

5 APLICACIONES

A lo largo de los capítulos previos se han realizado distintas aplicaciones con la doble finalidad de ilustrar los razonamientos realizados y comprobar la validez del método DTA–Gear. El estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio del circuito de Chua retardado (TDCC), en el capítulo 3.4, y la determinación del régimen de funcionamiento del oscilador de Van der Pol, en el capítulo 4.4, son una muestra de ello. En este capítulo, se explota al máximo el potencial del método DTA–Gear en tres ejemplos representativos de los posibles campos de aplicación.

Así, en la primera sección de este capítulo se analiza el TDCC en una de sus ventanas periódicas. Enlazando con el estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio de este circuito, se determinan las soluciones de periodo–1. Al realizar continuación sobre un parámetro físico se alcanza una bifurcación de desdoblamiento de órbitas, con lo cual la rama de periodo–1 se vuelve inestable. La técnica utilizada al determinar las zonas de funcionamiento del oscilador de Van der Pol es trasladable al TDCC, consiguiendo determinar soluciones sobre las ramas estables de periodo–2 y de periodo–4.

En la segunda sección se describen los mecanismos que permiten reconvertir un problema con línea de transmisión *RLCG* en otro con línea de transmisión ideal. De este modo, los circuitos que incorporen este tipo de línea pueden ser estudiados con el método DTA–Gear, constituyendo una alternativa a los algoritmos temporales basados en la convolución de la respuesta impulsional de la línea *RLCG*, costosos desde un punto de

vista computacional. Así, el método DTA–Gear se utilizará para analizar el TDCC con línea de transmisión *RLCG*.

Una clase de osciladores de alta frecuencia se realiza con líneas de transmisión. El principio de funcionamiento de estos osciladores, llamados *osciladores con línea de transmisión*, es el mismo que el de un oscilador *LC*. Para compensar las pérdidas producidas por los elementos dinámicos, es necesario introducir energía en el circuito utilizando un bipolo con una característica *i-v* de pendiente negativa en el origen. Algunos de estos osciladores con línea de transmisión sustituyen el inductor por una línea de transmisión. La frecuencia de oscilación se puede determinar asumiendo una oscilación senoidal, a una frecuencia tal que el puerto de entrada de la línea de transmisión se comporte como un elemento inductivo con una admitancia que cancele la del condensador. Puesto que el bipolo que introduce energía en el circuito no es lineal, la frecuencia de oscilación diferirá de la calculada anteriormente, siendo necesario, en último extremo, emplear algoritmos de optimización, válidos para circuitos no lineales, para diseñar un circuito que oscile a una frecuencia predeterminada. Con este objetivo, en la tercera sección se analiza un oscilador con línea de transmisión, optimizándose el valor de uno de los parámetros físicos del circuito para conseguir la frecuencia de oscilación deseada. Esta optimización se sirve del cálculo de la sensibilidad del sistema de ecuaciones de la formulación DTA–Gear respecto a los elementos del circuito realizado en el capítulo 2.3. Así, en esta última aplicación se comprueba la eficacia del método DTA–Gear para abordar con éxito determinados problemas de optimización.

5.1 El circuito de Chua retardado

Se pretende en esta sección aplicar el método DTA–Gear al análisis del RP y la estabilidad del TDCC, un ejemplo paradigmático del tipo de circuitos al que se refiere esta tesis. Este circuito se ha analizado con anterioridad, obteniéndose en su momento la formulación DTA–Gear que permite analizarlo. En este capítulo se utilizarán idénticos parámetros y notación. En el capítulo 3.4 se ha determinado la estabilidad de los puntos de equilibrio de este circuito. Fruto de este estudio, se comprueba que el punto de equilibrio cero es inestable, mientras que los dos puntos de equilibrio distintos de cero son estables cuando $R > 1.82 \text{ k}\Omega$ e inestables para valores inferiores de R .

5.1.1 Solución de periodo–1

A causa de los resultados de estabilidad de las soluciones continuas del TDCC es de esperar la existencia de soluciones periódicas estables para $R \leq 1.82 \text{ k}\Omega$. Efectivamente, empezando con $R = 1.82 \text{ k}\Omega$ e inicializando el proceso de resolución iterativo con $N = 128$ muestras de una señal senoidal de amplitud $A = 3 \text{ V}$, periodo $T = 5\tau$ y un *offset* igual a uno de los puntos de equilibrio, $C = 3.6163 \text{ V}$, se obtiene una solución estable de periodo–1. Recordemos que el autovalor $\lambda \approx 1$ debe existir siempre en circuitos autónomos, puesto que el origen de coordenadas no está fijado por ninguna excitación. Además, la proximidad de este autovalor a la unidad da información adicional acerca de la exactitud de la solución obtenida. Con el objetivo de conseguir mayor exactitud en los resultados, esta solución es interpolada con $N = 256$ muestras y usada como inicialización de otra iteración, obteniéndose una solución estable de periodo–1 representada en la Fig. 5. 1.

Partiendo de la solución obtenida con $R = 1.82 \text{ k}\Omega$, se reduce el parámetro R , obteniéndose con $R = 1.8 \text{ k}\Omega$ una solución inestable de periodo–1, Fig. 5. 2. Un estudio detallado muestra que uno de los autovalores se ha desplazado hacia la izquierda sobre el eje real, cruzando la circunferencia unidad por $z = -1$. En la Fig. 5. 3 se observa que el cruce se ha producido entre $R = 1.8038 \text{ k}\Omega$ y $R = 1.8037 \text{ k}\Omega$.

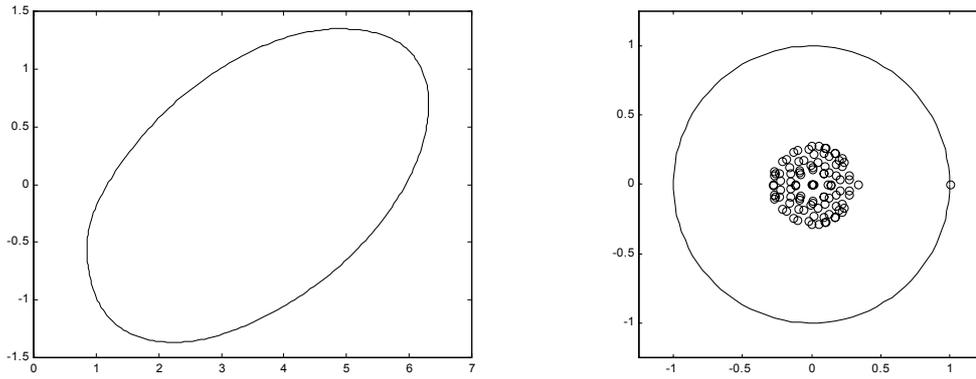


Fig. 5. 1. Plano de fase v_2-v y autovalores de la solución de periodo-1 con $R=1.82 \text{ k}\Omega$, $N=256$ y Gear-2. ($T=2.6498$).

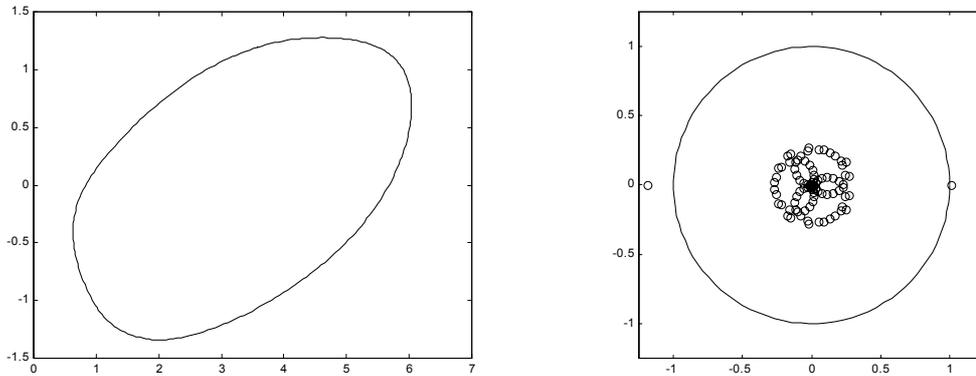


Fig. 5. 2. Plano de fase v_2-v y autovalores de la solución de periodo-1 con $R=1.8 \text{ k}\Omega$, $N=256$ y Gear-2 ($T=2.6852$).

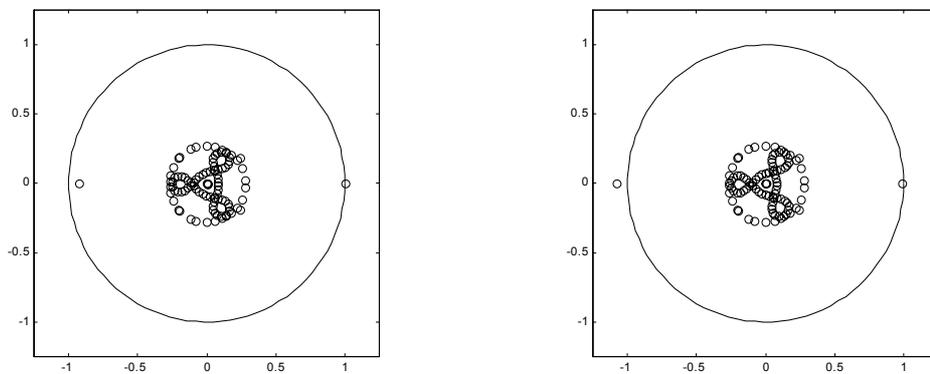


Fig. 5. 3. Autovalores de la solución de periodo-1 con $N=256$ y Gear-2. Solución estable con $R=1.8038 \text{ k}\Omega$. (izq.) e inestable con $R=1.8037 \text{ k}\Omega$. (der.).

