normalizado con una señal exponencial de tal modo que la

muestra  $2N+1$  coincide con la muestra 1, Fig. 4. 16. Así, una vez se ha calculado la perturbación durante dos periodos

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_{2N}]^T \quad (4. 144)$$

la expresión (4. 139) puede ser mejorada por

$$\mathbf{x}_{|\text{periodo-2}} \cong \left[ \mathbf{x}_{|\text{periodo-1}}; \mathbf{x}_{|\text{periodo-1}} \right] + \alpha \mathbf{p}, \quad (4. 145)$$

con  $\alpha$  la única constante por determinar. El valor de esta constante depende de cuán cerca estemos del punto de bifurcación. Si el valor de esta constante se escoge adecuadamente, la aproximación (4. 145) es suficientemente cercana a la solución real y el algoritmo convergerá hacia la solución de periodo-2.

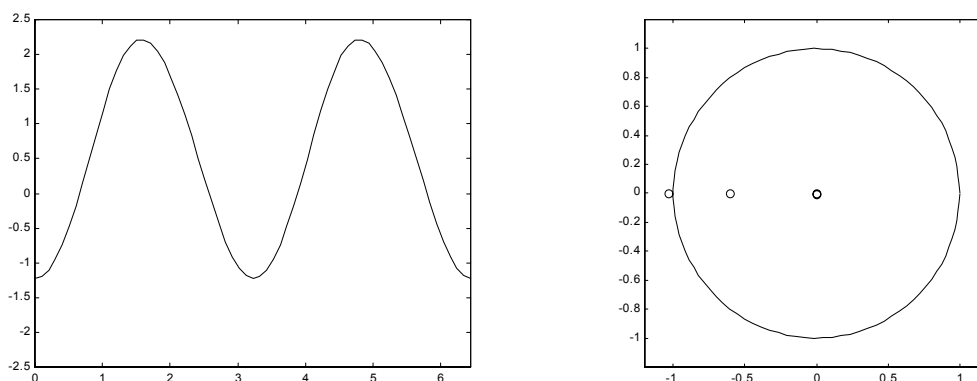


Fig. 4. 15. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-1 con  $B_1=5$ .

<sup>12</sup> Aunque este es el caso en que nos encontramos, en el capítulo 5.1 se comprobará la necesidad de considerar estos armónicos para una correcta inicialización.

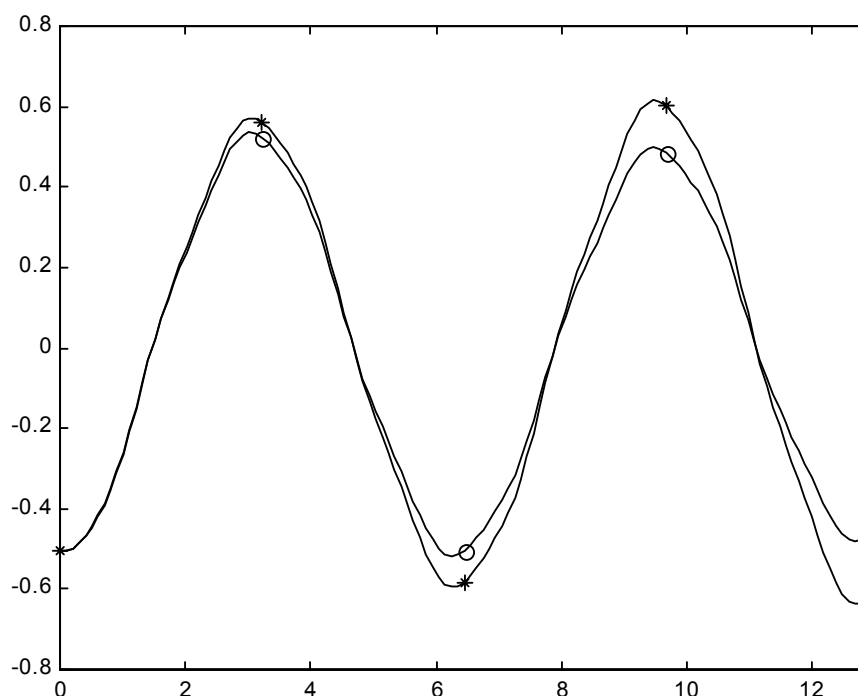


Fig. 4. 16. Dos periodos de la perturbación (\*) asociada al autovalor  $\lambda=-1.0347$  con  $B_1=5$ . Al ser el módulo mayor que la unidad esta perturbación tiende a crecer, siendo necesaria su normalización (o).

