



Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

**DESARROLLO DE LA COMPETENCIA
“TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN”
EN LA ESO, A TRAVÉS DE LA LÓGICA
Y DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO
DE LOS DATOS**

Presentada por: Irene Pitarch Andrés

Dirigida por: Pilar Orús Báguena

Febrero 2016

**DESARROLLO DE LA COMPETENCIA
“TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN”
EN LA ESO, A TRAVÉS DE LA LÓGICA
Y DEL ANÁLISIS ESTADÍSTICO
DE LOS DATOS**



Tesis doctoral presentada por:
Irene Pitarch Andrés

Para obtener el grado de doctora
por la Universitat Jaume I de Castellón

Directora:
Pilar Orús Báguena

Programa de Doctorado en Matemáticas Multidisciplinares
Departamento de Matemáticas
Universitat Jaume I

Castellón, Febrero 2016

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Pilar Orús la confianza de ha depositado en mí desde el inicio de este proyecto. Fue ella quien me animó a retomar el proyecto de tesis que habíamos iniciado hace siete años, que tuve que posponer por motivos familiares. Su entusiasmo por la Didáctica de las Matemáticas y sus constantes ánimos han sido fundamentales para conseguir nuestro objetivo. Sin sus consejos, observaciones, orientaciones e inestimables aportaciones no hubiera sido posible realizar esta tesis. Le doy las gracias muy sinceramente, no sólo por compartir conmigo su faceta investigadora, sino también por sus valores como persona; todo ello me ha hecho crecer un poco más, profesional y emocionalmente.

También quiero agradecer la colaboración de muchos compañeros que me han ayudado desinteresadamente en la experimentación de las lecciones preparadas en la tesis.

En primer lugar a Antonio, ya que su colaboración ha sido fundamental en la experimentación de una de las lecciones. Muchísimas gracias, porque con mucho entusiasmo me has ofrecido tu tiempo - que ya es una premisa muy valiosa- tanto para la preparación previa de la experimentación, como para el desarrollo de la misma. Además agradezco tu aceptación de participar en este proyecto sin ningún impedimento y también por tu implicación, tan positiva desde el primer momento.

Por otra parte, a Teresa y Laura por ayudarme en la observación de las lecciones que he necesitado experimentar; incluso Teresa se ha ofrecido para realizar la pasación de una situación con alumnos de su IES. Asimismo, a mis compañeros de “Grans i menuts” por facilitarme la flexibilidad que he necesitado en mi horario para realizar las experimentaciones necesarias; gracias a todos los que habéis facilitado la adaptación de mi horario cuando lo he necesitado y me habéis ayudado en la preparación de dichas experimentaciones. También a Laura Beas y Quique, puesto que a nivel técnico me han ofrecido, además de su tiempo, las herramientas necesarias para la grabación y observación de dichas lecciones.

En este punto de la parte experimental, también quiero agradecer a las familias del colegio que han aceptado que pueda realizar la experimentación con sus hijos, y como no, a los propios alumnos, quienes han aceptado de buen agrado dicha participación. Además han mostrado seriedad e implicación en los momentos de las experimentaciones, no siendo habitual la filmación y la presencia de observadores en las sesiones de clase.

Muchas gracias a todos, cada uno en su faceta de colaboración, todas ellas necesarias para llegar a obtener los resultados de las experimentaciones para esta investigación.

Por otra parte quiero agradecer a los miembros del departamento de Matemáticas de la UJI, que me han mostrado su confianza y apoyo en el desarrollo de la tesis. A Eva por su disponibilidad para ayudarme en la parte burocrática del proceso y facilitarme la información que he necesitado en el mismo.

Por otro lado, no menos importante, el agradecimiento a mi familia, el pilar fundamental de mi vida. Sin ellos tampoco hubiera sido posible llevar adelante este trabajo. A mi madre y mis hermanos, que sea el proyecto que sea en el que decida embarcarme, cuento con su apoyo y confianza; antes de iniciarlo, ya presuponen un resultado seguro: esa confianza plena e incondicional no tiene precio. Al resto de mi familia más cercana, que son muchos para nombrarlos, pero me han ayudado muchísimo con sus continuos ánimos, dedicando su tiempo para que pudiera conciliar mi vida familiar con mi exceso de trabajo y siempre dándome fuerza para superar momentos complicados, vividos en todo este proceso.

Y acabo dando las gracias, sin tener menor grado de importancia por ser en último lugar, a los cuatro hombres que forman mi familia propiamente dicha. Son los que han tenido que compatibilizar su tiempo, sus actividades, sus aficiones y su día a día con mi tiempo monográficamente dedicado a esta investigación. Hemos tenido que hipotecar muchas actividades, por así llamarlo, para que yo pudiera trabajar a fondo y dedicar prácticamente la mayoría de mi tiempo en la tesis. Cada uno, proporcionalmente a su edad -y un poco más- ha sabido manifestarme su apoyo y confianza, además de transmitirme muchos ánimos y afecto en mis momentos de menos fuerza; han sabido mimarme y cuidarme. Aunque han sufrido temporalmente mi poca dedicación como madre y pareja, también me siento recompensada sabiendo que han recibido mi continuo cariño. Además espero haberles transmitido el valor de que con constancia y trabajo se consiguen superar retos y alcanzar objetivos; el proceso para aprender y continuar aprendiendo no es inmediato como a lo que están acostumbrados a conseguir en esta era de la rapidez e inmediatez en la que vivimos.

Gracias, Mateu, Andreu, Jaume y Ricardo, por creer en mí.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. De una problemática docente a una problemática de investigación en Didáctica de las Matemáticas	
1.1. Problemática docente inicial. Primeros interrogantes	9
1.2. Metodología	17
1.3. Dominios de referencia	21
1.3.1. Marco teórico: Teoría de Situaciones Didácticas.....	24
1.3.1.1. Situación adidáctica y didáctica. El medio	25
1.3.1.2. Efectos y paradojas del contrato didáctico. Devolución	33
1.3.1.3. La tabla de datos como instrumento de negociación en la relación didáctica	37
1.3.2. Lógica formal	38
1.3.3. Razonamiento desde el punto de vista de la psicología	43
1.3.4. Inteligencia Artificial	51
1.4. Antecedentes en investigación del tratamiento de datos en Didáctica de las Matemáticas	
1.4.1. En relación a la educación primaria y secundaria	56
1.4.2. En Educación Estadística.....	60
1.4.3. En Teoría de Situaciones Didácticas	63
Conclusiones	66
Capítulo 2. Tratamiento de la información, Lógica y Estadística en la educación secundaria obligatoria	
2.1. Análisis de los contenidos curriculares relacionados con el tratamiento de la información, el razonamiento lógico y estadístico	71
2.2. Razonamiento inductivo y deductivo en el enseñanza secundaria	78
2.3. Aportaciones desde la investigación en Educación Estadística	86
2.4. Lógica formal en la enseñanza secundaria	93
2.5. Lógica y razonamiento en Didáctica de las Matemáticas. Viabilidad del tratamiento de datos en la ESO	98
Conclusiones	103

Capítulo 3. El cuestionario Q

3.1. Presentación del cuestionario Q	109
3.2. Análisis a priori del cuestionario Q	111
3.2.1. Matriz a priori del cuestionario Q	113
3.2.2. Aplicación de CHIC a la matriz a priori de Q (MAP)	120
3.2.3. Identificación de las respuestas al cuestionario, según sus diferentes interpretaciones matemáticas.....	126
3.3. Resultados obtenidos en la experimentación con el cuestionario Q	134
3.3.1. Datos de la experimentación 2014-15	135
3.3.2. Resultados globales de la experimentación	
3.3.2.1. Éxito de respuesta a Q de los cuatro niveles de la ESO	138
3.3.2.2. Análisis de las respuestas de los alumnos según los criterios establecidos a priori.....	144
3.3.3. Aplicación de CHIC a la matriz de resultados de Q (MP)	152
3.4. Identificación del trabajo lógico-matemático y comparación con los resultados de la experimentación 2000-01	156
Conclusiones	158

Capítulo 4. Ingeniería didáctica y diseño de las situaciones de aprendizaje

4.1. “El juego de la agencia de viajes”	165
4.1.1. Modelización del juego como una situación adidáctica.....	169
4.1.2. Análisis didáctico de la lección: el medio y tipo de situación de aprendizaje	171
4.1.3. Matriz a priori MAP(J) y comparación del trabajo lógico-matemático según las tres modalidades del juego.....	176
4.1.4. Aplicación de CHIC a la matriz MAP(J)	178
4.1.5. Análisis del trabajo lógico-matemático de las actividades	182
4.1.6. Ficha didáctica de la lección “Juego de la agencia de viajes”	187
4.2. “Juegos de clasificación”	201
4.2.1. Análisis del trabajo lógico-matemático de los juegos de clasificación	203
4.2.2. Análisis didáctico de la lección: el medio y tipo de situación de aprendizaje.....	213
4.2.3. Ficha didáctica de la lección “Juegos de clasificación”.....	216

4.3. “Corrección colectiva del Cuestionario Q”	225
4.3.1. Análisis didáctico de la lección: el medio y tipo de situación de aprendizaje	227
4.3.2. Ficha didáctica de la lección “Corrección colectiva del Cuestionario Q”	228
4.4. “Organización del viaje fin de curso”	232
4.4.1. Análisis didáctico de la lección: el medio y tipo de situación de aprendizaje	237
4.4.2. Análisis del trabajo lógico-matemático de las actividades.....	239
4.4.3. Ficha didáctica de la lección “Organización del viaje fin de curso”	246
Conclusiones	255
Capítulo 5. Experimentación de las situaciones de aprendizaje	
5.1. Análisis de la observación del “Juego de la agencia de viajes”	259
5.1.1. Fase individual (fase I): desarrollo y primeros resultados	261
5.1.2. Fase II: respuestas en pequeño grupo	272
5.1.3. Comparación de los resultados de la fase individual y en grupo (fases I y II).....	278
5.1.4. Fase IV: corrección de las cuestiones con el grupo-clase	280
5.1.5. Evaluación de la situación de aprendizaje.....	287
Conclusiones de la experimentación del “Juego de la agencia de viajes”.....	295
5.2. Análisis de la observación de “Juegos de clasificación”	297
5.2.1. Análisis del desarrollo de cada juego de la situación.....	297
5.2.2. Evaluación de la situación de aprendizaje.....	303
Conclusiones de la experimentación de “Juegos de clasificación”.....	306
Conclusiones	311
Bibliografía	327
Anexos	
Anexo 1. Contenidos del currículo oficial de la ESO (LOE), relacionados con el tratamiento de la información, la Estadística y el razonamiento lógico.....	343
Anexo 2. Contribución de las áreas de la ESO al desarrollo de la competencia <i>tratamiento de la información y competencia digital</i>	351

Índice general

Anexo 3. Contenidos del currículo oficial de la educación primaria (LOE), relacionados con el tratamiento de la información, la Estadística y el razonamiento lógico	371
Anexo 4. Debate del seminario I: prueba y demostración; razonamiento matemático (SEIEM 2001).....	379
Anexo 5. Ejemplos de pruebas de aptitudes diferenciales, utilizadas por el gabinete psicopedagógico del colegio “Grans i menuts”, para evaluar el razonamiento lógico.....	385
Anexo 6. CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) que implementa los cálculos de la técnicas del ASI.....	401

Índice de figuras

Figura 1-1: Modelización del sistema de enseñanza (Brousseau, 1990).....	22
Figura 1-2: Instituciones de referencia para el razonamiento	23
Figura 1-3: Dominios científicos, sociales y culturales de referencia	24
Figura 1-4: Modelización de la enseñanza según Brousseau (1999).....	25
Figura 1-5: Estructuración del medio según Brousseau (1986b).....	30
Figura 1-6: Esquema de la transposición didáctica de Brousseau según Chevallard (1985).....	37
Figura 1-7: Ejemplo de predicado amalgamado y de las operaciones de centración y decantación.....	46-48
Figura 2-1: Ejemplos de actividades para evaluar el razonamiento lógico desde la Psicopedagogía, en el tercer ciclo de primaria	85
Figura 2-2: Ejemplos de actividades para evaluar el razonamiento lógico desde la Psicopedagogía, en la etapa secundaria obligatoria.....	85
Figura 3-1: El Cuestionario Q para 1º y 2º de la ESO (2014-2015)	110
Figura 3-2: Cuestiones que se añaden a Q de la figura 3-1, para 3º y 4º de la ESO.....	111
Figura 3-3: Matriz a priori de Q: MAP	119
Figura 3-4: Árbol de similaridad entre las cuestiones de Q, aplicando CHIC a la matriz MAP.....	121
Figura 3-5: Árbol jerárquico de cohesión implicativa entre las cuestiones de Q, aplicando CHIC a la matriz MAP.....	124
Figura 3-6: Grafo implicativo entre las cuestiones de Q, aplicando CHIC a la matriz MAP.....	125
Figura 3-7: Submatriz de MP de las cuestiones Q11, Q12 y Q13 desglosadas.....	138
Figura 3-8: Árbol de similaridad entre las respuestas correctas a Q, aplicando CHIC a una submatriz de MP (correcto / incorrecto).....	153
Figura 3-9: Árbol jerárquico entre las respuestas correctas a Q, aplicando CHIC a una submatriz de MP (correcto / incorrecto).....	154
Figura 3-10: Grafo implicativo entre las respuestas correctas a Q, aplicando CHIC a una submatriz de MP (correcto / incorrecto).....	155
Figura 4-1: Consigna y tabla T del “Juego de la agencia de viajes” para todos los alumnos	166
Figura 4-2: Actividades del “Juego de la agencia de viajes” según modalidad.....	167
Figura 4-3: Matriz a priori, MAP (J), del “Juego de la agencia de viajes”.....	177

Figura 4-4: Árbol de similaridad entre las actividades del juego, aplicando CHIC sobre MAP (J).....	179
Figura 4-5: Árbol jerárquico de cohesión implicativa entre las actividades del juego, aplicando CHIC sobre MAP (J).....	180
Figura 4-6: Grafo implicativo entre las actividades del juego, aplicando CHIC sobre MAP (J).....	182
Figura 4-7: Ficha didáctica del “Juego de la agencia de viajes”	187-197
Figura 4-8: Anexo 4 de la ficha didáctica del “Juego de la agencia de viajes”.....	197
Figura 4-9: Anexo 2 de la ficha didáctica del “Juego de la agencia de viajes”.....	198
Figura 4-10: Plantilla de trabajo individual del “Juego de la agencia de viajes”.....	199
Figura 4-11: Plantilla de trabajo en grupo del “Juego de la agencia de viajes”.....	200
Figura 4-12: Actividades de la lección “Juegos de clasificación”.....	202
Figura 4-13: Diagrama de árbol del juego 3 de “Juegos de clasificación”	203
Figura 4-14: Tabla T con indicaciones para el juego 1 de “Juegos de clasificación”...204	
Figura 4-15: Tabla T con indicaciones para el juego 2 de “Juegos de clasificación”...206	
Figura 4-16: Partición de la población de los sujetos de T, según el juego 3 de “Juegos de clasificación”.....	209
Figura 4-17: Selección de 4-tuplas según el juego 3 de “Juegos de clasificación”.....	211
Figura 4-18: Tabla T con indicaciones para el juego 3 de “Juegos de clasificación” ..212	
Figura 4-19: Ficha didáctica de “Juegos de clasificación”.....	216-224
Figura 4-20: Ficha didáctica de la situación “Corrección colectiva de Q”.....	228-231
Figura 4-21: Ejemplo de la “encuesta gustos del viaje fin de curso”.....	234
Figura 4-22: Ejemplo tabla de valores T_v	235
Figura 4-23: Actividades de la situación “Organización del viaje fin de curso”...236-237	
Figura 4-24: Ficha didáctica de la situación “Organización del viaje fin de curso”.....	247-254
Figura 5-1: Solución del juego 3 de clasificación por separación de criterios	308
Figura 5-2: Solución del juego 3 de clasificación por 4-tuplas	309

Índice de tablas

Tabla 3-1: Trabajo matemático que supone cada cuestión de Q.....	113-116
Tabla 3-2: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q1, Q2, Q3, Q16-1 y Q16-2.....	144
Tabla 3-3: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q4, Q5, Q7, Q8 y Q14	145
Tabla 3-4: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q13, Q15 y Q16-10	148
Tabla 3-5: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente o con el detalle del error a Q11.....	150
Tabla 3-6: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q12	150
Tabla 3-7: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q16-3 y Q16-4	151
Tabla 3-8: Porcentaje de los alumnos de 2º ciclo que responden correctamente a Q17, Q18 y Q19	152
Tabla 4-1: Comparación del trabajo lógico-matemático según cada modalidad del “Juego de la agencia de viajes”	186
Tabla 5-1: Respuestas correctas de los grupos de la modalidad cultural.....	274
Tabla 5-2: Respuestas correctas de los grupos de la modalidad deportiva.....	276
Tabla 5-3: Respuestas correctas de los grupos de la modalidad de ocio.....	277
Tabla 5-4: Respuestas correctas de cada grupo por modalidades.....	278

Índice de gráficas

Gráfica 3-1: Porcentaje de respuesta correcta a Q de todos los grupos	139
Gráfica 3-2: Porcentaje de respuesta correcta a las cuestiones desde Q1 a Q15 de cada nivel	143
Gráfica 3-3: Porcentaje de respuesta correcta a las cuestiones desde Q16-_ a Q19 de cada nivel	143
Gráfica 5-1: Comparación éxito modalidad y grupo-clase	261
Gráfica 5-2: Porcentaje de éxito en las cuestiones Q2 y Q3 según modalidad y el grupo-clase	265
Gráfica 5-3: Porcentaje de éxito en las cuestiones Q4 y Q5 según modalidad y el grupo-clase	267
Gráfica 5-4: Porcentaje de éxito en la cuestión Q6 según modalidad y el grupo-clase	271
Gráfica 5-5: Comparación de porcentajes de respuestas correctas individuales y de grupo	279

Introducción

Esta tesis surge del estudio iniciado en el trabajo de investigación de tercer ciclo en el curso académico 2001-02, sobre la viabilidad y el interés didáctico del tratamiento de la información en la ESO, trabajando conjuntamente el tratamiento de datos, el razonamiento lógico y conceptos básicos de Estadística descriptiva (Pitarch., 2002). En él se mostraba cómo se puede trabajar tanto la Lógica formal como la Estadística descriptiva en esta etapa de la educación secundaria obligatoria (ESO), a través del tratamiento de datos binarios como unidades de información.

En esta tesis, se mantiene la elección del nivel educativo de la ESO, para seguir investigando la posibilidad de diseñar una propuesta didáctica innovadora en torno al tratamiento lógico y estadístico de la información. Pero se amplía esta perspectiva, considerando el tratamiento de la información como una de las ocho competencias básicas que se deben trabajar en todas las materias del currículo, la del *tratamiento de la información y competencia digital*, que debe comprender las habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar información, y la utilización de las nuevas tecnologías para esta labor (R.D. 1631/2006, de 29 de diciembre, p. 688).

La problemática abordada, supone una continuidad de los trabajos realizados por Orús, quien planteó una propuesta curricular para los últimos cursos de educación primaria (en Francia), abordando conjuntamente el tratamiento de datos y la Lógica a través de diversas situaciones de clasificación (Orús, 1986b y 1992). A su vez, estos trabajos retomaban las investigaciones realizadas en el COREM¹ de la *Université de Bordeaux.I.* por Digneau (1980), Maudet (1982) y Peres (1984), entre otros. En estas investigaciones, dirigidas por Brousseau en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas (a partir de este momento TSD), se plantea un acceso diferente de los niños a la Lógica, estudiando el funcionamiento *adidáctico*² de la adquisición de diferentes conceptos de esta disciplina: atribución de criterios, códigos de designación de objetos, operadores lógicos.

1 COREM: Centre pour l'Observation et la Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (Centro para la Observación y la Investigación de la Enseñanza de las Matemáticas)

2 Concepto teórico que se definirá en el capítulo 1.

En la tesis “Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d’une initiation à l’analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire”, Orús continúa analizando la gestión didáctica de estas adquisiciones y los posibles obstáculos que el razonamiento natural puede presentar en este proceso, convirtiendo dicha gestión, en un problema de *contrato didáctico* (Orús, 1992). Además establece, que el razonamiento natural de los alumnos es solicitado por los enseñantes de diversas maneras en la relación didáctica, pero que el contrato didáctico no permite habitualmente que sea un objeto de enseñanza, lo que hace que los profesores, se encuentren en una situación paradójica: necesitan y utilizan continuamente el razonamiento natural, pero el único que puede ser objeto de enseñanza en clases de Matemáticas, es el razonamiento matemático, por tanto cuando el razonamiento natural aparece, generalmente produce rupturas de contrato didáctico, porque el profesor no puede explicitar las diferencias entre ambos razonamientos, ni tratar los errores o “interferencias” que se producen entre ambos. Asimismo, la tesis estudia mejorar el razonamiento natural, mediante la iniciación al análisis clasificatorio, proponiendo una ingeniería didáctica que permite una explicitación parcial de dicho razonamiento natural, modificando así su rol en la relación didáctica, lo que implica también una modificación del contrato didáctico. Retomaremos esta ingeniería, en los capítulos 3 y 4, como base para elaborar las situaciones de nuestra experimentación.

La tesis que presentamos, es un trabajo de investigación en Didáctica de las Matemáticas (DM, en adelante), que como los trabajos citados anteriormente, se enmarca en la TSD, creada por Brousseau (1986a). Concebida bajo un punto de vista constructivista, supone un importante giro en la enseñanza de las Matemáticas, al considerar fundamentales las interrelaciones que existen entre el saber matemático, el profesor y el alumno, modelizando dichas relaciones mediante las nociones de *medio* y de *situaciones*. Esta modelización, nos va a permitir proponer lecciones diseñadas desde la TSD, para abordar el aspecto del tratamiento de la información de la competencia básica, ofreciéndonos a su vez, un ecosistema para que se pueda trabajar efectivamente en el sistema educativo y no sea sólo una declaración de intenciones sin trascendencia curricular, como mostraremos que es en la actualidad. En el capítulo 2

abordaremos la evolución de las disposiciones oficiales de la cambiante legislación educativa al respecto. Presentaremos la naturaleza de dicha competencia intentando responder a las siguientes preguntas: ¿cómo y dónde se plantea dentro del currículo oficial establecido por el Ministerio en las distintas leyes?, ¿es transversal para toda la ESO?, ¿en qué curso/s se debe trabajar la Estadística Descriptiva?, ¿y la Lógica?

La estructura de esta memoria de investigación, viene marcada por la naturaleza de la problemática y del marco teórico en que se plantea.

En el primer capítulo se abordará como punto de partida, el problema docente que supone la gestión del razonamiento lógico en la enseñanza de las Matemáticas en la educación obligatoria, hasta convertirlo en un problema de investigación en DM. Para ello, se presentarán las nociones específicas de la TSD que serán indispensables para entender los modelos ofrecidos por la misma; se planteará la línea de investigación que comparte y amplía este trabajo, así como la utilización de otros dominios científicos que nos sirven de referencia para identificar nuestra problemática. Finalmente, se expondrá la metodología utilizada en el conjunto de la tesis.

En el segundo capítulo nos centraremos en los campos específicos que concretan nuestra problemática de investigación en la Enseñanza Secundaria Obligatoria, como son las directrices curriculares oficiales de la etapa de la ESO con respecto a los contenidos del tratamiento de la información, la Lógica y la Estadística, revisando los últimos decretos, que modifican los analizados previamente en anteriores investigaciones. En este capítulo, se analizarán también algunos estudios realizados al respecto en el ámbito de la Educación Matemática.

A partir de los análisis precedentes podremos avanzar en nuestra propuesta, con la elaboración de un cuestionario específico que se ha diseñado y modelizado como una *ingeniería didáctica* (Brousseau, 1986a). La experimentación del mismo, con alumnos de la etapa de la ESO, constituirá la primera *situación adidáctica* dentro de nuestro marco teórico. En el tercer capítulo presentamos el cuestionario basado en preguntas sobre una tabla de datos binarios. Su estudio a priori, muestra la potencia de la tabla

como instrumento de trabajo lógico-matemático en el aula. Los resultados obtenidos con su experimentación, permiten describir la capacidad lógico-matemática de alumnos de los cuatro niveles de la ESO del curso escolar 2014/15 de dos centros educativos de Castellón. Estos resultados nos permitirán obtener nuevas conclusiones a partir de su comparativa con la experimentación previa realizada en el curso 2000-01, en el marco del trabajo de investigación del 3º ciclo.

Un recurso metodológico importante utilizado en los capítulos 3 y 4, será el programa informático CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), que implementa y grafica los cálculos de las diferentes técnicas del análisis estadístico implicativo mediante árboles jerárquicos de similaridad, grafos implicativos y árboles jerárquicos de cohesión. Nos ayudará a tomar decisiones en el diseño del cuestionario y de las lecciones (Gregori, Orús y Pitarch, 2009). Asimismo complementará la interpretación estadística de los resultados obtenidos en las experimentaciones con los alumnos. Consideramos que la aplicación de este software, creado como instrumento de investigación en DM (Gras, Couturier et Bodin, 2007), es un elemento innovador que aporta resultados interesantes en este campo. En esta memoria y en diversas publicaciones previas (Orús et al., 2000b, 2005, 2009; Pitarch y Orús, 2001-2005; Gregori et al., 2009), hemos mostrado varios ejemplos de las aportaciones de CHIC a nuestra investigación.

El cuarto capítulo lo dedicaremos al estudio a priori y al diseño de las lecciones que componen nuestra *ingeniería didáctica*; concepto fundamental en el marco teórico de la TSD (Brousseau 1986a, Artigue et al., 1995). Realizaremos la presentación detallada de esta herramienta que permite modelizar mediante las llamadas *variables didácticas* y los valores concretos asignados a cada una de ellas, los conocimientos específicos objeto de nuestra problemática didáctica. En el estudio preliminar de las lecciones detallaremos la justificación de nuestras decisiones, a partir de su modelización como *situaciones adidácticas* y analizaremos el *medio* con el que deben interactuar los alumnos. Asimismo, identificaremos los conocimientos lógico-matemáticos que

pondrán en práctica los alumnos en el desarrollo y aplicación de las lecciones diseñadas.

Los resultados obtenidos en la experimentación de estas lecciones los presentaremos en el capítulo 5, realizando el análisis de los mismos tanto a nivel cuantitativo, como cualitativo.

Para terminar, expondremos las conclusiones de nuestra investigación: los avances respecto a los estudios precedentes en que nos hemos basado, las posibles implicaciones que pueda tener nuestra propuesta en la enseñanza de las Matemáticas en la ESO, así como sus limitaciones y las líneas de trabajo abiertas por nuestra investigación.

CAPÍTULO 1

De una problemática docente a una problemática de investigación en Didáctica de las Matemáticas

1.1. Problemática docente inicial. Primeros interrogantes

Protagonismo del tratamiento de la información en el ámbito social, científico y educativo

En la actualidad, podríamos decir que el tratamiento de la información es un tema muy reconocido a nivel social, puesto que es la propia sociedad quien experimenta una constante evolución con relación al desarrollo y aplicación de las nuevas tecnologías. El concepto “tratamiento de la información”, puede tener distintas interpretaciones o puede ser asociado a distintos términos según el ámbito en el que se estudie: medios de comunicación, sociología, psicología, ciencias experimentales, informática, etc. Pero todos ellos tienen un denominador común: “**el dato**”. El dato considerado como **unidad** de información implica entender el tratamiento de la información como un proceso de tratamiento de datos que incluye y amplía los métodos estadísticos clásicos.

Claude Shannon empezó a investigar en este campo de la teoría de la información, a finales de la década de los 40, especialidad también conocida como Teoría Matemática de la Comunicación y fue quien mostró la relación del tratamiento de la información con las Matemáticas en general y no sólo con un campo específico de esta disciplina (la Estadística u otros). Las Matemáticas deben proporcionar procedimientos que permitan gestionar, organizar y analizar tal cantidad de información que se produce y difunde en nuestro entorno. Así lo argumenta S.Guerrero (1999), en la presentación de una monografía dedicada al tratamiento de la información en la revista UNO de DM:

“No es sólo que esta teoría [tratamiento de la información] se pudiera expresar de modo matemático –cosa que ocurre en muchas otras- ni que sea matemática (es decir, sus objetos de estudio se puedan definir en términos matemáticos), sino que, además, el hecho de la comunicación añade un nuevo punto de vista –una nueva dimensión- a la comprensión epistemológica de las matemáticas. Desde ese punto de vista, la matemática es un tipo de conocimiento que se comunica –o del que se informa. La existencia de distintos modos de comunicarlo (mediante expresión oral o realización de una actividad por el alumno), la importancia y eficacia de uno u otro, etc, son una breve muestra de descubrimientos en comunicación, de los que el profesor no puede prescindir de considerar.”

*Además, ocurre, que la **matemática** –ciencia de métodos, aparte de estudio de objetos- tiene entre sus métodos de trabajo uno muy peculiar –el método deductivo- que en esencia no es otra cosa que una forma –precisa- de obtener información nueva a partir de información anterior, es decir, de transformar la información mediante tratamientos específicos capaces de acrecentarla”³. (Guerrero, S., 1999. p. 5)*

Shannon fue el impulsor de esta disciplina, pero hasta la actualidad han seguido profundizando en este campo distintos investigadores. Mencionamos a Tukey (1970) quien introdujo el Análisis exploratorio de datos y Curcio (1987), utilizando el estudio gráfico de los datos. Destacamos la introducción de técnicas de análisis estadístico implicativo y jerárquico de cohesión de los datos, que ha tenido una gran repercusión en la investigación en DM. Gras (1979) analiza en su tesis, mediante un estudio experimental, el papel que juega la dependencia entre las actividades didácticas en los procesos de enseñanza y en la adquisición de los conocimientos (concretamente la naturaleza disimétrica de los fenómenos de dependencia). Posteriores trabajos profundizan en distintos aspectos de este método de análisis de datos (Gras, 1992, Gras y Larher, 1992). El programa informático que implementa los cálculos del análisis estadístico implicativo (ASI) y jerárquico es el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive), permitiendo el tratamiento numérico y gráfico de los datos relativos a los métodos estadísticos de clasificación e implicación mencionados. Las tesis de Almouloud (1992) y Ratsimba-Rajohn (1992) profundizan en el estudio de este software en su aplicación en el campo de la DM.

Siguiendo en el ámbito de la enseñanza, S. Guerrero (1999) expresa que habitualmente cuando se hace referencia al tratamiento de la información, dicho tratamiento se relaciona directamente con la Estadística. Sin embargo afirma que esta disciplina no está ligada únicamente a la Estadística, sino que es parte central de la matemática, y como consecuencia propone abordarla de forma transversal en todo el currículo de Matemáticas de la escolaridad obligatoria:

*“Adoptar ese punto de vista en la enseñanza de la matemática puede ser una estrategia extraordinariamente provechosa en el desarrollo curricular. **Si la teoría de la información y la comunicación ha aportado novedades en el campo de la matemática, mucho más lo ha hecho en la educación matemática.** La consideración de la comprensión como el*

3 Las indicaciones en **negrita** que aparecen en todas las citas de esta tesis se realizan para resaltar información que consideramos relevante para esta investigación, no aparecen de esta manera en las citas originales.

efecto de un proceso comunicativo, y del aula de clase como un espacio privilegiado de comunicación han sido uno de los aspectos que ha hecho cambiar muchas ideas sobre la enseñanza, incluyendo algunos de los aspectos más novedosos de los nuevos currículos escolares.

Sin embargo, es corriente que en ámbito docente cuando se habla de tratamiento de la información se apresure uno a pensar que se trata de estadística, y de una manera tópica al cálculo de parámetros o a la parafernalia de gráficas de distintos tipos y modos a que se suele reducir este estudio.”(Guerrero, S., 1999 p. 5)

(...) Finalmente ... afirmábamos que el tratamiento de la información no está sólo en la estadística, sino que forma parte del corazón de la matemática, y como tal debiera tener un sentido transversal en todo el currículo de matemáticas de la escolaridad obligatoria”” (Guerrero, S., 1999 p. 7)

También en el ámbito educativo y en particular en la Educación Estadística, podemos mencionar a Batanero (1991-2014), Godino (1987,1995) (y colaboradores de su departamento de la Universidad de Granada) y otros investigadores que utilizan este enfoque más global del tratamiento de la información en sus estudios y trabajos de investigación en Educación Estadística (Begg (1997), Biehler (1997), Gal (2002), Holmes (2002), Octaviani (1998), Rodríguez y Batista (2013), Russell y Mokros (1991, 1995) y Shaughnessy et al. (1997)). Estos investigadores destacan la rápida evolución de la “era tecnológica” que proporciona muchísima información y mucha potencia de cálculo para el tratamiento de los datos/informaciones. Afirman que la Estadística debe adaptarse a estos cambios y dar soluciones a los problemas planteados en distintos ámbitos, convirtiéndola en una ciencia interdisciplinar. Al mismo tiempo los constantes cambios hacen que sea más complicado enseñar esta disciplina que abarca cada vez más campos. Estos investigadores denominan a la Estadística como “ciencia de los datos”. (Rodríguez y Batista, 2013):

“Al mismo tiempo, la estadística atraviesa un período de notable expansión, siendo cada vez más numerosos los procedimientos disponibles, alejándose cada vez más de la matemática pura y convirtiéndose en una "ciencia de los datos", lo que implica la dificultad de enseñar un tema en continuo cambio y crecimiento” (Rodríguez y Batista, 2013 p. 64)

Ottaviani (1998); Batanero (2000b y 2002); Gal (2002) y Rodríguez y Batista (2013) dejan constancia en sus trabajos de la relevancia que tiene el aprendizaje de

conocimientos que permitan el manejo del tratamiento de datos o de la información. Concluyen que en la actualidad es imprescindible que los estudiantes adquieran los conocimientos sobre técnicas de análisis de datos. Esta necesidad viene marcada desde la escolaridad básica y es reclamada por otras instituciones con la intención de que se pueda proporcionar una cultura estadística al ciudadano que le permita participar en la sociedad de la información.

Ottaviani (1998) señala la nueva cultura estadística que supone el tratamiento de la información:

“a nivel internacional la UNESCO implementa políticas de desarrollo económico y cultural para todas las naciones, que incluyen no sólo la alfabetización básica, sino la numérica. Por ello los estadísticos sienten la necesidad de difusión de la estadística, no sólo como una técnica para tratar los datos cuantitativos, sino como una cultura, en términos de capacidad de comprender la abstracción lógica que hace posible el estudio cuantitativo de los fenómenos colectivos” (Ottaviani , 1998 p. 1).

Batanero (2002) indica las capacidades que definen a un ciudadano estadísticamente culto:

“...un ciudadano estadísticamente culto debe ser capaz de interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación y por otro lado capaz de discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante” (Batanero, 2002, p. 5)

Gal (2002) identifica dos rasgos de dicha cultura estadística interdisciplinar:

*“cultura estadística, que se refiere a dos componentes interrelacionados: a) **Capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos** o los fenómenos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos, y b) **capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante** (Gal, 2002, pp. 2-3)”.*

Rodríguez y Batista (2013) remarcan la necesidad de la incorporación de la Estadística desde la escuela para que se consolide en los estudios superiores. Asimismo reclaman una buena preparación y formación del profesorado en esta disciplina:

“Los tiempos actuales transitan hacia una sociedad cada vez más informatizada que requiere de la comprensión de las técnicas básicas de análisis de datos y su interpretación adecuada, de ahí, los cambios progresivos que experimenta la estadística tanto desde el punto de vista de su contenido como de las demandas que tiene el proceso docente educativo, donde desempeña un papel primordial su didáctica específica.

Lograr la cultura estadística durante el proceso de formación del profesional universitario requiere de una activación de sus métodos de enseñanza y un vínculo creciente con las problemáticas de la vida cotidiana, para lo cual se necesita un profesor preparado y con competencias didácticas estadísticas que pueda motivar a los estudiantes a partir de contar con una adecuada “idoneidad didáctica” al desarrollar el proceso docente educativo de la estadística. Todo esto repercute en la existencia de una problemática educativa que tiene su raíz en la incorporación de la estadística desde la escuela y que todavía no resulta un hecho consumado” (Rodríguez, 2013, p.71).

Begg (1997) señala que la Estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, el uso de los ordenadores, de resolución de problemas y el trabajo en equipo a través de la experimentación.

“Similarly, the essential skills (related to communication, numeracy, information-handling, problem-solving, self-management and cooperation, work and study) can be considered against learning areas or subjects. These skills are generic and can be learned through all subjects, including statistics. They suggest an approach to assessment that emphasises interpretation and communication, the use of computers to access and process data, problem-solving, understanding concepts rather than computation of results, and working with others rather than working individually” (Begg 1997, p. 2).

Todos estos autores presentan la Estadística como la mejor herramienta para dar respuesta al problema de la “incertidumbre” que se crea en las situaciones cotidianas que vivimos día a día. Es decir, afirman que la Estadística nos da la posibilidad de discernir los fenómenos causales de la variabilidad aleatoria. Llegan a afirmar que si logramos que nuestros alumnos entiendan esta propiedad de la Estadística, estaremos avanzando muchísimo para conseguir una “sociedad estadísticamente culta” y matemáticamente más avanzada. Remarcan que la instrucción estadística es una preocupación global en el marco del tratamiento de la información y por tanto se debe seguir investigando a través de la Educación Estadística.

Ante esta situación nos podemos plantear como docentes distintos interrogantes, que constituyen nuestra problemática inicial:

- P1. ¿Se gestiona con el alumnado el tratamiento de datos a nivel educativo? ¿Cómo?
- P2. ¿Qué respuesta se da en la educación secundaria, al tratamiento de la información? ¿Desde la enseñanza de la Estadística? ¿Desde otras áreas?.
- P3. ¿Qué enfoque se da a la competencia básica *tratamiento de la información y competencia digital* planteada por las directrices curriculares? ¿Dentro de las Matemáticas? ¿Interdisciplinar? ¿En otras áreas?
- P4. ¿Qué contenidos matemáticos están relacionados con dicha competencia?
- P5. ¿Se dispone de recursos didácticos que nos permitan trabajar con el alumnado estos contenidos matemáticos?

Importancia curricular del tratamiento de la información

Batanero (2000b, 2004), Batanero et al. (2000a) y Batanero y Godino (2005) plasman la necesidad de incorporar la Estadística en los currículos oficiales desde la etapa de primaria. Insisten en que se debe propiciar la filosofía del Análisis exploratorio de datos y el trabajo por proyectos. Todo ello facilita la comprensión de los conceptos estadísticos y la aplicación de los mismos a otras áreas curriculares. Además para el alumno cobra mayor sentido el aprendizaje de la Estadística puesto que entiende su interdisciplinariedad. Realizan un análisis de los cambios que se producen en los últimos programas curriculares y refuerzan la idea de que la Estadística tiene una tendencia clara a ser más experimental e intuitiva, de manera que **el alumnado debe trabajar cada vez más con la información proporcionada por datos relacionados con su entorno**. De esta forma el tratamiento de la información es más significativo. A tal efecto disponemos de varias revisiones realizadas en los últimos años por este equipo de investigación, en los que también se producen cambios en el sistema educativo (Batanero 2004, 2014; Batanero et al., 2005, 2009, 2011).

Holmes (2002, p.7) ya anunciaba que la enseñanza de la Estadística y probabilidad fue introducida en 1961 en el currículo de Inglaterra -opcional- para estudiantes de 16 a 19

años. Holmes y su equipo demostraron que había la posibilidad de iniciar ya esta disciplina en la escuela primaria.

Como veremos en el capítulo 2, desde las propias directrices curriculares se pone de manifiesto la necesidad de adquirir las capacidades necesarias para desarrollar las distintas competencias. El currículo oficial marca las directrices para orientar cómo contribuir al desarrollo de las competencias desde las distintas áreas de la etapa. En concreto, respecto a la que nos concierne, la competencia del *tratamiento de la información* (datos), no todas las áreas poseen estas indicaciones, pero sí la mayoría y en particular las Matemáticas.

En la introducción del área de las Matemáticas se deja constancia de la importancia que tiene esta disciplina en la sociedad actual, puesto que los ciudadanos necesitan, en los distintos ámbitos profesionales, un mayor dominio de ideas y destrezas matemáticas que las que precisaban hace sólo unos años.

Citaremos algunas características de la importancia que estas instrucciones oficiales le otorgan a la competencia *tratamiento de la información y competencia digital*:

- Manejar la información para la toma de decisiones:

“...La toma de decisiones requiere comprender, modificar y producir mensajes de todo tipo, y en la información que se maneja aparece, cada vez con más frecuencia: tablas, gráficos y fórmulas que demandan conocimientos matemáticos para su correcta interpretación. Por ello, las ciudadanas y ciudadanos deben estar preparados para adaptarse a los continuos cambios que se generan” (D. 112/2007, p. 30553).

- Contribución de las Matemáticas al análisis e interpretación de datos:

*“... Las matemáticas contribuyen en gran manera a saber **analizar e interpretar datos** (la información que se obtiene), **confrontar y evaluar los contenidos de los medios de comunicación** en función de su validez, fiabilidad y adecuación entre las fuentes, tanto en línea como fuera de línea, y a utilizarlos en la resolución de problemas. La materia desarrolla técnicas heurísticas que constituyen modelos generales de tratamiento de la información y de razonamiento, y consolidan la adquisición de destrezas involucradas en la competencia aprender a aprender. (...). **El bloque de tratamiento de la información facilita al alumno el análisis matemático de los datos necesarios para la toma de***

decisiones tanto en su participación social como ciudadanos y consumidores responsables de encuestas, sondeos, escrutinios, reportajes, gráficas, etc...” (D 87/2015, p. 16649).

- Las herramientas tecnológicas suponen un recurso didáctico para mejorar la competencia digital, a través de la resolución de problemas y la realización de investigaciones:

*“... La incorporación de **herramientas tecnológicas** como recursos didácticos para el aprendizaje y para la resolución de problemas, y la realización de investigaciones **contribuyen en gran manera a mejorar la competencia digital**” (D 87/2015, p. 16649).*

En resumen, todas estas reflexiones convergen hacia una idea: la intervención de las Matemáticas es necesaria para asegurar que en todas las etapas educativas se proporcione la formación pertinente con respecto al tratamiento de la información; considerando que este tratamiento desborda el marco de la Estadística, suponiendo una exploración de los datos más global. Esta formación debe asegurar los elementos necesarios para que el estudiante pueda adquirir las capacidades o destrezas de la elaboración, organización y tratamiento de la información. Para que ésto se produzca, es imprescindible que los docentes incluyamos estas capacidades dentro de los objetivos del currículo.

Y esto nos lleva a plantearnos como docentes una nueva pregunta:

“¿Es posible elaborar una propuesta didáctica para la etapa educativa de secundaria obligatoria (ESO) que permita desarrollar la competencia del tratamiento de la información, utilizando un marco más global que el tratamiento estadístico de los datos?”

Como hemos dicho en la introducción, partimos de los trabajos previos de Orús (1986-1992) y Pitarch (2001-2002) y ello nos permite postular que es viable elaborar situaciones de tratamiento de la información en situación escolar, permitiendo realizar a la vez tratamiento lógico y estadístico de los datos.

Para elaborar nuestra propuesta nos planteamos diseñar una *ingeniería didáctica* en el marco teórico de la TSD según el enfoque que le atribuye su impulsor, Brousseau (1999): mediante la búsqueda de las condiciones y variables que permiten modelizar y desarrollar los conocimientos de los alumnos respecto al tratamiento de los datos, la Lógica y la Estadística (elemental).

1.2. Metodología

El marco teórico en el que realizamos esta investigación condiciona la metodología que vamos a seguir en la misma, tanto para plantear el problema de investigación, reformulando la problemática docente, como para plantear las posibles soluciones.

La tesis que presentamos, como ya hemos dicho anteriormente, es un trabajo de investigación de DM, que se enmarca en la TSD, creada por Brousseau (1986a) quien modeliza la enseñanza de las Matemáticas, mediante las interrelaciones del alumno y del profesor con el saber matemático, a través de las nociones de *medio* y de situación. Por tanto, las modelizaciones y conceptos teóricos que la TSD propone serán nuestros principales instrumentos metodológicos de investigación.

En particular la modelización del sistema de enseñanza y de la relación didáctica a través de las nociones de *medio* y de *situación adidáctica*, que conllevan a su vez nuevas nociones como la *devolución* y *contrato didáctico* -para establecer las responsabilidades con respecto al saber matemático en juego por parte del alumno y del profesor- y las *paradojas* ligadas al contrato didáctico que supone el aprendizaje adidáctico.

Presentaremos estos conceptos y modelizaciones y los utilizaremos para plantearnos nuevas preguntas y reformular nuestra problemática inicial. Todo ello en este capítulo 1, en la sección 1.3.

Otro de los modelos que propone la TSD es la *ingeniería didáctica* (Brousseau, 1986a, 1997, 1999), considerada ella misma como una metodología, por diversos investigadores en Educación Matemática (Artigue et al., 1995). Este método nos permitirá dar respuesta al problema de investigación elaborando unas situaciones para crear un nuevo contrato didáctico en torno al razonamiento natural, la Lógica y el tratamiento de la información en la ESO. En términos de la metodología específica que utiliza la ingeniería didáctica también se necesitan los conceptos teóricos de medio, situación adidáctica, didáctica, diferenciación entre tipos de situaciones (acción, formulación, validación e institucionalización), devolución y contrato didáctico, paradojas, ...

Según este modelo, se plantean las siguientes fases en el proceso de elaboración de la ingeniería didáctica:

- ***Diseño de las situaciones:*** análisis a priori de las situaciones adidácticas o didácticas, que nos permite la elección e identificación de las variables didácticas a controlar y de los valores concretos que se les van a dar a dichas variables para que generen o permitan generar el conocimiento matemático o lógico escogido. Estas decisiones van a conformar el medio a-didáctico elegido para los alumnos y se plasma en una ficha didáctica.
- ***Preparación didáctica:*** organización de los grupos de alumnos para realizar la organización del medio del profesor, la experimentación y los dispositivos técnicos necesarios. Además se organiza la coordinación con el profesorado que va a participar en la misma (observadores, profesor del aula) mediante una o varias reuniones previas. En éstas se facilita al profesor de aula la “*ficha didáctica*” para aplicar la situación y la “*ficha de la crónica/observación*” para que el investigador-observador pueda plasmar en la misma cómo acontece el desarrollo de la situación (en el caso de que se pueda disponer de observador/es externo/s)
- ***Experimentación y observación de las situaciones:*** desarrollo efectivo de la situación en el aula, gestionada por el profesor encargado y si es posible, con la presencia de un investigador-observador externo (o varios).
- ***Recogida de información:*** se trata de recoger toda la información posible de la experimentación realizada a partir de las anotaciones de los observadores, la grabación de la/s sesión/es, las actividades realizadas por los alumnos y de las entrevistas posteriores con los alumnos y con el profesor.
- ***Análisis y evaluación:*** tratamiento de los datos recogidos mediante el análisis escogido para la investigación y evaluación de todo el proceso a-didáctico y didáctico. Interpretación de los resultados y obtención de conclusiones. Evaluación del propio proceso, de la gestión del profesor, de los medios técnicos escogidos y del propio diseño de la ingeniería.

La recogida de información que puede ser codificada y tratada como datos es otro de los rasgos metodológicos que la TSD aporta a la investigación en DM.

El análisis de datos ha sido un factor básico de la metodología de elaboración y validación de la TSD (Orús, 2001). En esta publicación se expone que Brousseau muestra su preocupación por la progresión en la adquisición de los conocimientos matemáticos de los alumnos y la problemática que conlleva la observación de este proceso de enseñanza-aprendizaje, desde su primera publicación.

Por otro lado, Deramecourt y Houziau⁴ proceden a recoger las lecciones propuestas por Brousseau con las correspondientes matrices de datos para realizar el tratamiento de datos correspondiente. No obstante, más tarde Brousseau abandona el método de análisis de datos estadístico utilizado como método fundamental de la Epistemología experimental como inicialmente se llamaba a la DM, considerándolo demasiado costoso sin obtener los resultados esperados para responder a su planteamiento inicial: cómo conocer la consecución de la adquisición de los conocimientos matemáticos de los alumnos.

A partir de ahí Brousseau, propone por primera vez un marco teórico para analizar y observar la situaciones de enseñanza, naciendo así el proyecto de *L'École J. Michelet (Talence)* como una escuela para la observación (Orús, 1986a) y el COREM como dispositivo de investigación.

Desde este nuevo planteamiento, los medios informáticos y estadísticos de tratamiento de datos que se utilizan y producen en la escuela J. Michelet, están en función de las necesidades de investigación en didáctica.

Una de las últimas reflexiones sobre la utilización del análisis de datos en la TSD se expone en la comunicación de Brousseau y Lacasta (1995), en la que muestran la utilización de los métodos clásicos de análisis de datos y la necesidad del análisis de modelos explicativos para modelos didácticos.

En esta investigación hemos utilizado como herramienta informática el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive, Gras et al., 2007), que implementa los procedimientos del Análisis Estadístico Implicativo (ASI): a saber, un análisis clúster jerárquico (llamado árbol de similaridad), un análisis de asociación estadística tipo "implicación" entre variables (integrado en el llamado grafo

4 Referencia bibliográfica tomada de Brousseau (1986a, p. 32)

implicativo), y otro análisis jerárquico sobre las asociaciones implicativas (llamado árbol de cohesiones).

El árbol de similaridad sirve para agrupar las variables analizadas en grupos homogéneos, y lo hace con una estructura jerárquica, representada en forma de árbol: en primer lugar cada variable es un grupo unitario, y a cada nivel del árbol se reúnen las variables más similares en una nueva clase. Así, el árbol acaba uniendo a todas las variables, y el usuario elige, según el número de grupos que puede gestionar o interpretar. Además, algunas de las clases se denominan "nodos significativos", por reunir variables (en ese punto) con similaridades respectivas más altas, en promedio, que las que guardan las parejas de variables aún no reunidas en dicha clase.

El grafo implicativo muestra el grado de asociación entre las variables en forma de implicación, donde una variable hace de antecedente y la otra de consecuente. Se calcula una intensidad de implicación (valor entre 0 y 1) comparando el número de contraejemplos que se observa en la muestra, con el que produciría el puro azar, según un modelo de probabilidad binomial o de Poisson. Las implicaciones que sobrepasan el umbral de 0.90, u otro elegido por el usuario, se representan en forma de grafo dirigido, y ayudan al investigador a encontrar relaciones, que éste puede justificar, si cabe, como causa y efecto.

Por último, el árbol de cohesiones es un método de agrupación jerárquica, como el de similaridades, pero agrupa variables y clases de variables en el sentido de la implicación más fuerte. Se define la cohesión entre dos variables (ordenadas) como una transformación de su intensidad de implicación, y de clases (ordenadas) de variables, como las medias geométricas de las cohesiones por parejas (antecedente, consecuente). De esta forma se estructuran las implicaciones entre variables, al estilo matemático, donde cierto teorema implica otro teorema o corolario. A nivel práctico, sólo los niveles del árbol con 3 ó 4 variables se podrían interpretar. De igual forma, se destacan algunos niveles del árbol de cohesiones como "nodos significativos", por reunir variables cuyas cohesiones respectivas son en promedio superiores a las del grupo del resto de parejas separadas hasta ese nivel⁵.

Este programa informático permite realizar un análisis cuantitativo y además cualitativo tanto de los datos que genera el estudio a priori de las situaciones, como de

5 En el anexo 6 mostramos cómo realiza los cálculos CHIC, mediante unos ejemplos sencillos.

los datos que se obtienen de los alumnos a partir de la experimentación de las mismas. Estas técnicas estadísticas de análisis multivariantes son muy utilizadas en DM, como puede verse en las actas de los ocho coloquios del ASI (([A.S.I. 1](#). Francia: IUFM de Caen en 2000), ([A.S.I. 2](#). Brasil: Universidad PUC de São Paulo en 2003), ([A.S.I. 3](#). Italia: Universidad de Palermo en 2005), ([A.S.I. 4](#). España: Universidad Jaume I de Castellón en 2007), ([A.S.I. 5](#). Italia: Universidad de Palermo en 2010), ([A.S.I. 6](#). Francia: IUFM de Caen en 2012), ([A.S.I. 7](#). Brasil: Universidad PUC de São Paulo en 2013), ([A.S.I. 8](#). Tunísia: ISET de Radés en 2015)⁶. Además dichas técnicas fueron creadas para resolver un problema de investigación en DM, medir estadísticamente la implicación entre determinados conocimientos matemáticos, así como la implicación en la adquisición (aprendizaje) de esos conocimientos (Gras, 1979). El software CHIC se comenzó a desarrollar desde el inicio del ASI, en el entorno MS-DOS, y ha ido incorporando, puntualmente y hasta la fecha, los algoritmos de cálculo de todos los avances teóricos.

En nuestra investigación se utilizará en el estudio a priori del “Cuestionario Q” y del “Juego de la agencia de viajes” y en el análisis de los resultados (éxito/fracaso) de los alumnos en la experimentación de la primera situación.

Las investigaciones precedentes en las que se ha aplicado este mismo método (Orús, 2000b, 2005, 2009; Pitarch, 2001-2005; Gregori et al., 2009), dentro del mismo marco teórico, muestran la riqueza didáctica del ASI, facilitando la toma de decisiones en la selección de las variables didácticas pertinentes y la validez de los análisis de los resultados obtenidos de los alumnos.

1.3. Dominios de referencia

Según Brousseau (1998, 1999), en la TSD, la enseñanza es una actividad que reúne dos procesos: uno es de **aculturación del alumno** -la del medio social al que pertenece el alumno y la matemática- y el otro el de **adaptación independiente** -en lo que se refiere a las situaciones adidácticas-.

Brousseau plantea la TSD como una teoría que le permite modelizar el proceso de enseñanza-aprendizaje, de manera que este proceso se visualiza como un juego para el

6 Referencias de los ocho coloquios del ASI en <http://sites.univ-lyon2.fr/asi8/?page=0&lang=es>

cual el docente y el alumno han definido o establecido reglas y acciones implícitas (Brousseau, 2007).

La modelización que Brousseau establece de la enseñanza como comunicación de saberes y sus prácticas sociales de referencia, la representa a través del siguiente esquema (figura 1-1) (Brousseau, 1990):

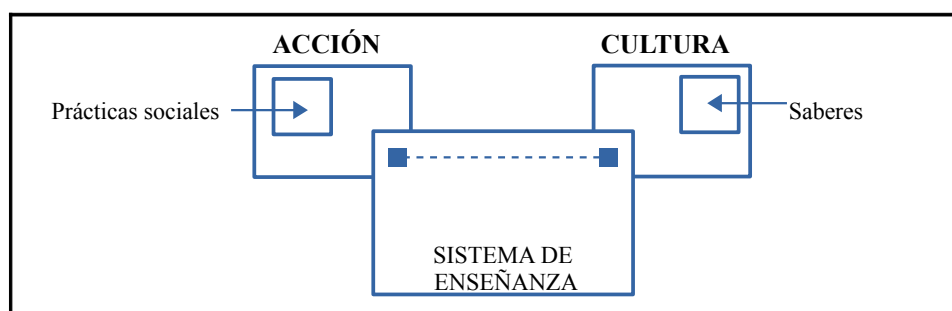


Figura 1-1: Modelización del sistema de enseñanza (Brousseau, 1990)

Para Brousseau este esquema tiene una doble lectura: no sólo puede representar el funcionamiento de la comunicación del saber en la institución “enseñanza” y sus aportes con las prácticas sociales de referencia, sino que también puede representar el funcionamiento del saber en el interior de la clase, en la relación didáctica. Lo que permitió distinguir a Brousseau tres tipos de situaciones de enseñanza: acción, validación y comunicación.

Tomando esta modelización, para analizar el objeto razonamiento en la enseñanza, nos surgen nuevas preguntas: ¿el razonamiento, es considerado por el sistema de enseñanza un saber a comunicar?, en ese caso, ¿cuál sería el saber cultural de referencia?, ¿cuáles son las prácticas sociales de referencia del razonamiento?, ¿qué conocimientos deberían adquirir los alumnos?

Y si consideramos los diversos tipos de situaciones de enseñanza de los conocimientos matemáticos ¿cuál sería el razonamiento presente en una situación de acción?, ¿y en situación de formulación o de validación?. Preguntas similares plantea Orús (1992):

“4.1. Parmi les différents aspects du “raisonnement”, dans la relation didactique, nous intéressons au traitement des différents formes de raisonnement des enfants dans la relation didactique: Quelles sont les fonctions dévolues au “raisonnement”? Est-il possible d’essayer de définir ou d’identifier le “raisonnement” ou des types de “raisonnements” à partir de leur rôle dans la relation didactique?” (Orús, 1992 p.14).

Para ayudar a responder estas preguntas propone considerar el razonamiento como un objeto y las relaciones que se pueden tener respecto a este objeto según la institución en que se considere su existencia (es lo que Chevallard (2003) analiza como “rapport au savoir”).

Identifiquemos pues las instituciones de referencia, según se indica en el siguiente esquema (figura 1-2):

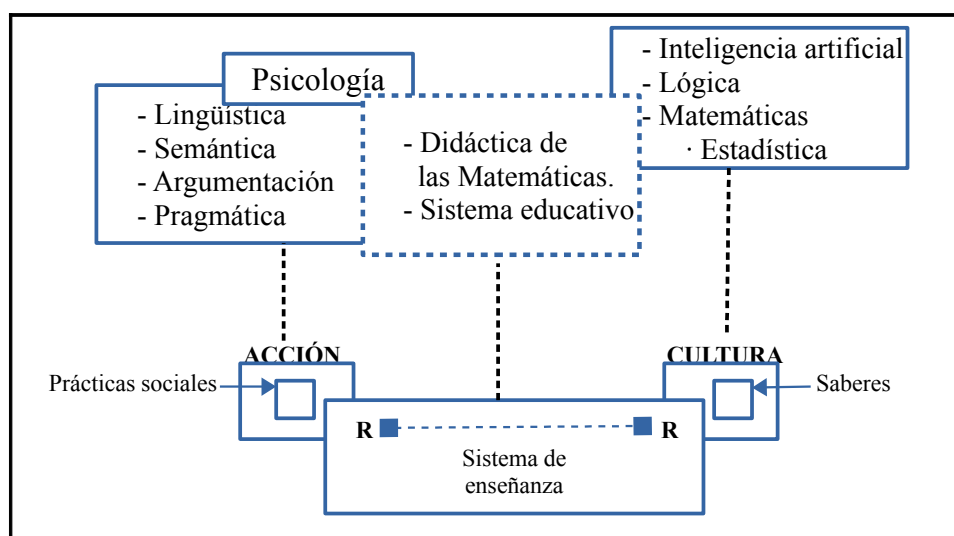


Figura 1-2: Instituciones de referencia para el razonamiento

En la enseñanza de las Matemáticas, la validación y la institucionalización deben realizarse siempre en referencia a los saberes matemáticos en juego, no obstante también se deben tener en cuenta los diferentes dominios de referencia en los que se producen los razonamientos según las normas específicas de los dominios donde son elaborados: la Lógica (inferencia y deducciones), la psicología (el pensamiento natural del alumno), la lingüística (formulación de argumentaciones), inteligencia artificial (una forma específica, a través de la Lógica formal, del tratamiento de la información) y el sistema educativo (en el que se desarrolla la práctica didáctica).

En el siguiente esquema (figura 1-3) se representa la relación entre los dominios científicos, sociales y culturales de referencia utilizados en nuestra investigación, según se considere la relación didáctica, como una situación de acción, formulación o validación:

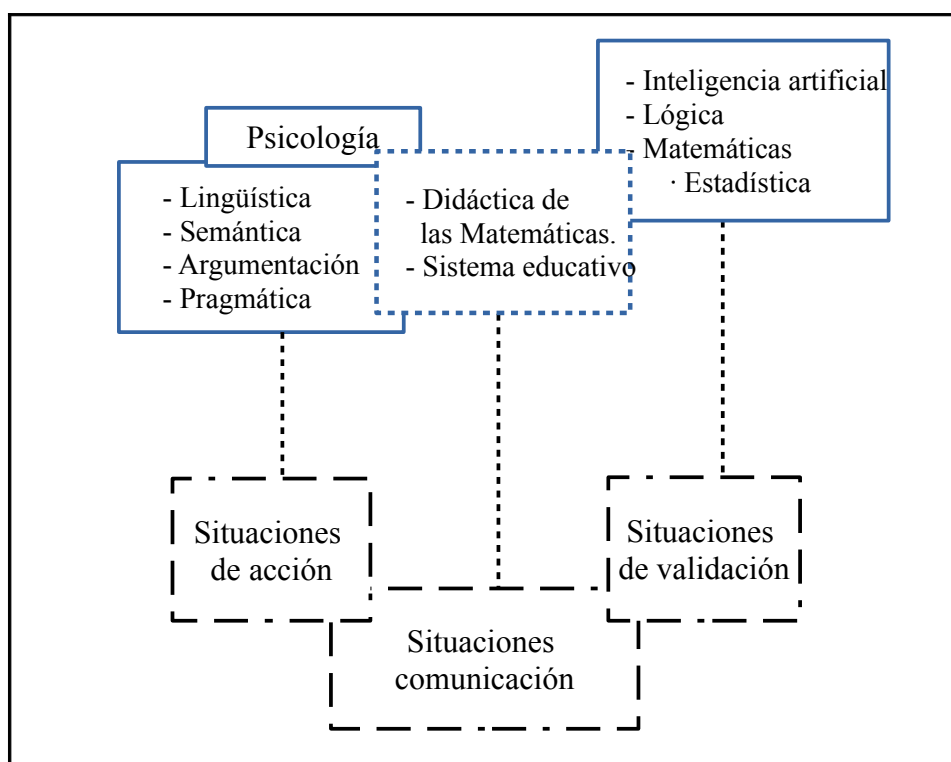


Figura 1-3: Dominios científicos, sociales y culturales de referencia.

Esta modelización es utilizada por Orús (1992) para identificar las instituciones que pueden servir de dominios de referencia para analizar el objeto razonamiento en la relación didáctica según el tipo de situaciones que analice. Identifica el razonamiento acción, el razonamiento formulación y el razonamiento validación.

1.3.1. Marco teórico: Teoría de Situaciones Didácticas

La DM aparece como una epistemología experimental cuando Brousseau (1986a) crea la TSD. Así lo expresa Brousseau (1999) refiriéndose a los inicios de la TSD.

”Aceptar de entrada la idea de una didáctica general a priori, me parece que llevaría a dejar de lado el estudio todo aquello que es propio de lo didáctico. Una didáctica general no puede ser, desde mi punto de vista, más que una metadidáctica azarosa. Y es por esto que la teoría de las situaciones comienza con el estudio y la construcción de modelos de situaciones didácticas características de tal o cual saber específico.

*No sabría decir si la Teoría de las Situaciones, o uno de sus avatares, está en condiciones de proporcionar a la didáctica de las matemáticas el esqueleto teórico y experimental susceptible de hacer de ella una ciencia en forma, espero que sí. **Dicha teoría se presenta como un acercamiento científico al conjunto de problemas que plantea la difusión de las matemáticas, y en el cual la especificidad de los conocimientos enseñados está implicada y juega un papel significativo**” (Brousseau, 1999, p.31).*

1.3.1.1. Situación adidáctica y didáctica. El medio

Desde el enfoque tradicional y de forma muy esquematizada se puede decir que, en cualquier situación didáctica aparece una relación alumno-profesor, en la que el profesor transmite los conocimientos y el alumno es quien recibe dicha información -en general de forma pasiva- y los reproduce tal cual le han sido transmitidos. Podríamos decir que en este enfoque no se contextualiza suficientemente el conocimiento y por tanto no se obtiene un aprendizaje significativo (Vygostsky, 1978).

En cambio, en la concepción constructivista de la enseñanza, el alumno adquiere un papel activo en el proceso de enseñanza-aprendizaje y por tanto puede interactuar con el docente y con el propio conocimiento. En particular, según la modelización de Brousseau (1999, p.3), es el profesor quien facilita el medio en el cual el alumno construye su conocimiento. En este caso intervienen tres elementos fundamentales: alumno, profesor y el medio didáctico. Por consiguiente, situación didáctica se refiere al conjunto de interrelaciones entre estos tres elementos (figura 1-4).

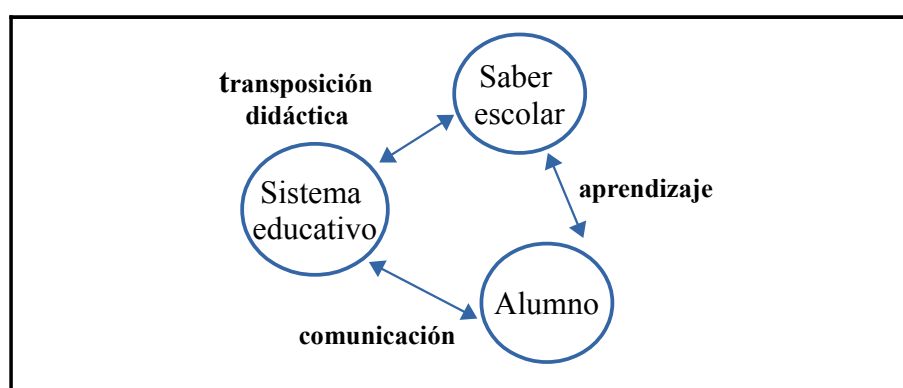


Figura 1-4: Modelización de la enseñanza según Brousseau (1999)

A continuación vemos cómo lo expresan Fregona y Orús (2010) haciendo referencia a la definición de **situación didáctica** según Brousseau:

“ Brousseau postula que cada conocimiento o cada saber pueden ser determinados por una situación que de alguna manera recrea las condiciones que permitieron la emergencia de dicho conocimiento. En la construcción de la matemática, seguramente las condiciones que hicieron surgir los números fraccionarios y luego los racionales por ejemplo, no fueron las mismas que las que dieron origen al Teorema de Pitágoras. La Didáctica de la Matemática aparece como una epistemología experimental, ya que propone realizar un estudio epistemológico del saber a enseñar para analizar las condiciones que determinaron su origen y/o evolución. Las situaciones didácticas permiten elaborar una génesis artificial que intente recuperar algunas de esas condiciones, de modo que ese conocimiento o saber a enseñar sea la respuesta óptima para esa organización dada...” (Fregona y Orús, 2010, p.8)

En el desarrollo de esta teoría, Brousseau introduce otro concepto imprescindible, éste es el de situación adidáctica. La diferenciación entre adidáctica y didáctica es uno de los elementos metodológicos característicos de la TSD, entendiendo por a-didáctico como ausencia voluntaria de intervención por parte del enseñante.

La **situación adidáctica** es una situación que por sí misma, sin intervención intencionada del docente, produce un cambio de estrategias en el proceso de aprendizaje del alumno, a través de las llamadas variables didácticas. A través de ellas dejan inoperantes las estrategias espontáneas del alumno y por consiguiente éste usa sus conocimientos previos para la construcción del nuevo conocimiento. De esta forma se produce el aprendizaje por motivación interna de la situación, no para satisfacer al docente. Cualquier situación didáctica engloba las situaciones adidácticas, ya que en la situación didáctica, la situación adidáctica es la referencia que caracteriza el saber y es el ideal (en cuanto modelo) hacia donde la situación didáctica debe converger. El docente debe ayudar al alumno a despojar la situación de aprendizaje de todo artificio didáctico para que el conocimiento sea personal y objetivo.

Así introducen este concepto Fregona y Orús (2005, 2010):

“ ...al final de la enseñanza el alumno tendrá que enfrentarse a situaciones desprovistas de intenciones didácticas. Para ello contará previsiblemente con los conocimientos aprendidos que le darán la posibilidad de interpretar sus relaciones con esos sistemas

*como nuevas situaciones, a las cuales podrá responder de manera apropiada. Aunque en la enseñanza todas las situaciones son didácticas, ya que tienen por finalidad enseñar algo a alguien, se busca que el conocimiento al que recurra o produzca el alumno se justifique por su interacción con el medio, sin la indicación implícita o explícita del docente. **Se las llama situaciones adidácticas**, y constituyen de alguna manera un sistema ideal. El medio es un sistema autónomo, antagonista del sujeto...” (Fregona y Orús, 2010, pp 8-9)*

Esta diferenciación que aparece fundamentalmente en la TSD, entre el funcionamiento adidáctico y didáctico del saber en la relación didáctica, permite a Orús (1992) establecer una primera diferenciación entre el razonamiento que funciona en situación adidáctica (el razonamiento del sujeto como proceso mental individual, el subjetivo, el llamado razonamiento natural) y el razonamiento que funciona en situación didáctica (el gestionado por el profesor, que en la enseñanza de las Matemáticas el razonamiento de referencia es el razonamiento deductivo, el formal en el que se basan los razonamientos matemáticos).

En todo caso las situaciones adidácticas/didácticas se crean para modelizar el conocimiento y transformarlo en saberes. Para que el alumno pueda adquirir o interiorizar este conocimiento matemático, la TSD plantea distintos tipos de situaciones; éstas pueden ser de acción, formulación, validación e institucionalización (ésta última fue introducida más tarde por Brousseau) (Brousseau, 1999):

- **situación de acción:** en general se produce de forma adidáctica, cuando el alumno se enfrenta al saber matemático a través del medio que se le proporciona, interactuando con el mismo para tomar decisiones de cómo trabajar el conocimiento puesto en juego. El alumno debe utilizar sus conocimientos previos y buscar las estrategias que le permitan apropiarse del “saber matemático” propuesto.
- **situación de formulación:** en esta situación es imprescindible hacer uso de la comunicación, puede ser entre los propios alumnos o entre profesor -alumno. En todo caso el alumno deber expresar los conocimientos trabajados en función de los recursos lingüísticos de los que dispone; así pues el alumno se expresa con su lenguaje natural (que tiene como referencia) y también con los códigos y representaciones propias del lenguaje matemático -al menos las que él

controla-. Por lo tanto en este momento es importante la gestión del profesor, en situación didáctica, ya que es quien conoce a nivel matemático la formulación “correcta” y puede expresar de forma pública la formulación que “puede aceptar” oficialmente en la clase.

- **situación de validación:** es el momento de la aceptación o del rechazo oficial de las producciones nuevas y los razonamientos producidos por los alumnos, respecto a su validez en el ámbito de las Matemáticas. En este caso sólo los razonamientos matemáticos (las demostraciones) y los razonamientos lógicos son los que pueden hacer válidos o no matemáticamente los resultados elaborados por los alumnos.
- **situación de institucionalización:** ésta se caracteriza por ser didáctica, pues es el profesor quien puede transformar el conocimiento en juego en saber matemático. Esta situación permite el reconocimiento y la organización de los saberes matemáticos que están en juego, siendo presentados oficialmente a la clase.

Estos tipos de situación le permiten a Orús (1992) identificar diferentes funcionamientos del razonamiento: razonamiento-acción, razonamiento-formulación y razonamiento-validación. Y en la situación de institucionalización el único razonamiento permitido es el razonamiento matemático.

El término mencionado antes como “**variables didácticas**”, también es un término específico de la TSD. Éstas son modificaciones que se producen en una situación de manera que sus variaciones hacen que el problema abordado se simplifique o tome mayor complejidad a voluntad del docente. Según los valores que tomen dichas variables hace que el alumno modifique las estrategias de resolución, puesto que modifican el conocimiento necesario para resolver la situación y por lo tanto use necesariamente sus conocimientos previos. Así lo explica Brousseau (1995) “*el docente puede utilizar valores que permiten al alumno comprender y resolver la situación con sus conocimientos previos, y luego hacerle afrontar la construcción de un conocimiento nuevo fijando un nuevo valor de una variable...*”

En la definición de situación didáctica también aparece el concepto de **medio didáctico**, fundamental en la construcción de la TSD e introducido por Brousseau

(1986b) (definido originalmente por el autor como “*milieu*”). En general, la palabra medio se entiende como el conjunto de condiciones escolares que organiza el profesor en torno a un conocimiento o tema de estudio, es decir, es un saber o conocimiento matemático contextualizado en situación escolar. Desde el enfoque constructivista de la enseñanza se denomina medio a un conjunto de circunstancias exteriores que produce desequilibrios cognitivos en el alumno (en el sentido piagetiano del término, Piaget, 1978).

Brousseau, compartiendo esta versión constructivista de la enseñanza, concibe el medio como un sistema autónomo, antagonista del sujeto para producir una confrontación con el alumno. Por ello habla de comportamientos nuevos producidos en la relación del alumno con el medio y entiende que las interacciones que cada uno de los alumnos establece con ese medio son diferentes y por tanto existen distintos medios para el profesor y para los alumnos (Fregona y Orús, 2005, 2010).

Progresivamente Brousseau va incorporando más detalle en la modelización inicial de las nociones de medio y situación y propone un esquema más complejo en la IV École d'été de DM (Brousseau, 1986b), diferenciando distintos medios y posiciones del alumno respecto a ellos, al interior de la llamada situación adidáctica; y del profesor y del alumno en las situaciones didácticas. El esquema de la figura 1-1 representa la **estructuración del medio** según las posiciones y situaciones que se producen entre el alumno, profesor y el medio. Otros investigadores también utilizan esta noción, Margolinas y Steimbring (1994) y Margolinas (1995) incluyen nuevas situaciones y posiciones del profesor y alumno, con otro tipo de esquema para la representación de la estructuración del medio (en forma de tabla, pp. 6-7, 1995).

En esta investigación seguimos la modelización de Brousseau para poder considerar diferentes posiciones de los sujetos, tal y como se explica a continuación mediante el esquema original (figura 1-5) propuesto por Brousseau (1986b) (y expuesto en Fregona y Orús, 2010, p. 26).

En este esquema es fundamental la definición de situación por el binomio sujeto actuando sobre un medio: Sujeto → Medio (Orús y Bort, 2000a).

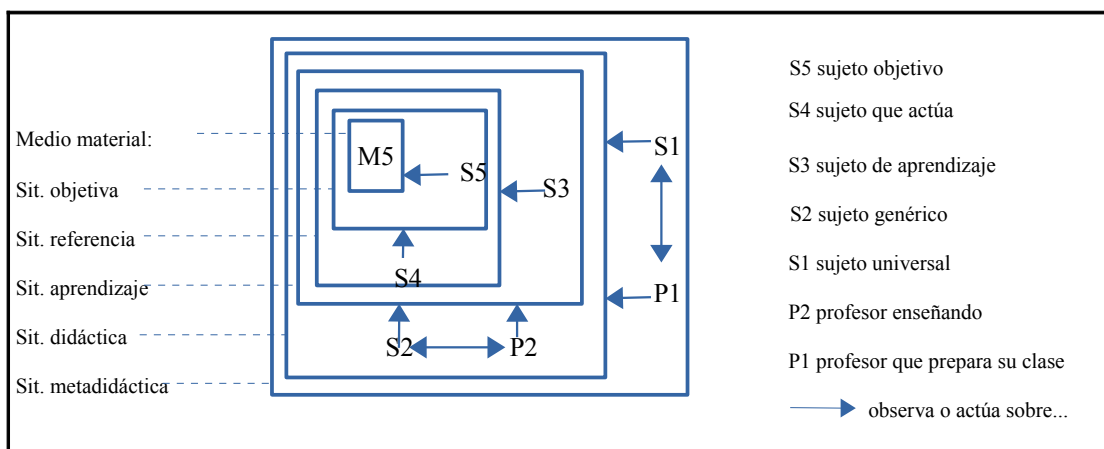


Figura 1-5: Estructuración del medio según Brousseau (1986b)

Veamos con más detalle el funcionamiento de la estructuración del medio (Fregona y Orús, 2010, pp. 26-31) :

- **situación objetiva (binomio S5-M5):** cuando un profesor prepara una clase respecto a un determinado conocimiento, organiza un medio -que corresponde al *medio material*- que está formado por objetos concretos (si son pertinentes), las interacciones posibles entre los alumnos, las consideraciones con respecto al éxito o fracaso de la actividad que propone... Al mismo tiempo considera un *sujeto objetivo*, considerándolo capaz de comprender la consigna que le va a plantear y su actuación sobre ella.

Este binomio medio-sujeto (M5-S5) constituye la **situación objetiva** que a su vez se convierte en el medio para el alumno en posición S4 que interactúa con él.

- **situación de referencia (binomio S4-M4):** el *alumno que actúa* (S4) frente a la situación objetiva convierte a la misma en su *medio objetivo* y las interacciones que suceden entre ambos forman una nueva situación, llamada *situación de referencia*. Para un observador de la situación puede que se presenten momentos en los que no perciba diferencias entre los sujetos S5 y S4, en cambio para el propio actor (sujeto) la diferencia reside en su propia interacción con el medio. Así pues el sujeto S4, *sujeto que actúa*, establece relaciones de acción.

- **situación de aprendizaje (sujeto S3 con medio de referencia M3):** el sujeto S3 actuando sobre el medio de referencia forman la situación que se denomina como **situación de aprendizaje**. El sujeto del aprendizaje (S3) que interviene en esta situación tiene la posibilidad de cuestionarse las decisiones que toma puesto que está en una posición más reflexiva y sus interacciones con el medio de referencia (M3) se caracterizan por ser situaciones de formulación o validación.
- **situación didáctica (profesor enseñando (P2); alumno genérico (S2) sobre el medio de aprendizaje (M2)):** el profesor, para desarrollar su proyecto, se apoya en la situación de aprendizaje que se traduce como el medio de aprendizaje (M2) sobre el que actúa el alumno genérico (S2) constituyéndose de esta forma la **situación didáctica**. En esta situación el profesor actúa como enseñante puesto que es el espacio donde se produce el cambio de conocimientos en saberes. En este espacio el alumno se posiciona tal y como actúa el profesor dando a conocer el saber oficial a partir de los conocimientos aprendidos, descubiertos por el alumno en la situación precedente. El profesor tiende a posicionar al alumno como S3 para que retome sus reflexiones y las confronte con un saber matemático constituido.

La posibilidad de que el alumno ocupe distintas posiciones depende del funcionamiento a-didáctico de la situación o de los ajustes que va realizando el profesor en el desarrollo de su proyecto de enseñanza. El contrato didáctico⁷ va a regular ese pasaje a-didáctico/didáctico en el nivel de la situación didáctica: es el profesor quien posee la responsabilidad de identificar y comunicar el saber matemático correspondiente a la situación propuesta.

- **situación meta-didáctica: profesor que prepara su clase; sujeto universal(S1)- medio didáctico (M1)):** El medio didáctico está constituido por la situación didáctica y es sobre el que actúa la dupla P1-S1, formada por el profesor y el sujeto universal. El tipo de interacción es reflexiva por parte de ambos. El profesor se posiciona en esta situación metadidáctica tanto cuando inicia el desarrollo de un curso, como durante la marcha del mismo: prepara, observa, analiza producciones de los alumnos, evalúa la pertinencia de las

⁷ Concepto específico en Teoría de Situaciones abordado en la siguiente sección

decisiones tomadas en el medio objetivo de cada clase y decide cómo avanza en el proyecto de enseñanza propuesto.

Es el profesor quien, en esta posición, debe evaluar cuáles son las experiencias que pueden ser reconocidas como conocimientos de la clase, cuáles han sido explicitados y qué otros no han sido aceptados de forma pública. Debe discernir entre los saberes que pueden obtenerse legítimamente de ese medio didáctico y cuáles deben esperar otro momento más favorable.

A su vez, el alumno también puede observar, analizar, evaluar y juzgar su propio aprendizaje y la dinámica de la situación didáctica. En este espacio puede analizar sus decisiones, cómo ha abordado el problema, la formulación elegida, la validez de su resolución...Es la posición en la que intenta reorganizar sus conocimientos como resultado de su interacción con el medio didáctico, ya que el alumno en la posición S1 sale de la relación didáctica y la evalúa

La interpretación que se le da a este esquema (figura 1-5) se realiza desde el interior hacia fuera, de manera que el *medio material* (M5) y el *sujeto objetivo* (S5) -situado justo en su exterior- constituyen la *situación objetiva*. Esta última constituye el medio para el *sujeto que actúa* (S4) en su *medio objetivo* (M4), así pues el binomio M4-S4 forman la *situación de referencia*, que a su vez deviene el *medio de referencia* (M3) para el *sujeto de aprendizaje* (S3). Entonces esta dupla M3-S3 forman la *situación de aprendizaje*. El *alumno genérico* (S2) con el *medio de aprendizaje* (M2) da lugar a la *situación didáctica* en la que, por primera vez, se encuentra la presencia del profesor (P2). Y por último, aunque este proceso reflexivo puede repetirse, el *medio didáctico* (M1) y el *sujeto universal* (S1) forman la *situación metadidáctica*. En resumen podemos decir que el sujeto y el medio de un nivel n definen una situación que llega a ser el medio para un sujeto ubicado en el nivel (n-1).

1.3.1.2. Efectos y paradojas del contrato didáctico. Devolución

En la interrelación que se crea entre profesor, alumno y medio didáctico surgen otros dos conceptos fundamentales: la transposición didáctica y el contrato didáctico (Brousseau, 1999, pp.24-25):

i) En situación didáctica el profesor se relaciona con el medio de aprendizaje y con las producciones de los alumnos que posiblemente ocupan posiciones de sujetos que actúa y sujetos del aprendizaje; tal y como se explicita en la estructuración del medio. En el marco de la relación didáctica, tanto el profesor como el alumno, saben que tienen responsabilidades con respecto al objeto de enseñanza (el conjunto de comportamientos que el profesor espera del alumno y el conjunto de comportamientos que el alumno espera del docente). En la TSD, este sistema de obligaciones recíprocas, se denomina **contrato didáctico**. Cabe destacar que no es un contrato pedagógico general y depende de los conocimientos (matemáticos) que entran en juego.

El proceso de aculturación, de entrada a la cultura matemática, exige tareas como plantear y resolver problemas, formular, analizar, simbolizar, elaborar pruebas, etc. El tipo de comunicación que utiliza el profesor en el inicio del proceso de enseñanza a través de una consigna debe ser distinto al que utiliza para comunicar el objeto de estudio, puesto que éste es lo más importante en la tarea del alumno. No obstante la forma de comunicarse que tiene el profesor con el alumnado no sólo es a través de la palabra, sino que también existe la comunicación no verbal, mediante gestos, posición corporal, silencios, miradas, etc. En estos momentos las interacciones tienen carácter implícito y el contrato didáctico vigente se manifiesta por las rupturas, es decir, cuando el profesor o el alumno no responde a las expectativas del otro.

Pero estas rupturas del contrato didáctico forman parte del propio proceso de enseñanza-aprendizaje y el profesor debe negociar con el alumno los significados de los conocimientos matemáticos que están en juego, buscando el contrato que favorezca las condiciones para que el proceso iniciado por el profesor avance para conseguir los propósitos establecidos en el mismo: la enseñanza para uno y el aprendizaje para el otro.

Brousseau identifica algunos efectos o fenómenos que se manifiestan en esa negociación del contrato didáctico y que el profesor debe controlar. El autor los denomina *efecto Topaze*, *efecto Jourdain*, *efecto de analogía* y *efecto de deslizamiento metacognitivo*. Todos ellos atribuidos a los diferentes roles que pueden adoptar el profesor y el alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Brousseau, 1988, pp. 9-10). Se podrían resumir de la siguiente forma:

- **Efecto Topaze:** lo identifica como aquella circunstancia en la que el alumno llega a la solución de un problema, pero no por sus propios medios, sino porque el profesor asume la resolución del problema. El profesor detecta las dificultades que tiene el alumno para llegar a la resolución de un problema, por consiguiente se ve en la necesidad de indicar cuál es el procedimiento que deben seguir. Con este tipo de intervenciones el profesor no permite la construcción de conocimiento por parte del alumno.
- **Efecto Jourdain:** consiste en la actitud que toma el profesor cuando un alumno da una respuesta que es incorrecta, no obstante, para no “desilusionarlo” le dice que “está bien”, que es la respuesta correcta, reformulando el profesor lo que dice el alumno. Entonces, un comportamiento banal del alumno es asumido por el profesor como un conocimiento válido.
- **Deslizamiento Meta-Cognitivo:** se produce cuando el profesor toma una heurística en la resolución de un problema y la asume como el objeto de estudio. Uno de los ejemplos de este efecto puede ser el uso de diagramas de Venn en la teoría de conjuntos. Cuando se comenzaron a analizar los diagramas de Venn dejamos de lado lo que es la teoría de conjuntos, pues se tomaron los primeros como la teoría en sí misma. Ese es un ejemplo de deslizamiento meta cognitivo.
- **Uso Abusivo de la Analogía:** sabemos que en la resolución de problemas es importante el uso de la analogía y reconocer actividades o problemas análogos, se habla de tipos de problemas; pero no se trata de suplantar el estudio de una noción compleja por un caso análogo menos complejo. No nos podemos quedar con los problemas análogos, sino que debemos centrarnos en el problema original. De lo contrario, se está haciendo lo que Brousseau denomina el uso abusivo de la analogía.