5.1.2 Bifurcación de desdoblamiento de órbitas

El estudio anterior indica que la rama-solución de periodo-1 iniciada en $R=1.82 \text{ k}\Omega$ es estable con $R>1.8038 \text{ k}\Omega$ e inestable con $R<1.8037 \text{ k}\Omega$. El punto de cruce de la circunferencia unidad del autovalor que determina el cambio en la estabilidad de las soluciones, indica la existencia de una nueva rama-solución de periodo-2, estable como se comprobará enseguida. A este punto de bifurcación de desdoblamiento de órbitas, con una rama de periodo-1 que se vuelve inestable al aparecer una rama estable de periodo-2, se le conoce con el nombre de *supercritical Pitchfork bifurcation* [Sey-88].

El problema ahora consiste en encontrar una solución sobre la rama de periodo-2. En el capítulo 4.4 se han determinado las regiones de funcionamiento del circuito de Van der Pol con una técnica consistente en considerar el autovector asociado al autovalor que ha abandonado el interior del círculo unidad¹. A partir de este autovector se conoce de forma cualitativa la perturbación que transforma la solución de periodo-1 en una solución de periodo-2. Aunque esta afirmación sólo es cierta cuando la amplitud de la perturbación tiende a cero, es una buena aproximación cuando nos encontramos cerca del punto de bifurcación. Este autovector, de una longitud igual a la memoria m del circuito discretizado se define como

$$\mathbf{p}_m = [p_m, p_{m-1}, \dots, p_1]. \quad (5.1)$$

En el circuito con retardo que consideramos, con $N=256$, la memoria es $m=99$. El resto de las muestras hasta completar dos periodos, $2N=512$, se calcula utilizando el Jacobiano construido a partir de la formulación DTA-Gear, obteniéndose, utilizando (3.15) y (3.16), las muestras necesarias mediante la relación

¹ Entre las alternativas de inicialización descritas en éste capítulo, ésta es la que mejor permite acercarse a la solución de periodo-2.

$$p_n = -\frac{\sum_{k=1}^m p_{n-k} (a_k + b_k f'(x_{n-k}))}{a_0 + b_0 f'(x_n)}, \quad n > m. \quad (5.2)$$

De este modo, se obtiene el vector perturbación

$$\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_{2N}]^T, \quad (5.3)$$

correspondiente al autovalor $\lambda = -1.0812$, que ha cruzado por $z = -1$, de la Fig. 5.3 (der). Obsérvese que el módulo de este autovalor es ligeramente mayor que la unidad, indicando que la muestra $2N+1$, al cabo de dos periodos, es mayor que la muestra 1. Con el fin de conseguir la periodicidad de esta perturbación, el vector \mathbf{p} es normalizado mediante una exponencial decreciente, obteniéndose el resultado de la Fig. 5.4.

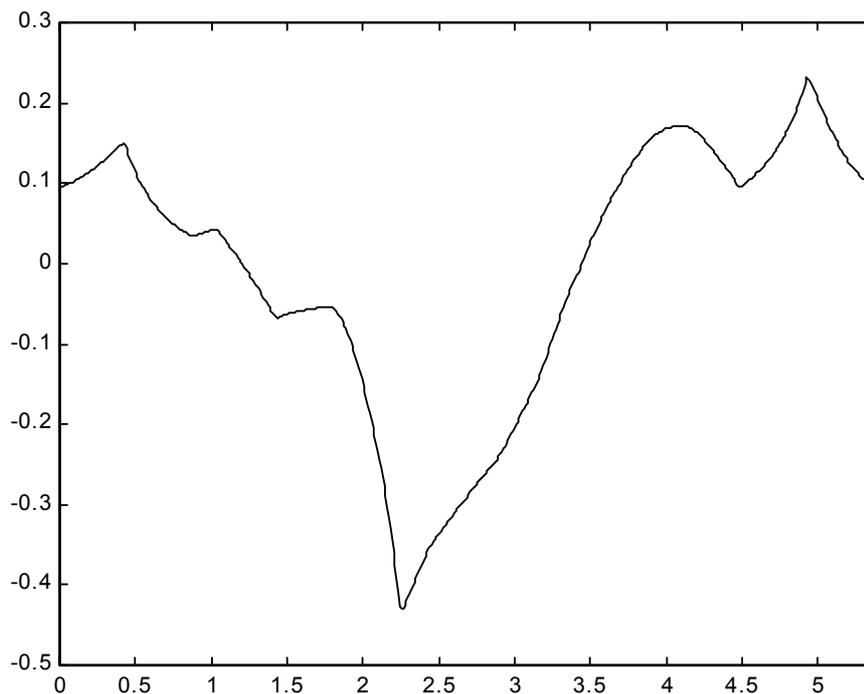


Fig. 5.4. Perturbación normalizada asociada al autovalor $\lambda = -1.0812$ de la Fig. 5.3 (der.).

5.1.3 Solución de periodo-2

Una vez el vector perturbación \mathbf{p} ha sido normalizado, es posible obtener una solución aproximada de periodo-2 añadiendo a dos periodos de la solución de periodo-1 el vector \mathbf{p} multiplicado por una constante a determinar α :

$$\mathbf{v}_{\text{periodo-2}} \cong \left[\mathbf{v}_{\text{periodo-1}}; \mathbf{v}_{\text{periodo-1}} \right] + \alpha \mathbf{p}. \quad (5.4)$$

El valor de esta constante depende de la proximidad al punto de bifurcación. Si el valor de esta constante se escoge adecuadamente, la aproximación es suficientemente cercana a la solución real y el proceso iterativo converge hacia una solución de periodo-2.

Utilizando la solución de periodo-1 (con $R=1.8 \text{ k}\Omega$) y la perturbación correspondiente a $R=1.8037 \text{ k}\Omega^2$, la inicialización propuesta en (5.4) con $\alpha=1$ permite obtener una solución estable de periodo-2 (con $R=1.8 \text{ k}\Omega$), Fig. 5.5. *A posteriori* es posible verificar, Fig. 5.6, la hipótesis realizada en la ecuación (5.4): que el autovector \mathbf{p} añadido a la solución de periodo-1 es una aproximación cercana a la solución de periodo-2.

Una vez obtenida una solución sobre la rama de periodo-2, es posible obtener nuevas soluciones al disminuir progresivamente el parámetro R , inicializando el proceso iterativo con la solución anterior. Por otro lado, la utilización de $\alpha < 0$, permite obtener soluciones sobre la otra rama de periodo-2.

² La perturbación obtenida con $R=1.8037 \text{ k}\Omega$ y $R=1.8 \text{ k}\Omega$ no presenta diferencias una vez efectuada la normalización.

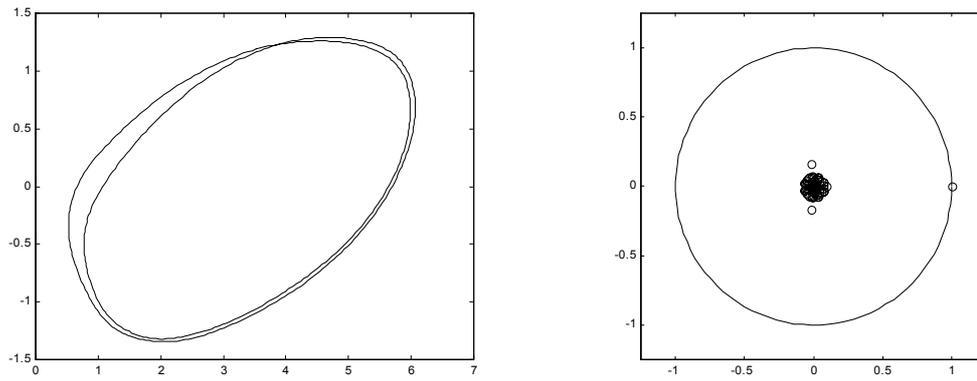


Fig. 5. 5. Plano de fase v_2-v y autovalores de la solución de periodo-2 con $R=1.8 \text{ k}\Omega$. ($T=5.3658$).

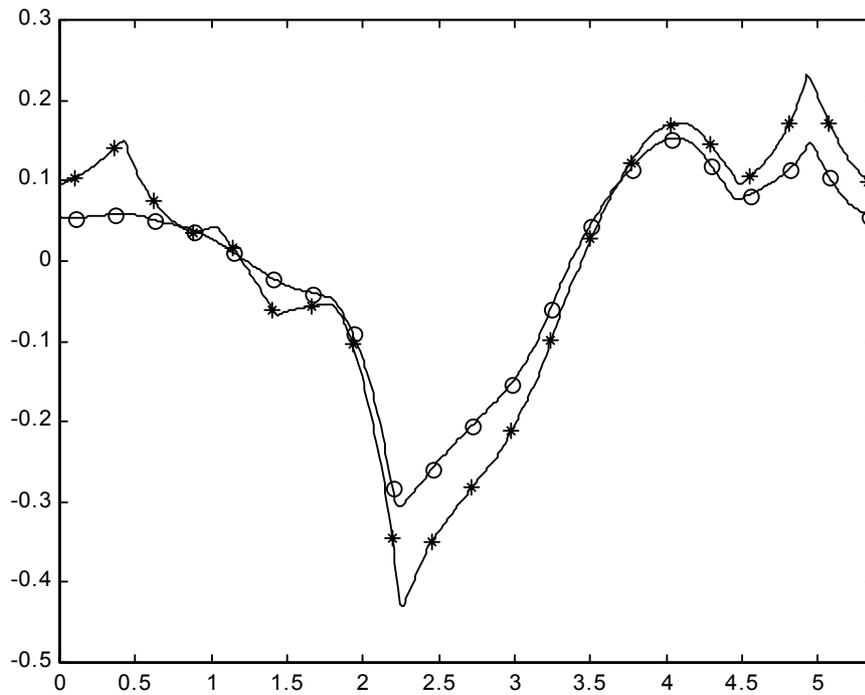


Fig. 5. 6. Perturbación (*) y diferencia entre las soluciones (o) de periodo-2 y periodo-1 con $R=1.8 \text{ k}\Omega$.