La utilización de (4. 145) con  $\alpha = -1$  permite comprobar que la inicialización es próxima a la solución de periodo-2 obtenida, Fig. 4. 17 (izq.). Hemos conseguido situarnos sobre una de las dos ramas de periodo-2 que aparecen tras una bifurcación de periodo. Para encontrar una solución sobre la otra rama, debemos utilizar  $\alpha$  de distinto signo. También en este caso se comprueba que, con  $\alpha=1$ , la inicialización es próxima a la solución obtenida, Fig. 4. 17 (der.).

Centrémonos en el seguimiento de la rama-solución de periodo-2 obtenida con  $\alpha = -1$ . En la Fig. 4. 18 se comprueba que la solución obtenida con  $B_1=5$  es estable. Para continuar sobre la rama de periodo doble, utilizaremos la simple técnica de ir variando el parámetro  $B_1$  inicializando con la solución de la iteración anterior. Nótese que al doblar el periodo, debemos utilizar un número de muestras doble si queremos seguir manteniendo la misma precisión. Así, todas las soluciones de rama-solución de periodo-2 se han obtenido con  $N=64$  muestras.

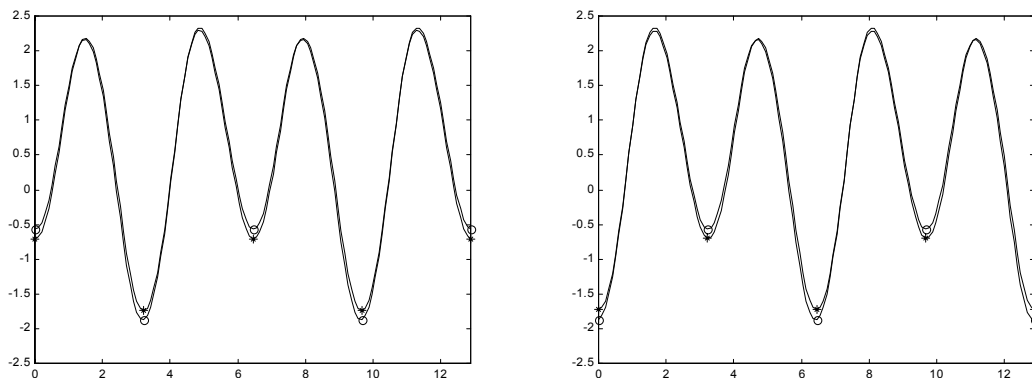


Fig. 4. 17. Inicialización (\*) y solución (o) de periodo-2 obtenida con  $B_1=5$  al utilizar (4. 145) con  $\alpha=-1$  (izq.) y  $\alpha=1$  (der.). Existen, pues, dos ramas de soluciones a seguir.

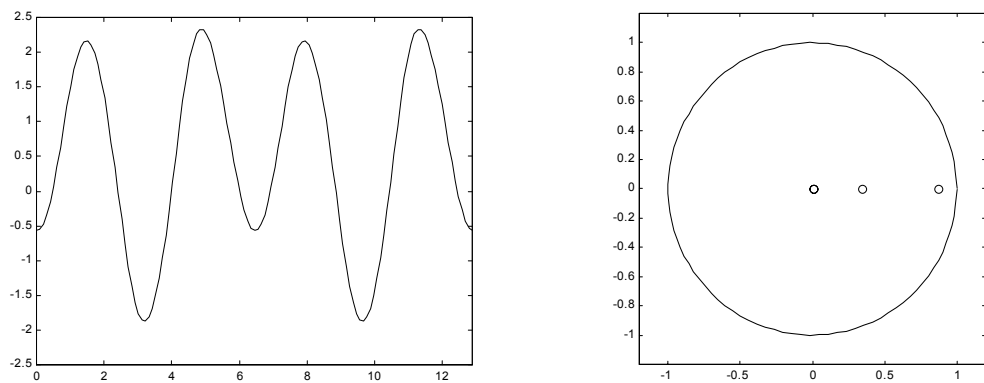


Fig. 4. 18. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=5$ .