Brousseau (1990, 1999) plantea que en el proceso de enseñanza en el que se traslada la responsabilidad al alumno en lo que concierne al uso y construcción del saber (la **devolución** de la responsabilidad al alumno), se producen lo que él llama **paradojas del contrato**. Veamos con más detalles, cómo las define (Brousseau, 1990):

- Una es la **transmisión de las situaciones**, que básicamente se refiere al efecto Topaze. En el proceso se crea un objetivo en doble sentido, por una parte el docente pretende que el alumno aprenda y por otra este último desea aprender, por lo que el docente sugiere al alumno la forma de afrontar los problemas propuestos guiándole en dicho proceso. No obstante, esta acción impide la construcción del conocimiento y el aprendizaje significativo.
- Otra de las paradojas es **la inadaptación a la exactitud**, que es básicamente banalizar los conocimientos matemáticos. Es un problema incluso de transposición didáctica en la que el docente decide perder rigor creyendo que los alumnos lo entenderán con mayor facilidad, o bien, decide mantener rigurosidad matemática con la consecuencia inmediata de la incompreensión por parte de algunos de sus alumnos. Es decir, el docente debe tomar la decisión en cuanto a transmitir el conocimiento sabio tal y como se concibe, ó banalizarlo y transponerlo muchas veces, incluso incorrectamente, para que el alumno lo entienda. Esta paradoja se da en dos direcciones tanto del profesor como del alumno.
- Brousseau menciona como otra de las paradojas la **inadaptación a una situación ulterior**. Ésta se refiere a la situación en la que el alumno construye de forma adecuada un conocimiento, aunque éste podría significar un obstáculo didáctico para otro conocimiento posterior. Entonces, en esta paradoja el alumno aprende bien un conocimiento, que a la vez puede ser un obstáculo didáctico en otro momento.

ii) Chevallard (1985) es el punto de partida del llamado *enfoque antropológico* en DM, impulsado por este investigador a finales de los años ochenta. Este enfoque pone de manifiesto que no es posible interpretar la matemática ni la actividad matemática que se estudia en la escuela sin tener en cuenta fenómenos relacionados con los procesos de (re)construcción de las Matemáticas que tienen el origen en la institución “sabia” o

productora de los saberes matemáticos. Manifiesta la necesidad de estudiar las condiciones de creación y difusión del conocimiento matemático en las diferentes instituciones sociales, desde las productoras o creadoras del conocimiento, hasta las que lo utilizan como instrumento, pasando por las instituciones más propiamente didácticas, es decir, centradas en la enseñanza de las Matemáticas.

Los fenómenos o efectos que surgen en las rupturas del contrato didáctico que presenta Brousseau, están íntimamente ligados al control de la **transposición didáctica**. Chevallard (1985) la define como el paso del *saber sabio* al *saber enseñado*. En otras palabras, en situación didáctica el profesor se propone enseñar un conocimiento matemático al alumno; este conocimiento en un principio es un concepto axiomático desde el punto de vista matemático, pero el profesor puede presentarlo bajo diferentes formas. El proceso de enseñanza debe permitir la adquisición de nuevos conocimientos con la ayuda de nociones introducidas anteriormente. Pero en este proceso se pierden de vista la sucesión de dificultades y errores que han provocado la aparición de nuevos conceptos, los problemas que han llevado a plantear nuevas técnicas, el rechazo de algunos puntos de vista encontrados y calificados como falsos, las discusiones que han surgido durante el proceso... Todo este funcionamiento es difícil de comunicar y describir fielmente tal y como ha sucedido, ya que de la presentación axiomática se aíslan algunas nociones y propiedades del conocimiento original para adaptarlo a contexto escolar. Esta operación es la que define Chevallard como *transposición didáctica*.

Según Chevallard (1985) los procesos de transposición didáctica distinguen diferentes tipos de saberes que intervienen en todos los procesos de enseñanza y aprendizaje (figura 1-6):

- el “*saber sabio*” o saber matemático-axiomático, tal como lo produce la comunidad científica;
- el “*saber matemático a enseñar*”, tal como es designado oficialmente por los programas oficiales y materiales didácticos
- el “*saber matemático enseñado*”, tal como es realmente enseñado por los profesores en el aula;

- el “*saber matemático aprendido*” o construido por los alumnos al final del proceso de enseñanza-aprendizaje y que queda disponible para nuevos procesos de estudio.

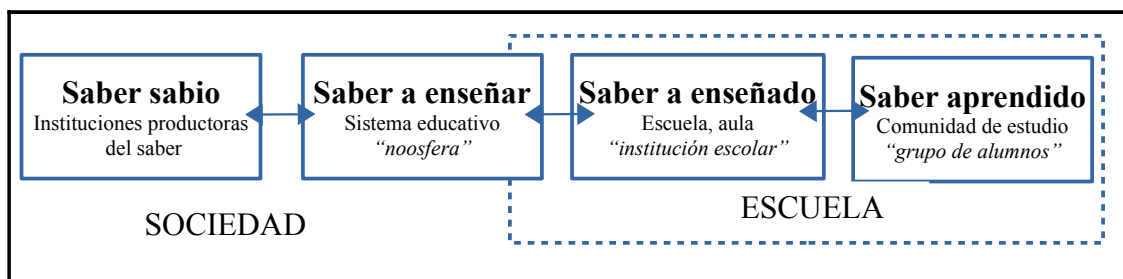


Figura 1-6: Esquema de transposición didáctica de Brousseau según Chevallard (1985)

1.3.1.3. La tabla de datos como instrumento de negociación en la relación didáctica

Tal y como explica Brousseau (1986a), las rupturas del contrato didáctico son propias del proceso de enseñanza-aprendizaje. Por ello la TSD propone actuar sobre la práctica de los profesores a través de la ingeniería didáctica, que marca dichas responsabilidades en el diseño de las situaciones. La ingeniería nos debe facilitar las condiciones favorables para negociar con los alumnos la adquisición de los conocimientos y restablecer el contrato didáctico: modelizando dichos conocimientos matemáticos en juego, teniendo en cuenta a su vez el razonamiento natural o espontáneo de los alumnos. En nuestra problemática, ofreciéndole un espacio al pensamiento natural del alumno en situación escolar. La tabla de datos será el instrumento que nos permitirá hacer funcionar este tipo de razonamiento, modelizando conjuntamente el razonamiento lógico, conceptos elementales de Estadística y el tratamiento de datos, por establecer las responsabilidades del profesor y alumnos respecto al saber matemático en juego. Por tanto formará parte del medio de la situación adidáctica y también de la didáctica.

A través de la tabla de datos, el alumno es capaz de reconocer operaciones ciertas formales y razonamientos que en un principio realiza de forma espontánea. De esta forma el alumno también podrá diferenciar entre sus argumentaciones naturales y los razonamientos lógicos o estadísticos que debe aplicar. En este sentido la tabla de datos se considera como un objeto “*transicional*”, tal y como define Winnicott (1971); es decir, la tabla actúa como un elemento intermediario entre la realidad interna propia del

alumno y el medio exterior. Dicho de otra forma, **es el objeto que permite pasar del pensamiento subjetivo al razonamiento objetivo.**

La tabla es el medio que ya permitió a Orús (1989, 1992) proponer y desarrollar una ingeniería didáctica diseñando una situación fundamental para el aprendizaje de la Lógica y la negociación del razonamiento natural, resolviendo el problema de ruptura de contrato didáctico que provoca la presencia del razonamiento natural en la enseñanza de las Matemáticas. La tabla de datos facilitó a los alumnos la representación de distintos tipos de razonamiento: pensamiento natural, clasificación, lógica, juicios y argumentos, proporcionando un estatus al pensamiento natural.

En resumen, la tabla de datos binarios se convirtió en una referencia formal para el pensamiento natural del alumno y -a su vez- un medio de negociación didáctica para el profesor.

1.3.2. Lógica Formal

El objetivo de esta sección es poner de manifiesto aquellos conceptos fundamentales de la Lógica formal que precisaremos para la elaboración de la propuesta didáctica de nuestro estudio.

Consideramos interesante aportar, en esta sección, cómo ha ido evolucionando la Lógica formal a lo largo de la historia. Blanco (2009, pp.39-53) expone en su tesis la evolución de la Lógica, como ciencia, realizando un recorrido histórico al respecto. Explica que se considera a *Aristóteles* como el fundador de la Lógica como ciencia propiamente dicha, aunque existen aportaciones anteriores al mismo, que prepararon el camino de su obra: *Zenón de Elea*, el cual formuló diversas reglas dialécticas y, especialmente *Platón*, quien consideró la Lógica como una investigación de las leyes universales del pensamiento y de la razón. No obstante estos filósofos no profundizaron en cuestiones lógicas de la misma forma que lo realizó posteriormente Aristóteles. Fue el primero quien sistematizó la Lógica y la concibió como la ciencia de las operaciones del pensamiento y como una disciplina empírica y normativa. Desarrolló de manera amplia la Lógica de clases (silogística) y trató otros tipos de estructuras, por ejemplo las correspondientes a la Lógica modal. Realizaba un planteamiento del método axiomático por primera vez en la Lógica. Blanco (2009) resume las aportaciones que

contribuyen a la evolución de la Lógica en la Edad media, el Renacimiento y la Edad moderna, destacando en esta última a Kant como el pensador que estableció una distinción muy clara entre dos tipos de Lógica:

- **Lógica pura**, que constituiría un canon de corrección de la actividad racional a lo largo del proceso deductivo; hoy en día correspondería con la *Lógica simbólica*
- **Lógica aplicada**, que se ocuparía de las condiciones efectivas, empíricas, del uso de la razón; hoy en día correspondería en la *Psicología del pensamiento o de la inteligencia*.

Blanco (2009), continua explicando que a partir de la segunda mitad del siglo XIX, se producen notables desarrollos en la Lógica simbólica, empezando a ser considerada por algunos como una disciplina puramente deductiva y formal. George Boole (“El análisis matemático de la lógica”, 1847) propone un sistema de carácter algebraico, aplicado en un primer lugar a las relaciones entre clases (“proposiciones primarias”) y, posteriormente extendido a los silogismos hipotéticos y disyuntivos (a los que denomina “proposiciones secundarias”). En el siglo XX ha habido intentos de superar la dicotomía entre los campos, Lógica y Psicología del pensamiento. Piaget (1978) considera que deben mantenerse separados en principio, pues la Lógica formal constituiría una axiomatización (o reconstrucción ideal) de los niveles más elevados a los que pueden llegar los procesos intelectuales, mientras que la Psicología del pensamiento sería una ciencia empírica que investiga cómo se piensa de hecho. Piaget establece que pueden existir conexiones entre las dos disciplinas, especialmente en el caso de los sujetos que (como los lógicos y científicos profesionales) disponen de la estructura de pensamiento conocida como “operacional formal” (Piaget, 1951).

Así pues, en esta tesis utilizaremos el término **Lógica formal** para referirnos a la ciencia que establece las bases del razonamiento y que sirve de fundamento teórico de las Matemáticas y otras ciencias deductivas; “*se trata de una disciplina cuyo objeto es el estudio de los tipos de argumentos lógicos y de su validez*” (Orús, 1992 p. 39).

Chamorro (2005) señalan la diferencia entre la Lógica formal y la lógica del lenguaje natural:

*“En el transcurso del tiempo, múltiples trabajos de filósofos y especialistas en lógica han contribuido a construir un cuerpo teórico denominado **lógica formal** que da cuenta de las leyes del pensamiento humano o pensamiento natural. Los modelos propuestos aportan gran claridad sobre el funcionamiento del pensamiento natural, aunque **existe una gran distancia entre el lenguaje de la lógica formal y la lógica del lenguaje natural**. Por ejemplo, la afirmación de una persona: «Soy un mentiroso», en la lógica formal constituye una paradoja, mientras que en el lenguaje natural es perfectamente admisible”*(Chamorro, 2005. p.104)

Cañadas (2007) expresa la relación entre la Lógica matemática y la Lógica formal:

*“El objeto principal de estudio de la **lógica matemática comprende: lenguaje formal de cálculo, axiomas de cálculo y reglas de deducción**.(...) **Estudia las estructuras formales del razonamiento**, que consiste en una serie de proposiciones o enunciados, normalmente conectados mediante expresiones auxiliares, en el que uno de ellos llamado conclusión se supone que se sigue o infiere de los restantes llamados premisas. **Las reglas de inferencia son expresiones del metalenguaje**, que constituye la lógica, que ayudan a comprobar la validez del conocimiento. Estas reglas son: regla de conjunción, de simplificación, de doble negación, del absurdo, modus ponens, modus tollens, silogismo disyuntivo y silogismo hipotético.(...)”* (Cañadas, 2007, p.37)

Como referencia de los conocimientos teóricos de la Lógica formal que utilizaremos en el diseño de nuestra ingeniería, nos hemos basado fundamentalmente en la teoría lógico-matemática de Suppens (1986), quien afirma que *“la lógica tiene un lenguaje exacto; es algo más que un juego y puede ayudarnos a aprender a razonar de forma exacta y a la vez útil”* (p. 1).

- Definición y simbolización de proposiciones (atómicas, moleculares) y términos de enlace (los conectores negador, conjuntor, disyuntor, condicional y bicondicional).
- Definiciones y formulaciones diversas por implicación: de unas proposiciones iniciales -llamadas *premisas*- se puede llegar a una *conclusión* a través de unas reglas establecidas. Dichas reglas se conocen como *reglas de inferencia* y el

paso lógico de las premisas a la conclusión se conoce como *deducción*. Dicho de otra forma: la conclusión es una consecuencia lógica de las premisas si cada paso lo valida una regla de inferencia.

Por todo ello se define *inferencia* como el proceso de pasar de unas premisas verdaderas a unas conclusiones verdaderas. Se puede expresar de distintas formas:

- La conclusión se deduce de las premisas
 - La conclusión se infiere de (o, es implicada por) las premisas
 - La conclusión se ha derivado de las premisas
 - La conclusión se ha demostrado como consecuencia lógica de las premisas
- Razonamiento y demostración (deducción formal):
- Razonamiento es un conjunto de proposiciones como premisas y una conclusión deducida de ellas. Decir que es válido significa que la conclusión es consecuencia lógica de las premisas.
 - Una deducción formal o demostración es una serie de proposiciones o pasos, en la cual cada paso o es una premisa o está deducido directamente de los pasos que le preceden por medio de una determinada regla de inferencia.
- Certeza y validez: de premisas ciertas se obtienen sólo conclusiones ciertas. Esto es la base de las reglas de inferencia válida. Por lo tanto si se da el caso en el que se ha deducido una conclusión falsa de premisas ciertas se sabe que la inferencia no es válida.

De la certeza funcional de los términos de enlace, depende la certeza de las proposiciones moleculares definidas por los criterios de certeza de los conectores.

- Razonamiento válido: el que llega a conclusiones mediante las demostraciones o deducciones formales.

Además de este tipo de razonamientos, de demostración directa, existen otros medios de demostración indirecta:

- Demostración condicional (CP): si es posible deducir una proposición S a partir de otra, considerada como nueva- R y un conjunto de premisas, entonces se puede deducir que $R \rightarrow S$.
- Contradicción: se produce cuando dos proposiciones no se pueden dar a la vez. También se puede decir que son proposiciones inconsistentes.
- Reducción al absurdo: o demostración indirecta o demostración por contradicción.
- Otras definiciones:
 - Una proposición es una tautología sí y sólo sí permanece cierta para todas las combinaciones de certeza atribuidas a cada una de sus distintas proposiciones atómicas.
 - Una implicación es una condicional tautológica.
 - Para pasar de un razonamiento a una implicación se efectúa la conjunción de todas las premisas que será el antecedente de la condicional, y la conclusión del razonamiento será el consecuente de la misma.
 - Para pasar de una implicación (condicional tautológica) al razonamiento, se escribirá el consecuente como conclusión del razonamiento y las distintas proposiciones cuya conjunción forman el antecedente serán las premisas del razonamiento.
 - En un razonamiento válido, las premisas implican la conclusión (y viceversa), todo ello por ser una condicional tautológica.
 - Ejemplos de tautologías son las reglas de inferencia PP y TT. Se pueden escribir como implicaciones tautológicas: el antecedente como conjunción de las premisas y la conclusión como el consecuente.
 - Dos proposiciones son equivalentes cuando tienen los mismos valores de certeza. Por ello la bicondicional se puede llamar equivalencia, porque en su tabla de verdad ésta sólo es cierta cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de certeza (ambas ciertas o ambas falsas).

1.3.3. Razonamiento desde el punto de vista de la psicología

El razonamiento como uno de los procesos de pensamiento tanto individual como colectivo, se estudia ampliamente desde diferentes disciplinas y enfoques. Podemos citar la antropología y sociología (variables socioculturales que pueden determinar conductas racionales en los sujetos), la economía en su búsqueda de cómo optimizar la toma de decisiones, la educación con sus objetivos para mejorar la habilidad de enseñar a pensar, etc. Pero las dos instituciones, especialmente centradas en el estudio del pensamiento, son la Lógica formal y la Psicología.

Y si la Lógica formal es la institución de referencia para el estudio de los aspectos formales (simbolización y validez) del razonamiento, la Psicología lo es para el estudio del razonamiento en tanto que proceso mental de los sujetos, aunque no sea la única (antropología, sociología).

Desde el dominio de referencia de la Lógica formal ya hemos presentado cómo se entiende el razonamiento, basándose en el estudio formal de las leyes del pensamiento. Esta disciplina tiene carácter prescriptivo, puesto que indica o prescribe cómo debemos pensar, a partir de la información contenida en las premisas previas que se plantean en el proceso de razonamiento⁸. Como hemos presentado previamente, ésta se constituye a partir de un conjunto de reglas formales, que permiten discernir entre argumentos válidos y no válidos. Esta ciencia se remonta a la época de Aristóteles, tal y como hemos expuesto en la evolución histórica de la Lógica formal.

En cambio el objetivo de la Psicología es estudiar cuáles son las estrategias que utilizan los sujetos para elaborar una conclusión, independientemente de si dicha conclusión es válida o no. Por tanto esta disciplina es descriptiva, puesto describe (no prescribe) cómo razona el sujeto, pero no cómo debería hacerlo. Existen diversas investigaciones hasta la actualidad acerca del razonamiento y, aunque la Psicología no es nuestro campo de investigación, necesitamos tener en cuenta diversos conceptos de este dominio de referencia para el razonamiento como proceso del pensamiento.

Cañadas (2007) -quien estudia en profundidad el razonamiento inductivo a través de la resolución de tareas matemáticas en educación secundaria-, ilustra esta necesidad al mostrar cómo se entiende el razonamiento desde el ámbito de la Psicología:

⁸ Ver en la sección anterior cómo se pasa de una implicación a un razonamiento y viceversa.

“El razonamiento es tratado desde la Psicología en la teoría del pensamiento, una rama que se preocupa por el estudio del proceso de inferencias, donde el razonamiento se investiga relacionado con otros aspectos como el aprendizaje, la memoria, la comprensión o el lenguaje (González, 1998). En la teoría del pensamiento, al razonamiento se le pueden asignar procesos de pensamiento diferentes, según sean las proposiciones desde las que se parta, la inferencia que se realice y el objetivo de la misma (Duval, 1999)” (...)
“ En general, cuando los estudios psicológicos tratan el razonamiento deductivo, suelen aparecer experiencias relacionadas con la resolución de problemas y, cuando tratan el razonamiento inductivo, suelen aparecer ligados a la toma de decisiones, a la formación de conceptos, a la adquisición del conocimiento, al aprendizaje o al razonamiento informal (Santamaría, 1998)” (Cañadas, 2007, p. 20 y 42, respectivamente)

Desde el punto de vista de la educación, es imprescindible hacer alusión a dos referencias fundamentales de la Psicología con respecto al razonamiento: Piaget (1978) y Vygotsky (1978):

- Piaget (1978), referente obligado de la concepción constructivista de la enseñanza, que supuso un vuelco a la enseñanza tradicional de la época. Y en particular, fue el referente imprescindible para el cambio en la enseñanza de las Matemáticas, coincidiendo con la aparición de las llamadas Matemáticas modernas. Señalamos que según Piaget (1978), el razonamiento formal empieza a desarrollarse en la etapa evolutiva del sujeto comprendida entre los 12 y 15 años. En esta etapa se desarrolla el periodo de las operaciones formales y por tanto el razonamiento puede llegar a informaciones nuevas, no sólo desde las operaciones concretas o plausibles, sino que el sujeto empieza a ser capaz de deducir conclusiones con la componente de la “abstracción”. Piaget (1978) postula que para que un sujeto produzca un aprendizaje debe previamente haber alcanzado ciertos niveles de desarrollo.
- Vygotsky, con su contribución al estudio de los aprendizajes significativos (1978), afirma -contrariamente- que el desarrollo depende del aprendizaje. Él mismo expresa esta idea de la siguiente forma:

“el aprendizaje organizado se convierte en desarrollo mental y pone en marcha una serie de procesos evolutivos que no podrían darse nunca al margen del aprendizaje (...) Nuestra hipótesis establece la unidad, no la identidad, de los

procesos de aprendizaje y los procesos de desarrollo interno. Ello presupone que los unos se convierten en los otros” (Vygotsky, 1978, p.139).

Por nuestra parte, queremos destacar como referencia a Wermus, discípulo y colaborador de Piaget. Wermus (1976) centra sus estudios en el pensamiento natural de los alumnos. Para modelizar ciertos aspectos de este pensamiento, a partir de su tratado sobre Psicología evolutiva, introduce la noción de *componente contextual* en el funcionamiento de su lógica, concretamente en la utilización y la construcción de predicados lógicos.

Tal y como explican Orús (1992, pp.436-447) y Chamorro (2005, p.p. 122-124) con respecto a los estudios de Wermus (1987), la lógica natural o lógica del pensamiento natural es uno de aspectos fundamentales del sistema cognitivo del sujeto. En esta *lógica natural* se diferencian diferentes niveles, que van desde la *prelógica* del niño hasta la *Lógica formal* del pensamiento natural del adulto. Según Wermus (1987), no se debe confundir *la Lógica formal del pensamiento natural* con la **Lógica formal** axiomatizada que sustenta a toda la Matemática como sistema científico.

Wermus (1987) considera que este tipo de razonamiento está elaborado a partir de una lógica personal basada en los llamados *predicados amalgamados* con componentes contextuales diferentes de los predicados y de las proposiciones de la Lógica formal. Se trata de un tipo de razonamiento que es utilizado habitualmente por los adultos, en particular, por los profesores. Los profesores, en muchas ocasiones, hacen uso de la metáfora o de la analogía, para apoyar sus argumentaciones, sin embargo la metáfora es un tipo de razonamiento muy distante de la Lógica formal y del razonamiento matemático que se debe propiciar en situación escolar.

Desde el punto de vista cognitivo, para un determinado sujeto, en un *predicado amalgamado* los diversos componentes forman un todo no disociado y además el sujeto lo trata como tal. Orús (1992) señala que el modelo de los predicados amalgamados, permite identificar y representar algunos de los aspectos del razonamiento no formal que aparece en la relación didáctica y la observación de sus experimentaciones muestra cómo esta modelización del pensamiento natural sirve para visualizar las diferencias entre el razonamiento natural y el razonamiento formal. Y en este trabajo, seguimos utilizando esta modelización de Wermus, del pensamiento natural, como dominio de referencia para el estudio del razonamiento natural en la relación didáctica.

Los alumnos pueden desarrollar la *descontextualización* progresiva de los diversos componentes que figuran en un predicado amalgamado mediante las operaciones lógicas de *centración* y *decantación*. Entendiendo por *centración*, la acción y efecto que muestra la capacidad del alumno para concentrarse en una sola característica de un objeto; y por *decantación* la acción y efecto que muestra la capacidad del alumno para seleccionar, entre una colección de objetos, aquellos que posean una determinada característica. Los trabajos de investigación realizados por Peres (1984) en la escuela maternal J. Michelet, teniendo en cuenta estas aportaciones de Wermus, muestran como es posible otro acceso a la Lógica en la enseñanza. Nuestro trabajo continua esta línea de investigación de desarrollo de diversos aspectos del razonamiento sin una enseñanza explícita de la Lógica.

A continuación se presenta un ejemplo de predicado amalgamado y otro de los procesos de centración y decantación que Chamorro (2005, pp.122-124) presenta en su libro, "Didáctica de las matemáticas para educación infantil". Pensamos que pueden servir como ejemplos que clarifican estos conceptos. Previamente se define: proposición, proposición lógica, predicado y función lógica, que se utilizan en dichos ejemplos.

*“Expresiones tales como: «¿Hace calor?», «¡Cuánto me gustaría que saliese el sol!», «Cierre la ventana», no son proposiciones. No pueden ser calificadas de verdaderas o falsas, no tiene sentido considerar que el enunciado «¿Hace calor?» sea verdadero o falso. Por el contrario, sí es una **proposición** la expresión «La Luna es un satélite», ya que consiste en la manifestación o declaración de un hecho. Se define una **proposición lógica** como un enunciado declarativo, es decir, un enunciado que puede ser verdadero o falso. Un **predicado** es toda propiedad que caracteriza a un conjunto: «Es menor que 5», «Es una ciudad costera», «Es mayor de 18 años», etc*

*Una **función lógica**, denotada por $p(x)$ y definida sobre un conjunto A , es una expresión que se convierte en una proposición lógica al sustituir x por un elemento cualquiera de A . $p(x)$: x es una ciudad costera / si $x \in A = \{\text{Ciudades de la Península Ibérica}\}$*

$p(\text{Cáceres})$: Cáceres es una ciudad costera \rightarrow es una proposición falsa.

$p(\text{Lisboa})$: Lisboa es una ciudad costera \rightarrow es una proposición verdadera.

El conjunto formado por las ciudades de A para las cuales es verdadera $p(x)$ se denomina conjunto de validez de $p(x)$.”

“Para acercarnos mejor al pensamiento natural de los niños, veamos el ejemplo que Wermus (1987)

propone en relación con la representación que estos se hacen de las aves, animales que conocen desde muy pequeños (también aparece en Orus 1992, p.440). Este investigador asegura que el predicado $p(x)$: x es una ave, en los niños, es una amalgama de múltiples componentes contextuales, más o menos indisociadas en su pensamiento, tales como

p_1 : x tiene alas y puede volar; p_2 : x tiene pico; p_3 : x tiene plumas; p_4 : x es ligera como el aire; p_5 : x anida en los árboles....; p_k : x tiene dos patas.

Si nos detenemos, por ejemplo, en el componente p_4 , de él podríamos aún derivar otros predicados: p_{41} : x es ligera y salta de una rama a otra de los árboles, p_{42} : x es ligera y vuela muy alto, aún más alto que los más altos edificios.

La secuencia configurada por diferentes componentes, la podemos representar como sigue: $p(x) = \{p_1, \dots, p_5, (p_{41}, p_{42}), p_3, p_2, p_1\} (x)$.

Cada componente está ligado a contextos en los cuales los niños han mantenido experiencias con aves. El conjunto formado por todas ellas constituye un «predicado amalgamado» (PA) que simboliza la representación del concepto «ave».

Cabe señalar que un pavo (o una avestruz) no sería clasificado por el niño como ave, porque no responde al predicado p_4 , ya que ambos serían juzgados como animales muy pesados, que no pueden volar. En los niños, la comprensión del concepto «ave» está caracterizada por una amalgama indisociable de componentes. El término predicado amalgamado especifica el hecho de que los diversos componentes no están relacionados unos con otros por medio de la conjunción «y», sino que los niños los manipulan, los valoran y los ponen en funcionamiento como un todo indisociable”

“Ejemplo 4: Procesos lógicos de centración y decantación

Para comprender mejor los procesos de centración y decantación nos vamos a ubicar en la situación: «El juego del tesoro». Proponemos una situación de formulación entre dos niños: un emisor y un receptor.

Material: 12 objetos del tesoro (debe contener al menos 4 o 5 objetos cuya forma sea homogénea).

Consigna:

El emisor debe elegir un objeto del tesoro (sin que lo vea el receptor) y debe hacer su designación gráfica en un papel. El receptor, solo con la lectura de esta designación, debe identificar correctamente, entre los 12 objetos del tesoro, el que ha designado el emisor.

Supongamos que el emisor ha elegido la «pelota pequeña de goma roja con cascabel». Su primera designación fue el dibujo de un objeto redondo. Como el receptor le exigía más información, dado que en el tesoro había muchos objetos «redondos», el emisor, enriqueció su codificación inicial (y lo

pintó por dentro de rojo).

El análisis de las actividades lógicas que ponen en funcionamiento estos niños nos informa de que:

- *El emisor, que lleva a cabo la descripción de un objeto oculto para el receptor, opera **centraciones** sucesivas para determinar las características del objeto. Para este sujeto, designar lo mejor posible un objeto implica retener una característica e identificarla con un signo, después identificar una segunda característica y asociarle otro signo, y así sucesivamente hasta caracterizar gráficamente al objeto con tal singularidad que permita distinguirlo de los demás.*
- *El receptor, por el contrario, para seleccionar un objeto, entre todos los de una colección, basándose únicamente en el mensaje gráfico del emisor; debe seguir un proceso de **decantación** de objetos, explorando la colección. Por ejemplo, para el caso anterior; el receptor debe decantar, entre todos los objetos de la colección, solo los objetos redondos, eliminando todos los demás. Posteriormente, entre todos los redondos, deberá eliminar aquellos que no sean rojos, y entre estos últimos, desechará los que no sean de goma, etc”*
Chamorro (2005, pp.122-124)

Figura 1-7: Ejemplo de predicado amalgamado y de las operaciones de centración y decantación

En el área de las Matemáticas se trata de desarrollar el **razonamiento matemático**, y este objetivo se aborda desde distintas vías. A través de la argumentación, de la deducción y de la demostración, íntimamente relacionadas con la Lógica formal. En esta sección queremos señalar como referentes en DM los trabajos de Balacheff (1988, 2000a) y Duval (1993, 1999), quienes en un principio definen razonamiento de forma complementaria:

*“... utilizaremos la palabra **razonamiento** para designar la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información. Le asignaremos el término procesos de validación a esta misma actividad cuando tenga como fin asegurarse de la validez de una proposición y, eventualmente, producir una explicación (una prueba o una demostración). Raymond Duval ha escogido la otra alternativa complementaria. Para él, el razonamiento designa la explicitación verbal y simbólica dentro de un discurso (Duval y Egret, 1993)”.*
(Balacheff, 2000a p 13-14)

En terminología de Orús (1992), el razonamiento al que se refiere Duval sería el razonamiento-formulación, mientras que Balacheff alude al razonamiento proceso mental ligado al razonamiento-acción y por otro lado al razonamiento-validación.

En cuanto a la argumentación, demostración y deducción, estos autores han realizado diversos estudios al respecto:

- Duval (1999) entiende que en la demostración entra en juego el papel de la validez de las proposiciones que forman parte del razonamiento que se pretende realizar, por tanto la leyes lógicas que rigen una deducción. Es decir, en la demostración es imprescindible el uso de la deducción, y en este caso, Balacheff (1999) considera sinónimos estos dos términos.
- Respecto a la argumentación, ambos autores apuntan -de forma similar- que se utilizan razonamientos para validar enunciados con el fin de llegar al convencimiento del interlocutor o de sí mismos, en términos de pertinencia.
- Ambos autores hacen diferenciación entre los conceptos de argumentación y demostración analizándolos en profundidad. Otros investigadores que se basan en estos estudios (Codina y Lupiañez, 1999; Dueñas, 2010) hacen la distinción entre estos términos de la siguiente forma:

Codina y Lupiañez (1999) distinguen entre argumentación y demostración, indicando que en el primer caso sólo se exigen en el razonamiento vínculos de pertinencia y en la demostración se exigen criterios de validez:

*“Una **argumentación no es una demostración**, están separadas por vínculos de organización; para que **un razonamiento sea considerado una demostración**, éste debe de **ser válido** (tener vínculos de validez) y tener como objetivo la verdad, mientras que la **argumentación es un razonamiento que obedece a vínculos de pertinencia**, tiene como objetivo lo creíble y el convencimiento de los demás o de sí mismo, siendo por tanto más cercano a las prácticas discursivas espontáneas.”*(Codina y Lupiañez, 1999, p. 6).

Dueñas (2010) señala la diferencia entre argumentar y demostrar, aludiendo también a criterios de pertinencia en el caso de la argumentación y criterios de verdad desde la Lógica, en el caso de la demostración:

“En el razonamiento se conciben criterios de validez sobre los que descansa la diferenciación entre argumentar y demostrar, pues en la primera solo es posible hablar de criterios de pertinencia, mientras que en el segundo caso se tiene todo un bagaje teórico expresado por medio del valor epistémico, es necesario recalcar que cada uno por su parte busca acciones o situaciones distintas en tanto la argumentación solo busca lo creíble de las leyes de la coherencia, la demostración busca la verdad desde las leyes de la lógica generándose en esta última, un razonamiento de carácter deductivo, cuyas conclusiones serán absolutas pues parten de una regla de implicación estática que se mueve dentro de los pasajes de la deducción establecidos para este caso desde el estatuto operatorio, descrito anteriormente y de forma indisoluble con el estatuto teórico requerido. “ (Dueñas, 2010, p.2)

Por último aportamos otra referencia con respecto al razonamiento matemático según la investigación llevada a cabo por Cañadas (2007) en su tesis sobre el razonamiento inductivo. Menciona a Pólya (1966) como referente obligado por sus obras sobre razonamiento plausible y resolución de problemas:

“Pólya considera dos tipos de razonamientos asociados al trabajo matemático en general y a la resolución de problemas, en particular: el razonamiento demostrativo y el razonamiento plausible. El primero asegura el conocimiento matemático y el segundo permite apoyar las conjeturas que se formulan. El razonamiento demostrativo es seguro, definitivo, está más allá de toda controversia y tiene modelos rígidos, codificados y aclarados por la lógica, que es la teoría del razonamiento demostrativo. El razonamiento plausible es azaroso, discutible, provisional y es la única clase de razonamiento que se utiliza en la vida cotidiana. Ambos tipos de razonamiento se complementan el uno al otro y mientras que aseguramos nuestro conocimiento matemático mediante el razonamiento demostrativo, apoyamos nuestras conjeturas por medio del razonamiento plausible”. (Cañadas, 2007, p.53).

A partir de las distintas aportaciones podemos identificar el *razonamiento matemático* como el razonamiento que se rige por las leyes de la Lógica formal, puesto que es este dominio quien sustenta a las Matemáticas como disciplina científica. Asimismo se debe tener en cuenta, tal y como describen Balacheff (2000a), Duval (1999), Brousseau (1983) y Orús (1992), que en la relación didáctica, cuando se apela al uso del razonamiento matemático también surge inevitablemente el razonamiento natural del alumno.

En las investigaciones mencionadas, se identifican diferentes tipos de conocimientos relativos al razonamiento, conocimientos no explícitos en el currículum de las Matemáticas, pero que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Chevallard (1985) les denomina *conocimientos protomatemáticos y paramatemáticos*, Brousseau (1983) los identifica como un *obstáculo* para construir los conocimientos curriculares matemáticos (no son objeto de enseñanza explícita pero sí necesarios para la construcción o utilización de los conocimientos matemáticos en juego). El estudio de *la frontera entre estos dos tipos de conocimientos es objeto de estudio* en el ámbito de la DM, el caso de las tesis de Briand, (1993) sobre *los procesos de enumeración en el aprendizaje del número*, de Berthelot y Salin (1992) sobre *el dominio del espacio para el aprendizaje de la geometría* y de Orús (1992) sobre *la lógica y el tratamiento de datos* son ejemplo del planteamiento de esta problemática (Orús, 1999). Nosotros escogemos esta última como investigación de referencia para darle continuidad utilizando también el razonamiento lógico y el tratamiento de datos, dándole cabida a la introducción del razonamiento estadístico, aunque a nivel elemental.

1.3.4. Inteligencia artificial

Queremos citar otro dominio de referencia para estudiar el razonamiento, la Inteligencia artificial (IA) que en sus inicios aparece como el área multidisciplinar cuyo objetivo es diseñar y crear máquinas que sean capaces de razonar de forma autónoma (Haton, 1993). Esta disciplina se apoya en otras ciencias indispensables para su desarrollo, tales como la informática, la Lógica, psicología, lingüística, la filosofía...

Según Haton (1993) su definición ha llevado a numerosas confusiones e interpretaciones erróneas. Este autor la define bajo dos puntos de vista complementarios (p.3):

- a nivel cognitivo, como el estudio de mecanismos de inteligencia usando el ordenador como medio de simulación para testar un modelo o teoría.
- el otro, más pragmático, concierne al hecho de atribuir o dotar a un ordenador de capacidades que habitualmente se atribuyen a la inteligencia humana: adquisición de conocimiento, percepciones (visión/ audición), razonamiento, toma de decisiones, etc...

Ya los griegos pretendían o hacían intentos de construir máquinas que pudieran reproducir algunas destrezas o habilidades humanas. Pero la IA fue introducida -aunque no conocida con éste término- a la comunidad científica en 1950 por el inglés Alan Turing en su artículo "Computing machinery and Intelligence" (Turing, 1950). A pesar de que la investigación sobre el diseño y creación de las computadoras comenzó con anterioridad, Turing fue quien cautivó la atención de los científicos con la idea de una máquina inteligente y marcó claramente el inicio de una etapa de debate e interacción entre la IA y la Psicología.

Turing y Shannon son considerados como los pioneros de la informática, junto a von Neumann. Sus contribuciones han sido muy importantes en el ámbito de la IA y la evolución de sus estudios o descubrimientos han repercutido muy positivamente en los avances que actualmente nos pueden resultar tan beneficiosos. Así lo manifiesta Huget (2013) en su artículo "El año de Turing", dedicado a los impulsores de la IA:

"La informática a la que recurrimos para tuitear o hacernos una resonancia magnética es en esencia Alan Turing, uno de los científicos más importantes de la Historia. (...) Matemáticos, los tres; Turing y von Neumann pusieron las bases para el desarrollo del ordenador y Shannon las de las tecnologías de la información. (...) hay que resaltar que las líneas de investigación seguidas por Turing y Shannon han sido increíblemente productivas. Las de Turing más pragmáticas al estar preocupado por la calculabilidad y las de Shannon más teóricas reflejadas en su teoría de la información y las comunicaciones (...). Sin sus contribuciones hoy no conoceríamos las potencialidades de los dispositivos digitales que nos rodean: teléfono, tabletas, ordenadores..., ni siquiera Internet y nuestro mundo sería totalmente diferente, tanto que se me hace imposible imaginarlo." (Huget, 2013)

La Teoría de la comunicación fue desarrollada inicialmente, en 1948, por Shannon. Esta ciencia está relacionada con la leyes matemáticas que rige la transmisión y procesamiento de la información. Fue este investigador quien vislumbró la necesidad de una base teórica para la tecnología de la comunicación debido al aumento de la complejidad y de la masificación de las vías de comunicación en esa época (telégrafo, teléfono, radio, etc...). Demostró que todas las fuentes de información se pueden medir y que los canales de comunicación tienen una unidad de medida similar. Shannon inició la investigación en la llamada Teoría Matemática de la Comunicación (así le

llamó en su primer trabajo) y con ello abrió un nuevo campo científico que tiene una clara conexión con las Matemáticas.

Hubo más seguidores en los estudios iniciados por Turing y Shannon (von Neumann, McCulloch, Minsky, Newell, Shaw, y Simon -quienes crean "The Logic Theorist" para la resolución de problemas matemáticos-). Pero cabe destacar que el evento que impulsó al desarrollo de la IA fue el congreso organizado en Dartmouth (EEUU, 1956) en el que se reunieron los padres fundadores de la disciplina (John McCarthy, Marvin Minsky, Claude Shannon...). En él fue donde surgió o nació el nombre de Inteligencia Artificial⁹.

Esta ciencia ha ido evolucionando a lo largo de la historia, avanzando en este campo y hoy día creando máquinas capaces de casi todo: desarrollar un programa para la lectura de oraciones en inglés y la inferencia de conclusiones a partir de su interpretación (finales de los 50 y comienzos de la década del 60, Robert K. Lindsay, desarrolla "Sad Sam"), desarrollar redes semánticas como modelo de representación del conocimiento (1963, Quillian), inferir conocimiento basado en información que se le suministra (1964, Bertrand Raphael, sistema SIR (Semantic Information Retrieval), desarrollar el lenguaje de programación LOGO (1968, Seymour Papert, Danny Bobrow y Wally Feurzeig), crear PROLOG, un lenguaje de programación ampliamente utilizado en IA (del francés PROgrammation en LOGique), investigar en redes neuronales (1986, McClelland y Rumelhart), detectar emociones para poder interactuar con niños autistas (2009, desarrollo sistemas inteligentes terapéuticos)...

También se puede decir que el campo interdisciplinar de la IA, ofrece aportaciones a distintas disciplinas como la Neurología, Lógica, Psicología Cognitiva, Informática (Cibernética), Filosofía, Lingüística,... y como no las Matemáticas, recurriendo a su vez a ella para seguir desarrollándose.

Así lo manifiesta Haton (1993):

“Enfin, l'IA est par essence pluridisciplinaire. La réalisation d'un système fait largement appel aux techniques avancées de l'informatique (ses besoins spécifiques ont même nécessité le développement de langages et de machines propres. Par ailleurs, l'IA est devenue une discipline à part entière, enseignée dans les universités et les écoles). Mais l'IA puise également ses sources dans d'autres disciplines: logique et psychologie cognitive

⁹ Algunos de estos datos son extraídos de "Intelligence Artificielle". Haton, J-P (1993, pp 3-5)

(pour les fondements de la représentation des connaissances et du raisonnement), linguistique (pour le traitement du langage naturel écrit et parlé), ergonomie, philosophie et sans doute un jour neurosciences et biologie” (Haton, 1993, p. 9).

La IA en la actualidad es una especialidad dentro de las C.C. de la Computación, en el ámbito de la Informática. Su objetivo es modelizar el razonamiento natural e implementarlo a una máquina, puesto que uno de los principales objetivos de los investigadores en IA es la reproducción automática del razonamiento humano.

Queremos resaltar esta idea relacionada con nuestra investigación: la IA usa - de forma indispensable- el soporte normativo de la Lógica formal y es en base a las operaciones de la Lógica formal, como la IA a partir de una información dada, puede llegar a otra nueva. Es decir, modeliza y automatiza el proceso de razonamiento a partir de las reglas de la Lógica formal y de la inferencia.

Sin embargo, una de las cuestiones más difíciles de conseguir en el campo de la IA es que una máquina sea capaz de reproducir el lenguaje natural del ser humano, puesto que en este caso no sólo se trata de la traducción palabra a palabra, sino que entra en juego el razonamiento: léxico, semántica, sintaxis...

*“2. **Traitement du langage naturel écrit:** pouvoir s'adresser à une machine en langage naturel présenterait un intérêt considérable, en particulier pour des applications grand public à la disposition d'utilisateurs non informaticiens. ... Les premiers échecs en traduction automatique ont mis en évidence que ni la traductions mot a mot ni l'analyse grammaticale de la structure de phrase en sont suffisantes pour comprendre le langage naturel: il faut en réalité mettre en jeu un processus de raisonnement faisant intervenir des informations et des connaissances nombreuses et variées sur la langue, le contexte, les interlocuteurs, etc. (lexique, syntaxe, sémantique, pragmatique” (Haton , 1993, p. 10)*

Este autor señala el papel de otros dominios de referencia del razonamiento-formulación (Orús, 1992), como son la sintaxis, la semántica, la pragmática y otros (ver figura 1-2, sobre las instituciones de referencia para el razonamiento).

Balacheff (1994, 2000b) señala esta complejidad que la IA tiene en sí misma y que introduce en la investigación en Educación matemática, añadiendo el concepto de transposición computacional¹⁰. En esta investigación, el autor explica que la Ciencia de

¹⁰ Balacheff explica este término como el proceso que conduce a la especificación y posterior puesta en práctica de un modelo de conocimiento. La *transposición computacional* se refiere al trabajo

la computación se desarrolló inicialmente a partir del problema del tratamiento automático de la información, teniendo en cuenta su forma, independientemente de su significado. En cambio, a principios de los años setenta, con el desarrollo de la IA se tomó conciencia de la necesidad de tener en cuenta el significado, en particular cuando lo que está en juego es la interacción entre las máquinas y los seres humanos (Balacheff, 2000b, pp.93-94). Concluye que la comunidad investigadora avanza en algunas cuestiones en el campo del diseño e implementación de entornos informáticos de enseñanza-aprendizaje, aunque manifiesta la inquietud acerca de cuestiones por investigar, atribuyendo tal dificultad a la posible falta de vínculos sólidos entre investigadores en educación matemática y científicos computacionales. El autor aclara que la introducción del software educativo hace que la situación de enseñanza-aprendizaje sea más compleja desde el punto de vista didáctico, puesto que un sistema informático es la materialización de una tecnología simbólica y por lo tanto existe una modificación del objeto de enseñanza, como resultado del proceso de transposición computacional (Balacheff, 2000b, p. 106).

1.4. Antecedentes en investigación del tratamiento de datos en Didáctica de las Matemáticas

Presentaremos en esta sección diversas investigaciones, en el marco de la DM, relacionadas con el tratamiento de la información, considerado como tratamiento de datos.

Por una parte mencionamos diversos trabajos que están directamente ligados a nuestro tema desde el punto de vista de la educación primaria/secundaria. En segundo lugar presentamos la importancia de las investigaciones llevadas a cabo por Batanero (y su equipo de investigación); éstas cobran importante relevancia en relación al tratamiento de datos y Estadística en situación escolar. Para cerrar el apartado citaremos las investigaciones con respecto al tratamiento de datos realizadas en el campo específico de la TSD.

necesario para cumplir los requisitos de representación simbólica y de computación (2000b. p.100)

1.4.1. En relación a la educación primaria y secundaria

Citamos a continuación algunos trabajos que recalcan diversos aspectos a considerar en educación obligatoria respecto al tratamiento de datos.

Curcio fue uno de los primeros que mostró su interés por el tratamiento de datos en situación escolar, como ya hemos mencionado. Este autor estudió en una de sus investigaciones, con alumnos de la etapa de educación primaria (4º y 7º). En este análisis concluyó que las principales dificultades aparecen en la comprensión de los gráficos; en concreto en “leer dentro de los datos” y “leer más allá de los datos”. También explicaba cómo influye la edad y el curso escolar sobre la comprensión de los gráficos (Curcio, 1987, 1989). Distingue tres niveles distintos de comprensión de los gráficos. En primer lugar corresponde al de “leer los datos”, en el que sólo se requiere una lectura literal del gráfico -sin interpretar la información contenida en el mismo-. En segundo lugar ya se requiere la interpretación e integración de los datos en el gráfico, siendo la fase de “leer dentro de los datos”. Y por último el nivel de “leer más allá de los datos” en el que el lector debe realizar predicciones e inferencias a partir de los datos sobre informaciones implícitas del gráfico.

El artículo de Sanz (1995) que aparece en la monografía de la revista UNO de DM dedicada a los “*Procedimientos en Matemáticas*”, particulariza el análisis de los procedimientos en el tratamiento de la información. Esta monografía trata el tema de los procedimientos en general, porque en la reforma de los programas curriculares de la LOGSE (a partir de 1990), apareció la estructura de los contenidos divididos en tres categorías: *conceptos* (hechos y principios); *procedimientos* y *valores* (normas y actitudes). Esta autora explica en su artículo que una de las razones por las que se introducen los procedimientos es que éstos favorecen la construcción de los aprendizajes significativos en la relación didáctica. Argumenta que los procedimientos siempre han estado presentes en el quehacer matemático escolar, pero centrados en procedimientos algorítmicos, como un conjunto de pasos para llegar a un resultado preciso; por lo que plantea la elaboración de procedimientos que tiendan a la innovación (invención o investigación). Sanz analiza en concreto dos grupos básicos de procedimientos en contexto escolar: los de extracción de información (de un mundo genérico o de un mundo de datos ya elaborados) y los de elaboración de información.

Así pues esta autora pone de manifiesto la importancia de los procedimientos en el contexto del tratamiento de la información.

“*El juego de las ranas*” presentado por los autores Alfonso y Gracia (1995) es un ejemplo práctico de actividad que permite la codificación, organización de la información, generalización y demostración de conjeturas planteadas. Se trata de un material didáctico aplicable a alumnos de secundaria como un juego práctico e interesante por estar relacionado con el tratamiento de datos, y a su vez, porque aporta una propuesta didáctica innovadora para la práctica docente, trabajando aspectos del razonamiento formal a través del tratamiento de los datos.

En la monografía “Tratamiento de la información” de la revista de DM, UNO (nº 20, 1999), señalan diversos aspectos a tener en cuenta para incorporar este ámbito de conocimiento a la enseñanza secundaria.

S. Guerrero (1999) presenta en la introducción de esta monografía las distintas investigaciones de los autores, Guerrero, Baena, Domínguez, y Recio, quienes manifiestan el interés que aporta este tema y las implicaciones que tiene el mismo con respecto a la enseñanza secundaria:

- En el artículo “*Sistemas de datos en el currículum*”, Baena (1999) presenta la Estadística como una metodología que parte de los fenómenos básicos -los datos originados directamente a partir de situaciones contextuales- para que el alumno capte el sentido estadístico de la información, la necesidad de este tratamiento. Este autor remarca la importancia que debe tener la introducción del tratamiento de los datos en los currículos de las Matemáticas y explica que la organización de los datos se integraría dentro de las Matemáticas a través de los siguientes contenidos (pp. 13-14): preguntas y problemas que se resuelven con un estudio estadístico; asignación de atributos; determinación de variables y categorías; búsqueda de información; consulta de fuentes; estrategias de recuento; tabulación; organización y estructuración de datos; tablas y bases de datos; ordenación y clasificación; diseño de encuestas; obtención de datos de forma individual y colectiva utilizando diferentes fuentes y recursos; organización y estructuración de datos utilizando diferentes estrategias de recuento; usos e interpretación crítica del lenguaje de las tablas y las gráficas estadísticas; elección, cálculo e interpretación de parámetros centrales y de

dispersión; valoración de la incidencia de medios tecnológicos en el tratamiento y representación de la información; investigación de fenómenos aleatorios y relaciones entre magnitudes, formulación y comprobación de conjeturas; utilización de la probabilidad para detectar errores en la interpretación del azar y para tomar decisiones en distintas situaciones; interpretación de datos relativos a una muestra estadística teniendo en cuenta su representatividad.

Baena (1999) pone de manifiesto la importancia que se le debería atribuir a la enseñanza del tratamiento de la información, y en particular al manejo de sistemas de datos (sobre todo datos que no sean organizados de antemano, sino originados por el propio interés del alumnado):

“Los conceptos y procedimientos matemáticos implicados en el tratamiento de la información, y en particular en la construcción y manejo de sistemas de datos, son conocimientos relevantes y prioritarios en la formación matemática elemental. Pero difícilmente se generaliza en la práctica aquello que no cabe en los libros (para enseñarlo) y lo que no cabe en los exámenes para evaluarlo. Clasificar, etiquetar, fichar, reducir datos, separar unidades, establecer sistemas de categorías, construir tablas, diseñar encuestas, elaborar cuestionarios, acceder a la información usando diversas fuentes de datos (incluyendo las informáticas), construir y manejar bancos y bases de datos son saberes que ni caben en los libros de texto ni sus niveles de conocimiento pueden entrar en un examen....Me conformo con que alguna de las propuestas o preguntas anteriores pueda contribuir a generar opinión sobre el tema, aumentando el interés por llevar a clase situaciones que den verdadero sentido a la investigación, o a suavizar el afán de trabajar la estadística partiendo de datos que se dan organizados de antemano.” (Baena, 1999, p.24).

Queremos señalar que Baena (1999) señala que los procedimientos y conceptos matemáticos implicados en el tratamiento de la información, siendo prioritarios en la formación matemática elemental, son saberes que *“ni caben en los libros de texto, ni sus niveles de conocimiento pueden entrar en un examen”*... Entre ellos cita *“clasificar”*, *“acceder a la información usando diversas fuentes de datos”*... ambas son una actividad mental a la vez que científica, que genera nuevos conocimientos a partir de la organización de datos o informaciones ya existentes. Podríamos considerar sus declaraciones como un ejemplo de la paradoja que Orús (1992) apunta en su tesis, respecto al estatus que el razonamiento tiene en clase de Matemáticas: es fundamental

en la formación matemática, pero no tiene lugar en la relación didáctica al no existir en el currículum, no existe en los libros, no puede ser evaluado...

- Domínguez (1999) presenta en su trabajo: *“Información y análisis exploratorio de datos”*, una introducción de las ideas básicas del Análisis exploratorio de datos (introducida por Tukey, 1970) mediante unos ejemplos que permiten comprender sus métodos de trabajo. En este estudio el autor explica que con la aparición de este método de análisis de datos, la tendencia al cálculo estadístico empieza a tener fisuras.

“La tendencia al cálculo estadístico ... empieza a tener fisuras en su planteamiento con la aparición del Análisis Exploratorio de Datos que presenta Tukey en la década de los setenta. Según esta perspectiva, el propio análisis de los datos es el que va a generar el modelo estadístico adecuado, y la representación gráfica de esos datos puede darnos mucha más información sobre ellos que el solo cálculo de los parámetros o elementos representativos de la distribución” (S. Guerrero, pp.6-7).

- Guerrero, C. (1999) en *“La importancia de la información a priori”*, pone de manifiesto la necesidad de analizar y contrastar la información a priori y la a posteriori obtenida de los datos estudiados. El autor explica en su trabajo cómo decidir si se debe desechar o no la información a priori para tomar como definitiva la información a posteriori.

Compartimos la importancia de los análisis a priori como método de tratamiento de datos porque aumenta y valida la información de los análisis a posteriori. Ya hemos comentado en nuestra metodología la utilización de este tipo de análisis para los datos de nuestra experimentación.

- Por último la investigación de Recio (1999), *“Tratamiento automático de la información geométrica”*, presenta ejemplos donde el tratamiento automático de la información es posible, avanzando el impacto que puede generar todo ello en la enseñanza de las Matemáticas, en el sentido que apuntaba Balacheff (2000b) (ver sección de la IA).

1.4.2. En Educación Estadística

Batanero et al. (1991) definen o consideran la Estadística como una disciplina caracterizada por sus diferentes facetas: como ciencia, como herramienta de investigación en otras áreas, como campo de investigación didáctica (tanto para la formación de los estudiantes como para la formación de profesionales/ profesores/ investigadores (pp 1-2)).

Según Batanero y Godino (2001b), los orígenes de la Estadística son muy antiguos, puesto que desde las civilizaciones china, sumeria y egipcia. (aproximadamente 1000 años a.C.) se han encontrado pruebas de recogida de datos sobre población, bienes y producción. La Estadística ha tenido un evolución histórica a lo largo del tiempo, poco a poco se fueron creando sociedades y oficinas estadísticas para organizar la recogida de datos estadísticos; la primera de ellas en Francia en 1800. Como consecuencia, fue posible comparar las estadísticas entre los países para determinar los factores determinantes del crecimiento económico y se realizaban congresos internacionales, con el fin de homogeneizar los métodos que se utilizaban. El primero de ellos fue organizado por Quetelet en Bruselas en 1853.

En 1885 se creó el Instituto Internacional de Estadística (ISI) que, desde entonces celebra reuniones bianuales. La finalidad de esta sociedad era conseguir la uniformidad en los métodos de recopilación y abstracción de resultados e invitar a los gobiernos al uso correcto de la Estadística en la solución de los problemas políticos y sociales. En la actualidad el ISI cuenta con 5 secciones, una de las cuales, la IASE, fundada en 1991, se dedica a la promoción de la **Educación Estadística**.

Batanero y Godino (2001b) aclaran que el concepto que se tenía de la Estadística en sus orígenes difiere bastante del que cobra en la actualidad. En el momento de su fundación se definió la Estadística como *"conjunto de hechos, en relación con el hombre, susceptibles de ser expresados en números, y lo suficiente numerosos para ser representados por leyes"*. Pero hasta muy recientemente, la Estadística no adquiere la categoría de "ciencia" -aseguran los autores-.

Batanero (1995 y 2000b) expone que, según el profesor Vere Jones (presidente del IASE), la Estadística se estaba consolidando -desde la década de los ochenta- como disciplina o ciencia, incluyéndose en las especialidades de las universidades, en la

enseñanza primaria y secundaria, en la creación de revistas y asociaciones etc. Esto nos muestra que, desde estos años se estaba trabajando por la institucionalización de la Educación Estadística como una disciplina dentro de la DM.

“Recientemente la estadística se ha incorporado, en forma generalizada, al currículo de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria y de las diferentes especialidades universitarias en la mayoría de países desarrollados. Las razones de este interés hacia la enseñanza de la estadística han sido repetidamente señaladas por diversos autores, desde comienzos de la década de los ochenta....(...) La educación estadística ha sido una preocupación crucial del Instituto Internacional de Estadística (ISI) desde su fundación en 1885, que se concretó oficialmente en 1948 en el establecimiento del Comité de Educación, encargado de promover la formación estadística, colaborando, para este fin, con la UNESCO y otros organismos internacionales, y marcando el comienzo de un programa sistemático de apoyo a la educación (Vere-Jones, 1997) (...) El interés por la enseñanza de la estadística, dentro de la Educación Matemática, viene ligado al rápido desarrollo de la estadística como ciencia y como útil en la investigación, la técnica y la vida profesional, impulsado notablemente por la difusión de los ordenadores y el crecimiento espectacular de la potencia y rapidez de cálculo de los mismos, así como por las posibilidades de comunicación. (...) Es indiscutible que el siglo XX ha sido el siglo de la estadística, que ha pasado a considerarse una de las ciencias metodológicas fundamentales y base del método científico experimental. La enseñanza de la estadística, sin embargo, aún se encuentra en sus comienzos, aunque como hemos descrito parece avanzar de una forma imparable”. (Batanero, 2000b. p.1, p.2, p.6 y p.11).

Batanero y Godino (2005) ponen de manifiesto la evolución de esta disciplina y explican la preocupación de cómo ha ido desarrollándose tanto como ciencia como a nivel didáctico. Presentan las dificultades que se van encontrando los profesores a la hora de gestionar con los estudiantes los contenidos estadísticos relacionados con el tratamiento de la información:

“(...) ha habido un aumento notable del uso de ideas estadísticas en diferentes disciplinas, que se observa en las revistas científicas y en la creciente implicación de los estadísticos en los equipos de trabajo interdisciplinario. Sin embargo, en la reciente conferencia organizada por IASE sobre la formación de investigadores (Batanero, 2001) se puso de manifiesto que la estadística se usa incorrectamente, no se comprenden conceptos aparentemente elementales y no hay una valoración suficiente del trabajo del

estadístico, dentro de los equipos de investigación. Pensamos que esto indica la existencia de una problemática educativa que tiene su raíz en que la incorporación de la estadística desde la escuela, no es todavía un hecho” (Batanero y Godino, 2005. pp. 12-13)

Batanero (2000a) expresa las dificultades que manifiestan los alumnos en el tratamiento de datos a nivel universitario, pese a introducirse en la educación secundaria:

“La mayor parte de las escuelas secundarias incluyen ahora el análisis de datos, la probabilidad y la inferencia en el currículo de matemáticas. Sin embargo, muchos de estos estudiantes, así como los estudiantes de los cursos de introducción a la estadística en la universidad no poseen un bagaje matemático suficiente para un estudio formal de los temas de probabilidad e inferencia estadística (...) El razonamiento sobre los datos ha sido difícil de estudiar porque los materiales curriculares y las estrategias curriculares han sido históricamente bastante limitadas, de modo que los estudiantes no han tenido buenas oportunidades de aprender a razonar sobre los datos” (Batanero, 2000a p. 3 y p. 7).

Batanero (2000b, 2001a), Batanero y Godino (2005) y Rodríguez y Batista (2013) hacen referencia al avance tecnológico que sufre nuestra sociedad en la creciente “era de la información”, asegurando que éste influye en continua expansión y cambio de la Estadística. Esto la convierte en una ciencia interdisciplinar puesto que debe dar respuesta a problemáticas planteadas en distintas áreas. Por ello dicen que la Estadística se puede entender como “ciencia de los datos”¹¹, útil para múltiples tareas en diversos ámbitos de la sociedad, la investigación, la técnica y la vida profesional:

“,el interés por investigar su enseñanza, dentro de la educación matemática, está ligado al rápido desarrollo de la estadística como ciencia y como herramienta útil para la investigación, la técnica y la vida profesional, impulsado por la difusión de los ordenadores, el crecimiento de su potencia y rapidez de cálculo y las posibilidades de comunicación de los resultados. Al mismo tiempo, la estadística atraviesa un período de notable expansión, siendo cada vez más numerosos los procedimientos disponibles, alejándose cada vez más de la matemática pura y convirtiéndose en una "ciencia de los datos", lo que implica la dificultad de enseñar un tema en continuo cambio y crecimiento” (Rodríguez, 2013 p. 64)

11 En el capítulo 2 detallamos con más profundidad los estudios realizados en Educación Estadística.

Señalan también la dificultad para enseñar un campo en continuo cambio y crecimiento. Los múltiples cambios curriculares parecen un fiel reflejo de tanta variabilidad.

En la investigación sobre algunas cuestiones prioritarias de Batanero (2000a), Ottaviani hace una reflexión remarcando que la “instrucción estadística” es una preocupación global y por tanto es imprescindible seguir investigando en Educación Estadística:

“Las perspectivas multiculturales en el aprendizaje y la instrucción necesitan considerarse en todos los campos educativos. En términos de la educación estadística, necesitamos algún conocimiento de cómo se enseña estadística, para poder construir sobre el conocimiento previo existente y los métodos de instrucción. Como se demuestra en las conferencias internacionales de educación estadística, la instrucción estadística es una preocupación global” (Ottaviani, en Batanero 2000a p.19)

Konold (en Batanero et al., 2000a)¹², señala que para avanzar en este campo de investigación es primordial una revisión exhaustiva del estado de la cuestión; opina que se realizan estudios al respecto haciendo revisiones superficiales de los antecedentes. De esta manera, asegura, no se podrá avanzar en la investigación en Educación Estadística, ya que si no se revisa lo que está hecho no se puede dar respuesta al impacto que pueden tener los estudios realizados en la práctica docente (¿sirven para mejorar las dificultades de los alumnos?, ¿se sabe por dónde seguir investigando para resolver errores de los estudiantes?...).

1.4.3. En Teoría de Situaciones Didácticas

Los trabajos realizados por Orús (1986-2009) enmarcados en la TSD como continuación de los iniciados por Brousseau y otros investigadores (Digneau (1980), Maudet (1982) y Peres (1984)), son una referencia fundamental para esta investigación.

Uno de estos trabajos son las lecciones de tratamiento de datos en la escuela obligatoria realizadas en la tesis de Orús (1992). Dichas lecciones son elaboradas como un instrumento didáctico para el enseñante proporcionándole una solución al problema de contrato didáctico detectado en la escolaridad básica. Se basa en las diferentes formas

¹² En el artículo de Batanero et al. (2000a) interviene este autor de la U. de Massachusetts, pp. 17-18 y 28

del razonamiento del alumnado en la relación didáctica y se centra en aspectos de razonamiento lógico y en la actividad clasificatoria a partir del análisis de datos.

El inicio de su investigación acerca del análisis clasificatorio lo podemos encontrar en su trabajo “L'enseignement des methodes de classification. Proposition d'une ingénierie pour le cours moyen” (Orús, 1986b).

Dentro de este marco teórico, Moreira (1993) sigue las investigaciones iniciadas por Orús (1986b, 1992) con respecto al razonamiento, bajo el título “Le traitement de la vérité mathématique à l'école”. En esta tesis el autor encuentra ejemplos que pueden servir al profesor para tomar conciencia del tratamiento o la gestión de la “verdad” en la escolaridad primaria, en vista de preparar la enseñanza de la Lógica en secundaria.

También consideramos importantes los trabajos de Villarroja y Orús (2002, 2003) sobre el tratamiento gráfico de la información y la creación del programa informático TGINF, que implementa este trabajo gráfico y posibilita su utilización en la ESO. El interés de estas investigaciones para nuestra tesis se basa fundamentalmente en dos razones: una por estar enmarcadas en la TSD y la segunda porque ofrecen posibilidad de trabajar la competencia *tratamiento de la información* (datos) y *competencia digital* en la etapa de la ESO.

Las acciones u operaciones que permite el programa TGINF son: traducir automáticamente los ficheros binarios (en formato, csv) en ficheros gráficos, de casillas en blanco o en negro (según codifiquen, los 0 o los 1 de los ficheros iniciales), la permutación de filas o columnas y la clasificación de los datos, tanto de forma manual, como automática según diferentes índices.

Además estas investigaciones aumentan la posibilidad de trabajar la competencia digital en nuestra propuesta didáctica, puesto que en familia de lecciones se pueden plantear situaciones tanto para trabajar la clasificación, como para la manipulación gráficamente de las operaciones lógicas.

En cuanto a los aportes en DM con la utilización de las NNTT (nuevas tecnologías), mencionamos a Artigue (2010, 2011) quien explica en sus trabajos, la importancia que adquiere la integración tecnológica en la enseñanza de las Matemáticas y la aproximación instrumental que supone dicha integración. Asimismo diversos autores (Artigue, 2002, Guin, Ruthven y Trouche, 2005) señalan el impacto de la tecnología

sobre los currículos. En la siguiente cita se ponen de manifiesto estas ideas, mencionando la TSD de Brousseau, así como la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD):

“la TAD, ha contribuido para tomar en cuenta la dimensión social y cultural inherente a todo proyecto de aprendizaje o de enseñanza. Este es sólo un enfoque entre los múltiples que nos ofrece la investigación en educación matemática para apoyar esta dimensión. Ella me es más accesible porque ha sido desarrollada dentro de mi propia cultura y porque la comunidad a la que pertenezco hizo el esfuerzo de organizar sus relaciones con otros componentes de esta cultura, particularmente la teoría de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997). Con los años se ha convertido para mí en un instrumento operacional que utilizo y combino con otros marcos cuando es posible, respetando la consistencia interna de cada uno, como lo muestra por ejemplo el desarrollo de la aproximación instrumental de la integración tecnología que mencionaré en la mesa redonda sobre el impacto de la tecnología sobre los currículos (Artigue, 2002, Guin, Ruthven y Trouche, 2005)”.

Otra investigación que continua los trabajos de Orús, es la presentada en el trabajo de investigación de 3º ciclo por Pitarch (2002) en el que se estudia la viabilidad y el interés didáctico del tratamiento de la información en la etapa educativa de secundaria obligatoria. El objetivo de este trabajo es iniciar el planteamiento de una futura ingeniería didáctica en otra etapa educativa (ESO) para trabajar simultáneamente el tratamiento de la información -a través de los datos- y la Lógica, introduciendo conceptos elementales de Estadística descriptiva.

Conclusiones

La constante evolución de la aplicación de las nuevas tecnologías supone la producción y difusión de grandes cantidades de información que debe ser gestionada, analizada e interpretada adecuadamente. Esto se convierte en tema de interés en distintos ámbitos: social, económico, científico, educativo...

Este interés es reclamado por diversos investigadores, quienes proponen su introducción desde la escolaridad primaria (Batanero et al. (2000a), Batanero (2000b, 20004), Batanero y Godino (2005), Ottaviani (1998), Holmes (2002), Gal (2002), Rodríguez (2013)). Asimismo en las instrucciones curriculares de las dos leyes educativas vigentes (LOE y LOMCE), se propone desarrollar la competencia básica relacionada con el tratamiento de la información, a través de las distintas áreas del currículum de la ESO y concretamente a través de las Matemáticas.

Asumiendo el interés mencionado con respecto al tratamiento de datos a nivel educativo, planteamos una propuesta didáctica en torno a este tema, partiendo de la problemática que supone la gestión del razonamiento natural y lógico del alumno en la relación didáctica. La base de nuestra propuesta es el conjunto de investigaciones precedentes realizadas en el marco de la TSD (Orús (1986b, 1992, 1993a, 1993b, 1993c, 1996b, 1999), Orús et al. (2001b, 2005, 2009), Moreira (1993), Gibel (2004), Pitarch (2002), Pitarch y Orús (2001, 2003, 2005), Villarroya y Orús, (2002, 2003)).

Los dominios de referencia de la lógica formal, la psicología del pensamiento y la inteligencia artificial, nos facilitan respectivamente, la modelización del razonamiento formal o lógico, el análisis del razonamiento subjetivo del alumno y la simulación de las operaciones mentales a través de las operaciones lógicas.

Nuestro marco teórico, la TSD, nos proporciona la metodología que permitirá modelizar el razonamiento lógico y estadístico de los alumnos en torno al tratamiento de datos en la ESO, a través del instrumento didáctico la tabla de valores binarios. La propiedad de ser considerada como un “objeto transicional” (Winnicott, 1971), facilita al alumno el paso del pensamiento subjetivo al razonamiento objetivo. El modelo de la *ingeniería didáctica* formada por situaciones adidácticas y didácticas será la herramienta fundamental para dar respuesta a nuestra propuesta didáctica en esta etapa educativa.

CAPÍTULO 2

Tratamiento de la información, Lógica y Estadística en la educación secundaria obligatoria

Antes de iniciar este capítulo consideramos oportuno recordar de forma general la estructura del sistema educativo en España. Se estructura por etapas educativas de la siguiente forma: educación infantil -subdividida en dos ciclos (0-3 y 3-6 años)-, educación primaria -subdividida en tres ciclos de dos cursos cada uno (6-12 años)-, educación secundaria -formada por a cuatro cursos (12-16 años)-. Las etapas de educación primaria y secundaria son de carácter obligatorio y la de infantil de carácter voluntario (siendo gratuito sólo el segundo ciclo de 3-6 años). Con la promoción de la etapa educativa de secundaria obligatoria se obtiene el título en ESO, que permite acceder a estudios postobligatorios de Bachillerato (16-18 años) o a Ciclos formativos de grado medio (CFGM) (16-18 años). El título de bachillerato permite acceder a estudios universitarios o a la formación profesional de grado superior (CFGS) y el título de técnico en CFGM permite acceder a CFGS (en ambos casos con las pruebas de acceso correspondientes).

Tal y como hemos explicado en el primer capítulo en nuestra metodología, es imprescindible tener en cuenta los dominios científicos de referencia del saber o conocimientos a enseñar/aprender; en nuestro caso el razonamiento (ver esquema de la figura 1-2) (Brousseau, 1986a, Orús, 1992). Por otro lado también hemos explicado como la transposición didáctica (Chevallard, 1985) permite distinguir diferentes tipos de saberes en los procesos de enseñanza; entre ellos el “saber sabio” tal y como lo produce la comunidad científica (identificado en el modelo de Brousseau (1986a) como institución o dominio de referencia) y el “saber matemático a enseñar”, tal y como es designado oficialmente por las disposiciones y programas oficiales que rigen el sistema educativo y por los recursos y materiales didácticos con que las editoriales plasman dichos contenidos oficiales.

En este capítulo vamos a analizar esos saberes a enseñar, respecto al tratamiento de la información, Lógica y la Estadística para el nivel educativo de la ESO. Iniciamos este análisis con la revisión de los decretos en los que se establece el currículo oficial en las etapas de primaria y secundaria. En lo que concierne a la etapa de secundaria hemos realizado un estudio más detallado a partir de la LOE en la comunidad valenciana y en general a nivel estatal, aportando también información sobre la recién implantación de la LOMCE. Aunque esta ley ha entrado en vigor sólo en 1º y 3º de ESO en el curso 2015-16, hemos considerado interesante analizarla con respecto a los bloques de contenidos que nos atañen, porque es precisamente en la etapa que estamos centrando

nuestro estudio, por tanto debemos valorar si existen o no cambios significativos al respecto.

En cuanto a los contenidos de la etapa de primaria relacionados con nuestro tema de estudio, sólo damos referencias sobre el anterior decreto, el correspondiente a la LOE, puesto que los alumnos con los que hemos realizado las experimentaciones (los niveles de ESO, en el curso 2014-15) han desarrollado su educación primaria bajo la legislación de esta ley educativa.

Por otro lado presentamos también las investigaciones relacionadas con el razonamiento inductivo y deductivo de la Lógica formal en la etapa secundaria obligatoria, mostrando a su vez, cómo se va profundizando en estos conceptos en la etapa secundaria del bachillerato y cuál es el “saber enseñado” respecto a estos tipos de razonamientos.

Nuestro recorrido se dirige a continuación hacia los estudios realizados desde la Educación Estadística, como disciplina de investigación, que nos aportarán información de la relación que existe entre el tratamiento de datos y la Estadística. Nos acercaremos a los avances que se han generado en esta disciplina y cómo influyen en nuestra investigación.

Por último, revisaremos los antecedentes de trabajos de investigación en DM sobre Lógica y razonamiento en el marco de la TSD, incluyendo el estudio realizado sobre la viabilidad y el interés didáctico del tratamiento de la información en la ESO (Pitarch, 2002) considerado como el origen de esta tesis.

2.1. Análisis de los contenidos curriculares relacionados con el tratamiento de la información, el razonamiento lógico y estadístico

En la actualidad la educación secundaria (ESO y bachillerato) se rige por las dos últimas leyes educativas: la LOE¹³ y la LOMCE¹⁴. En el curso 2015/2016 entra en vigor la LOMCE aplicándola en los cursos 1º y 3º de ESO y 1º de bachillerato (D. 87/15, pp. 17466-67) y el resto de los cursos se desarrollan según la LOE.

En los decretos correspondientes a la LOE se introduce una nueva componente, que carecían los anteriores. Se propone trabajar por competencias básicas, en concreto ocho. Y precisamente una de ellas se denomina *tratamiento de la información y competencia digital*.

La propuesta curricular del desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje mediante competencias se inicia en la Ley Orgánica 2 /2006 (LOE) tal y como se indica en el párrafo anterior, pero este principio curricular se mantiene en la nueva ley educativa, la LOMCE tal y como ya se anunciaba en la guía sobre las competencias, publicada por el Ministerio de Educación y Ciencia y dirigida al profesorado (2013):

“(...) La Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, LOE, en su Preámbulo, hace ya referencia, entre otros asuntos, a la necesidad de cohesión social, al aprendizaje permanente a lo largo de la vida y a la sociedad del conocimiento e introduce el término competencias básicas por primera vez en la normativa educativa estableciendo que “se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente ley”. También el proyecto de Ley Orgánica de Mejora de Calidad de la Enseñanza, LOMCE (2013) coincide en poner el énfasis en el modelo de cambio educativo del currículum basado en las competencias básicas” (pp 15-16)

En el currículo oficial establecido en la LOE se considera necesario el desarrollo de estas competencias para todas las personas en la sociedad del conocimiento y que se trabajen en todas las materias del currículo¹⁵. La competencia básica *tratamiento de*

13 R.D. 1631/06 a nivel estatal (29 diciembre) y el D.112/07 a nivel autonómico en la CV (20 julio)

14 R.D. 1105/2014 a nivel estatal (26 diciembre) y el D. 87/2015 a nivel autonómico en la CV (5 junio)

15 Las competencias básicas, como elementos integrantes del currículo, son las fijadas en el anexo I del del R.D. 1631/2006, de 29 de diciembre (publicado 5 enero 2007. B.O.E. nº5)

información y competencia digital comprende las habilidades para buscar, obtener, procesar y comunicar información, y la utilización de las nuevas tecnologías para esta labor.

Según se indica en ambos decretos (D.112/07, p. 30404 y D.87/15, p. 17439] se entiende por currículo de la educación secundaria obligatoria el conjunto de objetivos, competencias, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de esta etapa educativa. Al inicio se presentan los objetivos generales de la etapa de forma global, y a continuación -de cada una de las áreas- se expone una introducción a modo de justificación o presentación de la materia, sus objetivos específicos, cómo debe contribuir para el desarrollo de las competencias, los bloques de contenidos que la constituyen y los criterios de evaluación para la consecución de los objetivos.

El área de Matemáticas es troncal en los cuatro cursos de la ESO. Vamos a analizar en cada apartado del currículo de esta materia -en ambas leyes educativas- los aspectos relacionados con el tema que nos concierne. A partir de las conclusiones obtenidas podremos justificar y enmarcar a nivel oficial el tratamiento de la información, en la etapa educativa de la ESO.

En cuanto a los *contenidos* establecidos **según la LOE**, las Matemáticas se subdividen en seis bloques de contenidos en los cuatro cursos de la ESO. Uno de ellos se trabaja de forma transversal: la resolución de problemas; y el resto se ocupa del desarrollo de los contenidos del área de forma más específica. Los bloques referidos son: números, álgebra, geometría, funciones y gráficas, estadística y probabilidad.

Tal y como se indica en la introducción del decreto, estos bloques de contenidos no se deben entender como compartimentos estancos, al contrario todos ellos están interrelacionados.

*“(...) Es preciso indicar que es sólo una forma de organizarlos. **No se trata de crear compartimentos estancos**¹⁶: en todos los bloques se utilizan técnicas numéricas y algebraicas, y en cualquiera de ellos puede resultar útil confeccionar una tabla, generar una gráfica o suscitar una situación de incertidumbre probabilística (...)” (D. 112/07, p.30551).*

¹⁶ Las indicaciones en **negrita** que aparecen en todas las citas de este capítulo se realizan para resaltar datos relevantes para esta investigación, no aparecen de esta manera en las citas originales.

Y de estos bloques, hacemos especial mención al de Funciones y gráficas y Estadística y probabilidad, ya que a través de los contenidos que los conforman, el alumnado puede manejar *estrategias y procedimientos* matemáticos relacionados con el **tratamiento de la información** (en concreto datos), el **razonamiento lógico** -de forma implícita- y explícitamente **la Estadística**. Este argumento se basa en distintos apartados del propio decreto en los cuales se mencionan estrategias, contenidos, procedimientos y criterios de evaluación respecto al tratamiento de la información, el razonamiento lógico y la Estadística.¹⁷

De hecho entre los *objetivos generales* de la etapa de secundaria se propone desarrollar destrezas básicas en el uso de las fuentes de información de manera que se adquieran nuevos conocimientos de forma crítica además de ofrecer una preparación básica en el manejo de las NNTT con especial atención a las de la **información y la comunicación**. También desarrollar la capacidad de sentido crítico, de aprender a aprender, tomar decisiones, planificar, etc. (objetivo general f) y g) de la etapa de la ESO, p. 30405 D.112/2007)

A continuación, en los *objetivos* concretos del área *de las Matemáticas* se hace referencia al desarrollo de distintas capacidades y destrezas, que se podrían resumir de la siguiente forma:

- desarrollar y mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo,
- incorporar al lenguaje y a la argumentación el razonamiento matemático para comunicarse de forma más clara, concisa y precisa,
- usar distintas técnicas de recogida de información,
- realizar el análisis de los datos mediante la selección de cálculos adecuados,
- identificar elementos matemáticos como datos estadísticos presentes en los medios de comunicación, internet, publicidad u otras fuentes de información...

Y por ello, los contenidos y *criterios de evaluación* de Matemáticas que permiten alcanzar estos objetivos pertenecen a los bloques de “Funciones y gráficas” (primeros cursos) y “Estadística y Probabilidad”. En el anexo correspondiente se especifican los mismos, pero a grandes rasgos podríamos resumirlos como sigue:

¹⁷ Consultar anexo 1, en el que se presentan con más detalle estos apartados del currículum oficial con sus contenidos correspondientes.

- utilización de estrategias, procesos de razonamiento y técnicas en la resolución de problemas,
- utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales,
- interpretación y lectura de gráficas relacionadas con el mundo de la información,
- uso de las tecnologías de la información para el análisis matemáticos,
- diferentes formas de recogida de información y su organización (tablas de datos frecuencias, hoja de cálculo...),
- cálculo e interpretación de los parámetros estadísticos,
- análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.

Se puede observar en estas referencias **la intención de desarrollar capacidades tales como: describir, interpretar, predecir, explicar, analizar, sentido crítico....**

En el currículo oficial de la etapa de la ESO se puede apreciar la importancia que se le atribuye a la contribución desde otras áreas al desarrollo de la competencia que nos atañe¹⁸. Las conclusiones que se pueden extraer -a partir de lo expuesto en el anexo 2- son, que no todas las áreas de la etapa contribuyen a desarrollar dicha competencia; y las que sí, tienen pocos contenidos para poder desarrollarla. Esta consecuencia coincide con la idea expresada en la citada guía para el profesorado para trabajar por competencias (2013):

“(...) A través de las áreas y materias del currículo de la educación obligatoria, se pretende que todos los alumnos y alumnas adquieran las competencias básicas señaladas. Sin embargo, no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias (...)”(p 16)

En el caso concreto de las Matemáticas, el decreto sí presenta explícitamente cómo el área contribuye a esta competencia:

“(...) Por su parte, la incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y para la resolución de problemas contribuye a mejorar la

¹⁸ Consultar anexo 2 en el que se detalla cómo otras áreas contribuyen al desarrollo de esta competencia

competencia en tratamiento de la información y competencia digital de los estudiantes, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada por los medios de comunicación. No menos importante resulta la interacción entre los distintos tipos de lenguaje: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico, como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de los alumnos” (D. 112/07, p. 30553)

Podemos concluir que “oficialmente” en las directrices curriculares según la LOE, se pone de manifiesto el interés y la importancia que cobra el tratamiento de la información en general. Esta importancia se ha expresado a través de referencias realizadas en los objetivos generales de la etapa y en concreto en el área de las Matemáticas, en sus objetivos particulares y criterios de evaluación. Pero apenas se establecen contenidos para poder desarrollar dicha competencia, y los que están relacionados con ella sólo aparecen en los bloques de gráficas (menos) y Estadística.

Realizando el mismo análisis en el decreto correspondiente a la nueva ley educativa de **la LOMCE** se puede observar que existen ligeros cambios al respecto.

En primer lugar las competencias básicas que se establecen en el anterior decreto ahora se reducen a siete competencias clave, denominadas de distinta forma. La mencionada *tratamiento de la información y competencia digital* en la LOE, ahora se desglosa en dos, dando lugar a *competencia matemática* y *competencias básicas en ciencia y tecnología* (CMCT) y *competencia digital* (CD). En este caso, en la LOMCE, ya no se denomina directamente con la terminología de *tratamiento de la información*, pero veremos cómo en el análisis de este decreto, todo lo que concierne a este tema se encierra en estas dos competencias clave.

En cuanto a los *bloques de contenidos* en los que se estructura la materia de las Matemáticas, en este caso, los contenidos se distribuyen en cinco bloques (D. 87/15, p. 17648 para 1º y 2º ESO y p. 17655 para 3º y 4º ESO). Éstos son: procesos, métodos y actitudes matemáticas; números y álgebra; geometría; funciones y estadística y probabilidad.

En este decreto se reitera la idea de que dichos bloques de contenidos no se deben considerar por separado, sino que todos ellos están interrelacionados.

*“(...) Es necesario **resaltar las diversas e intensas conexiones** que existen entre los contenidos de los distintos bloques y la necesidad de tenerlo en cuenta a la hora de planificar las situaciones o tareas del aula en los distintos cursos e itinerarios, para darles más sentido que si se tratan de forma aislada (...)”¹⁹ (D. 87/14, p.17648 y p. 17655)*

Con respecto a estos bloques, destacamos procesos, métodos y actitudes matemáticas (BL 1) y Estadística y probabilidad (BL 5), puesto que son los que hacen referencia a estrategias y procedimientos matemáticos relacionados con el **tratamiento de la información** (datos), el **razonamiento lógico** y **la Estadística**. Es en estos bloques se presentan las estrategias, contenidos, procedimientos y criterios de evaluación respecto al tratamiento de la información, el razonamiento lógico y la Estadística; proponiendo el desarrollo de destrezas básicas en el uso de las fuentes de información, la adquisición de nuevos conocimientos de forma crítica y el manejo de la NNTT con especial atención a las de la información y la comunicación.

En lo que concierne a la organización de la etapa se establecen objetivos y fines. Uno de los que se determina está relacionado con el tratamiento de la información:

“ g) Desarrollar metodologías didácticas innovadoras que incluyan el aprendizaje cooperativo, los proyectos interdisciplinares, el uso de las tecnologías de la información y la comunicación, ...” (p. 17450)

Los contenidos y los criterios de evaluación de los cuatro cursos de la ESO que seleccionamos en cuanto a la relación que guardan a nuestro tema de interés, se pueden resumir como sigue (extraídos del D. 87/15, pp. 17648-17667):

- buscar y seleccionar información de distintas fuentes, contrastarla, almacenarla usando técnicas de las TIC (BL1 8, BL1 13 ²⁰).
- realizar un buen uso de la información que se puede obtener y utilizar buenas formas de conducta en la comunicación, denunciando y protegiendo otras malas técnicas que se hacen de las TIC (BL1 14).
- crear y editar contenidos digitales a partir de investigaciones matemáticas y utilizando aplicaciones informáticas... (BL1 15).