5.1.4 Solución de periodo-4

Al realizar continuación sobre la rama de periodo-2, se detecta una nueva bifurcación en la proximidad de $R=1.796 \text{ k}\Omega$. Utilizando la técnica anterior, es posible obtener soluciones de periodo-4. Sorprendentemente, la solución de periodo-4 obtenida con $R=1.795 \text{ k}\Omega$, no es estable. Ante la sospecha de que el valor de R empleado está demasiado alejado de la bifurcación, se realiza continuación sobre la rama de periodo-4 en sentido inverso, verificando que entre $R=1.7951 \text{ k}\Omega$ y $R=1.7952 \text{ k}\Omega$ el autovalor causante de la inestabilidad entra dentro del círculo unidad por $z=-1$. La creciente proximidad entre los puntos de desdoblamiento de órbitas al variar el parámetro R parece indicar el acercamiento a una ventana de comportamiento caótico [Hos-94].

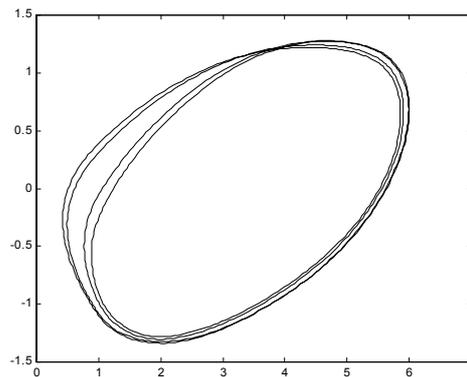


Fig. 5. 7. Plano de fase v_2-v de la solución estable de periodo-4 con $R=1.7952 \text{ k}\Omega$.

Sumario

En esta aplicación se ha comprobado como, con el uso del método de análisis DTA-Gear y la utilización de continuación sobre el parámetro R , se determina la estabilidad de las soluciones del TDCC y se detectan los puntos de desdoblamiento de órbitas. La técnica para inicializar el proceso de resolución iterativo para, partiendo de una solución de periodo- n , obtener una solución de periodo- $2n$ se ha aplicado satisfactoriamente. Los resultados obtenidos coinciden con los predecidos por [Hos-94] y con los obtenidos usando métodos de integración como PSpice.

5.2 El circuito de Chua retardado con línea $RLCG$

Alguno de los algoritmos existentes para analizar circuitos con líneas de transmisión dispersivas y con pérdidas, se basan en el cálculo de la respuesta impulsional de la línea de transmisión, estrategia utilizada por PSpice. Los algoritmos basados en esta técnica precisan de un tiempo de cálculo extremadamente elevado, especialmente si el objetivo es determinar el RP de circuitos con una constante de tiempo grande en comparación con el periodo de la señal, como el que se analizará posteriormente en esta sección. Así, estos métodos únicamente son aceptables si el objetivo es calcular el transitorio.

Los métodos de determinación del RP de circuitos no lineales en el dominio temporal encuentran graves dificultades al analizar circuitos con líneas $RLCG$ ³. Una elegante forma de evitar estas dificultades consiste en encontrar un modelo aproximado, formado únicamente por elementos de parámetros concentrados y líneas de transmisión ideales. Estas técnicas se basan la sustitución de la línea de transmisión $RLCG$, de parámetros R_d , L_d , C_d , G_d y l , por un bipuerto equivalente, Fig. 5. 10, en el que interviene la impedancia característica definida por

$$Z_0(s) = \sqrt{\frac{R_d + sL_d}{G_d + sC_d}}, \quad (5.5)$$

y la función de propagación definida por

$$F(s) = e^{-l\sqrt{(R_d+sL_d)(G_d+sC_d)}}. \quad (5.6)$$

Obsérvese que al tratarse de funciones de red irracionales, el estudio de circuitos que las incorporen se ve comprometido, siendo imposible encontrar una expresión analítica en el dominio temporal en forma de ecuación integro-diferencial ordinaria. Por tanto, ninguno de los métodos temporales que tome como punto de partida esta ecuación integro-

³ En el dominio frecuencial cualquier función de red analítica, racional o no, es tratada con el mismo grado de complejidad, incluidas las líneas $RLCG$.

diferencial ordinaria puede abordar el análisis de este tipo de circuitos. Conviene recordar que los métodos de integración, y el mismo método DTA–Gear, tienen este punto de partida.

Así, surgen distintos métodos para aproximar (5. 5) y (5. 6) mediante funciones de red racionales, esto es, funciones de red formadas por un cociente de polinomios en s . Algunas de estas técnicas se basan en el uso de algoritmos de optimización [Alo-92]. La utilización de una aproximación de Padé para cada una de las funciones alrededor de $s=0$ o $s\rightarrow\infty$, según el comportamiento capacitivo o inductivo de la línea de transmisión, es utilizada en [Cha-90], [Kaw-97]. Un caso más general, que incluye el anterior, consiste en utilizar los aproximantes de Padé multipunto, con lo cual esta aproximación no se realiza únicamente en uno de los extremos del eje frecuencial sino que se pueden escoger los puntos, y el grado de aproximación en cada uno de éstos, que se desee [Pal-93]. Detalles de los resultados obtenidos al aplicar cada una de las tres técnicas propuestas para aproximar líneas de transmisión *RLCG* aparecen en [Bon-95]. En las técnicas anteriores es posible reducir considerablemente el orden del bipuerto modelando una gran parte del retardo de (5. 6) con una línea de transmisión ideal. Así, la función de propagación se descompone en dos partes:

$$F(s) = F_c(s)e^{-s\tau}, \quad (5. 7)$$

siendo $F_c(s)$ la función irracional a aproximar con elementos de parámetros concentrados y $e^{-s\tau}$ el retardo de una línea de transmisión ideal definido por:

$$e^{-s\tau} = e^{-sl\sqrt{L_d C_d}}. \quad (5. 8)$$

En los siguientes apartados se extiende el método DTA–Gear al análisis de circuitos con líneas de transmisión *RLCG* utilizando los aproximantes de Padé multipunto, particularizando los resultados, desde un principio, al estudio del TDCC con línea *RLCG*.

5.2.1 Transformación del TDCC con línea *RLCG*

En esta sección se utilizan los aproximantes de Padé multipunto para transformar un circuito con línea *RLCG* en un circuito formado por elementos de parámetros concentrados y líneas de transmisión ideales. Después de esta transformación, es posible utilizar el método DTA–Gear para analizar el circuito resultante. Así, se determina el RP de la variable de control v en el TDCC con línea *RLCG* de la Fig. 5. 8. Los valores de los parámetros del circuito, los mismos que en [Kaw-97], son $Z_L=0\ \Omega$, $R_d=0.55\ \Omega/\text{m}$, $L_d=0.2375\ \mu\text{H}/\text{m}$, $G_d=0.1\ \text{mS}/\text{m}$, $C_d=95\ \text{pF}/\text{m}$, $l=3\text{m}$, $C=1\ \text{pF}$ y $R=1.83\ \text{k}\Omega$. La característica $i-v$ de la alinealidad se muestra en la Fig. 5. 9 con $m_0=-0.9\ \text{mS}$, $m_1=-0.5\ \text{mS}$ y $v_a=1\ \text{V}$. Estos valores han sido normalizados en frecuencia con $T_0=60\ \text{ns}$ y las impedancias con $R_0=1\ \text{k}\Omega$, con el propósito de facilitar el cálculo de la solución.

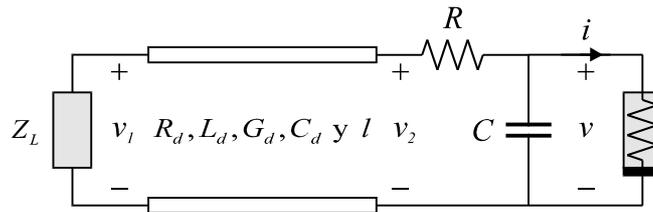


Fig. 5. 8. Circuito de Chua con línea *RLCG*.

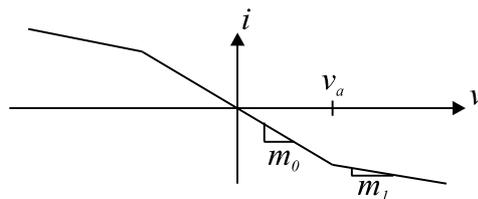


Fig. 5. 9. Característica $i-v$ lineal a tramos de la alinealidad del Circuito de Chua con línea *RLCG*.

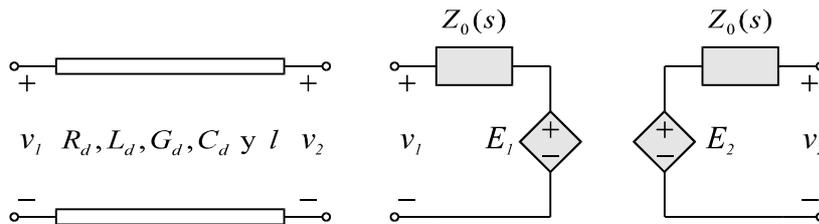


Fig. 5. 10. Bipuerto equivalente de una línea *RLCG*.

Centrémonos en la línea $RLCG$ que aparece en la Fig. 5. 8. Ésta es equivalente al bipuerto de la Fig. 5. 10, donde se define

$$E_1(s) = F_c(s)e^{-s\tau}(2V_2 - E_2), \quad (5. 9)$$

$$E_2(s) = F_c(s)e^{-s\tau}(2V_1 - E_1). \quad (5. 10)$$

Para el caso que nos ocupa, $Z_L=0 \Omega$, $v_1=0 \text{ V}$, podemos caracterizar el puerto de salida de la línea $RLCG$ como un bipolo de impedancia

$$Z(s, e^{-2s\tau}) = Z_0(s) \frac{1 - F_c^2(s)e^{-2s\tau}}{1 + F_c^2(s)e^{-2s\tau}}. \quad (5. 11)$$

Utilizando esta última expresión y sustituyendo la alinealidad por una fuente controlada, el circuito de la Fig. 5. 8 se transforma en el circuito de la Fig. 5. 11.