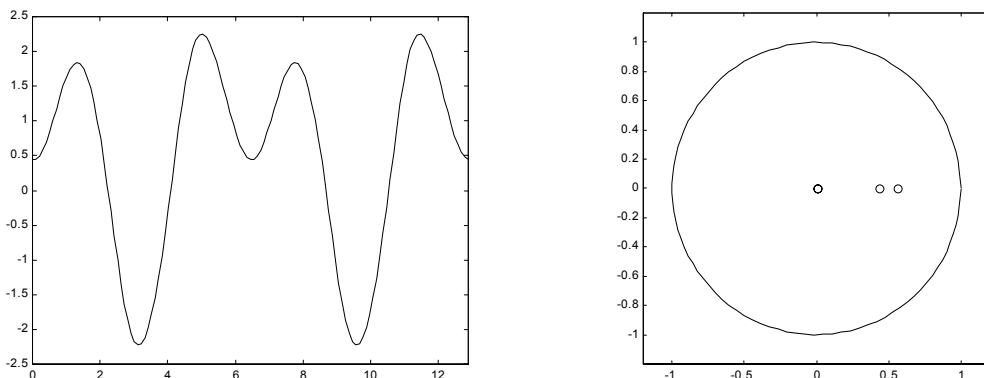


Fig. 4. 19. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=4$ .

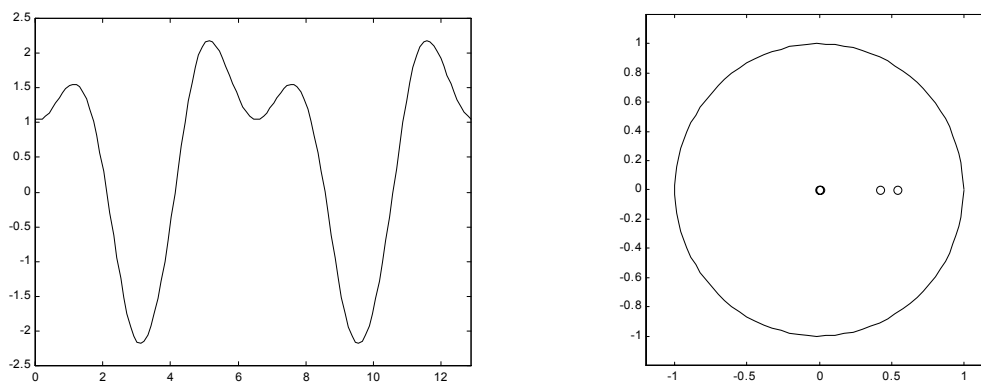


Fig. 4. 20. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=3$ .

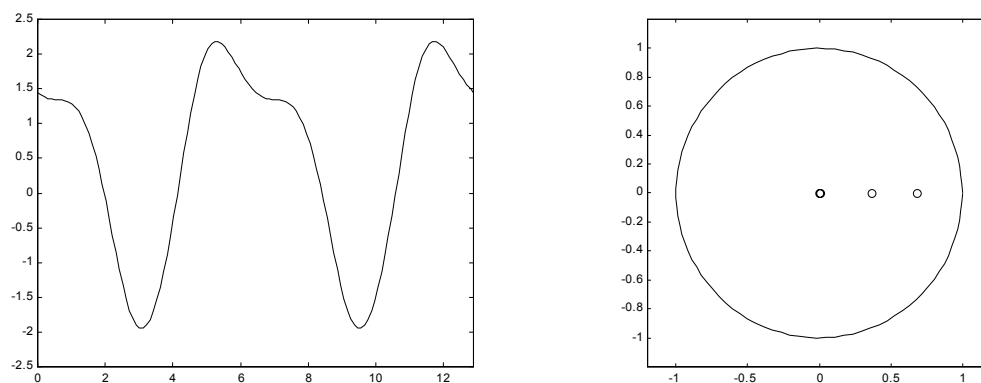


Fig. 4. 21. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=2$ .