¹⁹ Se ha realizado la traducción al castellano de esta referencia que aparece en valenciano en el decreto

²⁰ Es la nomenclatura que utiliza el decreto para hacer referencia a los criterios de evaluación según el bloque de contenidos concreto del área de las Matemáticas.

- analizar datos estadísticos de fenómenos sociales, económicos, relacionados con la naturaleza, etc., organizarlas, analizarlas y aplicar las herramientas matemáticas adecuadas (hojas de cálculo, calculadoras, aplicaciones de webs...), para obtener conclusiones y plantear preguntas relevantes a partir de las mismas (BL5 1).

En resumen podemos concluir que en las nuevas directrices curriculares de la LOMCE, no existen cambios significativos en cuanto al currículo de las Matemáticas en la ESO. De nuevo se pone de manifiesto el interés y la importancia que cobra el tratamiento de la información en general, aunque estas novedades no propician la ampliación de más y distintos contenidos que permitan desarrollar las competencias relacionadas con este tema, potenciando a su vez el razonamiento lógico.

La revisión realizada en los párrafos precedentes con respecto al currículum oficial de la etapa ESO, ha sido necesaria para analizar su contribución real al desarrollo de la competencia tratamiento de la información, relacionándola a su vez, con el razonamiento lógico y estadístico. No obstante, también podemos hacer una revisión, no tan detallada, con respecto a las **directrices curriculares** que corresponden al currículum de la **etapa de educación primaria de la LOE**. Aunque en la actualidad la ley educativa vigente en esta etapa es la LOMCE, hacemos referencia a la anterior, porque los alumnos que participan en nuestras experimentaciones, han sido escolarizados en primaria según la LOE.

Si analizamos los objetivos, contenidos y criterios de evaluación²¹ que vienen pautados en el currículum oficial de la etapa educativa de primaria, en los tres ciclos que la componen, podemos observar que de nuevo los aspectos que hacen referencia al tratamiento de la información son los que están englobados en el bloque de contenidos propiamente dicho “Tratamiento de la información, azar y probabilidad”. Tanto en la presentación de este bloque de contenidos, como en las indicaciones para contribuir en la competencia en cuestión, queda remarcada la importancia que se le atribuye al tratamiento de la información desde el área de las Matemáticas (p. 30388 y pp.30388-30390 del decreto 111/07). En ambos apartados y en la parte de los objetivos, también se menciona el desarrollo del pensamiento matemático, la necesidad de la argumentación a través de razonamientos lógicos y la valoración de los conocimientos estadísticos. A continuación resumimos la propuesta de contenidos -de los tres ciclos de

21 Ver detalle en el anexo 3.

primaria-, que se proponen en dicho decreto. Todos ellos relacionados con la recogida e interpretación de datos:

- recogida de datos mediante técnicas elementales,
- lectura e interpretación de gráficas sencillas (a partir de 2º ciclo),
- construcción de tablas de doble entrada de frecuencias (a partir de 2º ciclo),
- interpretación crítica de la información representada gráficamente (3r ciclo).

La conclusión es semejante a la obtenida en la revisión del currículum oficial de secundaria: se propone desarrollar desde las Matemáticas la competencia básica del *tratamiento de la información y competencia digital*, remarcando que ésta es muy importante en la sociedad y por tanto los alumnos deben desarrollar las destrezas necesarias y adquirir los conocimientos estadísticos imprescindibles para entender la información que les llega a través de los medios de comunicación. Además, en el decreto se especifica que todo ello permitirá a los alumnos su promoción a la siguiente etapa educativa con condiciones adecuadas para cursar con aprovechamiento las Matemáticas en la ESO (D. 111/07, p.30388).

En cambio los contenidos ofrecidos para trabajar todos estos aspectos son escasos y se reducen a técnicas clásicas o tradicionales mediante recuentos de datos. En cuanto al tema del razonamiento lógico, se hace referencia al mismo, pero sin ningún tipo de indicaciones específicas que aclaren cómo abordarlo (parece que se da por sentado que se entiende por razonamiento lógico).

2.2. Razonamiento inductivo y deductivo en la enseñanza secundaria

A partir del análisis curricular – según los decretos oficiales en vigor- de los contenidos relacionados con el tratamiento de datos, la Estadística y la Lógica en la educación secundaria obligatoria, se pone de manifiesto la necesidad de que los estudiantes, ya en esta etapa educativa, sean capaces de manejar y recoger información, analizarla y aplicarla a otros campos científicos.

Asimismo deben desarrollar la capacidad de analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas e informaciones ambiguas o equívocas que a veces contienen los datos de naturaleza estadística.

Además la propuesta del currículo oficial invita a la utilización de las NNTT de manera que estos instrumentos faciliten la toma de decisiones, la reflexión y el razonamiento.

Todos estos términos: análisis, reflexión, interpretación, descripción, predicción, relación, etc., tienen un denominador común: el razonamiento.

Pero hablar de razonamiento supone adentrarse en un campo amplio, y en ocasiones, con posibles confusiones, tal y como se ha manifestado en el capítulo 1.

Podemos recurrir a diversos estudios realizados al respecto. Por ejemplo, el razonamiento, en un sentido más amplio, puede ser definido como (Campos, 2000):

- el argumento como expresión lingüística de una idea para comunicarse con los demás,
- la capacidad de relacionar unos conceptos con otros,
- la obtención de conclusiones a partir de unas ideas previamente ordenadas mentalmente....

O bien, de forma genérica se puede definir el proceso de razonamiento como el proceso cognitivo que permite llegar a una conclusión o información nueva a partir de unas premisas establecidas previamente. A este proceso de razonamiento también se le puede llamar proceso de elaboración de inferencias. Pero podemos observar que este proceso es analizado desde distintas perspectivas según la disciplina que lo tome como objeto de estudio y por tanto, existen distintos tipos de razonamiento: argumentativo, lógico, psicológico, informal (o no lógico), clínico, farmacológico, etc...

Podemos encontrar distintas formas de enforcar la definición de razonamiento, pero según en qué ámbitos, se hacen sinónimos los conceptos razonamiento e inferencia. Hemos definido “inferencia” como el proceso de obtener unas conclusiones a partir de premisas previamente establecidas. A su vez, podemos distinguir dos tipos de inferencia: deductiva e inductiva.

En el razonamiento deductivo se parte de lo general para llegar a lo particular, de lo complejo a lo sencillo. Se parte de unas premisas verdaderas para llegar a una conclusión. La verdad de ésta última depende de la verdad de las premisas. El paso lógico de las premisas a la conclusión -mediante reglas de inferencia- se llama

DEDUCCIÓN, tal y como se presenta en la sección de la Lógica formal del capítulo 1 (Suppens y Hill, 1986)

En cambio, el razonamiento inductivo parte de lo particular para llegar a lo general. Se trata de inferir de algunos casos particulares, basados en la observación, a una conclusión general (buscando un denominador común que rige todos los casos concretos observados).

El método inductivo es el más utilizado en las ciencias experimentales (CC. Naturales, Física y Química, Biología...). En este caso la conclusión sólo puede ser probable, puesto que la verdad de las premisas no garantiza la verdad de la conclusión.

En el comienzo del estudio de la lógica inductiva, Ferrater (1955) ya distinguía entre la lógica deductiva y la inductiva. Mientras que la lógica deductiva se caracterizaba por su carácter formal, a la inductiva se le atribuía la propiedad de la probabilidad.

“(...) la lógica deductiva tiene, por decirlo en el vocabulario tradicional, un carácter “formal”, la lógica inductiva un carácter “material”. (...) en el estado actual de la lógica inductiva lo más plausible es considerarla como una lógica probabilitaria, de tal modo que todo razonamiento inductivo será un razonamiento en términos de probabilidad. (...) la lógica inductiva no ha entrado sino recientemente, como diría Kant, en el seguro camino de la ciencia. La contribución de Carnap a ella debe ser considerada como fundamental; no sería sorprendente que la obra aún no terminada por el autor sobre la probabilidad y la inducción, desempeñara en lógica inductiva el mismo papel revolucionario que la obra de Gottob Frege desempeñó en la lógica deductiva”.pp19-20.

Evidentemente, con el paso del tiempo, el razonamiento inductivo también ha tenido su evolución hasta la actualidad, tal como anunciaba Ferrater en la cita anterior. Las investigaciones realizadas por distintos autores han implicado una repercusión positiva en el avance de esta rama de la lógica (Cañadas, 2007. pp.16, 20-21)

La inducción y la deducción no son formas de razonamiento opuestas, ambas son formas de inferencia. La diferencia entre ellas radica en el proceso que se desarrolla para llegar a la conclusión.

Respecto a la evolución del razonamiento en los alumnos de la etapa de la ESO, es cierto, que en los primeros años se suele hacer más uso del razonamiento inductivo.

Pero no debemos perder de vista, que en las directrices del propio decreto (LOE y LOMCE), se especifica que a lo largo de los niveles (de primero a cuarto de la ESO) el estudiante debe ir forjando su razonamiento tendiendo a un lenguaje más riguroso y a la formalización de las Matemáticas. Ésto se recoge en los decretos mencionados, como sigue:

*“(...) La metodología deberá adaptarse a cada grupo de alumnas y alumnos, rentabilizando al máximo los recursos disponibles. Como criterio general, **son aconsejables las actuaciones que potencien el aprendizaje inductivo, sobre todo, durante los primeros años de la etapa, a través de observación y manipulación y refuercen, al mismo tiempo, la adquisición de destrezas básicas, esquemas y estrategias personales a la hora de enfrentarse ante una situación problemática cercana a la alumna o alumno, sin perder de vista la relación con otras materias del currículo. (...) La introducción de los conceptos se ha de hacer de forma intuitiva, buscando de forma paulatina el rigor matemático y adecuando siempre la metodología utilizada a la capacidad de formalización que a lo largo de la etapa irá desarrollando la alumna y el alumno. El uso de las Matemáticas debe servir para interpretar y transmitir ideas e información con precisión y rigor, como un lenguaje con distintas vertientes: verbal, gráfica, numérica y algebraica.**” (D. 112/07, pp. 30550-51)*

*“(...) El sentido de esta materia en la ESO continua siendo en gran parte experimental y va aumentando gradualmente el nivel de abstracción. El currículum básico se ha formulado teniendo en cuenta la propuesta realizada en Primaria, el desarrollo cognitivo y emocional en el que se encuentra el alumnado de esta etapa, **la adquisición y el desarrollo del pensamiento abstracto, el interés por aprender y relacionarse con sus iguales y con el entorno, la posibilidad de utilizar nuevas tecnologías, y el paso por las opciones de matemáticas aplicadas o académicas en el final de la etapa.(...).** El alumnado que curse esta materia **progresará en la adquisición y el desarrollo de técnicas matemáticas y de razonamiento matemático, en la capacidad de analizar, interpretar y comunicar diversos fenómenos, resolver problemas o realizar investigaciones en distintos contextos; y desarrollar actitudes positivas hacia la aplicación práctica del conocimiento matemático, tanto para el enriquecimiento personal como para la valoración de su papel en el progreso de la humanidad. En las matemáticas académicas hay un ampliación de la propuesta de contenidos algebraicos, geométricos y probabilísticos, y en los procesos que involucren estos contenidos**” (D. 87/15 p.17655).*

Con la madurez de la formalización de las Matemáticas, los estudiantes deben ser capaces de saber desarrollar una demostración como método deductivo, aunque este avance se exige en la etapa postobligatoria, en el bachillerato.

En la introducción del área de las Matemáticas -como área de modalidad del Bachillerato Científico-tecnológico- aparecen las siguientes citas según los decretos vigentes:

“(…)Las definiciones formales, las demostraciones (reducción al absurdo, contraejemplos) y los encadenamientos lógicos (implicación, equivalencia) dan validez a las intuiciones y confieren solidez a las técnicas aplicadas. Sin embargo, este es el primer momento en que el alumno se enfrenta con cierta seriedad al lenguaje formal, por lo que el aprendizaje debe ser equilibrado y gradual. El simbolismo no debe desfigurar la esencia de las ideas fundamentales, el proceso de investigación necesario para alcanzarlas, o el rigor de los razonamientos que las sustentan.

Deberá valorarse la capacidad para comunicar con eficacia esas ideas aunque sea de manera no formal. Lo importante es que el estudiante encuentre en algunos ejemplos la necesidad de la existencia de este lenguaje para dotar a las definiciones y demostraciones matemáticas de universalidad, independizándolas del lenguaje natural (...)” (R.D.1467/07 p. 45449)

*“La enseñanza de esta materia debe vincularse especialmente con su aplicación en la interpretación de los fenómenos científicos, por lo que, además de centrarse en la adquisición del conocimiento de los contenidos de matemáticas y sus procedimientos de cálculo, análisis, medida y estimación, debe dirigirse hacia la adquisición de la habilidad de interpretar datos, seleccionar los elementos fundamentales, analizarlos, **obtener conclusiones razonables y argumentar de forma rigurosa**(...). La activación de la competencia matemática supone que el alumno es capaz de establecer una relación profunda entre el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental, implicados en la resolución de una tarea matemática o científica determinada. **Las matemáticas contribuyen de manera especial al desarrollo del pensamiento, en particular, el pensamiento logicodeductivo**” (D. 87/15, p.17668)*

Estos aprendizajes, con respecto al tipo de razonamientos, también se ven reflejados entre algunos de los objetivos y contenidos del área de las Matemáticas en la etapa del bachillerato.

“Objetivos: La enseñanza de las Matemáticas en el bachillerato tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

*(...). 2. Considerar las **argumentaciones razonadas y la existencia de demostraciones rigurosas** sobre las que se basa el avance de la ciencia y la tecnología, mostrando una actitud flexible, abierta y crítica ante otros juicios y razonamientos.*

*3. Utilizar las estrategias características de la investigación científica y las destrezas propias de las matemáticas (planteamiento de problemas, planificación y ensayo, experimentación **aplicación de la inducción y deducción**, formulación y aceptación o rechazo de las conjeturas, comprobación de los resultados obtenidos) para realizar investigaciones y en general explorar situaciones y fenómenos nuevos.”*
(RD.1467/07 p.45449).

*“Contenidos: (...) utilización de diversos tipos de razonamientos (**deductivo e inductivo**) e iniciación a **métodos de demostración** (reducción al absurdo, inducción completa, etc...”*
(D.87/15 p.17669)²²

Podríamos decir, pues, que la etapa de la educación secundaria obligatoria es el período de transición entre el razonamiento inductivo y el deductivo, según las indicaciones que se extraen de los dos decretos a los que hacemos referencia.

Esta conclusión también es analizada por Cañadas (2007, p. 27) quien realiza un estudio explícito, en su tesis doctoral, sobre el razonamiento inductivo de alumnos de secundaria a través de un contenido matemático concreto: sucesiones lineales y cuadráticas.

Es importante tener en cuenta que plantear el tema del razonamiento matemático de los alumnos con respecto al concepto de demostración, se convierte en tema de debate para muchos investigadores en DM. En este aspecto no acaban de estar totalmente de acuerdo, según el enfoque que le da cada uno de ellos, en la relación que existe entre razonamiento matemático y demostración. En el V simposio de la SEIEM, Ortega (2001) presenta un resumen del debate realizado sobre “Prueba y demostración: razonamiento matemático”. En el mismo se plantean tres cuestiones:

²² En 1º se inicia a la demostración, en 2º de bachillerato ya se exige la utilización de la misma (p.17672)

- la primera es de carácter curricular: ¿todos los alumnos deben estudiar demostraciones? ¿algunos tipos de alumnos revelan mayores dificultades con las demostraciones?
- la segunda de naturaleza didáctica: ¿qué características debe reunir una cultura de aula para que se desarrolle el aprendizaje de la demostración?
- la tercera es ideológica, en la que se cuestiona la relación entre la demostración y una racionalidad de génesis europea.

Las aportaciones de los distintos investigadores que intervienen en este debate muestran que no hay establecido un consenso con respecto a este tema. Asimismo, son interesantes sus argumentaciones²³, porque por una parte contribuyen a reflexionar sobre la forma de abordar la demostración en la etapa secundaria (sobre todo en la postobligatoria) y por otra parte, a partir de ellas surge la motivación de seguir investigando al respecto.

En este debate, una de las intervenciones que hace Godino (en Ortega, 2001) es un claro ejemplo de la situación paradójica que plantea Orús (1992) en la relación didáctica:

*“Juan Díaz Godino lanza como hipótesis de trabajo que hay una postura de “confusión argumentativa” en el seno de la clase de matemáticas, de tal manera que **en las fases exploratorias de resolución de problemas, es necesario utilizar cualquier tipo de recurso exploratorio (incluyendo razonamientos de tipo inductivo, analógico, etc.). Pero en la fase de institucionalización de los conocimientos la argumentación que se requiere es de tipo deductivo. Los alumnos no discriminan de manera inmediata las circunstancias en las que es pertinente cada tipo de argumentación”** (Ortega, 2001. p.66)*

Y por último consideramos adecuado mencionar en este apartado cómo se evalúa el razonamiento lógico desde el punto de vista psicopedagógico en la etapa de secundaria obligatoria y el tercer ciclo de primaria. Desde este campo se realizan análisis o diagnósticos en torno a las capacidades y habilidades académicas de los alumnos para poder actuar sobre las dificultades que manifiestan. Una de las formas que utilizan para realizar este análisis es mediante la evaluación de las aptitudes diferenciales y generales. Estas pruebas miden distintos aspectos, tales como: capacidad de

²³ Ver anexo 4, en el que expone el resumen de este debate, por Ortega (2001).

razonamiento (que también le llaman razonamiento lógico), inteligencia general, memoria, atención, la rapidez y eficacia.

En particular, queremos señalar cómo evalúan el aspecto de la capacidad de razonar, que desde la psicología también le denominan **razonamiento lógico**. Los tres ítems que utilizan para evaluar esta capacidad son: *relaciones analógicas*, *series numéricas* y *matrices lógicas*. A continuación mostramos ejemplos de actividades utilizadas para evaluar cada ítem mencionado:

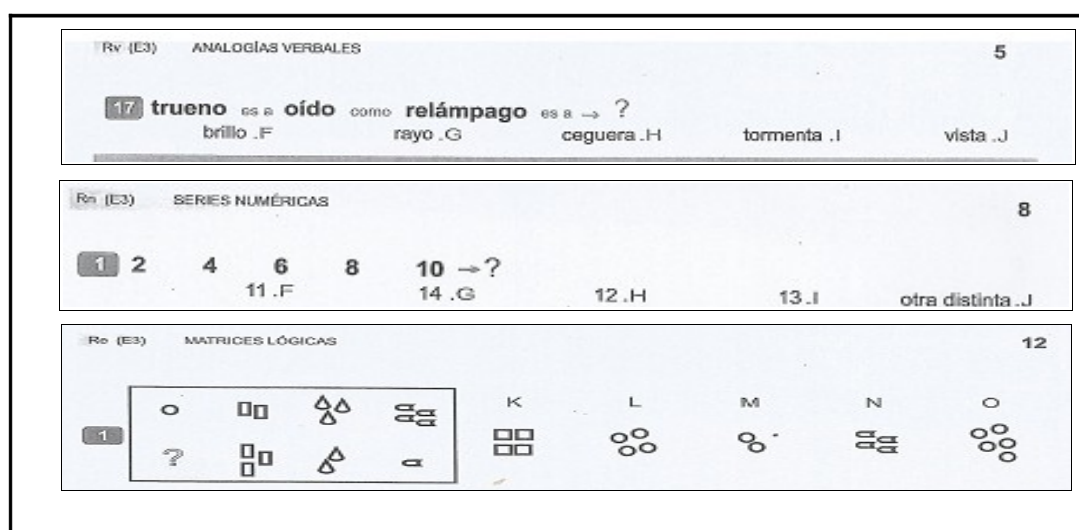


Figura 2-1: Ejemplos de actividades para evaluar el razonamiento lógico desde la Psicopedagogía, en el tercer ciclo de primaria



Figura 2-2: Ejemplos de actividades para evaluar el razonamiento lógico desde la Psicopedagogía, en la etapa secundaria obligatoria

En el anexo 5 se presentan más actividades de este tipo de pruebas, tanto para el nivel de tercer ciclo de primaria, como para la ESO. A partir de los ejemplos de este anexo, se puede deducir que el término **lógica** que utilizan en estas pruebas, no corresponde a la Lógica formal que nosotros hemos tomado como campo científico de referencia en nuestra investigación.

2.3. Aportaciones desde la investigación en Educación Estadística

En el área de Educación Estadística podemos encontrar numerosas investigaciones que están directamente relacionadas con el tratamiento de la información y por supuesto con la Estadística.

Detallamos varias referencias procedentes del grupo de investigación de la Universidad de Granada, dirigido por Batanero y Godino, junto a sus colaboradores. A su vez, se hace mención de otros investigadores internacionales que avalan los estudios realizados por este departamento de Educación Estadística, puesto que desarrollan proyectos conjuntos o se basan en ellos.

Por una parte estos investigadores manifiestan interés por el Análisis exploratorio de datos -introducido por Tukey en la década de los 70-, presentándolo como una herramienta adecuada para el profesorado de educación secundaria, usando un elemento matemático sencillo -como un fichero de Internet- y proponiendo el trabajo en grupo, metodología propuesta también desde las directrices oficiales. Ponen de manifiesto el interés y la necesidad que adquiere el desarrollo del tratamiento de datos (información) en esta etapa educativa, a través de los contenidos del bloque de la Estadística (Batanero et al., 1991; Godino, 1995; Batanero, 1999)

“El análisis exploratorio de datos, introducido Tukey (1962; 1970), se ha extendido como filosofía de aplicación de la estadística, debido principalmente a la disponibilidad de ordenadores y software estadístico con posibilidades de representación gráfica y tratamiento de conjuntos de datos variados. Las posibilidades didácticas del análisis exploratorio de datos se deben a la sencillez del aparato matemático requerido, la importancia dada hoy día en estadística y matemáticas a los sistemas de representación múltiple y resolución de problemas, las conexiones con otros temas del currículum, el

trabajo en equipo y la posibilidad de desarrollo de proyectos por parte de los alumnos (Batanero, Estepa y Godino, 1991) (Batanero, 1999, p.1)”

*“En una enseñanza tradicional nos centramos en la resolución de problemas acotados con unos datos proporcionados por el profesor. **En el enfoque exploratorio de la enseñanza de la estadística los alumnos pueden investigar y obtener sus propios datos o completar los dados por el profesor.** Los ficheros contenidos en Internet, los anuarios estadísticos, la prensa, o los datos recogidos por los alumnos (mediante medición, encuesta u observación) pueden ser la base para plantear problemas que motiven a los alumnos y les haga interesarse por el aprendizaje. Los ordenadores actuales brindan muchas posibilidades para la enseñanza y el aprendizaje de la estadística (Godino, 1995; Biehler, 1997) (...). El análisis exploratorio de datos puede también implementarse con las calculadoras gráficas (...). **El trabajo con análisis exploratorio de datos refuerza también algunos objetivos sugeridos para la educación matemática en los nuevos currículos de secundaria**, como el trabajo con problemas abiertos, el uso de sistemas múltiples de representación, la introducción al trabajo con ordenadores o calculadoras gráficas y la conexión de las matemáticas con otras áreas del currículo (Shaughnessy, Garfield y Greer, 1997) (...) Finalmente es preciso reconocer que la enseñanza de la estadística es una tarea delicada, debido a la dificultad que revisten los conceptos estadísticos incluso los más sencillos (Batanero et al., 1994); (Batanero, 1999, pp 10-11)”*

Godino (1995) explica que no se trata de un conjunto de métodos compuesto por técnicas para realizar cálculos, sino que se debe entender como un filosofía de aplicación de la Estadística. Consiste en el estudio de los datos desde todas sus perspectivas con el propósito de extraer toda la información posible, generar hipótesis nuevas y mediante los cálculos pertinentes poder contrastarlas.

Propone realizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Estadística descriptiva en la enseñanza secundaria desde la perspectiva del análisis exploratorio, y para ello expone unos ejemplos con la aplicación de los ordenadores. (Godino, 1995, pp.48-50).

También argumentan que la utilización del Análisis exploratorio de datos permite mejorar el razonamiento estadístico (tanto el inductivo, como el deductivo, haciendo referencia a la Lógica; Batenero et al., 2000b)

Batanero y Godino (2001b, pp. 9-11) mencionan la división clásica (hasta hace unos 30 años) de la Estadística en Estadística descriptiva y Estadística inferencial:

- La Estadística descriptiva, se utiliza para describir los datos, resumirlos y presentarlos de forma que sean fáciles de interpretar. El interés se centra en el conjunto de datos y no se plantea el extender las conclusiones a otros datos diferentes.
- La Estadística inductiva o inferencia trata de obtener conocimientos sobre ciertos conjuntos extensos o poblaciones, a partir de la información de una muestra (subconjunto de la población que representa a la misma). Ésta utiliza como herramienta matemática el cálculo de probabilidades.

Hasta 1900 la Estadística se restringía a la Estadística descriptiva, que, a pesar de sus limitaciones, hizo grandes aportaciones al desarrollo de la ciencia. A partir de esa época comenzaría la inferencia estadística, con los trabajos de Fisher, Pearson y sus colaboradores. Los avances del cálculo de probabilidades llevaron a la creación de la Estadística teórica, que en cierto modo se alejó de las ideas primitivas, que se centraban en el análisis y recogida de datos. Así pues, en los años 60 hubo una tendencia al uso de modelos inferenciales y a su matematización, descuidando la enseñanza de los aspectos prácticos del análisis de datos.

Con el avance tecnológico de la informática desarrollado en la segunda mitad del siglo XX se posibilitó el manejo de grandes masas de datos, disminuyendo la importancia de los estudios muestrales y aumentando la tendencia a la matematización. No había por qué limitarse a analizar una o unas pocas variables, porque el tiempo de cálculo se había eliminado y era preferible aprovechar toda la información disponible.

Con todo ello surge una nueva filosofía en los estudios estadísticos: el *Análisis exploratorio de datos*. Anteriormente a este enfoque, el análisis de datos se basaba fundamentalmente en la estimación de parámetros (medias, o coeficientes de correlación en la población) y se disminuía la importancia de la representación de los datos. Además, se pensaba que para obtener conclusiones de los datos era preciso recurrir a la inferencia, donde el conjunto de valores observados se supone que se ajusta a un modelo preestablecido.

En cambio, en el Análisis exploratorio de datos, en lugar de imponer un modelo dado a las observaciones, se genera dicho modelo desde las mismas.

El Análisis exploratorio de datos tiene las siguientes características que lo hacen un tema apropiado de estudio (Batanero y Godino 2001b, pp. 12-13):

- *Posibilidad de generar situaciones de aprendizaje referidas a temas de interés del alumno:* se puede trabajar sobre un proyecto en el que se recogen datos, tomados de internet o un anuario estadístico u obtenidos mediante experimentos o la realización de una encuesta. Esto puede motivar bastante a los estudiantes, quienes pueden ver la utilidad de la Estadística
- *Fuerte apoyo en representaciones gráficas:* el uso de representaciones múltiples de los datos se convierte en un medio de desarrollar nuevos conocimientos y perspectivas y además coincide con la importancia que se da a la representación gráfica en los diseños curriculares.
- *No necesita una teoría matemática compleja:* como el análisis de datos no supone que estos se distribuyen según una ley de probabilidad clásica (frecuentemente la normal), no utiliza sino nociones matemáticas muy elementales y procedimientos gráficos fáciles de realizar y así cualquier alumno puede hacer análisis de datos.

Por todo ello, la Estadística -y en concreto el tratamiento de datos- tiene la posibilidad de aplicarse a distintos campos de estudio: biológico, físico, social, político, económico, educativo....

Batanero (2000b, 2004), Batanero et al. (2000a) y Batanero y Godino (2005) plasman la necesidad de incorporar la Estadística en los currículos oficiales desde la etapa de primaria, tal y como ya se ha referenciado en el anterior capítulo. Otro investigador que también reclama la introducción de la Estadística en los currículos de primaria y secundaria es Tormo (1995, p 29), quien presenta la media aritmética como un concepto básico de la Estadística y de la Inferencia estadística. Por ello hace alusión a la necesidad de la introducción de dicha materia ya desde la etapa educativa más temprana. Así la Estadística irá adquiriendo utilidad e importancia desde las primeras etapas. En cuanto a las dificultades de los alumnos de este concepto, hace referencia a investigaciones realizadas por Russell y Mokros (1991, 1995 p.35) los cuales indican que los alumnos no entienden la media aritmética como un parámetro central de un conjunto de datos. Además indican que otra dificultad, previa, al concepto de media aritmética, es el concepto de representatividad. Para ello los estudiantes deben

entender con antelación que este parámetro sirve para resumir información de un conjunto de datos considerando éste último como unidad de información.

Recientemente Batanero (2013), expresa que aunque la Estadística se enseña hoy día en todos los niveles educativos, la investigación alerta que, aún así, muchos estudiantes manifiestan concepciones incorrectas en lo que respecta a las interpretaciones de los resultados estadísticos y lo atribuye a una posible enseñanza rutinaria y tradicional que sólo se basa en fórmulas y cálculos mecánicos, sin atender a las actividades que realmente permiten analizar la interpretación y el contexto de donde provienen los datos.

En las últimas revisiones realizadas (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004; Arteaga, Batanero et al., 2012) con respecto a la enseñanza de la Estadística se puede decir que ha habido una mejoría en cuanto a la introducción de la Estadística a nivel curricular, aunque existen igualmente problemas abiertos sin resolver:

- en primer lugar no hay constancia de que se llegue a impartir esta materia en su totalidad, en las primeras etapas educativas (primaria y secundaria)
- en segundo lugar, el tipo de metodología debe mejorar para que los aprendizajes sean significativos para los estudiantes
- por otra parte, se detecta falta de formación en el profesorado (en primaria el profesorado apenas han estudiado esta materia en su preparación como maestros; y en secundaria aún siendo licenciados, el profesorado no tiene porqué ser especialista en esta disciplina)

Por lo tanto nos encontramos en la problemática de raíz: la metodología utilizada para enseñar la Estadística. El hecho de no ser una metodología efectiva provoca la utilización de heurísticas erróneas que llevan a toma de decisiones equívocas y con mucha frecuencia con pérdida de información, que es lo que conlleva a decisiones sesgadas (Batanero, 2004).

Para conseguir que la metodología se actualice y sea más eficaz, la autora se apoya en los estudios de Piaget (1978), recordando que el estudiante es el protagonista en el proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que es él quien construye el conocimiento de forma activa y no lo recibe pasivamente del entorno. Para que se produzca un aprendizaje de forma significativa se debe crear una situación de conflicto cognitivo

que provocará un desequilibrio en su propio conocimiento. Éste quedará resuelto a través de la adquisición del nuevo saber producido por la acomodación o adaptación a la nueva situación.

Estas ideas, tanto la validez de la Estadística como herramienta que da solución al problema de “incertidumbre” del mundo que nos rodea, como la renovación que requieren los métodos de su enseñanza, están explicados literalmente por Batanero (2004) en el artículo mencionado de la siguiente forma:

*“Por otro lado, en estadística trabajamos con un proceso inductivo tratando de realizar inferencias a partir de una muestra (siempre limitada) de datos. Nuestro conocimiento es falible (incluso aquel obtenido por razonamiento deductivo a partir de un sistema de axiomas, puesto que estos sólo son provisionalmente válidos). Es por ello que los sucesos improbables (acertar la lotería o tener un accidente) ocurren, a pesar de su baja probabilidad. Pero la estadística es la mejor herramienta con la que contamos en la actualidad para disminuir en algún modo la incertidumbre del mundo en que vivimos y tratar de separar los fenómenos causales, de la variabilidad aleatoria. Si logramos que los alumnos lleguen a comprender esto, habremos dado un paso de gigante hacia la sociedad estadísticamente culta. Sin embargo, la investigación sobre el razonamiento humano en situaciones de incertidumbre, y en particular trabajos como los recogidos en Kahneman, Slovic y Tversky (1982) muestran que las intuiciones en el campo de la probabilidad y estadística nos engañan con frecuencia. Al enfrentarnos a las situaciones cotidianas y tareas profesionales en que es preciso tomar decisiones basadas en la evaluación de probabilidades utilizamos heurísticas inconscientes que nos llevan a suprimir una parte de la información y producen decisiones sesgadas. Estas heurísticas explican sesgos tan extendidos como la falacia del jugador (esperar que cuando jugamos con una moneda u otro juego de azar, cada vez que obtenemos una pérdida, aumenta nuestra probabilidad de ganar en la próxima jugada). Puesto que las investigaciones psicológicas sugieren que las intuiciones erróneas no se corrigen con una mera enseñanza expositiva, ni tampoco con la ejercitación en el cálculo o en la resolución de problemas rutinarios, será necesario que la introducción de la estadística en las escuelas vaya acompañada de una renovación de los métodos de enseñanza, para que llegue a ser realmente efectiva. Piaget postula que, además del desarrollo físico, son necesarios para el aprendizaje la experiencia adquirida en forma activa, las interacciones o transmisiones sociales y la resolución de situaciones problemáticas. **El conocimiento es construido***

activamente por el sujeto y no recibido pasivamente del entorno. El sujeto trata de adaptarse al mundo que le rodea y cuando una idea nueva se presenta sobre otras ya existentes se crea un "conflicto cognitivo" o "desequilibrio" en su estado mental, que se resuelve mediante un proceso de "equilibración" (asimilación y acomodación). Mediante la asimilación el niño acepta la nueva idea y mediante la acomodación toda su estructura cognitiva se modifica para adaptarse al nuevo conocimiento (Piaget e Inhelder, 1951)."
(Batanero, 2004 pp. 4-6)

Se deja constancia de la necesidad de trabajar la Estadística en situación escolar, ya que es indiscutible que existe una fuerte presencia de situaciones de tipo aleatorio en nuestro entorno. En ellas se manifiesta abundante información, bien expresada en forma de tablas o gráficos estadísticos. La enseñanza primaria y secundaria, debe propiciar herramientas que faciliten al estudiante el manejo e interpretación de dicha información y los debe convertir en ciudadanos capaces de enfrentarse a este tipo de situaciones, realizando interpretaciones correctas de la misma.

Esto se puede llevar a cabo con éxito mediante una buena gestión y una idónea elección de la metodología constructivista del conocimiento (tal y como hemos explicado anteriormente).

En este sentido sería importante tener en cuenta que Batanero y Godino (2005) afirman que la Estadística permite modelizar el razonamiento matemático. La finalidad debería ser incorporar esta idea en la metodología mencionada para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje del razonamiento estadístico:

"Puesto que la estadística proporcionan una oportunidad extraordinaria de mostrar al alumno el proceso de modelización matemática, y dado que las teorías de aprendizaje aceptadas con mayor generalidad enfatizan el papel de la resolución de problemas, la formulación (lenguaje matemático), validación (demostración y razonamiento de las ideas matemáticas) e institucionalización (puesta en común; acuerdo social) en la construcción del conocimiento), cobran entonces un papel primordial los proyectos estadísticos y la experimentación (...) Una característica particular de los experimentos aleatorios es su carácter irreversible, destacado por Piaget e Inhelder (1951). (...) El análisis de un experimento aleatorio va más allá del resultado inmediato y requiere la consideración de todos los sucesos posibles, es decir del espacio muestral del experimento. Por tanto, el uso del material para la clase de probabilidad, implica realizar

una serie de experimentos, recoger sus resultados, calcular las frecuencias de los distintos resultados, elaborar tablas y gráficos, y comprobar conjeturas (hipótesis) sobre el experimento, es decir, organizar un estudio estadístico del experimento. Sólo cuando se recogen datos de una serie larga de experimentos se produce la convergencia y se aprecian regularidades en el comportamiento de los fenómenos aleatorios. Actividades diseñadas con esta filosofía se recogen, por ejemplo en Godino y cols. (1987)” (Batanero y Godino, 2005 p.9)

2.4. Lógica formal en la enseñanza secundaria

En esta sección vamos a presentar algunos trabajos relacionados con la Lógica formal realizados por distintos investigadores. La mayoría de ellos se han realizado con alumnado de la etapa de secundaria.

i) El artículo “*Consideraciones epistemológicas sobre la inferencia estadística: implicaciones para la práctica docente*” de Vallecillos (1995), está relacionado con nuestra investigación por doble partida, puesto que trata tanto la Estadística como la Lógica formal. En él plantea la posibilidad de que la inferencia estadística sea la respuesta al conocido y debatido *Problema de Hume*²⁴.

- Por una parte, en esta investigación se relaciona la inferencia científica y el contraste de hipótesis. Para ello usa los conceptos de lógica deductiva e inductiva, plasmando sus diferencias y haciendo la comparativa entre ambas. *Afirma que el razonamiento lógico es por excelencia el deductivo, pero que el razonamiento inductivo es imprescindible en la vida cotidiana*, puesto que es un pilar fundamental del conocimiento humano. Es interesante la referencia exacta por la información que nos aporta:

“En el proceso de inferencia, entendido como proceso de paso de unas afirmaciones dadas a nuevos enunciados, intervienen fundamentalmente dos tipos de razonamiento: deductivo e inductivo. El razonamiento lógico por excelencia es el deductivo, que a partir de premisas verdaderas obtiene una conclusión necesariamente verdadera. La Lógica deductiva, basada en este tipo de razonamiento, consiste por tanto en un sistema de

²⁴ Problemas que plantean la validación del conocimiento de forma inductiva. También llamado el problema lógico de la inducción.

*inferencias conservadoras de la verdad. Por el contrario, en el razonamiento inductivo, la conclusión es una afirmación más general que las premisas, siendo por tanto posible su falsedad, aunque éstas sean ciertas. La Lógica inductiva concierne, pues, a las inferencias en las que el contenido informativo de las conclusiones supera al de las premisas y, por tanto, cabe la posibilidad de su falsedad. Desde **Aristóteles**, a quien le cabe el honor de **haber desarrollado por primera vez un sistema de lógica deductiva, la silogística**, así como una primera caracterización de la inferencia inductiva, se ha estudiado concienzudamente el problema de la inducción como método de obtención de enunciados lógicamente verdaderos. **El razonamiento inductivo está en la base de una gran cantidad de nuestras acciones cotidianas**, debido a que nuestro pensamiento y conducta se basan en creencias inductivamente fundadas, en la anticipación y generalización. Es por tanto, necesaria una justificación de este tipo de razonamiento ya que en caso contrario todo el edificio del conocimiento humano aparece como infundado” (pp.81-82).*

- Por otra parte, presenta los tests de hipótesis según Fisher y Neyman-Pearson. Para ello también utiliza términos de la lógica formal como “Falacia de consecuente”, “Modus Tollendo Tollens”, “Demostración de falsedad”... En este aspecto, la autora concluye que los contrastes de hipótesis – tanto para Fisher como para Neyman- no proporcionan un tipo de inferencia inductiva de la muestra a la población, sino una inferencia deductiva de la población a la muestras particulares (que se necesitan para constituir la población). En esta conclusión menciona a Rivadulla (1991).(pp 86-87)
- Y por último Vallecillos menciona la importancia de la investigación en este tema en el ámbito de la enseñanza. Afirma que la inferencia es un tema que sufre muchísimas interpretaciones erróneas y como consecuencia aplicaciones incorrectas, y que ésto se puede mejorar desde una buena planificación en el proceso de la enseñanza (p 89)

ii) En otra de las monografías de la revista UNO, dedicada a “Laboratorio de matemáticas”, aparece un artículo bajo el título “*Problemas en la enseñanza elemental de los conceptos de verdad, falsedad, validez e independencia lógica*”, del Grupo de Filosofía del casal del Mestre de Sta Coloma de Gramanet (1996). En él se realiza un análisis crítico de las dificultades que manifiestan los alumnos (principiantes en un curso de Lógica formal) en captar conceptos como verdad y validez formal. Los autores manifiestan que el alumnado no entiende la distinción entre los pares verdad/falsedad y

de validez/independencia lógica. Se expone que el concepto de validez tiene mayor grado de abstracción y mayor complejidad que los de verdad o falsedad. Los autores afirman que el alumnado suele tener dificultades para entender que la validez deductiva de una argumentación no está directamente relacionada con el significado de las premisas de la argumentación. También atribuyen estas dificultades a la forma de impartir la enseñanza de la Lógica formal:

(...) La idea de que la validez deductiva (formal o lógica) únicamente depende de la forma de la argumentación y no del significado o del valor de verdad puede resultar especialmente dificultosa de captar para un principiante.

El problema surge porque cuando damos ejemplos de argumentaciones válidas, tendemos a utilizar argumentaciones en lenguaje natural o en lenguaje totalmente formalizado. Un clásico ejemplo que un profesor de lógica puede usar como ejemplo de argumentación válida es:

Todos los hombres son mortales. /Sócrates es un hombre/ Por lo tanto, Sócrates es mortal.

Fijándose en esta argumentación, los estudiantes pueden ver intuitivamente que la conclusión se extrae de las premisas. Pero dos tipos de confusiones pueden surgir del uso de ejemplos como este. La primera (...) es: como la conclusión de este ejemplo de argumentación es verdadera, los estudiantes pueden llegar a pensar que las argumentaciones válidas tienen necesariamente conclusiones verdaderas. Una buena argumentación es una argumentación válida que tiene las premisas verdaderas y por lo tanto también la conclusión es verdadera. Pero una argumentación puede ser válida sin ser una buena argumentación: hay argumentaciones válidas con premisas falsas y conclusión verdadera, y argumentaciones válidas con premisas y conclusión falsas. La segunda confusión es que puede parecerles que la validez de una argumentación es algo que tiene que ver más con el sentido que con la forma de las premisas y la conclusión” (Grupo de Filosofía 1996. pp.112-113).

Una vez expuestas estas dos dificultades más notables, los autores de este artículo presentan soluciones, nombrando a otros especialistas en Lógica formal (Deaño, Quesada, Pizarro, Koertge). Presentan el lenguaje formalizado y las reglas de inferencias fundamentales que suele usar cualquier profesor en la materia, pero como método innovador presentan el de Bárbara Hannan (1992), quien utiliza otras técnicas en el lenguaje formal que resulta más sencillo para el alumnado, por lo tanto es una posible solución para el problema de las dificultades planteadas en este artículo.

iii) Otro artículo de investigación en relación a la Lógica formal es el de D'Amore (2005), quien analiza la argumentación lógica de los alumnos y la compara con la lógica hindú (nyaya). Cuanto menos, resulta curiosa la investigación de este tema.

En su estudio, el autor señala que en los trabajos de Duval (1993, 1995) se especifica lo que verdaderamente significa demostrar (p .83). En esta investigación D'Amore, sólo quiere dejar constancia de que algunos alumnos (14-15 años), en situación espontánea, están más cerca de la lógica nyaya que de la aristotélica a la hora de realizar una demostración, o en términos más generales, una argumentación. A partir de las experiencias que presenta observa que el alumnado tiende a usar casos particulares para llegar al caso general.

En absoluto pretende sustituir la lógica nyaya por la aristotélica, sino que quiere aprovechar la oportunidad de presentar, con estos ejemplos, que en otras culturas se han producido otros mecanismos intelectuales para la generalización.

Aunque tampoco prueba que estos estudiantes piensen en lógica nyaya estrictamente, sino que su forma de razonar se acerca más a este tipo de lógica que a la clásica lógica de Aristóteles. En realidad lo que hacen los alumnos es buscar un marco de referencia, inconscientemente, y en este caso, se ajusta más a este tipo de pensamiento lógico.(p 84)

La filosofía budista se diferencia de la nyaya, fundamentalmente, en que esta última tiene gran consideración por la doctrina del conocimiento y un fuerte carácter empírico, similar a lo que los occidentales llamamos lógica deductiva. La lógica budista renunció a ésta.

D'Amore concluye que el comportamiento demostrativo-argumentativo de estudiantes de estas edades no siempre está ligado al aristotélico y megárico-estoico, tal y como se tiende a pensar según la historia y tradición. Por otra parte, a nivel, didáctico se abre la posible redimensión del modelo demostrativo, dejando de ser el único el enunciativo-predicativo aristotélico. También menciona que la componente cultural influye en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

iv) En otras dos investigaciones Campos (2000) y Cerda et al. (2011), se llega a una conclusión común respecto a la Lógica. Se puede resumir diciendo que la Lógica está

directamente relacionada con la inteligencia. Es decir, el estudiante que posee un buen desarrollo en el pensamiento lógico, manifiesta un buen rendimiento académico.

Por una parte así lo expresa Campos (2000) en uno de sus artículos dedicado a los beneficios de la Lógica en la enseñanza:

“El primer beneficio es su aspecto formativo. En efecto, el aprendizaje de la lógica exige una dedicación y una disciplina que, bien asimilada, capacita al estudiante para enfrentarse a cualquier aprendizaje donde sean requisitos el análisis, la síntesis y los procesos de deducción, de generalización y otros. (...) podemos aprenderla y aplicarla en otras cosas, pero no podremos aplicarla si no la aprendemos primero. El aprendizaje de la lógica produce hábitos de pensamiento indispensables para el pensar científico. No es exagerado decir que la lógica muestra, en buena parte, el desarrollo científico de una comunidad y de una época; así, cuando el desarrollo científico abarca muchos aspectos, la lógica se mostrará igualmente variada, y esto explica en parte la proliferación de tantas "lógicas" en nuestros días. Pero su desconocimiento atrasa su aplicación, y no sirve decir que son tan abstractas que no son aplicables a la vida cotidiana. La misma noción de vida cotidiana puede ser engañosa: hay personas cuya vida cotidiana pueda estar inmersa en la actividad científica y en la investigación; la comunidad de investigadores es también una comunidad humana.” (Campos, 2000 p.47).

Por otra parte, Cerda et al. (2011) realizan un estudio sobre la inteligencia lógica y el rendimiento académico con una muestra significativa de estudiantes (primaria y secundaria) de Chile. En él se argumenta que la matemática – entre otras disciplinas- a través de sus conocimientos hace emerger la relación entre el pensamiento lógico y el rendimiento académico. Refieren, por ejemplo, que los estudiantes que muestran interés y disfrutan con las operaciones numéricas, son habilidosos y brillantes en el razonamiento inductivo y deductivo (p. 389)

En concreto podemos señalar las siguientes referencias que afirman la conclusión que hemos citado anteriormente (Cerda et al., 2011):

“Es conocido que si un individuo asimila o hace suyas las estructuras lógicas, está desarrollando y fortaleciendo su desempeño académico y su inteligencia general, en la medida en que ésta última, es una capacidad de discurrir y razonar adecuadamente (Ortega, 1999; 2005). Por lo mismo, se puede esperar que quienes presentan niveles altos

de inteligencia lógica, alcancen éxito en diversas áreas del currículum, especialmente en las que más requiere del juego lógico que sustenta las operaciones formales “(p.390)

“Otro aspecto importante que se deduce de esta investigación, es que se ha logrado evidenciar que los estudiantes denominados talentosos presentan niveles de inteligencia lógica significativamente superiores que aquellos estudiantes comunes. Las diferencias encontradas, vienen a respaldar estudios en la misma línea que sostienen que los alumnos talentosos poseen habilidades cognitivas como la capacidad para planificar, revisión, control, selección y evaluación de sus propias actividades intelectuales, todas ellas de carácter metacognitivo que parecen elementos básicos de lo que estamos llamando inteligencia lógica” (Cerde et al., 2011 p.396).

2.5. Lógica y razonamiento en Didáctica de las Matemáticas. Viabilidad del tratamiento de datos en la ESO

En cuanto a las investigaciones en DM con respecto al razonamiento y la Lógica, podemos centrarnos en primer lugar -siendo fundamental para nuestra investigación- en la tesis doctoral de Orús (1992).

En la primera parte de esta tesis, se presenta la “problematización didáctica del razonamiento natural”, es decir, se pregunta *cuál es el estatus del razonamiento natural de los alumnos (y del profesor) en la relación didáctica* (entendiendo razonamiento natural como el razonamiento espontáneo del alumno). Este tipo de razonamiento está elaborado a partir de una lógica personal basada en los llamados “predicados amalgamados con componentes contextuales (según Wermus, 1976 y 1987) distintos de los predicados y de las proposiciones de la Lógica formal. Este mismo razonamiento también es utilizado habitualmente por los profesores. En muchas ocasiones los profesores recurren a la metáfora para apoyar sus argumentaciones, sin embargo la metáfora no corresponde a un razonamiento dentro de la Lógica formal, ni tampoco como un razonamiento matemático propiamente dicho.

El alumno necesita utilizar su razonamiento natural para realizar su aprendizaje matemático. Sin embargo, este tipo de conocimiento no se le enseña ni se le puede enseñar en clase de Matemáticas porque no es un objeto de enseñanza para las Matemáticas. Asimismo este razonamiento espontáneo y la lógica personal en la que se

sustenta pueden provocar distorsiones importantes en la asimilación que el alumno realiza de los tipos de razonamiento que se utilizan en clase y que son aceptados como válidos por el profesor.

Brousseau (1983), considerando estos hechos, llegó a plantear el razonamiento natural como un posible “obstáculo cultural” en el proceso de enseñanza de las Matemáticas. Como consecuencia, Orús se plantea como objetivo de esta primera parte ***dar un estatus al razonamiento en la relación didáctica:***

“En definitiva: Quel est le statut du “raisonnement” dans la relation didactique?. Répondre à cette question est l’objectif de la première partie de notre travail.” (Orús, 1992, p.p. 14-15).

A partir de este planteamiento se detecta un problema de contrato didáctico en términos de paradoja, al utilizar el alumno su razonamiento natural y espontáneo cuando el profesor intenta implicarlo en la construcción de un conocimiento matemático que supone, por definición, un razonamiento formal propio. Si los profesores se ocupan explícitamente de las dificultades del alumno provocadas por su razonamiento natural y sus dificultades con el razonamiento formal implicado, entonces los enseñantes no están trabajando los contenidos matemáticos, sino más bien la epistemología, la lógica, etc. Pero si los profesores ignoran los razonamientos espontáneos de los alumnos, entonces dichos razonamientos pueden convertirse en un obstáculo para la construcción de los razonamientos formales o científicos, a nivel individual o colectivo (tal y como postula Brousseau, 1986a).

El enseñante se enfrenta a esta paradoja con una nueva situación paradójica: no puede permitir el error sin incidir sobre él, pero a la vez no puede actuar porque no tiene instrumentos para abordar el problema, dejando bajo la responsabilidad del alumno todo lo que concierne al razonamiento.

Orús (1992) concluye la primera parte con un análisis teórico y experimental de las relaciones personales del alumno con los diversos funcionamientos del razonamiento natural y se presenta un cuestionario original, “*el cuestionario Schtroumphis*”, como instrumento adecuado para analizar el razonamiento natural de los alumnos, como medio de enseñanza de la Lógica y como instrumento de comunicación con los profesores (destaca su carácter fenomenotécnico).

Así pues, en esta primera parte se describe, se construye teóricamente y se constata empíricamente un fenómeno didáctico relacionado con el contrato didáctico. La detección de este problema plantea, en definitiva, la necesidad de un cambio de contrato didáctico que será abordado en la segunda parte de la tesis.

Para dar solución al problema planteado se debe crear un lugar en la relación didáctica para el razonamiento natural. Para superar la situación paradójica descrita en la primera parte se propone la búsqueda de una **ingeniería didáctica**, basada en la TSD según Brousseau (1986a). Se considera que se debe actuar sobre la práctica del profesor, elaborando una familia de lecciones y de situaciones didácticas que permitirán negociar el estatus del razonamiento natural del alumno, proporcionando al enseñante un instrumento de negociación didáctica respecto de dicho razonamiento. Este planteamiento hace necesario diferenciar entre la *Lógica* y el *pensamiento natural* (tanto del alumno como del enseñante) que se utiliza en las Matemáticas. Para diferenciar y representar de la misma manera ambos razonamientos se toma como instrumento didáctico el modelo matemático de la agregación de datos, del análisis tipológico (Orús, 1992, 1993a, 1993b, 1993c y 1996b).

Las tablas de datos booleanas (o binarias) de doble entrada son el medio propuesto por Orús (1992), para representar a la vez los diferentes tipos de razonamientos (pensamiento natural, la lógica, la clasificación...) sobre un mismo soporte - la propia la tabla de datos -, pero con reglas de funcionamiento distintas.

“Les tableaux des données, utilisés dans l’analyse typologique va être le moyen de représenter différents types de raisonnements (la pensée naturelle, la classification, la logique, les jugements, etc.) avec des règles de manipulation diverses, mais portant sur des tableaux semblables” (Orús, 1992, p.20)

Este instrumento didáctico actúa de diferente forma según el sujeto que lo utiliza: para el alumno tiene **carácter ostensivo de referencia** (Bosch, 1994 y Bosch et Chevallard, 1999), puesto será un medio de objetivación de sus razonamientos y para el profesor un **medio de negociación** y comunicación con los alumnos que le permite hacer un “hueco”, en la relación didáctica, al razonamiento espontáneo del alumno. Pero en ningún caso se realiza una enseñanza explícita del análisis tipológico de los datos a los alumnos de la experimentación.

Las situaciones didácticas que la autora elabora para aplicar la modelización y utilizar el método de agregación de datos son: “*El juego de la agencia de viajes*” (trata el aspecto semántico), “*El juego de coalición*” (trata el aspecto formal) y “*La clasificación de las plantas*” (trata el análisis tipológico de datos).

Se puede decir que en esta tesis se plasma el constante esfuerzo por integrar las vertientes “científica” y “experimental” de la DM. Por una parte, las hipótesis teóricas son las que sustentan todo el trabajo empírico y, en particular, la elaboración y experimentación de la ingeniería didáctica así como la interpretación de los resultados obtenidos. Por otra, es la propia lógica del trabajo experimental y los resultados empíricos que se van obteniendo los que van proporcionando el nuevo estatus del razonamiento natural, tal y como se plantea al principio de su investigación.

Los trabajos de investigación realizados por Orús (1986b-2009) profundizan en este aspecto utilizando el tratamiento de datos como instrumento didáctico para trabajar el razonamiento y la lógica con el alumnado, en situación escolar.

Dentro del mismo marco teórico de la TSD y como continuidad de la tesis de Orús (1992), encontramos el trabajo de Moreira (1993) con respecto al razonamiento. Este trabajo ofrece al profesorado la posibilidad de tomar conciencia de cómo gestiona o qué tipo de tratamiento le da al término “verdad” en situación escolar en la etapa de primaria. Asimismo, este trabajo facilita la preparación de la enseñanza de la Lógica para la etapa secundaria.

Durand-Guerrier (1996) investiga sobre la Lógica y el razonamiento. Muestra la insuficiencia de los análisis realizados en el campo de la psicología cognitiva con respecto a las diferencias entre el llamado razonamiento científico y la racionalidad natural de los alumnos (razonamiento natural, razonamiento espontáneo, modelos implícitos), en el dominio de la DM, para resolver la problemática centrada en el conflicto entre lógica natural y Lógica formal. Su tesis confirma a su vez, la gran sensibilidad de los resultados obtenidos, los contenidos sobre los que se aplican los razonamientos, así como la importancia del estado de los conocimientos matemáticos en juego.

Además Durand-Guerrier indica la inadecuación del cálculo proposicional, para modelizar el razonamiento matemático de los alumnos, y por tanto, cuestiona los

resultados de psicología cognitiva y más concretamente los trabajos de Piaget sobre este tema. De forma alternativa propone la utilización del cálculo de predicados, tomando la Lógica formal como referencia para modelizar este razonamiento matemático de los alumnos (Orús, 1999).

Gibel (1999-2013), desde el enfoque de la TSD y la teoría semiótica de Peirce, analiza procesos de razonamiento producidos en la solución de problemas de situaciones (situaciones con una dimensión adidáctica). Se basa fundamentalmente, en tres ejes para analizar el razonamiento: el primero está relacionado con el medio de la situación, que establece más o menos la forma y el estado lógico de los enunciados matemáticos; el segundo analiza las funciones de los procesos de razonamiento y la tercera dimensión se basa en la semiótica que considera las formas de las declaraciones.

Otro trabajo en el que se investiga sobre la enseñanza de la Lógica en formación de profesorado es la tesis de Peydró (2015). En esta investigación se plantea que en el grado de Maestro de educación primaria, es insuficiente el bagaje que manejan los futuros maestros -de Matemáticas- con respecto a la Lógica formal, en cambio ésta es necesaria en su propia formación, puesto que serán los que a posteriori deberán trabajar con los alumnos contenidos y procedimientos directamente relacionados con la Lógica.

Y por otra parte, en el estudio realizado por Pitarch (2002) sobre la viabilidad e interés didáctico del tratamiento de la información en la ESO, se realiza una primera aproximación experimental con respecto al tema planteado, mostrando el interés didáctico que puede cobrar el desarrollo del tratamiento de datos en la etapa de secundaria obligatoria. Dicha investigación se completa en Pitarch y Orús (2003 y 2005), en el que se amplía dicho estudio mediante el análisis didáctico del cuestionario trabajado en Pitarch (2001, 2002), dándole mayor dimensión a su análisis desde el marco teórico de la TSD. El cuestionario es interpretado desde distintos dominios matemáticos: Teoría de conjuntos, Lógica, Estadística; y además se profundiza en el análisis y elección de las variables didácticas a partir del mismo cuestionario.

El trabajo de Pitarch (2002) posibilita conjeturar que la ingeniería didáctica que se busca para alumnos de la ESO es interesante didácticamente, y que basándonos en el tipo de trabajo sobre las tablas de datos propuesto por Pitarch y Orús (2005) esa ingeniería también es viable. Por lo tanto, a partir de estos avances en nuestro estudio iniciado en 2002, vemos la posibilidad de proponer el diseño y la elaboración de las

situaciones didácticas, utilizando como instrumento o soporte didáctico las tablas de valores binarios.

Conclusiones

El objetivo de proponer el trabajo y la manipulación del tratamiento de la información, a través de los datos, no es una idea original de nuestra investigación, puesto que desde las directrices curriculares se plantea el desarrollo de esta competencia en la escolaridad primaria y secundaria obligatoria. Pero hemos podido constatar que los contenidos planteados en el currículum oficial, según las leyes educativas vigentes al respecto, LOE (D. 112/07) y LOMCE (D. 87/15), se reducen a la enseñanza de conceptos estadísticos elementales y a la recogida y representación de datos. Los conocimientos enseñados realmente en el aula difieren bastante de las expectativas planteadas “oficialmente” en la contribución del área de las Matemáticas para el desarrollo de dicha competencia.

Asimismo, en el análisis del currículum de las Matemáticas de la nueva ley educativa, la LOMCE, permite concluir que también se le otorga mucha importancia al tratamiento de la información -como en la anterior ley educativa, la LOE- sin embargo, no se han introducido nuevos contenidos al currículum oficial que potencien el desarrollo de la competencia *tratamiento de la información y competencia digital*. En cuanto al razonamiento lógico, tampoco se especifican contenidos que permitan desarrollarlo de forma específica.

Desde la DM en general (Guerrero, S. (1999), Vallecillos (1995), D'Amore (2005), Campos (2000), Cerda et al (2011), Cañadas (2007), Ortega (2001)) y desde la Educación Estadística ((Batanero et al., 1991, 2000a, 2000b, 2004, 2012), Batanero (1999, 2000b, 2004, 2013, 2014), Godino (1995), Batanero y Godino (2001b, 2005), Russell y Mokros (1991, 1995), Tormo (1995)), estos reconocidos investigadores remarcan la importancia de este tema a nivel didáctico y señalan las posibilidades didácticas que puede aportar el tratamiento de datos en esta etapa educativa. No obstante, en las propias investigaciones de estos autores se pone de manifiesto la insuficiencia y las limitaciones que existen en los trabajos actuales con respecto a este tema.

CAPÍTULO 3

El cuestionario Q

En este capítulo se presenta la naturaleza de un cuestionario elaborado como un instrumento metodológico, que utilizaremos para poder llevar a cabo una primera experimentación con los alumnos de la ESO.

La decisión de diseñar este tipo de cuestionario no es nueva. Continúa la línea de trabajo de Orús (1986b y 1992) y Pitarch (2002 y 2003) que han utilizado cuestionarios similares en sus investigaciones en educación primaria y secundaria respectivamente. Retoma la naturaleza de *instrumento fenomenotécnico* otorgada al cuestionario diseñado por Orús (1992), para mostrar la explicitación de diversos tipos de funcionamiento del razonamiento -tratamiento de datos, la Lógica y la clasificación- en los últimos años de la escolaridad obligatoria de primaria. Asimismo le permitió analizar la naturaleza lógico-matemática del trabajo adidáctico que le permitía la tabla de datos y el cuestionario, como base de una situación fundamental para un acceso diferente al trabajo lógico y al tratamiento de la información en la enseñanza primaria.

Pitarch (2002) continuó utilizando en esa dirección el cuestionario, pero ahora en la etapa de la enseñanza secundaria obligatoria (ESO), con el objetivo de plantear la viabilidad de un trabajo simultáneo del tratamiento de la información (datos), de la Lógica y -en los casos de 3º y 4º de ESO- algunos contenidos básicos de Estadística descriptiva elemental. Los resultados obtenidos en este trabajo previo, son los que han motivado y fundamentado la continuidad de esta línea de investigación y la elaboración de una propuesta didáctica innovadora en la etapa educativa de la ESO que incluye distintas situaciones de aprendizaje que faciliten la observación y el análisis de los diversos tipos de razonamientos de los alumnos y además posibiliten la introducción de nuevas técnicas de análisis de datos, distintas a las técnicas estadísticas convencionales planteadas en las directrices curriculares. Situaciones didácticas, todas ellas, basadas en un trabajo *adidáctico* sobre tablas de datos binarios, similares a las que se utilizan en todos los cuestionarios propuestos por Orús y Pitarch.

Para ello realizaremos, en este capítulo, el análisis a priori del cuestionario Q elaborado como una situación adidáctica, a partir del cual se puede vislumbrar el trabajo lógico-matemático que se pretende realizar con los alumnos de la ESO. Dicho análisis permite identificar cada una de las preguntas, con el tipo de operaciones lógicas y matemáticas que deben realizar los alumnos para contestarlas.

La aplicación del programa informático CHIC (Gras, Couturier et Bodin, 2007), que implementa los cálculos de las diferentes técnicas del análisis estadístico implicativo (ASI) (Gras, 1992, 1995a y b), complementa el análisis a priori de nuestro instrumento. Nos sirve para confirmar la relación que existe a priori, entre las variables didácticas y los criterios que hemos elegido para identificar las preguntas del cuestionario propuesto.

Cerramos el capítulo con la presentación de la experimentación del mismo y el análisis de los resultados obtenidos, en la pasación del curso escolar 2014-15, según los criterios establecidos a priori. También utilizaremos para complementar este estudio, el análisis de datos del programa informático CHIC. La comparativa de estos resultados con los que obtuvimos en la experimentación llevada a cabo en Pitarch (2002), permitirá reforzar y validar los nuevos resultados actuales.

3.1. Presentación del cuestionario Q

El cuestionario “Q” que vamos a presentar es el resultado obtenido tras realizar distintas modificaciones sobre el “Cuestionario de los Pitufos” (Orús, 1986b pp. 134-138 y 1992. pp.259-293), el “Cuestionario del juego de la agencia de viajes” (Orús, 1992 pp 392-422) y el “Cuestionario sobre gustos musicales” (Pitarch, 2002 pp.43-54).

Este cuestionario “característico” (no es un cuestionario al uso) consta fundamentalmente de unas preguntas y una tabla, T, de valores binarios (0 y 1). Para contestar a las cuestiones los alumnos deben utilizar la tabla T, siguiendo unas indicaciones que se les presentan en “la consigna”.

Se ha elegido, para la versión de 2014-15, la temática del juego de la “Agencia de viajes”, adaptando los criterios de la tabla T y las cuestiones se han elaborado a partir del “Cuestionario de los Pitufos”, teniendo en cuenta las modificaciones realizadas sobre el mismo, para la experimentación con alumnos de la ESO, que dieron origen al “Cuestionario sobre gustos musicales”.

El motivo de retomar la temática de la “agencia de viajes” es porque ofrece más posibilidades que la de los “gustos musicales” para plantear cuestiones que permitan analizar si la componente “semántica” influye en la utilización del razonamiento espontáneo o natural del alumno obstaculizando su razonamiento formal. Además a partir de la comparación entre los resultados de esta experimentación y la realizada con el “Cuestionario sobre gustos musicales” (Pitarch, 2002), podremos valorar si existen diferencias significativas relacionadas con el tema elegido para la elaboración del cuestionario Q.

En la figura 3-1 mostramos el Cuestionario Q, junto a la tabla T y la consigna con la que han trabajado los alumnos, de 1º y 2º de ESO (2014-15).

LA CONSIGNA

“Se ha hecho una encuesta a jóvenes entre 15 y 20 años, para que una Agencia pueda organizarles un viaje teniendo en cuenta sus preferencias.

A continuación se presenta una tabla que contiene las respuestas de los jóvenes a la encuesta realizada:

- A la izquierda está el listado de las actividades o lugares que puede tener el viaje, sobre los que se pide la opinión a cada uno de los jóvenes; por ejemplo: “¿te gusta hacer visitas con guía?”
- La letra mayúscula de cada una de las columnas, representa el nombre de uno de los jóvenes; por ejemplo: “el joven K”
- Los jóvenes entrevistados sólo podían contestar un SI o un NO. En la tabla de valores (T) el 1 representa el SI y 0 el NO.

Para ayudar a la Agencia de viajes a obtener información a partir de estos datos, puedes contestar el cuestionario (Q) que se te ofrece a continuación utilizando la Tabla T.

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
C1. ir a un museo?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
C2. ir a competiciones deportivas?	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
C3. jugar a tenis?	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
C4. bañarte?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C5. los cruceros por el Caribe?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
C6. ir a Francia a aprender francés?	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C7. la montaña?	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C8. hacer visitas con guía?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
C9. probar especialidad del lugar?	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
C10. jugar a las cartas?	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
C11. ir en bici?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C12. las marchas por la montaña?	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
C13. ir a Italia a visitar museos?	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C14. pemoctar en un castillo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla T

CUESTIONARIO Q

- Q1. ¿Al joven H le gustan las actividades de competición deportiva?
- Q2. ¿A cuántos jóvenes les gusta hacer visitas con guía?
- Q3. ¿Cuántas actividades le gustan al joven Q?
- Q4. ¿Existe algún tipo de actividad que les guste a todos los jóvenes? ¿Hay otras? Di cuáles
- Q5. ¿Existe algún joven a quien no le guste ningún tipo de actividad?En caso afirmativo, indica su nombre.....
- Q6. Los jóvenes, ¿prefieren ir a competiciones deportivas o ir a Francia a aprender francés?.....
- Q7. ¿Existe algún joven a quien le gusten todas las actividades?Si encuentras alguno, escribe su nombre
- Q8. ¿Hay algún tipo de actividad que guste más que la de pemoctar en un castillo?
- Q9. ¿Qué pareja de jóvenes tiene más posibilidades de encontrarse en la montaña, H-I o R-S? ¿Por qué?
- Q10. ¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los jóvenes C y E?
- Q11. ¿Cuántos jóvenes prefieren probar las especialidades del lugar y bañarse?.....
- Q12. ¿A cuántos jóvenes no les gusta ir a competiciones deportivas, ni jugar a tenis?
- Q13. Por sus elecciones, los jóvenes J y L se parecen: -nada - un poco - bastante - mucho
- Explica cómo has llegado a tu conclusión
- Q14. Si la Agencia de viajes quisiera programar sólo tres actividades, escribe los tipos de actividades que tú le ayudarías a elegir¿Por qué?
- Q15. Las respuestas del joven I, ¿se parecen más a las del joven F o a las del joven J?.....Razona tu respuesta

Q16. Di si es verdadera o falsa, cada una de las siguientes frases:

	V	F	N/S
Q16.1) Al joven F no le gusta jugar al tenis			
Q16.2) Al joven B le gusta ir a Francia a aprender francés			
Q16.3) A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, también les gusta la montaña			
Q16.4) A todos los jóvenes que les gusta la montaña, también les gusta ir en bici			
Q16.5) Los jóvenes prefieren más las visitas con guía, que ir a Italia a visitar museos			
Q16.6) Los jóvenes prefieren más los cruceros por el Caribe, que ir en bici			
Q16.7) No es verdad que a G le guste probar las especialidades del lugar			
Q16.8) A los jóvenes H y O les gustan el mismo tipo de actividades			
Q16.9) A todos los jóvenes les gustan las marchas en la montaña			
Q16.10) Los jóvenes L y N están de acuerdo en diez cuestiones de la encuesta			

Figura 3-1: El cuestionario Q para 1º y 2º de la ESO (2014-15)

El cuestionario con el que trabajan los alumnos de 3º y 4º es el mismo que está indicado en la figura 3-1 añadiéndole tres cuestiones más, las de la figura 3-2, que versan sobre contenidos básicos de Estadística descriptiva.

- Q17) ¿A qué porcentaje de los jóvenes les gusta jugar a las cartas?
- Q18) Si consideramos -jugar a tenis- como una variable estadística, ¿qué frecuencia absoluta dirías que tiene en esta distribución estadística?
- Q19) ¿Qué frecuencia relativa tendría la variable estadística de la pregunta anterior?.....

Figura 3-2: Cuestiones que se añaden a Q de la figura 3-1, para 3º y 4º de la ESO

La razón por la que sólo se les plantea a los alumnos de los últimos cursos de la etapa, es porque éstos están más familiarizados con estos conceptos. En la experimentación del “Cuestionario sobre gustos musicales” también se incluyen estas cuestiones y los resultados de éxito en los primeros cursos de la etapa fueron muy bajos (oscilan entre el 0% y el 38% en 1º y 2º de la ESO; el resultado más alto corresponde a un porcentaje) (Pitarch, 2002, pp.83-84). En esta ocasión no hemos considerado oportuno añadir estas cuestiones, en el primer ciclo, por dos razones: la primera por el bajo éxito obtenido en la anterior experimentación y la segunda porque el cuestionario Q se experimenta en el primer trimestre de curso académico, fechas en las que los alumnos de 1º y 2º aún no han trabajado este bloque de contenidos.

3.2. Análisis a priori del cuestionario Q

Brousseau y colaboradores (Brousseau y Lacasta, 1995; Orús, 1986b y 1992) realzan la importancia del estudio a priori para elaborar y caracterizar un cuestionario a través del cual se puede materializar el trabajo matemático en cuestión. Este análisis a priori también permite la introducción de técnicas del análisis multivariante de datos, como puede ser el *análisis factorial de correspondencias*, el *análisis en componentes principales* (Brousseau y Lacasta, 1995) y el *análisis estadístico implicativo* (ASI) (Orús y Gregori, 2005). La relevancia del análisis a priori de cuestionarios basada en técnicas del ASI se muestra con detalle en un estudio reciente realizado por Gregori, Orús y Pitarch (2009), en el que se concluye la pertinencia del análisis a priori del “instrumento didáctico” que en este caso es “*el cuestionario*”.

“El trabajo presentado en esta comunicación ilustra una vez más la conveniencia -incluso necesidad- de los análisis a priori de los cuestionarios, para que éstos se adecuen a los objetivos que la investigación pretende abordar; esta necesidad ha sido reclamada constantemente en Didáctica de las Matemáticas, y especialmente desde la Teoría de Situaciones (Brousseau et al.). En nuestro caso, el rol de situación a-didáctica que se pretendía jugar con el cuestionario, es el que ha marcado la necesidad del estudio a priori de dicha situación y de los conocimientos presentes en el medio a-didáctico, para determinar las variables que queríamos observar y los valores que se les iba a otorgar a dichas variables. En Pitarch y Orús (2005), se puede consultar este análisis y el interés didáctico que puede tener el cuestionario, para trabajar en clase, más allá del valor instrumental de recogida de información que ha supuesto la experimentación del cuestionario.(Gregori, Orús y Pitarch, 2009. pp184-185)

En nuestro caso, el estudio a priori del cuestionario Q lo vamos a estructurar de la siguiente forma:

- por una parte presentamos la caracterización del trabajo matemático que aporta cada una de las cuestiones. Esta identificación queda plasmada en una matriz booleana, que denominamos “matriz a priori” (MAP). Este mismo estudio también se puede ver detallado con respecto al “Cuestionario sobre gustos musicales” (Pitarch, I. 2002, pp 55-66) y en anteriores investigaciones de Orús (1986b, 1992),
- en segundo lugar utilizamos el recurso estadístico del software CHIC aplicándolo sobre la matriz a priori, con el objetivo de clasificar las cuestiones según su proximidad o distancia, clasificación jerárquica e implicativa mediante los cálculos e índices estadísticos que aporta este programa (frecuencias, porcentajes, medias aritméticas, índices de proximidad o distancia de Lerman (1981), índices de correlación, índices de cohesión implicativa (Lerman et al., 1981), ...). Esta clasificación se presenta a través de unos gráficos (árbol de similaridad, árbol jerárquico de cohesión y grafo implicativo, según el tipo de clasificación que se aplica) que nos permiten confirmar la caracterización a priori que hemos realizado de las cuestiones (consultar anexo 6),
- por último presentamos la identificación del trabajo lógico-matemático según distintos puntos de vista matemáticos: la Lógica, la Estadística y la Teoría de

conjuntos. El estudio a priori interpretado desde esta perspectiva también queda esbozado en otros trabajos realizados sobre el “Cuestionario sobre gustos musicales” (Pitarch y Orús, 2005).

3.2.1. Matriz a priori del cuestionario Q

Para realizar el análisis a priori, se caracterizan cada una de las cuestiones teniendo en cuenta distintos tipos de operaciones lógico-matemáticas que deben realizar los alumnos al responderlas. Este análisis es semejante al que se realizó con respecto al “Cuestionario sobre gustos musicales” (Pitarch, 2002).

Estas operaciones se distribuyen básicamente en los siguientes bloques:

- trabajo sobre la tabla (T),
- recuentos obligatorios o alternativos (R),
- comparación entre filas y/o columnas y además relación semántica (C),
- diferencias y coincidencias positivas y/o negativas (F),
- operaciones lógicas (L) (implicación, conectores lógicos, cuantificadores, negación y atribución de verdad),
- operaciones básicas de Estadística (frecuencias, moda) (E)
- razonamiento sobre las respuestas de la cuestión (ARG)

A partir de estos bloques se puede hacer una primera identificación del trabajo matemático que se exige en cada pregunta. Esta primera aproximación se puede reflejar en la siguiente tabla (tabla 3-1):

CUESTIÓN	OPERACION/ES MATEMÁTICA/S FUNDAMENTAL/ES	BLOQUE fundamental
1. ¿Al joven H le gustan las actividades de competición deportiva?	Manejo de la tabla, en concreto de una celda o casilla	T
2. ¿A cuántos jóvenes les gusta hacer visitas con guía?	Hacer un recuento de las presencias en una fila concreta	R
3. ¿Cuántas actividades le gustan al joven Q?	Hacer un recuento de las presencias de una columna concreta	R

4. ¿Existe algún tipo de actividad que les guste a todos los jóvenes? ¿Hay otras? Dí cuáles	Búsqueda en toda la tabla de alguna fila que tenga todos los valores 1 . Trabajo con el cuantificador universal y existencial .	L
5. ¿Existe algún joven a quien no le guste ningún tipo de actividad? En caso afirmativo, indica su nombre	Búsqueda en toda la tabla de alguna columna con todos sus valores 0 . Trabajo con el <u>cuantificador universal, existencial</u> y también la negación .	L
6. Los jóvenes, ¿prefieren ir a competiciones deportivas o ir a Francia a aprender francés?	Comparación de las presencias que hay entre dos filas . Trabajo con la <u>disyunción</u>	F
7. ¿Existe algún joven a quien le gusten todas las actividades? Si encuentras alguno, escribe su nombre	Búsqueda en toda la tabla de alguna columna con todos sus valores 1 . Trabajo con el <u>cuantificador universal y existencial</u> . La pueden confundir con la 5.	L
8. ¿Hay algún tipo de actividad que guste más que la de pernoctar en un castillo?	Comparación de los 1 que tienen las filas de la tabla con los que tiene una en concreto. Se pueden fijar enseguida con la de “ir en bici” que tiene toda la fila 1. Y la que aparece en la pregunta un 1 menos que en la de “ir en bici”.	C
9. ¿Qué pareja de jóvenes tiene más posibilidades de encontrarse en la montaña, H-I o R-S? ¿Por qué?	Comparación semántica . Pueden considerar sólo ir a la montaña y tal vez no tengan en cuenta la posibilidad de las marchas por la montaña. Razonamiento de la respuesta	C
10. ¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los jóvenes C y E?	Recuento de las diferencias entre dos columnas. <u>Existencial y conjunción</u>	F
11. ¿Cuántos jóvenes prefieren probar las especialidades del lugar y bañarse?	Recuento de las copresencias de dos filas. Conjunción	F
12. ¿A cuántas jóvenes no les gusta ir a competiciones deportivas, ni jugar a tenis?	Recuento de las coausencias de dos filas. Conjunción y negación . También <u>comparación semántica</u> por las dos actividades elegidas (el tenis es deporte)	L
13. Por sus elecciones, las jóvenes J y L se parecen: -nada - un poco - bastante - mucho. Explica cómo has llegado a tu conclusión	Recuento y comparación de las coincidencias de dos columnas (deben tener en cuenta tanto las coausencias como las copresencias)	F
14. Si la Agencia de viajes quisiera programar sólo tres actividades, escribe los tipos de actividades que tú le ayudarías a elegir ¿Por qué?	Búsqueda de las filas que tienen mayor cantidad de 1. Razonamiento de la respuesta, para comprobar si utilizan el razonamiento natural de forma subjetiva en la respuesta.	C ARG
15. Las respuestas del joven I, ¿se parecen más a las del joven F o a las del joven J? Razona tu respuesta	Recuento y comparación de las coincidencias de dos parejas de columnas . Trabajo con la <u>disyunción</u> . Argumentación de la respuesta.	F ARG

Las siguientes cuestiones requieren una respuesta con atribución de verdad(V;F;N/C):		
16.1. Al joven F no le gusta jugar al tenis	Comprobación si el valor de una celda es cero. Trabajo negación	T
16.2. Al joven B le gusta ir a Francia a aprender francés	Comprobación si el valor de una celda es uno.	T
16.3. A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, también les gusta la montaña	Comparación entre las copresencias de dos filas con un orden establecido. Implicación. <u>Comparación semántica.</u> Pueden tener en cuenta que en “bici” son todo 1.	L
16.4. A todos los jóvenes que les gusta la montaña, también les gusta ir en bici	Comparación entre las copresencias de dos filas con el orden inverso a la pregunta anterior. Implicación inversa y <u>comparación semántica.</u> Pueden tener en cuenta que en la fila “bici” son todo 1. Pueden cometer el error de confundir que es la misma que la anterior.	L
16.5. Los jóvenes prefieren más las visitas con guía, que ir a Italia a visitar museos	Recuento obligatorio de los 1 de dos filas para comparar qué actividad es más elegida (entre dos fijadas). <u>Comparación semántica</u> por las actividades utilizadas.	C
16.6. Los jóvenes prefieren más los cruceros por el Caribe, que ir en bici	Recuento de los 1 de dos filas para comparar qué actividad es más elegida (entre dos fijadas). Pero <u>tal vez no hagan recuento porque “bici” es elegida por todos y lo pueden tener en cuenta por otras preguntas contestadas anteriormente:</u> 4, 8 y 14.	C
16.7. No es verdad que a G le guste probar las especialidades del lugar	Comprobación si una celda tiene el valor 1 para contestar falso. Juego con la NEGACIÓN	L
16.8. A los jóvenes H y O les gustan el mismo tipo de actividades	Comparación entre las copresencias de dos columnas. <u>Pueden confundirlo y mirar las coincidencias</u> (y en la pregunta aparece claramente “les gusta”)	F
16.9. A todos los jóvenes les gustan las marchas en la montaña	Comprobación si la fila “marchas montaña” tiene todo 1. O <u>simplemente localizar un sólo 0 para determinar la respuesta.</u>	L
16.10. Los jóvenes L y N están de acuerdo en diez cuestiones de la encuesta	Recuento de diez coincidencias de dos columnas. <u>Pueden confundir “estar de acuerdo” con sólo contabilizar las copresencias y no las coausencias.</u> Justo el caso inverso a la 16.8. <u>Es un juego con “el estar de acuerdo” y “el gustar lo mismo”</u>	F

17. ¿A qué porcentaje de los jóvenes les gusta jugar a las cartas?	Cálculo del porcentaje de las presencias de la fila que corresponde al criterio “jugar a cartas”	E
18. Si consideramos -jugar a tenis- como una variable estadística, ¿qué frecuencia absoluta dirías que tiene en esta distribución estadística?	Cálculo de la frecuencia absoluta de las presencias de una fila, realizando el recuento de las mismas.	E
19. ¿Qué frecuencia relativa tendría la variable estadística de la pregunta anterior?	Cálculo de la frecuencia relativa a partir del cálculo realizado en la cuestión anterior	E

Tabla 3-1: Trabajo matemático que supone cada cuestión de Q

La información que proporciona esta primera identificación se puede codificar para obtener la matriz a priori (MAP). Las columnas de la matriz a priori serán las cuestiones del cuestionario Q y en las filas aparecerán el tipo de operaciones que conllevan las cuestiones y a qué bloque pertenecen, codificados con cuatro iniciales: la primera indica el bloque de operaciones que identifica la pregunta y las tres siguientes intentan clarificar la operación concreta que se realiza al contestarla.