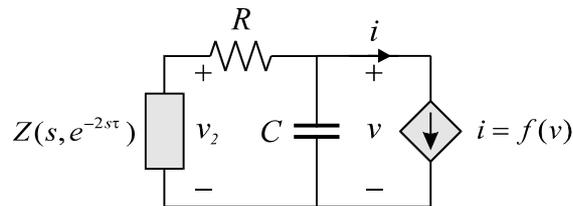


Fig. 5. 11. Sustitución de la línea $RLCG$ por su impedancia equivalente y de la alinealidad por una fuente controlada.

Las funciones $Z_0(s)$ y $F_c(s)$ que aparecen en $Z(s, e^{-2s\tau})$ pueden ser aproximadas utilizando los aproximantes de Padé multipunto mediante las funciones racionales

$$Z_0(s) \cong \frac{Z_a(s)}{Z_b(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_{Z_0}} a_i s^i}{\sum_{j=0}^{n_{Z_0}} b_j s^j}, \quad (5. 12)$$

$$F_c(s) \cong \frac{F_a(s)}{F_b(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_{F_c}} c_i s^i}{\sum_{j=0}^{n_{F_c}} d_j s^j}. \quad (5. 13)$$

El valor de los coeficientes de cada una de las funciones irracionales, con $n_{z_0} = 1$ y $n_{F_c} = 1$, se determina del siguiente modo. Al existir cuatro coeficientes y un grado de libertad, por ejemplo uno de los coeficientes de valor uno, es posible fijar tres condiciones de coincidencia entre la función original y la aproximada. La mejor aproximación en todo el eje frecuencial se consigue fijando la coincidencia en el valor de la función real y la aproximada en los extremos frecuenciales y en un punto alrededor del cual las funciones son simétricas en escala logarítmica, según

$$s = 0, \quad s = \infty, \quad s = \sqrt{\frac{R_d G_d}{L_d C_d}}. \quad (5.14)$$

En las Fig. 5. 12 a Fig. 5. 15 se representa gráficamente el módulo y la fase de las dos funciones de red y el error realizado en cada una de las aproximaciones.

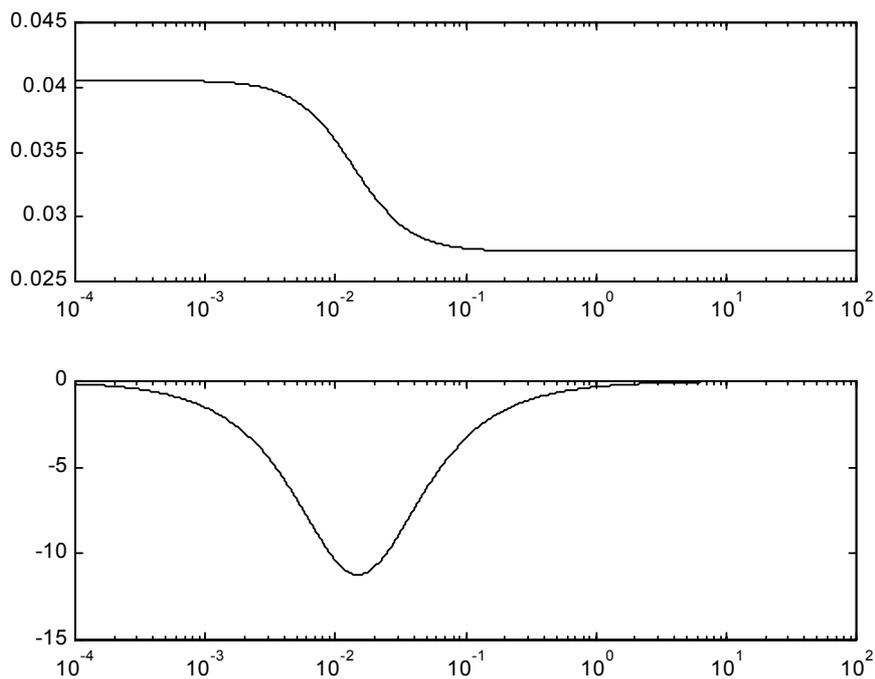


Fig. 5. 12. Módulo (arriba) y fase en grados (abajo) de la impedancia característica Z_0 .

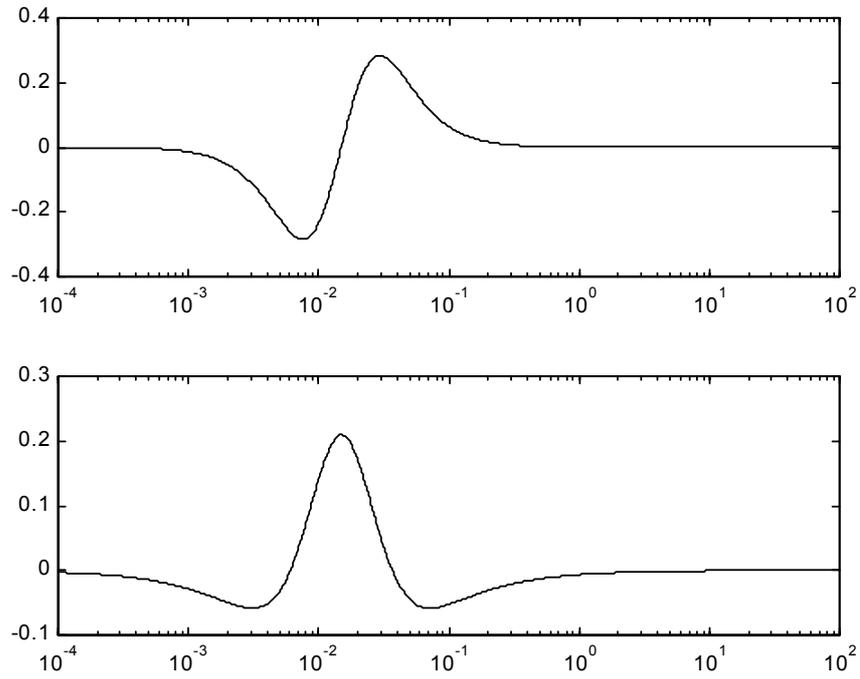


Fig. 5. 13. Error relativo (%) en la aproximación del módulo (arriba) y error absoluto en la aproximación de la fase en grados (abajo) de la impedancia característica Z_0 con $n_{z_0}=1$.

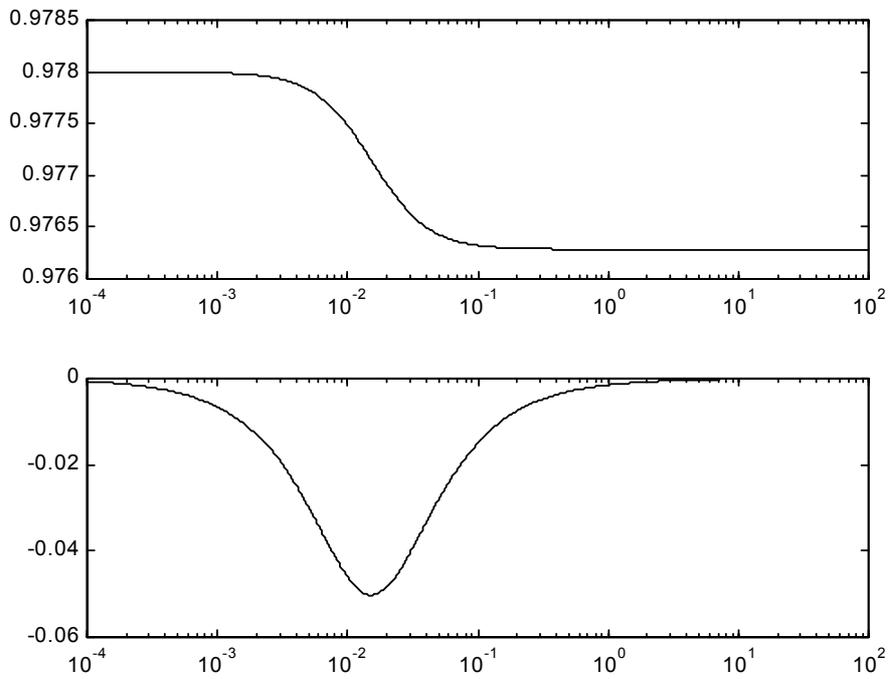


Fig. 5. 14. Módulo (arriba) y fase en grados (abajo) de F_c .

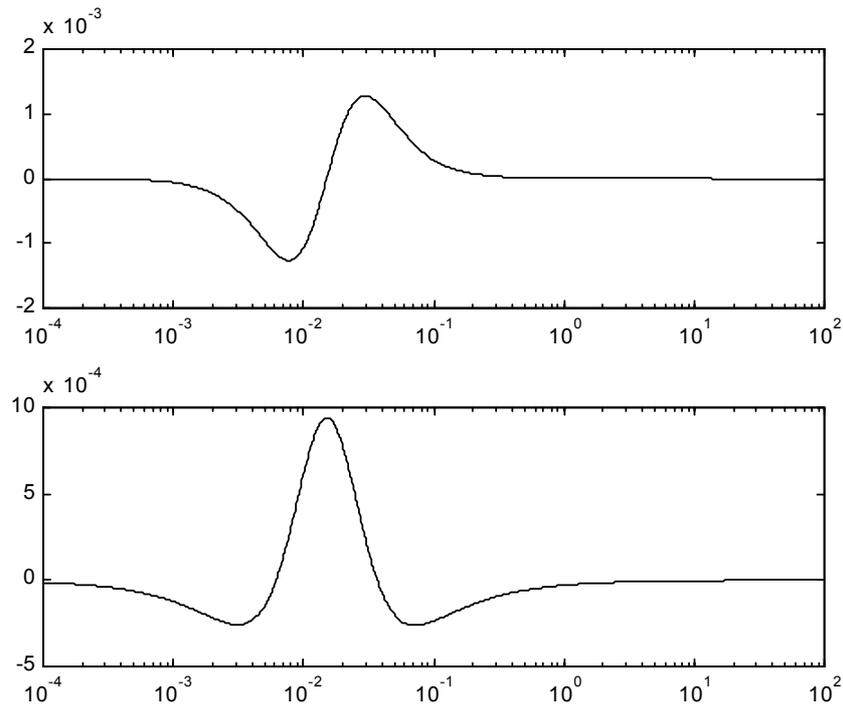


Fig. 5. 15. Error relativo (%) en la aproximación del módulo (arriba) y error absoluto en la aproximación de la fase en grados (abajo) de F_c con $n_{F_c}=1$.