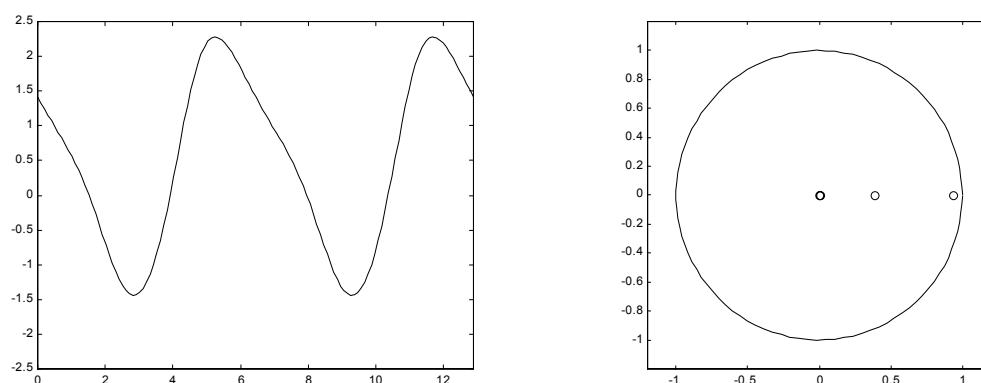


Fig. 4. 22. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=1$ .

*Detección de bifurcaciones de tipo D*

Las Fig. 4. 18 a Fig. 4. 22 muestran la evolución de los autovalores en el plano  $z$  y la reducción del módulo del armónico de periodo-1 al disminuir el parámetro  $B_1$ . Los autovalores que en un principio residen dentro del círculo unidad se desplazan hacia la derecha sobre el eje real, acercándose a  $z=1$ , avanzando la existencia de una bifurcación de tipo D. Efectivamente, en  $B_1=0.95$  una de los autovalores casi ha alcanzado el punto límite, Fig. 4. 23, y todo intento de encontrar una solución para  $B_1 < 0.95$  no tiene éxito.

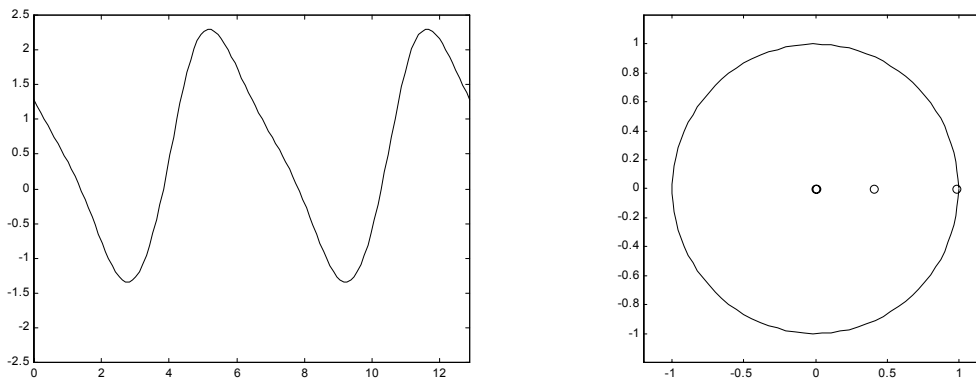


Fig. 4. 23. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=0.95$ .

*Seguimiento de la rama-solución tras un punto límite*

Al alcanzar un punto límite, la obtención de nuevas soluciones requiere aumentar el valor de  $B_1$ . Para evitar obtener soluciones sobre la rama que se ha seguido hasta el momento, podría usarse la técnica anterior, basada en el conocimiento del autovector asociado al autovalor que cruza por  $z=1$ . No obstante, para las bifurcaciones de tipo D es posible utilizar una técnica mucho más sencilla. Ésta consiste en suponer que si la variación de la solución al progresar de  $B_1=1$  (rama estable) a  $B_1=0.95$  (punto límite) es