Esta información la codificamos de la siguiente forma:

- **Trabajo sobre la tabla (T):** localización de diversos elementos de la tabla de datos: una casilla, una fila, una columna... En este bloque se distinguen tres operaciones:
 - **TABL:** utilizar un elemento concreto de la tabla, para responder a la pregunta. Por ejemplo una casilla [Q1, Q16.1, Q16.2], o una fila [Q2], una columna [Q3] o dos columnas concretas [Q13, Q16.10]...
 - En cambio, en cuestiones como Q4, Q5, Q7, Q8 y Q14 se debe utilizar toda la tabla en general para responder correctamente a la cuestión, en estos casos se considera ausencia del criterio TABL
 - **TFIL:** utilizar una o varias filas para responder a la cuestión. [Q2, Q4, Q6, Q8, Q11, Q12, Q14, Q16.3, Q16.4, Q16.5, Q16.6, Q16.9, Q16.10]
 - **TCOL:** utilizar una o varias columnas para responder a la cuestión. [Q3, Q5, Q7, Q9, Q10, Q13, Q15, Q16.8]
- **Recuentos (R):** enumeración de una cantidad concreta (presencia -1-, ausencia -0-). El recuento puede ser exigido de forma obligatoria, es decir, cuando sólo se puede contestar a la cuestión realizando un recuento (la codificación será **ROBL**) [Q2, Q3, Q10, Q11, Q12, Q15, Q16-5 y Q16-10]. Y también puede contemplarse un recuento alternativo (cuya codificación será **RALT**), que

significa que para responder correctamente a la cuestión, bien se puede contar o bien observar la tabla en general (comparar dos filas o columnas, etc.) [Q4, Q5, Q6, Q7, Q8, Q13, Q14, Q16-6, Q16-8, Q16-9, Q17, Q18 y Q19]. Además se puede exigir que la respuesta a la cuestión sea mediante un cardinal (puede ser el cardinal de un subconjunto de sujetos -jóvenes- o de criterios -actividades-); en esta ocasión la codificación será **RCAR** [Q2, Q3, Q10, Q11 y Q12]

- **Comparación entre filas y/o columnas (C):** relacionar, observar o tener en cuenta simultáneamente dos o más filas/columnas para poder contestar correctamente a la cuestión. Además en este cuestionario se puede exigir comparar tanto el cardinal de los “1” (presencias), como de los “0” (ausencias) que tienen las filas o las columnas. Distinguimos pues, tres casos:
 - **CCOL:** si la cuestión pretende relacionar dos jóvenes, entonces se deberán comparar dos columnas [Q9, Q10, Q13, Q15, Q16.8, Q16.10]
 - **CFIL:** si la cuestión hace referencia a dos o más actividades del viaje, se deberán comparar las filas correspondientes [Q6, Q8, Q11, Q12, Q14, Q16.3, Q16.4, Q16.5, Q16.6]
 - **CCARD:** cuando la respuesta a la cuestión requiere la comparación entre dos o más cardinales realizados sobre las filas o columnas [Q6, Q8, Q13, Q13.1, Q14, Q14.1, Q15, Q15.1, Q16.5, Q16.6, Q16.10]
- **Proximidad / distancia (F):** este tipo de **operación** consiste en identificar las coincidencias o diferencias que existen entre dos filas o columnas de la tabla. Se pueden distinguir distintas operaciones dentro de este bloque:
 - **FDIF:** tener en cuenta las diferencias entre filas/columnas (0-1 / 1-0). [Q9, Q10]
 - **FCOI:** fijarse en las coincidencias (tanto co-presencias: 1-1, como co-ausencias: 0-0) [Q13, Q15, Q16.4, Q16.10]
 - **FPRE:** fijarse únicamente en las co-presencias, es decir, coincidencias positivas (1-1). [Q9, Q11, Q16.3, Q16.8, Q16.9]
 - **FAUS:** tomar como datos sólo las co-ausencias, es decir, las coincidencias negativas (0-0). [Q12]
- **Relación semántica (CSEM):** comparación entre los criterios de la tabla (las filas) a partir de la posible relación semántica que existe entre las actividades que propone la agencia de viajes. Esta comparación puede influir en la respuesta de la cuestión dada por los alumnos, teniendo en cuenta o no datos matemáticos

aportados por la cuestión [Q6, Q9, Q11, Q12, Q14, Q16-3, Q16-4, Q16-5, Q16-8, Q16-10]

- **Operaciones lógicas (L):** trabajo lógico con las proposiciones o predicados del cuestionario, distinguiendo ocho operaciones:
 - **LIMP:** la **implicación lógica** [Q16.3, Q16.4]
 - **LCON:** **conector lógico conjunción** [Q9, Q10, Q11, Q12, Q13, Q16.8]
 - **LNEG:** **conector lógico negación** [Q5, Q12, Q16.1, Q16.7]
 - **LDIS:** **conector lógico disyunción** [Q6, Q15, Q21]
 - **LUNI:** **cuantificador universal** [Q4, Q5, Q7, Q16.3, Q16.4, Q16.9]
 - **LEXI:** **cuantificador existencial** [Q4, Q5, Q7, Q8, Q10, Q13]
 - **LRSN:** cuando la respuesta debe contestarse con un SÍ o un NO [Q1, Q4, Q5, Q7, Q8](para identificar entre estas cuestiones cuál de las dos respuestas es la correcta, también caracterizamos con **LRSI** las cuestiones que tienen como respuesta correcta la afirmación)
 - **LAVV:** cuando para responder a la cuestión se requiere la atribución de verdad (verdadero, falso) [de Q16-1 a Q16-10]. Y caracterizamos con **LRVE** cuando la respuesta correcta es “verdadero”
- **Operaciones básicas de Estadística (E):** aplicación explícita de las frecuencias absoluta (**EFEX**), relativa (**Efre**) y porcentajes (**EPER**) [Q18, Q19, Q17, respectivamente]. Utilización implícita de la medida de centralización: moda de una variable estadística.[Q4, Q5, Q7, Q8], su caracterización será (**EMIM**).
- **Razonamiento sobre la respuesta de la cuestión (ARGU):** se exige una respuesta razonada por parte del alumno. De esta manera se podrá obtener más información sobre el tipo de argumentos utilizados por los estudiantes [Q4, Q7, Q9, Q13, Q14, Q15]

A continuación se presenta la matriz a priori (MAP), en la que se marca con un 1 o un 0 si cada pregunta del cuestionario trabaja o no, cada una de las operaciones y de los bloques que acabamos de definir:

	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	9.1	Q10	Q11	Q12	Q13	13.1	Q14	14.1	Q15	15.1	16.1	16.2	16.3	16.4	16.5	16.6	16.7	16.8	16.9	16.10	Q17	Q18	Q19			
TABL	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
TFIL	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1			
TCOL	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0			
ROBL	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1			
RALT	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0			
RCAR	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0			
CFIL	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0			
CCOL	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0			
CSEM	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0			
CCAR	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0			
FDIF	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
FCOI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0			
FPRE	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0			
FAUS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
LIMP	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
LEXI	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
LUNI	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0		
LCON	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
LDIS	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
LNEG	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0		
LRSN	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
LRSI	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
LAVV	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0		
LRVE	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0		
EFIM	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	1		
EFEX	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0		
Efe	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0		
EPER	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
EMIM	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
ARGU	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 3-3: Matriz a priori de Q: MAP

Cabe señalar que esta matriz es un útil didáctico que nos permite analizar a priori cuál puede ser el comportamiento esperado en las respuestas dadas por los alumnos. Por lo que, se podrá hacer una comparativa entre la caracterización previa de las cuestiones y las respuestas reales de los estudiantes tras la pasación y corrección del cuestionario (análisis a posteriori). Ésta proporcionará información acerca del trabajo matemáticamente “esperado” respecto del trabajo realizado por los alumnos de la experimentación (Lógica y tratamiento de datos, en el caso de 1º y 2º de la ESO y añadiendo la Estadística descriptiva -en el caso de 3º y 4º de la ESO).

Así mismo podemos añadir que a través de esta identificación, podemos confirmar el tratamiento simultáneo de los datos, de la Lógica y de la Estadística descriptiva a partir de la tabla de datos (T) y del cuestionario (Q).

3.2.2. Aplicación de CHIC a la matriz a priori de Q (MAP)

A partir de la aplicación del programa informático CHIC a la matriz a priori de Q (MAP), podemos analizar la relación entre las cuestiones a nivel de proximidad y a nivel implicativo (según los índices de proximidad estadística, intensidad de cohesión e implicación estadística obtenidos)²⁵. Este recurso nos permite complementar el estudio a priori realizado en las cuestiones de Q que hemos plasmado en la sección anterior.

En primer lugar, el análisis de clasificación mediante los índices de proximidad nos proporciona el árbol de similaridad presentado en la figura 3-4, en el que podemos observar que las cuestiones quedan agrupadas en tres clases de cuasi-equivalencia (son las agrupaciones que realiza el software según la proximidad que existe entre las cuestiones a partir del cálculo de los índices de proximidad entre las mismas) de forma global, aunque dentro de cada una de ellas se podrían distinguir subclases:

$$C_1 = \{Q1, Q16.1, Q16.2, Q16.7, Q9, Q16.8\}$$

$$C_2 = \{Q4, Q8, Q5, Q7, Q6, Q14, Q16.5, Q16.6, Q16.9\}$$

$$C_3 = \{Q2, Q3, Q18, Q17, Q19, Q10, Q13, Q15, Q16.10, Q11, Q12, Q16.3, Q16.4\}$$

En esta clasificación aparecen nudos significativos (un nudo es un nivel de clasificación según los índices estadísticos de proximidad y distancia que calcula CHIC). Cada nudo forma una clase de cuasi-equivalencia, los cuales nos marcan subclases que forman parte de las tres clases globales.

El primer nudo significativo (con índice de proximidad de 0.999966) relaciona las cuestiones Q16.2, Q16.7. El segundo nudo significativo es el nº 3 (0,99903) uniendo las anteriores cuestiones con Q16.1. y el siguiente es el nudo 9 (0,99853) añadiendo la cuestión Q1 a las anteriores. De esta manera se obtiene una subclase de la clase C_1 formada por la cuestiones **{Q1, Q16.1, Q16.2, Q16.7}** quedando unidas por el nivel significativo nº 9 sobre un total de 27 nudos en todo el árbol. Aunque las tres últimas deben contestarse con una atribución de verdad, la caracterización de las cuatro cuestiones coincide en que todas ellas versan sobre la **verificación de que un sujeto (joven) cumple o no un criterio** (le guste una actividad) de la tabla T. Aunque alguna de ellas es más directa que otras (Q16.1 y Q16.7 tienen además negación), todas ellas tienen esa característica en común.

²⁵ Consultar anexo 6, en el que se detalla el tipo de índices estadísticos que utiliza CHIC y el tipo de gráficos que proporciona a partir de ellos.

Q1: ¿Al joven H le gustan las actividades de competición deportiva?
Q16.1: Al joven F no le gusta jugar al tenis ¿V o F?
Q16.2: Al joven B le gusta ir a Francia a aprender francés. ¿V o F?
Q16.7: No es verdad que a G le guste probar las especialidades del lugar ¿V o F?

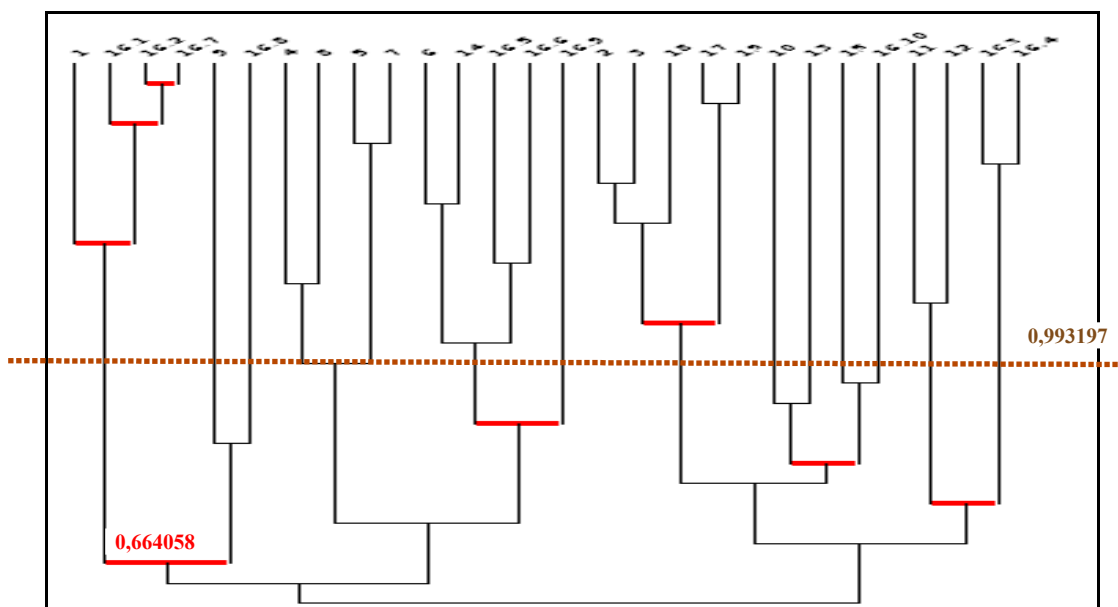


Figura 3-4: Árbol de similaridad entre las cuestiones de Q, aplicando CHIC a la matriz MAP

Las cuestiones **Q9** y **Q16.8** que también forman parte de C_1 , se unen a la subclase mencionada en el nudo significativo nº 25 (índice de proximidad de 0,624058). Estas dos cuestiones tratan sobre las **coincidencias positivas** (copresencias) que pueden tener **parejas de sujetos** (jóvenes). El índice de similaridad es bajo y por ello la relación entre estas cuestiones y las anteriores se produce en el nudo significativo 25 sobre un total de 27. La relación, aunque débil, puede explicarse debida a que todas ellas tratan de la verificación de sujetos sobre unas actividades concretas.

Q9: ¿Qué pareja de jóvenes tiene más posibilidades de encontrarse en la montaña, H-I o R-S?¿Por qué?
Q16.8: A los jóvenes H y O les gustan el mismo tipo de actividades ¿V o F?

Si seguimos el análisis de las clases del árbol de similaridad podemos observar que las cuestiones que forman la segunda clase C_2 se pueden subdividir en otras dos: {**Q4, Q8, Q5, Q7**} y {**Q6, Q14, Q16.5, Q16.6, Q16.9**}. En esta última las cuestiones se agrupan en el nudo significativo nº 18 (0,978426). La primera subdivisión corresponde a cuatro cuestiones que tratan todas ellas fundamentalmente sobre los **cuantificadores**

universal y existencial (referido tanto a los sujetos, como a los criterios de la tabla T). Además en las preguntas Q4, Q5 y Q7 de la primera subclase y en Q14 de la segunda, se debe realizar una búsqueda en toda la tabla en general para dar una respuesta correcta.

- Q4:** ¿Existe algún tipo de actividad que les guste a **todos** los jóvenes?
Q5: ¿Existe algún joven a quien no le guste **ningún** tipo de actividad?
Q7: ¿Existe algún joven a quien le gusten **todas** las actividades?
Q8: ¿Hay algún tipo de actividad que guste más que la de pernoctar en un castillo?

La otra subclase de C_2 está formada por cinco cuestiones en las se exige fundamentalmente, bien la comparación de dos o más filas o la observación de una sola, pero en todas ellas se debe comprobar si predomina “la elección” de ese criterio (“el gusto” sobre esa actividad). Es decir, la respuesta correcta a estas cuestiones requiere la **comprobación** de si dicha/s actividad/es son la/s que más prefieren los sujetos (jóvenes) de la tabla (**Q6, Q14, Q16.5, Q16.6, Q16.9**).

- Q6:** Los jóvenes, ¿**prefieren** ir a competiciones deportivas o ir a Francia a aprender francés?
Q14: Si la Agencia de viajes quisiera **programar sólo tres actividades**, escribe los tipos de actividades que tú le ayudarías a elegir
Q16.5: Los jóvenes **prefieren** más las visitas con guía, que ir a Italia a visitar museos. ¿V o F?
Q16.6: Los jóvenes **prefieren** más los cruceros por el Caribe, que ir en bici. ¿V o F?
Q16.9: A todos los jóvenes **les gustan** las marchas en la montaña. ¿V o F?

Y por último la clase $C_3 = \{Q2, Q3, Q18, Q17, Q19, Q10, Q13, Q15, Q16.10, Q11, Q12, Q16.3, Q16.4\}$ se puede subdividir según la figura 1, en tres subclases. Una de ellas está formada por las cuestiones **{Q2, Q3, Q18, Q17, Q19}** unidas por el nudo significativo nº 13 (con índice de similaridad 0,997824). Todas estas **cuestiones exigen un recuento** de las presencias de una fila o una columna (cardinal de “1”), con la diferencia que las Q17, Q18 y Q19 se formulan en términos de contenidos de Estadística elemental (porcentaje, frecuencia relativa y absoluta).

- Q2:** ¿**Cuántas** actividades le gustan al joven Q?
Q3: ¿A **cuántos** jóvenes les gusta hacer visitas con guía?
Q17: ¿A qué **porcentaje** de los jóvenes les gusta jugar a las cartas?
Q18: Si consideramos -jugar a tenis- como una variable estadística, ¿qué **frecuencia absoluta** dirías que tiene en esta distribución estadística?
Q19: ¿Qué **frecuencia relativa** tendría la variable estadística de la pregunta anterior?

La segunda subclase de C_3 está formada por $\{Q10, Q13, Q15, Q16.10\}$ y en esta ocasión están relacionadas mediante el nudo significativo nº 20 (0,946681). En estas cuatro preguntas se exige la **comprobación de la proximidad** (utilización de las diferencias o coincidencias -positivas y negativas- entre dos o más columnas de la tabla) que existe **entre una o dos parejas de sujetos** de la tabla (jóvenes).

Q10: ¿Cuántas **diferencias** hay entre las respuestas de los jóvenes C y E?
Q13: Por sus elecciones, las jóvenes J y L **se parecen**: - nada - un poco - bastante - mucho
Q15: Las respuestas del joven I, ¿**se parecen** más a las del joven F o a las del joven J?
Q16.10: Los jóvenes L y N **están de acuerdo** en diez cuestiones de la encuesta. ¿V o F?

Y por último $\{Q11, Q12, Q16.3, Q16.4\}$ es la tercera subclase de C_3 . En ella se trabaja respectivamente la conjunción, la combinación de conjunción y negación, y en las dos últimas la condicional lógica (directa e inversa respectivamente). Las cuatro cuestiones se caracterizan por **operaciones lógicas más complejas**. Las cuestiones de esta última subclase quedan relacionadas en el nivel significativo de similaridad nº 20 (0,885137).

Q11: ¿Cuántos jóvenes prefieren probar las especialidades del lugar **y** bañarse?
Q12: ¿A cuántos jóvenes **no** les gusta ir a competiciones deportivas, **ni** jugar a tenis?
Q16.3: **A todos** los jóvenes que les **gusta ir en bici**, **también** les *gusta la montaña*. ¿V o F?
Q16.4: **A todos** los jóvenes que les *gusta la montaña*, **también** les **gusta ir en bici**. ¿V o F?

Si aplicamos sobre la misma matriz a priori del cuestionario Q, un análisis de cohesión implicativa, se obtienen el árbol jerárquico y el grafo implicativo según la figuras 3-4 y la figura 3-5 respectivamente.

Si analizamos estos dos grafos podremos comprobar que aparecen implicaciones entre cuestiones que en el árbol de similaridad de la figura 3-4 ya estaban relacionadas mediante proximidad estadística. En estos dos últimos grafos (figura 3-5 y figura 3-6) no existe simetría como ocurre en el caso del árbol de similaridad (figura 3-4). Por lo tanto la dirección de implicación es importante y no simétrica, tanto en el árbol jerárquico de cohesión como en el grafo implicativo.

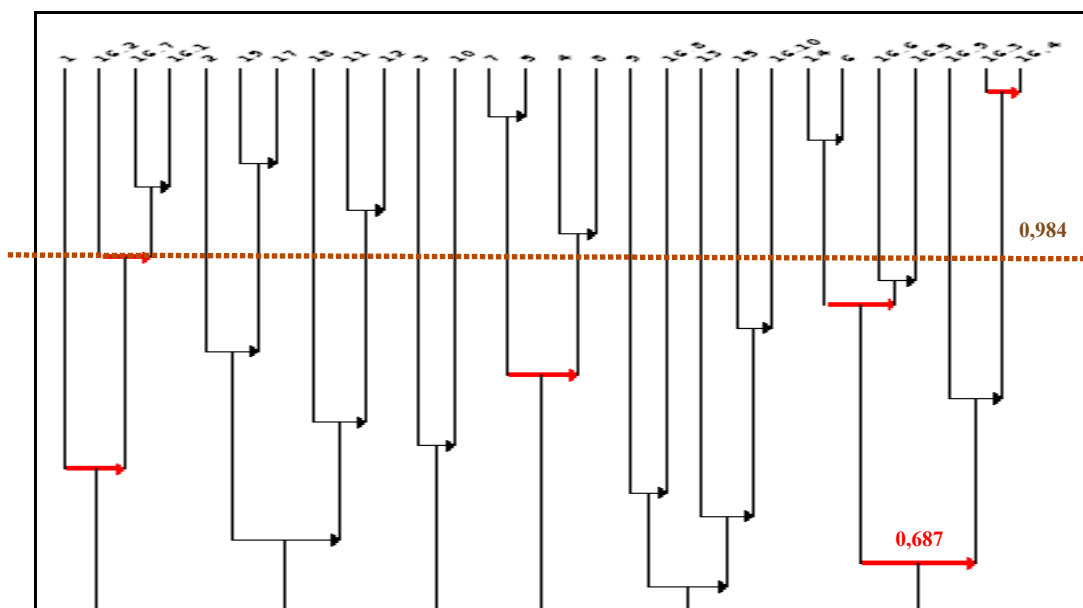


Figura 3-5: Árbol jerárquico de cohesión implicativa entre las cuestiones de Q, aplicando CHIC a la matriz MAP

Las cuestiones Q1, Q16.1, Q16.2, Q16.7, que forman la primera subclase de C_1 en la figura 3-4, se mantienen agrupadas en el árbol jerárquico implicativo (figura 3-5) con índices de cohesión significativos (**nivel 8** -0.984- y **nivel 17** -0.892-) y en el grafo implicativo forman una cadena implicativa a un grado significativo equivalente al 0.95 y 0.85. (ver figura 3-6). Los niveles de clasificación en el árbol jerárquico cohesivo, se obtienen a partir de los índices de cohesión que calcula CHIC mediante cálculos estadísticos que miden la cohesión implicativa que existe entre las cuestiones y en el grafo implicativo se obtienen las cadenas implicativas a partir de los cálculos que definen la intensidad de la implicación entre las cuestiones (consultar anexo 6).

Las otras dos cuestiones Q9 y Q16.8 que pertenecen también a la clase de cuasi-equivalencia C_1 se mantienen agrupadas tanto en el árbol jerárquico como en el grafo implicativo, aunque no forman cadena con las anteriores cuestiones (ver figuras 3-5 y 3-6).

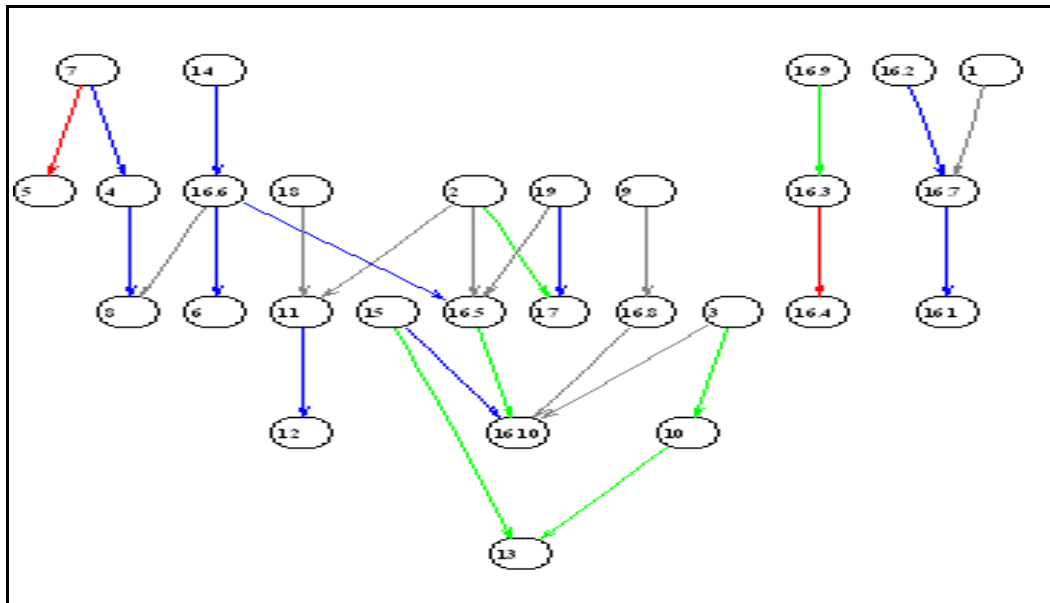


Figura 3-6: Grafo implicativo entre las cuestiones de Q, aplicando CHIC a la matriz MAP 0.99, 0.95, 0.90, 0.85

Por otra parte las cuestiones Q6, Q14, Q16.5 y Q16.6, que forman la segunda subclase de C_2 (en la figura 3-4), también aparecen agrupadas en el árbol jerárquico de cohesión implicativa, en un nivel significativo (**nudo significativo 10** sobre 22) con un índice de cohesión del 0.97 (ver figura 3-5). En el grafo implicativo también aparecen formando una cadena implicativa y todas ellas a un grado significativo equivalente al 0.95 (ver figura 3-6).

Las otras cuestiones que forman la primera subclase de C_2 : Q4, Q8, Q5 y Q7, también se mantienen agrupadas en el árbol jerárquico de cohesión implicativa, formando el **nudo significativo n° 13** con índice de cohesión 0.918 (ver figura 3-5) y en el grafo implicativo forman una cadena implicativa a un grado significativo equivalente al 0.99 y 0.95.

Por último las cuestiones que forman la clase C_3 en el árbol de similaridad (figura 3-4), quedan agrupadas en el análisis implicativo de la siguiente forma. Las cuestiones Q16.3 y Q16.4 (que tratan de la condicional directa e inversa) aparecen implicadas en el árbol jerárquico de cohesión implicativa en el nodo más significativo, **nudo 1**, con índice de cohesión 1 (ver figura 3-5). Y en el grafo implicativo también forman parte de una cadena implicativa con grado de implicación entre ellas del 0.99.

El resto de las cuestiones de la clase C_3 (del árbol de similaridad de la figura 3-4), quedan agrupadas pero en distintas cadenas implicativas. Por ejemplo Q2, Q17, Q19, Q18, Q11 y Q12 están relacionadas en el árbol jerárquico cohesitivo, pero sin formar ningún nudo significativo (figura 3-5) y en el grafo implicativo se implican en cadenas distintas con distintos grados de implicación (0.85, 0.90 y 0.95). Por otra parte Q3 y Q10 se implican de forma débil en el árbol jerárquico cohesitivo (ver figura 3-5) y en el grafo implicativo en un grado equivalente al 0.90. Y las cuestiones Q13, Q15 y Q16.10 quedan relacionadas en el árbol jerárquico de cohesión implicativa sin formar ningún nudo significativo y en el grafo implicativo al 0.95 y 0.90.

Q16.9 es la única cuestión de C_2 que no está relacionada con el resto de cuestiones de esta clase ni en el árbol jerárquico de cohesión implicativa, ni en el grafo implicativo (ver figuras 3-4, 3-5 y 3-6). En estos dos últimos aparece implicando al nudo más significativo formado por la cadena implicativa $Q16.3 \rightarrow Q16.4$.

3.2.3. Identificación de las respuestas al cuestionario, según sus diferentes interpretaciones matemáticas

Distintas interpretaciones del cuestionario Q

De forma análoga al estudio que se realizó con el “Cuestionario sobre gustos musicales” (Pitarch y Orús, 2005) en el que se identificó el trabajo lógico-matemático según distintos puntos de vista matemáticos (la Lógica, la Estadística y la Teoría de conjuntos), se presenta dicha interpretación con el nuevo cuestionario Q. Dichas interpretaciones enriquecen el análisis a priori del propio cuestionario, puesto que nos permite decidir sobre las variables didácticas que nos facilitan gestionar el planteamiento del trabajo lógico-matemático que pretendemos que los alumnos realicen.

I. Interpretación de T como tabla de datos.

Según Cuadras (1991), se puede interpretar la tabla $T_{14 \times 23}$ como una representación matricial de datos que corresponde:

- a una población de 23 individuos (jóvenes) W_1, \dots, W_{23} , [conjunto de los individuos, simbolizado por W]

- respecto a 14 criterios (tipos de actividades del viaje) C_1, C_2, \dots, C_{14} [conjunto de los criterios denotado por C]

Cada uno de los valores de la tabla de datos sería:

- $x_{ij} = C_i(W_j)$, que es el valor contestado por el individuo W_j al criterio C_i , donde $i \in \{1, 2, \dots, 14\}$ y $j \in \{1, 2, \dots, 23\}$

Si fijamos uno de los dos subíndices, obtendremos :

- la fila k -ésima, será $\{C_k(W_j)\}_{j=1, \dots, 23}$ (denotada por X_k), es decir, la respuesta de los 23 sujetos al criterio C_k
- la columna h -ésima será $\{W_h(C_i)\}_{i=1, \dots, 14}$ (denotada por Y_h), es decir, la respuesta del sujeto W_h a todos los criterios

Podemos considerar dos subpoblaciones diferentes:

- el conjunto formado por todas las filas de la tabla T : X y
- el conjunto de todas las columnas de T denotado Y .

II. Interpretación conjuntista.

Tenemos dos conjuntos:

- $X = \{X_i\}_{i=1, \dots, 14}$, el conjunto de las filas y
- $Y = \{Y_j\}_{j=1, \dots, 23}$, el conjunto de columnas.

Cada fila X_i , es un conjunto de 23 elementos binarios: 23-tupla de elementos ordenados; $X_k = (0, 1, 1, 0, 0, 0, \dots, 1)$, (para $i=k$), que representa el gusto de cada uno de los 23 jóvenes respecto a una actividad del viaje (criterio k -ésimo).

Cada columna Y_j , es un conjunto de 14 elementos binarios: 14-tupla, con su orden establecido; es decir, $Y_h = (1, 1, 1, 0, \dots, 0)$ (para $j=h$), que representa las diferentes preferencias sobre actividades de viaje de un mismo joven (sujeto h -ésimo).

Se pueden realizar las operaciones conjuntistas entre estos conjuntos: unión, intersección, inclusión, comparación entre filas y columnas .

Así pues, se puede considerar la tabla T , como un conjunto de elementos, $T = \{x_{ij}\}$, siendo cada casilla la intersección de los dos conjuntos correspondientes:

- una 23-tupla intersección con una 14 -upla; es decir, $x_{ij} = X_i \cap Y_j$

También se establece una relación R entre los conjuntos X e Y :

$$\text{Si } T = \{x_{ij}\}, \quad x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } C_i R W_j \\ 0, & \text{si } C_i \bar{R} W_j \end{cases}; \quad i \in \{1,2, \dots, 14\} \text{ y } j \in \{1,2, \dots, 23\}$$

III. Interpretación lógica:

- Cada fila concreta X_k establece dos categorías:

$W_{C_k} = \{W_j \in W / C_k(W_j) = 1\}_{j=1, \dots, 23}$ conjunto de los individuos que verifican el criterio C_k

y su complementario:

${}^c W_{C_k} = \{W_j \in W / C_k(W_j) = 0\}_{j=1, \dots, 23}$ conjunto de individuos que no cumplen el criterio C_k

En el conjunto W_{C_k} , el criterio C_k , está actuando como una función proposicional o predicado sobre los sujetos W_j (sólo los que verifican el criterio C_k)

- Cada columna concreta Y_h , establece dos categorías:

$C_{W_h} = \{C_i \in C / W_h(C_i) = 1\}_{i=1, \dots, 14}$ conjunto de los criterios que verifica el sujeto W_h

y su complementario:

${}^c C_{W_h} = \{C_i \in C / W_h(C_i) = 0\}_{i=1, \dots, 14}$ conjunto de los criterios que no verifica el sujeto W_h

En el conjunto C_{W_h} , el sujeto W_h , está actuando, como una función proposicional o predicado sobre los criterios (criterios verificados por W_h).

Cada casilla $C_k(W_h)$ será una proposición, pudiendo ser verdadera si el sujeto W_h (situado en la columna Y_h) verifica el criterio C_k (situado en la fila X_k) o falsa, en caso contrario (la codificación en la tabla T es: verdadera =1, falsa = 0).

IV. Interpretación estadística:

Según C. M., Cuadras (1991), si W y C son *espacio muestral* de todos los sujetos y los criterios de T respectivamente, podemos definir las siguientes *variables aleatorias*:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1: C \longrightarrow N & \text{y} \quad \varphi_2: W \longrightarrow N \\ C_k \longrightarrow \text{card}(W_{C_k}) & W_h \longrightarrow \text{card}(C_{W_h}) \end{array}$$

De esta manera, con la variable φ_1 podemos contabilizar el número de sujetos que verifican un criterio fijado C_k (cantidad de jóvenes que les gusta la actividad C_k)

Y de la misma manera, mediante φ_2 , podemos contabilizar la cantidad de criterios que cumple un sujeto fijado W_h (número de actividades escogidas por el sujeto W_h)¹⁵.

Podemos interpretar estadísticamente la tabla T a partir de algunos ejemplos como:

$\varphi_1(C_3) = 15$ (a 15 jóvenes les gusta la actividad C_3 : “jugar a tenis”)

$\varphi_1(C_6) = 18$ (a 18 jóvenes les gusta la actividad C_6 : “ir a Francia a aprender francés”)

$\varphi_1(C_{11}) = 23$ (a todos los jóvenes les gusta C_{11} : “ir en bici”)

$\varphi_2(W_1) = 13$ (al joven “ W_1 ”= A, le gustan 13 actividades)

$\varphi_2(W_{10}) = 7$ (al joven “ W_{10} ”= J, le gustan 7 actividades)

A partir de las distintas interpretaciones presentadas anteriormente, podemos identificar la respuesta correcta a cada una de las cuestiones de Q según el tipo de interpretación correspondiente. Esta identificación la presentamos de la siguiente forma:

- en primer lugar indicamos la pregunta del cuestionario, con la codificación Qn°
- a continuación contestamos a la pregunta señalando cuál sería la operación matemática que se realizaría para contestarla según las distintas interpretaciones matemáticas explicadas anteriormente. Esta respuesta va precedida de la/s inicial/es de la/s interpretación/es correspondiente/s. (T -tabla de datos-, C -conjuntista-, L -Lógica- y E -Estadística-).

¹⁵ Obviamente los alumnos de esta etapa educativa (ESO), no interpretan estas operaciones como una variable aleatoria (entre otras razones, porque no lo han estudiado a nivel curricular), sino como el cardinal de un conjunto, considerando las filas y columnas como conjuntos de elementos. En definitiva la operación real que los alumnos realizan es un recuento de 1 o 0 en las filas o columnas.

- Y por último -y entre paréntesis- explicamos cuál es la respuesta correcta, en el caso de que ésta no sea numérica.

Respuesta correcta a cada cuestión y su interpretación matemática:

Q1. ¿Al joven H le gustan las actividades de competición deportiva?

L. $C_2(W_8) = 0$

(proposición falsa: respuesta NO)

Q2. ¿A cuántos jóvenes les gusta hacer visitas con guía?

C-L-E. $\varphi_1(C_8) = \text{card}(W_{C_8}) = 17$

Q3. ¿Cuántas actividades le gustan al joven Q?

C-L-E. $\varphi_2(W_{17}) = \text{card}(C_{W_{17}}) = 12$

Q4. ¿Existe algún tipo de actividad que les guste a todos los jóvenes?

E. $(\varphi_1)^{-1}(23) = C_{11}$

(la actividad 11: "ir en bici" les gusta a todos los jóvenes)

¿Hay otras? Dí cuáles (no)

Q5. ¿Existe algún joven a quien no le guste ningún tipo de actividad? (no)

L-E. $\exists W_j \in W / \varphi_2(W_j) = 0$, o bien...

C. $\exists Y_j \in Y / Y_j = (0,0,0,0,0,0,\dots,0)$ (14-tupla)

Q6. Los jóvenes, ¿prefieren ir a competiciones deportivas o ir a Francia a aprender francés?

E. Comparar $\varphi_1(C_2) = 16$ con $\varphi_1(C_6) = 18$ y elegir C_i con mayor valor de $\varphi_1(C_i)$

(los jóvenes prefieren ir a Francia a aprender francés)

Q7. ¿Existe algún joven a quien le gusten todas las actividades? (no)

E. $\exists W_j \in W / \varphi_2(W_j) = 14$, o bien...

C. $\exists Y_j \in Y / Y_j = (1,1,1,1,1,\dots,1)$ (14-tupla)

Q8. ¿Hay algún tipo de actividad que guste más que la de pernoctar en un castillo?

L-E. Buscar los criterios $C_i / \varphi_1(C_i) > \varphi_1(C_{14})$, siendo $\varphi_1(C_{14}) = 22$.

(sólo hay una actividad “ir en bici: C_{11} ”, ya que $\varphi_1(C_{11})=23$)

Q9. ¿Qué pareja de jóvenes tiene más posibilidades de encontrarse en la montaña, H-I o R-S?

L-C. H (W_8) e I (W_9) porque W_8 y $W_9 \in W_{C_7} \cap W_{C_{12}}$; en cambio $R(W_{18}) \in W_{C_7} \cap {}^c W_{C_{12}}$

¿Por qué?

(Porque a H e I les gusta ir a la montaña y también las marchas por la montaña y al joven R sólo ir a la montaña, pero no las marchas por la montaña)

Q10. ¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los jóvenes C y E?

L-C. $\text{Card} \{ C_i \in C / W_3(C_i) \neq W_5(C_i) \} = 2, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 14;$

(tienen 2 diferencias, en C_8 y C_{13})

Q11. ¿Cuántos jóvenes prefieren probar las especialidades del lugar y bañarse?

L-C. $\text{Card} \{ W_j \in W / W_j \in W_{C_9} \cap W_{C_4} \} = 19, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 23,$ es decir, buscar copresencias entre las filas 4 y 9

(19 Jóvenes; $j = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 22$)

Q12. ¿A cuántos jóvenes no les gusta ir a competiciones deportivas, ni jugar a tenis?

L-C. $\text{Card} \{ W_j \in W / W_j \in {}^c W_{C_2} \cap {}^c W_{C_3} \}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 23,$ es decir, buscar coausencias entre las filas 2 y 3

(2 jóvenes: W_{10} y W_{12})

Q13. Por sus elecciones, los jóvenes J y L se parecen:

-nada - un poco X bastante - mucho

L-C. Calcular el $\text{card} \{ C_i \in C / W_{10}(C_i) = W_{12}(C_i) \} = 10,$ para obtener un porcentaje de coincidencia; 10 de 14, equivale a un 71% aproximadamente.

(el joven J(W_{10}) coincide con el joven L(W_{10}) en 10 criterios de 14[6 copresencias y 4 coausencias] ; por lo tanto se parecen bastante -o mucho-)

Q14. Si la Agencia de viajes quisiera programar sólo tres actividades, escribe los tipos de actividades que tú le ayudarías a elegir

C-E. Buscar los criterios C_i con mayor $\varphi_1(C_i)$; en este caso son $\varphi_1(C_5) = \varphi_1(C_{14}) = 22$ y $\varphi_1(C_{11}) = 23$

(cruceros por el Caribe, pernoctar en un castillo e ir en bici son las actividades más elegidas)

Q15. Las respuestas del joven I, ¿se parecen más a las del joven F o a las del joven J?

L-C. Comparar el card $\{C_i \in C / W_9(C_i) = W_6(C_i)\} = 9$ con el card $\{C_i \in C / W_9(C_i) = W_{10}(C_i)\} = 7$; $i=1,2,3,\dots,14$

(el joven I(W_9) se aproxima más al J(W_{10}) que a F(W_6), porque coincide en 9 criterios con el sujeto W_{10} [6 copresencias y 3 coausencias] y en 8 criterios [8 copresencias y 0 coausencias] con W_6)

Q16. Dí si es verdadera o falsa, cada una de las siguientes frases:

16.1. Al joven F no le gusta jugar al tenis

L. Comprobar si $C_3(W_6) = 0$

(proposición **verdadera** porque $C_3(W_6) = 0$)

16.2. Al joven B le gusta ir a Francia a aprender francés

L. Comprobar si $C_6(W_2) = 1$

(proposición **falsa** porque $C_6(W_2) = 0$)

16.3. A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, también les gusta la montaña

L. Comprobar si $\forall W_k \in W_{C_{12}} \rightarrow W_k \in W_{C_7}$; $k=1,2,3,\dots,23$

(**Falso**, porque W_2, W_{10}, W_{12} y W_{13} no lo cumplen, es decir, $W_m \in W_{C_{12}}$, sin embargo, $W_m \in {}^cW_{C_7}$; $m=2, 10, 12$ y 13)

16.4. A todos los jóvenes que les gusta la montaña, también les gusta ir en bici

L. Comprobar si $\forall W_k \in W_{C_7} \rightarrow W_k \in W_{C_{12}}$; $k=1,2,3,\dots,23$

(**Verdadero**, porque a todos los que les gusta la montaña, también les gusta ir en bici, siendo éste último escogido por todos los jóvenes)

16.5. Los jóvenes prefieren más las visitas con guía, que ir a Italia a visitar museos

E. Comprobar si $\varphi_1(C_9) > \varphi_1(C_{13})$

(**Falso**, porque $\varphi_1(C_9) = 17$ y $\varphi_1(C_{13}) = 18$)

16.6. Los jóvenes prefieren más los cruceros por el Caribe, que ir en bici

E. Comprobar si $\varphi_1(C_5) > \varphi_1(C_{12})$

(Falso, porque $\varphi_1(C_5) = 22$ y $\varphi_1(C_{12}) = 23$; ir en bici es escogida por todos los jóvenes)

16.7. No es verdad que a G le guste probar las especialidades del lugar

L. Comprobar si $C_{10}(W_7) = 0$

(proposición falsa porque $C_{10}(W_7) = 1$, es decir a G sí le gusta probar las especialidades del lugar)

16.8. A los jóvenes H y O les gustan el mismo tipo de actividades

L. Comprobar si $W_8(C_i) = W_{15}(C_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, 14$

(verdadero, porque W_8 y W_{15} coinciden en todas los criterios de la tabla)

16.9. A todos los jóvenes les gustan las marchas en la montaña

L. Comprobar si $\forall W_j \in W_{C_8}; j = 1, 2, 3, \dots, 23$

E. Comprobar si $\varphi_1(C_8) = 23$

(falso, porque $W_k \in {}^C W_{C_8}, k = 2, 4, 10, 11, 12, 18$ y 22 ; o bien porque $\varphi_1(C_8) = 16$)

16.10. Los jóvenes L y N están de acuerdo en diez cuestiones de la encuesta: V

L-C. Comprobar si $\text{Card} \{C_i \in C / W_{12}(C_i) = W_{14}(C_i)\} = 10$, $i = 1, 2, 3, \dots, 14$; o bien,

L-C. Comprobar si $\text{Card}[\{C_i \in C / C_i \in C_{W_{12}} \cap C_{W_{14}}\} \cup \{C_i \in C / C_i \in {}^C C_{W_8} \cap {}^C C_{W_8}\}] = 10$

(verdadero, porque L y N tienen 9 co-presencias y 1 co-ausencia = 10 coincidencias)

Q17. ¿A qué porcentaje de los jóvenes entrevistados les gusta jugar a cartas?

E. Calcular $100 \cdot [\varphi_1(C_{11}) / 23] = (100 \cdot 16) / 23 = 70 \% \text{ aprox.}$

Q18. Si consideramos – jugar a tenis- como una variable estadística, ¿qué frecuencia absoluta dirías que tiene en esta distribución estadística?:

E. Calcular $\varphi_1(C_3) = 15$

Q19. ¿Y qué frecuencia relativa tendría la variable estadística de la pregunta anterior?:

E. Calcular $\varphi_1(C_3) / 23 = 15 / 23 = 0,65 \text{ aprox.}$

3.3. Resultados obtenidos en la experimentación con el Cuestionario Q

La experimentación se ha desarrollado en un grupo de cada uno de los cuatro niveles de la ESO del centro educativo “Grans i menuts” de Castellón y en un grupo del nivel 1º ESO del “IES Politécnico” de Castellón de la Plana.

La muestra de los alumnos que han realizado esta experimentación está formada por 118 alumnos en total. El motivo de elegir los cuatro niveles educativos de la etapa de la ESO se justifica en las siguientes razones:

- Continuar el diagnóstico en la etapa de la ESO sobre conocimientos lógico-matemáticos iniciados en 2000-01, en el que ya se obtuvieron datos al respecto con alumnos de dos centros de Castellón : IES Politécnico de Castellón y IES Leopoldo Querol de Vinarós, con los cuatro niveles de la ESO, respectivamente.
- A pesar de haber cambiado las directrices curriculares según las leyes educativas, desde la anterior experimentación, continúa sin existir unos conceptos curriculares en la enseñanza secundaria “isomorfos” a los utilizados en nuestra experimentación, por tanto, no existe a priori un curso de la ESO adecuado específicamente (por currículo) a nuestra propuesta.
- La búsqueda de unos indicadores para decidir en qué nivel de la ESO debemos proponer las lecciones de la ingeniería didáctica. Los indicadores que precisamos pueden ser detectados a partir de la comparación de los resultados obtenidos en la anterior experimentación (2000) y la realizada en el presente curso (2014).

3.3.1. Datos de la experimentación (2014-15)

La corrección de los cuestionarios contestados por los 118 alumnos que han participado en la experimentación, se ha traducido en una matriz binaria de tamaño 118x77. La denominamos matriz a posteriori MP. Las 118 filas corresponden a los alumnos que individualmente han respondido a Q. Y las 77 columnas constituyen la caracterización de las respuestas a cada una de las 19 preguntas del cuestionario Q (para los alumnos de 1º y 2º de ESO sólo 16). La respuesta a cada una de estas preguntas se desdobra en más de una característica, según la operación y criterio que se observa en la misma (por esta razón se obtienen 77 columnas).

La codificación general de la matriz MP se puede resumir de la siguiente forma:

- cada fila representa las respuestas de cada alumno concreto, a las 16 (en 1º y 2º ESO) o 19 (3º y 4º ESO) cuestiones del cuestionario.
- cada columna representa las respuestas de todos los alumnos de la experimentación a cada cuestión concreta del cuestionario (teniendo en cuenta que la respuestas de los alumnos se han desdoblado en distintas operaciones o criterios observados en las mismas).
- cada casilla toma el valor 1 o el valor 0. El “1” significa que el alumno (indicado en esta fila) realiza la operación según la caracterización de la respuesta a la cuestión (indicada en esta columna). El “0” significa ausencia de dicha operación por parte del alumno concreto.

A continuación se explica la codificación tanto de las filas como de las columnas de MP para facilitar la interpretación de los resultados obtenidos con este tipo de simbolización:

- **FILA:** CADA ALUMNO QUE CONTESTA AL CUESTIONARIO Q. En cada fila aparece un código de cuatro dígitos:
- **1º dígito:** el nivel del curso de la ESO. 1º, 2º, 3º o 4º
- **2º dígito:** la inicial del colegio “Grans i menuts” de Castellón, con una “g” y el IES “Politécnico” de Castelló con una “P”.
- **3º y 4º dígitos:** el número del alumno de ese grupo.

EJEMPLOS:

2g05 = alumno nº5 de 2º de ESO del colegio “Grans i menuts” de Castellón

3P14 = alumno nº14 de 3º ESO del IES “Politécnico” de Castellón.

- **COLUMNA:** A PARTIR DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS A CADA PREGUNTA DEL CUESTIONARIO: En cada columna aparece un código de cuatro dígitos: _ _ _ _
- **1r dígito:** siempre será una Q (excepto en los desdobles de la cuestión 16), indicando que es una cuestión del cuestionario Q.
- **2º dígito:** indica la característica que representa la respuesta del alumno. Puede tener distintos desdobles, según el tipo de operación que indique dicha respuesta.
- **3º y 4º dígitos:** el número de la cuestión del cuestionario Q, que ha sido respondida.

EJEMPLOS:

QB15: contestar correctamente (o no) a la cuestión nº15 del cuestionario Q.

QS04: dar una respuesta subjetiva (o no) a la cuestión nº4 del cuestionario Q.

Explicación del 2º dígito: Posibles desdobles de la respuesta del alumno, según la operación que ha realizado al contestar: Q...nºnº: el espacio vacío puede ser una de las siguientes operaciones:

- **B:** contestar a la cuestión correctamente
- **N:** no contestar a la cuestión
- **E:** contestar a la cuestión con un margen de error de uno o dos valores, en el caso de ser una respuesta numérica.
- **r:** razonar correctamente en la respuesta de la cuestión.
- **M:** dar respuesta correcta pero teniendo en cuenta sólo la actividad de “gustar la montaña”
- **m:** dar respuesta correcta pero teniendo en cuenta la actividad “gustar la montaña” y “marchas por la montaña”.
- **D:** contestar haciendo la distinción de dos actividades de las cuales se pedía la conjunción (por ejemplo en vez de contabilizar las copresencias o coausencias de dos actividades, **contabilizan por separado** las presencias o ausencias de cada actividad, haciendo la distinción de ambas)

- **a:** contestar contabilizando por separado las presencias/ausencias de dos actividades y sumar ambos resultados (por ejemplo en vez de contabilizar las copresencias o coausencias de dos actividades, contabilizan por separado las presencias o ausencias de cada actividad y luego suman ambos resultados)
- **P:** dar una respuesta utilizando sólo las co-presencias, sin tener en cuenta la co-ausencias, en una cuestión de coincidencias.
- **G:** responder de forma subjetiva expresando su propio gusto personal respecto a la cuestión.
- **V:** responder el/los tipo/s de actividades propuestas para el viaje que han sido más votadas, excepto la que se pregunta en realidad.
- **S:** responder utilizando una opinión personal o subjetiva del alumno que responde.
- **A:** contestar a la pregunta exactamente igual que la anterior (por tener una relación semántica y piensan que es la misma. Cada cuestión tiene una respuesta correcta distinta, por lo tanto no pueden coincidir)

No presentamos la matriz a posteriori en este texto, debido a su extensión (tamaño 118x77). A continuación mostramos en la figura 3-7, a modo de ejemplo, una submatriz de la misma correspondiente a las respuestas de los alumnos de 1º de ESO a las cuestiones Q11, Q12 y Q13. Estas dos cuestiones se caracterizan respectivamente por la utilización del conector lógico “conjunción”, la combinación de “conjunción con negación” y la utilización de co-presencias y co-ausencias entre columnas. Se puede observar que las respuestas de cada una de estas cuestiones se ha desdoblado en más de un criterio. Por ejemplo: QB11 significa contestar correctamente a la cuestión, QN11 si han contestado a la cuestión o no, QE11 contestar a la misma cometiendo un error entre 1 o 2 valores, etc (tal y como hemos explicado en la codificación presentada anteriormente).

	QB11	QN11	QE11	QD11	Qa11	QB12	QN12	QD12	Qa12	QB13	QN13	QE13	Qr13	QP13
1g01	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1g02	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1g03	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1g04	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1g05	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1g06	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1g07	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1g08	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1g09	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1g10	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1g11	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1g12	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1g13	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1g14	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1g15	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1g16	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1g17	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
1g18	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
1g19	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1g20	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1g21	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1g22	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1g23	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1g24	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1g25	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1g26	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0
1g27	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0

Figura 3-7: Submatriz de MP de las cuestiones Q11, Q12 y Q13 desglosadas

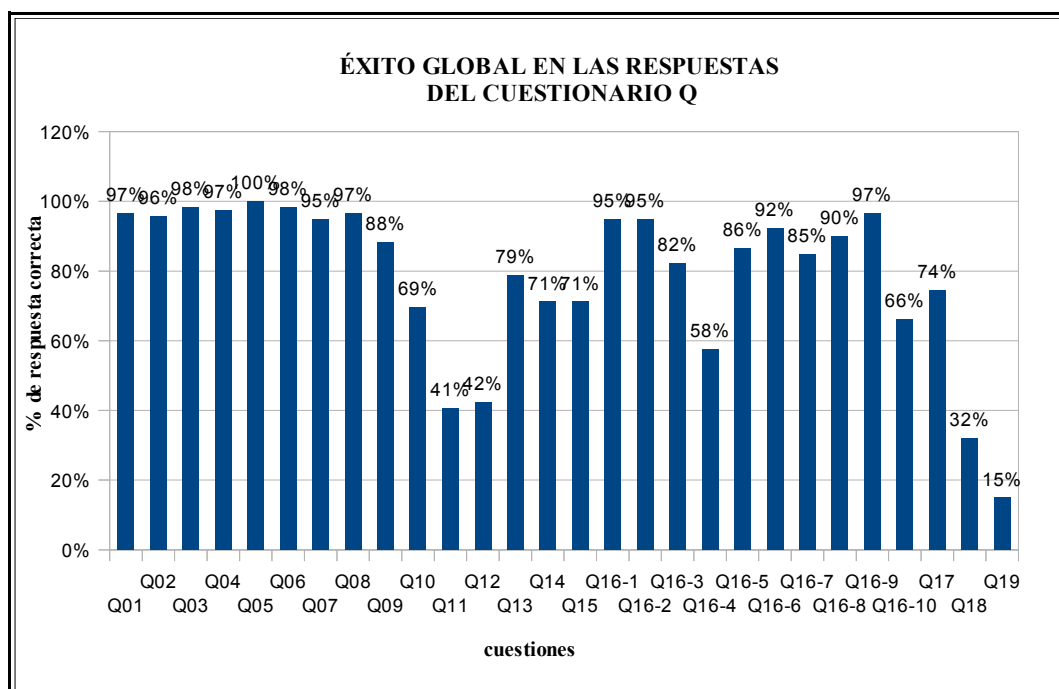
3.3.2. Resultados globales de la experimentación

3.3.2.1. Éxito de respuesta a Q de los cuatro niveles de la ESO

A continuación se muestran los resultados de las respuestas correctas que han dado los alumnos a cada una de las cuestiones del cuestionario Q (ver gráfica 3-1), sin tener en cuenta el razonamiento que se exigía en alguna de ellas. Entendemos por respuesta correcta que el alumno haya realizado correctamente la operación esperada al contestar a la cuestión.

Esta gráfica sólo pretende dar una visión global de los primeros resultados de la corrección del cuestionario a nivel de etapa (observando conjuntamente los cuatro niveles de la ESO). Este primer análisis global nos confirma las conclusiones obtenidas en la anterior experimentación (2000-01).

En la gráfica 3-1 se puede observar que el porcentaje de éxito oscila entre el 15% y el 100%, sabiendo que las tres últimas cuestiones sobre Estadística, sólo se les plantea a los alumnos de 3º y 4º de ESO. Entre los alumnos de 1º y 2º de ESO el intervalo de éxito oscila entre un 41% y 100%.



Gráfica 3-1: Porcentaje de respuesta correcta a Q de todos los grupos

La interpretación global de esta gráfica nos permite deducir que el grupo de cuestiones con un porcentaje de éxito comprendido entre un 15% y un 79%, corresponde a las que están caracterizadas por trabajo lógico, proximidad/distancia entre criterios y cálculo de Estadística elemental. A continuación analizamos con detalle los distintos grupos de cuestiones según el éxito obtenido en sus respuestas y el tipo de operaciones que exige su respuesta correcta:

I- Cuestiones Q1 hasta Q8; Q16.1; Q16.2; Q16.6; Q16.8 y Q16.9. El alumnado no presenta dificultades en el tipo de actividad matemática que se exige en estas cuestiones, puesto que han obtenido un éxito en sus respuestas igual o superior al 90%. La operación matemática fundamental que caracteriza estas cuestiones no supone, en un principio, un obstáculo para el grupo global.

Q1, Q16.1 y Q16.2: **comprobación si un sujeto cumple (o no) un criterio**
 “¿El sujeto W_j cumple(no cumple) el criterio C_i ?”

Q2, Q3: cardinal de sujetos que cumplen un criterio (y viceversa)

“¿Cuántos sujetos cumplen el criterio C_i ?”/ “¿Cuántos criterios cumple el sujeto W_j ?”

Q4, Q5 y Q7: búsqueda de sujeto que cumpla (o no) todos los criterios (y viceversa)

“¿Existe algún sujeto que cumpla (no cumpla) todos (ningún) los criterios (criterio)?”

“¿Existe algún criterio que lo cumplan todos los sujetos?”

Q6, Q8 y Q16.6: comparación del cardinal de sujetos que cumplen distintos criterios.

“ Los sujetos, ¿cumplen más el criterio C_i o el criterio C_j ?”

“¿Hay algún criterio que se cumpla más que el C_i ?”

Q16.8 y Q16.9: o si dos sujetos cumplen los mismos criterios/ comprobación si un criterio lo cumplen todos los sujetos

“Los sujetos W_j y W_h cumplen los mismos criterios, ¿V o F?”

“Todos los sujetos cumplen el criterio C_i , ¿V o F?”

En este primer bloque de cuestiones es importante remarcar que aunque el porcentaje global de los cinco grupos es el indicado en la gráfica 3-1, en algunos grupos y cuestiones ha habido un porcentaje de éxito del 100%. Ésto varía según las diferentes cuestiones y grupo (ver las gráficas 3-2 y 3-3, en las que se distinguen los cuatro niveles).

II- Otro grupo de cuestiones: Q9; Q10; Q13; Q14; Q15; Q16.3; Q16.5; Q16.7; Q16.10 tiene un éxito que oscila entre el 65% y el 88% (el éxito en las respuestas desciende ligeramente).

En estas preguntas aumenta gradualmente la dificultad, ya que aunque la respuesta requiera una operación sencilla, bien puede estar combinada con otra, bien puede intervenir la componente “semántica” que juega un papel fundamental en la relación que existe entre las actividades (o criterios) que se ofertan desde “la agencia de viajes”; con el añadido que en cuatro de estas cuestiones se pide la respuesta mediante una atribución de verdad.

La utilización de la relación semántica que existe entre las actividades que intervienen en una cuestión, nos posibilita observar la objetividad que utilizan los alumnos para contestar a la misma. Nos basamos en otras experimentaciones en las que se ha podido constatar que esta característica, a veces, les lleva a responder desde un punto de vista más subjetivo inducido por las relaciones que establecen entre los criterios, emergiendo el razonamiento natural para dar una respuesta, para ellos “evidente”.

A continuación presentamos información generalizada de estas cuestiones y las posibles operaciones o estrategias que requieren sus respuestas:

Q9, Q10, Q13, Q15 y Q16.10: utilización de las diferencias o coincidencias -positivas y negativas- entre dos o más columnas de la tabla. Añadiendo la “componente semántica”

“¿Qué pareja de sujetos tiene más posibilidades de encontrarse en la montaña, W_j y W_h o W_s y W_t ?”

“¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los sujetos W_j y W_h ?”

“Por sus elecciones, los sujetos W_j y W_h se parecen: -nada - un poco - bastante - mucho”

“Las respuestas del sujeto W_j , ¿se parecen más a las del sujeto W_h o a las del sujeto W_p ?”

“Los sujetos W_j y W_h están de acuerdo en diez criterios de la encuesta. ¿V o F?”

Q14 y Q16.5: búsqueda de los criterios más elegidos por los sujetos o comparación de la elección de un criterio con otro. De nuevo interviene la “componente semántica”

“Si la Agencia de viajes quisiera proponer sólo tres criterios, escribe los que le ayudarías a elegir”

“Los sujetos cumplen más C_i que C_j . ¿V o F?” (C_i y C_j tienen relación semántica)

Q16.3: comprobación de que todos los sujetos que cumplen un criterio, cumplen otro (condicional), con la intervención de la “componente semántica”

“Todos los sujetos que cumplen C_i , también cumplen C_j . ¿V o F?”

(C_i y C_j tienen relación semántica)

Q16.7: atribución de verdad a una afirmación formulada con una negación

“No es verdad que el sujeto W_j cumpla el criterio C_i . ¿V o F?”

III- El porcentaje de éxito desciende considerablemente en las cuestiones Q16.4 (un 58% de los alumnos responde correctamente) y en la Q11 y Q12 se obtiene el porcentaje de éxito más bajo (41 y 42% respectivamente).

En esta ocasión las cuestiones se caracterizan por algunas operaciones lógicas: implicación lógica, conjunción y la combinación de conjunción con negación.

Q16.4 (es la condicional inversa de la Q16.3): comprobación de que todos los sujetos que cumplen un criterio, cumplen otro (condicional), con la intervención de la “componente semántica.”

“Todos los sujetos que cumplen C_j , también cumplen C_i . ¿V o F?”

(C_i y C_j tienen relación semántica; y son los mismos que intervienen en la cuestión Q16.3)

Q11: contabilizar los sujetos que tienen copresencias en las filas con criterios C_i y C_j .

“¿Cuántos sujetos cumplen el criterio C_i y el criterio C_j ?”

Q12: contabilizar los sujetos que tienen coausencias en las filas con criterios C_m y C_n .

“¿Cuántos sujetos no cumplen el criterio C_m ni el criterio C_n ?”

IV- Por último hacer especial mención de las cuestiones Q17, Q18 y Q19, ya que estas tres preguntas sólo se han formulado al alumnado de 3º y 4º de ESO. Esto se debe a que en ellas se exige como actividad el cálculo de frecuencias (porcentaje, absoluta y relativa) correspondiente a los contenidos del bloque temático de Estadística (más trabajado, en el segundo ciclo de la etapa secundaria obligatoria). En este caso la cuestión Q17 tiene un resultado de éxito -74%- sólo aceptable, tratándose de los dos últimos cursos de la etapa. No obstante, las cuestiones Q18 y Q19 han tenido un éxito bastante bajo (32% y 15% respectivamente), considerando que en estos dos cursos deberían estar más consolidados los conceptos estadísticos básicos, como son las frecuencias.

Q17: cálculo de un porcentaje de los sujetos que cumplen el criterio C_i .

“¿Qué porcentaje de los sujetos cumplen el criterio C_i ?”

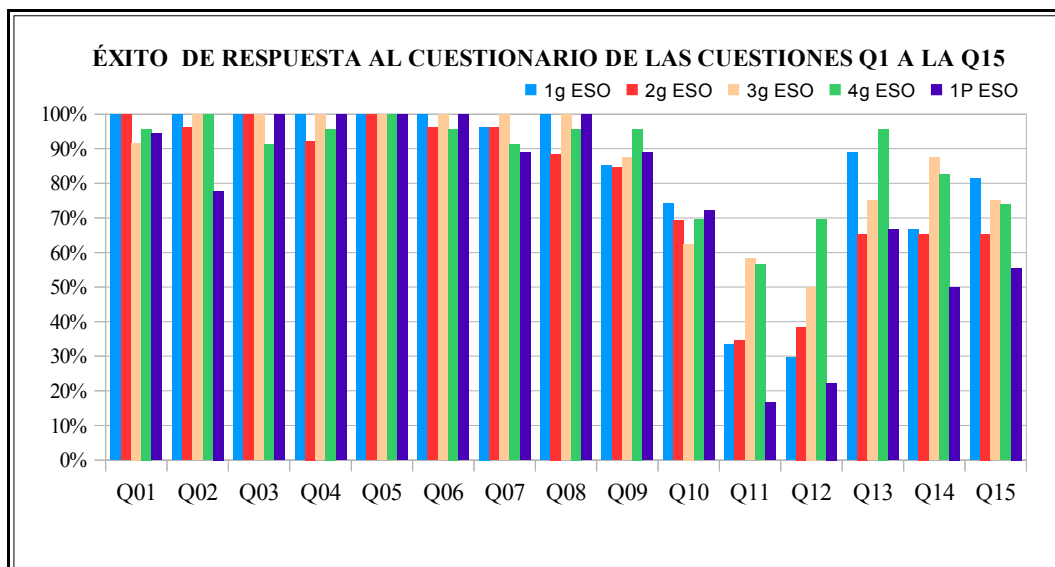
Q18 y Q19: cálculo de la frecuencia absoluta y relativa, respectivamente, de la variable estadística “un criterio concreto”.

“Si consideramos $-C_i-$ como una variable estadística, ¿qué frecuencia absoluta dirías que tiene en esta distribución estadística?”

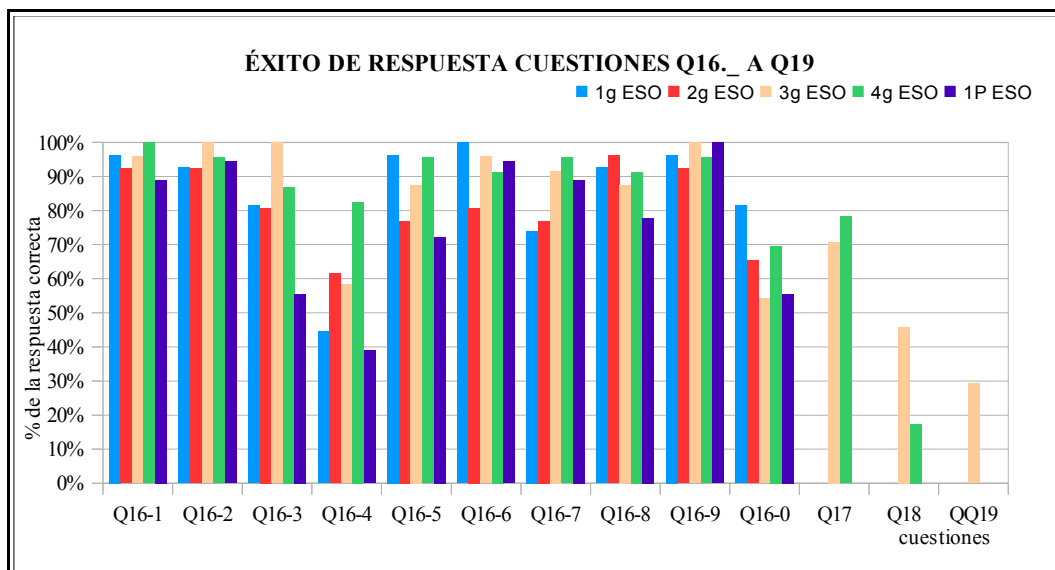
“¿Qué frecuencia relativa tendría la variable estadística de la pregunta anterior?”

Las siguientes gráficas muestran los resultados obtenidos en la experimentación diferenciando los cuatro niveles de la etapa de secundaria. Una de ellas representa las cuestiones desde Q1 a Q15 -gráfica 3-2- y la otra el resto de cuestiones -gráfica 3-3- que son las que corresponden a dar una respuesta con una atribución de verdad.

En ambas gráficas, se puede observar que los alumnos del primer ciclo obtienen un porcentaje de éxito más bajo que los del segundo ciclo en aquellas cuestiones a las que hacemos referencia en la gráfica 3-1 cuyo éxito global oscila entre el 41% y 79%.



Gráfica 3-2: Porcentaje de respuesta correcta a las cuestiones desde Q1 a Q15 de cada nivel



Gráfica 3-3: Porcentaje de respuesta correcta a las cuestiones desde Q6._ a Q19 de cada nivel

3.3.2.2. Análisis de las respuestas de los alumnos según los criterios establecidos a priori

Considerando la actividad matemática “básica” que caracteriza a cada una de las cuestiones, según nuestro estudio a priori del cuestionario, podemos agrupar las cuestiones según la actividad matemática fundamental que la identifica. Éstos son: trabajo sobre la tabla, recuentos obligatorios o alternativos, comparación entre filas y/o columnas, diferencias y coincidencias positivas y/o negativas, operaciones lógicas, operaciones básicas de Estadística y razonamiento sobre las respuestas de la cuestión.

A partir de estas agrupaciones podemos analizar qué porcentaje de éxito han tenido dichas cuestiones, relacionándolo con la naturaleza de la actividad exigida.

Lectura y tratamiento de la tabla

La corrección de las preguntas Q1, Q2, Q3, Q16.1 y Q16.2 que exigen una manipulación mínima de la tabla (lectura de una fila, columna o casilla) han tenido un alto índice de éxito (en la matriz MAP se puede observar que estas cuestiones están caracterizadas con el objetivo de observar el tratamiento de la tabla por parte de los alumnos).

Q1: ¿Al joven H le gustan las actividades de competición deportiva?
Q2: ¿Cuántas actividades le gustan al joven Q?
Q3: ¿A cuántos jóvenes les gusta hacer visitas con guía?
Q16.1: Al joven F no le gusta jugar al tenis ¿V o F?
Q16.2: Al joven B le gusta ir a Francia a aprender francés. ¿V o F?

Los porcentajes que reflejan “respuesta correcta” a estas preguntas son los siguientes (tabla 3-2):

	QB01	QB02	QB03	B16-1	B16-2
Media ETAPA	97%	96%	98%	95%	95%
1g	100%	100%	100%	96%	93%
2g	100%	96%	100%	92%	92%
3g	92%	100%	100%	96%	100%
4g	96%	100%	91%	100%	96%
1P	94%	78%	100%	89%	94%

Tabla 3-2: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q1, Q2, Q3, Q16-1 y Q16-2

Tan sólo el grupo de 1º de ESO del “IES Politécnico” ha descendido hasta un 78% en la Q2, pero el resto de grupos han tenido éxito en la respuesta a estas cuestiones entre el 89% y el 100%.

Estos resultados, con un éxito bastante notable, podrían hacer suponer que la tabla T resulta demasiado sencilla para los alumnos de secundaria en general, aunque esta hipótesis queda refutada con el análisis de la corrección de la cuestión Q14. La cuestión Q14 implica un trabajo sobre toda la tabla con objeto de encontrar las tres actividades más votadas entre las propuestas por la “Agencia de viajes”. Este trabajo, además de suponer una operación de recuento y comparación entre filas, interviene el factor de interpretación subjetiva por parte de los alumnos. En las cuestiones Q4, Q5, Q7 y Q8 también se debe utilizar toda la tabla en general para responder correctamente a la cuestión, pero el éxito en estas cuestiones ha sido superior al obtenido en la Q14. El porcentaje de éxito en esta última ha oscilado entre el 50% y el 88% (más bajo en el primer ciclo de ESO; ver tabla 3-3). Así pues este tipo de actividad matemática no es tarea fácil para los alumnos de esta etapa educativa.

	QB04	QB05	QB07	QB08	QB14
Media ESO	97%	100%	95%	97%	71%
1g	100%	100%	96%	100%	67%
2g	92%	100%	96%	88%	65%
3g	100%	100%	100%	100%	88%
4g	96%	100%	91%	96%	83%
1P	100%	100%	89%	100%	50%

Tabla 3-3: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q4, Q5, Q7, Q8 y Q14

Q4: ¿Existe algún tipo de actividad que les guste a **todos** los jóvenes?
Q5: ¿Existe algún joven a quien no le guste **ningún** tipo de actividad?
Q7: ¿Existe algún joven a quien le gusten **todas** las actividades?
Q8: ¿Hay algún tipo de actividad que guste más que la de pernoctar en un castillo?
Q14: Si la Agencia de viajes quisiera **programar sólo tres actividades**, escribe los tipos de actividades que tú le ayudarías a elegir

A partir de estos datos podemos concluir que la manipulación simple de la matriz T ha tenido un éxito favorable tal y como se esperaba. Esta conclusión coincide con la ya obtenida en la pre-experimentación realizada en el 2000-2001 con éxito del 97% aproximadamente (Pitarch, 2002) en secundaria y la realizada en la etapa de primaria por Orús (1986b), con un 81% de éxito.

Recuentos y comparación entre filas y columnas

Las cuestiones en las que se exige un recuento obligatorio de forma explícita (Q2, Q3, Q10, Q11, Q12, Q15, Q16.5, Q16.6 y Q16.10) son contestadas correctamente con unos porcentajes que oscilan desde un 17% al 100%. En general, los errores que cometen no son debidos a la propia operación de recuento (como muestran las Q2 y Q3 que son cuestiones elementales), sino al hecho de que en estas preguntas intervienen otras operaciones combinadas con el simple recuento, aumentando el grado de dificultad de dicha cuestión.

Las cuestiones que conllevan sólo la comparación de dos filas o dos columnas corresponden a Q6, Q10, Q13, Q15, Q16.5 y Q15.6. El porcentaje de éxito en estas cuestiones es de 98%, 69%, 79%, 71%, 86% y 92% respectivamente (sin diferencias significativas entre los cuatro niveles de la etapa, excepto en la Q13 que destaca 4º de ESO). Por lo tanto podemos deducir que, en general, este tipo de operación no supone un obstáculo para los alumnos de la ESO.

- Q6:** Los jóvenes, ¿prefieren ir a competiciones deportivas o ir a Francia a aprender francés?
Q10: ¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los jóvenes C y E?
Q13: Por sus elecciones, los jóvenes J y L se parecen: - nada - un poco - bastante - mucho
Q15: Las respuestas del joven I, ¿se parecen más a las del joven F o a las del joven J?
Q16.5: Los jóvenes prefieren más las visitas con guía, que ir a Italia a visitar museos. ¿V o F?
Q16.6: Los jóvenes prefieren más los cruceros por el Caribe, que ir en bici. ¿V o F?

En cambio, en las cuestiones que se exige comparación de filas o columnas ligada a operaciones lógicas de proximidad/distancia, los alumnos cometen mayor error. Este hecho se muestra con los resultados de éxito obtenidos en las respuestas a las siguientes cuestiones: Q11(41%), Q12(42%) y Q16-10(66%). Como podemos observar baja el porcentaje de éxito porque se exige otro tipo de operaciones, que se analizan a continuación.

- Q11:** ¿Cuántos jóvenes prefieren probar las especialidades del lugar y bañarse?
Q12: ¿A cuántos jóvenes **no** les gusta ir a competiciones deportivas, **ni** jugar a tenis?
Q16.10: Los jóvenes L y N **están de acuerdo** en diez cuestiones de la encuesta. ¿V o F?

Se puede concluir que los alumnos de la ESO pueden trabajar actividades que impliquen estrategias numéricas en procedimientos de razonamiento más globales, según los resultados en las cuestiones que exigen solamente un **recuento o comparación de filas/columnas** para su respuesta correcta (tal y como ya se concluyó en la anterior experimentación). En este tipo de actividades ha habido un éxito bastante

considerable, aunque disminuye su grado de éxito cuando se trata de aplicar operaciones o estrategias más complicadas como la combinación de operaciones lógicas o la argumentación de la respuesta.

Proximidad / distancias (positivas y negativas)

Según la caracterización a priori de Q, las cuestiones que permiten trabajar las diferencias o coincidencias (tanto positivas “copresencias”, como negativas “coausencias”) entre filas o columnas corresponden a: Q10, Q11, Q12, Q13, Q15, Q16-3, Q16-4, Q16-8 y Q16-10.

Las cuestiones que tratan en concreto la operación de las coincidencias son: Q13, Q15 y Q16-10:

- En la **Q13** los alumnos debían comparar las actividades elegidas por el joven J y L de la tabla T, los cuales coinciden en 10 de 14 actividades ofrecidas por la “Agencia de viajes”. De las 10 coincidencias 6 son copresencias y 4 coausencias. Como los jóvenes coinciden en más de un 70% de las actividades, la respuesta correcta es “que los jóvenes J y L coinciden bastante o mucho” . Esta cuestión ha sido contestada correctamente por el 79% de los alumnos en general, teniendo en cuenta diferencias entre los distintos grupos y niveles, según la tabla 3-4 (2ºg y 1ºP disminuyen en el éxito de respuesta).
- Según los resultados de la cuestión **Q15** (con un 71% de éxito de media) seguimos deduciendo, que en general, los alumnos consideran tanto las copresencias, como la coausencias, para fijarse en las coincidencias. En esta cuestión intervienen los jóvenes I, F y J de la tabla T, entre los cuales I-F coinciden en 8 actividades (sólo copresencias) y I-J coinciden en 9 actividades (6 copresencias y 3 coausencias). Por lo tanto, para dar la respuesta correcta a Q15 es imprescindible tener en cuenta las coincidencias negativas, de lo contrario los alumnos contestarían que se parecen más los jóvenes I-F que I-J, siendo la respuesta correcta la pareja I-J. También detallamos en la tabla 3-4 las diferencias en el éxito de la respuesta según los distintos niveles y grupos (vuelve a descender 2g y 1P). No obstante cabe destacar que un 12% del grupo 2g deja en blanco esta cuestión.

- El resultado de respuestas con éxito en la cuestión **Q16-10** se mantiene más o menor acorde a las otras cuestiones, aunque en el grupo de 3g desciende el porcentaje de éxito, en el grupo 2g se repite que un 12% de los alumnos no contestan a la cuestión y en 1P un 6% también la dejan en blanco (ver tabla 3-4). Hay que tener en cuenta que los alumnos debían interpretar “que estar de acuerdo” se traduce en coincidir tanto en las copresencias 1-1 como en las coausencias 0-0. De hecho en esta cuestión, para que los jóvenes L y N estén de “acuerdo” en diez actividades se debe tener en cuenta 1 coincidencia negativa entre ellos (de las 10 coincidencias 9 son copresencias y 1 coausencia).

	1 g	2 g	3 g	4 g	1P	media
Q13	89%	65%	75%	96%	67%	79%
Q15	81%	65%	75%	74%	56%	71%
Q16-10	81%	65%	54%	70%	56%	67%

Tabla 3-4: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q13, Q15 y Q16-10

Q13: Por sus elecciones, los jóvenes J y L **se parecen**: - nada - un poco - bastante - mucho
Q15: Las respuestas del joven I, **¿se parecen** más a las del joven F o a las del joven J?
Q16.10: Los jóvenes L y N **están de acuerdo** en diez cuestiones de la encuesta. ¿V o F?

Con respecto a las cuestiones con la operación de búsqueda de diferencias entre filas o columnas existe un porcentaje de éxito bastante aceptable en las respuestas de la cuestión **Q10**, con un 70% de media, sin destacar diferencias significativas entre los cuatro niveles, aunque en 1g y 2g un 4% de los alumnos no han sabido contestarla y en 3g un 8% tampoco.

Q10: ¿Cuántas **diferencias** hay entre las respuestas de los jóvenes C y E?
Q16.8: A los jóvenes H y O **les gustan el mismo** tipo de actividades ¿V o F?

El éxito en las respuestas de la cuestión **Q16.8** aumenta respecto a la Q10, correspondiendo a un 90%. Tan sólo destacar un descenso en este éxito en el grupo de 1P con un 78%, siendo un 6% respuesta en blanco. El resto de grupos está alrededor del 90% de media. La mejoría en las respuestas de esta cuestión se puede deber a que los alumnos tan sólo se deben fijar en las coincidencias positivas, puesto que se pregunta si a dos jóvenes (H y O) les gusta el mismo tipo de actividades del viaje, con atribución del valor verdadero o falso. Además las columnas correspondientes a estos dos jóvenes son totalmente idénticas por lo tanto no les produce tanta confusión como en el caso de haber diferencias entre ellas.

El resto de cuestiones son analizadas a continuación por estar relacionadas con operaciones lógicas.

Operaciones lógicas: conectores, cuantificadores e implicación lógica

Los cuantificadores universal y existencial que caracterizan las respuestas de las cuestiones **Q4**, **Q5** y **Q7** tienen un resultado alto según los resultados de éxito, que son respectivamente de un 97% 100% y un 95%, sin que existan diferencias significativas entre los grupos.

Q4: ¿Existe algún tipo de actividad que les guste a **todos** los jóvenes?
Q5: ¿Existe algún joven a quien no le guste **ningún** tipo de actividad?
Q7: ¿Existe algún joven a quien le gusten **todas** las actividades?

El resultado de éxito de las respuestas a las cuestiones donde intervienen conectores lógicos bajan, según la dificultad de las operaciones que se exigen:

- El conector lógico disyunción parece estar más claro entre los alumnos de esta etapa cuando se trata de relacionar dos variables directamente con el conector “o”, como muestra el 98% de éxito sobre la **Q6** (sin diferencias significativas entre los grupos y niveles). Pero en el caso de tratarse de la disyunción a través de preguntas en las que además deben realizar atribución al valor de verdad, hace que baje el porcentaje de respuesta correcta a un 86% correspondiente a la **Q16.5**. El aumento de éxito en la pregunta **Q16.6** (92%), del mismo estilo que la anterior, se puede deber a que una las variables que interviene - “ir en bici”- corresponde a una fila con todos sus valores positivos que los alumnos ya han contestado en la cuestión **Q4**, y tal vez, les resulte sencillo identificar la variable “ir en bici” como una actividad respondida positivamente por todos los jóvenes (en realidad no trabajan la disyunción propiamente dicha, sino que la Q4 les ayuda a responder a esta cuestión sin realizar ninguna operación adicional).

Q6: Los jóvenes, ¿prefieren ir a competiciones deportivas o ir a Francia a aprender francés?
Q16.5: Los jóvenes prefieren más las visitas con guía, que ir a Italia a visitar museos. ¿V o F?
Q16.6: Los jóvenes prefieren más los cruceros por el Caribe, que ir en bici. ¿V o F?

El resultado de éxito en las respuestas baja con el conector conjunción, ya que en la cuestión **Q11** el porcentaje de éxito en las respuestas es de un 41%. La operación conjunción, que se traduce en la búsqueda de las copresencias, se confunde incluso con la disyunción haciendo el recuento por separado del cardinal de cada conjunto de jóvenes que han respondido sí a cada actividad que interviene en la pregunta y en

ocasiones suman ambos resultados calculados por separado. Muestran, pues, la confusión del trabajo numérico con el trabajo lógico. De hecho entre el 59% de error en esta cuestión, sólo un 2% corresponde a respuesta en blanco, un 42% al recuento por separado del cardinal del conjunto de jóvenes que han elegido ambos criterios y un 14% a la suma de dichos cardinales. El error de interpretar la conjunción como una disyunción predomina en el primer ciclo de la ESO, con diferencias significativas según los niveles de la etapa (tabla 3-5).

	QB11	QN11	QD11	Qa11
media	41%	2%	42%	14%
1g	33%	4%	41%	19%
2g	35%	4%	42%	15%
3g	58%	4%	29%	13%
4g	57%	0%	30%	9%
1P	16%	0%	67%	2%

Tabla 3-5: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente o con el detalle del error a la cuestión Q11

Q11: ¿Cuántos jóvenes prefieren probar las especialidades del lugar y bañarse?
Q12: ¿A cuántos jóvenes **no** les gusta ir a competiciones deportivas, **ni** jugar a tenis?

Aumentando la dificultad en la cuestión **Q12** al combinar las operaciones negación y conjunción, traducido en la búsqueda de coausencias. El porcentaje de éxito de las respuestas también es del 42%, manifestando de nuevo mayor error en el primer ciclo de la etapa (tabla 3-6). En este caso, existe la misma tendencia que en la cuestión anterior Q11, calculando el cardinal por separado del conjunto complementario de sujetos (jóvenes) que cumplen cada criterio que interviene en la cuestión.

	1 g	2g	3g	4g	1P	media
Q12	30%	38%	50%	70%	22%	42%

Tabla 3-6: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q12

Por último, el análisis de la corrección de la Q16-3 y Q16-4 nos puede manifestar hasta qué punto los alumnos de la experimentación saben manejar la implicación lógica. En la **Q16.3** cuya respuesta correcta en principio es “F” (no existe implicación lógica entre estas dos actividades), es contestada correctamente por un 82%, teniendo mayor éxito entre los alumnos del segundo ciclo. Sin embargo, la **Q16.4** cuya respuesta correcta es “V” (siendo la inversa de la cuestión Q16.3), sólo la contestan correctamente un 58%, teniendo en cuenta que el 10% ha dejado la cuestión en blanco. En este caso es 4º de ESO quien tiene un porcentaje más alto (ver tabla 3-7). Pero un dato curioso es que en la pasación del cuestionario, un 24% indica explícitamente que la Q16.4 es

exactamente igual que la Q16.3 (comentarios del alumnado realizados al observador de la experimentación). Y en cuanto a las respuestas, un 32% de los alumnos responde exactamente igual a la Q16.4 que a la Q16.3. Esta última observación cabe destacarla entre los alumnos del primer ciclo de la ESO.

	1g	2g	3g	4g	1P	media
Q16-3	81%	81%	100%	87%	56%	82%
Q16-4	44%	62%	58%	83%	39%	58%

Tabla 3-7: Porcentaje de los alumnos que responden correctamente a Q16-3 y Q16-4

Q16.3: A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, también les gusta la montaña. ¿V o F?

Q16.4: A todos los jóvenes que les gusta la montaña, también les gusta ir en bici. ¿V o F?

Podemos concluir que la operación “condicional” no está consolidada en los alumnos de la etapa de la ESO, sobre todo en el primer ciclo.

Conceptos básicos de Estadística: frecuencias y moda

Las cuestiones Q17, Q18 y Q19 están caracterizadas por las operaciones de Estadística básica que en concreto se refieren a frecuencias: porcentaje, absoluta y relativa respectivamente. Estas cuestiones sólo las hemos planteado para el segundo ciclo de la ESO. La corrección de dichas cuestiones nos proporciona la información de un porcentaje de éxito muy bajo, que en general corresponde a: 74%, 32% y 15% respectivamente. Como se puede observar en la tabla 3-8, el éxito varía en función del nivel:

- en la cuestión **Q17** (frecuencias porcentuales) los porcentajes de éxito no presentan diferencias entre 3º y 4º de la ESO (71 y 78% respectivamente),
- respecto a la cuestión **Q18**, sobre frecuencias absolutas, los resultados de éxito descienden hasta un 32%, teniendo mejor resultado en 3º ESO (46%) y un 38% en blanco; y muy bajo en 4º ESO (17%), con el 70% sin responder a la cuestión. Esto se puede deber a que en 3º de ESO se trabaja el bloque de contenidos de Estadística en el primer trimestre (organización interna en este centro),
- respecto a las frecuencias relativas, en la cuestión **Q19**, los porcentajes de éxito bajan considerablemente puesto que en 3º ESO responden con éxito un 29 % y 58% no responden a la cuestión; en cambio en 4º ESO el 0% de éxito, con un 83% de respuesta en blanco.

	3g	4g	media
Q17	71%	78%	74%
Q18	46%	17%	32%
Q19	29%	0%	15%

Tabla 3-8: Porcentaje de los alumnos de 2º ciclo que responden correctamente a Q17, Q18 y Q19

Q17: ¿A qué **porcentaje** de los jóvenes les gusta jugar a las cartas?
Q18: Si consideramos -jugar a tenis- como una variable estadística, ¿qué **frecuencia absoluta** dirías que tiene en esta distribución estadística?
Q19: ¿Qué **frecuencia relativa** tendría la variable estadística de la pregunta anterior?

En cuanto al concepto estadístico (parámetro central) de la moda, ésta no se ha preguntado explícitamente en ninguna de las cuestiones de Q, pero surge como un contenido implícito en cuestiones como Q4, Q7, Q8 y Q14. Aunque no se haga referencia como una operación explícita, los alumnos la utilizan como un instrumento para contestar a dichas cuestiones, por ejemplo: en Q14 responden las actividades que más eligen los jóvenes porque tienen más “votos”; o que la actividad “ir en bici” es elegida por todos los jóvenes en Q4; en Q7 pueden fijarse en que algunos jóvenes como “A, N, P o Z” les gustan todas las actividades excepto una. Y en la Q8 deben buscar las actividades propuestas por la “Agencia de viajes” con la frecuencia absoluta positiva más alta que “pernoctar en un castillo”.

3.3.3. Aplicación de CHIC a la matriz de resultados de Q (MP)

Para complementar el análisis de la experimentación del cuestionario Q, aplicamos el programa CHIC sobre la submatriz que representan sólo la respuesta correcta o incorrecta a la cuestión; sin tener en cuenta el análisis detallado del tipo de respuesta que han realizado los alumnos.

Obtenemos así, el árbol de similaridad, el grafo implicativo y el árbol jerárquico de cohesión implicativa entre las respuestas correctas al cuestionario.