5.2.2 El sistema de ecuaciones discretizado

A partir del circuito de la Fig. 5. 11 es posible expresar la variable de control v como el producto de la corriente i de la fuente controlada por la impedancia en terminales de ésta. La ecuación obtenida en el dominio transformado de Laplace es similar a la que aparece al analizar el TDCC con línea ideal, siendo posible obtener una de la otra mediante las transformaciones

$$Z_0 \longrightarrow Z_0(s) \cong \frac{Z_a(s)}{Z_b(s)} = \frac{a_0 + a_1s}{b_0 + b_1s}, \quad (5. 15)$$

$$e^{-s\tau} \longrightarrow F(s) = F_c(s)e^{-s\tau} \cong \frac{F_a(s)}{F_b(s)} e^{-s\tau} = \frac{c_0 + c_1s}{d_0 + d_1s} e^{-s\tau}, \quad (5. 16)$$

donde se han utilizado los aproximantes de Padé multipunto con $n_{Z_0} = 1$ y $n_{F_c} = 1$.

Puesto que cada una de estas funciones es un cociente de polinomios, es necesario un reordenamiento de los términos de la ecuación para que tan sólo aparezcan polinomios en el numerador. Como resultado de estas operaciones obtenemos:

$$A(s, e^{-s\tau})V(s) + B_1(s, e^{-s\tau})F(V) = 0, \quad (5.17)$$

con⁴

$$A(s, e^{-s\tau}) = (Z_b + (RZ_b + Z_a)Cs)F_b^2 + (Z_b + (RZ_b - Z_a)Cs)F_a^2 e^{-2s\tau}, \quad (5.18)$$

$$B_1(s, e^{-s\tau}) = (RZ_b + Z_a)F_b^2 + (RZ_b - Z_a)F_a^2 e^{-2s\tau}. \quad (5.19)$$

Obsérvese que la síntesis de las aproximaciones racionales (5. 15) y (5. 16) precisa de un número de elementos dinámicos igual al orden de la función de red. Se comprueba a partir de (5. 18) que la sustitución de la línea *RLCG* por un circuito de parámetros concentrados tienen como consecuencia un incremento del orden del subcircuito de parámetros concentrados, que de uno⁵ ha pasado a valer

$$n = (n_{z_0} + 2n_{F_c}) + 1 = 4, \quad (5.20)$$

con el consiguiente incremento de la memoria del circuito. No obstante, las aproximaciones racionales (5. 15) y (5. 16) se incluyen directamente en la formulación (5. 17), por lo que no es necesario sintetizar el circuito de parámetros concentrados del que provienen.

Utilizando (5. 18) y (5. 19) es inmediato obtener la formulación matricial que se utilizará para determinar la solución en RP:

$$\mathbf{A}(T)\mathbf{v} + \mathbf{B}_1(T)\mathbf{f}(\mathbf{v}) = 0. \quad (5.21)$$

⁴ Obsérvese que se ha prescindido de la dependencia con s de algunos términos para simplificar la notación.

⁵ El TDCC tiene un condensador como único elemento dinámico.

5.2.3 Resultados de análisis

Para la resolución de (5. 21) se ha empleado una discretización de Gear-2, inicializando el proceso iterativo con $N=32$ muestras de una señal senoidal obteniéndose la solución de la Fig. 5. 16. El plano de fase se puede comparar con el que aparece en [Kaw-97]. El periodo de oscilación, $T=1.0300$, coincide plenamente con el obtenido utilizando PSpice, $T=1.0316$.

Los resultados de estabilidad indican que la solución resultado de esta simulación es estable. No obstante, aunque la solución obtenida es siempre la misma, al variar el número de puntos, el orden de discretización o el orden de los aproximantes de Padé multipunto los resultados de estabilidad cambían notablemente. Esto es debido a que las funciones racionales obtenidas utilizando los aproximantes de Padé modifican la estabilidad del circuito de forma importante. Como ejemplo, considérese el caso extremo en que la impedancia característica (5. 15) se aproxime con b_0 y b_1 de distinto signo, indicando la aparición de una función de red inestable.

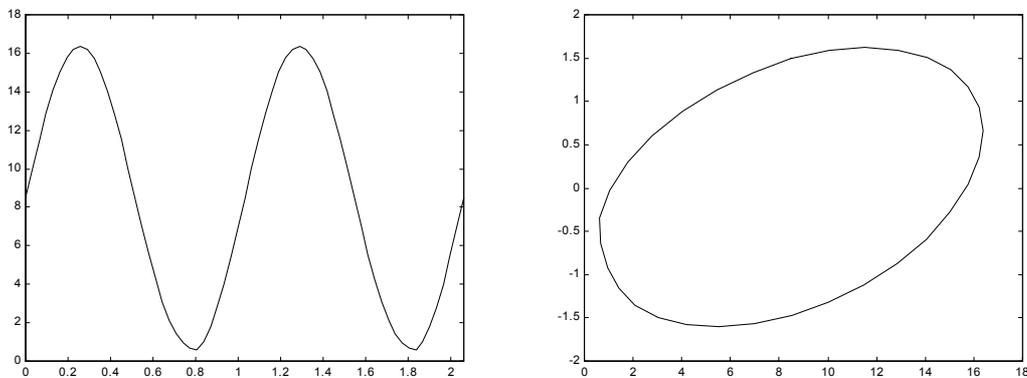


Fig. 5. 16. Forma de onda (dos periodos) (izq.) y plano de fase v_2-v (der.) de una solución del TDCC con línea *RLCG* con $N=32$ y Gear-2. ($T=1.0300$).

Sumario

En esta sección se ha extendido el método DTA–Gear a los circuitos con líneas *RLCG*. Esta extensión se basa en la aproximación de la línea *RLCG* con un bipuerto de parámetros concentrados y una línea de transmisión ideal. Entre las posibles técnicas desarrolladas para realizar esta aproximación se ha escogido la que utiliza los aproximantes de Padé multipunto por su versatilidad a la hora de escoger los puntos en que se realiza la aproximación. Esta técnica también permite la aproximación de líneas con parámetros dependientes de la frecuencia. En ningún momento es necesario sintetizar las funciones racionales resultantes de la aproximación, puesto que éstas se insertan directamente en la formulación DTA–Gear con la que se trabaja. Los detalles en los que se basa esta técnica han sido profusamente explicitados en [Bon-95].

La técnica descrita se ha aplicado a la determinación del RP del TDCC con líneas *RLCG*, con los mismos parámetros empleados en [Kaw-97]. Los resultados coinciden con los obtenidos en esta referencia utilizando una aproximación de Padé en un extremo frecuencial y el método de integración temporal Runge-Kutta de cuarto orden, y con los obtenidos utilizando PSpice. Este simulador estándar, utiliza la respuesta impulsional de la línea de transmisión *RLCG* para analizar el circuito en el dominio temporal. Resultado de ello es que el tiempo necesario para obtener una solución en RP es extremadamente elevado.

No obstante la eficiente determinación del RP, el estudio de la estabilidad de las soluciones se ve entorpecido por el mismo instrumento que permite la extensión del método. Efectivamente, los aproximantes de Padé multipunto modifican la estabilidad de la solución hasta el punto de ser posible la aparición de funciones racionales inestables.

5.3 Un oscilador con línea de transmisión

Los denominados osciladores con línea de transmisión son un buen ejemplo del tipo de circuitos a los que se aplica el método DTA–Gear. Por un lado, el interés de estos circuitos se encuentra en el RP, con lo cual los métodos que necesitan calcular todo el transitorio antes de obtener el RP están en desventaja frente a los métodos directos. Por otro lado, estos circuitos son autónomos, con lo cual es necesario una alinealidad para forzar su oscilación. Finalmente, la frecuencia a que deben oscilar estos circuitos, sugiere substituir la bobina (de tamaño y no idealidades importantes) por una línea de transmisión. Así, estamos ante el problema de determinar el RP de un circuito autónomo (no lineal) con línea de transmisión.

El parámetro más importante que caracteriza un oscilador es su frecuencia de oscilación. En estos circuitos el problema fundamental no consiste en determinar la frecuencia de oscilación de un circuito, sino en diseñar un circuito que oscile a una frecuencia determinada. En esta sección se mostrará como, sin ninguna modificación del método DTA–Gear, es posible substituir la incógnita *periodo* por un elemento físico del circuito. Con esta simple modificación, una formulación que resuelve un problema de análisis se ha reconvertido en una formulación que resuelve un problema de optimización. La determinación del Jacobiano de la formulación así planteada, requiere del conocimiento de la sensibilidad de la solución respecto al elemento físico del circuito. Por otro lado, el estudio de la estabilidad de las soluciones obtenidas no sufre, en absoluto, ninguna modificación.

La realización *hardware* de un prototipo de oscilador con línea de transmisión impresa permite contrastar los resultados experimentales con los de simulación obtenidos utilizando DTA–Gear y PSpice.

5.3.1 Modelo equivalente del oscilador

Todo oscilador electrónico requiere de al menos dos elementos dinámicos y una alinealidad⁶. Una configuración básica de este circuito se presenta en la Fig. 5. 17.

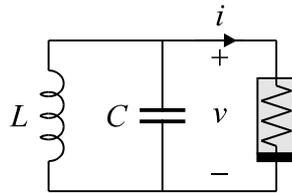


Fig. 5. 17. Oscilador LC básico.

La construcción física de una bobina presenta inconvenientes como el tamaño o la modelación a altas frecuencias. Así, a altas frecuencias es preferible sustituir la bobina por una línea de transmisión cortocircuitada en un extremo como se muestra en la Fig. 5. 18.