$$\mathbf{x}(B_1 = 0.95) = \mathbf{x}(B_1 = 1) \Big|_{\text{estable}} + \mathbf{dx}. \quad (4. 146)$$

entonces esta variación será la misma al progresar de  $B_1=0.95$  (punto límite) a  $B_1=1$  (rama inestable). Así, la inicialización para  $B_1=1$  se realiza con



$$\mathbf{x}(B_1 = 1)|_{\text{inestable}} = \mathbf{x}(B_1 = 0.95) + \mathbf{dx} . \quad (4.147)$$

obteniéndose el resultado de la Fig. 4. 24, en la que se comprueba que la solución es inestable.

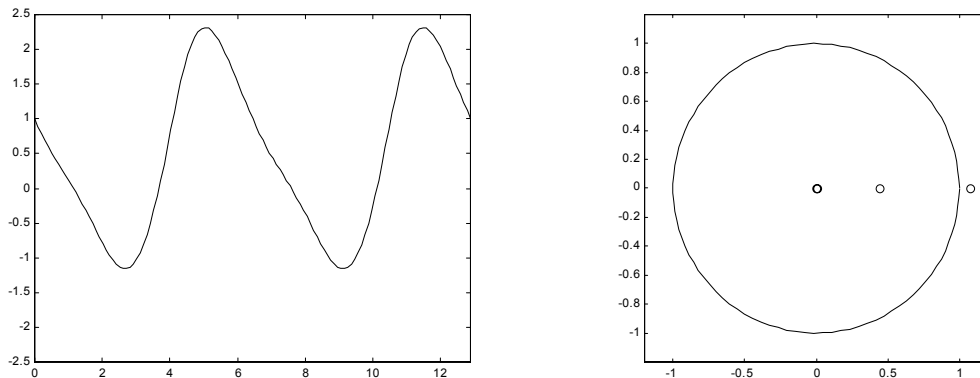


Fig. 4. 24. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=1$ .

#### *Finalización del seguimiento de las soluciones de periodo-2*

Al continuar aumentando el parámetro  $B_1$ , el autovalor que todavía permanece dentro del círculo unidad se acerca a  $z=1$  al tiempo que el módulo del armónico correspondiente a la solución de periodo-1 vuelve a aumentar su valor, Fig. 4. 25 a Fig. 4. 27. En  $B_1=2.5$ , este autovalor ha alcanzado el punto  $z=1$ , indicando la existencia de otra bifurcación de tipo D. En este punto límite, se están cruzando nuevamente la rama-solución de periodo-1 y la rama-solución de periodo-2. Efectivamente, es posible verificar que el módulo del armónico de periodo-2 es 10 veces inferior al de periodo-1. En la Fig. 4. 27 se comprueba que en  $B_1=2.55$  la solución obtenida es prácticamente de periodo-1.

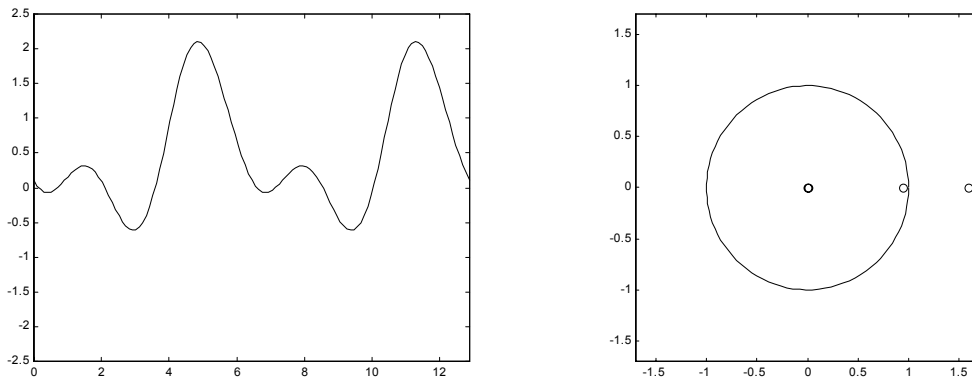


Fig. 4. 25. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=2$ .