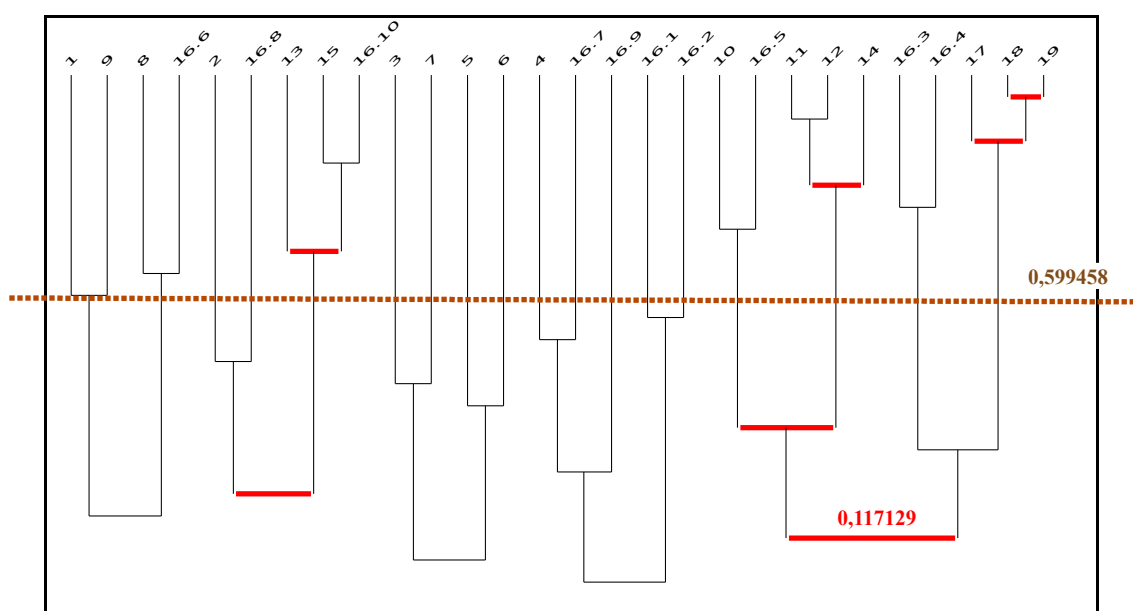


Figura 3-8: Árbol de similaridad entre las respuestas correctas a Q, aplicando CHIC a una submatriz de MP (correcto/incorrecto)

En este primer gráfico podemos observar que las cuestiones que se agrupan en la segunda y última clase de cuasi-equivalencia, mediante nudos significativos, corresponden a las cuestiones que han tenido, como media, un porcentaje de éxito inferior al 80% (excepto Q2, Q16.5 y Q16.8). En este sentido coincidimos con el estudio anterior en el que hemos presentado los resultados esperados y marcados por la caracterización a priori de las cuestiones.

Los dos grupos de cuestiones a las que hacemos referencia se resumen según las siguientes clases:

$$R_2 = \{Q2, Q16.8, Q13, Q15, Q16.10\} \text{ y}$$

$$R_3 = \{\{Q10, Q16.5, Q11, Q12, Q14\} \cup \{Q16.3, Q16.4, Q17, Q18, Q19\}\}$$

Las preguntas de la primera clase, excepto Q2, son las que conllevan comparación de columnas combinado con el recuento de proximidad/distancia entre los valores de los sujetos de la tabla T. En concreto, Q13, Q15 y Q16.10 suponen usar la operación de coincidencias entre columnas. Éstas han tenido éxito en sus respuestas entre un 67% y un 79% de media.

La clase R_5 la podemos subdividir en dos subclases; la primera se caracteriza por cuestiones con las operaciones lógicas disyunción, conjunción y negación; cuyo éxito de respuesta oscila entre el 41% y el 71% (excepto Q16.5 con un 86%) y la segunda por dos cuestiones con implicación lógica y tres de conceptos estadísticos; que tienen una media de éxito más baja: desde un 15% hasta un 82%; con diferencias significativas entre los niveles de la etapa (ver tablas 3-7 y 3-8) y sabiendo que las preguntas relacionadas con la Estadística, sólo se han preguntado a los del segundo ciclo de ESO.

Las otras tres clases del árbol de similaridad corresponden a las cuestiones que han tenido un éxito igual o superior al 92% (excepto Q9 con un 88%), muestra de las preguntas que conllevan operaciones lógico-matemáticas que no han supuesto un obstáculo para el alumnado, cuyo análisis se detalla en la sección 3.3.2.

Si observamos, a continuación, el árbol jerárquico de cohesión implicativa y el grafo implicativo (figuras 3-9 y 3-10) entre las cuestiones según las respuestas correctas del alumnado, volvemos a constatar que quedan agrupadas mediante la implicación estadística con niveles significativos de cohesión y mediante cadenas implicativas con nivel de significación alto (0,99 o 0,95), las mismas cuestiones que hemos indicado según el árbol de similaridad de la figura 3-8.

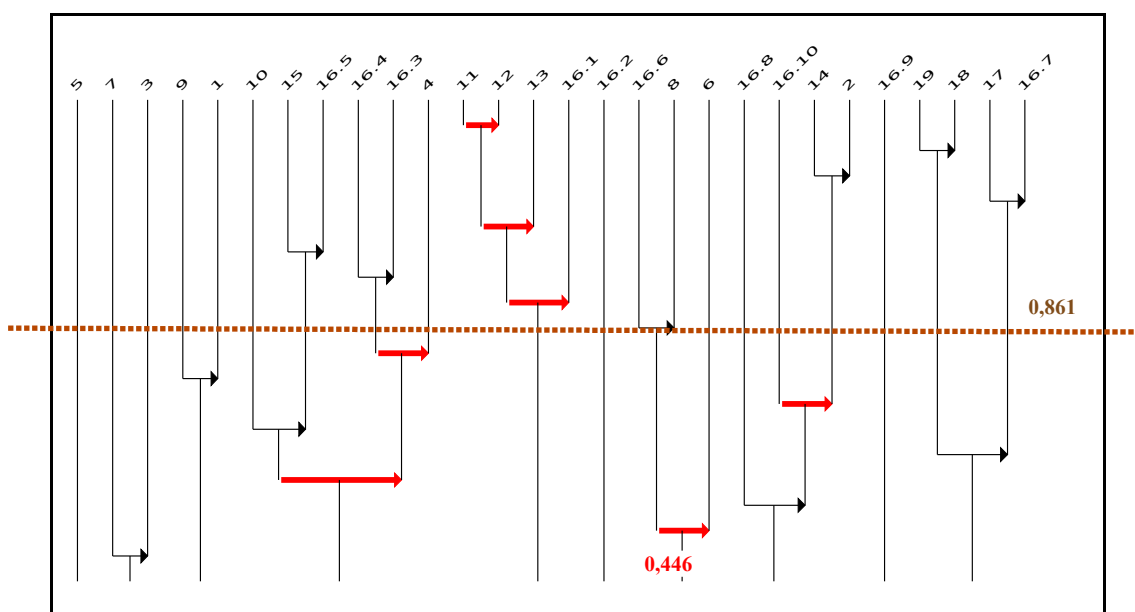


Figura 3-9: Árbol jerárquico de cohesión implicativa entre las respuestas correctas a Q, aplicando CHIC a una submatriz de MP (correcto/incorrecto)

3.4. Identificación del trabajo lógico-matemático y comparación con los resultados de la experimentación 2000-01

Tras el análisis exhaustivo de los resultados de los alumnos al responder al cuestionario Q del curso 2014-15, podemos hacer la comparativa con los obtenidos en la pre-experimentación realizada en el curso 2000-01 (Pitarch, 2002, pp.77-83), siendo un cuestionario con las mismas características tanto a nivel de contenidos lógico-matemáticos, como el grado de dificultad en sus cuestiones.

Las conclusiones de la comparativa se pueden resumir de la siguiente forma:

- En cuanto a la tabla, es un instrumento didáctico de fácil introducción en situación escolar, puesto que no exige una presentación previa o trabajo específico al respecto. Esta conclusión se puede deducir a partir del porcentaje de éxito en la **lectura y manipulación elemental de la tabla** en la ESO tal y como se refleja en la tabla 3-2 y tabla 3-3 (excepto la Q14 que exige otras operaciones más complejas) y que está alrededor del 97% como media de éxito sin tener en cuenta la Q14, y el 94% aproximadamente, considerando Q14. Este resultado es semejante al obtenido en la experimentación del DEA con el mismo porcentaje de éxito (aproximadamente el 97%). Queda confirmado el trabajo con la tabla de datos binarios en esta etapa educativa.
- En segundo lugar se vuelve a repetir una respuesta favorable respecto a las cuestiones que suponen **comparación entre filas y columnas**. En esta última experimentación los alumnos no han manifestado dificultad en este tipo de operaciones, igual como en la que se llevó a cabo en el curso 2000-01. De la misma manera, sí presentan mayor error en las cuestiones cuyas respuestas correctas exigen no sólo la comparación de filas o columnas, sino además otros cálculos lógicos combinados con esta operación (proximidad o distancia entre las filas o columnas).
- El tratamiento de la **proximidad/distancia** de criterios y de la diferenciación entre las copresencias (coincidencia positiva 1-1) y de las coausencias (coincidencia negativa 0-0), se aplican para calcular los diferentes índices de proximidad estadística, en el tratamiento de la clasificación. El éxito en este tipo de cuestiones oscila entre un 67% y 79% cuando se exige la distinción entre las copresencias y las coausencias, tratándose ambas de coincidencias (tanto

positiva, como negativa). Ésta conclusión ya se obtuvo en el DEA, mostrando nuevamente que este aspecto del tratamiento estadístico de la clasificación no está consolidado por los alumnos de esta etapa educativa.

- Tal y como se concluyó en la anterior experimentación, volvemos a corroborar la utilización de la tabla como una propuesta para realizar actividades que impliquen **operaciones lógicas** para su realización, ya que éstas no están totalmente adquiridas por los alumnos de esta etapa educativa, fundamentalmente por los del primer ciclo, como lo demuestran los resultados al conjunto de las cuestiones que suponen operaciones lógicas, que presentan un resultado inferior al 70% llegando a descender hasta el 39% en las preguntas relativas a la implicación.
- Cabe señalar que la interpretación de los **cuantificadores** (universal y existencial) presenta un alto porcentaje de éxito cuando aparecen de forma aislada, esto puede deberse a que este tipo de operadores está más cercano o coincide con el lenguaje habitual del alumnado (expresiones como “para todos”, “alguno”, “existe o hay algún joven/actividad que...”). También hay que tener presente que el tratamiento del conector lógico disyunción ha tenido un resultado de éxito alto, pero sólo cuando se tratan dos variables y de forma explícita. Esta conclusión también es homóloga a la obtenida en el DEA, en lo que respecta a las operaciones lógicas y tratamiento de los cuantificadores.
- Y por último con respecto a los resultados obtenidos en la cuestiones que exigen el tratamiento de contenidos básicos de Estadística descriptiva, -sólo en los alumnos de 3º y 4º de ESO- éstos coinciden con los obtenidos en la experimentación realizada en el curso 2000-2001, puesto que nos permite ver que los alumnos no reconocen estos contenidos (como son las frecuencias) en esta tabla y el cuestionario. Este bajo resultado (15% y 32% de éxito en las frecuencias) marca el interés de la utilización de la tabla para que los alumnos puedan trabajar estos contenidos en un contexto más amplio en el que se requiera otro tipo de razonamiento, como puede ser la combinación con el trabajo lógico, complementado así al cálculo estadístico.

Conclusiones

Las conclusiones de este capítulo versan sobre los objetivos que nos hemos planteado al inicio del mismo.

Respecto al diseño y análisis a priori del “Cuestionario Q”

- La primera conclusión que podemos extraer es que el estudio a priori del cuestionario prueba -una vez más- la pertinencia de las preguntas planteadas en el mismo, garantizando el trabajo conjunto del tratamiento de datos, el razonamiento lógico y Estadística elemental para el alumnado de la etapa educativa de la ESO.
- La aplicación de técnicas de clasificación jerárquica e implicativas mediante el programa CHIC ha permitido el análisis a priori pormenorizado de las preguntas del “Cuestionario Q” teniendo en cuenta las operaciones lógico-matemáticas que conllevan cada una de ellas.
- Las distintas interpretaciones matemáticas que se presentan con respecto a la tabla T y las cuestiones en concreto, muestran el potencial que realmente posee este instrumento matemático y facilitan la identificación de las variables didácticas que se manejan en la resolución del cuestionario.

Respecto a los resultados de la experimentación, como situación adidáctica

A partir de los resultados obtenidos en la experimentación con los alumnos de toda la etapa de la ESO y la comparativa de los mismos con la previa del curso 2000-01, podemos obtener las siguientes conclusiones:

- El nivel educativo que elegiremos para diseñar lecciones de la ingeniería didáctica que permitan trabajar las operaciones lógicas: conjunción, negación, implicación, atribución de verdad y proximidad/distancia entre criterios, es 1º de ESO. En este nivel se han obtenido los niveles de éxito más bajos en las respuestas a las cuestiones que exigen operaciones lógicas (y combinación entre ellas) y operaciones de proximidad/distancia entre los criterios.

- Para seguir trabajando con el tratamiento lógico y estadístico de la información, en este nivel educativo, no utilizaremos términos específicos como frecuencias o variables estadísticas -no estudiados en 1º de la ESO-; sino que plantearemos la utilización de diagramas de árbol para aprovechar las posibilidades que éste puede ofrecer y trabajar así mediante situaciones de clasificación. De este modo ampliamos la visión del tratamiento de datos limitado por el enfoque puramente estadístico.
- A partir de los resultados obtenidos en la experimentación con el “Cuestionario Q”, consideramos importante realizar su corrección en cada uno de los grupos que lo han contestado. En este caso han trabajado a nivel de acción, por tanto plantearemos la corrección para hacer la devolución a los alumnos de este trabajo a nivel de formulación y validación.
- Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las respuestas a las cuestiones sobre conceptos de Estadística, deberemos diseñar una situación para abordar estos contenidos. En 2º de la ESO como iniciación a la Estadística mediante conceptos más sencillos (frecuencias, porcentajes...) y en 3º y 4º de la ESO, profundizando un poco más en los conceptos estadísticos elementales (variable estadística, frecuencias, porcentajes, media aritmética, moda, ...).

CAPÍTULO 4

Ingeniería didáctica y diseño de las situaciones de aprendizaje

Este capítulo presenta una propuesta didáctica que permita un acceso diferente al tratamiento de la información en la enseñanza secundaria obligatoria, combinando el trabajo lógico, con el estadístico, sobre tablas multivariantes de datos binarios.

En el capítulo anterior, hemos mostrado que la lectura y manipulación elemental de la tabla no ha supuesto ningún obstáculo para el alumnado de cualquier nivel de la ESO; convirtiéndose así, la tabla, en un soporte objetivo para materializar sus razonamientos, el natural y el lógico. Lo que nos permite tomar la decisión de continuar utilizando la tabla T como instrumento didáctico idóneo para que los alumnos puedan seguir profundizando en los conocimientos lógico-matemáticos que consideramos que no están consolidados en esta etapa, en concreto en 1º de ESO.

Los contenidos matemáticos que queremos abordar en la ingeniería didáctica que concreta nuestra propuesta se han seleccionado a partir de los análisis de los resultados del “Cuestionario Q”. El análisis a priori de dicho cuestionario muestra el tipo de trabajo lógico-matemático, que permiten las actividades a realizar a partir de las diferentes preguntas del cuestionario. Es decir, el cuestionario Q puede considerarse como situación fundamental de referencia, de las diversas actividades que se pueden plantear a los alumnos. Cada una de estas actividades son determinadas a priori, a partir de los valores elegidos para las variables didácticas de la situación. Esto se ha abordado en el capítulo 3.

A su vez, el análisis de los resultados obtenidos en la experimentación de Q, ha permitido detectar las cuestiones en las que los alumnos manifiestan mayor dificultad. Son las preguntas que implican operaciones lógicas y el tratamiento de nociones relacionados con la clasificación (proximidad, distancia, ...).

Por tanto las cuestiones que debemos plantear a los alumnos en las nuevas lecciones como variantes de la situación fundamental de referencia, versarán sobre estas nociones y conceptos. Deben implicar actividades con operaciones lógicas y sobre el tratamiento de proximidad/distancia entre criterios de la tabla, así como la utilización de la clasificación como partición de un conjunto. De esta forma se amplía la visión del tratamiento de datos que se suele tener desde la Estadística, como mero cálculo de medidas estadísticas de descripción de una población o conjunto. El tratamiento lógico de los datos también forma parte del tratamiento de la información, puesto que nos aporta nuevas informaciones a partir de los datos iniciales.

Las situaciones que vamos a diseñar giran en torno al mismo tema usado en el “Cuestionario Q”, el de *la agencia de viajes*, que simula tener unos datos sobre los gustos de unos jóvenes con respecto a una serie de actividades que se les propone para realizar un viaje. La ingeniería didáctica estará formada por cuatro situaciones de aprendizaje: “*El juego de la agencia de viajes*”, “*Juegos de clasificación*”, “*Corrección colectiva del cuestionario Q*” y “*Organización del viaje fin de curso*”.

La primera situación, “*El juego de la agencia de viajes*” es la que permite que los alumnos trabajen algunos contenidos relacionados con la Lógica, concretamente los contenidos lógicos de las preguntas del cuestionario Q, en las que han manifestado mayor grado de dificultad. Asimismo, los alumnos también tendrán que utilizar proximidad/distancia entre criterios, lo que permitirá trabajar de forma implícita con las nociones de coincidencias (copresencias y coausencias) y diferencias.

La segunda situación “*Juegos de clasificación*”, permite trabajar la conjunción de cuatro predicados, considerando los dieciséis resultados posibles, según se consideren estos predicados o su negación. Es decir, supone hallar las dieciséis clases de la partición del conjunto de jóvenes resultantes de la verificación (o no), de los cuatro criterios (predicados) seleccionados. Esta situación también nos facilita introducir y aplicar el concepto de diagrama de árbol, que aunque no sea del todo desconocido para los alumnos de este nivel educativo, tampoco lo utilizan habitualmente. Por tanto no han tenido la oportunidad de conocer el potencial que posee esta herramienta matemática en diferentes materias. De forma especial, la posibilidad de trabajar técnicas de recuento mediante la clasificación y su representación con diagramas de árbol es frecuentemente utilizada como técnica de conteo en combinatoria. Todo ello muestra que se puede ampliar el contexto en el que se enmarca el trabajo del alumnado, sin necesidad de limitarnos al bloque de contenidos de Estadística -como marcan las directrices curriculares- para abordar la competencia *tratamiento de la información y competencia digital*. Se puede abordar desde distintas áreas o materias en donde la clasificación es una técnica pertinente de conocimiento, por ejemplo la clasificación de las plantas o de los animales, en Ciencias Naturales.

Tras estas situaciones, se propone abordar una tercera situación de “*Corrección colectiva del cuestionario Q*”, en la que el profesor ya puede realizar la devolución de la corrección a los alumnos. La realización de esta situación, completa a nivel de

formulación y validación el trabajo lógico que el cuestionario había planteado sólo a nivel de acción a los alumnos, a través de sus respuestas.

Para completar la propuesta, se propone una cuarta situación en la que se plantean actividades que exigen utilizar conceptos elementales de Estadística descriptiva, correspondientes a los contenidos curriculares de la ESO con carácter un poco más habitual. El desarrollo de esta situación plantea que los alumnos tengan que manejar tablas semejantes a la tabla T, lo que amplía el tratamiento estadístico habitual de los datos con el trabajo lógico. Es decir, supone un tratamiento global e innovador de la información. Esta situación de aprendizaje es “*Organización del viaje fin de curso*”.

4.1. “El juego de la agencia de viajes”

Como hemos avanzado, el objetivo de esta situación de aprendizaje es que el alumnado pueda profundizar en los contenidos relacionados con la Lógica. En esta lección se plantea el trabajo lógico combinando las operaciones lógicas de negación y conjunción o la generalización de predicados y la condicional; además de la atribución de verdad a una proposición. A su vez las preguntas del cuestionario de esta lección implican la utilización de proximidad/distancia entre criterios, trabajando implícitamente las coincidencias (copresencias y coausencias) y las diferencias. Nociones esenciales para la creación de los índices utilizados en el análisis estadístico de clasificación jerárquica (análisis cluster). Concretamente en el análisis tipológico, utilizado por Orús (1992 pp. 322-345) en la ingeniería didáctica que diseña en su tesis como solución del problema de contrato didáctico que define en la relación didáctica.

El “Juego de la agencia de viajes” se estructura en cuatro fases distintas:

- en la **fase I** el alumnado debe trabajar de forma individual, respondiendo a seis cuestiones que se les entregan en forma de ficha (“*la plantilla individual*”). Para realizar estas actividades deben utilizar la tabla T, la misma que usaron en la experimentación del “Cuestionario Q”. Es una situación de acción,
- en la **segunda fase** los alumnos trabajan en grupos reducidos y deben dar una respuesta de grupo a las mismas actividades que han resuelto individualmente. Además se les exige razonar la respuesta de las tres últimas preguntas. En esta fase utilizan otra ficha: “*la plantilla de grupo*”,

- la **fase III** consiste en intercambiar las plantillas de grupo (cada dos grupos) para poder contrastar las respuestas que han dado a las actividades del juego,
- y la **fase IV**, es la corrección colectiva, gestionada por el enseñante, de las respuestas que los diferentes grupos han dado a las actividades.

El juego de esta lección se realiza sin ninguna preparación previa sobre Lógica o Teoría de conjuntos, ni otros tipos de conocimientos matemáticos específicos. Esta situación es, en las tres primeras fases, de naturaleza adidáctica y sólo la última fase es didáctica, por tratarse de la gestión de la corrección colectiva de las actividades realizadas, en situación de debate con todo el grupo-clase.

En la lección se proponen tres variantes de las mismas actividades, es decir, hay tres modalidades del juego. A continuación presentamos el medio adidáctico de las diversas modalidades del mismo: la tabla T y la consigna con sus respectivas preguntas. Todos los alumnos tienen la misma tabla de datos (T) y la misma consigna (figura 4-1); lo que varía son las preguntas según la modalidad del viaje (figura 4-2). Cada modalidad del juego la realizarán dos grupos de alumnos (los llamados grupos homólogos).

LA CONSIGNA																							
“Se ha hecho una encuesta a jóvenes entre 15 y 20 años, para que una Agencia pueda organizarles un viaje teniendo en cuenta sus preferencias.																							
A continuación se presenta una tabla que contiene las respuestas de los jóvenes a la encuesta realizada:																							
- A la izquierda está el listado de las actividades o lugares que puede tener el viaje, sobre los que se pide la opinión a cada uno de los jóvenes; por ejemplo: “¿te gusta hacer visitas con guía?”																							
- La letra mayúscula de cada una de las columnas, representa el nombre de uno de los jóvenes; por ejemplo: “el joven K”																							
- Los jóvenes entrevistados sólo podían contestar un SI o un NO. En la tabla de valores (T) el 1 representa el SI y 0 el NO”.																							
¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
C1. ir a un museo?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
C2. ir a competiciones deportivas?	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
C3. jugar a tenis?	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
C4. bañarte?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C5. los cruceros por el Caribe?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
C6. ir a Francia a aprender francés?	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C7. la montaña?	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C8. hacer visitas con guía?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
C9. probar especialidad del lugar?	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
C10. jugar a las cartas?	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
C11. ir en bici?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C12. las marchas por la montaña?	1	0	1	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1
C13. ir a Italia a visitar museos?	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C14. pemoctar en un castillo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla T

Figura 4-1: Consigna y tabla T del “Juego de la agencia de viajes” para todos los alumnos

CUESTIONES SEGÚN MODALIDAD DE VIAJE
Modalidad C: VIAJE “C” CON ACTIVIDADES CULTURALES
Responde a las siguientes cuestiones, ayudándote de la tabla T.
CQ1: ¿A qué jóvenes les gusta ir a Francia a aprender francés y a Italia a visitar museos
CQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta pernoctar en un castillo, ni hacer visitas con guía
CQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta ir a un museo, ni hacer visitas con guía?
CQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a un museo, les gusta ir a Italia a visitar museos?
CQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a Italia a visitar museos, les gusta ir a un museo?
CQ6: No es cierto que al joven M le guste ir a Francia a aprender francés. ¿Verdadero o falso?.....
Modalidad D: VIAJE “D” CON ACTIVIDADES DEPORTIVAS
Responde a las siguientes cuestiones, ayudándote de la tabla T.
DQ1: ¿A qué jóvenes les gusta la montaña y las competiciones deportivas?
DQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta ir en bici, ni las competiciones deportivas?.....
DQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta jugar a tenis, ni las marchas por la montaña?
DQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, les gusta jugar a tenis?
DQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a tenis, les gusta ir en bici?
DQ6: “No es cierto que al joven M le guste ir a la montaña”. ¿Verdadero o falso?.
Modalidad O: VIAJE “O” CON ACTIVIDADES OCIO
Responde a las siguientes cuestiones, ayudándote de la tabla T.
OQ1: ¿A qué jóvenes les gusta jugar a cartas y bañarse?
OQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta bañarse, ni los cruceros por el Caribe?
OQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta jugar a cartas, ni las competiciones deportivas?
OQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a cartas, les gusta pernoctar en un castillo?
OQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta pernoctar en un castillo, les gusta jugar a cartas?
OQ6: “No es cierto que al joven R le guste jugar a cartas”. ¿Verdadero o falso?.....

Figura 4-2: Actividades del “Juego de la agencia de viajes” según modalidad

Las tres modalidades versan sobre el mismo tipo de operaciones lógico-matemáticas y tienen el mismo grado de dificultad. Se ha aprovechado la relación semántica que existe entre las actividades que propone la agencia de viajes, por ejemplo unas actividades están directamente relacionadas con la cultura, otras con el deporte y el resto son de ocio. Por otro lado, la decisión de elegir tres modalidades enriquece la actividad lógica, presentando las mismas operaciones lógicas bajo distinta forma semántica. Se busca la centración y decantación de la operación lógica correspondiente (en el sentido que da Piaget a estos conceptos).

Cada modalidad está formada por seis actividades, que se pueden presentar de forma genérica como sigue:

- _Q1: ¿A qué jóvenes les gusta C_i y C_j ?
- _Q2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta C_i , ni C_j ?
- _Q3: ¿A qué jóvenes no les gusta C_i , ni C_j ?
- _Q4: ¿A todos los jóvenes que les gusta C_i , les gusta C_j ?
- _Q5: ¿A todos los jóvenes que les gusta C_j , les gusta C_i ?
- _Q6: No es cierto que al joven S_k le guste C_i . ¿Verdadero o falso?.

(C_i y C_j ; $i, j = 1, 2, \dots, 14$, representan los 14 posibles criterios de la tabla T y S_k , $k = 1, 2, 3, \dots, 23$, representa a algún joven de la tabla).

Hemos señalado con un guión (_) lo que será la inicial del código que identifica cada modalidad del juego. Puede ser una “C” del viaje cultural, una “D” del viaje deportivo (D) o una “O” del viaje de ocio.

La primera pregunta o cuestión, Q1, trata de la conjunción de dos criterios. En la segunda y tercera cuestión se trabaja la conjunción de la negación de dos criterios; con la diferencia que en Q2 se exige el cálculo del cardinal del conjunto de todos los sujetos (jóvenes) que cumplen la condición indicada (actividades del viaje) y en cambio, en la Q3 se pide la enumeración de todos los sujetos (jóvenes) que cumplen o verifican una condición concreta. La cuarta y la quinta son dos condicionales entre predicados (Q5 es la recíproca de la Q4) y la Q6 trata de la atribución de verdad de un enunciado que está formulado con una negación.

4.1.1. Modelización del juego como una situación adidáctica

El “Juego de la agencia de viajes” constituye una de las lecciones de nuestra **ingeniería didáctica** y está diseñada según la modelización que propone el marco teórico de la TSD de Brousseau (1986a). Dicha modelización supone:

- que el juego (preguntas y tabla) está diseñado como una **situación adidáctica** específica de los conocimientos sobre el tratamiento de datos y la Lógica; ya que en las tres primeras fases de la lección los alumnos trabajan sin la intervención del profesor y sus interacciones con el medio adidáctico propuesto son las que permiten el aprendizaje de los conocimientos abordados en las actividades,
- que las preguntas del juego son las **variables didácticas** que permiten la gestión del trabajo del alumno. Se establecen a priori sabiendo que cualquier variación supondrá la modificación de la estrategia o conocimiento matemático que se debe aplicar. A través de las mismas el alumno puede adquirir el conocimiento matemático en juego, en las diversas interacciones con los medios adidácticos cambiantes que proporcionan las fases respectivas y las nuevas informaciones que se van generando a lo largo del juego. El trabajo matemático propuesto al alumno en cada pregunta del juego, no depende de la intervención del profesor, sino únicamente de la naturaleza de la pregunta; aunque éstas son controladas y controlables por el enseñante.

Para mostrar la funcionalidad de las variables didácticas, desde el punto de vista del marco teórico de la TSD, elegimos como ejemplo una pregunta de una de las modalidades del juego, para exponer cuál es el valor asignado a la variable didáctica: la pregunta “controlada” y “establecida a priori” y qué otras posibilidades se pueden aplicar para ir modificando las estrategias de juego que permiten el aprendizaje de un conocimiento matemático concreto. De esta forma se puede mostrar cómo una modificación “controlada” en una pregunta, supone el cambio de estrategia, facilitando el aprendizaje del conocimiento en juego. Este tipo de estudio también se realizó en Orús y Pitarch (2005).

Ejemplo: **CQ2. ¿A cuántos jóvenes no les gusta pernoctar en un castillo, ni hacer visitas con guía?** (elegida de la modalidad del viaje cultural):

- La estrategia ganadora es comparar las filas 14 (actividad “pernoctar en un castillo”) y 8 (actividad “hacer visitas con guía”) de la tabla T, para contabilizar las coincidencias negativas de ambas filas, es decir, las coausencias (0,0). Aunque las técnicas para realizar esta tarea pueden ser diversas: buscar el conjunto de jóvenes que no cumplen el criterio 14 ni el 8 y contar los que se repiten, o buscar los jóvenes que tengan un “0” en ambas filas y contarlos.
- Otros valores posibles de la variable, es decir de esta cuestión, podrían ser las siguientes variantes de la pregunta. **¿A qué jóvenes ...**
 - Variante 1: ... **no les gusta pernoctar en un castillo, ni hacer visitas con guía?** Si quisiéramos que no sólo contabilizaran las coausencias, sino que indicaran los sujetos que las cumplen (es la pregunta 3 de cada modalidad); es decir, que hallaran el conjunto de sujetos (jóvenes) que verifican la conjunción de la negación de ambos criterios. O bien, hallar el conjunto intersección de jóvenes que no les gusta “pernoctar en un castillo” con el conjunto de jóvenes que no les gusta “hacer visitas con guía”.
 - Variante 2: ... **les gusta pernoctar en un castillo y hacer visitas con guía?** Si quisiéramos que trabajaran las copresencias (1,1), en lugar de las coausencias. Es el valor concreto de la variable utilizado en la primera pregunta de cada modalidad.
 - Variante 3: ... **les gusta pernoctar en un castillo y no hacer visitas con guía?** Si quisiéramos que trabajaran las diferencias en el orden (1,0). Es decir, la conjunción con un predicado afirmado y otro negado.

La variable es la conjunción, pero que sea combinando predicados o su negación, cambia el conocimiento lógico en juego. Consideramos que esta variante puede ser utilizada en este nivel educativo (1º ESO), proponiendo la redacción de esta manera, es decir, situando la negación en la segunda parte de la conjunción. En cambio si en la redacción se coloca la negación al principio de la frase que incluye una conjunción, entonces exige la aplicación de la Leyes de Morgan, que supone un grado de dificultad inapropiado para este nivel educativo. Incluso alumnos del primer curso de

Grado de Maestro de educación primaria e infantil, han manifestado dificultades en este tipo de operación lógica (Peydró, 2015).

4.1.2. Análisis didáctico de la lección: el medio y tipo de situación de aprendizaje

En esta lección podemos distinguir los distintos tipos de situaciones que se plantean desde el marco teórico de la TSD. Las situaciones a las que hacemos referencia son situaciones de acción, de validación, de debate, de formulación/comunicación e institucionalización (tal y como se han presentado en el capítulo 1).

El medio con el que interactúan los alumnos también va sufriendo modificaciones y enriqueciéndose a medida que se va desarrollando la lección; con las distintas interacciones con el medio y las nuevas informaciones que aportan al medio.

A continuación vamos a analizar en cada fase de la lección: el tipo de situación que supone, cuál es el medio con el que trabajan los alumnos y el carácter adidáctico/didáctico de dicha situación. Recordamos la figura 1-5, del primer capítulo, sobre la estructuración del medio según Brousseau (1986b), que utilizaremos en el siguiente análisis.

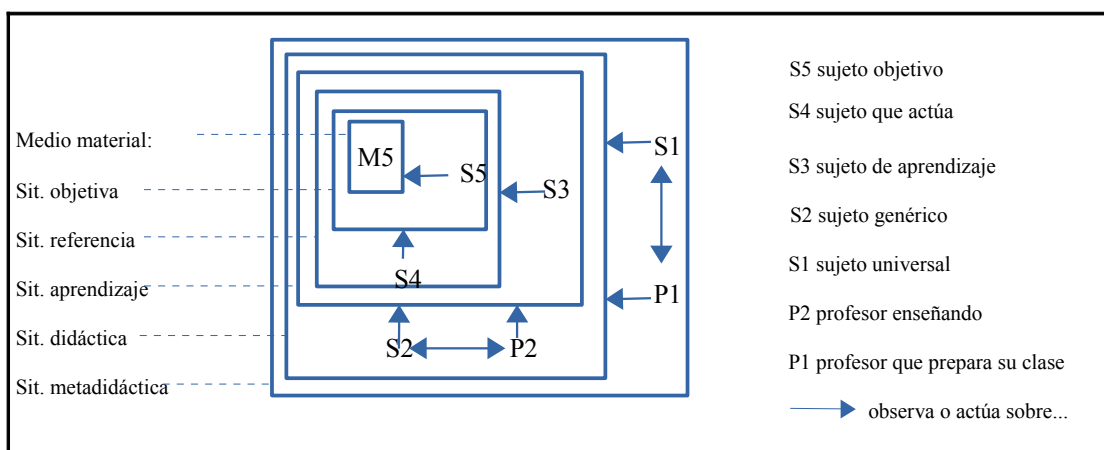


Figura 1-5: Estructuración del medio según Brousseau (1986b)

FASE I: Trabajo individual

Ésta se caracteriza por ser **adidáctica**, puesto que el alumnado deberá responder a las actividades de la plantilla individual sin tener previamente una explicación específica de dichos contenidos por parte del profesor. En este caso el **medio adidáctico** con el que trabajan los alumnos está formado por las preguntas del cuestionario y la tabla T.

Esta primera fase es una **situación de acción**, ya que el alumnado responde a las cuestiones planteadas en la plantilla de trabajo. Además esta fase permite la devolución al alumnado de los contenidos trabajados en el cuestionario Q, que realizaron en el primer trimestre de este mismo curso. Se trata de movilizar la memoria escolar para que puedan relacionar esta actividad con el cuestionario ya realizado.

A partir de la modelización que Brousseau (1986b) hace de la estructuración del medio, podemos interpretar que esta fase se identifica como una **situación de referencia**, puesto que el alumno S4²⁶ actúa o trabaja frente a la **situación objetiva**, formada por el binomio S5-M5. El sujeto objetivo S5 es el alumno (en este caso cada alumno de 1º de ESO del colegio “Grans i menuts”, de Castellón) que imagina o tiene en cuenta el profesor cuando prepara el material M5 (que se presenta en esta primera fase). El profesor espera la responsabilidad de la situación por parte del sujeto, lo que mostraría que la situación permite la devolución del juego. El medio material M5, preparado por el profesor (en este caso el investigador), está formado por la tabla T y las actividades de la lección que hemos mostrado en la sección anterior. Las interacciones del binomio M5-S5 constituyen la situación objetiva que modeliza el saber matemático a enseñar y a aprender (Orús y Bort, 2000).

Esta situación objetiva se convierte en el medio objetivo M4 sobre el que actúa el sujeto S4. Las interacciones del binomio M4-S4 constituyen la **situación de referencia**. En esta situación coexisten los saberes oficiales lógicos que implican las actividades (de la situación objetiva en la que se le plantean los conocimientos matemáticos en juego) con los saberes o conocimientos personales del sujeto actuante S4 (que ha aprendido en la escuela o fuera de ella).

26 Ver figura 1-5, que mostramos en este capítulo para la estructuración del medio según Brousseau

FASE II: Respuestas de grupo

Se inicia como una **situación de acción**, pero ya exige **formulación y validación**, entre los alumnos para la elaboración de las respuestas colectivas a partir de las respuestas individuales.

Esta fase también tiene **carácter adidáctico** porque los alumnos, trabajando en grupo, deben contestar a las mismas actividades de la fase anterior, aunque deben razonar la respuesta en alguna de ellas. El profesor tampoco interviene para darles una explicación al respecto, sólo gestiona los tiempos o las dudas respecto al desarrollo de la fase.

Sin embargo el **medio adidáctico** sufre un cambio, ya que en esta fase incluye las preguntas de grupo y las respuestas individuales que ha dado cada alumno del mismo. A partir de ellas deben formular o acordar las respuestas de grupo, de modo que pierde peso el carácter subjetivo que, en un principio, tienen las respuestas individuales. Ahora deben despersonalizarse las respuestas, puesto que pasan a ser respuestas de grupo, bien por coincidencia en las respuestas de los alumnos que lo forman, bien por acuerdo consensuado tras la correspondiente discusión.

De ahí que la estructuración del medio nos permite considerar como una **situación de aprendizaje**. El alumno (sujeto S3 según el esquema de la figura 1-5) que interviene en esta fase puede cuestionarse las decisiones que ha tomado en la anterior fase, se encuentra en una situación más reflexiva, y actúa sobre el medio creado en la fase anterior. La situación de referencia pasa a convertirse en un nuevo medio, el medio de referencia $M3 = S4 - M4$, sobre el que actúa el sujeto S3. Por tanto las interacciones del binomio S3-M3 constituyen la **situación de aprendizaje**.

FASE III: Comparación entre grupos

El momento en que los grupos homólogos realizan la comparación mutua de sus actividades también tiene **carácter adidáctico**. De nuevo es una **situación de acción, formulación y validación**, sólo entre el alumnado de los grupos, con ausencia del profesor.

En esta fase deben comparar sus respuestas de grupo con las del grupo homólogo, así pues el **medio adidáctico** en esta tercera fase, añade las respuestas del grupo homólogo a las ya elaboradas por el grupo en la fase II. Se puede deducir que el proceso avanza

en la despersonalización del trabajo del alumnado. Continúa siendo una situación de aprendizaje adidáctica, puesto que el medio de referencia, M3, sobre el que actúa el alumno o sujeto S3 está formado por las respuestas de los alumnos de los dos grupos homólogos, con ausencia de la intervención del profesor.

FASE IV: Corrección de los cuestionarios con la clase.

En esta última fase aparece la intervención del profesor, por lo tanto es un momento de **carácter didáctico**. Aunque dada la naturaleza inclusiva de los niveles de estructuración del medio, también incluyen los diferentes niveles adidácticos y el alumno puede ocupar diferentes posiciones según el desarrollo de la situación.

En cuanto al tipo de situación, se trata de una situación de **validación** y a la vez de **formulación/comunicación**, ya que entre todos los alumnos y con intervención del profesor, deben llegar a la corrección o revisión de todas las actividades de las tres modalidades. En este proceso deberán formular afirmaciones al respecto, aceptadas como válidas por parte del grupo-clase.

El **medio didáctico** en esta fase está determinado por la presencia del propio profesor y la gestión que conlleva el debate en el grupo-clase, con las respuestas definitivas de cada grupo que exponen en la corrección y la tabla de datos T, común para todo el grupo proyectada de forma permanente en toda la fase. Ésta sirve de soporte de sus razonamientos a la hora de corregir cada una de las preguntas de las tres modalidades del juego. Es decir, la tabla T aporta diferentes ostensivos de los razonamientos lógicos en juego: líneas y columnas de la tabla, gestos de alumnos y profesor sobre ellas; que materializan los predicados y operaciones lógicas (Bosch, 1994 y Bosch et Chevallard, 1999).

Según la estructuración del medio, en este caso ya estamos en el nivel que corresponde a la **situación didáctica**, en la que interviene el alumno y también el profesor. Éstos actúan sobre el medio de aprendizaje, M2, descrito en la fase anterior. Las interacciones de S2-P2 con M2 forman la situación didáctica. En esta situación el sujeto S2 es el alumno que debe confrontar el saber elaborado con el saber oficial que presentará el profesor P2, quien tiene la responsabilidad de enseñarlo en la situación presentada. El contrato didáctico es el que regula las obligaciones establecidas o asumidas entre el profesor y el alumno, en torno al saber oficial, al saber ensañado y el saber aprendido.

La situación didáctica constituye el medio didáctico M1. Si alumno y profesor, o ambos, reflexionan sobre este nivel didáctico, se convierte entonces en una **situación metadidáctica**. Podría darse en la situación de aprendizaje “Corrección colectiva del cuestionario Q”, que proponemos en esta ingeniería didáctica. El hecho de que en dicha corrección se reflexione sobre las actividades realizadas permite que se trabaje a nivel metadidáctico, pero en esta lección, “Juego de la agencia de viajes”, no existe esta situación a nivel de clase, pero sí a nivel de investigación tras la experimentación y observación (tal y como se detalla en el capítulo 5).

A nivel metodológico, la lección propuesta tiene **carácter fenomenotécnico** por diversas razones:

- su aplicación permite explicitar diversos funcionamientos del razonamiento mediante la utilización de la tabla para responder a las cuestiones,
- permite modelizar y materializar el trabajo lógico a través del análisis a priori y de las propias cuestiones realizadas a los alumnos (es el "medio adidáctico" al que el alumno es confrontado),
- la corrección colectiva en la última fase de la lección, facilita al profesor la observación de la utilización didáctica de la tabla. Ésta permite materializar la corrección objetiva, en cambio cuando sólo se dispone de la comunicación verbal no se pueden confirmar ciertos razonamientos (la tabla es un medio material y objetivo que invalida la componente subjetiva en la corrección de las preguntas),
- el cuestionario proporciona un medio de comunicación entre el alumnado y el enseñante que permite recoger información sobre las respuestas de los alumnos.

En resumen podemos decir que se ha retomado la propiedad del carácter fenomenotécnico ya utilizado por Orús (1992), quien mostró que la utilización de este tipo de actividades (elaboración de lecciones que conforman la *ingeniería didáctica*) facilita la comunicación objetiva entre el alumno y el enseñante para resolver un problema de contrato didáctico planteado por la autora como una situación paradójica. En nuestro caso, esta lección se constituye como un instrumento didáctico que permitirá que emerja el razonamiento lógico de los alumnos sin que el pensamiento natural sea un obstáculo para ello.

4.1.3. Matriz a priori MAP(J) y comparación del trabajo lógico-matemático según las tres modalidades del juego

De forma homóloga al estudio a priori del cuestionario que constituyó la pre-experimentación del trabajo de investigación de tercer ciclo de Pitarch (2002) y del “Cuestionario Q” de nuestra investigación (en el capítulo 3), realizaremos el análisis a priori de esta lección. En este caso usaremos los criterios de caracterización de las preguntas de dicho cuestionario y ampliaremos otros que en esta ocasión consideramos necesarios, para distinguir la variabilidad en alguna de las cuestiones planteadas en esta lección.

El análisis a priori de las operaciones matemáticas que suponen las actividades de las cuestiones, se obtienen de nuevo teniendo en cuenta distintos tipos de operaciones que deben realizar los alumnos al responder a las mismas: la manipulación de la tabla (sobre elementos constitutivos de la propia tabla y también mediante la comparación entre sus filas y columnas), las operaciones lógico-matemáticas y, por último, los razonamientos que se exigen a los alumnos para que justifiquen sus respuestas.

Siguiendo con la notación introducida en el capítulo 3 (sección 3.2.1.), las operaciones que se identifican en las preguntas del cuestionario, se distribuyen en los siguientes bloques:

- trabajo sobre la tabla (TABL, TFIL, TCOL),
- recuentos obligatorios o alternativos (ROBL, RALT),
- comparación entre filas y/o columnas y en relación semántica (CFIL, CSEM),
- diferencias y coincidencias positivas y/o negativas (copresencias, coausencias...) (FDIF, FCOI, FPRE, FAUS),
- operaciones lógicas (implicación, conectores lógicos, cuantificadores, atribución de verdad ...) (LUNI, LIMP, LCON, LNEG, LRSN, LRSI, LAVV, LRVE),
- razonamiento explícito sobre las respuestas de las cuestiones (ARGU).
- utilización de teoría de conjuntos (enumeración de los elementos de un conjunto, cálculo del cardinal de un conjunto de elementos...) (JENU, JCAR)

En esta lección se ha introducido este nuevo criterio para distinguir las actividades que exigen un cardinal de un conjunto, de las que piden identificar los elementos del conjunto, es decir:

- **JENU**: cuando se exige la enumeración de los elementos de un conjunto, es decir, dar por extensión el conjunto de sujetos (jóvenes) que cumplen una condición concreta.
- **JCAR**: significa que se exige el cardinal del conjunto de sujetos que cumple cierta condición.

La caracterización de dichas cuestiones se plasma en una matriz booleana que identificamos como la matriz a priori de las actividades del juego -según cada modalidad de viaje (cultural, deportivo o de ocio)- : **MAP(J)**, presentada en la figura 4-3.

	CQ1	CQ2	CQ3	CQ4	CQ5	CQ6	DQ1	DQ2	DQ3	DQ4	DQ5	DQ6	OQ1	OQ2	OQ3	OQ4	OQ5	OQ6
TABL	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
TFIL	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
TCOL	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
ROBL	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
RALT	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0
JCAR	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
JENU	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0
CFIL	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
CSEM	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
FDIF	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
FCOI	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
FPRE	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
FAUS	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
LUNI	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
LIMP	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
LCON	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0
LNEG	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1
LRSN	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0
LRSI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
LAVV	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
LRVE	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
ARGU	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 4-3: Matriz a priori, MAP (J), del “Juego de la agencia de viajes”

Podemos explicar la caracterización, según estos criterios, de alguna de las preguntas de una modalidad. Por ejemplo, la pregunta o cuestión 5 de la modalidad del viaje deportivo, es decir, DQ5. Esta cuestión exige trabajar sobre filas, concretamente realizando una comparación entre ellas. Además existe una relación semántica entre los criterios de las filas. Para dar la respuesta, se puede realizar un recuento de forma alternativa (no obligatoriamente) y se pueden utilizar las diferencias entre los valores binarios de las filas que se comparan. En esta cuestión aparece el cuantificador universal y la actividad versa sobre una implicación. La respuesta exige una respuesta afirmativa o negativa, siendo la respuesta correcta “SI”.

4.1.4. Aplicación de CHIC a la matriz MAP(J)

Realizamos un nuevo análisis estadístico implicativo a estas variables (las cuestiones), aplicando el programa CHIC sobre la matriz a priori de esta lección. Buscamos obtener más información a priori sobre la relación que existe entre las seis cuestiones que forman cada una de las modalidades del juego. De esta manera podremos confirmar la proximidad estadística que establecen las técnicas multivariantes aplicadas con respecto a estas cuestiones y su clasificación según los bloques de operaciones que las definen.

Al igual que en el análisis de la matriz a priori del “Cuestionario Q” (sección 3.2.2) vamos a analizar los grafos obtenidos tras el análisis implicativo.

En primer lugar mostramos el árbol de similaridad obtenido con el análisis cluster (figura 4-4) y el árbol jerárquico de cohesión implicativa (figuras 4-5). A continuación, para completar la comparación, mostraremos el grafo implicativo (figura 4-6).

El árbol de similaridad (figura 4-4) relaciona directamente las preguntas homólogas de cada una de las modalidades y establece las siguientes clases de cuasi-equivalencia:

$$[C_1] = \{CQ1, DQ1, OQ1, CQ3, DQ3, OQ3, CQ2, DQ2, OQ2\}$$

$$[C_2] = \{CQ4, CQ5, DQ4, OQ5, DQ5, OQ4\}$$

$$[C_3] = \{CQ6, DQ6, OQ6\}$$

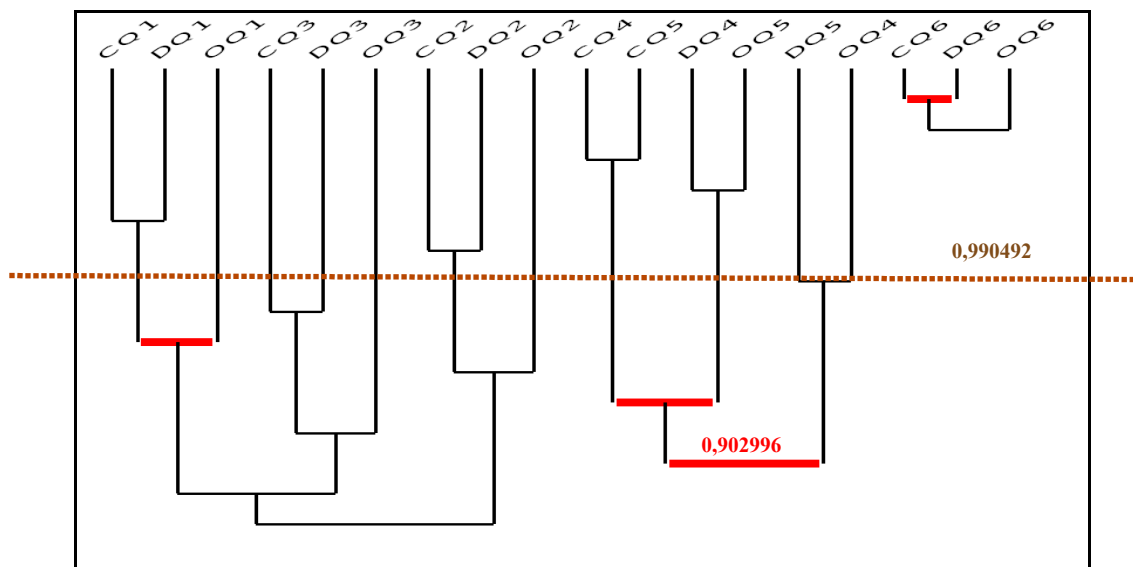


Figura 4-4: Árbol de similaridad entre las actividades del juego, aplicando CHIC sobre MAP (J)

Aplicando de nuevo CHIC a esta misma matriz y realizando un análisis de cohesión implicativa, obtenemos el árbol jerárquico de cohesión implicativa (figura 4-5) y el grafo implicativo (figura 4-6).

En el árbol jerárquico podemos identificar de nuevo tres clases, cada una de ellas con las mismas cuestiones obtenidas en cada clase del árbol de similaridad, aunque en la primera cambia el orden entre las cuestiones según cómo ha intervenido la implicación entre ellas.

$$[C_1]^* = \{CQ2, DQ2, OQ2, OQ1, CQ1, DQ1, CQ3, DQ3, OQ3\}$$

$$[C_2] = \{CQ4, CQ5, DQ4, OQ5, DQ5, OQ4\}$$

$$[C_3] = \{CQ6, DQ6, OQ6\}$$

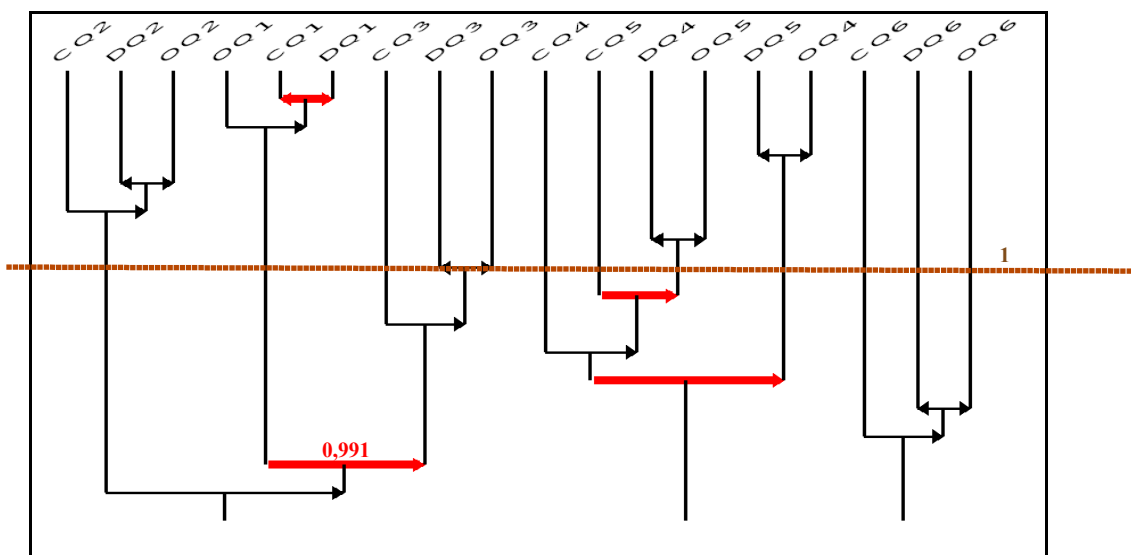


Figura 4-5: Árbol jerárquico de cohesión implicativa entre las actividades del juego, aplicando CHIC sobre MAP (J)

Los tres grupos de cuestiones que quedan relacionadas, tanto en el árbol de similaridad como en el jerárquico de cohesión implicativa, marcan claramente la naturaleza de las operaciones que conllevan dichas preguntas. La primera clase, $[C_1]$, está formada por las cuestiones con las operaciones lógicas de conjunción y la combinación de conjunción y negación. Así mismo dentro de esta primera clase quedan establecidas tres subclases que corresponden a las cuestiones Q2, Q1 y Q3 respectivamente, diferenciándose según la modalidad de viaje.

Tal y como hemos indicado previamente, la Q1 corresponde a una cuestión con conjunción y las Q2 y Q3 atañen a la combinación de conjunción y negación; con la diferencia que en Q2 se exige como respuesta la cantidad de sujetos de la tabla que cumplen dicha operación lógica y en la Q3 no se pide el cardinal, sino que se exige la enumeración por extensión del conjunto de sujetos de la tabla que cumplen la condición.

Independientemente de la modalidad del viaje, las cuestiones de esta primera clase son:

- _Q1: ¿A qué jóvenes les gusta C_i y C_j ?
- _Q2: ¿A cuántos jóvenes **no** les gusta C_i , **ni** C_j ?.....
- _Q3: ¿A qué jóvenes **no** les gusta C_i , **ni** C_j ?

La segunda clase viene determinada por las dos cuestiones que tratan la condicional. La Q4 pregunta sobre una condicional directa y Q5 es la recíproca de Q4, puesto que usa los mismos criterios de forma inversa.

_Q4: ¿A todos los jóvenes que les gusta C_i , les gusta C_j ?
_Q5: ¿A todos los jóvenes que les gusta C_j , les gusta C_i ?.....

La relación que podemos observar entre ellas dos, en esta segunda clase, no viene determinada precisamente por la misma modalidad, sino se combinan entre ellas. Por ejemplo Q4 y Q5 del viaje cultural están relacionadas directamente tanto a nivel de similaridad como de implicación estadística; en cambio en las modalidades de ocio y deporte se combinan entre ellas variando la modalidad del viaje. Esto se debe a la caracterización a priori que hemos establecido en la matriz MAP(J) según la respuesta correcta de cada una de las cuestiones. En el viaje cultural ambas cuestiones -Q4 y Q5- tienen como respuesta correcta NO; en cambio en el viaje deportivo Q4 se responde con un NO y Q5 afirmativamente. En la modalidad de ocio Q4 es afirmativa y Q5 negativa, justo lo inverso a la variante anterior (ver tabla 4-1).

La última clase corresponde a la cuestión en la que se debe realizar una atribución de verdad, sobre una proposición formulada en términos de negación y cuya respuesta correcta es afirmativa. La clase está formada claramente por las tres cuestiones Q6 según cada modalidad de viaje.

_Q6: “No es cierto que al joven W_k le guste C_i ”. ¿Verdadero o falso?.....

Y por último en el grafo implicativo (figura 4-6), con los distintos niveles de implicación, podemos observar que las cuestiones que forman cadenas implicativas con mayor significación (0,99) son las que corresponden a las dos preguntas con condicional directa y recíproca. Y en segundo lugar la implicación con grado de significación equivalente al 0,95 son Q1 y Q3 según cada modalidad, debido a que ambas exigen la enumeración del conjunto de elementos (sujetos) que cumplen la condición exigida según cada pregunta. Estas dos cuestiones también aparecen con implicación estadística en el nudo significativo nº14 en el árbol jerárquico de la figura 4-5.

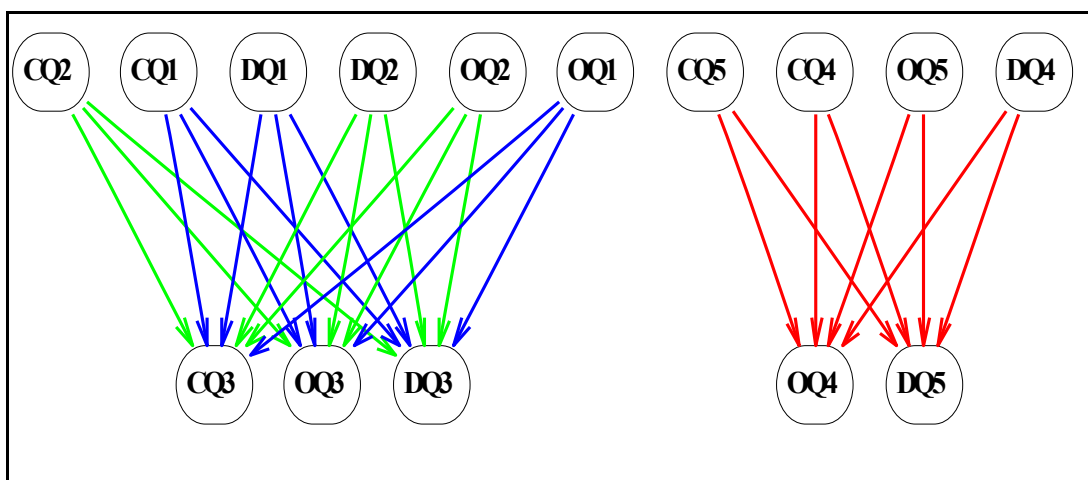


Figura 4-6: Grafo implicativo entre las actividades del juego, aplicando CHIC sobre MAP (J) ; 0.99, 0.95, 0.90, 0.85

De forma reiterada, la aplicación del software CHIC sobre la matriz en la que se plasma la caracterización de las operaciones lógico-matemáticas que conllevan las preguntas del cuestionario de la lección, MAP (J), complementa el estudio a priori del mismo y garantiza la coherencia entre la elección de las variables didácticas y los conocimientos matemáticos que pretendemos que emerjan en la aplicación de las situaciones propuestas. Es decir, estas preguntas ilustran cómo los valores concretos que se les atribuye a las cuestiones, pueden cambiar el conocimiento lógico en juego: una misma operación lógica no es identificada por los alumnos de la misma forma, según su valor de verdad sea cierto o falso.

4.1.5. Análisis del trabajo lógico-matemático de las actividades

En esta sección analizaremos el trabajo lógico-matemático que conllevan cada una de las actividades que se proponen en esta lección. En la situación fundamental del “Cuestionario Q” también se presentó de forma exhaustiva la interpretación de las respuestas correctas de cada una de las cuestiones utilizando distintas interpretaciones matemáticas: la Lógica, Teoría de conjuntos y Estadística.

La importancia que posee esta interpretación a priori a nivel didáctico, tal y como se expone en el punto 4.1.1., es que de esta manera se establecen las **variables didácticas** que son controladas y controlables por el enseñante, de forma que cualquier cambio en la propuesta de la pregunta supone un cambio de la estrategia matemática que el

alumno debe aplicar para resolver la actividad. Por tanto, la actividad matemática que se propone no depende de la intervención del profesor, sino únicamente de la naturaleza de la variable didáctica -pregunta o cuestión- que se establece a priori.

Veamos las estrategias que pueden utilizar los alumnos y qué conocimientos matemáticos movilizan según el tipo de variable didáctica establecida a priori en forma de pregunta o cuestión²⁷ :

_Q1. ¿A qué jóvenes les gusta C_i y C_j ?, $i, j = 1, 2, \dots, 14$

Una **variable didáctica** de esta pregunta es plantear la cuestión en términos de “*A qué jóvenes*”, puesto que se fija a priori que los alumnos enumeren los jóvenes concretos que cumplen dicha condición.

La operación **conjunción es otra variable didáctica**, ya que es la que marca la pauta de las estrategias que pueden usar los alumnos:

- desde el punto de vista de la Lógica la estrategia que pueden usar los alumnos es buscar copresencias entre las filas de los criterios C_i y C_j , es decir, buscar en la tabla T los jóvenes que han respondido “sí” (1) a ambos criterios a la vez.
- desde el punto de vista conjuntista se puede interpretar que la estrategia matemática corresponde a la búsqueda del conjunto de los sujetos de la tabla que cumplan la intersección de dos criterios, es decir, en nomenclatura establecida en el capítulo 3, se resume de la siguiente forma:

$$\{ W_k \in \mathbf{W} / W_k \in W_{C_i} \cap W_{C_j}, k=1,2,3,\dots,23 \}.$$

_Q2. ¿A cuántos jóvenes no les gusta C_i ni C_j ?, $i, j = 1, 2, \dots, 14$

En esta actividad una **variable didáctica** es el planteamiento de la pregunta como “*¿A cuántos jóvenes ...?*” ya que se les exige el cardinal de los jóvenes que cumplen una condición, y no qué jóvenes lo cumplen.

27. La nomenclatura utilizada a continuación es la presentada en el capítulo 3 (sección 3.2.3.).

Otra variable establecida a priori es la operación **combinación de la negación con la conjunción**, por tanto:

- desde el punto de vista de la Lógica la estrategia que deben usar los alumnos es buscar coausencias entre las filas de los criterios C_i y C_j , ya que por tratarse de la combinación de la negación con la conjunción, deben buscar en la tabla T los jóvenes que han respondido “no” (0) a ambos criterios a la vez.
- desde el punto de vista conjuntista se puede interpretar que la estrategia matemática corresponde a contabilizar el cardinal del conjunto de los sujetos de la tabla que cumplan la intersección de la negación de dos criterios, es decir:

$$\text{Card} \{ W_k \in \mathbf{W} / W_k \in {}^c W_{C_i} \cap {}^c W_{C_j}, k=1,2,3,\dots,23 \}$$

_Q3. ¿A qué jóvenes no les gusta C_i ni C_j ? $i, j= 1, 2, \dots, 14$

En esta actividad las **variables didácticas** que se fijan apriori son de nuevo la forma de formular la pregunta como “¿A qué jóvenes ...?” y la operación lógica que combina la negación con la conjunción. Precisamente se plantea esta actividad con la misma operación lógica que la anterior pero haciendo la variación en la variable didáctica de preguntarles el conjuntos de sujetos de la tabla que cumplen una condición y no el cardinal de dicho conjunto como en la pregunta anterior.

La actividad está formulada en los mismos términos que en la primera, pero con distinta operación lógica a realizar.

En resumen, la interpretación de la estrategia a nivel lógica y conjuntista es equivalente a la anterior actividad:

- como operación lógica se pide la búsqueda de los jóvenes que tienen coausencias en las filas de los criterios C_i y C_j .
- y como conjunto se pide buscar:

$$\{ W_k \in \mathbf{W} / W_k \in {}^c W_{C_i} \cap {}^c W_{C_j}, k=1,2,3,\dots,23 \}$$

_Q4. ¿A todos los jóvenes que les gusta C_i , les gusta C_j ? $i, j = 1, 2, \dots, 14$

La **variable didáctica** en esta cuestión es claramente el planteamiento de la actividad en términos de una condicional, estableciendo un criterio como su antecedente y otro como consecuente. Por tanto:

- desde el punto de vista de la lógica se trata de que los alumnos comprueben si $\forall W_k / W_k \in W_{C_i} \rightarrow W_k \in W_{C_j}, k=1,2,3,\dots, 23$.
- una posible estrategia a seguir es comprobar si los jóvenes que tienen un 1 en la fila del criterio C_i , también lo tienen en la fila del criterio C_j .

_Q5. ¿A todos los jóvenes que les gusta C_j , les gusta C_i ? $i, j = 1, 2, \dots, 14$

- la operación que se debe realizar en esta actividad también corresponde a una condicional, siendo la inversa de la pregunta anterior, puesto que el criterio que actúa como antecedente en la cuestión Q4 es el consecuente en la Q5 y viceversa.
- por tanto la interpretación desde la Lógica sugiere que la estrategia que deben seguir los alumnos es comprobar si $\forall W_k / W_k \in W_{C_j} \rightarrow W_k \in W_{C_i}, k=1,2,3,\dots,23$, es decir pueden comprobar si todos los jóvenes que tienen un 1 en la fila del criterio C_j , también lo tienen en la fila del criterio C_i .

El hecho de que las actividades Q4 y Q5 sean recíprocas implica que los alumnos deben resolver ambas actividades, puesto que la solución de la primera no tiene porqué ser la de la segunda. Esta **propiedad de “asimetría”** que posee la condicional es la **variable didáctica** que se fija a priori con la intención de saber si los alumnos entienden correctamente la operación “condicional”, puesto que la estrategia utilizada en la Q4 no les sirve para resolver Q5.

_Q6. “No es cierto que al joven W_j le guste C_i ”. ¿Verdadero o falso?

$i = 1, 2, \dots, 14; j = 1, 2, \dots, 23$

En esta última actividad las **variables didácticas** que se establecen a priori son la comprobación de si un sujeto cumple o no un criterio concreto y otra -menos utilizada en esta lección-, que la respuesta se debe concretar en términos de atribución de verdad.

Por tanto en cuanto a las estrategias que pueden utilizar los alumnos para contestar correctamente a esta cuestión son:

- Comprobar si $C_i \cap R \cap W_j$ o bien $C_i \cap \bar{R} \cap W_j$
- Comprobar si $W_j \in W_{C_i}$ o si $W_j \in {}^c W_{C_i}$.

A continuación se presenta un resumen del trabajo lógico-matemático que conllevan las preguntas de cada una de las modalidades del viaje:

		Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Viaje CULTURAL	respuesta	14 jóvenes	Ninguno	4 Jóvenes	NO	NO	VERD.
	operación lógica	- enumeración - conjunción	- combinación conjunción y negación	- enumeración - comb. de la conjunción y negación	$C1 \rightarrow C13$ (1) (1) - implicación	$C13 \rightarrow C1$ (1) (1) - implicación inversa a Q4	Atribución de verdad Celda(6,M)
	filas	C6 y C13	C8 y C14	C1 y C8	C1 y C13	C1 y C13	C6
	dis./filas	6 FILAS	5 FILAS	6 FILAS	11 FILAS	11 FILAS	-
Viaje DEPORTIVO	respuesta	14 jóvenes	Ninguno	5 Jóvenes	NO	SI	VERD.
	operación lógica	- enumeración - conjunción	-combinación conjunción y negación	- enumeración - comb. de la conjunción y negación	$C11 \rightarrow C3$ (1) (1) - implicación	$C3 \rightarrow C11$ (1) (1) - implicación inversa a Q4	Atribución de verdad Celda(7,M)
	filas	C2 y C7	C2 y C11	C3 y C12	C11 y C3	C11 y C3	C7
	distancia-filas	4 FILAS	8 FILAS	8 FILAS	7 FILAS	7 FILAS	---
Viaje de OCIO	respuesta	14 jóvenes	Ninguno	5 Jóvenes	SI	NO	VERD.
	operación lógica	- enumeración - conjunción	-combinación conjunción y negación	- enumeración - comb. de la conjunción y negación	$C10 \rightarrow C14$ (1) (1) - implicación inversa a Q4	$C14 \rightarrow C10$ (1) (1) - implicación inversa a Q4	Atribución de verdad Celda(10,R)
	filas	C4 y C10	C4 y C5	C2 y C10	C10 y C14	C10 y C14	C10
	dist./filas	5 FILAS	0 FILAS	7 FILAS	3 FILAS	3 FILAS	---

Tabla 4-1: Comparación del trabajo lógico-matemático según cada modalidad del “Juego de la agencia de viajes”

En la tabla 4-1 se puede observar la comparación entre cada una de las cuestiones según la modalidad a la que pertenecen. Respecto a cada pregunta se ha indicado: su respuesta correcta, la operación lógica que exige, las filas de la tabla T que supone comparar y la distancia entre las mismas. De esta manera se puede hacer la comparativa entre las cuestiones homólogas con el objetivo de asegurar que se exige el mismo tipo de operación matemática y la misma dificultad en la respuesta.

4.1.6. Ficha didáctica de la lección “Juegos de la agencia de viajes”

La ficha didáctica de una lección es un instrumento que se crea para el profesor y se propone desde la TSD según Brousseau (1986a). En ésta se elabora el protocolo de la experimentación y observación de la situación que el profesor debe llevar a cabo.

Esta ficha se entrega al profesor para que pueda poner en práctica la situación de aprendizaje siguiendo las pautas que se le presentan detalladamente: objetivos, material necesario, temporalización y desarrollo didáctico de cada fase, incluyendo la sugerencia de cómo dirigirse al alumnado en cada momento (bajo el nombre de “consigna”). Estas consignas surgen del análisis a priori de la lección, “anticipando” de alguna manera qué tipo de situaciones pueden surgir en el desarrollo del juego. A partir de esta “previsión” se proponen “*las consignas*” con la intención de que si el profesor actúa aproximadamente de esta forma se puede garantizar la consecución de los objetivos establecidos en la situación de aprendizaje que está en práctica.

FICHA DIDÁCTICA “JUEGO DE LA AGENCIA DE VIAJES”

FECHA: martes 3-Marzo-2015

NIVEL: 1º ESO

OBJETIVOS GLOBALES:

- Relacionar este juego con el cuestionario que contestaron en una sesión de clase (devolución del juego) – de este mismo curso académico- ayudándose de la misma tabla y como tema común la Agencia de viajes.
- Utilizar una tabla de valores booleanos para trabajar las operaciones lógicas: conjunción, disyunción, negación y condicional, sin haber estudiado de forma específica estos contenidos lógico-matemáticos.

MATERIAL

Para el profesor/a:

- Plantilla individual de cada variante del viaje con sus respuestas (es la plantilla para el profesor)
- Plantilla de grupo de cada una de las variantes C1, C2, D1, D2, O1 y O2
- La tabla T
- Lista de los alumnos de la clase con el código de grupo al que está adjudicado cada uno de ellos
- Anexos 1 (distribución alumnos en los grupos), 2 (distribución espacial de los grupos), 3 (etiquetas de los grupos) y 4 (instrucciones de puntuación).

Para el alumnado:

- Plantilla del trabajo individual con el código de la variante correspondiente (una plantilla por alumno) y la tabla T (una por alumno)
- Plantilla del grupo (dos por cada grupo) y una tabla por grupo
- Anexo 4 (una para cada grupo)
- Bolígrafos (dos colores)

DURACIÓN: 1 hora

Preparación:

Aprovecharemos la relación semántica que existe entre las actividades propuestas en la tabla T, para poder elaborar tres cuestionarios distintos -según su temática: cultural, deportiva y de ocio- pero con cuestiones similares tanto por su contenido matemático, como por su grado de dificultad.

DESARROLLO DE LA LECCIÓN

FASE I: trabajo individual

Objetivo: trabajar a nivel de acción las operaciones lógicas de negación, disyunción, conjunción y condicional.

Preparación:

Los alumnos estarán distribuidos en grupos tal y como se indica en el anexo 1 y 2.

El profesor repartirá a cada uno de los alumnos la plantilla de trabajo individual y la tabla T.

Consigna 1

- *“Recordad que en el primer trimestre realizaste un cuestionario sobre una agencia de viajes que quería proponer un viaje a unos jóvenes a partir de sus preferencias presentadas en una tabla de valores (la tabla T)[los alumnos comentan]...*
- *Ahora no os vamos a dar los resultados todavía, sino que vamos a jugar con los datos de la tabla y ya os lo daremos.*
- *A continuación deberéis contestar otras seis preguntas, a partir de los datos de la tabla T. Debéis hacerlo de forma individual, contestando lo que sepáis. No os puedo resolver dudas sobre las cuestiones.*
- *En la parte inferior de la plantilla veréis que pone “rellenar al final de la corrección global”: no le hagáis caso ahora.*
- *Disponéis de **10 minutos** para contestar individualmente las cuestiones ”.*
..... Los alumnos trabajan individualmente(10 minutos).....

Desarrollo

El alumno contestará individualmente su plantilla y esperará que terminen sus compañeros (10 min max)

[Observación: Si los alumnos tienen dudas sobre las cuestiones, o hacen la observación de que las preguntas 4 y 5 son la misma, no se les debe dar información adicional, sólo que respondan lo que ellos crean]

FASE II: Trabajo en grupo

Objetivo: *Iniciación a la validación, mediante la formulación, la comunicación y la confrontación de las respuestas individuales; búsqueda de consenso en las respuestas y en las justificaciones de las acciones (estrategias utilizadas ...)*

Material:

- Fotocopias de la plantilla de grupo (dos para cada grupo) y de la tabla (una para cada grupo)

- Etiquetas de cada tipo de variante de viaje (una por grupo)
- bolígrafo rojo para cada representante de grupo (6)

Temporalización: 10 minutos

Preparación:

El profesor entregará al alumno indicado en el anexo 1, una etiqueta que identificará a su grupo (anexo 3). Dicho alumno será su representante.

El profesor repartirá a cada representante de grupo dos copias (una será un duplicado) de la plantilla de trabajo en grupo (según la variante correspondiente). Esta plantilla tiene el mismo cuestionario que han contestado individualmente y será la misma para cada pareja de grupos homólogos.

El profesor entrega un bolígrafo rojo al representante del grupo.

Consigna 2

- *“Os voy a repartir unas etiquetas que identifican a vuestro grupo [el profesor reparte y explica que cada grupo tiene adjudicado un código (igual como en sus plantillas)]. Se la doy a un alumno/a de cada grupo, éste/a será vuestro/a representante.*
- *Ahora debéis contestar a la plantilla de grupo. Como podéis ver son las mismas preguntas que habéis respondido individualmente. El representante rellenará dicha plantilla.*
- *Debéis comparar vuestras respuestas individuales de cada cuestión y si coincidís todos, esa será la respuesta de grupo a dicha cuestión.*
- *En el caso de que no haya unanimidad, deberéis llegar a un consenso como la respuesta de grupo. Si no lo conseguís por diversidad de opiniones, deberéis dejarla en blanco.*
- *Fijaros que ahora se os pide también que argumentéis o razonéis la respuesta en algunas de las cuestiones.*
- *El representante debe copiar también las respuestas en el duplicado de la plantilla, en este caso SIN las justificaciones.*

- *Disponéis de 10 minutos”.*

.....Los alumnos trabajan en grupo (10 min).....

Desarrollo:

El profesor puede ir pasando por los distintos grupos por si alguno de ellos plantea alguna duda. Si transcurrido el tiempo algún grupo no ha acabado, no pasa nada, igual continúa la actividad.

Transcurridos los 10 minutos, el profesor recoge de cada grupo, la plantilla que han copiado sin las justificaciones (el duplicado) y la pasa al grupo de la misma letra.

FASE III:trabajo en grupo

Objetivo: Continuación de la validación de las operaciones lógicas comparando las respuestas entre grupos homólogos (los grupos que comparten la misma letra)

Consigna 3

- *“Os acabo de entregar la plantilla de grupo de vuestros compañeros con sus respuestas, sin las justificaciones.*
- *Ahora vais a corregir dicha plantilla, comparando sus respuestas con las vuestras.*
- *El representante del grupo debe indicar con bolígrafo ROJO al lado derecho de cada pregunta SI, si coinciden con vuestras respuestas o NO, en caso de que no coincidan.*
- *Cuando terminéis la recogeré para devolverla corregida a cada grupo.*
- *Para la corrección disponéis de 5 minutos.”*

.....Cada grupo corrige al otro grupo.....(5 minutos).....

Desarrollo:

El profesor puede pasar por los grupos por si tienen alguna duda material sobre la actividad, pero no sobre cómo validar. Tal vez planteen que ellos no saben si está bien lo que han contestado en grupo, pero se les aclara que deben corregir según lo que ellos han contestado en su grupo, que supuestamente es lo que debe ser correcto, según su criterio.

Los alumnos irán comparando sus respuestas de grupo con las del grupo de sus compañeros e irán corrigiéndolas como coincidentes o no (indicándolo en rojo a la derecha de la cuestión).

Transcurrido el tiempo disponible (5 minutos), el profesor recoge las plantillas corregidas de cada grupo.

Fase IV: corrección en grupo-clase

Objetivo: Devolución de la validación de la actividad lógica de los cuestionarios al grupo-clase en situación didáctica.

Material:

- las variantes de los cuestionarios, según el tipo de viaje (para el profesor)
- la tabla T proyectada sobre la pizarra, para todo el grupo-clase
- las instrucciones de puntuación (una para cada grupo -anexo 4-)
- pizarra adicional para que el alumnado pueda copiar sus respuestas

Temporalización: 35 minutos

Preparación:

El observador técnico proyectará en parte de la pizarra la tabla T.

El profesor entregará a cada grupo una tarjeta con las instrucciones de puntuación (anexo 4) y devuelve a cada grupo su plantilla corregida por sus compañeros.

Consigna 4.1.

- *“Os acabo de entregar vuestra plantilla de grupo corregida por vuestros compañeros.*
- *A continuación pasaremos a la corrección entre toda la clase.*
- *Como el cuestionario tiene seis preguntas, cada grupo corregiréis una, aunque podéis participar todos en general para exponer vuestros argumentos.*
[Nota: el profesor puede aclarar a los alumnos que hay tres cuestionarios distintos y cada dos grupos tienen el mismo cuestionario]
- *Los representantes de los grupos C1, O1 y D1 debéis salir a la pizarra (con la*

plantilla de grupo y su duplicado) y anotar la respuesta de grupo de la primera pregunta de vuestro cuestionario. Indicar también si vuestros compañeros han coincidido con vosotros según el duplicado que os han corregido. [los alumnos anotan en la pizarra y se quedan para dar explicación de lo contestado].

[Nota: El profesor iniciará el proceso de validación preguntándoles la estrategia que han utilizado en sus respuestas. Deberán justificar las respuestas]

- *El grupo C1, ¿por qué habéis contestado ésto a la primera pregunta?...¿qué estrategia habéis utilizado para llegar a esta respuesta?. [el representante del grupo C1 argumenta la respuesta de su grupo, pudiendo ser ayudado por sus compañeros de grupo...]*
- *Los miembros del grupo C2, ¿estáis de acuerdo con lo que han explicado vuestros compañeros? [los alumnos contestan]. Y los demás, ¿estáis de acuerdo con esta estrategia para llegar a la respuesta?...[Si la cuestión queda clara y además sirve para corregir la de los otros dos grupos se pasa a la siguiente. Si hay dudas, se aclaran de manera que el profesor va reconduciendo la duda con otras preguntas hasta que los alumnos obtengan la respuesta correcta].*

[Nota: continuar con la corrección siguiendo este “esquema” y el mismo procedimiento que en la primera cuestión:

- La 2ª cuestión la corrige el grupo **D2**, saliendo a la pizarra los representantes de C2, D2 y O2
- La 3ª cuestión la corrige el grupo **O1**, saliendo a la pizarra los representantes de C1, D1 y O1
- La 4ª cuestión la corrige el grupo **C2**, saliendo a la pizarra los representantes de C2, D2 y O2
- La 5ª cuestión la corrige el grupo **D1**, saliendo a la pizarra los representantes de C1, D1 y O1
- La 6ª cuestión la corrige el grupo **O2**, saliendo a la pizarra los representantes de C2, D2 y O2]

..... 25 minutos para el debate-corrección general.....

Desarrollo:

Los alumnos permanecerán situados en su grupo correspondiente.

Cuando se cree el debate entre los alumnos para corregir las cuestiones en las que han tenido discrepancias, el profesor sólo actuará -en un principio- como moderador y deberá intervenir cuando sea necesario reconducir la discusión.

En la corrección se puede utilizar la tabla proyectada en la pizarra para hacer cualquier tipo de aclaración o en el caso de que un alumno quiera hacer alguna explicación general apoyándose en la tabla.

Todos los cuestionarios deberán quedar corregidos tras el debate de grupo y cada alumno y grupo deberá tener la corrección completa de sus cuestiones.

Consigna 4.2.

- *Os he entregado una tarjeta con las instrucciones de puntuación. Como veis, las respuestas correctas puntuarán un punto y las incorrectas no puntuarán.*
- *Cada representante deberá puntuar las cuestiones de su grupo, indicándolo en el recuadro de puntuación situado en la parte inferior de la plantilla. A continuación debe informar a sus compañeros sobre la puntuación que ha obtenido el grupo (G).*
- *Y cada uno de vosotros también puntuará estas mismas cuestiones en su plantilla individual. En la parte inferior de la plantilla también tenéis un recuadro para hacerlo.*
- ***Ahora cada uno tendrá su puntuación final, sumando la puntuación individual (I) y la de su grupo (G)” (5 minutos).***

..... 5 minutos para la puntuación.....

Desarrollo:

El profesor da por terminada la corrección como debate general y da instrucciones para pasar a la puntuación individual y de grupo.

El profesor puede pasar por los grupos para asegurar que los representantes puntúan al grupo y después informan al resto de compañeros.

Cada alumno deberá obtener su puntuación final, sumando su puntuación individual y la de grupo.

Consigna 5:

- “Ahora podéis comentar entre vosotros la puntuación que habéis obtenido y con esto se termina el juego. Esperamos que haya sido de vuestro agrado”.
.....Recogemos la clase en posición habitual” (5 minutos).....

PLANTILLA PARA EL PROFESOR (con corrección)

Propuesta de preguntas del cuestionario, teniendo en cuenta bloques “temáticos”:

- viaje **deportivo (C1 y C2)**
- viaje **cultural (D1 y D2)**
- viaje **de ocio (O1 y O2)**

Operaciones matemáticas: conjunción, conjunción y negación, condicional. Además trabajo con la negación, atribución de verdad y argumentación.

VIAJE “C” CON ACTIVIDADES CULTURALES (C₁, C₆, C₈, C₉, C₁₃ y C₁₄)

CQ1: ¿A qué jóvenes les gusta ir a Francia a aprender francés y a Italia a visitar museos?

(D, H, I, K, L, N, O, P, Q, R, S, U, V, Z: 14 jóvenes, 1-1 de las filas C6 y C13)

CQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta pernoctar en un castillo, ni hacer visitas con guía?

(0 jóvenes, 0-0 de las filas C8 y C14)

CQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta ir a un museo, ni hacer visitas con guía?

(C, I, J, S: 4 jóvenes, 0-0 de las filas C1 y C8)

CQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a un museo, les gusta ir a Italia a visitar museos?

(NO, porque los jóvenes A y F tienen 1 en fila C1 y 0 en la fila C13)

CQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a Italia a visitar museos, les gusta ir a un museo?

(NO, porque los jóvenes C, I, P y S tienen un 1 en C13 y un 0 en C1)

CQ6: “No es cierto que al joven M le guste ir a Francia a aprender francés”. ¿Verdadero o falso?.

(Verdadero, porque al joven M no le gusta esta actividad. Tiene un 0 en la casilla)

VIAJE “D” CON ACTIVIDADES DEPORTIVAS (C₂, C₃, C₇, C₁₁ y C₁₂)

DQ1: ¿A qué jóvenes les gusta la montaña y las competiciones deportivas?

(A, C, D, E, F, G, K, N, P, S, T, U, V, Z: 14 jóvenes, 1-1 en las filas C7 y C2)

DQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta ir en bici, ni las competiciones deportivas?

(0 jóvenes, 0-0 de las filas C2 y C11)

DQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta jugar a tenis, ni las marchas por la montaña?

(D, J, K, L, V: 5 jóvenes, 0-0 de las filas C3 y C12)

DQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, les gusta jugar a tenis?

(NO, porque los jóvenes D, F, J, K, L, M, N y V tiene 1 en la C11 y 0 en C3)

DQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a tenis, les gusta ir en bici?

(SÍ, porque todos los jóvenes que tienen 1 en la fila C3, también lo tienen en C11)

DQ6: “No es cierto que al joven M le guste ir a la montaña”. ¿Verdadero o falso?

(Verdadero, porque al joven M no le gusta esta actividad. Tiene un 0 en la casilla)

VIAJE “O” CON ACTIVIDADES OCIO (C₂, C₄, C₅, C₁₀ y C₁₄)

OQ1: ¿A qué jóvenes les gusta jugar a cartas y bañarse?

(A, B, C, D, E, F, J, K, M, N, P, S, V, Z: 14 jóvenes, 1-1 en las filas C4 y C10)

OQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta bañarse, ni los cruceros por el Caribe?