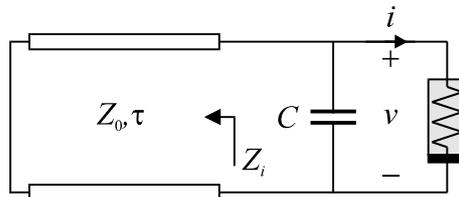


Fig. 5. 18. Oscilador básico con línea de transmisión.

En el puerto de entrada la impedancia equivalente es siempre imaginaria, variando según la frecuencia de oscilación del modo

$$Z_i(j\omega) = jZ_0 \tan(\omega\tau), \quad (5. 22)$$

siendo Z_0 la impedancia característica y τ el retardo de la línea. Bajo la hipótesis de circuito lineal, es posible calcular la frecuencia de oscilación a la que la impedancia

⁶ Es posible construir osciladores de relajación [Chu-87] con un solo elemento dinámico y un elemento no lineal, pero su forma de onda dista mucho de ser senoidal.

capacitiva del condensador se ve cancelada por la impedancia inductiva de la línea de transmisión resolviendo

$$Z_0 \tan(\omega\tau) = \frac{1}{\omega C}. \quad (5.23)$$

Al ser la tangente una función periódica, esta ecuación presenta infinitas soluciones llamadas *modos de oscilación*. Sin embargo, salvo la existencia de mecanismos que lo eviten, el primer *modo de oscilación* es el que aparece en la práctica. Aún desconociendo Z_0 y C , es posible fijar una cota para el periodo de oscilación a partir de (5.23):

$$T > 4\tau. \quad (5.24)$$

Al tratarse de un circuito no lineal, la resolución de (5.23), realizada gráficamente en la Fig. 5.19, es tan sólo una aproximación válida para inicializar el proceso iterativo.

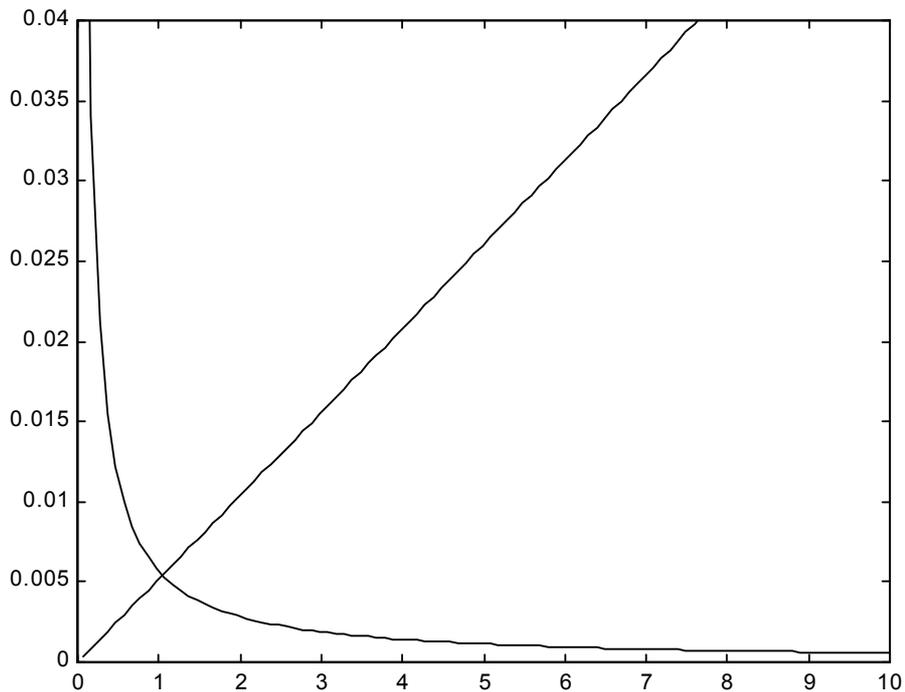


Fig. 5.19. Resolución gráfica de (5.23).

Diseño de resistencias negativas

La alinealidad resistiva que aparece en la Fig. 5. 18 debe ser activa, léase su característica $i-v$ debe contener algún punto en el segundo y/o cuarto cuadrante, para entregar energía al circuito. Esto se consigue trasladando con fuentes de polarización la característica $i-v$ de un dispositivo que en algún punto se comporte como una resistencia negativa. A este tipo de dispositivos se les denomina *Resistencias Negativas*. En [Chu-85] se describe un método sistemático para generar resistencias negativas únicamente con dos transistores (de tipo BJT, JFET y/o MOSFET) y resistencias positivas. En esta misma referencia se proporciona una extensa bibliografía para abordar el diseño de resistencia negativas.

El resultado de la traslación de la característica $i-v$ de una resistencia negativa debe cumplir ciertos requisitos [Chu-97]. Definiendo $i=f(v)$, éstos son:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &< 0 \\ f(v \rightarrow \infty) &\rightarrow \infty \\ f(v \rightarrow -\infty) &\rightarrow -\infty \end{aligned} \quad (5. 25)$$

El denominado *twin-transistor circuit* es el bipolo escogido para implementar la alinealidad del circuito de la Fig. 5. 18. Este circuito, extraído de [Ros-80], está formada por dos transistores BJT, dos resistencias y una fuente de polarización, tal y como aparece en la Fig. 5. 20. Antes de representar la característica $i-v$ del *twin-transistor circuit* debemos modelar los transistores que aparecen en este circuito.

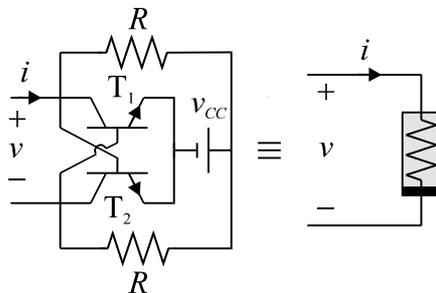


Fig. 5. 20. Resistencia negativa *twin-transistor circuit* [Ros-80].

El modelo de Ebers-Moll

El modelado de dispositivos semiconductores es un problema habitual en el análisis de circuitos. Puesto que no es el objetivo de esta tesis entrar en esta problemática, los transistores BJT del circuito de la Fig. 5. 20 se sustituirán por el conocido modelo de Ebers-Moll. Debe mencionarse el hecho que en las librerías de PSpice se utiliza el modelo estándar de Gummel-Poon. Este modelo, mucho más complejo, además de fuentes controladas utiliza resistencias y condensadores, y contempla los tiempos de tránsito de las cargas en el semiconductor. Estos dos modelos, Ebers-Moll y Gummel-Poon, convergen a medida que la frecuencia de trabajo decrece. Por este motivo se utilizará un transistor de radiofrecuencia para realizar la validación experimental.

En la Fig. 5. 21 aparece el modelo de Ebers-Moll de un transistor BJT. En las ecuaciones (5. 26) y (5. 27) se observa que cada una de las dos alinealidades está controlada por las mismas VC, que son dos. Además, el tipo de alinealidad que aparece es exponencial. Este tipo de alinealidad presenta problemas de convergencia a no ser que se fuerce a ser lineal a partir de un cierto valor.

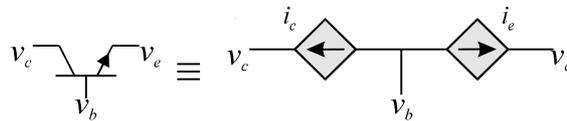


Fig. 5. 21. Modelo de Ebers-Moll de un transistor BJT.

$$i_c = I_s \left(1 - e^{\frac{V_{be}}{\eta_f V_T}} \right) - I_s \left(\frac{1 + \beta_r}{\beta_r} \right) \left(1 - e^{\frac{V_{bc}}{\eta_r V_T}} \right), \quad (5. 26)$$

$$i_e = I_s \left(1 - e^{\frac{V_{bc}}{\eta_r V_T}} \right) - I_s \left(\frac{1 + \beta_f}{\beta_f} \right) \left(1 - e^{\frac{V_{be}}{\eta_f V_T}} \right), \quad (5. 27)$$

La sustitución de este modelo en el circuito de la Fig. 5. 20 da como resultado un circuito con cuatro fuentes controladas y dos variables de control, y no cuatro como sería de esperar. Efectivamente, a causa de la peculiar estructura del circuito y a no haber

introducido ninguna resistencia en el modelo del transistor BJT, las variables de control de los dos transistores son las mismas, v_A y v_B , como se observa en la Fig. 5. 22.

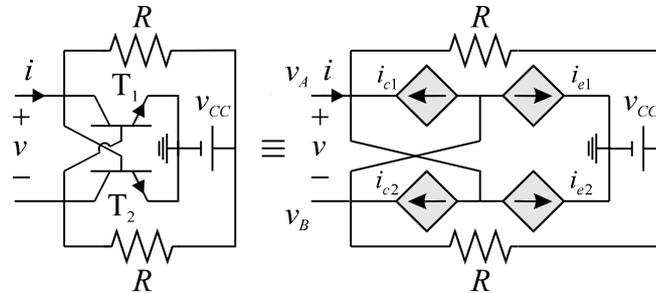


Fig. 5. 22. El *twin-transistor circuit* tras la sustitución de los transistores por el modelo de Ebers-Moll.

Alinealidad equivalente

Llegados a este punto, sería posible analizar el circuito de la Fig. 5. 18, con la alinealidad de la Fig. 5. 22. En los capítulos previos se han facilitado las herramientas necesarias para analizar el RP y la estabilidad de circuitos con más de una variable de control, de modo que sería posible aplicar directamente la técnica DTA–Gear sobre un circuito con dos variables de control, v_A y v_B , y cuatro alinealidades de tipo exponencial.