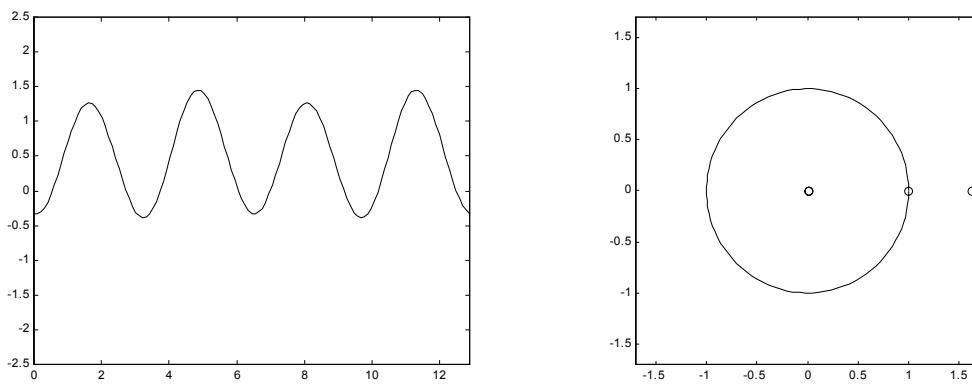


Fig. 4. 26. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=2.5$ .

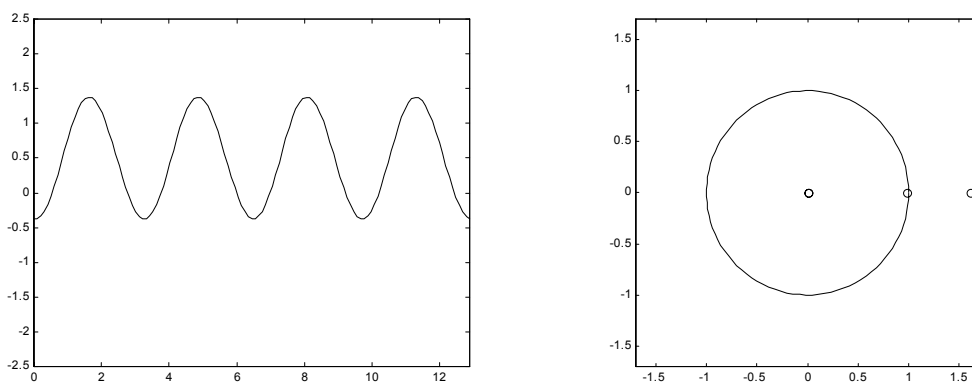


Fig. 4. 27. Forma de onda (dos periodos) y autovalores de la solución de periodo-2 con  $B_1=2.55$ .

*Régimen de funcionamiento del oscilador de Van der Pol*

En la Fig. 4. 28 se ilustra la evolución de las distintas ramas en función del parámetro  $B_1$ . En la rama-solución de periodo-1 se ha utilizado el modulo del armónico de periodo-1 (a frecuencia  $\omega_g$ ). La rama-solución de periodo-2 se ha obtenido sumando al módulo del armónico de periodo-1 (a frecuencia  $\omega_g$ ) el módulo del armónico de periodo-2 (a frecuencia  $\omega_g / 2$ ). Esta gráfica se puede comparar con la Figura 2.14 de [Bar-98], comprobándose su coincidencia. Queda pues resuelta la cuestión de si los resultados obtenidos con el método de HB y el método DTA-Gear al estudiar la estabilidad de las soluciones obtenidas coinciden. La respuesta es afirmativa.