(0 jóvenes, 0-0 en las filas C4 y C5)

OQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta jugar a cartas, ni las competiciones deportivas?
(H, L, O, Q, R: 5 jóvenes, 0-0 en las filas C2 y C10)

OQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a cartas, les gusta pernoctar en un castillo?(Sí, porque todos los jóvenes que tienen 1 en C10, lo tienen en C14)

OQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta pernoctar en un castillo, les gusta jugar a cartas? (NO, porque los jóvenes H, L, O, Q, R y U tienen un 1 en C14 y 0 en C10)

OQ6: “No es cierto que al joven R le guste jugar a cartas”. ¿Verdadero o falso?.
(Verdadero, porque al joven R no le gusta esta actividad. Tiene un 0 en la casilla)

* **El anexo 1 de la ficha didáctica** no se presenta porque corresponde a la lista de los nombres del alumnado de la clase tal y cómo se les distribuye en distintos grupos.

****El anexo 3 de la ficha didáctica** corresponde a las etiquetas con el nombre de cada grupo. No se presenta porque no aporta ninguna información al respecto.

Figura 4-7: Ficha didáctica del “Juego de la agencia de viajes”

ANEXO 4 : INSTRUCCIONES DE PUNTUACIÓN DEL JUEGO

1º Cada alumno puntúa sus respuestas en su plantilla individual **(de la fase I)**.

2º Cada representante de grupo va puntuando, a la vez, las preguntas de la plantilla de grupo **(de la fase II)**.

La puntuación será de la siguiente forma:

CUESTIONES INDIVIDUALES Y DE GRUPO			
• Respuesta correcta, incluyendo el argumento:	1 PUNTO.		
• Respuesta incorrecta:	0 PUNTOS.		
• Las preguntas que no tengan el razonamiento correcto: (aunque coincida la respuesta concreta)	0 PUNTOS		
PUNTUACIÓN TOTAL DE CADA ALUMNO (está indicado en la parte inferior de la plantilla individual)	+		
Puntos alumno = I + G	<table style="width: 100%; border: none;"> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">puntos individuales (I)</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center; padding: 5px;">(G) puntos de las respuestas de grupo</td> </tr> </table>	puntos individuales (I)	(G) puntos de las respuestas de grupo
puntos individuales (I)			
(G) puntos de las respuestas de grupo			

Figura 4-8: Anexo 4 de la ficha didáctica del “Juego de la agencia de viajes”

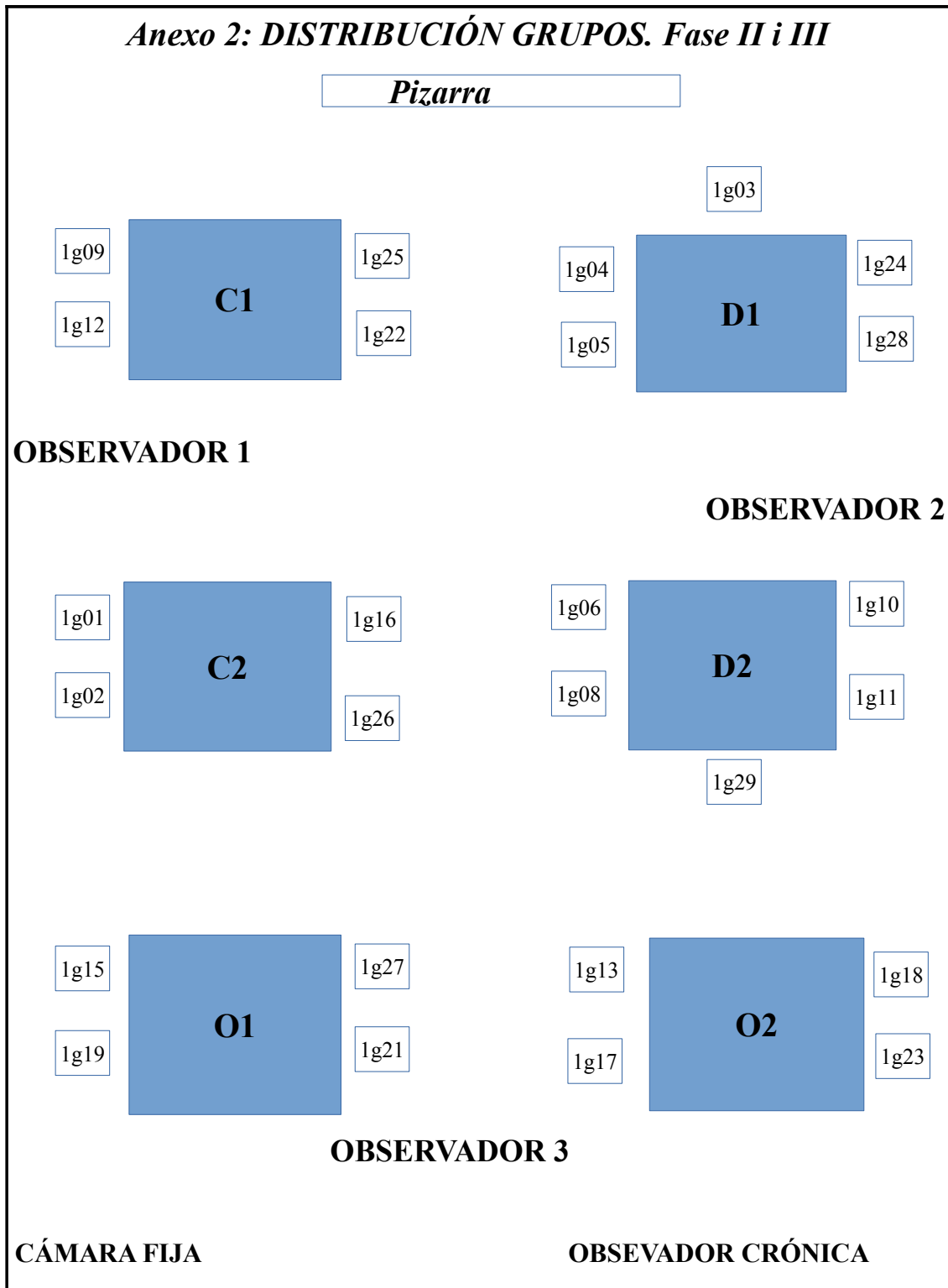


Figura 4-9: Anexo 2 de la ficha didáctica del “Juego de la agencia de viajes”

A continuación presentamos la plantilla individual y de grupo del “Juego de la agencia de viajes” con la que trabajan los alumnos. Presentamos como ejemplo la de la modalidad cultural. Las otras son homólogas y las actividades concretas se muestran en la ficha didáctica (figura 4-7).

PLANTILLA INDIVIDUAL

Nombre:..... **Código: C1**

Responde a las siguientes cuestiones ayudándote de la tabla T.

VIAJE “C” CON ACTIVIDADES CULTURALES

CQ1: ¿A qué jóvenes les gusta ir a Francia a aprender francés y a Italia a visitar museos?
.....

CQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta pernoctar en un castillo, ni hacer visitas con guía?
.....

CQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta ir a un museo, ni hacer visitas con guía?
.....

CQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a un museo, les gusta ir a Italia a visitar museos?
.....

CQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a Italia a visitar museos, les gusta ir a un museo?
.....

CQ6: No es cierto que al joven M le guste ir a Francia a aprender francés. ¿Verdadero o falso?.
.....

RELLENAR AL FINAL DE LA CORRECCIÓN GLOBAL

Puntuación individual (I):

Cuestión puntos	CQ1	CQ2	CQ3	CQ4	CQ5	CQ6	PUNTOS individual (I)

Puntuación final:

Puntuación individual (I)	Puntuación de grupo (G)	Puntuación final (I+G)

Figura 4-10: Plantilla de trabajo individual del “Juego de la agencia de viajes”

PLANTILLA DE GRUPO C1

Nombres:.....
Curso:

Consigna: Debéis rellenar esta plantilla (por duplicado) con las respuestas que creáis correctas. En las preguntas que no habéis coincidido por unanimidad según vuestras respuestas individuales, deberéis llegar a consenso, puesto que se consideran respuestas de grupo. Si no se llega a consenso la cuestión se dejará en blanco.

VIAJE “C” CON ACTIVIDADES CULTURALES

CQ1: ¿A qué jóvenes les gusta ir a Francia a aprender francés y a Italia a visitar museos?

CQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta pernoctar en un castillo, ni hacer visitas con guía?

CQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta ir a un museo, ni hacer visitas con guía?

CQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a un museo, les gusta ir a Italia a visitar museos? **Razona la respuesta**

CQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a Italia a visitar museos, les gusta ir a un museo? **Razona la respuesta..**

CQ6: No es cierto que al joven M le guste ir a Francia a aprender francés. ¿Verdadero o falso?. **Razona la respuesta**

RELLENAR AL FINAL DE LA CORRECCIÓN GLOBAL

Puntuación (G) del grupo C1 :

	CQ1	CQ2	CQ3	CQ4	CQ5	CQ6	<i>puntos GRUPO(G)</i>
<i>Puntuación de grupo por cuestión</i>							

Figura 4-11: Plantilla de trabajo en grupo del “Juego de la agencia de viajes”

4.2. “Juegos de clasificación”.

El objetivo de esta lección es la introducción a la clasificación; así como al concepto de partición de un conjunto mediante la utilización de un diagrama de árbol, donde las ramas del mismo representan las clases que se obtienen con la partición del conjunto inicial.

La clasificación se obtiene al considerar cuatro criterios simultáneamente, produciéndose una partición de dieciséis clases, resultado de las diferentes conjunciones de estos cuatro criterios o sus negaciones. También pueden considerarse desde el punto de vista conjuntista, las intersecciones de los conjuntos definidos por los sujetos que verifican o no dichos criterios.

La lección “Juegos de clasificación” está formada por tres actividades (se presentan como juegos) que tienen por objetivo global, trabajar la clasificación a partir de la misma tabla que se utiliza en el “Juego de la agencia de viajes”.

- En el primer juego se exige que el alumno calcule y/o enumere el conjunto de elementos (en este caso los jóvenes de la tabla) que cumpla ciertas condiciones.

“Juego 1: Si la agencia de viajes ofertara las actividades C_4 , C_4 , C_{10} y C_{14} y pusiera como condición haber dicho sí a todas ellas. ¿Qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían?”

- La segunda actividad es una variante de la anterior. La condición que se trabaja en este caso es menos exigente que en el primer juego.

“Juego 2: Si la agencia de viajes ofertara las actividades C_4 , C_4 , C_{10} y C_{14} y pusiera como condición haber dicho sí al menos a tres de estas actividades. ¿Qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían con esta nueva condición?”

La solución del primer juego es también solución del segundo, junto con otros jóvenes.

- El juego 3 supone trabajar con un diagrama de árbol que el alumnado debe completar según las condiciones que se le exigen (presentado en la figura 4-13).

La organización y desarrollo de “Juegos de clasificación” viene detallado en la ficha didáctica de esta lección que se presenta en la sección 4.2.3. (figura 4-19).

A continuación presentamos las actividades que componen esta situación (figura 4-12).

CONSIGNA
A partir de la **tabla T** resuelve cada uno de los juegos que se presentan a continuación, según la situación A y B.

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
C1. ir a un museo?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
C2. ir a competiciones deportivas?	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
C3. jugar a tenis?	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
C4. bañarte?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C5. los cruceros por el Caribe?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
C6. ir a Francia a aprender francés?	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C7. la montaña?	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C8. hacer visitas con guía?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
C9. probar especialidad del lugar?	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
C10. jugar a las cartas?	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
C11. ir en bici?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C12. las marchas por la montaña?	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
C13. ir a Italia a visitar museos?	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C14. pernoctar en un castillo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla T

A) La agencia de viajes quiere proponer un **viaje de ocio** teniendo en cuenta algunas de las actividades relacionadas con el ocio indicadas en la tabla (T): “**bañarse (C4)**”; “**cruceros por el Caribe (C5)**”; “**jugar a cartas (C10)**” y “**pernoctar en un castillo (C14)**” :

JUEGO 1:
Si la agencia de viajes ofertara las actividades C4 ,C5 , C10 y C14 y pusiera como condición haber dicho sí a todas ellas, ¿qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían?

JUEGO 2:
Si la agencia de viajes ofertara las actividades C4 ,C5 , C10 y C14 y pusiera como condición haber dicho sí al menos a tres de estas actividades, ¿qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían con esta nueva condición?

B) La agencia de viajes quiere proponer otros viajes con otro tipo de actividades. Veamos las distintas posibilidades que puede ofrecer con cuatro actividades.

JUEGO 3:
En el siguiente diagrama de árbol se plantean todas las combinaciones que se pueden hacer con cuatro de las actividades que ofrece la agencia de viajes (figura 4-13).
- Indica en el recuadro de cada combinación las actividades que podrían realizar y en la otra etiqueta los jóvenes que se podrían apuntar al viaje correspondiente.

Figura 4-12: Actividades de la lección “Juegos de clasificación”

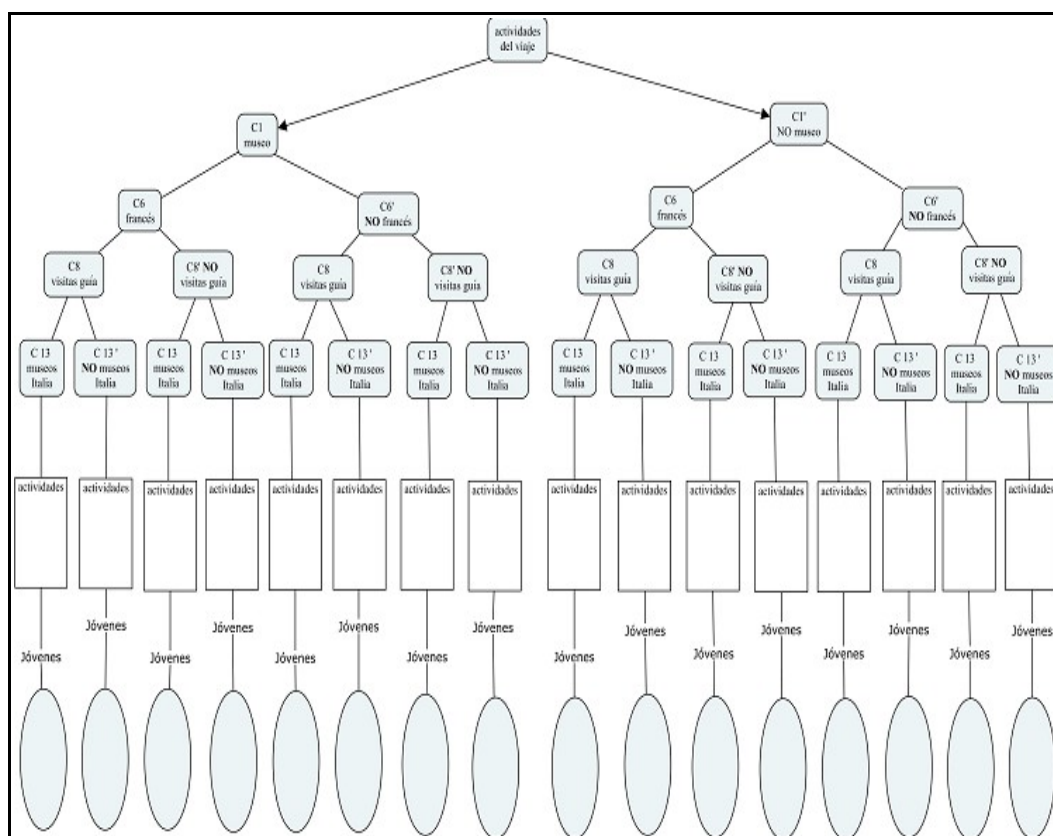


Figura 4-13: Diagrama de árbol del juego 3 de “Juegos de clasificación”

4.2.1. Análisis del trabajo lógico-matemático de los juegos de clasificación

Uno de los objetivos de esta lección es que los alumnos sigan profundizando en el tratamiento de datos a través de la clasificación y del aumento del número de predicados a conjuntar y combinar con sus negaciones. Es decir, seguir trabajando combinación de operaciones lógicas entre predicados (conjunción y negación); actividades en las que los alumnos han obtenido menor índice de éxito en la realización del “Cuestionario Q”.

La intención es que, a través de la tabla T (que han trabajado previamente con ella tanto en el cuestionario Q como en la lección del “Juego de la agencia de viajes”), se les plantean actividades en el juego, en las que deben hacer uso de conocimientos relacionados con la clasificación (partición, combinatoria, diagrama de árbol), operaciones lógicas (conjunción, disyunción y negación), Teoría de conjuntos

(elementos, pertenencia, conjunto, unión, intersección...) y Estadística básica (cálculo de cardinales, relacionado con el concepto de frecuencia).

Veamos el trabajo matemático que supone cada juego de la lección:

JUEGO 1: Si la agencia de viajes ofertara las actividades C_4, C_5, C_{10} y C_{14} y pusiera como condición haber dicho sí a todas ellas, ¿qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían?

La actividad requiere buscar en la tabla los jóvenes que han respondido “SÍ” a los criterios C_4, C_5, C_{10} y C_{14} ; es decir, que tienen un “1” en las intersecciones de sus columnas con esas cuatro filas (“bañarse”, “cruceros por el Caribe”, “jugar a cartas” y “pernoctar en un castillo”). En la figura 4-14 mostramos sobre la tabla T, los jóvenes que tienen este tipo de columnas mediante distintos colores que distinguen la condición exigida en el juego: contestar sí a las cuatro actividades a la vez, es decir:

{A, B, C, D, E, F, J, K, M, N, P, S, V y Z}

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
C1. ir a un museo?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
C2. ir a competiciones deportivas?	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
C3. jugar a tenis?	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
C4. bañarte?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C5. los cruceros por el Caribe?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
C6. ir a Francia a aprender francés?	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C7. la montaña?	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C8. hacer visitas con guía?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
C9. probar especialidad del lugar?	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
C10. jugar a las cartas?	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
C11. ir en bici?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C12. las marchas por la montaña?	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
C13. ir a Italia a visitar museos?	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C14. pernoctar en un castillo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 4-14: Tabla T con indicaciones para el juego 1 de “Juegos de clasificación”

A continuación mostramos las distintas modelizaciones del trabajo matemático del primer juego según la:

Teoría de conjuntos

Los conjuntos que se trabajan explícita o implícitamente en este juego:

- El objetivo del juego es determinar por extensión el conjunto de los elementos (sujetos de la tabla T) que cumplen la condición exigida en el juego (haber dicho sí a los cuatro criterios).

Según la nomenclatura matemática establecida en el capítulo 3, se trata del conjunto de los sujetos que pertenecen a la **intersección** de los conjuntos de los jóvenes que verifican los criterios indicados:

$$j=1,2,3,\dots,23; \{ W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C4} \cap W_{C5} \cap W_{C10} \cap W_{C14} \} = \\ = \{ W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_{10}, W_{11}, W_{13}, W_{14}, W_{16}, W_{19}, W_{22}, W_{23} \}$$

- Se trata de buscar los sujetos de la tabla, que corresponden a las columnas consideradas como conjuntos de 14 elementos binarios con el siguiente orden establecido. Es decir, si utilizamos la nomenclatura presentada en anteriores secciones, serían las 14-tuplas que corresponden a las columnas de la forma: $j=1,2,\dots,23; Y_j = (n, n, n, 1, 1, n, n, n, n, 1, n, n, n, 1)$; n puede tomar el valor 0 o 1.

Todos los sujetos de la tabla T que tengan columnas como el modelo establecido son los que forman el conjunto solución del primer juego.

Lógica:

- El operador lógico **“conjunción”** juega un papel fundamental en esta actividad, puesto que para responder correctamente al juego los alumnos deben aplicar la conjunción de las cuatro actividades a la vez. Sólo pueden elegir los sujetos de la tabla T, que han contestado **“SÍ”** (1 en la tabla), a las cuatro actividades que se proponen para este viaje.
- Según la nomenclatura mencionada, se trata del conjunto intersección de los conjuntos definidos por cada uno de los criterios, es decir, de los jóvenes que verifican simultáneamente los cuatro criterios (conjunción de los mismos):

$$j=1,2,3,\dots,23; \{ W_j \in \mathbf{W} / (C_4 \wedge C_5 \wedge C_{10} \wedge C_{14}) (W_j) = 1 \} = \\ = \{ W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_{10}, W_{11}, W_{13}, W_{14}, W_{16}, W_{19}, W_{22}, W_{23} \}$$

Estadística:

- Determinar el cardinal del conjunto enumerado anteriormente. De forma implícita equivale a pedir el cálculo de la **frecuencia absoluta** de los individuos de la población (formada por los sujetos de la tabla) que han elegido conjuntamente las cuatro actividades establecidas en el viaje de este juego.

$$\text{Card } \{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_{10}, W_{11}, W_{13}, W_{14}, W_{16}, W_{19}, W_{22}, W_{23}\} = \text{card } \{A, B, C, D, E, F, J, K, M, N, P, S, V \text{ y } Z\} = 14$$

JUEGO 2: Si la agencia de viajes ofertara las actividades C_4, C_5, C_{10} y C_{14} y pusiera como condición haber dicho sí al menos a tres de estas actividades, ¿qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían con esta nueva condición?

La actividad requiere buscar en la tabla los jóvenes que, bien han respondido “SÍ” a los criterios C_4, C_5, C_{10} y C_{14} simultáneamente, o bien han respondido “SÍ” a tres de estos criterios y “NO” a uno de ellos.

En la figura 4-15 mostramos sobre la tabla T, los jóvenes que tienen este tipo de columnas mediante distintos colores que distinguen la condición exigida en el juego: contestar “SÍ” a las cuatro actividades a la vez (en azul oscuro), o sólo “SÍ” a tres de las mismas y “NO” a la otra (en verde oscuro), es decir:

{A, B, C, D, E, F, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, V y Z}

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
C1. ir a un museo?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
C2. ir a competiciones deportivas?	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1
C3. jugar a tenis?	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
C4. bañarte?	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C5. los cruceros por el Caribe?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
C6. ir a Francia a aprender francés?	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
C7. la montaña?	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C8. hacer visitas con guía?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
C9. probar especialidad del lugar?	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0
C10. jugar a las cartas?	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
C11. ir en bici?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C12. las marchas por la montaña?	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1
C13. ir a Italia a visitar museos?	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C14. pernocar en un castillo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 4-15: Tabla T con indicaciones para el juego 2 de “Juegos de clasificación”

Veamos las distintas modelizaciones del trabajo matemático del primer juego según la:

Teoría de conjuntos:

- Determinar por extensión los elementos del conjunto (sujetos de la tabla T) que cumplen la condición exigida en el juego (haber dicho sí al menos a tres de los cuatro criterios).
- Según la interpretación conjuntista y la nomenclatura utilizada, la estrategia ganadora se traduce en la unión de los siguientes conjuntos:

- Siguiendo la solución del primer juego, los jóvenes que han dicho **sí a las cuatro actividades**, que suponía buscar los sujetos de la tabla T que tienen un “1” en los criterios C_4, C_5, C_{10} y C_{14} . Es decir:

$$\{ W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C_4} \cap W_{C_5} \cap W_{C_{10}} \cap W_{C_{14}} \} = S_1 = \{ W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_{10}, W_{11}, W_{13}, W_{14}, W_{16}, W_{19}, W_{22}, W_{23} \}; j=1,2,3,\dots,23$$

- Pero ahora, hay que añadir también, **los jóvenes que han contestado “NO” sólo a una de las cuatro actividades**. Esta posibilidad se traduce en otras cuatro: si $j=1,2,3,\dots,23$,

$$S_2 = \{ W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C_4} \cap W_{C_5} \cap W_{C_{10}} \cap W_{C_{14}} \} = \{ W_9, W_{20} \}$$

$$S_3 = \{ W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C_4} \cap {}^cW_{C_5} \cap W_{C_{10}} \cap W_{C_{14}} \} = \{ \emptyset \}$$

$$S_4 = \{ W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C_4} \cap W_{C_5} \cap {}^cW_{C_{10}} \cap W_{C_{14}} \} = \{ W_8, W_{12}, W_{15}, W_{17}, W_{18} \}$$

$$S_5 = \{ W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C_4} \cap W_{C_5} \cap W_{C_{10}} \cap {}^cW_{C_{14}} \} = \{ \emptyset \}$$

- Por tanto la solución del juego es la unión de los conjuntos determinados:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5$$

- La solución también se puede modelizar como la búsqueda del conjunto de los sujetos que tienen como columna uno de estos modelos de 14-tupla, siendo cada una de ellas un conjunto de 14 elementos binarios con un orden determinado:

$$(n, n, n, 1, 1, n, n, n, n, 1, n, n, n, 1) \cup (n, n, n, 0, 1, n, n, n, n, 1, n, n, n, 1) \cup$$

$$(n, n, n, 1, 0, n, n, n, n, 1, n, n, n, 1) \cup (n, n, n, 1, 1, n, n, n, n, 0, n, n, n, 1)$$

$$\cup (n, n, n, 1, 1, n, n, n, n, 1, n, n, n, 0); n \text{ puede tomar el valor } 0 \text{ o } 1.$$

Lógica:

- En este juego se trabajan los operadores lógicos “conjunción”, “disyunción” y “negación”.
- El conjunto solución está formado por los sujetos que cumplen al menos tres de los criterios, es decir, la conjunción (intersección) de tres predicados (el cuarto se puede cumplir o no). Por lo tanto la solución será la disyunción de las cuatro combinaciones que se pueden hacer eligiendo tres predicados de cuatro posibles: si $j=1,2,3,\dots,23$,

$$\begin{aligned} & \{ W_j \in \mathbf{W} / (C_4 \wedge C_5 \wedge C_{10}) (W_j) = 1 \} \vee \{ W_j \in \mathbf{W} / (C_5 \wedge C_{10} \wedge C_{14}) (W_j) = 1 \} \vee \\ & \{ W_j \in \mathbf{W} / (C_4 \wedge C_{10} \wedge C_{14}) (W_j) = 1 \} \vee \{ W_j \in \mathbf{W} / (C_4 \wedge C_5 \wedge C_{14}) (W_j) = 1 \} = \\ & \{ W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_{10}, W_{11}, W_{13}, W_{14}, W_{16}, W_{19}, W_{22}, W_{23} \} \cup \{ W_9, \\ & W_{20} \} \cup \{ \emptyset \} \cup \{ W_8, W_{12}, W_{15}, W_{17}, W_{18} \} \cup \{ \emptyset \} \end{aligned}$$

Estadística:

- En este segundo viaje pueden apuntarse 21 jóvenes, puesto que es el cardinal del conjunto S del paso anterior, así pues, se vuelve a pedir, de forma implícita, la frecuencia absoluta de los individuos de la población que cumplen todas las combinaciones posibles expuestas en la interpretación conjuntista.

$$\text{Card } S = \text{Card } (S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5) = \text{card } (S_1) + \text{card } (S_2) + \text{card } (S_3) + \text{card}(S_4) + \text{card } (S_5) = 14 + 2 + 0 + 5 + 0 = 21$$

JUEGO 3: En el siguiente diagrama de árbol se plantean todas las combinaciones que se pueden hacer con cuatro de las actividades que ofrece la agencia de viajes (C_1, C_6, C_8 y C_{13})

- Indica en el recuadro de cada combinación, las actividades que podrían realizar y en la otra etiqueta los jóvenes que se podrían apuntar al viaje correspondiente (figura 4-13).

La actividad requiere realizar la partición del conjunto de los sujetos de la tabla T (los jóvenes) según cumplan o no los criterios escogidos (actividades del viaje) para este juego (C_1, C_6, C_8 y C_{13}). Los alumnos deben completar el diagrama presentado en la figura 4-13 colocando los correspondientes jóvenes en las etiquetas según cumplan o no estos criterios. Y en los recuadros los criterios que han escogido y los que no.

Recordemos la figura 4-13, con la que deben trabajar los alumnos:

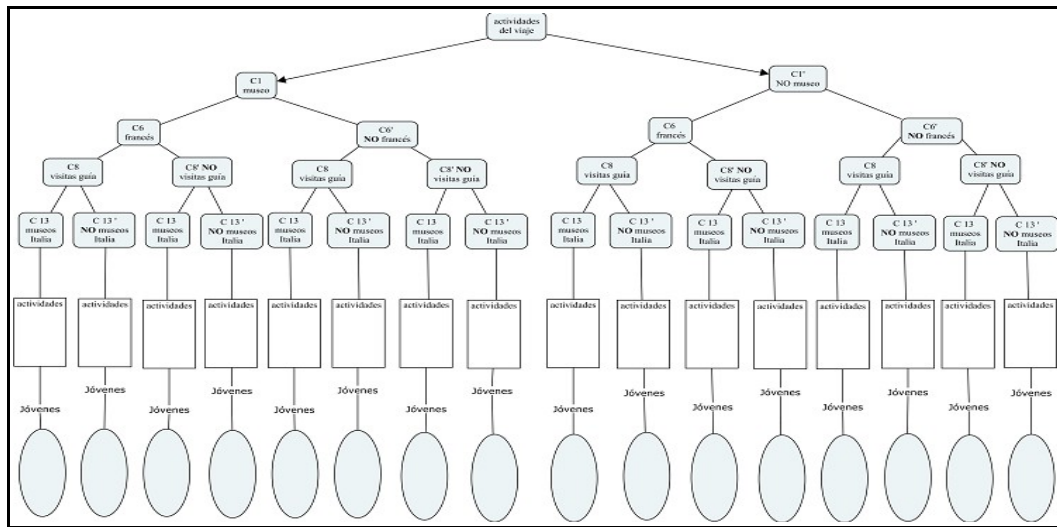


Figura 4-13: Diagrama de árbol del juego 3 de “Juegos de clasificación”

La primera partición se realiza según el criterio C_1 y su negación C'_1 (C'_i indica que el joven no ha elegido dicho criterio). Este primer paso nos subdivide el conjunto de los 23 sujetos en dos subclases: los sujetos que verifican C_1 y los que no lo verifican, es decir, W_{C_1} y ${}^cW_{C_1}$. A partir de esta primera partición se realiza una segunda, de cada uno de los conjuntos anteriores. Y la población de los sujetos de W_{C_1} y ${}^cW_{C_1}$ respectivamente, se subdivide con los que cumplen C_6 y los que no. Así sucesivamente con los otros dos criterios C_8 y C_{13} . Las particiones quedarían como se indica en la figura 4-16:

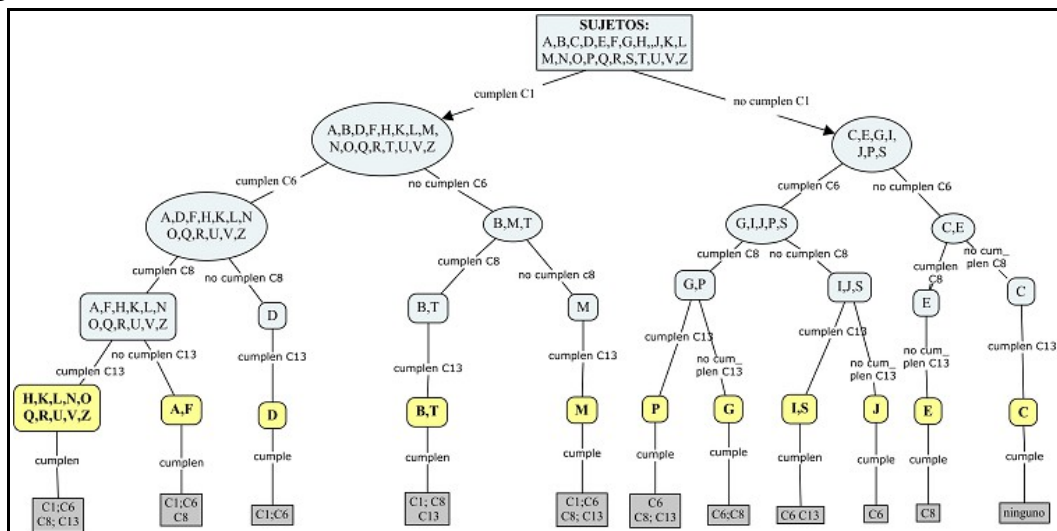


Figura 4-16: Partición de la población de los sujetos de T, según el juego 3 de “Juegos de clasificación”

Veamos las distintas modelizaciones del trabajo matemático según la:

Teoría de conjuntos

- En cada una de las etiquetas del diagrama de árbol, deben indicar el conjunto de sujetos de la tabla T que cumplan las condiciones que hayan escogido en el recuadro que señala dicho diagrama. Estas etiquetas corresponden a las dieciséis clases que se forman entre los sujetos (jóvenes) al establecer cuatro criterios. Es decir, es una generalización del juego 2 a todas las posibilidades de verificación o no, de los cuatro criterios. Si $j=1,2,3,\dots,23$,

$$\begin{aligned} & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C1} \cap W_{C6} \cap W_{C8} \cap W_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C1} \cap W_{C6} \cap W_{C8} \cap {}^cW_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C1} \cap W_{C6} \cap {}^cW_{C8} \cap W_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C1} \cap W_{C6} \cap {}^cW_{C8} \cap {}^cW_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C1} \cap {}^cW_{C6} \cap W_{C8} \cap W_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C1} \cap {}^cW_{C6} \cap W_{C8} \cap {}^cW_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C1} \cap {}^cW_{C6} \cap {}^cW_{C8} \cap W_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in W_{C1} \cap {}^cW_{C6} \cap {}^cW_{C8} \cap {}^cW_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C1} \cap W_{C6} \cap W_{C8} \cap W_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C1} \cap W_{C6} \cap W_{C8} \cap {}^cW_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C1} \cap W_{C6} \cap {}^cW_{C8} \cap W_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C1} \cap W_{C6} \cap {}^cW_{C8} \cap {}^cW_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C1} \cap {}^cW_{C6} \cap W_{C8} \cap W_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C1} \cap {}^cW_{C6} \cap W_{C8} \cap {}^cW_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C1} \cap {}^cW_{C6} \cap {}^cW_{C8} \cap W_{C13}\} \cup \\ & \{W_j \in \mathbf{W} / W_j \in {}^cW_{C1} \cap {}^cW_{C6} \cap {}^cW_{C8} \cap {}^cW_{C13}\} = \\ & \{W_8, W_{11}, W_{12}, W_{14}, W_{15}, W_{17}, W_{18}, W_{21}, W_{22}, W_{23}\} \cup \{W_1, W_6\} \cup \{W_4\} \cup \{\emptyset\} \\ & \cup \{W_2, W_{20}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{W_{13}\} \cup \{\emptyset\} \cup \{W_{16}\} \cup \{W_7\} \cup \{W_9, W_{19}\} \cup \{W_{10}\} \cup \\ & \{\emptyset\} \cup \{W_5\} \cup \{W_3\} \cup \{\emptyset\} \end{aligned}$$
- Deben establecer todas las combinaciones posibles con los cuatro criterios escogidos por la agencia de viajes y la negación de los mismos (se indica en el diagrama de árbol). Para llegar a todas ellas se pueden realizar las combinaciones de distintas formas:
 - **Mediante particiones del conjunto de sujetos** de la tabla, tal y como se ha señalado en el árbol de la figura 4-16, o bien

- **Mediante las posibilidades que marcan las “ramas” del árbol**, de la figura 4-13, siguiendo los criterios indicados y sus respectivas negaciones. De esta manera llegan a cada recuadro en el que indican los criterios que se cumplen o que no. A continuación realizan la búsqueda de los sujetos que cumplen dichas condiciones para cumplimentar las etiquetas.

Una forma de representar dichas posibilidades se plasma en el diagrama de árbol de la figura 4-17. Al final de cada rama se indica una 4-tupla formada por los cuatro criterios que intervienen en este juego: (C₁, C₆, C₈, C₁₃). Cada 4-tupla representa las respuestas de los jóvenes de la tabla T a estos cuatro criterios, siempre con este orden: C₁, C₆, C₈ y C₁₃. La posición en la que aparece el valor “1” o “0”, significa que el joven ha contestado “SÍ” o “NO” respectivamente, al criterio de dicha posición. Por tanto, una estrategia para resolver este juego es buscar en las filas de tabla T que corresponden a estos criterios, los sujetos que cumplen las 4-tuplas indicadas al final de cada rama del árbol de la figura 4-17.

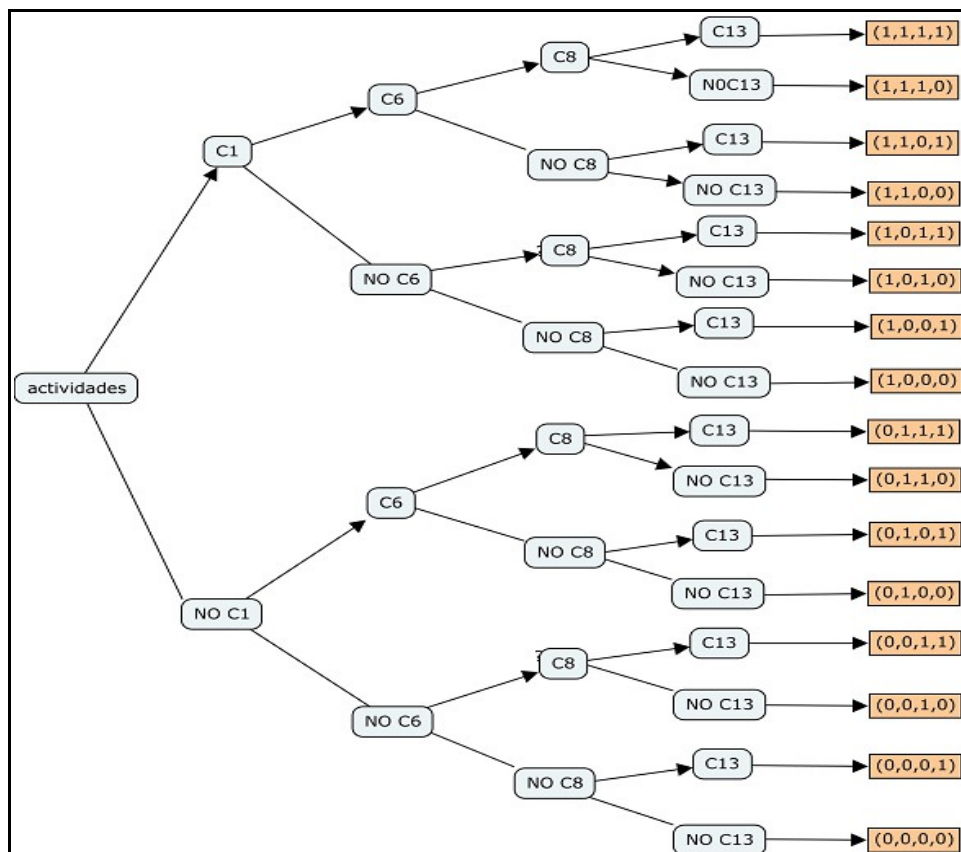


Figura 4-17. Selección de 4-tuplas según el juego 3 de “Juegos de clasificación”

En la figura 4-18 mostramos la tabla T sólo con las filas que corresponden a estos cuatro criterios. Se indican con distintos colores los jóvenes que tienen las columnas correspondientes a las 4-tuplas que se indican en la figura 4-17.

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
C1. ir a un museo?	1	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1
C6. ir a Francia a aprender francés?	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
C8. hacer vistas con guía?	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
C13. ir a Italia a visitar museos?	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 4-18: Tabla T con indicaciones para el juego 3 de “Juegos de clasificación”

Se puede comprobar que cada color forma una clase de la partición de la población de los sujetos de T, que aparecen en las distintas etiquetas del árbol de la figura 4-16.

Lógica

- En este juego también se trabajan los operadores lógicos “conjunción”, “disyunción” y “negación”.
- La partición de los sujetos es el resultado de la disyunción de todas las combinaciones que se van obteniendo mediante la conjunción de los cuatro predicados y de sus negaciones. Si $j=1,2,3,\dots,23$,

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_1 \wedge C_6 \wedge C_8 \wedge C_{13})(W_j) = 1\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_1 \wedge C_6 \wedge C_8)(W_j) = 1 \wedge C_{13}(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_1 \wedge C_6 \wedge C_{13})(W_j) = 1 \wedge C_8(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_1 \wedge C_6)(W_j) = 1 \wedge (C_8 \wedge C_{13})(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_1 \wedge C_8 \wedge C_{13})(W_j) = 1 \wedge C_6(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_1 \wedge C_8)(W_j) = 1 \wedge (C_6 \wedge C_{13})(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_1 \wedge C_{13})(W_j) = 1 \wedge (C_6 \wedge C_8)(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / C_1(W_j) = 1 \wedge (C_6 \wedge C_8 \wedge C_{13})(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_6 \wedge C_8 \wedge C_{13})(W_j) = 1 \wedge C_1(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_6 \wedge C_8)(W_j) = 1 \wedge (C_1 \wedge C_{13})(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_6 \wedge C_{13})(W_j) = 1 \wedge (C_1 \wedge C_8)(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / C_6(W_j) = 1 \wedge (C_1 \wedge C_8 \wedge C_{13})(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / C_8 \wedge C_{13}(W_j) = 1 \wedge (C_1 \wedge C_6)(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / C_8(W_j) = 1 \wedge (C_1 \wedge C_6 \wedge C_{13})(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / C_{13}(W_j) = 1 \wedge (C_1 \wedge C_6 \wedge C_8)(W_j) = 0\} \mathbf{v}$$

$$\{W_j \in \mathbf{W} / (C_1 \wedge C_6 \wedge C_8 \wedge C_{13})(W_j) = 0\}$$

Estadística

- Establecer todas las combinaciones posibles con los cuatro criterios escogidos por la agencia de viajes y la negación de los mismos (se indica en el diagrama de árbol de la figura 4-13). Ésto supone un cálculo que amplía el concepto de frecuencia (contenido básico de Estadística). El cómputo final es de $2^4 = 16$ posibilidades.

4.2.2. Análisis didáctico de la lección: el medio y tipo de situación de aprendizaje

La lección “*Juegos de clasificación*” se diseña de esta forma porque para su desarrollo sólo disponemos de una sesión de las que el centro, en el que se realiza la experimentación, nos ha facilitado. A partir de las actividades que los alumnos han realizado en la situación “Juego de la agencia de viajes”, se pretende encontrar indicios sobre la viabilidad de trabajar conceptos relacionados con la clasificación con los alumnos de 1º de ESO. Es decir, esta situación de aprendizaje tiene carácter fenomenotécnico porque en primer lugar podremos ver cómo trabajan ellos solos este tipo de actividades.

Por tanto el planteamiento de este juego es distinto, puesto que la primera situación en la que se encuentran los alumnos es totalmente adidáctica y no sólo porque el profesor no interviene en ella, sino porque el alumnado debe realizar los tres juegos propuestos como una tarea para casa, sin ningún tipo de orientación didáctica; en este sentido tiene funcionamiento adidáctico, pero no en situación escolar. En cambio la segunda parte de la misma tendrá carácter didáctico porque se realiza la corrección de los juegos en clase con intervención directa del profesor.

En esta lección también aparecerán momentos de acción, validación, debate y formulación/comunicación, pero siempre gestionados por el profesor.

Vamos a analizar el medio didáctico, el tipo de situación y el carácter a-didáctico/didáctico de la misma según cada parte de la propuesta.

1ª PARTE: Trabajo individual en casa

Como hemos avanzado, esta parte se caracteriza por ser **adidáctica**, puesto que el alumnado deberá resolver los tres juegos sin tener orientaciones didácticas por parte del profesor. Tan sólo se les presenta la propuesta de la lección para que lo resuelvan en casa. Se les entrega la tabla con la consigna, la plantilla con los tres juegos de clasificación y el diagrama de árbol que deben completar con ayuda de la tabla T (figuras 4-12 y 14-13).

Esta primera parte es una **situación de acción**, ya que el alumnado debe resolver de forma autónoma los tres juegos planteados, sin que se exija formulación o validación de sus respuestas. Éstos son presentados de forma distinta a las preguntas que han resuelto en el “Cuestionario Q” y en la lección “Juego de la agencia de viajes”, no obstante les resulta familiar porque utilizan la misma tabla y además la temática del juego sigue siendo la de la agencia de viajes.

En este caso, el **medio material** para el primer juego con el que trabajan los alumnos está formado por la tabla T, los tres juegos propuestos y el diagrama de árbol.

No hay enriquecimiento del medio, ya que esta tarea se realiza individualmente en casa. No obstante, el juego 2 reenvía de alguna manera al juego 1 y la solución hallada por los alumnos en este juego, pasa a formar parte del medio del segundo juego. Para el tercer juego, el medio es la tabla T y el árbol de la figura 4-13. Las respuestas a los juegos 1 y 2 también pasan a formar parte del medio de este juego.

2ª PARTE: Corrección en clase de los tres juegos.

Esta parte está diseñada para ser gestionada por el profesor desde su inicio, por lo tanto es claramente una situación con **carácter didáctico**.

Esta segunda parte, por tratarse fundamentalmente de la corrección de los juegos, se caracteriza como situación de **debate (comunicación) y validación** de sus respuestas. Es una **situación de formulación y validación**, puesto que el alumnado debe informar

al profesor y a sus compañeros sobre sus respuestas a los diversos juegos, argumentando dichas respuestas como solución a los juegos planteados.

En cierto modo, también se puede considerar de **acción**, ya que en la propia corrección el alumnado debe ir respondiendo a otros interrogantes formulados por el profesor. De esta manera el profesor provoca, intencionadamente, la movilización de los conocimientos y argumentos que ha tenido que aplicar el alumno a la hora de la resolución de los juegos en situación adidáctica, reenviando al alumno a otros niveles adidácticos del medio, como puede ser el del sujeto objetivo, el sujeto que actúa o el que aprende (ver figura 1-5 de la estructuración del medio según Brousseau (1986b)).

El **medio** inicial descrito en cada juego de la 1ª parte, se va enriqueciendo progresivamente. Está formado por la consigna del juego, los medios materiales, las respuestas de cada uno de los alumnos y la del alumno concreto que lo corrige. El medio tiene todas las respuestas posibles, puesto que se recogen todas. Los alumnos vuelven a estar en posición de sujetos que actúan o que aprenden, con interrelación con las otras respuestas. A partir de ellas se van verificando mediante el debate y puesta en común por los alumnos que han resuelto el juego en cuestión. Dichas respuestas individuales van perdiendo carácter subjetivo, ya que se van comprobando sobre el **medio**: la tabla, las consignas de los juegos y la validación que va confirmando el profesor a medida que se avanza en la corrección. La objetividad de las respuestas se van materializando de forma pública sobre la tabla T, produciéndose la institucionalización de las respuestas correctas.

La intención de la lección, al acabar la corrección, puede ser la **institucionalización** de los conocimientos matemáticos que han emergido en esta lección, aunque en este nivel educativo no están familiarizados con conceptos específicos como: partición de conjuntos, unión, intersección, combinatoria, 4-tuplas,... Pese a que dicha institucionalización no se ha realizado de forma explícita, se introducen dichos conceptos de forma implícita durante el desarrollo de la lección. Las palabras que el profesor considera que los alumnos puedan entender sin necesidad de que aprendan su concepto (elementos, pertenecer, clasificar, conjunto, árbol de clasificación, negación, conjunción...).

4.2.3. Ficha didáctica de la lección “Juegos de clasificación”

Como ya hemos explicado en la anterior situación, la ficha didáctica de una lección es un instrumento que se elabora para el profesor según la TSD (Brousseau, 1986a), especificando el protocolo de la experimentación y observación de la situación en cuestión.

Recordemos que en la ficha didáctica se presentan detalladamente: objetivos, material necesario, temporalización y desarrollo didáctico de cada fase, incluyendo la sugerencia de cómo dirigirse al alumnado en cada momento (bajo el nombre de “consigna”).

En la ficha didáctica de “Juegos de clasificación”, se explican las dos partes que componen esta situación de aprendizaje. La primera, que es en la que se plantea a los alumnos los tres juegos que deben resolver en casa como “deberes”. Y la segunda parte, que es la corrección de dichos juegos en clase a partir de las soluciones que los alumnos han dado de forma individual.

<p style="text-align: center;">FICHA DIDÁCTICA “JUEGOS DE CLASIFICACIÓN”</p> <p>FECHA: 27-3-15 (1ª parte) y 31-3-15 (2ª parte)</p> <p>NIVEL: 1º ESO</p> <p>OBJETIVOS GLOBALES:</p> <ul style="list-style-type: none">– Utilizar, implícitamente, los conceptos de intersección y unión de conjuntos de elementos a través de la conjunción, negación o disyunción de criterios.– Introducir el concepto de partición de un conjunto mediante la manipulación -muy dirigida- de clases de elementos que cumplen unas condiciones concretas. <p>MATERIAL:</p> <p>Para el profesor/a:</p> <ul style="list-style-type: none">– Plantilla individual del juego con sus respuestas (es la plantilla para el profesor)– Plantilla de la ficha de los alumnos con los juegos– La tabla T

Para el alumnado:

- Plantilla individual de los juegos de clasificación (una por alumno)
- La tabla T (una por alumno)
- Bolígrafo

DESARROLLO:

Este juego se desarrollará en dos partes:

- Una para explicar a los alumnos la actividad que deben realizar en casa (10 minutos).
- La segunda parte se realizará en clase: una sesión de 50 minutos. Se realizará la corrección de los tres juegos que los alumnos han pensado en casa.

Primera parte: indicaciones para trabajar en casa

Preparación:

El profesor repartirá a cada alumno la plantilla de trabajo individual con los tres juegos y la tabla T.

Consigna 1:

- *“Os he repartido de nuevo la tabla T, que usamos en el “juego de la agencia de viajes” y una plantilla de trabajo individual con tres juegos.*
- *Debéis buscar los jóvenes de la tabla que podrían apuntarse a cada uno de los viajes ofrecidos por la agencia de viajes, pero fijaros que las condiciones para apuntarse son distintas en cada juego.*
- *En el último juego, ya veréis que se pide rellenar **un diagrama de árbol**, siguiendo las indicaciones correspondientes.*
- *Lo resolvéis en casa y el próximo día haremos la corrección de lo que habéis propuesto”*

Segunda parte: trabajo en grupo clase.

Objetivos:

- validar sus respuestas individuales, trabajando en situación de debate con el grupo clase.
- aplicar criterios de clasificación, afirmativos o negativos, para hacer la partición del conjunto de jóvenes en distintas clases (los jóvenes que cumplen

una o varias condiciones).

- utilizar diagramas de árbol para trabajar la clasificación.

Material:

- plantilla de trabajo individual con los juegos de clasificación resueltos en casa.
- tabla T (entregada ya en la primera parte)
- la tabla y el diagrama de árbol proyectados en la pizarra

Temporalización: 50 minutos

Preparación:

El profesor indica al alumnado que recupere la plantilla de los juegos que han realizado en casa y también la tabla T [puede tener preparadas copias de la tabla T, por si algún alumno no la ha traído para la corrección].

Se prepara la proyección sobre la pizarra del documento: la tabla T y el diagrama de árbol.

Consigna 2:

- *“Preparad los juegos que habéis intentado resolver en casa.*
- *En primer lugar, vamos a resolver el juego 1.*
- *¿Cuántos jóvenes habéis calculado que pueden apuntarse al primer viaje?.
Vamos a anotar en la pizarra todas vuestras respuestas.*

[Nota: el profesor hace un ronda general y va tomando nota de lo que van diciendo los alumnos. Pueden pasar los distintos casos:

- Si hay una única respuesta y coinciden todos en ella: *“Como habéis coincidido todos en la cantidad de jóvenes que se pueden apuntar a este viaje, ahora vamos a anotar los jóvenes concretos que irían al mismo”.*

[Nota: el profesor anota los jóvenes que van diciendo los alumnos de forma aleatoria. Si la respuesta no es correcta pese haber coincidido todos en la misma, el profesor va preguntando a distintos alumnos hasta llegar a la solución. Si la respuesta que han dado todos es

correcta, se valida y se queda anotada en la pizarra para pasar al otro juego]. *Así pues ya tenemos el primer juego resuelto. Vamos a dejar anotada la respuesta correcta del juego 1.*”

- Si hay distintas respuestas, anotarlas en la pizarra: *“Voy a anotar en la pizarra las distintas respuestas que habéis calculado. En cada caso vamos a apuntar los jóvenes que habéis encontrado según cada respuesta.”*

[Nota:el profesor anota las distintas respuestas que dan los alumnos. A partir de éstas va preguntando los jóvenes que se apuntarían en cada caso. Irán contestando los alumnos según la respuesta que habían calculado. Una vez estén expuestas todas las posibilidades que dan los alumnos, el profesor va preguntando al alumno/a que crea conveniente para ir dirigiendo la discusión con la intención de que ellos mismos lleguen a la solución del juego]

[Por ejemplo, aunque entre las posibilidades esté la respuesta correcta, elegir intencionadamente otra errónea y preguntar a los alumnos...] *“A ver, por ejemplo, los que habéis contestado este valor (K)..., ¿por qué decís que se apuntarían K jóvenes a este viaje? ¿Qué jóvenes serían los que se apuntarían según vosotros? [los alumnos de esa opción explicarán sus razonamientos ...] “El resto de compañeros, ¿estáis de acuerdo con lo que han explicado? ¿por qué?...[Siguiendo en esta dinámica, saldrá la solución correcta que ha/n contestado alguno/s de ellos o -si no estaba- deberán llegar a ella a partir de la preguntas que va lanzando el profesor... Cuando lo resuelven el profesor pasa al juego 2]. “Vamos a dejar anotada la respuesta correcta del juego 1 y pasamos al juego 2”.*

..... **Corrección del juego 1 (15 minutos)**.....

Desarrollo:

Se creará una situación de debate entre el alumnado, en la que el profesor tan sólo debe gestionar el desarrollo de la misma a partir de las respuestas que van dando el alumnado.

En el caso de que el profesor detecte que la discusión no es válida o que con el debate no se llega a ninguna conclusión porque los alumnos no entienden lo que se está trabajando, el profesor intervendrá para corregir de forma más dirigida.

Por el contrario si observa que el alumnado discute de forma ordenada, sabiendo que llegan a una solución entre todos, debe dejar que lo resuelvan sin su intervención directa.

Consigna 3:

- *“Ahora vamos a resolver el juego 2. En este caso debemos buscar los jóvenes que se apuntarían al viaje habiendo contestado sí al menos tres de estas actividades, ¿qué habéis contestado en esta ocasión? ¿cuántos jóvenes se apuntarían al juego 2?”*

[Nota: el profesor sigue la misma dinámica de corrección que en el 1r juego. Si hay aciertos entre el alumnado y no hay confusión general en la nueva condición, se deja que los alumnos lleguen hasta la respuesta correcta. En caso contrario, recoge las respuestas de los alumnos y tiene en cuenta si han contestado lo mismo que en el juego 1, la diversidad de respuestas y los aciertos. Si hay pocos aciertos y mucha diversidad de respuestas ... relanza la actividad, replanteando la condición del juego]. *“¿Qué habéis entendido por la condición: decir sí al menos a tres de estas actividades?. ¿Qué significa esta condición a la hora de buscar los jóvenes en la tabla T?...”*

[Nota: el profesor intentará buscar que los alumnos lleguen a una reformulación aproximada a la siguiente expresión: *“buscar todos los jóvenes*

que han dicho sí a las cuatro actividades (1r juego) y además todos los casos de los jóvenes que han contestado NO sólo a una de las cuatro”. El profesor hace esta reformulación en caso de que no haya ninguna respuesta acertada o como un refuerzo si ve que no se comprenden las explicaciones dadas por los alumnos. Una vez se ha entendido la condición, sigue con el proceso].

- *Vamos a ver todos los casos posibles que engloban esta condición. Lo dejaremos por escrito en la pizarra [los alumnos irán planteando todos los casos posibles].*
- *Ahora vamos a anotar todos los jóvenes que responden a cada uno de los casos indicados en la pizarra.*
- *¿Cuántos jóvenes hemos concluido que se pueden apuntar en este nuevo viaje?*
- *Con esta nueva condición ¿hemos mejorado el viaje? ¿por qué?*
- *Podemos decir que la solución del segundo juego es la unión del conjunto de jóvenes del primer juego y del conjunto de todos los jóvenes de los casos indicados anteriormente (en los que los jóvenes han dicho NO sólo a una de las cuatro actividades)*
- *Ya hemos visto que la condición del juego 2 es diferente a la del juego 1”*

..... **Corrección del juego 2 ... (15 minutos)**

Desarrollo:

El profesor sigue la misma dinámica que en el juego 1 para recoger las respuestas del segundo juego. Pero en este caso refuerza la idea que de este juego mejora el primero, puesto que aumenta el número de jóvenes que se puede apuntar al viaje con esta nueva condición (“al menos tres es menos exigente que a las cuatro...”)

Por último el profesor añade que la respuesta final es la unión de los distintos conjuntos de jóvenes que responde a cada uno de los casos de esta condición.

Consigna 4:

- “Por último vamos a resolver el tercer juego. [Nota: el profesor proyecta el árbol sobre la pizarra].
- Como veis tenemos una figura, que parece un árbol que se llama **diagrama de árbol**. En él se plantean las distintas posibilidades que se pueden obtener combinando cuatro de las actividades ofrecidas por la Agencia de viajes.
[Nota: el profesor va señalando las ramas del árbol mostrando algunas de las distintas posibilidades]
- Al final del árbol tenemos un recuadro en el que tenemos que anotar las actividades que se pueden realizar o no en cada uno de los viajes. Y en las etiquetas indicaremos los jóvenes que cumplen las condiciones indicadas en cada uno de esos recuadros.
- Vamos a completar los recuadros y cada una de las etiquetas.
[Nota: el profesor pregunta a los alumnos lo que han contestado y va anotando hasta tener el árbol completo. Aquí se puede tener proyectado el diagrama de árbol en la pizarra para ir completándolo. En el mismo documento (proyectado) se puede tener la tabla para recurrir a ella si se necesita].
- Como veis hemos “repartido-distribuido” el conjunto formado por todos los jóvenes en “pequeños conjuntos” (subconjuntos) según las condiciones exigidas. La unión de todos estos subconjuntos forman el conjunto de los 23 jóvenes.

..... **Corrección del juego 3(20 minutos).....**

Desarrollo:

Si algunos alumnos dicen que no han sabido hacerlo, se les anima a participar en clase para poder llegar a una solución conjunta con las aportaciones de los compañeros que sí han intentado resolverlo.

El profesor puede concluir el juego haciendo mención del concepto de partición de un conjunto, utilizando este ejemplo gráfico para que puedan ver cómo un conjunto se ha

subdividido mediante distintas clases formadas por subconjuntos de elementos del conjunto inicial (aunque no es necesario usar terminología específica. El objetivo sería sólo introducir el concepto de forma gráfica mediante este ejemplo).

PLANTILLA PARA EL PROFESOR (con corrección)

A) La agencia de viajes quiere proponer un **viaje de ocio** teniendo en cuenta algunas de las actividades relacionadas con el ocio indicadas en la tabla (T): “**bañarse (C₄)**”; “**cruceros por el Caribe (C₅)**”; “**jugar a cartas (C₁₀)**” y “**pernoctar en un castillo (C₁₄)**” :

JUEGO 1:

Si la agencia de viajes ofertara las actividades C₄, C₅, C₁₀ y C₁₄ y pusiera como condición haber dicho sí a todas ellas, ¿qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían?

- Buscar los jóvenes que **tengan a la vez un “1” en las filas C₄, C₅, C₁₀ y C₁₄**.
- Podrían apuntarse **14 jóvenes**: A, B, C, D, E, F, J, K, M, N, P, S, V y Z

JUEGO 2:

Si la agencia de viajes ofertara las actividades C₄, C₅, C₁₀ y C₁₄ y pusiera como condición haber dicho sí al menos a tres de estas actividades, ¿qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían con esta nueva condición?

- Buscar los jóvenes que han dicho **sí a las cuatro actividades (1^r viaje)** y **además** todos los casos de **los jóvenes que han contestado “no” sólo a una** de las cuatro.
- Simbolizando haber dicho “no” a la actividad “i” por C'_i, podemos tener los siguientes casos:

◦C ₄ , C ₅ , C ₁₀ y C ₁₄	A, B, C, D, E, F, J, K, M, N, P, S, V y Z
◦C' ₄ , C ₅ , C ₁₀ y C ₁₄	I y T
◦C ₄ , C' ₅ , C ₁₀ y C ₁₄	----
◦C ₄ , C ₅ , C' ₁₀ y C ₁₄	H, L, O, Q y R
◦C ₄ , C ₅ , C ₁₀ y C' ₁₄	----
- En este segundo viaje **podrían apuntarse 21 jóvenes, puesto que es el resultado de la unión de los casos indicados en el paso anterior**. Sólo dos han contestado “no” a dos o más de estas cuatro actividades (G y U).

B) La agencia de viajes quiere proponer **otros viajes** con otro tipo de actividades.

Veamos las distintas posibilidades que puede ofrecer con estas actividades.

JUEGO 3:

En el siguiente diagrama de árbol se plantean todas las combinaciones que se pueden hacer con cuatro de las actividades que ofrece la agencia de viajes.

- Indica en el recuadro de cada combinación, las actividades que podrían realizar y en la otra etiqueta los jóvenes que se podrían apuntar al viaje correspondiente

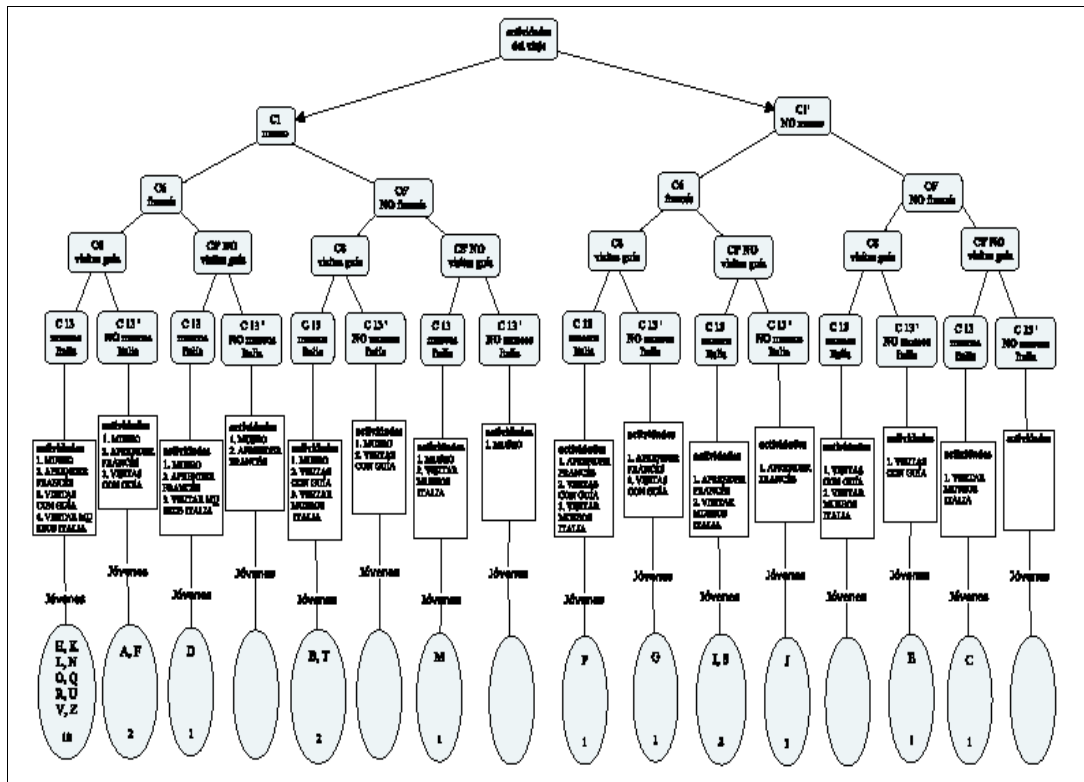


Figura 4-19: Ficha didáctica de “Juegos de clasificación”

4.3. “Corrección colectiva del Cuestionario Q”

La tercera situación de aprendizaje que proponemos es la “*Corrección colectiva del cuestionario Q*”. Los alumnos han trabajado las cuestiones que conforman dicho cuestionario como situación fundamental y a partir de sus resultados hemos podido plantear la segunda y tercera situación como variantes de la misma, para seguir profundizando en conocimientos de Lógica y clasificación. Tras experimentar las dos últimas situaciones el alumnado está más familiarizado con el tipo de trabajo lógico-matemático que se les ha planteado tanto a nivel a-didáctico como a nivel didáctico. A partir de ahí se les puede proponer la corrección del cuestionario Q que realizaron todos los alumnos de la etapa (de 1º a 4º de la ESO) en el primer trimestre del curso 14-15.

En el desarrollo de esta situación el profesor puede realizar la devolución de dicha corrección al alumnado. Es decir, se pretende que los alumnos asuman la validación de las respuestas, complementando el trabajo lógico que se les planteó inicialmente sólo a nivel de acción. En esta nueva situación los alumnos deberán trabajar en términos de formulación y validación de su trabajo lógico-matemático realizado a través de sus respuestas.

La corrección del cuestionario Q, se puede realizar en todos los niveles de la etapa de la ESO que lo respondieron a principio de curso.

Esta situación se puede plantear desde dos enfoques distintos. Uno es realizar la corrección mediante una ingeniería más estructurada con situaciones de tipo adidáctico, con un desarrollo similar al del “Juego de la agencia de viajes”. Asimismo, en la tesis de Peydró (2015) se presenta una ingeniería detallada para realizar la corrección de un cuestionario (que también conlleva trabajo lógico-matemático), elaborado para alumnos de primer curso del Grado de Maestro de educación primaria e infantil. Esta misma estructura se podría utilizar para la corrección de nuestro cuestionario, adaptándola a nivel de la educación secundaria obligatoria. El otro enfoque es la corrección del cuestionario en situación didáctica como debate colectivo, gestionado por el profesor.

En nuestro caso, la situación que presentamos se ajusta a la segunda posibilidad, ya que consideramos que este enfoque no tiene tantas restricciones como estar sujeto al desarrollo que supone una ingeniería. No obstante, el objetivo en ambos casos es que

los alumnos corrijan todas las cuestiones de forma colectiva para que puedan argumentar sus razonamientos.

En el caso de la situación didáctica, tal y como la hemos planteamos, el profesor debe gestionar la situación global para que las intervenciones del alumnado sigan un orden establecido y además el profesor y los alumnos puedan recoger los argumentos utilizados por los mismos.

La estructura del desarrollo global de esta situación puede ser la siguiente:

- El profesor lee una a una las preguntas del cuestionario y recoge las diferentes respuestas de los alumnos de manera que si hay coincidencia en las respuestas pasan a la validación, pero si no hay coincidencia general pueden discutir la respuesta, utilizando la tabla visible para todos. Lo más probable es que haya más coincidencias en las respuestas de las ocho primeras cuestiones (de la Q1 hasta la Q8), que son las que, según el análisis realizado en el capítulo 3, han tenido un alto éxito de respuesta correcta.
- Puede suceder que algunos alumnos den una respuesta distinta a la mayoritaria, bien porque es su respuesta inicial, bien porque creen que no es la correcta; en ambos casos, deberán dar un razonamiento al respecto.
- En las cuestiones que haya diversidad en las respuestas y principalmente, en las que el alumnado ha manifestado mayor dificultad, el profesor plantea la cuestión y los alumnos dan las diferentes respuestas. A partir de ellas el profesor negocia con el alumnado la forma de llegar a la respuesta correcta mediante preguntas enfocadas a cada tipo de respuesta, o bien relanzando colectivamente de nuevo la cuestión. A su vez, pregunta a alumnos voluntarios para que razonen sus respuestas y siempre deben hacer referencia a la tabla T en sus justificaciones (alumnos y profesor). En general la tabla facilita que los alumnos sean más objetivos para argumentar, dejando inoperante su razonamiento natural u objetivo y permite dar todo el sentido a la pregunta y a la respuesta correcta.

4.3.1. Análisis didáctico de la lección: el medio y tipo de situación de aprendizaje

Esta situación se plantea principalmente para realizar la devolución a los alumnos de la corrección del “Cuestionario Q” y una cierta institucionalización de las respuestas correctas. De esta manera, al comparar sus respuestas con la de sus compañeros, todo el trabajo lógico-matemático que han realizado en la resolución del cuestionario Q cobra mayor sentido para ellos y el medio adidáctico inicial del cuestionario se enriquece. Asimismo, la corrección colectiva, igual que en la última fase del “Juego de la agencia de viajes”, permite descubrir implícitamente los ostensivos asociados a los gestos que conllevan las actividades de búsqueda de respuestas del cuestionario (Bosch et Chevallard, 1999).

Los conocimientos trabajados en las tres situaciones, la fundamental y sus dos variantes, el “Juego de la agencia de viajes” y “Juegos de clasificación”, pasarán a ser validados tras la corrección colectiva de Q y de esta forma los alumnos pueden lograr una mayor adquisición de los conocimientos matemáticos en juego.

En el caso de los niveles de 2º, 3º y 4º de la ESO, en los que no se plantean las dos variantes “Juego de la agencia de viajes” y “Juegos de clasificación”, sólo se pretende conseguir la devolución de la corrección del “Cuestionario Q”, contestado por los alumnos de estos niveles en el primer trimestre del curso 14-15.

La aplicación de la “Corrección colectiva del cuestionario Q” como situación didáctica, a través del debate gestionado por el profesor, también puede ser una opción válida para alumnos de la ESO en otros centros educativos o en momentos en que no se pueda realizar toda la secuencia didáctica que conlleva el desarrollo de una ingeniería didáctica detallada.

En la corrección de las preguntas de Q, el profesor interviene desde el principio, por lo tanto es claramente una situación de aprendizaje con **carácter didáctico**. En ella aparecerán momentos de formulación y validación sobre la acción que suponen las actividades del cuestionario Q.

El medio material con el que los alumnos trabajan en esta situación está formado por la tabla T -proyectada para toda la clase-, el propio cuestionario y las respuestas que tiene cada alumno en su cuestionario resuelto en la situación fundamental (medio adidáctico). Este medio se va enriqueciendo con las distintas respuestas de otros compañeros y con las nuevas preguntas del profesor

Por tanto, al inicio de la situación se parte de un medio es **adidáctico**, que lo forman las respuestas individuales que dispone cada alumno en su cuestionario resuelto. Éstas se van modificando mediante el debate y la validación entre los alumnos y el profesor. De esta forma las respuestas de los alumnos van perdiendo carácter subjetivo, puesto que se van comprobando sobre el **medio** adidáctico (la tabla T), junto a la validación que va confirmando el profesor y el grupo-clase a medida que se avanza en la corrección. La objetividad va tomando cada vez mayor peso puesto que las respuestas se van materializando, incluso modificando, de forma pública sobre la tabla T y el sentido de las cuestiones de Q.

4.3.2. Ficha didáctica de la lección “Corrección colectiva del Cuestionario Q”

En la siguiente ficha didáctica se dan las pautas para que cualquier profesor pueda poner en práctica la corrección colectiva del Cuestionario Q.

En nuestro caso concreto, el material para trabajar esta situación son los cuestionarios que los alumnos contestaron al principio del curso 14-15. El profesor entregará a cada alumno su cuestionario resuelto y a partir del mismo se iniciará la corrección con todo el grupo-clase.

FICHA DIDÁCTICA “CORRECCIÓN COLECTIVA DEL CUESTIONARIO Q”
NIVEL: de 1º a 4º de ESO
OBJETIVOS GLOBALES:

- Validar las respuestas de los alumnos que realizaron en el cuestionario Q durante el primer trimestre del curso 14-15, en situación de debate con el grupo-clase.

MATERIAL:

Para el profesor/a:

- Cuestionario Q con soluciones
- la tabla T, proyectada sobre la pizarra

Para el alumnado:

- el cuestionario Q resuelto por ellos a principio de curso y su tabla T
- bolígrafo

Preparación:

El profesor entrega a cada alumno su cuestionario resuelto en el primer trimestre del curso 14-15. Proyecta sobre la pizarra la tabla T, para que de forma colectiva se disponga del medio sobre el que deberán validar sus respuestas.

Consigna 1:

- *“Os he entregado vuestro cuestionario que trabajastéis a principio del curso durante una sesión de trabajo. Vamos a corregirlo entre todos y para ello os he proyectado sobre la pizarra la tabla T, a partir de la cual se os plantearon las cuestiones de Q.*
- *Para la corrección podéis bien responder lo que tenéis en vuestra encuesta o bien contestar otra solución si creéis conveniente cambiarla, aunque en ambos casos deberéis dar un razonamiento de la misma.*
- *Podéis participar abiertamente, siempre y cuando mantengamos un orden de participación. Por ello yo iré leyendo cada una de las cuestiones y a continuación recogeremos las diferentes respuestas que deís a las mismas.*
- *En el caso de que la respuesta a una cuestión sea coincidente para todos, la comprobemos sobre la tabla y sea correcta, entonces daré su validación y pasaremos a la siguiente.*
- *En cambio, en la cuestión que no coincidáis todos, recogeremos vuestras posibles soluciones, las iremos comprobando sobre la tabla y sobre dicha comprobación deberéis argumentar vuestra respuesta. De esta manera se establecerá un debate entre vosotros hasta que lleguemos al consenso en la respuesta. Si la respuesta consensuada es correcta será validada por mí, pero*

si no lo es, estableceremos un nuevo debate hasta llegar a la respuesta correcta y asumida por todos los alumnos de la clase”.

PLANTILLA PARA EL PROFESOR (con corrección)

- Q1. ¿Al joven H le gustan las actividades de competición deportiva? **NO**
- Q2. ¿A cuántos jóvenes les gusta hacer visitas con guía? **A 17 JÓVENES**
- Q3. ¿Cuántas actividades le gustan al joven Q? **12**
- Q4. ¿Existe algún tipo de actividad que les guste a todos los jóvenes? **SI, BICI**
¿Hay otras? Di cuáles
- Q5. ¿Existe algún joven a quien no le guste ningún tipo de actividad? **NO**
En caso afirmativo, indica su nombre
- Q6. Los jóvenes, ¿prefieren ir a competiciones deportivas o ir a Francia a aprender francés? **IR A FRANCIA A APRENDER FRANCÉS**
- Q7. ¿Existe algún joven a quien le gusten todas las actividades? **NO**
Si encuentras alguno, escribe su nombre
- Q8. ¿Hay algún tipo de actividad que guste más que la de pernoctar en un castillo? **SÍ, IR EN BICI**
- Q9. ¿Qué pareja de jóvenes tiene más posibilidades de encontrarse en la montaña, H-I o R-S? **H-I**
¿Por qué? **PORQUE LES GUSTA IR A LA MONTAÑA Y LAS MARCHAS POR LA MONTAÑA**
- Q10. ¿Cuántas diferencias hay entre las respuestas de los jóvenes C y E? **2**
- Q11. ¿Cuántos jóvenes prefieren probar las especialidades del lugar y bañarse? **A 19 JÓVENES**
- Q12. ¿A cuántos jóvenes no les gusta ir a competiciones deportivas, ni jugar a tenis? **A 2 JÓVENES**
- Q13. Por sus elecciones, las jóvenes J y L se parecen:
-nada - un poco **X bastante** - mucho
Explica cómo has llegado a tu conclusión **PORQUE COINCIDEN EN 10 (DE 14) ACTIVIDADES (70%)(DE LAS CUALES 6 COPRESENCIAS Y 4 COAUSENCIAS)**
- Q14. Si la Agencia de viajes quisiera programar sólo tres actividades, escribe los tipos de actividades que tú le ayudarías a elegir. **CRUCERO POR EL CARIBE, IR EN BICI Y PERNOCTAR EN UN CASTILLO**

¿Por qué? **PORQUE SON LAS QUE TIENEN MAYOR FRECUENCIA (1)**

Q15. Las respuestas del joven I, ¿se parecen más a las del joven F o a las del joven J? **I-J**
 Razona tu respuesta **PORQUE COINCIDEN EN 9 ACTIVIDADES (6 P y 3 A). EN CAMBIO CON F TIENE 8 COINCIDENCIAS (8 P y 0 A)**

Q16. Dí si es verdadera o falsa, cada una de las siguientes frases:

	V	F	N/S
16.1) Al joven F no le gusta jugar al tenis	X		
16.2) Al joven B le gusta ir a Francia a aprender francés		X	
16.3) A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, también les gusta la montaña		X	
16.4) A todos los jóvenes que les gusta la montaña, también les gusta ir en bici	X		
16.5) Los jóvenes prefieren más las visitas con guía, que ir a Italia a visitar museos		X	
16.6) Los jóvenes prefieren más los cruceros por el Caribe, que ir en bici		X	
16.7) No es verdad que a G le guste probar las especialidades del lugar		X	
16.8) A los jóvenes H y O les gustan el mismo tipo de actividades	X		
16.9) A todos los jóvenes les gustan las marchas en la montaña		X	
16.10) Los jóvenes L y N están de acuerdo en diez cuestiones de la encuesta	X		

Q17. ¿A qué porcentaje de los jóvenes les gusta jugar a las cartas? **70% aprox.**

Q18. Si consideramos -jugar a tenis- como una variable estadística, ¿qué frecuencia absoluta dirías que tiene en esta distribución estadística? **15**

Q19. ¿Qué frecuencia relativa tendría la variable estadística de la pregunta anterior? **0,65 aprox**

Figura 4-20: Ficha didáctica de la situación "Corrección colectiva del cuestionario Q"

4.4. “Organización del viaje fin de curso”.

En la experimentación llevada a cabo en el curso 2000-01, se incluyeron en el cuestionario cuestiones directamente relacionadas con el concepto de porcentaje y de frecuencia absoluta y relativa, mediante las nociones de variable y distribución estadística, utilizando los datos de la tabla T. En la situación fundamental realizada en el curso 2014-15, estas cuestiones también forman parte del Cuestionario Q, pero sólo se han propuesto a los alumnos del segundo ciclo de la etapa, ya que los alumnos de 1º y 2º de ESO no están familiarizados con estos conceptos específicos de Estadística elemental. Según los resultados presentados en el capítulo 3, los alumnos no han sabido identificar estos conceptos a través de este tipo de tabla (la tabla T) y cuestiones, motivo que nos impulsa a proponer otra situación en la que se pueda profundizar en este aspecto.

El planteamiento de esta situación parte del tema común al resto de situaciones que forman nuestra ingeniería didáctica, el de la agencia de viajes; pero en esta ocasión los datos no son ficticios obtenidos a partir de una supuesta agencia de viajes, sino que los alumnos serán quienes recogerán dicha información mediante una encuesta que contestarán previamente a las actividades que se les propone resolver.

Esta lección se prepara con el objetivo de que el alumnado pueda trabajar contenidos relacionados con el bloque de contenidos de Estadística mediante el uso de una tabla de valores multivariante distinto al formato habitual que se presenta en la mayoría de propuestas curriculares, libros de texto y actividades interactivas on-line.

Se puede aplicar para la iniciación de la Estadística en 1º y 2º de la ESO, utilizando porcentajes y recuentos, sin nombrar el concepto de frecuencia. También se trabaja con alguna operación lógica sencilla: negación, conjunción, disyunción, sin combinarlas entre ellas. En 3º y 4º de la ESO se plantea para trabajar los conceptos elementales de la Estadística descriptiva: porcentajes, frecuencias absoluta y relativa y además operaciones lógicas un poco más complejas que las propuestas para el primer ciclo de la etapa. Asimismo se exige la representación gráfica de los datos mediante un diagrama de barras, en los cuatro niveles de la etapa.

Esta situación se puede estructurar de forma global en tres fases:

- en la primera se propone a los alumnos obtener un listado de actividades que pueden realizar en el viaje. A partir del mismo se les pedirá opinión sobre sus preferencias para realizar dichas actividades, mediante una encuesta. Las preguntas de esta encuesta las deben formular de manera que se puedan responder con un “SÍ” o un “NO”,
- en la segunda fase el profesor les presenta la tabla de valores binarios a partir de las encuestas contestadas por los alumnos en la primera fase. En dicha tabla, el 1 corresponde a la respuesta “SÍ” y 0 a la respuesta “NO” de los alumnos. En esta misma fase los alumnos deben realizar unas actividades estadístico-lógicas, utilizando la tabla de datos presentada,
- por último, en la fase tres, corrigen las actividades y deben tomar la decisión del viaje de fin de curso, ayudándose de los datos/información obtenida en la resolución de las actividades de la segunda fase.

El profesor plantea a los alumnos del grupo (cada nivel de la etapa de la ESO) que el objetivo de esta situación es programar el viaje fin de curso entre todos y para ello les propone utilizar algunas técnicas que proporcionan las Matemáticas, concretamente el tratamiento de datos y la Estadística.

Una decisión que deben tomar al final de esta situación, es el tipo de viaje que quieren realizar y para ello es importante conocer la opinión de cada alumno del grupo con respecto a las actividades que deben elegir. A partir de ahí se les plantea tomar decisiones sobre:

- la temática del viaje, que puede ser de multiaventura, cultural, con actividades de ocio o combinando todo tipo de actividades.
- las características del lugar dónde viajar, por ejemplo deben decidir entre la costa o el interior, la montaña, etc; dependiendo del tipo de actividades elegidas.

Para facilitar la decisión sobre estos dos criterios se les pide proponer unas actividades sobre las que deberán dar su opinión contestando si les gusta o no. A partir de esta información deberán realizar el correspondiente tratamiento de datos que les permita proponer un viaje para el mayor número posible de alumnos del grupo, respetando al máximo sus preferencias sobre las actividades propuestas.

A continuación explicamos con más detalle cada fase, que mostrará el desarrollo de la situación para conseguir el objetivo planteado:

1ª fase: propuesta de las posibles actividades del viaje y recogida de datos

En una primera sesión el profesor pide a los alumnos que entre todos propongan 15 o 20 actividades que pueden realizar en el viaje, admitiendo todo tipo de sugerencias, siempre que sean factibles para un viaje fin de curso para alumnos de esta etapa.

A partir de las actividades del viaje que han propuesto, responderán una encuesta con preguntas sobre si gustan o no cada una de las actividades propuestas entre todos.

El profesor recogerá estas encuestas para poder recabar la información que han contestado todos los alumnos y traducirlo en una tabla de valores binarios. El profesor asignará a cada alumno una letra mayúscula que indicarán en su encuesta.

A continuación, en la figura 4-21, presentamos una posible propuesta de la encuesta que deben responder los alumnos. Es un modelo que presentamos como ejemplo, ya que cada grupo-clase elaborará un listado distinto de actividades y por consiguiente la encuesta variará según cada grupo.

GUSTOS SOBRE ACTIVIDADES DEL VIAJE FIN DE CURSO	
¿Qué actividades te gustaría realizar en el viaje de fin de curso?Contesta SÍ o NO	
¿Te gusta practicar.....	
1. senderismo?	6. rapel?
2. Piragüismo?	7. tirolina?
3. Rafting?	8. tiro con arco?
4. actividades de vela?....	9. paintball?
5. Barranquismo?	10. bicicleta por la naturaleza?
¿te gusta visitar o ir a.....	
11. museos?	
12. ciudades o pueblos históricos?.....	
13. parques temáticos?	
14. parques acuáticos?	
15. a la playa?	
16. a la montaña?	

Figura 4-21: Ejemplo de la “encuesta gustos del viaje fin de curso”

2ª fase: presentación de la tabla T_v y resolución de las actividades estadísticas a partir de la misma

En esta fase el profesor presenta a los alumnos la tabla de valores en la que han quedado representadas todas las opiniones de los alumnos. Las filas de dicha tabla serán las actividades que han propuesto entre todos -los criterios- y las columnas serán las respuestas de los alumnos según su gusto sobre dichas actividades -los sujetos- (en cada nivel el número de alumnos suele ser entre 25 y 30 alumnos en total). La respuesta a las preguntas de la encuesta puede ser “SÍ” o “NO”(que a un alumno le guste o no una actividad, respectivamente). En la tabla, el 1 equivale al “SÍ” y 0 al “NO”. De ahí que la tabla resultante será una tabla de valores binarios que le llamaremos **tabla T_v**.

En la figura 4-22 presentamos una posible plantilla de la tabla de valores T_v. En las filas aparecen 16 criterios que corresponden a las 16 actividades del ejemplo de la encuesta presentada en la figura 4-21. Las letras mayúsculas que aparecen en las columnas de la tabla son las que ha adjudicado el profesor a cada alumno en la fase anterior y representan a los alumnos del grupo-clase. Los valores de la tabla variará según cada grupo, puesto que tendrán distintas preferencias con respecto a las actividades.