No obstante, una estrategia mucho más eficaz, tanto en el método DTA–Gear como de HB, consiste en determinar el bipolo equivalente del circuito de la Fig. 5. 22. Efectivamente, puesto que el circuito es resistivo, siempre es posible construir la función $i=f(v)$ punto a punto y considerar una sola VC: v . La complejidad para determinar cada punto de $i=f(v)$ se reduce a la resolución de un sistema no lineal de dos ecuaciones. A causa de esta simplicidad, es posible calcular la alinealidad $i=f(v)$ en tiempo de ejecución del proceso iterativo. Obsérvese que el conocimiento de la derivada analítica de $i=f(v)$ no es posible con esta técnica. Sin embargo, esta derivada analítica sólo se utiliza en el cálculo del Jacobiano del sistema de ecuaciones y en el estudio de la estabilidad, motivo por el cual la precisión en la determinación del RP no se ve alterada. Además, siempre es posible calcular esta derivada a partir de las muestras de la función, del mismo modo que se realiza en una discretización de Gear. Así, los inconvenientes derivados de utilizar la alinealidad equivalente no analítica $i=f(v)$ con una VC en lugar de cuatro alinealidades analíticas con dos VC son casi nulos, frente a las ventajas que se describen a continuación.

En primer lugar, considerando un número fijo de muestras por periodo, es conocido que las dimensiones de la formulación que utilice dos VC se reducen a la mitad al considerar únicamente una VC⁷. En segundo lugar, se comprueba que la VC v es casi senoidal, a diferencia de la VC v_A y v_B , véase un avance de los resultados en las Fig. 5. 24 y Fig. 5. 25. Esta particularidad se traduce en un nuevo decremento en el número de muestras a considerar⁸. Este último resultado parece ir ligado al hecho que las alinealidades débiles facilitan la convergencia hacia una solución. En el *twin-transistor circuit*, ya que las alinealidades originales son exponenciales, difícilmente la alinealidad equivalente tendrá un comportamiento peor⁹. Finalmente, en el caso de ser necesario utilizar un modelo de transistor más realista, por ejemplo introducir una resistencia de base, el número de VC aumenta a cuatro. Los argumentos utilizados anteriormente referentes a la cantidad de incógnitas que se requieren en uno y otro método ganan peso en estas circunstancias.

Después de los razonamientos anteriores se procede al análisis del circuito de la Fig. 5. 18 con una alinealidad $i=f(v)$ no analítica controlada por una sola VC. Los parámetros que se utilizarán en el *twin-transistor circuit* son: $v_{CC}=10$ V, $R=1$ k Ω , y un transistor BJT con los parámetros del modelo de Ebers-Moll: $I_s=10.924$ μ A, $\beta_f=125.06$, $N_f=1.0039$, $\beta_r=12.179$, $N_r=1.0203$ y $V_T=25$ mV. Se comprueba que la característica $i-v$ correspondiente a estos parámetros, representada en la Fig. 5. 23, cumple las condiciones reseñadas en (5. 25).

⁷ A causa de la simetría del *twin-transistor circuit*, en el caso habitual en que v oscila alrededor del origen, el número de muestras se puede reducir a las de un semiperiodo. En esta misma situación, las dos variables de control v_A y v_B son iguales aunque desfasadas 180 grados, con lo cual el número de muestras se reduce también a la mitad. Así, la relación entre el número de incógnitas en uno y otro caso no varía. En el método de HB este ahorro de variables se traduce en que los armónicos pares valen cero.

⁸ De armónicos en el método de HB.

⁹ Además, en el método de HB una alinealidad fuerte obliga a establecer mecanismos que eviten *aliasing* al realizar DFT's directas e inversas.

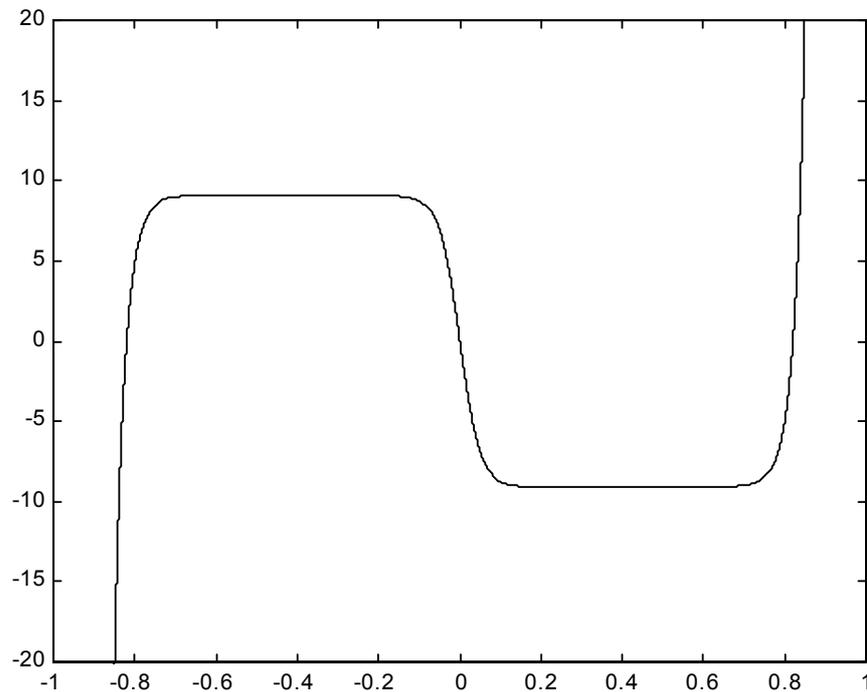


Fig. 5. 23. Característica $i(\text{mA})-v(\text{V})$ del *twin-transistor circuit* modelado con Ebers-Moll.

5.3.2 Resultados de análisis

Una vez realizada la modelación de los transistores que aparecen en el *twin-transistor circuit* y la elección de trabajar con la alinealidad equivalente por las múltiples ventajas que ello conlleva, estudiaremos el oscilador con línea de transmisión. El sistema de ecuaciones discretizado que se obtiene al analizar este circuito es idéntico al que se obtiene al analizar el TDCC, con la excepción que R es nula¹⁰. Los parámetros del circuito son: $Z_0=220 \Omega$, $\tau=0.75 \text{ ns}$ y $C=5.6 \text{ nF}$. Estos valores han sido normalizados con $T_0=200 \text{ ns}$ y $R_0=1 \text{ k}\Omega$.

En la determinación del RP se ha utilizado una discretización de Gear-2, inicializando el proceso de resolución iterativo con $N=64$ muestras de una señal senoidal. La amplitud de

¹⁰ Los resultados al analizar el circuito con $R=0.2 \Omega$ para modelar las pérdidas de la línea de transmisión no varían.

esta señal, de valor $A=1$ V, se ha escogido de modo que en algún momento se trabaje dentro de la zona pasiva de la alinealidad, según indica la Fig. 5. 23. El periodo de esta señal, de valor $T=1$ s, se ha escogido bajo la hipótesis de circuito lineal mediante la resolución gráfica de la Fig. 5. 19. La solución obtenida ha sido interpolada y utilizada para obtener una solución con $N=128$ muestras. En la Fig. 5. 24 aparece la forma de onda y los autovalores correspondientes, comprobándose que se trata de una solución estable. En la Fig. 5. 25 aparecen las VC v_A y v_B comprobándose que, en comparación con v , estas variables necesitan de más muestras para ser calculadas con igual precisión.

Estos resultados coinciden con los obtenidos utilizando el simulador PSpice con la librería facilitada por el fabricante para el modelo estándar de Gummel-Poon del transistor BFR-93A. A pesar de que la característica $i-v$ empieza a presentar un comportamiento dinámico a la frecuencia de trabajo, los resultados no difieren de los obtenidos utilizando DTA-Gear.

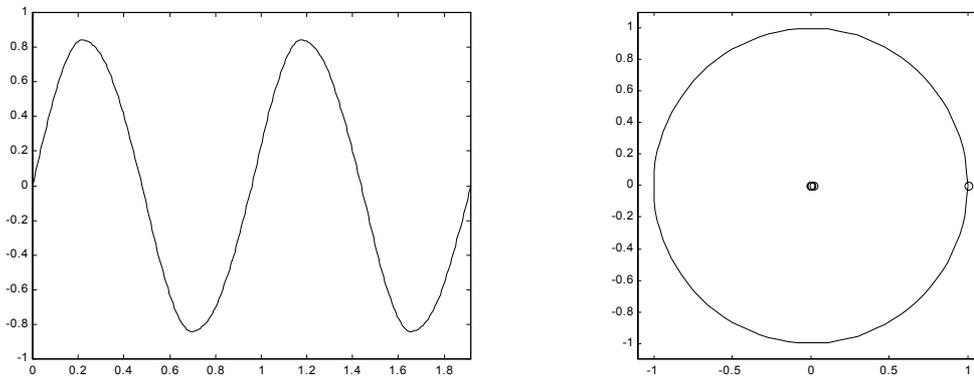


Fig. 5. 24. Forma de onda v (dos periodos) y autovalores con $N=128$ y Gear-2. ($\lambda=1.0001$, $T=0.95835$).

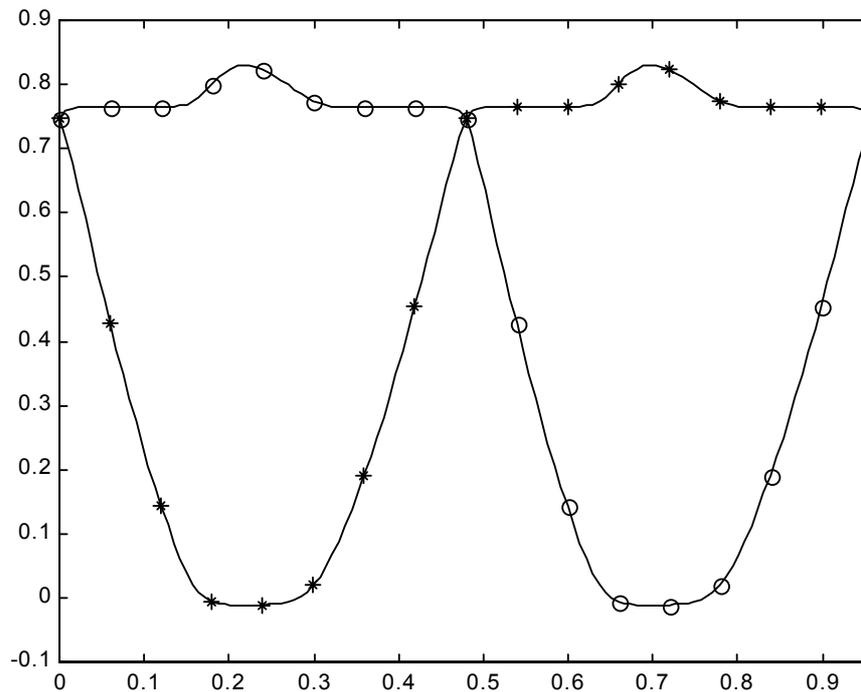


Fig. 5. 25. Variables de control v_A (o) y v_B (*).