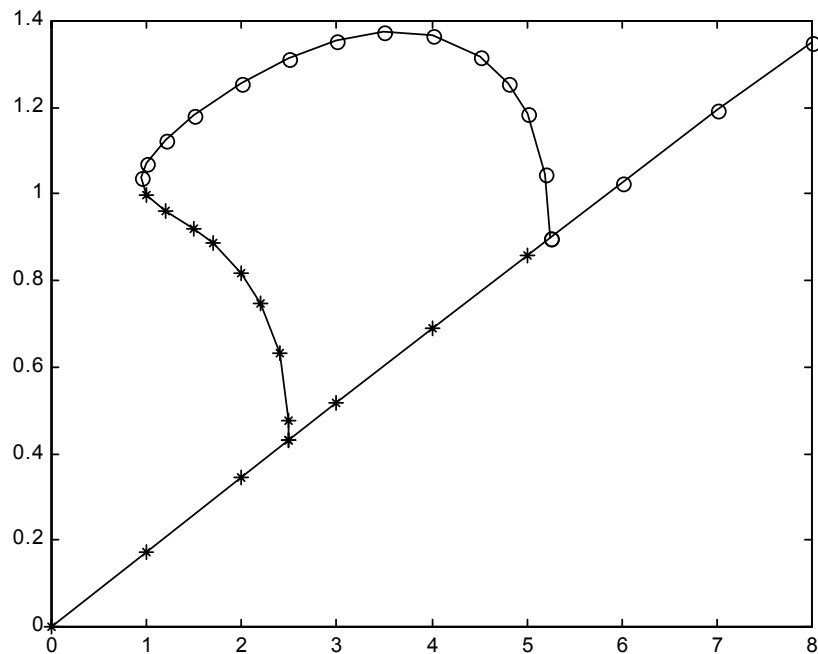


Fig. 4. 28. Régimen de funcionamiento del oscilador de Van der Pol. En el eje horizontal  $B_1$  y en el eje vertical suma del módulo del armónico de periodo-1 ( $\omega_g$ ) y de periodo-2 ( $\omega_g / 2$ ). Soluciones de periodo-1(---) y periodo-2(—). Soluciones estables (o) e inestables(\*).

En esta figura no aparece la rama de periodo-2 obtenida al utilizar  $\alpha=1$ , Fig. 4. 17 (der.). La inclusión de esta rama se ha realizado restando al módulo del armónico de periodo-1 (a frecuencia  $\omega_g$ ) el módulo del armónico de periodo-2 (a frecuencia  $\omega_g / 2$ ) obteniéndose la curva solución de la Fig. 4. 29.

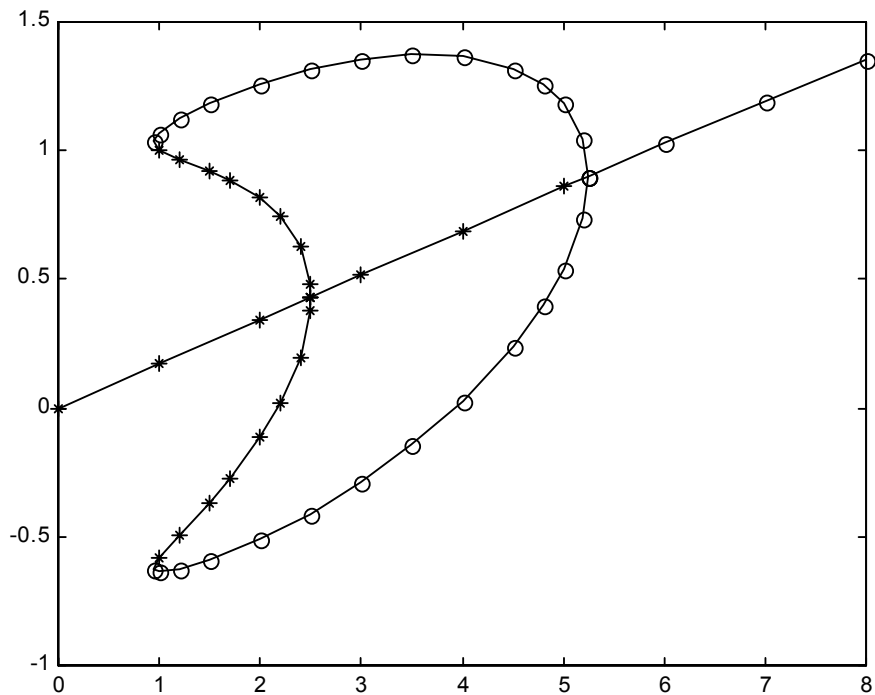


Fig. 4. 29. Inclusión de la rama-solución inferior de periodo-2. Soluciones de periodo-1(---) y de periodo-2(—). Soluciones estables (o) e inestables(\*).