A partir de vuestras respuestas a la encuesta de la primera fase, se ha elaborado la tabla T_v, en la que quedan reflejados vuestros gustos sobre las actividades del viaje. vuestra respuesta “SÍ” se traduce con un 1 y “NO” con un 0:

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	X	Y	Z
C1. practicar senderismo?																									
C2. practicar piragüismo?																									
C3. practicar rafting?																									
C4. practica actividades de vela?																									
C5. practicar barranquismo?																									
C6. practicar rapel?																									
C7. practicar tirolesa?																									
C8. practicar tiro con arco?																									
C9. practicar paintball																									
C10. ir en bici por la naturaleza?																									
C11. visitar museos?																									
C12. visitar ciudades históricas?																									
C13. ir a parques temáticos?																									
C14. ir a parques acuáticos?																									
C15. ir a la playa?																									
C16. ir a la montaña?																									

Tabla T_v

Figura 4-22: Ejemplo tabla de valores T_v

Las actividades estadístico-lógicas que deben realizar los alumnos, se presentan en la figura 4-23, diferenciando las cuestiones según cada nivel de la etapa. Estas cuestiones se basan en el ejemplo de las actividades del viaje presentadas en la figura 4-21.

Utilizando la tabla T_v , resuelve las siguientes actividades:

1º y 2º de ESO:

- a1. ¿A cuántos alumnos os gusta practicar rafting?
- a2. ¿A qué porcentaje de alumnos os gusta practicar rafting?
- a3. ¿A cuántos alumnos no os gusta practicar rapel?
- a4. Calcula el porcentaje de alumnos que os gusta cada una de las actividades de multiaventura
- a5. ¿A cuántos alumnos os gusta visitar museos y ciudades históricas?
- a6. ¿A qué porcentaje de alumnos os gusta ir a parques temáticos?
- a7. ¿A cuántos alumnos os gusta ir a la montaña o ir en bicicleta por la naturaleza?
- a8. Representa gráficamente mediante un diagrama de barras el porcentaje de alumnos a los que les gusta cada una de las actividades propuestas.
- a9. Selecciona las 5 actividades que han sido elegidas por mayor número de compañeros de las clase, es decir con mayor porcentaje de elección.
- a10. Haz la propuesta de un lugar en el que se pueda practicar estas cinco actividades.

3º y 4º de ESO:

- A1. ¿A qué porcentaje de alumnos os gusta practicar senderismo?
- A2. a) ¿A cuántos alumnos os gusta practicar barranquismo?
b) ¿A qué frecuencia relativa correspondería practicar esta actividad?
- A3. ¿A cuántos alumnos os gusta practicar tres actividades acuáticas a la vez? Indica qué actividades de agua has elegido.
- A4. Calcula el porcentaje de alumnos a quienes os gustan todas las actividades de multiaventura
- A5. ¿A cuántos alumnos os gusta visitar museos y ciudades históricas?
- A6. ¿A qué porcentaje de alumnos os gusta ir a parques temáticos?
- A7. ¿A cuántos alumnos os gusta ir a la montaña o ir en bicicleta por la naturaleza?
- A8. Representa gráficamente mediante un diagrama de barras el porcentaje de alumnos a los que les gusta cada una de las actividades propuestas.

- A9. Selecciona las 5 actividades que han sido elegidas por mayor número de compañeros de las clase, es decir con mayor porcentaje de elección.
- A10. Haz la propuesta de un lugar en el que se pueda practicar estas cinco actividades.

Figura 4-23: Actividades de la situación “Organización del viaje fin de curso”

3ª fase: corrección de las actividades y elección del viaje fin de curso

En esta fase deben corregir las actividades en situación de debate y a partir de los datos aportados por estas actividades, deberán tomar la decisión sobre el viaje que pueden realizar al final de curso.

La aplicación de las NNTT también debe facilitar dicha toma de decisión. Los gráficos obtenidos por los alumnos, a través de la hoja de cálculo en la que se presenta la tabla de valores, permite obtener cálculos (porcentajes y recuentos) de forma más rápida y representar visualmente dichos datos.

4.4.1. Análisis didáctico de la lección: el medio y tipo de situación de aprendizaje

Esta situación de aprendizaje debe propiciar que los alumnos adquieran mayor soltura en el manejo del tratamiento de la información, partiendo de los datos proporcionados por ellos mismos. Estos datos personales pueden facilitar a los alumnos a abordar la actividad con mayor motivación y participación. Además, el hecho de haber trabajado las otras situaciones de aprendizaje, enmarcadas en el mismo tema común de la *agencia de viajes*, hace que les resulte más familiar la metodología de trabajo y el medio con el que interactúan, la tabla de valores binarios.

La primera fase de esta lección tiene dos momentos, uno inicial de carácter **didáctico** cuando interviene el profesor para introducir la actividad, explicando cuál es el objetivo de la misma y planteando a los alumnos que propongan posibles actividades para el viaje que deben programar. Y el momento en el que los alumnos proponen las actividades para viajar y responden a la encuesta sobre sus preferencias para este viaje, es de carácter **adidáctico**.

La segunda fase también tiene dos momentos. Al inicio de la fase, es de carácter **didáctico**, cuando el profesor presenta la tabla de valores T_v que ha obtenido a partir de las encuestas que los alumnos han respondido en la primera fase. Al explicar la

tabla, proyectada para todo el grupo, realiza los gestos que completan el carácter ostensivo de la tabla. La segunda parte de esta fase, es de carácter **adidáctico**, puesto que los alumnos deben resolver las cuestiones propuestas a partir de la tabla T_v , sin intervención directa del profesor.

La tercera fase también es de carácter **didáctico**, puesto que en la corrección de las actividades resueltas por los alumnos en la segunda fase, el profesor gestiona dicha corrección en situación de debate.

En cuanto al tipo de situación, es distinta según los distintos momentos que conlleva el desarrollo de la misma:

- se trata de una situación de **formulación** cuando el profesor propone al alumnado que haga la propuesta de las posibles actividades para viajar. Asimismo para elaborar la encuesta deben formular las preguntas simples que se puedan responder por “SÍ” o “NO”, interviniendo sólo un criterio. En el caso de que sea un criterio amalgamado, compuesto por varias actividades, se deberá considerar como un sólo criterio,
- una situación de **acción** cuando contestan a la encuesta sobre sus preferencias para viajar según estas actividades y cuando responden a las cuestiones y actividades, utilizando la tabla de valores T_v ,
- por último, en la corrección de las actividades propuestas, la situación se combina entre la **acción** -cuando los alumnos resuelven las actividades de forma pública-, **de debate/formulación y de validación** – tanto por parte del profesor, como de los alumnos justificando sus acciones o la validez de las respuestas.

El **medio** con el que los alumnos trabajan al inicio de la primera fase, es la lista de actividades que proponen los alumnos para viajar, convirtiéndose en la base para elaborar la encuesta que deben responder. El medio se enriquece con las respuestas a esta encuesta, que a su vez serán el medio que permitirá elaborar al profesor la tabla de valores T_v . En la segunda fase el medio material para el alumnado es la tabla T_v , presentada por el profesor y cada una de las actividades que deben resolver. Por último, en la tercera fase, el medio con el que trabajan alumnos y profesor, está compuesto por las respuestas de cada alumno a cada una de las actividades y la validación que van dando los alumnos y el profesor a dichas respuestas. Todas las interacciones con la tabla de alumnos y profesor, van enriqueciendo y modificando dicho medio.

De nuevo la **tabla** de valores binarios adquiere el papel de **medio adidáctico** sobre el que los alumnos deben trabajar para resolver las actividades. La propiedad que caracteriza a la tabla es la objetividad, ya que las operaciones matemáticas que deben realizar los alumnos quedan materializadas a través de los datos de la tabla sin intervenir ninguna componente subjetiva; aunque los datos de partida son totalmente subjetivos. La solución de cada cuestión o actividad la pueden obtener sólo a partir de los datos de la tabla y por lo tanto el pensamiento subjetivo queda, en parte, inoperante emergiendo el razonamiento objetivo.

En el análisis del trabajo lógico-matemático de las actividades se detalla el medio lógico-matemático al que se confrontan los alumnos en cada una de estas actividades o cuestiones.

4.4.2. Análisis del trabajo lógico-matemático de las actividades

Las actividades propuestas en esta situación son fundamentalmente para que los alumnos trabajen conceptos relacionados con las frecuencias absoluta y relativa -sobre todo en segundo ciclo- y el porcentaje. Asimismo, deben utilizar simultáneamente operaciones lógicas como la conjunción, negación y disyunción. Veamos el análisis lógico-matemático que conllevan dichas actividades, diferenciando los dos ciclos de la ESO.

En el primer ciclo, las actividades son más elementales desde el punto de vista estadístico, ya que no se introduce de forma explícita ni la frecuencia absoluta ni relativa; son preguntas más de naturaleza lógica. En cambio en el segundo ciclo se introducen directamente los conceptos de frecuencias y se le pide que calculen porcentajes sobre variables, incluyendo algunas que suponen la intersección de varios criterios propuestos en la tabla T_v .

Vamos a analizar las estrategias que pueden utilizar los alumnos para responder a las actividades según el tipo de pregunta que se propone, utilizando la caracterización realizada en el análisis a priori de la situación “Juego de la agencia de viajes”. Se tendrá en cuenta, de forma especial, la caracterización de los conceptos de naturaleza estadística y su relación con el trabajo lógico-conjuntista a realizar.

Los conceptos estadísticos a trabajar son:

- problemas de conteo elemental sobre un conjunto fila o columna, verificación o no de un predicado o de su negación, problema de conteo sobre un conjunto resultado de operaciones conjuntistas (conjunción, disyunción) y operaciones lógicas sobre predicados,
- frecuencias absolutas, resultado de un problema de conteo o frecuencias relativas en las que se debe tener en cuenta el total de la población,
- porcentajes, como generalización de estos últimos conceptos al 100% (pasar del tanto por uno, que es la frecuencia relativa, al tanto por cien como más general).

Para realizar este análisis, presentamos de forma genérica las actividades y cuestiones de esta lección, indicando en cada caso las correspondientes actividades particulares planteadas a los alumnos (presentadas en la figura 4-23), según el ciclo educativo de la etapa.

¿A cuántos alumnos os gusta practicar (visitar o ir a) C_i ? $i = 1, \dots, 16$; (a1 y A2a))

- esta actividad es un problema de conteo elemental
- contabilizar los “1” que hay en la fila que corresponde a la actividad que figura en la pregunta planteada. Aunque no se pide de forma explícita, se trata del cálculo de la **frecuencia absoluta** de los alumnos que les gusta dicha actividad
- contabilizar los “0” de esta fila en cuestión y el resultado que de en el recuento se le resta a la cantidad de alumnos que figuran en la tabla. No obstante a nivel matemático están realizando básicamente la misma operación estadística que en la estrategia anterior

¿A cuántos alumnos no os gusta practicar (visitar o ir a) C_i ? $i = 1, \dots, 16$; (a3)

Esta actividad sólo se plantea a los alumnos del primer ciclo ya que es la combinación de un recuento de frecuencia absoluta con el operador lógico negación; no les supone mucha dificultad. Se trata de la pregunta opuesta a la anterior, así las estrategias son justamente las opuestas, es decir:

- contabilizar los “0” que hay en la fila que corresponde a la actividad que figura en la pregunta planteada. Se trata pues de un recuento de la **frecuencia absoluta** de los alumnos a quienes no les gusta dicha actividad
- contabilizar los “1” de la fila en la que figura la actividad del viaje y el resultado que de en el recuento se le resta al total de alumnos de la clase

Para trabajar tanto esta pregunta como la anterior, el profesor elegirá el valor de la variable didáctica de manera que pueda hacer emerger todas las posibles estrategias sobre estas operaciones.

¿A cuántos alumnos os gusta visitar museos y ciudades históricas? (a5 y A5)

En este caso se les plantea a todos los niveles de la etapa por tratarse de la conjunción de dos criterios. Todos alumnos de la etapa lo han trabajado en el “Cuestionario Q” y los de primero de la ESO también en las situaciones “El juego de la agencia de viajes” y “Juegos de clasificación”. Pueden utilizar distintas estrategias, según la interpretación que tengan en cuenta:

- la estrategia a nivel conteo equivale al cálculo implícito de la **frecuencia absoluta** de los alumnos de la clase que han elegido conjuntamente las dos actividades establecidas en el viaje de este juego
- desde el punto de vista de la **lógica**, interviene la “**conjunción**” dos criterios o predicados, por lo tanto deben contabilizar los alumnos de la tabla T_v que hayan contestado sí (1) a las dos actividades a la vez. Los alumnos tendrán que buscar los alumnos que tienen un 1 en las dos filas que corresponden a las actividades mencionadas (las copresencias de ambas actividades), es decir, hallar el cardinal del conjunto intersección

¿A cuántos alumnos os gusta ir a la montaña o ir en bicicleta por la naturaleza? (a7 y A7)

Ésta también se plantea a los dos ciclos de la etapa, tratándose de una combinación de un recuento (frecuencia absoluta) y la operación lógica disyunción.

- desde el punto de vista de la **lógica y conjuntista**, al que le da sentido la tabla, se reduce a un problema de conteo de un nuevo conjunto unión: el conjunto de los alumnos que cumplen un criterio (*ir a la montaña*) unión el conjunto de los alumnos que cumplen el otro criterio (*ir en bicicleta por la naturaleza*). Es decir, se debe calcular primero dicho conjunto y posteriormente hallar el cardinal del conjunto de elementos que verifican la disyunción de ambos predicados

**¿A qué porcentaje de alumnos os gusta practicar (visitar o ir a) C_i ? $i = 1, \dots, 16$;
(a2, a4, a6, A1 y A6)**

A los alumnos del primer ciclo, la primera actividad de porcentaje (a2) se les plantea a continuación de un recuento del mismo criterio, con la intención de que a partir del cálculo indirecto de la frecuencia absoluta, pasan al cálculo del **porcentaje** de forma más directa. Las otras actividades de porcentajes (a4 y a6) ya no se plantean con el recuento previo de la frecuencia absoluta. En cambio en el nivel del segundo ciclo se les pide el cálculo del porcentaje sin calcular previamente la frecuencia absoluta; en este ciclo no es necesario dirigir tanto la actividad para llegar al cálculo de un porcentaje.

Las posibles estrategias serían:

- una vez tienen contabilizada la frecuencia absoluta que corresponde a la actividad que se plantea en la pregunta, ésta se divide entre el total de alumnos que figuran en la tabla y se multiplica por cien
- la estrategia complementaria a ésta, sería calcular el porcentaje de los alumnos a quienes no les gusta dicha actividad y se lo restan al 100%. Normalmente los alumnos ponen en práctica esta estrategia cuando en la fila de la actividad hay pocos “0” y les resulta más práctico contabilizarlos. Los alumnos que utilizan esta estrategia es porque -en general- tienen bien interiorizado el concepto que están manipulando.

Es un variable didáctica que el profesor puede asignar el valor concreto según quiera hacer emerger o no esta estrategia y trabajar implícitamente el cardinal del conjunto complementario, para ello basta elegir un criterio de la tabla cuya fila tenga pocos ceros.

¿A qué frecuencia relativa correspondería practicar (visitar o ir a) C_i ? $i = 1, \dots, 16$;
(A2b)

Esta actividad sólo se plantea a los alumnos del segundo ciclo. La estrategia que pueden utilizar es la misma que en el cálculo del porcentaje, pero sin multiplicar por cien. En realidad la frecuencia relativa es el tanto por uno de una variable, ya que la frecuencia relativa y el porcentaje también se puede interpretar como una proporción.

- ¿A cuántos alumnos os gusta practicar tres actividades acuáticas a la vez? (A3)
- Calcula el porcentaje de alumnos a quienes os gustan todas las actividades de multiaventura (A4)

Estas dos actividades sólo se proponen a los alumnos de segundo ciclo por tratarse de la operación lógica de la conjunción de tres o más criterios, pero que además deben elegir ellos según la condición que se les exige en la pregunta.

En cuanto a la operación matemática, se trata de nuevo de la **conjunción** de tres o más actividades propuestas para el viaje, pero son los alumnos quienes deben elegirlos.

- en la primera actividad previamente al cálculo que se les pide, deben realizar una “selección” entre las seis actividades que están relacionadas con el agua. La intención en esta pregunta es que los alumnos hagan combinaciones de tres de estas actividades y calculen el número de compañeros que han elegido esas tres actividades a la vez; la conjunción o intersección de los tres criterios elegidos. De esta manera podrán comparar qué “pack” de tres actividades acuáticas es el más elegido y el porqué de la elección: criterios subjetivos (porque gustan esos criterios a los alumnos que los eligen) o por los datos (por se los criterios más o menos elegidos, etc...).

Como operación de conteo, se trata de nuevo del cálculo de la frecuencia absoluta de los alumnos que hayan elegido tres de estas tres actividades acuáticas, una vez seleccionadas

- en la segunda pregunta, deben calcular el porcentaje de la intersección de todas las actividades que sean de multiaventura. La estrategia que deben usar los alumnos es seleccionar primero todos los compañeros que han elegido a la vez

las actividades de multiaventura (**intersección** criterios de la tabla), después contabilizarlos (**frecuencia absoluta**) y a continuación calcular el porcentaje que corresponde a dicha cantidad (**porcentaje**).

Representa gráficamente mediante un diagrama de barras el porcentaje de alumnos a los que les gusta cada una de las actividades propuestas (a8 y A8).

Esta pregunta corresponde a los **conceptos estadísticos** del cálculo de **porcentajes** y de la utilización de un **diagrama de barras**, con los datos de la tabla.

En primer lugar los alumnos tienen que calcular el porcentaje de los compañeros que han elegido cada una de las actividades propuestas y en segundo lugar representarlos mediante un diagrama de barras. La aplicación de técnicas de tratamiento estadístico de los datos se realiza normalmente a partir de medios materiales como tablas numéricas, tablas de frecuencias, etc. En esta actividad planteada se realiza este mismo trabajo, pero a partir de un medio distinto, no tan habitual para los alumnos (aunque también sea una tabla, es de valores binarios y no numéricos como están acostumbrados a trabajar).

El objetivo de esta pregunta es que puedan visualizar gráficamente la tendencia que tienen los alumnos en cuanto a sus gustos sobre las actividades planteadas para el viaje.

Selecciona las 5 actividades que han sido elegidas por mayor número de compañeros de la clase, es decir con mayor porcentaje de elección (a9 y A9).

A partir del gráfico que han representado en la anterior pregunta, los alumnos tienen que seleccionar las cinco actividades con mayor porcentaje de elección. De forma implícita trabajan el parámetro estadístico **moda**.

Esta actividad se plantea también a todos los niveles de la etapa porque no presenta ninguna complejidad, si previamente han sabido calcular los porcentajes o los cardinales de los conjuntos de alumnos que han elegido cada criterio (actividad) del viaje.

Una estrategia posible es la utilización del diagrama de barras representado anteriormente y seleccionar las cinco barras con mayor porcentaje (las más altas), o

elegir directamente en la tabla los cinco criterios (actividades del viaje) con más “1” en su fila correspondiente (las más elegidas).

Haz la propuesta de un lugar en el que se pueda practicar estas cinco actividades (a10 y A10).

La última cuestión es una pregunta abierta en la que se exige que los alumnos tengan la iniciativa para proponer un lugar en que sea posible poder practicar las cinco actividades más elegidas por los compañeros de la clase.

Se plantea de esta manera para que exista diversidad en la propuesta del lugar donde pueden viajar, con la condición de que cinco de las actividades preferidas para la mayoría del grupo se puedan llevar a cabo. Ésto puede propiciar una situación de debate, en la que el profesor deberá reconducir ciertas propuestas, puesto que es quien conoce los “límites geográficos” que están dentro de las posibilidades del viaje que pueden realizar los alumnos de esta etapa educativa. Esta actividad puede ser interdisciplinar, en colaboración con el profesorado de la asignatura de Geografía.

Aplicación de las NNTT. Propuesta para ampliar los resultados de las actividades de la lección

En todos los niveles de la etapa se propone la aplicación de las NNTT mediante la utilización de una hoja de cálculo, los cálculos que se pueden realizar a partir de la misma (recuentos, porcentajes ...) y los gráficos que representan dichos cálculos. La hoja de cálculo puede ser del programa “excel” o “calc” (con software libre). Esta aplicación se puede realizar en la última fase, en la corrección de las actividades que han contestado los alumnos. En dicha corrección el profesor proyecta la tabla de datos T_V mediante el formato de una hoja de cálculo y sobre la misma realiza los cálculos de recuentos y porcentajes que se exigen en las actividades propuestas. A continuación se puede realizar la representación gráfica (diagrama de barras) de los cálculos obtenidos.

Asimismo, si el profesor coincide con el investigador, se puede proponer a los alumnos del segundo ciclo de la etapa, que en otra sesión se les puede mostrar cómo interpretar los datos obtenidos en la tabla T_V mediante un tratamiento de datos distinto al que ellos han analizado a través de porcentajes y del diagrama de barras.

Se explica a los alumnos que una de estas formas distintas de interpretar los resultados se puede realizar mediante la aplicación del llamado ASI (análisis estadístico implicativo) a través del programa informático CHIC sobre la tabla T_v .

El profesor puede preparar y mostrar el árbol de similaridad, el árbol jerárquico de cohesión implicativa y el gráfico implicativo que obtiene con los datos de la tabla T_v , a través del programa CHIC. Además puede explicarles la interpretación que ha obtenido a partir de estos gráficos. De esta manera el alumnado puede ver cómo otras aplicaciones matemáticas nos proporcionan información que nos ayuda en la toma de decisiones.

Los alumnos no pueden entender a nivel matemático la aplicación ASI, pero el objetivo es que puedan interpretar de forma visual la información que nos aporta este software que implementa esta técnica de análisis multivariante sobre los datos de la tabla T_v .

Asimismo, pueden comparar los resultados que los propios alumnos han obtenido a partir de sus cálculos y los que obtiene el profesor mediante la aplicación de un método distinto y más complejo llamado ASI e implementado por el software CHIC (explicando que hay otros análisis estadísticos con otros software de análisis multivariantes de datos).

Deberán contrastar si esta nueva técnica les proporciona información adicional a la que ellos han obtenido y si además les facilita la toma de decisión sobre el viaje fin de curso más satisfactorio posible para la mayoría del grupo.

4.4.3. Ficha didáctica de la lección “Organización del viaje fin de curso”

Tal y como hemos explicado en las anteriores lecciones, en la ficha didáctica que presentamos a continuación se plasma el trabajo que debe realizar el profesor con los alumnos para aplicar esta situación de aprendizaje. En ella vienen detallados los objetivos, el material necesario, el desarrollo de las fases de esta situación y las consignas que pueden servir al profesor para dirigirse a los alumnos.

En la figura 4-24, presentamos dicha ficha didáctica, sabiendo que se pueden realizar las modificaciones oportunas, ya que en las cuestiones propuestas en esta lección pueden cambiar los criterios para el viaje según lo que decida cada grupo de la etapa.

Esta ficha didáctica se ha elaborado a partir de la encuesta presentada en la figura 4-21 y de las cuestiones de la figura 4-23 que hemos propuesto como ejemplo para esta lección.

FICHA DIDÁCTICA “ORGANIZACIÓN DEL VIAJE FIN DE CURSO”

NIVEL: de 1º a 4º de ESO

OBJETIVOS GLOBALES:

- Recoger datos sobre los gustos para viajar mediante una encuesta, transformando los resultados en valores binarios.
- Utilizar conceptos de Estadística de forma implícita (1º y 2º de ESO) y explícita (3º y 4º de ESO) tales como frecuencia relativa y absoluta, porcentaje, gráficos estadísticos y moda, combinándolos con operaciones lógicas.
- Introducir técnicas matemáticas para la toma de decisiones respecto a un tema concreto; en este caso la elección del viaje fin de curso.

MATERIAL:

Para el profesor/a:

- Plantilla de la encuesta sobre los gustos de las actividades.
- Plantilla para elaborar la tabla T_v .
- Plantilla con las actividades de los alumnos.

Para el alumnado:

- Listado de actividades que proponen los alumnos para viajar
- Encuesta sobre gusto “actividades del viaje”
- La tabla T_v .
- Actividades para resolver a partir de la tabla T_v .
- Calculadora y bolígrafo

DESARROLLO:

Este juego se desarrollará en tres fases

– **Primera fase:**

en la primera fase, el profesor propone a los alumnos que elaboren un listado entre quince y veinte actividades que pueden realizar en el viaje. A continuación deberán responder a una encuesta en la que les pregunta sobre

sus preferencias respecto a las actividades acordadas entre todos.

– **Segunda fase:**

en la segunda fase el profesor les entrega la tabla T_V en la que se representan los datos obtenidos de sus encuestas contestadas en la primera fase y las cuestiones que tienen que resolver a partir de la misma.

– **Tercera fase:**

la tercera fase servirá para poner en común las respuestas de las actividades, corregirlas colectivamente y poder decidir sobre el viaje que quieren realizar.

– **(*)Cuarta fase (opcional):**

puede haber una cuarta fase, sólo para segundo ciclo de la etapa, en la que el profesor les presenta otra forma de interpretar los datos obtenidos a partir de las actividades realizadas utilizando las NNTT para análisis estadístico: calculadora, programa “excel” o “cal” (en software libre), programa informático CHIC ... Es interesante que puedan ver otro tipo de interpretación estadística de los datos, a través de los grafos de representación.

Primera fase: propuesta de las posibles actividades del viaje y recogida de datos

Objetivos:

- elaborar un listado de posibles actividades para el viaje, propuesto por los alumnos
- recoger información de los alumnos sobre sus preferencias acerca de las actividades propuestas entre todos

Material:

- plantilla de una encuesta para que los alumnos puedan plasmar sus preferencias acerca de las actividades propuestas

Temporalización: 50 minutos

Preparación:

El profesor propone a los alumnos la elaboración de un listado de actividades que pueden realizar en la excursión. Asimismo, les reparte la plantilla de la encuesta que

después deberán responder según las actividades acordadas. En esta plantilla ya están las preguntas preparadas en formato “¿te gusta practicar (visitar o ir a)?”, con la numeración de cada una de las actividades que los alumnos deberán completar según las actividades que acuerden entre todos (en la pizarra tendrán la lista de estas actividades con la numeración que asigne el profesor).

Consigna 1:

- *“Entre todos vamos a elaborar una lista de posibles actividades para realizar en el viaje fin de curso. Debemos proponer entre quince y veinte actividades.*
- *Podéis sugerir distintas actividades y las iré anotando en la pizarra.*
- *Las actividades que propongáis deben simples, es decir con un sólo criterio, ya que después deberéis dar vuestra opinión sobre si os gusta o no dicha actividad*

... los alumnos van proponiendo actividades y el profesor las anota en la pizarra (15 minutos) ...

- *Ya tenemos el listado de actividades que habéis propuesto entre todos. Vamos a numerarlas para que las coloquéis en el número correspondiente de la plantilla de la encuesta que os he entregado.*
- *A continuación contestaréis si os gusta o no cada una de estas actividades propuestas. Sólo podéis contestar SÍ o NO en la plantilla que os he entregado.*
- *Os voy a decir qué letra mayúscula tenéis asignada cada uno de vosotros para que la anotéis en vuestra encuesta. Después me servirá para elaborar la tabla de datos según vuestras respuestas”*

Desarrollo:

El profesor recoge en la pizarra las actividades que proponen los alumnos. Las numera para que los alumnos las coloquen en el número correspondiente que figura en la encuesta que les ha entregado.

Les asigna una letra mayúscula a cada uno de los alumnos, que apuntarán en su encuesta.

Una vez han respondido a la encuesta sobre sus preferencias por las actividades propuestas, el profesor las recoge para poder elaborar la tabla de datos.

Segunda fase: presentación de la tabla T_v y resolución de las actividades estadístico-lógicas a partir de la misma

Objetivos:

- presentar la tabla T_v elaborada por el profesor, a partir de los datos obtenidos de las encuestas contestadas en la primera fase de la lección
- resolver las actividades propuestas a partir de los datos obtenidos en la tabla T_v
- aplicar parámetros estadísticos como: cálculo de frecuencia absoluta y relativa, porcentajes, gráficos estadísticos combinados con operaciones lógicas (negación, disyunción, conjunción y combinación entre ellas)

Material:

- tabla de valores (tabla T_v)
- plantilla individual con actividades que deben resolver los alumnos.
- Calculadora y bolígrafo

Temporalización: 50 minutos

Preparación:

El profesor proyecta en la pizarra la tabla T_v que ha elaborado a partir de los datos que ha recogido de las encuestas que han contestado los alumnos en la primera fase.

A continuación les reparte la plantilla de actividades que deben resolver a partir de la tabla de datos.

Consigna 2:

- *“Cómo veis en la pizarra tenemos la tabla T_v , que he elaborado a partir de vuestras respuestas a la encuesta contestada en la primera fase.*
- *En las filas aparecen los criterios, que son las actividades que habéis acordado entre todos y en las columnas aparecen las letras mayúsculas que os representan a cada uno de vosotros, según la letra que os asigné en la primera fase.*
- *La respuesta “sí” la he convertido en el valor “1” y el “no” en un 0. Así*

obtenemos la tabla T_V con valores binarios en la que quedan plasmados todos vuestros gustos sobre estas actividades.

- Ahora vamos a realizar unas actividades a partir de esta tabla.*
- Podéis usar la calculadora y es importante que realicéis todos los pasos pertinentes para llegar a la solución de la actividad.*
- Tenéis 45 minutos aproximadamente. Cuando terminéis recogeré vuestras plantillas y el próximo día lo corregiremos”*

Tercera fase: corrección de las actividades y elección del viaje fin de curso

Objetivos:

- validar las respuestas que los alumnos han dado en la resolución de las actividades, trabajando en situación de debate con el grupo clase.
- aplicar los conceptos de Estadística y operaciones lógicas que implican las actividades que van a corregir
- utilizar el programa “excel” o “calc” (con software libre) para representar la tabla T_V y poder realizar cálculos de porcentajes, frecuencias absolutas y representación gráfica de los datos.

Material:

- tabla de valores (tabla T_V) proyectada en la pizarra, desde el programa “excel” o “calc”
- plantilla individual de las actividades resueltas por los alumnos en la fase anterior

Temporalización: 50 minutos

Preparación:

El profesor les reparte las actividades que resolvieron en la sesión anterior y proyecta la tabla T_V mediante una hoja de cálculo para poder realizar cálculos directos con los datos de la tabla.

Consigna 3:

- *“A partir de la plantilla de las actividades que realizasteis en la fase anterior, vamos a pasar la corrección colectiva de las mismas.*
- *Leeré en voz alta cada una de las actividades y me iréis diciendo vuestras respuestas. Si coincidís todos y la respuesta es correcta, validaremos la misma y pasaremos a la siguiente.*
- *En el caso de que tengáis varias soluciones, intentaremos llegar a la solución correcta mediante vuestra participación de manera que deberéis argumentar vuestras respuestas para comprobar si la solución es correcta o no.*
..... el profesor procede a la corrección como ha indicado a los alumnos hasta llegar a la actividad 8, que trata de la representación gráfica de los datos
- *Para resolver esta actividad vamos a utilizar los cálculos que nos proporciona la hoja de cálculo en la que tenemos representada la tabla T_V. De esta manera podéis ver cómo se pueden calcular los porcentajes que corresponden a cada una de las actividades que hemos planteado en la tabla y cómo se puede representar gráficamente.*
..... el profesor realiza todos los cálculos comentados utilizando la hoja de cálculo , de manera que se ven directamente proyectados sobre la pizarra
- *Ahora podéis comparar vuestro gráfico con el que hemos obtenido aplicando el programa de la hoja de cálculo. Para que la gráfica sea correcta debéis coincidir en los porcentajes calculados y en la colocación de los datos en cada uno de los ejes.*
- *A partir de este gráfico podemos elegir claramente las cinco actividades que tienen mayor porcentaje de elección por los alumnos de este grupo (podemos decir que son las cinco actividades que marcan la “moda” a nivel estadístico)*
- *Y por último vamos a anotar los lugares que habéis propuesto cada uno de vosotros, teniendo en cuenta que en él se puedan practicar o desarrollar estas cinco actividades que hemos elegido como más votadas por vosotros en la actividad anterior.*

- *A partir de estos resultados debemos tomar la decisión del lugar donde queremos realizar el viaje fin de curso”*

..... en este momento el profesor debe negociar con ellos el viaje fin de curso según los resultados que han obtenido entre todos, ya que puede haber unanimidad desde el principio o bien deberán pasar a votaciones según los lugares que ellos han propuesto, etc.

(*) Cuarta fase: ampliación para el segundo ciclo con la presentación de la aplicación ASI sobre la tabla T_v realizada por el profesor

Objetivos:

- conocer otros tipos de tratamiento de datos
- introducir la existencia de programas informáticos que implementan análisis multivariante, que pueden ayudar en la toma de decisiones de ciertos temas

Material:

- grafos y árboles obtenidos por el profesor aplicando CHIC sobre la tabla T_v
- informe sobre la interpretación que realiza el profesor a partir de los gráficos obtenidos, aportando ideas distintas sobre cómo poder decidir el viaje fin de curso

Temporalización: 50 minutos

Preparación:

El profesor explica al alumnado la existencia de programas informáticos que implementan cálculos matemáticos y aportan información gráfica a partir de la cual se puede tomar decisiones respecto al tema tratado.

Les presenta el tipo de gráficos que se obtienen (los árboles y grafos) y qué tipo de interpretación se puede obtener a partir de ellos.

Consigna 4:

- *“En Matemáticas, y otras disciplinas, se utilizan programas informáticos que nos ayudan a realizar unos cálculos específicos de forma muy rápida y que además a nivel matemático nos aportan mucha información. En este caso os voy a presentar -de forma bastante superficial- uno de estos programas,*

conocido como CHIC. Éste es un programa que aplicamos sobre tablas de valores multivariantes -en este caso binarios- y nos proporciona unos gráficos, que llamamos árboles o grafos según el estilo que tienen, aunque éstos datos son específicos de este tratamiento y para nosotros no es necesario conocerlos en profundidad.

- Si aplicamos este programa que os he presentado a nuestra tabla T_V , obtenemos los siguientes grafos, llamados árbol de similaridad, jerárquico de cohesión implicativa y grafo implicativo....

... el profesor proyecta los árboles de similaridad y jerárquico y el grafo implicativo en la pizarra, sólo con el objetivo de que los alumnos los conozcan visualmente...

- Pero en definitiva ¿qué nos pueden aportar este tipo de gráficos?. Pues en resumen os puedo explicar que la información que nos aportan estos resultados es la forma de agruparse los datos que hemos representado en la tabla T_V , que puede ser atendiendo a los sujetos -que sois vosotros mismos- o las actividades que podemos realizar en el viaje.
- Según mis interpretaciones sobre los alumnos del grupo, éstos serían los resultados (**informe de resultados del profesor...(*)**)y según las actividades que hemos propuesto como posibles para el viaje, los resultados serían éstos (**las otras agrupaciones e interpretaciones sobre las actividades (**)**).
- Por tanto, a partir de estos resultados que os he presentado y que me han proporcionado la aplicación de CHIC sobre la tabla T_V el tipo de viaje que os sugeriría es: **la propuesta del viaje dependerá de los resultados obtenidos por el profesor “**

(*) (**) Los grafos y árboles no se pueden presentar en esta ficha porque éstos dependen de las actividades que acuerden los alumnos y sus preferencias respecto a estas actividades. A partir de estos datos se constituye la tabla T_V . Cuando ésta sea real, el profesor puede aplicar el programa CHIC a la tabla y obtener los gráficos y el informe de la interpretación que le da a los mismos para tomar una decisión y hacer la propuesta del viaje (todo esto sólo se puede realizar en el caso de que el profesor coincida con el profesor que aplique esta lección).

Figura 4-24: Ficha didáctica de la situación “Organización del viaje fin de curso”

Conclusiones

Las cuatro situaciones de aprendizaje se han diseñado como variantes de la situación fundamental de referencia, el “Cuestionario Q”, permitiendo la modelización de los conocimientos relacionados con el tratamiento de datos, el razonamiento lógico y estadístico. En el “Juego de la agencia de viajes”, trabajo sobre operaciones lógicas combinadas (conjunción, negación con conjunción, condicional y atribución de verdad). En “Juegos de clasificación”, trabajo sobre conjunción de cuatro criterios y la clasificación. En “Corrección colectiva del Cuestionario Q”, se propone la devolución a los alumnos de la propia corrección de las actividades resueltas por ellos en el primer trimestre. Por último, en “Organización del viaje fin de curso”, trabajo conjunto sobre razonamiento estadístico y razonamiento lógico de los datos.

La ingeniería didáctica, formada por estas situaciones, presenta una propuesta didáctica innovadora que favorece la enseñanza de las Matemáticas a través de procedimientos y medios distintos de los utilizados habitualmente. La tabla de datos binarios presenta los datos de una nueva forma, permitiendo realizar sobre ellos el trabajo lógico y estadístico (elemental) a través de las diversas actividades de las situaciones de aprendizaje presentadas.

La utilización de las técnicas ASI, mediante la aplicación de CHIC, nos ha permitido analizar a priori el “Juego de la agencia de viajes”. Hemos podido confirmar la pertinencia de la elección de las variables didácticas utilizadas en el diseño de esta situación de aprendizaje. Aprovechando la relación semántica que existe entre las actividades que ofrece la agencia de viajes en tabla de valores, hemos podido plantear tres modalidades distintas para las preguntas del “Juego de la agencia de viajes”: viaje cultural, de actividades deportivas o de ocio. De nuevo, los resultados obtenidos a partir del análisis ASI, mediante CHIC, confirma que la elección de estas variables didácticas es adecuada, asegurando que el trabajo lógico-matemático que exigen las preguntas es homólogo, independientemente de la modalidad del viaje propuesto.

La metodología utilizada, en el marco de la TSD, nos ha permitido diseñar y elaborar estas situaciones de aprendizaje, realizando el análisis a priori de cada una de ellas (el *análisis a priori de los protocolos*, tal y como denomina Brousseau (1986a) en la metodología espiral que plantea en TSD). Asimismo se han elaborado las fichas didácticas de las situaciones de la ingeniería, en las que se plasma el valor de las variables didácticas elegidas para realizar el trabajo lógico-matemático que se propone

a priori (el “saber a enseñar”) y el medio con el que van a interactuar los alumnos (el “saber enseñado”).

La observación de las situaciones es la que nos permitirá constatar el “saber aprendido” en ellas; lo que se analiza en el capítulo 5.

CAPÍTULO 5

Experimentación de las situaciones de aprendizaje

En este capítulo vamos a presentar los resultados de la experimentación y observación de dos de las situaciones de aprendizaje que constituyen nuestra ingeniería didáctica. Éstas son “El juego de la agencia de viajes” y “Juegos de clasificación”.

Detallamos el desarrollo de la experimentación y observación de dichas situaciones, presentando el análisis de los resultados de los alumnos y la gestión del profesor que desarrolla cada situación concreta. Asimismo realizamos la evaluación de cada una de estas situaciones, en la que se valora tanto la parte técnica de la elaboración de la ingeniería didáctica, como los resultados de los medios que se han diseñado para llevar a cabo cada situación de aprendizaje.

El resto de lecciones presentadas y analizadas a priori en el capítulo 4 no se han podido experimentar por no disponer de tiempo lectivo en el curso 2014-15. No obstante el resto de lecciones están elaboradas y preparadas para poder experimentarlas como continuación de las que sí se han podido poner en práctica.

5.1. Análisis de la observación del “Juego de la agencia de viajes”

El grupo de alumnos que ha participado en la observación y experimentación de la lección del “Juego de la Agencia de Viajes” son los alumnos del centro “Grans i menuts” de Castellón, que también realizaron el cuestionario Q en el primer trimestre del curso 2014-15. La experimentación se desarrolló el día 3 de marzo de 2015, correspondiente al segundo trimestre del mismo curso escolar.

El “Juego de la Agencia de Viajes” propone seis actividades, que son homólogas a seis de las cuestiones del cuestionario Q (capítulo 3); homólogas tanto en el contenido matemático que se pone en juego como la complejidad de la cuestión. La decisión de plantear este juego con estas seis actividades se debe a que son las actividades en las que el alumnado manifestó mayor dificultad, al responder al cuestionario Q, como hemos analizado en el capítulo 3.

En el capítulo 4, hemos presentado las tres modalidades de las actividades de esta situación, según el tipo de viaje que propone la agencia de viajes. Todas ellas se pueden presentar de la siguiente forma:

_Q1: ¿A qué jóvenes les gusta C_i y C_j ?

_Q2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta C_i , ni C_j ?

_Q3: ¿A qué jóvenes no les gusta C_i , ni C_j ?

_Q4: ¿A todos los jóvenes que les gusta C_i , les gusta C_j ?

_Q5: ¿A todos los jóvenes que les gusta C_j , les gusta C_i ?

_Q6: No es cierto que al joven S_k le guste C_i . ¿Verdadero o falso?

(C_i y C_j ($i, j = 1, 2, \dots, 14$), representan los 14 posibles criterios de la tabla T y S_k , ($k = 1, 2, 3, \dots, 23$), representa a algún joven de la tabla).

La primera inicial, que aquí hemos señalado de forma genérica con un $_$, indica el tipo de viaje al que pertenece la pregunta, que puede ser cultural (C), deportivo (D) o de ocio (O). Por ejemplo **“OQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a cartas, les gusta pernoctar en un castillo?”**, corresponde a la cuarta cuestión de la modalidad del viaje de ocio.

Recordemos que la primera pregunta o cuestión, Q1, trata de la conjunción de dos criterios. En la segunda y tercera cuestión se trabaja la conjunción de la negación de dos criterios; con la diferencia que en Q2 se exige el cálculo del cardinal del conjunto de todos los sujetos (jóvenes) que cumplen la condición indicada (actividades del viaje) y en cambio, en la Q3 se pide la enumeración de todos los sujetos (jóvenes) que cumplen o verifican una condición concreta. La cuarta y la quinta son dos condicionales entre predicados (Q5 es la inversa de la Q4) y la Q6 trata de la atribución de verdad de un enunciado que está formulado con una negación.

La experimentación que se ha realizado de esta lección ha sido llevada a cabo por un profesor del centro “Grans i menuts”, en dos sesiones consecutivas de clase. Hemos seguido la metodología de observación que se aplicaba en el COREM, en la que el profesor que realiza la observación no es el investigador, sino que éste es observador de dicha experimentación.

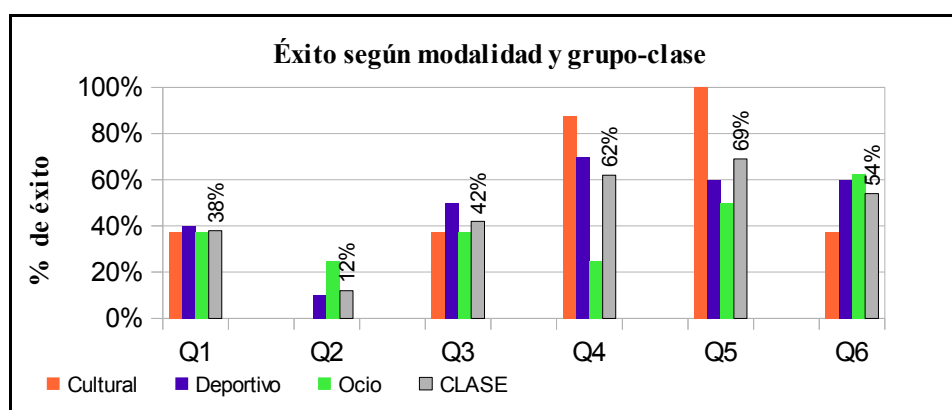
Además hemos contado con los siguientes colaboradores: tres investigadores, ajenos al centro, como observadores, además de la investigadora del centro; dos profesores del centro “Grans i menuts”, uno para registrar la crónica del desarrollo y otro encargado de la parte técnica (filmación fija y móvil en el aula).

El material de observación consta fundamentalmente de la filmación de la lección, las anotaciones que aportan los observadores distribuidos en el aula (cada uno encargado de observar dos grupos), la crónica realizada por escrito, las actividades resueltas por los alumnos (fichas individuales y de grupo), la gestión del aula que realiza el profesor y las aportaciones plasmadas en la mesa redonda que se realiza tras la experimentación (acabada la observación y experimentación de la lección, se realiza una puesta en común en la que, tanto el profesor que la ha llevado a cabo como los observadores de la misma, pueden hacer todas las aportaciones que consideren oportunas con respecto al desarrollo de la experimentación). Todo ello complementa el trabajo de observación directa de los colaboradores.

5.1.1. Fase individual (fase I): desarrollo y primeros resultados

Para empezar el juego de la situación los alumnos se subdividen en seis grupos de trabajo y cada dos grupos trabajan con una misma modalidad del viaje. Antes de trabajar en grupo, resuelven individualmente las actividades que se les presentan en la plantilla individual.

A partir de estas respuestas individuales podemos comparar el porcentaje medio de éxito que han tenido los alumnos según la modalidad de viaje que han resuelto individualmente (en la gráfica 5-1, la barra roja para el viaje cultural, la morada para viaje deportivo y la verde para el viaje de ocio), con el porcentaje de éxito medio que corresponde al grupo-clase (barra gris de la gráfica 5-1). Este análisis nos permite observar con detalle si hay diferencias significativas en el éxito de respuesta, según la modalidad del viaje del juego o según respuestas genéricas como grupo-clase.



Gráfica 5-1: Comparación éxito modalidad y grupo-clase

En la gráfica 5-1, se puede observar de forma global que el éxito de respuesta correcta a las cuestiones Q1, Q2 y Q3 está por debajo del 50% como grupo-clase, oscilando del 12% al 42%; en cambio en las tres últimas cuestiones, Q4, Q5 y Q6 el alumnado de la clase tiene un éxito medio por encima del 50%, desde un 54% al 69%. En segundo lugar, podemos destacar que hay dos resultados extremos en el éxito de respuesta a las cuestiones Q2 y Q5; en la primera, el porcentaje medio de respuesta correcta de la modalidad cultural es el 0% y en cambio esta misma modalidad tiene un éxito del 100% en la cuestión Q5. Sin embargo, en la primera cuestión destaca la homogeneidad en el éxito de respuesta de las tres modalidades y del grupo-clase (entre 38% y el 40%). En las otras cuestiones existen más variabilidad de éxito, según las modalidades o el grupo clase. Por ejemplo, en la modalidad cultural tiene diferencias significativas en el éxito de respuesta correcta, desde el 0% en la Q2 al 100% en la Q5 y en el resto un 38% (Q1, Q3 y Q6) o un 68% en Q4. La modalidad deportiva tiene un éxito de respuesta por encima del 50% en cuatro cuestiones (de Q2 a Q6) y por debajo del 50% en Q1 y Q2. Y la modalidad de ocio sólo supera el 50% de éxito de respuesta correcta en Q6. Es notorio que en la cuestión Q4 tan sólo tiene un 25% de éxito, mientras que las otras modalidades aciertan en un 88% y 70%, lo que hace que baje el porcentaje medio de éxito de la clase en esta cuestión.

Si analizamos con detalle los porcentajes de éxito en las respuestas según cada cuestión y modalidad, podemos deducir las siguientes observaciones:

PRIMERA CUESTIÓN

Esta cuestión la hemos planteado con un cambio de variable didáctica con respecto a su homóloga del cuestionario Q (Q11). En la cuestión del cuestionario se formula como “¿A cuántos jóvenes ...” y en esta lección como “¿A qué jóvenes...?”, exigiendo en ambas la operación conjunción de dos criterios de la tabla.

Cuestión genérica (grupo-clase) o por modalidad	Éxito respuesta
_Q1: ¿A qué jóvenes les gusta C_i y C_j ?, $i, j = 1, 2, \dots, 14$	38 %
CQ1: ¿A qué jóvenes les gusta ir a Francia a aprender francés y a Italia a visitar museos?	38 %
DQ1: ¿A qué jóvenes les gusta la montaña y las competiciones deportivas?	40 %
OQ1: ¿A qué jóvenes les gusta jugar a cartas y bañarse?	38 %

En el análisis a priori de la lección realizado en el capítulo 4, esta cuestión la habíamos identificado de la siguiente forma:

- operación lógica “**conjunción de dos criterios**”
- operación conjuntista “búsqueda del **conjunto intersección** de los conjuntos de los sujetos de la tabla que cumplan los dos criterios en juego”
- posibles estrategias de respuesta: **buscar y enumerar los jóvenes con coincidencias positivas (copresencias 1-1); buscar por extensión cada conjunto de sujetos y hacer su intersección**

- A partir de la gráfica 5-1, si comparamos el éxito de respuesta de esta cuestión según cada modalidad de viaje y según todo el grupo-clase no existen diferencias significativas, puesto que todos ellos están alrededor del 38%.

El error que generalmente comenten los alumnos es el mismo que cometen en el cuestionario Q: calcular por separado el conjunto de jóvenes que cumplen cada criterio y no hacen la intersección de los mismos. En el cuestionario Q, el éxito de respuesta correcta a la cuestión homóloga (Q11) a esta primera cuestión de la lección, es de un 41%, prácticamente el mismo que se ha obtenido como media del grupo-clase y en las tres modalidades.

Estos resultados muestran que los alumnos de este nivel educativo confunden la conjunción de dos criterios con la disyunción de éstos; de ahí que consideran por separado las dos actividades y calculan conjuntos de los jóvenes que cumplen cada criterio y no ambos a la vez.

En las siguientes secciones podremos ver cómo el trabajo en pequeño grupo y la corrección con todo el grupo-clase, ayuda a mejorar este error y la mayoría del alumnado acaba modificando esta confusión, aceptando -al menos de forma pública- la estrategia óptima que se debe utilizar en esta cuestión.

SEGUNDA y TERCERA CUESTIÓN

Hemos agrupado las cuestiones Q2 y Q3 porque ambas tratan de los mismos conectores lógicos, con la diferencia que en Q2 sólo se pide el cardinal del conjunto intersección de los conjuntos complementarios de los jóvenes que cumplen los criterios indicados y en Q3 se exige por extensión dicho conjunto intersección.

Cuestión genérica (grupo-clase) o por modalidad	Éxito respuesta
_Q2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta C_i , ni C_j ?, $i, j = 1, 2, \dots, 14$	12 %
CQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta pernoctar en un castillo, ni hacer visitas con guía?	0 %
DQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta ir en bici, ni las competiciones deportivas?	10 %
OQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta bañarse, ni los cruceros por el Caribe?	25 %

Cuya caracterización a priori, según el capítulo 4, es la siguiente:

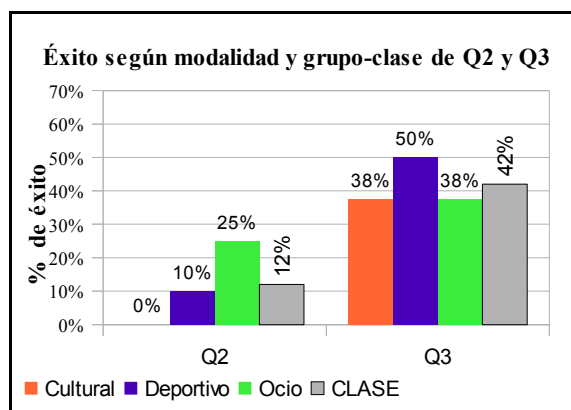
- operación lógica “**conjunción de la negación de dos criterios**”
- operación conjuntista “búsqueda del **conjunto intersección** de los **conjuntos complementarios** de los sujetos de la tabla que cumplan los dos criterios en juego”
- posibles estrategias de respuesta: **contar los jóvenes con coincidencias negativas (coausencia 0-0); contabilizar el cardinal del conjunto** de los sujetos de la tabla que cumplan la **intersección** de la negación de dos criterios

Cuestión genérica (grupo-clase) o por modalidad	Éxito respuesta
_Q3: ¿A qué jóvenes no les gusta C_i , ni C_j ?, $i, j = 1, 2, \dots, 14$	42 %
CQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta ir a un museo, ni hacer visitas con guía?	38 %
DQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta jugar a tenis, ni las marchas por la montaña?	50 %
OQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta jugar a cartas, ni las competiciones deportivas?	38 %

Y la identificación a priori de esta cuestión es (capítulo 4):

- operación lógica “**conjunción de la negación de dos criterios**”
- operación conjuntista “búsqueda del **conjunto intersección** de los **conjuntos complementarios** de los sujetos de la tabla que cumplan los dos criterios en juego”
- posibles estrategias de respuesta: **buscar y enumerar los jóvenes con coincidencias negativas (coausencia 0-0); dar por extensión el conjunto** de los sujetos de la tabla que cumplan la **intersección** de la negación de dos criterios

- En la gráfica 5-2 podemos observar que los alumnos han tenido mejor resultado en la cuestión Q3 que en la Q2. Aún así, el porcentaje de éxito es bajo tanto a nivel de clase como por modalidades del viaje; un 12% en la Q2 y de un 42% en la Q3, ambos por debajo del 50%.



Gráfica 5-2: Porcentaje de éxito en las cuestiones Q2 y Q3 según modalidad y el grupo-clase

- Si observamos el error por modalidades, en la cuestión Q3 es menor que en Q2 en todos los casos, es decir, en cada modalidad se mejora en la respuesta a la cuestión Q3 con respecto a la Q2. Podemos deducir de estos resultados, que el alumnado comete menos error cuando se les exige que calculen por extensión el conjunto de los jóvenes que cumplen una condición concreta, que cuando se les exige el cardinal del mismo.

Ya habíamos observado en la pregunta del cuestionario Q, con esta misma operación lógica (Q12), que el error cometido por el alumnado en esta cuestión corresponde al 70% (capítulo 3). En dicha cuestión se les exigía el recuento o cardinal de los sujetos y no la enumeración de los mismos; por ello es homóloga a la pregunta CQ2, DQ2 y OQ2 de esta lección.

En este tipo de pregunta aumenta la dificultad por tratarse de la conjunción de la negación de dos criterios, en la que el alumnado tiende a calcular el cardinal de los conjuntos complementarios de los jóvenes que cumplen cada criterio por separado y en algunos casos incluso suman ambos cardinales. El tipo de error es similar al que cometen en la cuestión Q1 de esta lección, pero en este caso la confusión reside en la disyunción de dos negaciones. Confunden la búsqueda de las coausencias con una operación aritmética de cálculo de cardinales, considerando por separado ambos conjuntos y no la intersección.

Como veremos en la fase final de corrección, la utilización de la tabla ha permitido superar estos errores cometidos.

CUARTA y QUINTA CUESTIÓN

Las cuestiones Q4 y Q5 están planteadas para que el alumno pueda trabajar la condicional en ambos sentidos, utilizando las mismas actividades o criterios de la tabla T; es decir, la actividad que actúa como antecedente en la Q4, después es el consecuente en la Q5 y viceversa. En la gráfica 5-3 podemos observar variabilidad en los aciertos de estas dos cuestiones según la modalidad del viaje. Se han elegido como variables didácticas, no sólo la utilización de la condicional inversa, sino el tipo de respuesta (afirmativo/negativo) y también la proposición tautológica (el criterio “ir en bici” tiene todas las respuestas de los jóvenes con un 1).

Cuestión genérica (grupo-clase) o por modalidad	Éxito respuesta
_Q4: ¿A todos los jóvenes que les gusta C_i , les gusta C_j ?, $i, j = 1, 2, \dots, 14$	62 %
CQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a un museo, les gusta ir a Italia a visitar museos?	88 %
DQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, les gusta jugar a tenis?	70 %
OQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a cartas, les gusta pernoctar en un castillo?	25 %

Y la inversa:

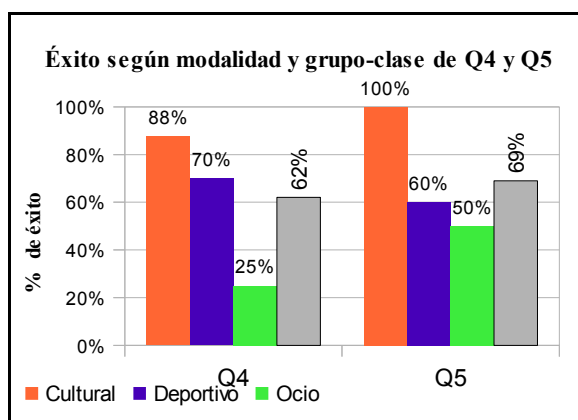
Cuestión genérica (grupo-clase) o por modalidad	Éxito respuesta
_Q5: ¿A todos los jóvenes que les gusta C_j , les gusta C_i ?, $i, j = 1, 2, \dots, 14$	69 %
CQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a Italia a visitar museos, les gusta ir a un museo?	100 %
DQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a tenis, les gusta ir en bici?	60 %
OQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta pernoctar en un castillo, les gusta jugar a cartas?	50 %

Siendo su caracterización a priori realizada en el capítulo anterior:

- operación lógica: **“condicional entre predicados con cuantificador universal”**
- estrategia de respuesta: **comprobar si los jóvenes que han respondido positivamente a la primera actividad indicada, también lo han hecho a la segunda actividad indicada, pero siguiendo el orden en las que están las actividades del viaje**

- En la gráfica 5-3, si distinguimos las tres modalidades del viaje sí se pueden observar diferencias en los resultados de éxito. En primer lugar, las modalidades cultural y de ocio siguen el mismo patrón que el del porcentaje de éxito del

grupo-clase, en el sentido que mejoran en la cuestión Q5. Con la diferencia que en la modalidad cultural está por encima del porcentaje medio del grupo-clase y en cambio la modalidad de ocio tiene su porcentaje de éxito por debajo de dicho porcentaje medio. La modalidad deportiva es la única que disminuye el porcentaje de éxito en la Q5 con respecto a la Q4, superando a la media de la clase en Q4 y siendo inferior a esta media en la respuesta a Q5.



Gráfica 5-3: Porcentaje de éxito en las cuestiones Q4 y Q5 según modalidad y el grupo-clase

- En el análisis a priori de estas cuestiones ya habíamos elegido que las cuestiones Q4 y Q5 tuvieran distintas respuestas, según cada modalidad. Elegimos que las respuestas correctas para Q4 y Q5 respectivamente sean, en la modalidad de cultura “NO” y “NO”, en la deportiva “NO” y “SÍ” y en la de ocio “SÍ” y “NO”, para poder observar si había distintos comportamientos en la misma actividad con diferentes respuestas. Esta decisión viene motivada por las respuestas observadas en el cuestionario Q, en donde ya se ha podido deducir que hay un diferencia de éxito en función de las respuestas. Tras la corrección conjeturamos que si la respuesta correcta es un “NO”, es más elevado el porcentaje de éxito que si la actividad condicional conlleva respuesta positiva.
- En la modalidad cultural aumenta el porcentaje de éxito en la condicional inversa, teniendo ambas un elevado resultado de acierto, muy por encima del porcentaje medio de éxito del grupo clase. La respuesta correcta en ambas cuestiones de esta modalidad es “NO”. Por lo tanto en la cuestión de la condicional inversa (Q5), no podemos valorar si es debido a que el alumnado ha entendido bien la pregunta, dando la respuesta correcta; o bien que el alumno ha dado la misma respuesta que en la cuestión anterior pensando que se trata de la

misma operación lógica. En este último caso, el alumno estaría cometiendo error en la comprensión de la condicional inversa, aunque su respuesta sea “acertada” por coincidir ambas respuestas. Ésta es nuestra hipótesis y por ello se han planteado estas mismas cuestiones en otras dos modalidades o variantes con las respuestas distintas. Esta decisión nos permitirá obtener más información y contrastar dicha hipótesis como podemos ver a continuación.

- En la modalidad de ocio han obtenido menor porcentaje de éxito en estas cuestiones, siendo del 25% en Q4 y aumentando al 50% en la Q5. Recordemos que las respuestas correctas de Q4 y Q5 de esta modalidad, son respectivamente “SI” y “NO”. Resulta sorprendente que la primera condicional tenga un índice inferior de respuesta correcta que la condicional inversa. Este dato corrobora nuestra hipótesis de que cuando la actividad exige respuesta negativa “NO”, resulta más fácil al alumnado que cuando exige un “SÍ” de respuesta; es decir cuando la segunda respuesta es “NO” aumenta el éxito.

En este caso las filas de la tabla que deben manejar los alumnos tienen la particularidad que una de ellas tiene todo “1” excepto una celda, con un “0”; veamos el caso:

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
C ₁₀ . jugar a las cartas?	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
C ₁₄ . pernoctar en un castillo?	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

“**OQ4:**¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a cartas, les gusta pernoctar en un castillo? (**SÍ**) y **OQ5:** ¿A todos los jóvenes que les gusta pernoctar en un castillo, les gusta jugar a cartas? (**NO**)”

Es obvio, que si un alumno entiende realmente el sentido de la condicional en estas dos cuestiones, puede responder correctamente con tan solo la visualización global de estas dos filas. Y en cambio el alumnado sólo ha tenido un 25% de aciertos en la OQ4 y un 50% en la OQ5, hecho que confirma el “enmascaramiento” de confianza de las respuestas negativas (“NO”).

- En la modalidad deportiva disminuye el éxito de Q4 a Q5, aún siendo ambos elevados (70 y 60% respectivamente). En esta ocasión las respuestas correctas respectivamente son “NO” y “SI”. Volvemos a corroborar nuestra hipótesis, ya que en la segunda cuestión que requiere un “SÍ” como respuesta correcta, desciende el índice de éxito en la misma.

También consideramos interesante mencionar el tipo de filas de la tabla T que debe manejar el alumnado, ya que las actividades del viaje elegidas son “**jugar a tenis**” e “**ir en bici**”, con la particularidad que “ir en bici” les gusta a todos los jóvenes; es una proposición tautológica. Veamos estas dos filas de la tabla T, para continuar con el análisis:

¿Te gusta...	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
C ₃ . jugar a tenis?	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
C ₁₁ . ir en bici?	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Recordemos las cuestiones “**DQ4**: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, les gusta jugar a tenis?” y “**DQ5**: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a tenis, les gusta ir en bici?”. Observando estas dos filas de la tabla T, las respuestas correctas son claramente “**NO**” y “**SÍ**” respectivamente. La utilización de estas dos filas, siendo una de ellas todo “1” facilita la respuesta correcta a estas cuestiones, puesto que no es necesario buscar en la tabla celda a celda para comprobar si se verifica o no la condición; se puede observar de forma global. Esto también puede explicar que los resultados de éxito (70 % y 60% respectivamente) son relativamente altos en ambas cuestiones.

- El hecho de que la respuesta a Q4 y Q5 sea afirmativa o negativa, según cada modalidad, ha influido en el tipo de error cometido por los alumnos y nos ha permitido observarlo con más detalle.

Del análisis de las tres modalidades, podemos concluir que el contenido matemático de la condicional y de la condicional inversa, no están consolidados por los alumnos, al menos en esta fase de trabajo individual. Por una parte la condicional inversa ya les supone una dificultad y cuando la respuesta a esta cuestión (Q5) es un “**SÍ**”, aumenta dicha dificultad; tienen más éxito cuando en la condicional inversa se exige un “**NO**” como respuesta correcta; el resultado está “falseado”.

A partir del resultado del grupo-clase no se pueden deducir demasiadas conclusiones respecto al error que ha cometido el alumnado en estas operaciones, pero en las secciones 5.1.3. y 5.1.4., donde se analizan los resultados del trabajo en grupo y después la corrección con toda la clase, se

podrá observar con más detalle el tipo de error que cometen y sobre todo, los argumentos que utilizan para razonar la respuesta.

SEXTA CUESTIÓN

El objetivo de esta cuestión es comprobar si el éxito que han tenido los alumnos en su respuesta correcta, responde al conocimiento de la atribución de verdad a una negación o a la inercia de contestar NO por la analogía existente entre la formulación de la cuestión y su respuesta correcta: formulación con negación parece conducir a contestar también en negativa, es decir, falso.

Cuestión genérica (grupo-clase) o por modalidad	Éxito respuesta
_Q6: No es cierto que al joven S_k le guste C_i , ¿Verdadero o falso?, $i= 1,\dots,14$; $k= 1,\dots,23$	54 %
CQ6: “No es cierto que al joven M le guste ir a Francia a aprender francés” ¿Verdadero/falso?	38 %
DQ6: “No es cierto que al joven M le guste ir a la montaña”. ¿Verdadero o falso?	60 %
OQ6: “No es cierto que al joven R le guste jugar a cartas”. ¿Verdadero o falso?	63 %

Cuya caracterización a priori es:

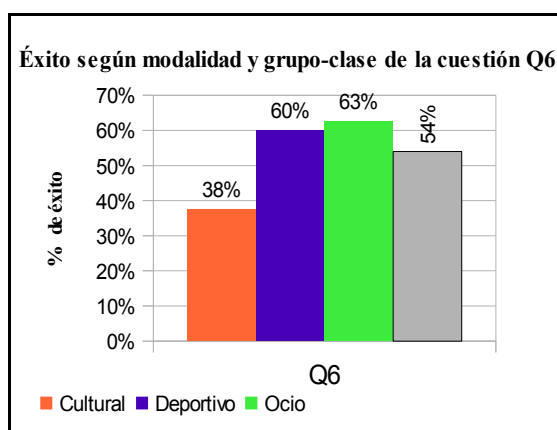
- operación lógica. **“atribución del valor “cierto” a un enunciado que está formulado con una negación”**
- estrategia de respuesta: **comprobar si un joven concreto ha contestado 0 a una actividad concreta, ya que son verdaderas todas las respuestas**

- La cuestión Q6 decidimos proponerla en esta ocasión, porque al analizar los resultados del cuestionario Q, ésta tenía un 74% de éxito. En el cuestionario, la pregunta trataba de la atribución de verdad de un enunciado formulado con una negación, cuya respuesta correcta era “falso” (NO). Queríamos comprobar si el alumnado acertó en la respuesta entendiéndola según el correspondiente contenido matemático o tal vez contestaron correctamente, por tratarse de una cuestión que contiene una **negación en su formulación** y a su vez su **respuesta correcta es una negación**.

Una forma de comprobarlo es volver a formular dicha cuestión haciendo un cambio de variable didáctica (la respuesta). Por lo tanto, en esta ocasión hemos mantenido la formulación de la cuestión, pero cambiando la respuesta correcta a VERDADERO (“SÍ”). Postulamos que para contestar bien a la cuestión deben

entenderla, por el contrario, si se contesta según la analogía explicada, el alumno cometerá error.

- Una vez realizada la observación de esta lección hemos podido constatar que el porcentaje de éxito en este tipo de operación lógica es más bajo en la lección (54%), que en el cuestionario Q (74%). Esto confirma una vez más, nuestra hipótesis: el enmascaramiento que conlleva la respuesta negativa. El descenso del 74% de éxito en la respuesta a la cuestión del cuestionario Q, al 54% de éxito en la respuesta a la cuestión con la misma actividad en la lección, es debido a que en el último caso, la respuesta correcta es “verdadero” (“SÍ”).
- En esta cuestión no hay distinción según cada modalidad, ni en la formulación de la cuestión ni en la dificultad de la respuesta. No hay cambios significativos; tan sólo el criterio de la tabla que se ha elegido para cada modalidad. Los porcentajes de éxito en la respuesta a esta cuestión, según cada caso son de un 38% (cultural), 60%(deportiva) y 63% (ocio), tal y como se indica en la gráfica 5-4. El grupo-clase ha tenido un porcentaje ligeramente inferior a las dos últimas modalidades, por encima del 50%. Han cometido mayor error en la modalidad cultural, pero no existen matices que expliquen esta diferencia respecto a las otras dos.



Gráfica 5-4: Porcentaje de éxito en la cuestión Q6 según modalidad y el grupo-clase

- En las siguientes secciones podremos ver que la respuesta de grupo a esta cuestión mejora con respecto al resultado individual. En el análisis de la fase final (corrección con el grupo-clase) podemos acabar de contrastar nuestras hipótesis, puesto que el alumnado manifiesta su forma de razonar la respuesta.

Creemos que el cambio de la variable didáctica realizado a través de la “respuesta” a la cuestión ha sido pertinente y nos ha posibilitado comparar los resultados de Q con los de la lección.

5.1.2. Fase II: respuestas en pequeño grupo

Recordemos que el alumnado está agrupado en pequeños grupos, tal y como hemos explicado. A cada uno se le adjudica una etiqueta según la modalidad del “Juego de la agencia de viajes” que está trabajando; C1, C2, D1, D2, O1 y O2, donde la inicial indica la temática del viaje correspondiente: cultural, deportivo y de ocio.

Los grupos estaban organizados previamente a la experimentación de la lección. Dicha distribución, realizada por el investigador del centro y el profesor de la lección, se obtiene teniendo en cuenta distintos criterios: grupos mixtos (reparto equitativo de los chicos y chicas de la clase entre todos los grupos), distintos niveles académicos (repartir los alumnos con más y menos dificultades en el área de matemáticas), variabilidad en características actitudinales (reparto de distintos roles que normalmente tienen en las clases ordinarias: participación activa en clase, liderazgo...). Asimismo se ha seleccionado, también previamente, un alumno de cada grupo como representante del mismo, que tiene la función de recoger las anotaciones y acuerdos del trabajo en grupo y de explicar las respuestas de grupo en la corrección colectiva en la fase IV.

A partir de las aportaciones de los profesores observadores de la sesión, de la crónica de la lección y del análisis de su filmación, se pueden mostrar las siguientes observaciones que indican la forma de trabajar de cada uno de los grupos.

Una primera observación general es que todo el alumnado ha participado en su grupo correspondiente. Veamos más concretamente el desarrollo que ha tenido cada uno de los grupos, señalando los aciertos o errores que han cometido, cómo han ido argumentando las respuestas de las actividades, y la forma de trabajar en equipo, señalando la influencia que han tenido los líderes sobre el trabajo en equipo, en el caso de que algún/os alumno/s adopten este rol.

Asimismo, después del desarrollo de los grupos de cada modalidad, hemos añadido una tabla en la que se indican las respuestas correctas o incorrectas que han tenido en esta segunda fase cada grupo de la modalidad correspondiente.

Grupo C1

- Como grupo responden bien las cuestiones 1, 3 y 6.
- La cuestión 2, que consiste en una conjunción de dos criterios, no la contestan bien porque la confunden con una disyunción.
- En las cuestiones 4 y 5 tienen la respuesta concreta correcta pero no su argumentación.
- Cuando ponen en común sus respuestas de la cuestión 4, “CQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a un museo, les gusta ir a Italia a visitar museos?”, argumentan como grupo: *“No porque los jóvenes no coinciden en ambas actividades”*. Cometen el error de confundir la condicional con la conjunción, porque se fijan sólo en las coincidencias y no en el orden. Lo expresan literalmente así: *“NO, porque si miramos la tabla, eeee ..., los jóvenes que les gusta ir a un museo y los de Italia, no coinciden”*.
- En general, han seguido bien la consigna dada por el profesor para contestar en la plantilla de grupo. Primero han comprobado si hay unanimidad en sus respuestas y a continuación se basan en ellas para argumentar la respuesta que consideran de grupo.

Grupo C2

- Como grupo responden correctamente las cuestiones 1, 2, 3, 4 y 5. Aunque en las cuestiones 4 y 5 no argumentan bien su respuesta. La cuestión 6 la tienen mal porque no entienden la afirmación “No es cierto que al joven” como sinónimo de “Es falso que ...”
- En la primera pregunta, van buscando los jóvenes que coinciden positivamente (copresencias) en las dos actividades que plantea la cuestión (ir a Francia a aprender francés e ir a Italia a visitar museos). Responden correctamente como grupo.
- Es curioso que tres miembros del grupo habían buscado por separado los jóvenes que les gusta cada actividad, sin hacer la conjunción -es decir, la entienden como una disyunción-. Tan sólo un alumno la había contestado bien individualmente, que es la respuesta que después han dado como grupo. Este alumno que ahora lo ha contestado correctamente, no lo había hecho bien en la pregunta homóloga del cuestionario Q del primer trimestre.

- En la cuestión 2, un alumno dice “*se refiere a las dos a la vez*”, otro compañero reflexiona y corrige su respuesta que antes era 7: había contado los 0 por separado de cada actividad y luego lo había sumando; a 6 jóvenes no les gusta una actividad y a 1 joven no le gusta la otra. Es decir, confusión por entenderla como una disyunción de negaciones).
- En la cuestión 4, condicional, un estudiante dice al resto: “*que no, que si hay un joven que dice que no, ya no hay que buscar más, la respuesta es que NO*”. No está dando prioridad al orden de las actividades para ver las respuestas de los jóvenes, tan sólo indica que hay que mirar las diferencias entre ellos.
- Cuando han pasado al trabajo en grupo, no han mirado mecánicamente si han coincidido o no en sus respuestas. Deben tomar nota de las respuestas por unanimidad, pero no lo han hecho. Han entrado en debate antes de apuntar resultados y cada uno ha tratado de explicar cómo lo ha buscado para asegurarse de que todos lo han pensado igual.
- Uno de los componentes de grupo ha ejercido como líder [quien ha contestado bien la mayoría de las cuestiones]; lo que dice parece que sea la verdad para el resto; ha utilizado expresiones como “*lo que hay que hacer es...*”, “*ésto es así porque...*”

(√ indica respuesta correcta)

Cuestión/grupo	CQ1	CQ2	CQ3	CQ4	CQ5	CQ6
Grupo C1	√		√			√
Grupo C2	√	√	√	√	√	

Tabla 5-1. Respuestas correctas de los grupos de la modalidad cultural

Cabe señalar que en la modalidad deportiva, con la que trabajan los grupos D1 y D2, interviene un criterio de la tabla que es un predicado tautológico, ya que la fila que corresponde a esta actividad o criterio de la tabla es todo “1”. Es importante tener en cuenta este dato, ya que puede influir, como veremos, en las respuestas de los alumnos.

Grupo D1

- Como grupo responden correctamente todas las cuestiones.
- Un miembro del grupo comenta a sus compañeros que es importante fijarse en que hay dos actividades distintas relacionadas con la montaña, una es “las marchas por la montaña” y la otra sólo “la montaña”. Les hace la observación, porque se da cuenta que algunos lo están confundiendo para responder a una de las cuestiones.
- Algunos alumnos manifiestan dudas con respecto a las cuestiones 4 y 5. No saben si es la misma pregunta (se trata de la condicional en cada caso pero con las actividades propuestas a la inversa).
- En cambio, otra alumna manifiesta seguridad en sus respuestas [quien contesta correctamente], porque explica a sus compañeros que la respuesta a la cuestión 4, *“es NO porque la actividad “ir en bici” les gusta a todos los jóvenes. Y en la cuestión 5 no es lo mismo porque a algunos de los jóvenes no les gusta jugar a tenis”*.
- En la cuestión 6 responden correctamente, porque buscan si al joven M le gusta ir a la montaña. Cuando comprueban que no le gusta (ha respondido 0), entonces dicen que es Verdadera la afirmación “No es cierto que al joven M le guste ir a la montaña”.
- En general han trabajado todos en grupo. Han comprobado que coinciden en todas menos en la primera. Concluyen entre dos o tres personas.

Grupo D2

- Como grupo responden correctamente todas las cuestiones, excepto la primera y la segunda cuestión.
- En la primera comenten un error de cálculo (cuando comparan las filas 2 y 7, en la casilla del joven O, miran en la fila 3 y no en la 2)
- En la pregunta 2, la que adopta el role de líder [quien contesta erróneamente], explica a sus compañeros “ Yo he puesto, a todos les gusta ir en bici y a 7 no le gustan las competiciones deportivas”. Sus compañeros de grupo dicen que coinciden en lo mismo y lo dan como respuesta correcta (claramente, confunden la conjunción de la negación de dos criterios en una disyunción de la negación

de los mismos). Después en la corrección del grupo-clase lo corrigen según lo que se ha hecho en la corrección de toda la clase.

- En la cuestión 6, hacen la aclaración entre ellos, que se trata de una afirmación y no de una pregunta.
- Una de las alumnas lidera el grupo, aunque el resto también participa.
- No comprueban demasiado por unanimidad, trabajan más por consenso.

(√ indica respuesta correcta)

Cuestión/grupo	DQ1	DQ2	DQ3	DQ4	DQ5	DQ6
Grupo D1	√	√	√	√	√	√
Grupo D2			√	√	√	√

Tabla 5-2. Respuestas correctas de los grupos de la modalidad deportiva

Grupo O1

- Como grupo responden correctamente todas las cuestiones.
- En la cuestión 3 (conjunción de la negación de dos criterios), tres miembros del grupo están de acuerdo en buscar las coausencias. Dan correctamente la respuesta como grupo.
- A continuación pasan a la cuarta pregunta, es una condicional. La respuesta correcta es SÍ, porque a todos los jóvenes que les gusta la primera actividad indicada (jugar a cartas), también les gusta pernoctar en un castillo. En el proceso de llegar a consenso, un miembro del equipo dice que No, porque ha encontrado un joven “el G” o “el H” a quien no le gusta jugar a las cartas. Pero otro miembro del grupo [quien lidera y responde bien las preguntas] le explica que se equivoca, porque debe mirar los jóvenes a quienes SÍ les gusta jugar a cartas; los que NO, resultan indiferentes en este caso; él lo expresa diciendo *“hay que mirar a los que sí les gusta jugar a cartas, los otros nos dan igual... y sí, está bien, porque a los que les gusta “jugar a cartas”, también les gusta “pernoctar en un castillo”*”. Tras el razonamiento del compañero, la persona que había intervenido antes queda convencida.
- En este grupo participan en general todos los miembros, aunque uno de ellos es quien ejerce como líder. En general, cuando tienen duda de grupo, la acaba resolviendo él.

Grupo O2

- Como grupo sólo responden correctamente a las cuestiones 1 y 5.
- El error que han cometido en la cuestión 4 es fijarse en los jóvenes que tienen diferencias en las dos actividades de la pregunta (jugar a cartas y pernoctar en un castillo). Encuentran en la tabla un joven, el H, a quien no le gusta jugar a cartas y sí pernoctar en un castillo. Es decir, no tienen en cuenta en ningún momento el orden de dichas actividades, siendo una condicional. En este grupo, sólo hay un alumno que tiene la respuesta correcta en esta cuestión, pero sus compañeros le convencen de lo contrario y finalmente la respuesta de grupo la tienen incorrecta.
- Señalar que un alumno de este grupo ha tenido correctas todas las respuestas individuales, éste ha utilizado continuamente la tabla para explicar sus respuestas a sus compañeros.
- El alumno que tenía bien todas las cuestiones en la fase I, después del trabajo en grupo, ha tenido que restar cuatro puntos (según las normas del juego) de su puntuación final, ya que no ha sabido convencer a sus compañeros de los errores que estaban cometiendo en las respuestas de grupo.
- Como grupo tan sólo han acertado dos de seis cuestiones. Quien más ha provocado esta situación, ha sido un miembro del grupo, quien ha ejercido como líder del grupo y, aún teniendo equivocadas sus respuestas, ha sido capaz de convencer al resto de sus compañeros.

(√ indica respuesta correcta)

Cuestión/grupo	OQ1	OQ2	OQ3	OQ4	OQ5	OQ6
Grupo O1	√	√	√	√	√	√
Grupo O2	√				√	

Tabla 5-3. Respuestas correctas de los grupos de la modalidad de ocio

Por último mostramos en la tabla 5-4, el resumen de las respuestas correctas de cada uno de los grupos, según cada modalidad. Esta tabla muestra de forma global las cuestiones que han sido más acertadas por los grupos. En la siguiente sección, se exponen con más detalle estos resultados, comparándolos con los obtenidos en la fase individual.

Cuestión/grupo	_Q1	_Q2	_Q3	_Q4	_Q5	_Q6
Grupo C1	√		√			√
Grupo C2	√	√	√	√	√	
Grupo D1	√	√	√	√	√	√
Grupo D2			√	√	√	√
Grupo O1	√	√	√	√	√	√
Grupo O2	√				√	

Tabla 5-4. Respuestas correctas de cada grupo por modalidades

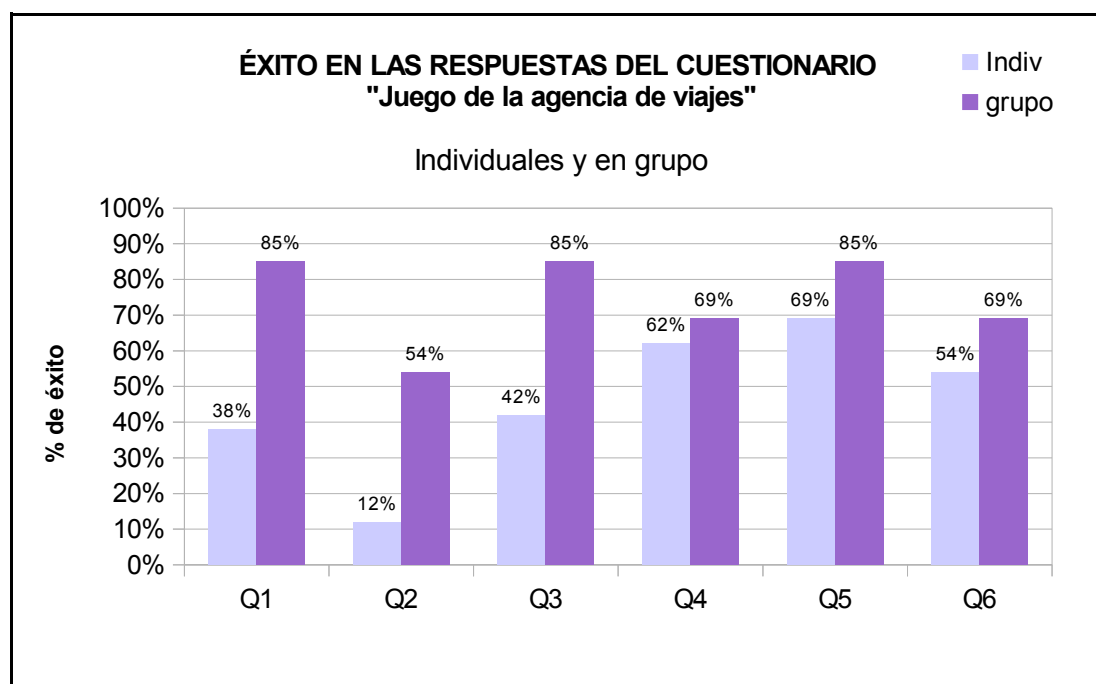
5.1.3. Comparación de los resultados de la fase individual y en grupo (fase I y II)

En el análisis a priori de esta lección (capítulo 4) se hace referencia al cambio que va sufriendo el medio sobre el que se trabaja según cada tipo de situación, marcada por cada una de las distintas fases de la lección.

Según va cambiando el medio, se va objetivando la formulación y la validación del conocimiento matemático en juego. Ésto también se puede observar a partir de la corrección de las actividades basándonos en la evolución que tienen las respuestas de los alumnos: en primera instancia son individuales, luego pasan a ser de grupo y finalmente las respuestas definitivas son las que se obtienen tras la corrección con el grupo-clase con intervención del profesor.

En la gráfica 5-5 podemos comparar los porcentajes medios de éxito en las respuestas individuales de los alumnos a las seis actividades del juego, con los del porcentaje medio de todos grupos que han realizado las mismas actividades, según cada modalidad del viaje.

Se puede observar en todas las cuestiones que las respuestas dadas por el grupo mejoran respecto de las respuestas individuales de los alumnos. Cuando el alumnado trabaja en pequeño grupo, utilizan como medio de debate y validación sus repuestas individuales; deben compararlas entre sí e intentar llegar a consenso en el caso de no coincidir en sus repuestas, en la fase II. Se inicia pues, un primer debate entre ellos y a su vez se crea una situación de comunicación y validación adidáctica para llegar a las respuestas de grupo de cada una de las cuestiones.



Gráfica 5-5: Comparación de porcentajes de respuestas correctas individuales y de grupo

Estos datos muestran cómo esta nueva situación hace mejorar los resultados de la situación inicial, también adidáctica. En la primera fase (individual) el medio sobre el que trabajan los alumnos está formado por la tabla T y la plantilla individual con las seis preguntas (idénticas a las de la fase en grupo), en cambio en esta segunda fase (pequeño grupo) el medio del que disponen los alumnos lo componen las propias respuestas de los alumnos que han contestado individualmente en la fase anterior. La objetivación del trabajo en grupo hace que vaya perdiendo peso la componente subjetiva de las respuestas individuales. Es decir, va desapareciendo el razonamiento espontáneo de cada alumno para ir adoptando razonamientos de grupo en donde la validación depende del sentido de la actividad y no de la interpretación individual. Esta conclusión se puede ver reflejada en los resultados obtenidos en la segunda fase, que han mejorado sensiblemente los resultados individuales, tal y como se indica en la gráfica 5-5.

Señalar que a continuación los alumnos inician la **fase III**, en la que los grupos homólogos se intercambian la plantilla de grupo que tienen por duplicado y que se ha encargado de rellenar el representante de cada grupo, copiando las respuestas que han consensuado como grupo. La finalidad de esta fase es que se comparen las respuestas que han dado como grupos homólogos y se dan una puntuación siguiendo las normas

del juego, tal y como les ha indicado el profesor en la consigna correspondiente. Los alumnos no pueden validar a nivel oficial dichas respuestas, tan sólo utilizan como medio las respuestas que tienen como grupo y a partir de ellas las comparan con las de sus compañeros de grupo homólogo. Tienen que esperar a la fase siguiente de la corrección colectiva, para saber si dicha corrección es válida o no, a nivel oficial.