5.3.3 Optimización de la frecuencia de oscilación

En su momento apuntábamos el hecho que más importante que analizar un oscilador es conocer el valor de los elementos que lo forman para que oscile a una frecuencia determinada. En el caso de una formulación DTA–Gear, el conocimiento de la sensibilidad del sistema de ecuaciones respecto a los elementos del circuito permite resolver un problema de optimización sin modificación alguna de la estructura del sistema de ecuaciones. Así, utilizando el mismo sistema de ecuaciones con el que se realiza el análisis, basta con fijar el periodo de oscilación T al valor deseado y tratar el valor de uno de los elementos del circuito, C en el ejemplo, como incógnita. Si bien la formulación matricial que se debe resolver no ha cambiado, la primera columna del Jacobiano que expresa la dependencia de este sistema de ecuaciones con T se debe substituir por una columna que indique la dependencia con C . Observando la formulación matricial utilizada en el análisis del oscilador con línea de transmisión

$$\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}_1\mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad (5.28)$$

con

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}_{00} + \mathbf{P}_{02} + (R + Z_0)\mathbf{C}\mathbf{P}_{10} + (R - Z_0)\mathbf{C}\mathbf{P}_{12}, \quad (5.29)$$

$$\mathbf{B}_1 = (R + Z_0)\mathbf{P}_{00} + (R - Z_0)\mathbf{P}_{02}, \quad (5.30)$$

se comprueba que C tan sólo aparece en la matriz \mathbf{A} , multiplicando al operador derivada y al operador combinado retardo y derivada. Así, la primera columna del Jacobiano es

$$\mathbf{J}(:,1) = ((R + Z_0)\mathbf{P}_{10} + (R - Z_0)\mathbf{P}_{12})\mathbf{v}. \quad (5.31)$$

En la siguiente Tabla se muestran los distintos valores de C necesarios para oscilar a distintos periodos, al utilizar una discretización Gear-2 con $N=64$ muestras de la señal.

T	.8	.9	1	1.1
C	19.373	24.585	30.402	36.822

El número de muestras utilizado viene indicado por la precisión en la consecución del autovalor más cercano a la unidad. En la siguiente Tabla se muestran los cambios experimentados por C y por el autovalor más próximo a la unidad para conseguir una oscilación de periodo $T=1$.

N	32	64	128
C	29.919	30.402	30.508
λ	1.1742	1.0155	1.0000

5.3.4 Resultados experimentales

El circuito de la Fig. 5. 18 se ha construido físicamente, empleando para ello dos transistores de radiofrecuencia BFR93-A y los parámetros utilizados en la simulación del apartado 5.3.2. En su implementación se ha utilizado una línea de transmisión impresa, de longitud aproximada 15 cm. La medición de la impedancia característica y la velocidad de propagación se ha realizado insertando condensadores de distinto valor en un extremo de la línea y comprobando a qué frecuencia la impedancia de entrada presenta un cero. Estas medidas se han realizado con un analizador de espectros con *tracking generator*. Los valores obtenidos para Z_0 y τ son los utilizados en los anteriores ejemplos. Con el fin de comparar los resultados de simulación con los experimentales debe desnormalizarse el periodo obtenido en la simulación con $C=5.6\text{nF}$. Así, al periodo normalizado $T=0.95835$ le corresponde una frecuencia de oscilación $f=5.2173$ MHz.

El resultado obtenido al medir la frecuencia de la variable de control con un frecuencímetro es $f=5.11$ MHz. Se comprueba que el valor obtenido al realizar una simulación $f=5.2173$ MHz, difiere un 2% del resultado experimental. El osciloscopio digital permite visualizar la forma de onda, tanto para v como para v_A y v_B . En la Fig. 5. 26 aparece el oscilograma de la VC v . Los resultados experimentales confirman los resultados de simulación, tanto DTA–Gear como PSpice, comprobándose que el modelo de Ebers-Moll del transistor utilizado es válido para el circuito analizado a la frecuencia de 5 MHz.

Sumario

Con un mismo circuito como soporte, en esta sección se ha realizado el análisis del RP y la estabilidad de osciladores con línea de transmisión, la resolución de un problema de optimización, y la validación experimental de los resultados obtenidos sobre una realización *hardware*. Es importante destacar la facilidad con que un problema de diseño, la determinación del valor de un elemento físico del circuito para fijar la frecuencia de oscilación, es reconvertido en un problema de igual complejidad que uno de análisis.

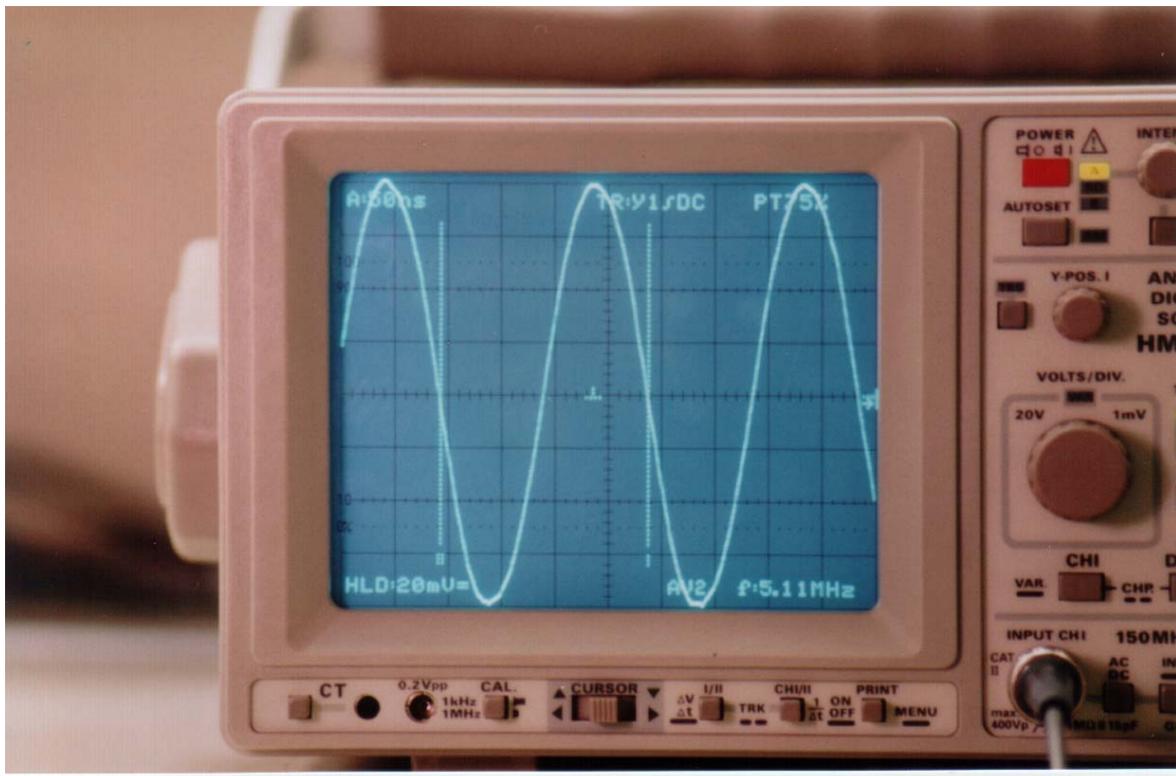


Fig. 5. 26. Oscilograma de la VC v del oscilador con línea de transmisión.

5.4 Conclusiones

La aplicación del método DTA–Gear a tres circuitos distintos ha permitido explorar las posibilidades de este método para analizar el RP y la estabilidad de circuitos no lineales. Después de la satisfactoria determinación de las zonas de funcionamiento del circuito de Van der Pol excitado, se hace evidente la necesidad de aplicar este método a un circuito que incorpore línea de transmisión. El TDCC se muestra como el perfecto candidato, puesto que a pesar de su aparente sencillez su comportamiento es realmente complejo. En el estudio de este circuito se detectan los puntos de desdoblamiento de órbitas que se producen al seguir una rama solución de periodo–1. Asimismo, se describe el mecanismo que permite encontrar soluciones sobre la rama solución de periodo– $2n$ partiendo de la rama de periodo– n , basados en utilizar la información que se deriva del estudio de la estabilidad.

El segundo ejemplo pretende extender el método de análisis a los circuitos con línea de transmisión *RLCG*. El método DTA–Gear no sufre ninguna variación. En su lugar, es el circuito el que es transformado para sustituir las líneas de transmisión *RLCG* por elementos de parámetros concentrados y líneas de transmisión ideales. Resultado de esta transformación es un aumento del orden del subcircuito lineal de parámetros concentrados. En esta transformación se utilizan los aproximantes de Padé multipunto, método explícito que permite aproximar correctamente en todo el eje frecuencial. Esta transformación es tal que modifica de forma importante la estabilidad del circuito, siendo poco fiables los resultados de estabilidad obtenidos. El TDCC con línea *RLCG* es el circuito elegido para aplicar el método DTA–Gear.

Finalmente, un enfoque realista del diseño de osciladores con línea de transmisión permite comprobar la eficacia con que se puede abordar un problema de optimización usando la formulación DTA–Gear con modificaciones en tan sólo una columna del Jacobiano, con el fin de incorporar la sensibilidad del sistema de ecuaciones respecto a un elemento del circuito. Así, análisis y optimización se realizan sobre un circuito que posteriormente es construido físicamente. Con esto se consigue una validación experimental de los resultados de análisis y optimización que, por otro lado, son confirmados por PSpice.