## 4.5 Conclusiones

La descripción de un nuevo método para estudiar el RP y la estabilidad de circuitos no lineales, debe ir acompañado de múltiples referencias que confirmen su validez. Este ha sido uno de los objetivos que se ha introducido en cada capítulo. El intento de relacionar los métodos de análisis en el dominio temporal con los métodos de análisis en el dominio frecuencial ha traído como consecuencia importantes desarrollos teóricos que se han recogido en este capítulo.

La transformación de una formulación de HB en una formulación DTA ha sido el inicio de este desarrollo teórico. La interpretación que una operación de filtrado con  $A(s)$  en el dominio frecuencial es equivalente a convolucionar con la respuesta impulsional limitada en banda  $A(s)$  en el dominio temporal ha sido una consecuencia de esta transformación. Esta interpretación que se había realizado con la ayuda de representaciones espectrales en [Pal-94] se ha realizado de forma analítica en la primera sección de este capítulo. Esta transformación da pie a que se puedan relacionar otros resultados entre ambos dominios.

En la segunda sección se aplica la misma estrategia de análisis de la estabilidad de las soluciones obtenidas con HB que la realizada en el método DTA-Gear. Fruto de ello es la constatación que esta estrategia, basada en expresar una muestra a partir de las anteriores, sólo es posible si la respuesta impulsional es causal y finita. Para confirmar estos resultados, se estudia el oscilador de Van der Pol bajo distintas formulaciones, observándose una mayor convergencia entre los resultados obtenidos y la referencia (DTA-Gear) a medida que la respuesta impulsional es más causal (más muestras) y de menor duración (pérdidas en el circuito). Estos resultados, lejos de ser inútiles, confirman las ideas planteadas con anterioridad: un estudio de la estabilidad en el dominio temporal basado en la construcción de un mapeo que exprese una muestra a partir de las anteriores precisa de una respuesta impulsional causal y finita.

Los resultados de esta segunda sección son utilizados para abordar el estudio de la estabilidad de las soluciones obtenidas en HB desde una perspectiva totalmente distinta: es necesario introducir el conocimiento de la evolución de la perturbación desde un primer momento. Sólo así es posible construir un mapeo en el que una muestra se determine a

partir de las anteriores. Se comprueba cómo desde esta perspectiva es posible estudiar la estabilidad siguiendo los mismos criterios que los aplicados a una solución DTA–Gear. Sin embargo, la dificultad para determinar el valor de los autovalores es mayor en esta formulación que en la obtenida con DTA–Gear. Asimismo, es posible construir otra formulación basada en plantear un sistema de ecuaciones homogéneo. Los autovalores forman parte del sistema de ecuaciones, cuyo determinante ha de ser nulo para que la perturbación sea distinta de cero. Partiendo de esta segunda formulación, en la que los autovalores son los multiplicadores de Floquet, se realiza un desarrollo totalmente teórico que conduce a una formulación en el dominio frecuencial en el que aparecen los exponentes de Floquet. Para realizar este desarrollo ha sido necesario descomponer la perturbación en una señal periódica y el multiplicador de Floquet, puesto que en la formulación de HB sólo se consideran señales periódicas. El punto clave para interrelacionar el estudio en ambos dominios ha sido un cambio de variable en el cual se pasa de una formulación en la que aparecen los multiplicadores de Floquet a una formulación en la que aparecen los exponentes de Floquet. Con la finalidad de comprobar que la formulación obtenida coincide con la utilizada para estudiar la estabilidad en HB, se ha repetido el desarrollo para alinealidades dinámicas.

Finalmente, se ha aplicado el método DTA–Gear al estudio del oscilador de Van der Pol excitado, comprobándose la validez del método para detectar bifurcaciones de Hopf, desdoblamientos de órbitas y puntos límites. Asimismo, se han descrito las técnicas necesarias para seguir las soluciones de periodo-2, partiendo de una rama-solución de periodo-1, y para continuar una rama más allá de su punto límite. Los resultados han sido plenamente satisfactorios, observándose su total coincidencia con los obtenidos utilizando el método de HB.