Una vez han comparado y puntuado las plantillas de los compañeros, devuelven las mismas al profesor y pasan a la siguiente fase, que detallamos a continuación.

5.1.4. Fase IV: corrección de las cuestiones con el grupo-clase

En esta fase los alumnos representantes de cada grupo son los encargados de corregir las cuestiones con la intervención del profesor. El resto de compañeros también pueden intervenir si lo consideran oportuno.

Se dispone de la proyección de la tabla T para toda la clase, de manera que el alumnado puede corregir las cuestiones utilizando la tabla de forma “pública” y además pudiendo escribir sobre ella. Asimismo en la clase se dispone de otra pizarra en la que está preparada una tabla con todas las cuestiones de cada modalidad, en la que los alumnos representantes de cada grupo tiene que escribir la respuesta de grupo que han acordado en la fase II.

Esta fase se desarrolla fundamentalmente con la intervención del profesor, por tanto en la mayoría de los “momentos” están en situación didáctica: el profesor gestiona la corrección de las cuestiones, aunque el objetivo es que sean los alumnos los que especifiquen la estrategia que han utilizado para responder a la cuestión, de manera que los alumnos corrijan y no tenga que ser el profesor quien de la respuesta correcta, ni tampoco que adelante la estrategia óptima para responder correctamente a cada cuestión. El objetivo es lograr la devolución de la validación de las respuestas a los alumnos.

Vamos a analizar con más detalle la corrección con el grupo-clase de cada una de las preguntas, teniendo en cuenta la operación matemática que se exige (previamente analizada a priori) y el desarrollo que ha conllevado cada una de ellas (a partir del visionado de la grabación de la corrección). Retomamos cada cuestión y el trabajo lógico y conjuntista que suponen antes de mostrar el desarrollo de la corrección.

PRIMERA CUESTIÓN

CQ1: ¿A qué jóvenes les gusta ir a Francia a aprender francés y a Italia a visitar museos?

DQ1: ¿A qué jóvenes les gusta la montaña y las competiciones deportivas?

OQ1: ¿A qué jóvenes les gusta jugar a cartas y bañarse?

- operación lógica “**conjunción de dos criterios**”
- operación conjuntista “búsqueda del **conjunto intersección** de los conjuntos de los sujetos de la tabla que cumplan los dos criterios en juego”
- posibles estrategias de respuesta: **buscar y enumerar los jóvenes con coincidencias positivas (copresencias 1-1); buscar por extensión cada conjunto de sujetos y hacer su intersección**

Desarrollo:

El alumnado en general manifiesta tener la estrategia clara, lo que parece coherente con los resultados obtenidos en el trabajo en grupo de la fase II, con un 85% de respuesta correcta en esta cuestión (gráfica 5-5).

Inicia la corrección uno de los grupos, usando la tabla proyectada sobre la pizarra. Este soporte les resulta muy útil ya que pueden objetivar la respuesta directamente sobre la tabla visible para todo el alumnado. El grupo que inicia la corrección da la respuesta correcta y es confirmada por el resto de los grupos.

SEGUNDA CUESTIÓN

CQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta pernoctar en un castillo, ni hacer visitas con guía?

DQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta ir en bici, ni las competiciones deportivas?

OQ2: ¿A cuántos jóvenes no les gusta bañarse, ni los cruceros por el Caribe?

- operación lógica “**conjunción de la negación de dos criterios**”
- operación conjuntista “búsqueda del **conjunto intersección** de los **conjuntos complementarios** de los sujetos de la tabla que cumplan los dos criterios en juego”
- posibles estrategias de respuesta: **contar los jóvenes con coincidencias negativas (coausencia 0-0); contabilizar el cardinal del conjunto** de los sujetos de la tabla que cumplan la **intersección** de la negación de dos criterios

Desarrollo:

En la corrección de esta cuestión se ha seguido el mismo procedimiento que en la anterior. Inicia la corrección otro de los grupos y el resto la confirma de forma general. Aunque en este caso, las estrategias que usan los alumnos son distintas según la modalidad del cuestionario:

- Por una parte uno de los grupos (modalidad D) se ha basado para dar su respuesta en la universalidad de respuesta positiva de una de las filas de la tabla. Explican que como “ir en bici” les gusta a todos los jóvenes, no puede haber ningún joven de la tabla T, a quien “no les guste ni una actividad ni otra, a la vez”.
- Los del otro grupo, también de la modalidad D, se basan en que no han encontrado ningún joven a quien no les guste ni una actividad ni la otra a la vez; puesto que sólo hay un joven que “no le gusta pernoctar en un castillo” y a éste sí que le “gusta hacer visitas con guía”. No coinciden con C1.
- El resto de grupos confirman su respuesta correcta, y los que en un principio se habían equivocado en su respuesta de grupo, lo han modificado tras las explicaciones de sus compañeros en la tabla proyectada en la pizarra.

Esta cuestión también había sido mejorada en su respuesta a través del trabajo en grupo, pasando de un 12% de éxito en la fase individual a un 54% en la fase II, tal y como se puede observar en la tabla 5-5.

De nuevo el soporte de la tabla T, ayuda a confirmar de forma global la respuesta correcta a esta cuestión. Quienes lo habían contestado bien lo han podido explicar y confirmar sobre ella y quienes lo tenían incorrecto han tenido la oportunidad de plasmar su error usando la tabla para indicarlo. Los gestos ostensivos realizados sobre la tabla que acompañan al razonamiento verbal, están permitiendo la validación de las respuestas. Es decir, la tabla facilita los ostensivos verbales, gestuales y escritos (la tabla de verdad) del razonamiento lógico, permitiendo corregir los errores cometidos.

TERCERA CUESTIÓN

CQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta ir a un museo, ni hacer visitas con guía?

DQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta jugar a tenis, ni las marchas por la montaña?

OQ3: ¿A qué jóvenes no les gusta jugar a cartas, ni las competiciones deportivas?

- operación lógica “**conjunción de la negación de dos criterios**”
- operación conjuntista “búsqueda del **conjunto intersección** de los **conjuntos complementarios** de los sujetos de la tabla que cumplan los dos criterios en juego”
- posibles estrategias de respuesta: **buscar y enumerar los jóvenes con coincidencias negativas (coausencia 0-0); dar por extensión el conjunto** de los sujetos de la tabla que cumplan la **intersección** de la negación de dos criterios

Desarrollo:

La estrategia de respuesta de esta cuestión es la misma que en la segunda, aunque en esta ocasión la cuestión pregunta “a qué jóvenes...” y en la pregunta anterior “a cuántos jóvenes...”.

El representante de uno de los grupos de la modalidad O, inicia la corrección usando la tabla proyectada e indicando sobre ella directamente las coausencias (0-0) de las actividades que intervienen en su cuestión. El resto de grupos coinciden en la respuesta correcta y entre todos confirman esta estrategia.

La inmediatez en la corrección de esta cuestión puede ser debido a que se trata de la misma estrategia que en la segunda cuestión, aunque en este caso deben enumerar los jóvenes que cumplen la condición exigida en la pregunta. Los grupos no manifiestan dificultad en la corrección de esta pregunta.

Estas dificultades se habían superado, parcialmente, en la fase de trabajo en pequeño grupo, ya que el éxito en esta fase es de un 85% (gráfica 5-5), mejorando dicho resultado con respecto al obtenido en la fase inicial, con un porcentaje medio de éxito de un 42% (gráfica 5-5).

CUARTA CUESTIÓN

CQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a un museo, les gusta ir a Italia a visitar museos?

DQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir en bici, les gusta jugar a tenis?

OQ4: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a cartas, les gusta pernoctar en un castillo?

- operación lógica: **“condicional entre predicados con cuantificador universal”**
- estrategia de respuesta: **comprobar si los jóvenes que han respondido positivamente a la primera actividad indicada, también lo han hecho a la segunda actividad indicada, pero siguiendo el orden en las que están las actividades del viaje**

Desarrollo:

En esta cuestión manifiestan claramente dificultades en la estrategia, ya que la mayoría de los grupos se basan -en un principio- en buscar la coincidencia positiva en la respuesta de los jóvenes. Expresan explícitamente que deben buscar las coincidencias entre los jóvenes que han elegido las dos actividades que indica la cuestión (buscan la copresencias).

El alumno representante que inicia la corrección sobre la tabla T, empieza buscando algún joven de la tabla T, que tenga alguna diferencia entre las dos actividades que indica la cuestión. Usa esta estrategia con el objetivo de usar dicho joven como contraejemplo para responder “NO” a la cuestión. Algunos compañeros apoyan esta respuesta. Ésto muestra claramente que dichos alumnos no entienden la “condicional”, puesto que no dan prioridad al orden en la elección de las actividades propuestas en la cuestión. En este caso, están confundiendo la “condicional” con la “conjunción”. Según Wermus (1976) ésto es uno de los aspectos del razonamiento natural, ya que cuando ambas proposiciones son ciertas se confunden las operaciones lógicas conjunción, disyunción y condicional. Es decir, al ser ambas proposiciones ciertas, la tabla de verdad de estas tres operaciones lógicas son ciertas y por tanto es más difícil para el alumno diferenciar dichas operaciones cuando se dan estas condiciones.

Con la intervención de otro compañero se aclara la respuesta correcta a la cuestión, puesto que éste pone de manifiesto que no se trata de buscar coincidencias, ya que a los jóvenes que no les gusta la primera actividad "les resulta indiferente para contestar", deben buscar -aclara- los jóvenes que les gusta la primera actividad y luego comprobar que les gusta también la segunda actividad que está en la pregunta, con el orden indicado. Es decir, señala la diferencia entre la condicional y la conjunción, aunque no utiliza estos términos de forma específica. Está construyendo el criterio de verdad de la condicional a través de la tabla de verdad correspondiente.

También es interesante la estrategia utilizada por otro de los grupos (modalidad D), ya que se basan de nuevo en que “a todos les gusta ir en bici” y en cambio hay algunos que “no les gusta jugar a tenis”. Por lo tanto, a todos los que les gusta “ir en bici” no les puede gustar “jugar a tenis” (porque se encontrarían con 1 y luego 0). El otro grupo de misma modalidad, lo expresan literalmente: *“Hemos pensado que para que a todos los que les gusta ir en bici les guste jugar a tenis, a todos les tiene que gustar jugar a tenis, pero a todos no les gusta jugar a tenis...”* y a continuación han indicado sobre la tabla los jóvenes concretos que no les gusta “jugar a tenis (se apoyan de nuevo en la actividad o criterio de la tabla que tiene de forma universal toda la fila con 1).

Al final de la corrección, el representante de uno de los grupos de la modalidad O, cierra la respuesta correcta, explicando que primero (establece un orden) elige los que sí les gusta la primera actividad (en este caso, “jugar a las cartas”) y luego busca si a estos mismos jóvenes les gusta la otra actividad. Confirman la respuesta y la estrategia de forma “pública”, usando de nuevo la explicitación sobre la tabla T proyectada para todos.

La respuesta correcta a esta cuestión sólo mejora ligeramente trabajando en pequeño grupo de la fase II, con respecto a la fase de trabajo individual. Como podemos ver en la gráfica 5-5, dicho éxito aumenta de un 62% a un 69%.

QUINTA CUESTIÓN.

CQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta ir a Italia a visitar museos, les gusta ir a un museo?

DQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta jugar a tenis, les gusta ir en bici?

OQ5: ¿A todos los jóvenes que les gusta pernoctar en un castillo, les gusta jugar a cartas?

- operación lógica: **“condicional entre predicados con cuantificador universal”**
- estrategia de respuesta: **comprobar si los jóvenes que han respondido positivamente a la primera actividad indicada, también lo han hecho a la segunda actividad indicada, pero siguiendo el orden en las que están las actividades del viaje**

Nota: Esta pregunta es justo la inversa de la cuestión anterior (la condicional formulada invirtiendo los criterios utilizados en la cuarta cuestión)

Desarrollo:

Empiezan la corrección los grupos de la modalidad D, eligiendo los jóvenes que les gusta la primera actividad (“jugar a tenis”) y ven que a los mismos jóvenes les gusta “ir en bici” (que en realidad les gusta a todos, se refuerzan con esto cuando lo explican).

Los alumnos de la modalidad C, eligen primero los que han dicho sí “ir a Italia a visitar un museo” y luego comprobar si también les gusta “ir a un museo”, remarcando que es importante el orden de las actividades que formula la cuestión. El profesor refuerza esta estrategia y pasa a los grupos de la otra modalidad que también lo resuelven correctamente.

La estrategia correcta parece quedar clara para todo el alumnado y los razonamientos usados en la cuestión anterior ha ayudado en la corrección de ésta; pero reconociendo que nos se trata de la misma pregunta aunque intervengan los mismos criterios. No es una operación en la que se puedan conmutar el antecedente y el consecuente.

En la gráfica 5-5 también se puede observar la mejoría en la respuesta correcta de la fase individual, con un 69%, a un 85% en la fase II, de trabajo en pequeño grupo.

SEXTA CUESTIÓN.

CQ6: No es cierto que al joven M le guste ir a Francia a aprender francés. ¿Verdadero o falso?.

DQ6: “No es cierto que al joven M le guste ir a la montaña”. ¿Verdadero o falso?.

OQ6: “No es cierto que al joven R le guste jugar a cartas”. ¿Verdadero o falso?.

- operación lógica. **“atribución del valor “cierto” a un enunciado que está formulado con una negación”**
- estrategia de respuesta: **comprobar si un joven concreto ha contestado 0 a una actividad concreta, ya que son verdaderas todas las respuestas**

Desarrollo:

Uno de los alumnos empieza explicando que la pregunta es verdadera porque la cuestión es una afirmación que expresa un enunciado verdadero basándose en la tabla (atribución de verdad en una afirmación que empieza diciendo "No es cierto que....")

Algunos de los alumnos manifiestan que tienen duda en la formulación de esta cuestión, porque la forma de preguntarlo hace que les lleve a confusión. Entonces otra compañera hace la puntualización de que es sinónimo decir "No es cierto que..." y "Es falso que...". Como ven que el joven al que hace referencia la cuestión no le gusta actividad menciona, entonces confirman que dicha afirmación "es verdadera".

Los alumnos de otra modalidad expresan concretamente "*Al joven M no le gusta ir a la montaña -según la tabla-, y la oración -que está formulada en la pregunta- dice que no le gusta. Por lo tanto es verdadero*". El profesor pregunta al resto de compañeros, éstos están totalmente de acuerdo y señalándolo sobre la tabla se confirma el razonamiento.

Comentar que la respuesta de esta cuestión también había mejorado en la fase de trabajo en pequeño grupo, con respecto a la fase individual, ya que pasa del 54% de éxito en la fase I al 69% de éxito en la respuesta correcta en la fase II (gráfica 5-5).

5.1.5. Evaluación de la situación de aprendizaje

Para evaluar la situación hemos valorado principalmente el funcionamiento del conocimiento lógico en juego y su aprendizaje adidáctico, todo ello analizado detalladamente en las secciones anteriores. En esta sección vamos a valorar también la experimentación y observación desde el punto de vista técnico y organizativo del desarrollo de la situación: la información recogida en la crónica y por los observadores, el diseño de la ficha didáctica y la opinión a posteriori de algunos de los alumnos, de los observadores que han colaborado en la situación y del profesor que ha gestionado la sesión completa de dicha situación.

Parte técnica de la experimentación: organización física de la clase y filmación

En este aspecto podemos decir que la colaboración de la persona encargada de la parte de filmación o grabación de la sesión ha sido muy importante y de gran ayuda, porque

por un lado ha realizado una grabación en plano general -con una cámara fija- y por otro -con otra cámara- ha ido filmando los distintos grupos de la fase II.

A partir de la grabación móvil hemos podido tener información sobre los razonamientos realizados por los alumnos cuando han trabajado en pequeño grupo. Con la grabación fija hemos obtenido un visionado general de cómo han trabajado individualmente y toda la información correspondiente a la corrección con todo el grupo-clase.

En cuanto a la organización del aula y de los materiales necesarios para desarrollar la situación, también han tenido una evaluación positiva. Por una parte, hemos tenido la posibilidad de tener dos pizarras, sobre una se ha proyectado la tabla T para la parte de la corrección de las preguntas, pudiendo escribir sobre ella. Y en la otra los alumnos representantes de cada grupo han podido escribir las respuestas de grupo, para que el resto de los compañeros pudiera ver de forma pública las respuestas a cada pregunta.

La organización de la clase ya estaba en disposición de grupos de trabajo, de manera que para iniciar la situación, los alumnos ya estaban distribuidos en los grupos correspondientes. Ésto ha permitido agilidad para poder iniciar la sesión de trabajo.

Las plantillas de trabajo, tanto individuales como de grupo, para que los alumnos pudieran realizar sus actividades estaban preparadas en el aula para que el profesor las repartiera a los alumnos en la fase correspondiente.

Colaboración del profesorado y de los investigadores-observadores en la experimentación y observación de la lección

En cuanto a la colaboración del centro “Grans i menuts”, de Castellón, para realizar la experimentación ha sido muy positiva, ya que el equipo docente ha colaborado y contribuido al éxito de la misma. Un ejemplo, la clase del grupo de 1º de ESO anterior a la sesión de la situación, se ha realizado en otro espacio para que tuviéramos el aula disponible para organizar los grupos, colocar las cámaras, preparar la pizarra adicional (en la que los alumnos debían copiar las respuestas de grupo), distribuir en el espacio del aula a los observadores y al profesor encargado de la crónica y preparar el material necesario para facilitar su accesibilidad al profesor.

La elección del profesor para realizar la experimentación de esta situación no ha sido aleatoria. Hemos tenido en cuenta varios aspectos: ser profesor de Matemáticas sin un vínculo directo con esta investigación, no ser desconocido para los alumnos, siendo el profesor colaborador el maestro de Matemáticas del último ciclo de primaria de este mismo grupo de alumnos y tener disponibilidad para poder preparar y desarrollar la lección con los alumnos. Queremos destacar que el profesor nos ha facilitado mucho el trabajo de la experimentación, dedicando su tiempo voluntariamente y colaborando en todo momento con los investigadores, prestándose a la realización de una lección que él no había preparado y siguiendo en el desarrollo de la misma la ficha didáctica propuesta por los investigadores.

Asimismo, tal y como hemos explicado, en esta experimentación han colaborado tres profesores, externos al centro, para realizar la observación didáctica del trabajo de los grupos y de la clase en general. Las tres personas que han realizado la observación (dedicadas también a la investigación y una de ellas a la enseñanza secundaria) se han distribuido cada dos grupos de trabajo. Es decir, cada una ha tenido adjudicados dos grupos de la misma modalidad del viaje. La finalidad de la observación ha sido anotar y detallar: el tipo de lenguaje utilizado por los alumnos y la forma de razonar sus argumentos, la utilización de la tabla T para argumentar sus respuestas, la participación de los componentes de cada grupo, la distribución de los roles que adoptan los alumnos en su grupo, la influencia del líder -si aparece este role- sobre el grupo (también pueden haber varios), la forma de llegar a acuerdos entre ellos (por consenso, por liderazgo, por votación...), etc.

Otro profesor del centro ha realizado la crónica del desarrollo de la sesión de trabajo. Los datos de la crónica han consistido básicamente en detallar: los tiempos, las intervenciones y comportamientos generales de los alumnos, el seguimiento de las consignas dadas por el profesor, las intervenciones didácticas del profesor, la valoración de los medios técnicos y la distribución del espacio, etc.

Tanto las anotaciones realizadas por los observadores, como la crónica general, nos han proporcionado las informaciones y los datos que hemos presentado, permitiendo que el centro “Grans i menuts” nos haya servido como centro de observación para nuestra investigación en DM

Diseño y aplicación de la ficha didáctica

Tras el desarrollo de la experimentación de esta situación de aprendizaje podemos valorar la elaboración de la ficha didáctica en la que se reflejan los objetivos generales del juego, el material necesario para el alumno y el profesor, la disposición de los alumnos en el aula, la temporalización, las consignas que debe utilizar el profesor para dirigirse a los alumnos y del desarrollo de cada “fase” o etapa que sigue a la consigna correspondiente.

En general, se ha conseguido la consecución de los **objetivos** planteados en esta situación, tanto los generales como los concretos de cada fase. Tal y como se pueden ver en la ficha didáctica (en el capítulo 4) son los siguientes:

- relacionar este juego con el cuestionario que contestaron en una sesión de clase (devolución del juego) - de este mismo curso académico- ayudándose de la misma tabla y como tema común la Agencia de viajes (global)
- utilizar una tabla de valores booleanos para trabajar las operaciones lógicas: conjunción, disyunción, negación y condicional, sin haber estudiado de forma específica estos contenidos lógico-matemáticos (global)
- trabajar a nivel de acción las operaciones lógicas de negación, disyunción, conjunción y condicional.(fase I)
- iniciación a la validación, mediante la formulación, la comunicación y la confrontación de las respuestas individuales; búsqueda de consenso en las respuestas y en las justificaciones de las acciones (estrategias utilizadas ...) (fase II)
- continuación de la validación de las operaciones lógicas comparando las respuestas entre grupos homólogos (los grupos que comparten la misma letra) (fase III)
- devolución de la validación de la actividad lógica de los cuestionarios al grupo-clase en situación didáctica (fase IV)

En el análisis de las observaciones de las distintas fases del juego, se ha plasmado el alcance de estos objetivos.

El material para el profesor y el alumnado ha sido el adecuado para poder llevarla a cabo.

La distribución de los alumnos, también ha sido adecuada, ya que su disposición en grupo de trabajo agiliza el desarrollo de la lección. En la primera fase en la que han resuelto las actividades de forma individual, no ha supuesto ningún inconveniente estar agrupados desde el principio. De esta manera ya estaban en equipo para pasar a las siguientes fases. Los grupos estaban organizados antes de empezar la actividad, repartiendo los alumnos de forma equitativa a partir del asesoramiento de la tutora del grupo (igual número de chicos que de chicas -excepto en dos grupos de cinco-, grupos heterogéneos en cuanto a nivel académico y de liderazgo).

En cuanto a la temporalización de la sesión, no ha sido la adecuada, ya que las fases I y II se han seguido aproximadamente según el tiempo indicado. Pero en las últimas fases, III y IV -comparación de resultados y corrección colectiva de las actividades-, no se ha podido respetar el tiempo establecido. De hecho, en un principio se programa la situación con una duración de 1 hora, en cambio, ésta se ha desarrollado en 1h y 39 minutos. La razón ha sido que por una parte en la fase de la comparación de las respuestas entre los grupos de igual modalidad, los alumnos han invertido un poco más de tiempo y por otro lado, la corrección de las preguntas se ha extendido mucho más de lo que estaba previsto. El hecho de haber tres modalidades distintas ha producido que se corrigiera con más detalle (teniendo en cuenta que según la modalidad, las actividades de los viajes cambian) y el tiempo estimado no ha sido el correcto. Se tendrá en cuenta mejorar este aspecto y modificarlo para las próximas aplicaciones. No obstante, para la investigación ha sido muy enriquecedora toda la variedad de valores que se han podido dar a las variables didácticas, aportando una gran cantidad de información en la observación realizada.

El profesor ha seguido las consignas y el desarrollo de cada fase, tal y como está programado en la ficha didáctica. En la entrevista realizada con él, ha señalado que con estas consignas y la indicaciones de cada fase, ha tenido suficiente información, teniendo en cuenta la reunión previa que tuvimos de preparación en la que pudo aclarar las dudas que le surgían en el momento²⁸.

28 Más detallado en la parte de entrevistas.

Aportaciones didácticas de los colaboradores y alumnos

Es importante tener en cuenta las sugerencias de las personas que han colaborado en esta experimentación (independientemente del papel que han asumido en la misma), para mejorar la ficha didáctica y el desarrollo de esta situación. En este caso, son las siguientes:

- en cuanto a la nomenclatura utilizada para asignar a los grupos y a las preguntas según cada modalidad del viaje (C -cultural- , D -deportivo- y O -de ocio-), se sugiere cambiarla por otra más “natural” o “habitual” para que al profesor le resulte más fácil dirigirse a los grupos. Por ejemplo, es más sencillo nombrar a los grupos por orden alfabético A, B, C..... que por la inicial de una temática (tiene que asociar grupo con temática cada vez que se refiera al mismo),
- en la ficha didáctica se prepara el material para la fase II-III conjuntamente, esto ha conllevado confusión entre los alumnos, porque el hecho de anticipar material para otra fase, que no es la inmediata, provoca dudas y se pierde tiempo con las aclaraciones (que en realidad se pueden evitar),
- también se sugiere que en la primera consigna se debería clarificar a los alumnos que sobre la tabla T pueden hacer las indicaciones que crean oportunas para realizar el trabajo que se les plantea. La mayoría de los alumnos han hecho marcas sobre ella, pero los observadores de los grupos se dieron cuenta que algunos alumnos no lo hacían porque tenían duda al respecto. Es mejor aclararlo desde el principio e interesante observar el tipo de indicaciones que los alumnos hacen sobre la tabla (puede dar información sobre cómo trabajan algunas estrategias de búsqueda en la tabla de valores).

En cuanto al alumnado, se les ha pedido opinión tras la experimentación. A la mayoría les ha gustado la forma de plantear la actividad y sobre todo les ha sorprendido el “montaje” técnico y de personal, que se ha preparado para la sesión (no es habitual este tipo de preparación para una sesión de clase...). Aunque la mayoría de ellos sugieren que este juego se debería realizar en dos sesiones de clase distintas (normalmente sus sesiones son de 45' o 50').

En las entrevistas individuales, algunos alumnos han confesado que las clases de Matemáticas no les gustan mucho, porque tienen dificultades en la asignatura. En cambio en esta actividad han participado con más agrado, porque aunque algunas

preguntas no las habían contestado bien individualmente -no se aclaraban mucho-, les ha parecido más divertido por tratarse de una actividad distinta. Una alumna concretamente, afirma *“no me gustan las mates, porque no voy bien, pero en esta clase me he divertido haciendo Matemáticas: ¡creo que es la primera vez!...”*

Entrevistas al profesor que ha realizado la experimentación

Tras la experimentación hemos hecho una pequeña entrevista al profesor que la ha llevado a cabo. En ella ha manifestado su opinión en torno a las siguientes preguntas:

- ¿En la reunión previa para preparar la experimentación, te facilitamos la información necesaria para llevar a cabo esta situación de aprendizaje? ¿Se resolvieron las dudas que tenías al respecto?

“Tuve la información que necesitaba para llevar a cabo la lección planteada y las dudas se fueron aclarando a lo largo de la dicha reunión. Además se me explicó el contexto en el que se realiza esta experimentación y la colaboración que esperabais por mi parte”

- ¿Has necesitado una preparación previa en conocimientos específicos con respecto a los contenidos que se trabajan en esta situación de aprendizaje? ¿La ficha didáctica te ha servido para llevar a cabo la misma?

“En un principio no. A partir de las indicaciones y explicaciones de la ficha didáctica he tenido bastante información para preparármela y aplicarla”

- ¿Qué crees que los alumnos han podido aprender con este tipo de actividad?

“Pienso que esta situación didáctica de 1º ESO es de interés para el aprendizaje del alumnado, complementa su nivel curricular, favorece el fortalecimiento de las relaciones del alumnado y aumenta la autoestima de cada uno de los participantes.

El complemento a su nivel curricular viene determinado por todos los contenidos relacionados con el tratamiento de la información al verse obligados a ordenar la información necesaria estableciendo una priorización de los datos necesarios para la obtención de conclusiones.

Se complementa también por la necesidad de la orientación en el espacio visual en la búsqueda y obtención de datos.

El trabajo con las tablas también ofrece al alumnado la oportunidad de usar otra forma de lectura diferente a la tradicional y abona el campo para las estrategias de lectura rápida y de lectura selectiva.

El trabajo en equipo fortalece las relaciones entre el alumnado, pues se establecieron relaciones de reciprocidad entre los miembros del mismo grupo y los de su grupo simétrico. Así mismo el trabajo en equipo del profesorado revaloriza el trabajo en equipo y las propias relaciones por una cuestión de mimetismo.

La autoestima de los participantes se ve favorecida por el hecho de que cada uno cuenta, cada uno aporta y todos se enriquecen de lo aportado por uno mismo con lo cual todos el mundo se siente útil en este trabajo. Favorece también la autoestima de los líderes de cada grupo al poner en valor su capacidad de gestionar, dialogar y ser protagonistas de una actividad que trasciende de su propio curso a un trabajo de la universidad”

- ¿Qué te ha aportado a tí, personalmente, realizar esta experimentación?

“Mucha satisfacción, primero por la confianza que habéis depositado en mí y por otra parte porque he podido participar en un proyecto de investigación sobre la enseñanza de las Matemáticas, que en realidad es lo que me apasiona y me motiva para mejorar en mi trabajo del día a día con los alumnos...”

Conclusiones de la experimentación del “Juego de la agencia de viajes”

Las conclusiones las hemos agrupado entorno a dos aspectos: respecto al carácter fundamental de la situación para el aprendizaje de los conceptos lógicos y la gestión del razonamiento natural (las tres primeras conclusiones) y respecto a la experimentación (las tres últimas conclusiones).

- Tras la observación de la corrección colectiva de todas las actividades propuestas, se ha podido constatar el papel fundamental que ha jugado en cada momento la tabla T, proyectada para todos los alumnos. Asimismo ha proporcionado los ostensivos necesarios para materializar los razonamientos ligados a las operaciones lógicas de las actividades del juego. A lo largo de toda la fase de corrección, tanto el alumnado, como el profesor, se han apoyado en la tabla -visible para todos- a la hora de dar razonamientos o argumentos que permitían explicar la respuesta a la pregunta. El hecho que los datos de la tabla son objetivos y las respuestas de los jóvenes se materializan con “0” y “1” (NO y SÍ, respectivamente) ha favorecido el proceso de las aclaraciones -cuando se han manifestado dudas- y de la explicitación de los argumentos.
- La tabla ha actuado, en nuestra investigación, como un instrumento con carácter fenomenotécnico, tal y como ya mostró Orús (1986b y 1992). Este instrumento didáctico ha permitido emerger los distintos tipos de razonamiento del alumnado: el natural o espontáneo y el lógico. Al profesor también le ha servido como un elemento de negociación didáctica de dichos razonamientos, puesto que a lo largo de toda la corrección el profesor se ha apoyado en los datos de la tabla T, para explicar, validar o formular los razonamientos correspondientes a la corrección de cada actividad.

En los momentos en los que los alumnos han presentado dudas o “han discutido” las respuestas, el medio que ha permitido las aclaraciones al respecto ha sido la tabla T, junto a la validación final del grupo-clase. Sobre ella se han comprobado las soluciones de las preguntas (que han aportado algunos de los alumnos) de tal manera que los alumnos han podido identificar la/s estrategia/s “óptima/s” que permiten dar la respuesta correcta a dichas preguntas.

- Aunque no podemos inferir que todos y cada uno de los alumnos haya “aprendido” la estrategia óptima para responder correctamente a cada cuestión, sí hemos podido mostrar que quienes a nivel de acción habían dado las respuestas correctas, han podido validar sus respuestas mediante una confirmación “pública” que les permite “apropiarse” de este conocimiento matemático. Y los que no habían respondido correctamente, han podido comprender su error y ver su respuesta correcta.
- La elección del profesor ha sido pertinente, tanto por su interés e implicación en la tarea encomendada, como por la motivación que ha mostrado con respecto a nuestra investigación.
- La aplicación del juego ha sido, en general, satisfactoria para el alumnado, por tratarse de una actividad distinta a las realizadas en clase de Matemáticas y por el desarrollo de la situación en formato de “juego”. Además el hecho de estar relacionada con el cuestionario Q, que realizaron en el primer trimestre, ha sido motivador para ellos, puesto que ya conocían la temática del juego y la tabla de datos no ha sido un instrumento “desconocido” para el alumnado.
- La función de los observadores externos en la clase ha sido muy válida para recoger información que está directamente relacionada con aspectos didácticos “un poco más específicos” de lo que se puede observar de forma más genérica. Y la aportación de la filmación también es muy importante, puesto que genera información directa de la experimentación, con la riqueza de poder analizarla en cualquier momento.

5.2. Análisis de la observación de “Juegos de clasificación”

En la experimentación y observación de esta segunda lección han participado 27 alumnos del mismo grupo de 1º de ESO, del centro “Grans i menuts” de Castellón, con los que también se ha realizado la observación de la situación del “Juego de la Agencia de Viajes”.

Para responder a los tres juegos que componen esta situación, deben utilizar la misma tabla de datos del cuestionario Q (del primer trimestre) y de la anterior situación sobre el juego de viajes; por lo tanto se sigue utilizando el mismo medio de trabajo, la tabla T, con la que el alumnado ya está más familiarizado.

“Juegos de clasificación” son tres juegos que se les propone al alumnado para que los resuelvan en casa y en la siguiente clase de Matemáticas podrán contrastar los resultados obtenidos. Los dos primeros juegos pueden resolverlos directamente mediante el uso de la tabla T y el tercer juego deben completar un diagrama de árbol, usando también la tabla. En este árbol se exponen todas las posibilidades de combinar con cuatro criterios de la tabla de valores, que corresponden concretamente a cuatro actividades que se pueden realizar en el viaje que se les propone a los jóvenes desde la agencia de viajes y que les pueden gustar o no.

5.2.1. Análisis del desarrollo de cada juego de la situación y conocimientos enseñados

A continuación se detalla el desarrollo de la observación de esta situación, que consiste fundamentalmente en la corrección de los tres juegos que la componen. Cabe señalar que no todo el alumnado participa con la misma implicación; de hecho en la corrección global, destaca la participación activa de siete alumnos y otro subgrupo de nueve alumnos interviene de forma intermitente e inducidos por la intervención del docente mediante preguntas relacionadas con cada uno de los juegos. El resto del alumnado (once alumnos) manifiestan que no han entendido bien qué se les pide en estas actividades y no han sabido qué contestar inicialmente, dejando las actividades en blanco. No obstante, algunos de ellos han colaborado en el desarrollo de la situación y han ido siguiendo el proceso de corrección.

JUEGO 1.

“Si la agencia de viajes ofertara las actividades C_4, C_5, C_{10} y C_{14} y pusiera como condición haber dicho sí a todas ellas, ¿qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían?”

- operación lógica: **“conjunción de los criterios C_4, C_5, C_{10} y C_{14} ”**
- estrategia: **“buscar los jóvenes que tengan a la vez un “1” en las filas C_4, C_5, C_{10} y C_{14} ”**
- respuesta correcta: **14 jóvenes = $\text{card} \{ A, B, C, D, E, F, J, K, M, N, P, S, V \text{ y } Z \}$**

El profesor procede a corregir el primer juego, preguntando al alumnado cuál ha sido su respuesta. Sólo 18 (67% de los alumnos) informan de sus resultados y dan tres respuestas distintas: la respuesta correcta, 14 jóvenes, ha sido elegida por once alumnos, cuatro alumnos dan la respuesta de 15 jóvenes y tres alumnos responden 13 jóvenes. A continuación les pide que digan los jóvenes concretos que cumplen dicha condición y se quedan escritos en la pizarra.

Para empezar la corrección el profesor elige uno de los participantes que había contestado erróneamente 15 jóvenes. La alumna trata de explicarlo y con ayuda de algunos de sus compañeros llegan a la conclusión de que han de buscar en la tabla los jóvenes que han dicho sí a estas cuatro actividades a la vez, es decir, que tengan un 1 en cada una de estas actividades. La alumna está en la pizarra en la que se ha proyectado la tabla T y que además puede escribir sobre ella. Cuando empieza a revisar los jóvenes que cumplen esta condición que han quedado escritos en la pizarra, se da cuenta que sobran dos de ellos y que le falta otro. Ha eliminado de su respuesta dos de los jóvenes que había indicado, porque ha comprobado que éstos han contestado “NO” a una de estas actividades, por lo que no cumplen la condición exigida (estos dos jóvenes tienen tres 1 y un 0). Y el joven de la tabla T que la alumna no había anotado en su respuesta, lo ha localizado a medida que iba corrigiendo en la pizarra, puesto que ha visto que tenía un 1 (“SI”) en las cuatro actividades.

Los que han contestado 14 lo han validado con la intervención de su compañera y los tres alumnos que han dado la respuesta de 13 alumnos lo han corregido después de darse cuenta que no habían hecho bien el recuento; aunque la estrategia que siguieron cuando lo resolvieron en casa era la correcta, puesto que buscaban los jóvenes con 1 en

las cuatro actividades, pero se habían dejado un joven de los catorce que corresponde a la respuesta correcta.

De esta manera se concluye la corrección del primer juego, terminando el profesor con la siguiente institucionalización de la actividad [no prevista de esta forma en la ficha didáctica]: *“vosotros habéis buscado los jóvenes que tienen un 1 en las cuatro actividades a la vez. En Matemáticas decimos que estamos trabajando la conjunción de estos cuatro criterios”*.

El profesor deja anotada en la pizarra la solución del primer juego para pasar al segundo.

JUEGO 2.

“Si la agencia de viajes ofertara las actividades C_4, C_5, C_{10} y C_{14} y pusiera como condición haber dicho sí al menos a tres de estas actividades, ¿qué jóvenes podrían apuntarse al viaje? y ¿cuántos serían con esta nueva condición?”

- operación lógica: **“unión de los conjuntos resultantes de las siguientes operaciones: la conjunción de cuatro criterios y la conjunción de tres criterios con la negación de otro, combinando el cuarto criterio que se va negando”**
- estrategia: **buscar los jóvenes que han dicho sí a las cuatro actividades (1^{er} viaje) y además todos los casos de los jóvenes que han contestado “no” sólo a una de las cuatro; es decir, simbolizando haber dicho “no” a la actividad “i” por C'_i , podemos tener los siguientes casos:**
 - $C_4 \wedge C_5 \wedge C_{10} \wedge C_{14}$; $S_1 = \{A, B, C, D, E, F, J, K, M, N, P, S, V \text{ y } Z\}$ (juego 1)
 - $C'_4 \wedge C_5 \wedge C_{10} \wedge C_{14}$; $S_2 = \{I \text{ y } T\}$
 - $C_4 \wedge C'_5 \wedge C_{10} \wedge C_{14}$; $\{\emptyset\}$
 - $C_4 \wedge C_5 \wedge C'_{10} \wedge C_{14}$; $S_3 = \{H, L, O, Q \text{ y } R\}$
 - $C_4 \wedge C_5 \wedge C_{10} \wedge C'_{14}$; $\{\emptyset\}$
- respuesta correcta: **podrían apuntarse 21 jóvenes, puesto que es el resultado de la unión de los casos indicados en el paso anterior. Solución = $S_1 \cup S_2 \cup S_3$** [Sólo dos jóvenes de la tabla han contestado “NO” a dos o más de estas cuatro actividades (G y U)]

El profesor inicia el juego como en el caso anterior, preguntando al alumnado cuántos jóvenes han calculado que se pueden apuntar a este viaje con la nueva condición. Sólo 8 alumnos (29 %) contestan, de los cuales seis responden que 21 jóvenes (la respuesta

correcta) y los otros dos creen que 23 jóvenes. El resto del alumnado había tenido dudas al resolverlo o bien no lo habían entendido.

Cuando el profesor exige la argumentación de la respuesta, una de las alumnas resume que *“en este juego se deben buscar los jóvenes que han dicho sí a 3 o a 4 actividades del viajes”*. Otra de las alumnas que ha dado como respuesta 21 jóvenes, lo justifica de la siguiente forma: *“he contado los 14 jóvenes del juego 1, que han contestado sí a las cuatro actividades a la vez. Y luego he buscado los jóvenes que sólo tenían un 0 en una de estas cuatro actividades y me han salido otros 7 jóvenes; entonces en total me dan 21 jóvenes”*.

Al mismo tiempo que estas dos alumnas han ido explicando su razonamiento para justificar su respuesta han podido usar la tabla T proyectada en la pizarra, señalando los jóvenes que cumplen las condiciones que van explicando. A través de esta estrategia los alumnos que habían contestado 23 jóvenes han podido corregir su error, puesto que también habían contabilizado los jóvenes que incluso tenían dos de estas actividades con respuesta negativa.

Una vez concluida la solución del segundo juego, se deja anotada en el pizarra y el profesor les lanza nuevas preguntas: *“¿creéis que esta nueva condición ha mejorado el viaje?, ¿lo ha ampliado?, ¿qué condición es más exigente, la del juego 1 o la del 2?”*

El alumnado no contesta de forma generalizada, pero el grupo de alumnos que participa activamente, da distintas respuestas: *“ahora van más jóvenes al viaje”*; *“se amplía el número de jóvenes que se apunta al viaje”*; *“el segundo juego es menos exigente que el primero, porque en el juego 2 van siete jóvenes más, ya que dejan que digan que no a una de las cuatro actividades”*; *“van más jóvenes al segundo viaje, pero con una actividad menos”*; *“con menos exigencia, van más jóvenes”*...

Tras recoger las distintas interpretaciones por parte del alumnado, el profesor les explica que la solución del segundo juego consiste matemáticamente en la unión del conjunto de jóvenes que han calculado en el primer juego y el conjunto de siete jóvenes que se obtiene con la nueva condición de *“decir sí al menos a 3 de las actividades indicadas”*.

Para reforzar esta idea el profesor lanza otra pregunta diciéndoles qué jóvenes son los que no pueden apuntarse al segundo viaje y por qué. Algunos de ellos responden: *“los*

jóvenes G y U son los únicos que no se pueden apuntar, porque han dicho que SÍ a menos de tres de las cuatro actividades, por lo tanto ya no lo cumplen”

Introducir en este nivel *educativo* (1º ESO) los conceptos de unión, conjunto, subconjunto, conjunción, etc., no era el objetivo de la situación; el profesor tan sólo ha querido introducirlos con la intención de que se vayan familiarizando con este tipo de lenguaje.

JUEGO 3.

“En el siguiente diagrama de árbol se plantean todas las combinaciones que se pueden hacer con cuatro de las actividades que ofrece la agencia de viajes.

Indica en el recuadro de cada combinación, las actividades que podrían realizar y en la otra etiqueta los jóvenes que se podrían apuntar al viaje correspondiente”

[recordemos que el diagrama de árbol con el que los alumnos deben resolver este juego es el de la figura 4-13, que mostramos de nuevo a continuación]

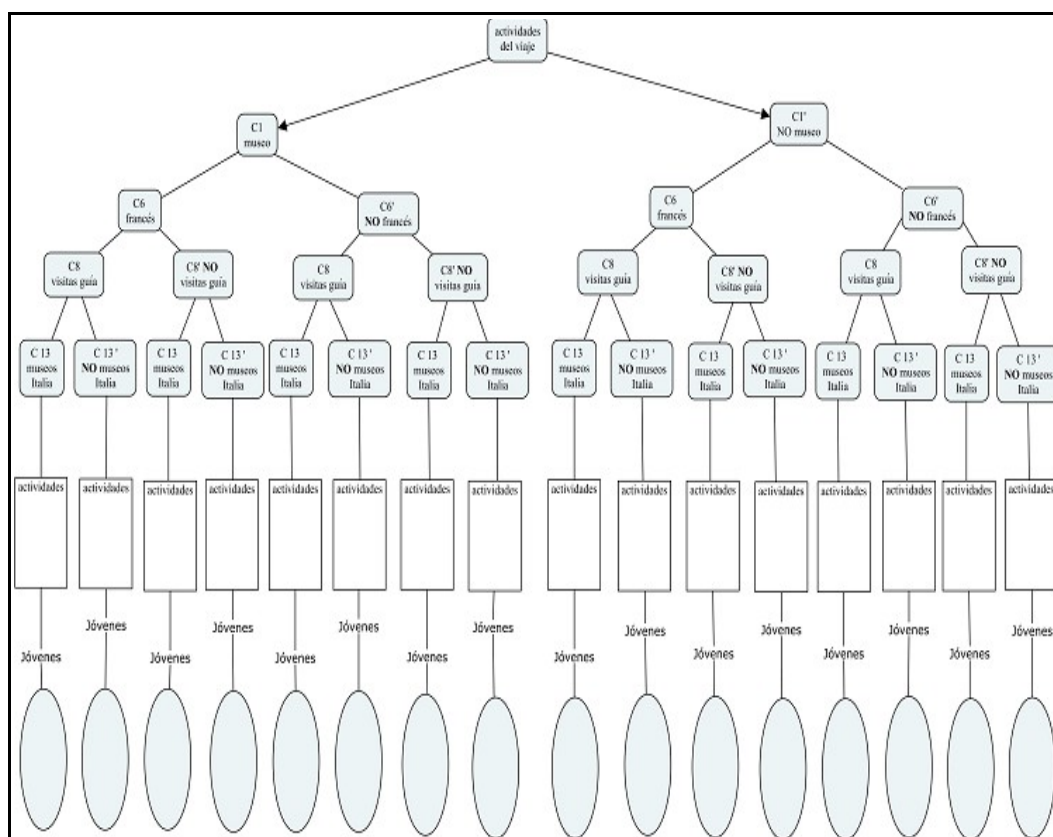


Figura 4-13: Diagrama de árbol del juego 3 de “Juegos de clasificación”

Para finalizar la lección se pasa al tercer juego. En esta actividad el alumnado ha manifestado mayor dificultad, puesto que sólo cinco alumnos (15%) han sabido resolverlo y otros seis (22%) lo han intentado completar con numerosas dudas. El resto de alumnado (63%), ha dejado la actividad en blanco. En la corrección del tercer juego se proyecta en la pizarra el diagrama de árbol que se debe completar usando la tabla de datos.

En primer lugar, el profesor hace mención del concepto “diagrama de árbol” preguntando a los alumnos si saben porqué se llama así. Uno de ellos explica que la bifurcación de las distintas posibilidades indicadas mediante flechas guarda parecido a las ramas de un árbol y de ahí que se pueda llamar así. Lo expresa de la siguiente forma: *“porque este diagrama se parece a un árbol, las flechas que van saliendo de los recuadros son como las ramas de los árboles”*

A continuación el profesor pregunta a los alumnos que no han tenido dudas, cómo lo han resuelto. Una de ellos explica que ha ido mirando las actividades que han escogido o no los jóvenes según las flechas que llegan hasta cada etiqueta. Después en la tabla va mirando los jóvenes que han escogido o no dichas actividades (1 o 0 respectivamente) para completar la segunda etiqueta (ovalada).

Para agilizar el proceso de corrección, distintos alumnos han ido saliendo a la pizarra para ir completando las etiquetas, tanto de las actividades, como de los jóvenes.

Una vez completado el diagrama de árbol, se hace la supervisión con el profesor para validar los resultados y así los alumnos lo pueden corregir: los que lo habían trabajado en casa pueden comparar su trabajo con la respuesta correcta y los que no lo han entendido han tenido la oportunidad de resolver sus dudas.

Por último el profesor lanza otra pregunta relacionada con la actividad, diciéndoles si es posible que un joven esté en distintas etiquetas. Los alumnos que han ido siguiendo mejor la actividad, responden que no es posible. En concreto una de las alumnas explica: *“no puede ser, porque si un joven está en una etiqueta es porque ha contestado si o no a las actividades que se indican. Si estuviera en otras etiquetas es porque ha cambiado de opinión y eso no puede hacerlo, porque las respuestas de los jóvenes son las que están en la tabla, no se pueden cambiar”*.

Esta respuesta confirma una vez más que la objetividad del medio, la tabla T, que utilizan los alumnos para resolver los juegos favorece el razonamiento lógico que se les exige, despersonalizando las respuestas de la tabla, convirtiéndolos en “datos”.

La respuesta de la alumna que hemos referenciado en el párrafo anterior, ha dejado claro el papel que juega la tabla en esta situación. La tabla ayuda a confirmar la solución de las preguntas planteadas, ya que los datos de la tabla no se pueden cambiar y por tanto ésta da la respuesta (única) correcta al juego, es decir, no hay posibilidad de distintas “respuestas”.

Al final de este juego el profesor ha explicado que los 23 jóvenes de la tabla quedan “repartidos” en las distintas etiquetas que aparecen en el diagrama de árbol. No se ha utilizado el concepto específico de “partición”, pero aprovecha esta actividad para hacer funcionar a nivel de acción este concepto. Es decir, le sirve como un ejemplo para que los alumnos puedan observar cómo un conjunto de elementos puede subdividirse en distintas clases o partes, según las condiciones que se exigen en cada una de ellas.

5.2.2. Evaluación de la experimentación de la situación de aprendizaje

Para evaluar la situación “Juegos de clasificación” hemos valorado tanto el funcionamiento del conocimiento lógico en juego, como su aprendizaje en situación didáctica, tal y como hemos presentado en las secciones anteriores. En esta sección presentamos la evaluación de la experimentación y observación desde el punto de vista técnico y organizativo del desarrollo de la situación: la información recogida en la crónica y por los observadores, el diseño de la ficha didáctica y la opinión a posteriori de algunos de los alumnos, de los observadores que han colaborado en la situación y del profesor que ha llevado a cabo el desarrollo de la lección.

Colaboración del profesorado y de los investigadores-observadores

En cuanto a la colaboración del centro “Grans i menuts”, para realizar esta segunda experimentación, también ha sido positiva, puesto que nos hemos podido organizar según nuestra disponibilidad, gracias a las facilidades y flexibilidad horaria que nos han proporcionado el centro.

En esta ocasión, aunque contábamos con la colaboración del mismo profesor de la otra situación, no hemos podido organizarnos con él por problemas de agenda, necesidades del centro y de la investigación. La aplicación de esta situación resultó conveniente realizarla antes de un periodo vacacional, coincidiendo que no disponíamos de tiempo físico para poder realizar la reunión previa de preparación con dicho profesor, por la premura exigida por el calendario escolar. Como resultado optamos por realizarla, aunque ha sido la propia investigadora quien la ha llevado a cabo. No era nuestro objetivo experimentar esta situación con estas condiciones, pero la determinación temporal nos ha obligado a desarrollarla de esta manera.

En esta situación hemos contado con una profesora del centro para realizar la crónica general y una investigadora, ajena al centro, para realizar la observación (que ya participó en la anterior situación de aprendizaje). En esta sección cabe señalar que en la filmación de la sesión tuvimos un problema técnico y por tanto la mayor parte del desarrollo de la lección lo hemos analizado a partir de las anotaciones de la observadora, de los datos aportados en la crónica y de mi propia experiencia, en este caso como profesora que ha llevado a cabo la aplicación de esta lección.

Aplicación de la ficha didáctica

Respecto esta situación de aprendizaje también vamos a valorar la ficha didáctica en la que se reflejan los objetivos generales del juego, el material necesario para el alumno y el profesor, la disposición de los alumnos en el aula, la temporalización, las consignas que debe utilizar el profesor para dirigirse a los alumnos y del desarrollo de cada “fase” o etapa que sigue a la consigna correspondiente.

Se han conseguido parcialmente los objetivos planteados inicialmente; ya que esta situación ha resultado complicada para la mayoría de los alumnos. Los objetivos eran los siguientes:

- Utilizar, implícitamente a nivel de acción, los conceptos de intersección y unión de conjuntos de elementos a través de la conjunción, negación o disyunción de criterios.
- Introducir el concepto de partición de un conjunto mediante la manipulación -muy dirigida- de clases de elementos que cumplen unas condiciones concretas.

En cuanto a la organización del aula y de los materiales necesarios para desarrollar la situación, sí podemos dar una evaluación positiva. La distribución de los alumnos en clase ha sido correcta; aunque el trabajo no ha sido en grupo, su disposición por equipos no ha influido negativamente. La organización de la clase en general y la disposición de los alumnos en clase ya estaba preparada antes de empezar la sesión, para agilizar la iniciación de la misma.

En esta ocasión también hemos podido proyectar la tabla T sobre una parte de la pizarra para poder corregir públicamente cada juego. La otra parte de la pizarra se ha utilizado para ir anotando las respuestas de los alumnos y la solución final de cada juego. En el último juego hemos proyectado el diagrama de árbol para que los alumnos pudieran completar la etiquetas del mismo.

La temporalización programada para llevar a cabo la lección ha sido suficiente.

Aportaciones didácticas de los colaboradores y alumnos

De nuevo recogemos la sugerencias y los cambios que podemos realizar para mejorar el desarrollo de la situación, con la finalidad de conseguir los objetivos que establezcamos en la misma:

- Los contenidos de esta lección han resultado un poco más difíciles para los alumnos que los del “Juego de la agencia de viajes”. Ésto ha influido en su participación en la corrección de los juegos, ya que un grupo numeroso de alumnos no lo había resuelto previamente en casa. Proponemos mejorar la situación, realizando una primera sesión en clase para que los alumnos puedan realizar las actividades propuestas y otra para la corrección. También se pueden cambiar ligeramente algunos aspectos en el diagrama de árbol, para que les resulte un poco más sencillo, al menos en el primer ciclo de la ESO.
- En el caso de volver a experimentar la situación, tal y como está planteada, se deberían tener previstas estrategias didácticas y el diseño de una ingeniería más elaborada para lograr la devolución de la situación a los alumnos, evitando la desmotivación por no entender las actividades propuestas. Esto ha ocurrido concretamente en esta experimentación, con los alumnos que no han resuelto los juegos en casa y por tanto ha provocado que no participaran activamente en la corrección de dichas actividades.

- En el primer ciclo de ESO, sería conveniente reducir el diagrama de árbol con menos criterios, o bien mantenerlo como tal, en este caso para el segundo ciclo de la etapa.

Conclusiones de la experimentación de “Juegos de clasificación”

- Ha sido interesante realizar una actividad distinta a la de la lección del “Juego de viajes” haciendo uso de la misma tabla de datos y la misma temática, ya que el alumnado puede ver las distintas posibilidades que ofrece el medio; enriquece su utilización.
- A través de este juego se ha podido introducir el concepto de clasificación, utilizando el diagrama de árbol. En este nivel educativo el alumnado no está familiarizado con este tipo de estrategia, al menos con el planteamiento de tantas posibilidades. El uso del diagrama de árbol puede favorecer la posterior introducción (a finales de 1º de ESO y siguientes niveles de la etapa) de contenidos curriculares relacionados con el tratamiento de datos, como técnicas de recuento y análisis de todas las combinaciones posibles con distintos criterios en el bloque temático de Estadística y Probabilidad.
- Según lo expuesto en la crónica de la corrección de la lección se puede vislumbrar que también hace funcionar la Teoría de conjuntos, puesto que se trata de obtener subconjuntos de elementos (los jóvenes), de la intersección y/o de la unión entre ellos a través de la conjunción, negación o disyunción de criterios. Asimismo se utiliza, de forma implícita, la partición de un conjunto en distintas clases, según las condiciones que cumplan los sujetos.
- Una estrategia que se hubiera podido aplicar es que a la hora de completar el diagrama de árbol se hiciera desde un principio la partición del conjunto de todos los sujetos en dos clases: los jóvenes que cumplen el criterio C_1 y los que no lo cumplen. A partir de cada una de estas dos clases, éstas se van subdividiendo en otras dos, cada una según cumplan o no el siguiente criterio indicado (C_6). Así sucesivamente hasta llegar al último criterio de forma que al final los 23 jóvenes o sujetos quedan subdivididos según los criterios que han ido cumpliendo o no (ver el diagrama de árbol resuelto de esta forma en la figura 5-1). La observación ha puesto de manifiesto que no se ha utilizado esta estrategia, pero sí se puede proponer como propuesta de mejora.

- Otra estrategia que también se puede usar para ver cómo queda la clasificación final de los sujetos según las condiciones que cumplen, es el uso de las n -tuplas con 0 y 1, cuyo orden indica el criterio que cumplen o no (ver la figura 5-2).
- De nuevo hemos podido confirmar que la tabla de datos, ha sido el medio fundamental para clarificar, confirmar y validar resultados. Es el medio objetivo que permite a los alumnos materializar su distintos tipos de razonamientos y para el profesor sigue siendo un instrumento de negociación didáctica que le permite comunicarse con los alumnos, redirigiendo el razonamiento natural y los errores de los alumnos hacia los razonamientos lógicos que dan sentido a las actividades del juego.
- Tras la corrección no podemos afirmar, de forma análoga a lo explicado en el análisis de la lección anterior, que el alumnado haya comprendido el trabajo lógico y de clasificación que conllevan los juegos; pero sí se puede confirmar que los alumnos de este nivel pueden resolver estas actividades complejas y los que han participado activamente en la corrección, han podido validar sus resultados e interiorizar dichos contenidos matemáticos, apropiándose al menos de su aplicación en este contexto concreto. No tenemos tampoco la certeza de que lo puedan generalizar a otras actividades matemáticas que también exijan los mismos contenidos.
- Señalar que en esta actividad no han participado la mayoría de los alumnos, por una parte por la dificultad que han manifestado respecto a la misma y por otro lado porque el hecho de resolverlo a priori en casa supone mayor implicación y esfuerzo, que trabajarlo en grupo en clase o con la ayuda del profesor, como hemos podido observar durante el desarrollo de la lección. Los alumnos han ido completando las actividades según lo que se ha ido haciendo en la pizarra.

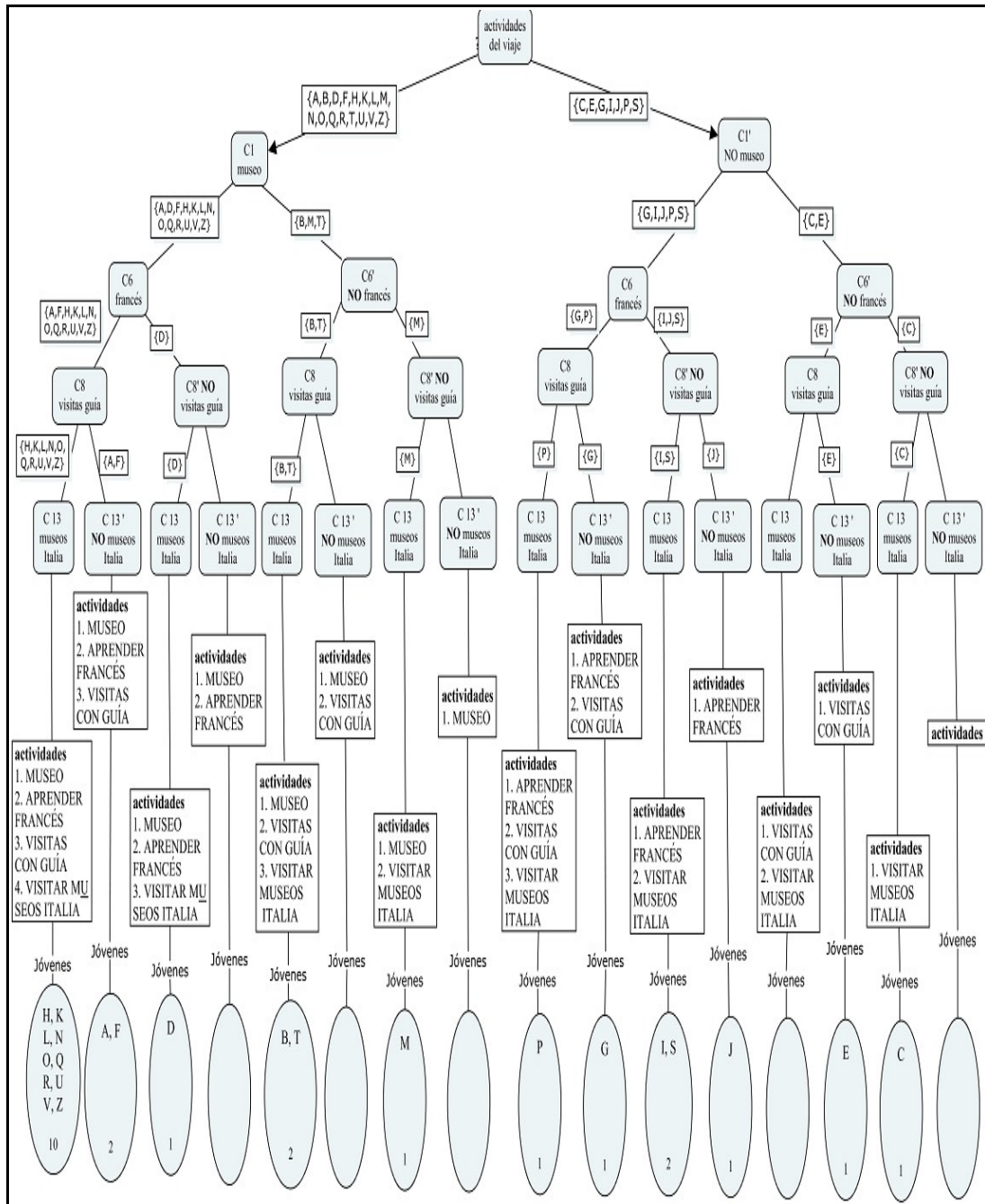


Figura 5-1: Solución del juego 3 de clasificación por separación de criterios

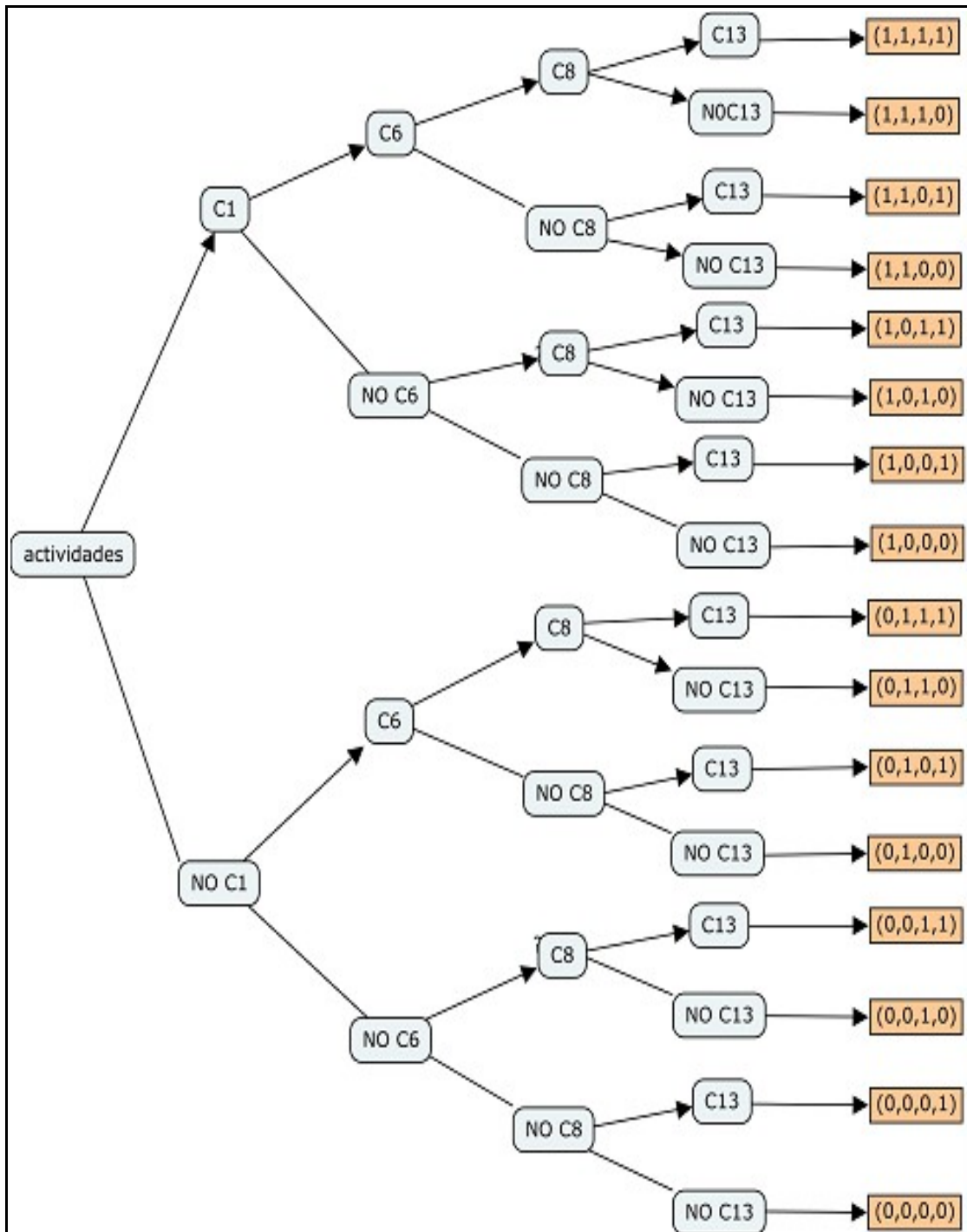


Figura 5-2: solución juego 3 de clasificación por 4-tuplas

Conclusiones

Las conclusiones de nuestra investigación versan sobre distintos aspectos que hemos abordado tanto teórica como experimentalmente y por tanto son de diversa naturaleza. Hemos elegido estructurar estas conclusiones, no por capítulos, ni por su naturaleza, teórica o experimental, sino en torno a seis ejes conceptuales, que creemos nos permiten abarcar todos esos diferentes aspectos y la naturaleza, de las conclusiones.

Eje 1: El “saber oficial a enseñar en la ESO” sobre tratamiento de la información

E1.C1. El análisis de las directrices educativas oficiales, muestra la importancia que se le debe atribuir al tratamiento de la información (datos) en la escolaridad secundaria obligatoria. Dicha materia, está siendo reclamada por diversos autores, para que sea introducida desde la escolaridad primaria y poder seguir desarrollándola a lo largo de toda la escolaridad obligatoria (Ottaviani (1998), Batanero (2000b, 2004), Batanero et al. (2000a), Batanero y Godino (2005), Gal (2002), Holmes (2002), Rodríguez (2013)).

E1.C2. La revisión de los currículos de las dos leyes educativas en vigor (LOE (D. 112/07) y LOMCE (D. 87/15)) permite concluir que la nueva ley educativa, la LOMCE, no introduce cambios significativos en la ESO, con respecto al currículo de Matemáticas, anterior a la reforma. Ambas leyes educativas además de manifestar el interés y la importancia que se le atribuye al tratamiento de la información (señalado anteriormente), remarcan la necesidad de instruir a los alumnos en la adquisición de instrumentos adecuados para desarrollar esta capacidad. Sin embargo, podemos constatar la carencia de nuevos contenidos que permitan potenciar la enseñanza de esta competencia del tratamiento de datos. Aparece siempre ligada a los contenidos de los bloques de Estadística y de Funciones y gráficas (en parte). Asimismo, no aparecen contenidos curriculares para desarrollar el razonamiento lógico.

E1.C3. En el currículum oficial se pone de manifiesto cómo las Matemáticas, entre otras áreas, debe contribuir al desarrollo de las competencias relacionadas con el tratamiento de la información, a través de los objetivos y criterios de evaluación. Pero como se ha constatado en la conclusión anterior, las directrices no aportan contenidos suficientes para potenciar esta competencia, ni en el área de Matemáticas, ni en otras áreas implicadas. Los contenidos relacionados con el tratamiento de la información se reducen a conceptos estadísticos elementales y a la recogida y representación de datos. Sólo se queda en una declaración de intenciones, en forma de “competencia a adquirir” en las directrices curriculares y en la buena voluntad de algunos profesores

innovadores, que han realizado alguna experimentación al respecto (Alfonso y Gracia (1995), Baena (1999), Batanero (1995), Batanero et al. (1999), Guerrero (1999), Orús (1999), Pitarch y Orús (2001), Recio (1999)...) y que reclaman una propuesta curricular más reglada oficialmente, del tratamiento de la información.

Eje 2. La propuesta didáctica: interés y pertinencia

E2.C1. La propuesta didáctica para la ESO, que presentamos, se basa en una familia de situaciones didácticas, que permitan la adquisición de los conocimientos lógico-matemáticos en juego; conocimientos identificados y controlados mediante las variables didácticas que hemos elegido para cada situación: operaciones lógicas (negación, conjunción, disyunción y condicional) con proposiciones y predicados, cuantificadores universales, atribución de verdad (a proposiciones y a predicados) y clasificación (detalle, en capítulos 3 y 4).

E2.C2. Mostramos cómo la TSD (Brousseau, 1996a, 1999) nos ha facilitado las herramientas necesarias para modelizar los conocimientos matemáticos en juego (tratamiento de datos, razonamiento lógico y estadístico) a través del diseño y experimentación de una ingeniería didáctica, formada por distintas situaciones adidácticas y didácticas en torno a los contenidos que pretendemos trabajar con los alumnos de la etapa educativa de secundaria obligatoria.

E2.C3. La ingeniería didáctica de dicha propuesta, se construye en torno a un cuestionario sobre una tabla de datos binarios, como situación fundamental de toda la familia de situaciones, al constituirse en el medio adidáctico de todas las situaciones didácticas propuestas; el denominado, en nuestra experimentación, “Cuestionario Q”, adaptación de otros anteriores (Orús, 1986-1992), (Pitarch, 2002). Las cuatro situaciones de aprendizaje, el “Juego de la agencia de viajes”, los “Juegos de clasificación”, la “Corrección colectiva del cuestionario Q” y la “Organización del viaje fin de curso”, han sido todas ellas diseñadas como variantes del cuestionario Q.

E2.C4. Nuestra propuesta continua las investigaciones precedentes sobre el tratamiento de datos y razonamiento lógico, realizadas en el mismo marco de referencia (Orús (1986b, 1992, 1993a, 1993b, 1993c, 1996b, 1999), Orús et al. (2001b, 2005, 2009), Moreira (1993), Gibel (2004), Pitarch (2002), Pitarch y Orús (2001, 2003, 2005), Villarroya y Orús, (2002, 2003)).

E2.C5. La propuesta, asume la importante demanda de desarrollo del tratamiento de la información, que los investigadores en Educación Estadística y profesores (especialistas de la *Noosfera*, Chevillard (1985)) están reclamando para la todos los niveles educativos.

E2.C6. La propuesta es innovadora, con respecto a los procedimientos habituales utilizados en la enseñanza de las Matemáticas, puesto que hemos ofrecido una nueva forma de presentar los datos, mediante tablas binarias, utilizando el tratamiento lógico además del tratamiento estadístico (a nivel elemental) de estos datos en las actividades propuestas en las diferentes situaciones. Lo que permite establecer más relaciones entre dichos datos y supone un aumento de nueva información a partir de las informaciones iniciales que proporcionaban directamente los datos.

E2.C7. La tabla de datos es el instrumento a través del cual se han materializado los distintos tipos de razonamiento (natural, lógico y estadístico), proporcionando un “estatus” escolar al razonamiento natural de los alumnos. Se convierte así, en el instrumento didáctico para que los profesores de Matemáticas puedan tratar en sus clases, tanto el razonamiento natural o espontáneo de los alumnos, como el razonamiento lógico, sin necesidad de enseñarlo explícitamente.

E2.C8. La tabla permite diferenciar a los alumnos, entre operaciones y razonamientos formales y argumentaciones espontáneas que realizan de forma natural, a través de la manipulación de la tabla de valores binarios. La tabla se convierte en un “objeto transicional” (Winnicott, 1971), es decir, ha actuado como un elemento intermediario entre el pensamiento subjetivo y el razonamiento objetivo del alumno.

E2.C9. Las conclusiones anteriores (**E2.C7.** y **E2.C8.**) permiten concluir que la tabla de datos binarios, es un instrumento pertinente en didáctica de las matemáticas, de fácil introducción (no necesita presentación ni conocimientos previos) e innovador con respecto al tipo de tablas de datos utilizadas habitualmente en la esta etapa educativa de la ESO.

Eje 3. El “saber enseñado” con la propuesta didáctica

La metodología que la TSD propone para identificar el saber matemático enseñado en una determinada secuencia didáctica, es la observación de dicha secuencia y contrastar los resultados de la observación, con los análisis apriori de las situaciones, plasmados

en las llamadas fichas didácticas. Es decir, las fichas didácticas de las situaciones a observar, plasman el trabajo de ingeniería didáctica realizado a priori, concretando el medio de los conocimientos matemáticos en juego en la situación (el “saber a enseñar”); y la observación permite identificar los conocimientos que han sido enseñados (o no) en la situación observada.

La ingeniería didáctica de nuestra propuesta se basa en una familia de situaciones, de las que se han observado dos, el “Juego de la agencia de viajes” y los “Juegos de clasificación”. La experimentación y observación de estas situaciones se ha realizado en el centro educativo “Grans i Menuts”, de Castellón (2014-15).

E3.C1. Las fichas didácticas de ambas situaciones, han sido presentadas y analizadas en el capítulo 4, junto con los análisis a priori de toda la ingeniería de nuestra propuesta. Estas fichas muestran cómo en ambas situaciones, los alumnos han trabajado el tratamiento de datos a través de la tabla de valores binarios y las actividades concretas propuestas en torno a ella: la realización de operaciones lógicas combinadas: conjunción, negación combinada con conjunción, condicional y atribución de verdad en el “Juego de la agencia de viajes” y conjunción de cuatro predicados en los “Juegos de clasificación”.

E3.C2. La observación de la situación “*El juego de la agencia de viajes*” se ha realizado con un grupo de alumnos de 1º de ESO, que también participó en la pre-experimentación del “Cuestionario Q”. Las actividades de esta lección son análogas a las seis cuestiones que tuvieron los porcentajes de éxito más bajos en el cuestionario inicial Q. En el momento de la observación no se había realizado todavía, la corrección de dicho cuestionario con los alumnos; por tanto las actividades propuestas en esta lección, han permitido observar cuál ha sido la devolución a los alumnos de este tipo de trabajo lógico-matemático en situación escolar. No sólo a nivel de acción (dar las respuestas, correctas o no), sino la formulación y validación de dichas respuestas, ante sus compañeros. En situación inicialmente adidáctica (trabajo en grupo de los alumnos sin intervención directa del profesor) y posteriormente en situación de corrección/validación colectiva, gestionada por el profesor.

E3.C3. La observación de la situación “*El juego de la agencia de viajes*”, permite afirmar que sí que es posible, lograr la devolución del aprendizaje de este tipo de operaciones y razonamientos lógicos a los alumnos, sin necesidad de ser enseñados

explícitamente estos conocimientos lógicos. En el capítulo 5 se detalla la observación de esta situación.

E3.C4. En la experimentación y observación de “*Juegos de clasificación*” ha participado el mismo grupo de alumnos que en la anterior situación de aprendizaje. Esta situación se ha diseñado como la corrección de actividades que los alumnos han tenido que realizar previamente en casa de forma individual. Han presentado mayor grado de dificultad que las actividades propuestas en el anterior juego: conjunción de cuatro criterios, incluyendo la negación. Y se han planteado de forma diferente a dichas actividades, que eran más parecidas a las cuestiones del cuestionario Q.

E3.C5. La observación de la situación “*Juegos de clasificación*”, ha mostrado que la implicación de los alumnos en la actividad ha sido menor, entendemos que por el diseño y la mayor dificultad de la situación, señaladas en la conclusión anterior. La mayoría de los alumnos no han resuelto previamente y de forma autónoma las actividades y por tanto la participación activa de los alumnos, ha quedado reducida a un grupo minoritario de la clase (siete con más implicación y otros nueve con menor grado de participación). Por tanto se puede decir, que no se ha logrado la devolución de esta situación a los alumnos de forma generalizada y en este sentido, tampoco se han enseñado los conocimientos lógicos que la ficha didáctica y el análisis a priori de la situación establecían.

Eje 4. El “saber aprendido”, con la propuesta didáctica

E4.C1. “*El cuestionario Q*”, utilizado como instrumento de diagnóstico, ha permitido la descripción de la capacidad lógico-matemática de los alumnos, de los cuatro niveles educativos de la ESO, del curso 2014/15, del centro escolar “Grans i menuts”, de Castellón y de un grupo de 1º de la ESO del IES Politécnico de Castellón. Es decir, el cuestionario Q ha permitido identificar los conocimientos iniciales de estos alumnos respecto a la Lógica y el tratamiento de datos binarios (Ver, capítulo 3).

E4.C2. Estos resultados (2014/15), han sido contrastados, con los resultados obtenidos en la experimentación realizada en el trabajo de investigación de 3º ciclo, en la misma etapa educativa en diversos centros de la provincia de Castellón (IES Leopoldo Querol de Vinarós y IES Politécnico de Castellón), durante el curso escolar (2000-2001)

(Pitarch, 2002). Los resultados de ambas experimentaciones, nos ha permitido extraer las siguientes conclusiones, que exponemos a continuación.

E4.C3. Los alumnos de los cuatro niveles de la ESO no tienen ninguna dificultad en realizar actividades sobre una tabla multivariante de datos binarios (de dimensión aproximada, 15x22, lo que supone unos 330 datos binarios iniciales, correspondientes a 15 variables “características de viajes” de 22 jóvenes y a 22 variables “elección personal de un joven” sobre 15), con un éxito de respuestas correctas superior al 95%, en primeras preguntas del cuestionario en todos los grupos de los dos cursos escolares, de los diversos centros analizados de la provincia de Castellón.

E4.C4. Los resultados de ambas experimentaciones, muestran que el nivel de control de las operaciones lógicas que suponen las diversas preguntas del cuestionario, varía según el ciclo de la ESO, siendo inferior en los alumnos del primer ciclo de la ESO. No obstante los alumnos de los cuatro niveles, han manifestado dificultades en las mismas preguntas del cuestionario en determinados aspectos relacionados con la Lógica formal en el momento que aparece más de un conector en la pregunta del cuestionario o deben utilizar combinación de operaciones lógicas (un porcentaje de éxito inferior al 70% llegando a descender hasta un 39% en la implicación).

E4.C5. Los alumnos de secundaria han mostrado dificultades en las actividades que implican conocimientos referentes a la proximidad/distancia entre los datos de la tabla (éxito inferior un 70% de media, aproximadamente). En la utilización de los cuantificadores universales han presentado menos dificultades cuando se presentan de forma aislada (éxito alrededor de 95%), teniendo un menor porcentaje de éxito cuando se combinan con otras operaciones lógicas (descendiendo a un 58%). Por último las operaciones que suponen cálculos estadísticos no han sido identificadas por los alumnos a través de la tabla de datos y las cuestiones del cuestionario -en este caso los alumnos de 3º y 4º de la ESO- (han tenido un éxito de un 74% en cálculo de porcentajes, descendiendo a un 15% en el cálculo de frecuencia relativa).

E4.C6. La experimentación de “*El cuestionario Q*” nos ha permitido decidir el nivel educativo -1º de ESO- para el diseño y experimentación de nuestra propuesta didáctica.

E4.C7. Se puede concluir por una parte que los alumnos en general han manifestado las mismas dificultades que manifestaron en estas mismas cuestiones de Q en el desarrollo individual. No obstante, en el trabajo en equipo, cada grupo ha mejorado en la respuesta de las actividades.

E4.C8. Por último, en la corrección de estas actividades con todo el grupo, han emergido las dificultades que han tenido los alumnos y, con la intervención del profesor, se ha llegado a la validación de cada una de las actividades. Ésto no ha supuesto la interiorización de los conocimientos en juego por parte de todos los alumnos; tan sólo podemos deducir que: los alumnos en los que se ha producido la devolución de los razonamientos lógico-matemáticos a través del medio objetivo *-la tabla de valores-*, conjuntamente con la *validación del profesor*, han sido capaces de interiorizar estos conocimientos matemáticos. Este último proceso se puede interpretar como la iniciación a la *“institucionalización”* de dichos conocimientos.

E4.C9. No podemos asegurar que el alumnado del grupo ha “aprendido” el manejo de estos contenidos en relación a la clasificación, pero los alumnos que sí han resuelto previamente las actividades y han participado activamente en la corrección, han podido validar sus respuestas, una vez más, a través de la tabla de datos (expuesta públicamente para toda la clase y sobre la que se ha realizado la corrección), junto a la validación “oficial” del profesor.

E4.C10. Esta situación nos ha ofrecido la posibilidad de plantear actividades distintas a la otra lección, introduciendo el concepto de clasificación a través del diagrama de árbol y utilizando el mismo tipo de tabla de datos con la misma temática que las otras dos situaciones anteriores. La utilización del diagrama de árbol puede favorecer la posterior introducción de conceptos relacionados con técnicas de recuento, posibles combinaciones con dos o más elementos, etc. Todos estos contenidos pertenecen al bloque curricular de “Estadística y probabilidad”. Implícitamente también se han trabajado otros conceptos de teoría de conjuntos como: subconjuntos de elementos (jóvenes), intersección y unión entre ellos, partición de un conjunto mediante clases, etc.

Eje 5. Conclusiones sobre la viabilidad de la propuesta didáctica

E5.C1. La experimentación de la familia de situaciones, diseñada para la ESO, ha mostrado el interés y la pertinencia de la situación fundamental, en torno a la utilización de un cuestionario para obtener informaciones a partir de una tabla de datos binarios. Pero a la vez, ha mostrado la inviabilidad del conjunto de la propuesta.

E5.C2. La situación didáctica de “Corrección colectiva del cuestionario Q”, no pudo realizarse en ninguno de los dos centros, en que se pasó el “Cuestionario Q”, como instrumento de diagnóstico. El motivo fundamental es no poder disponer de más tiempo del horario de clases de Matemáticas, pese a la disponibilidad del profesorado: las restricciones que impone el sistema educativo a través de los currículos, limitan fuertemente (incluso imposibilitan) la viabilidad de realización y observación de secuencias didácticas innovadoras, de los contenidos curriculares. Se pudo disponer excepcionalmente de una sesión, en el centro público IES Politécnico de Castellón, en el curso 2014/15, para poder pasar el cuestionario Q, pero no se pudo disponer de más sesiones para poder corregirlo colectivamente con los alumnos. El centro concertado “Grans i Menuts”, nos permitió disponer de tres sesiones para realizar la experimentación y observación, dado que su proyecto educativo permite una mayor flexibilidad para la realización de propuestas innovadoras docentes, tal y como se plasma en su ideario. Pero incluso en esas condiciones muy favorables para la experimentación, que hizo posible la participación del profesorado del centro, en la realización y observación de las lecciones, no fue posible la corrección colectiva del cuestionario Q, precisamente, porque ya se había dispuesto de las sesiones de la experimentación.

E5.C3. En ejes anteriores, también hemos mostrado las limitaciones que tuvo la experimentación de “Juegos de clasificación”, al tener que partir de actividades que los alumnos tenían que traer ya hechas (“deberes”). Esto muestra que tampoco es viable tal y como estaba diseñada.

E5.C4. Por todo ello, concluimos que la propuesta didáctica que presentamos en esta investigación, es una propuesta innovadora de tratamiento de la información, de carácter experimental, que se une a las ya existentes (Alfonso y Gracia (1995), Baena (1999), Batanero (1995), Batanero et al. (1999), Guerrero (1999), Orús (1999), Pitarch y Orús (2001), Recio (1999)...) . Asimismo nos unimos a la demanda de todos esos

profesores e investigadores, que solicitan la incorporación explícita del tratamiento de la información al currículum oficial. Sin esta condición previa, consideramos que cualquier propuesta didáctica en este sentido, no pasará de ser experimental y no podrá llegar a ser una propuesta curricular.

E5.C.5. No obstante, no abandonamos la idea inicial de presentar una propuesta didáctica para la ESO. Nos basamos en la pertinencia observada de la tabla de datos binarios, como instrumento de negociación del contrato didáctico, sobre el razonamiento lógico y el razonamiento natural.

E5.C.6. Proponemos utilizar diferentes variantes de la situación fundamental, en diversos cursos y de manera interdisciplinar. El análisis de los resultados de esta experimentación y de otros trabajos anteriores (Orús (1986b, 1992, 1993a, 1993b, 1993c, 1996b, 1999), Orús et al. (2001b, 2005, 2009), Moreira (1993), Gibel (2004), Pitarch (2002), Pitarch y Orús (2001, 2003, 2005), Villarroya y Orús, (2002, 2003)), sería la base para reformular nuestra propuesta inicial. Las líneas de trabajo interdisciplinar que seguiríamos para esta reformulación serían las siguientes:

i) *Iniciación al tratamiento lógico de la información*, para 1º de la ESO, con las siguientes situaciones de aprendizaje:

- Adaptación del “Cuestionario Q”.

- “Corrección colectiva del cuestionario Q”, como situación didáctica a nivel de formulación y validación, cerrando el ciclo iniciado en su pasación como situación adidáctica a nivel de acción.

- Situación “Juego de la agencia de viajes”, proponiéndola con una sola modalidad. Hemos visto que trabajar con las distintas modalidades no ha creado confusión en los alumnos, pero en la corrección del grupo-clase se ha invertido demasiado tiempo. Es preferible reducir la temporalización de la lección, planteando la situación con sólo un tipo de viaje.

ii) *Tratamiento lógico y estadístico de los datos*, para 2º de la ESO, mediante la situación diseñada “Organización viaje fin de curso” pero adaptada a este nivel. Es decir, utilizarla sólo para la introducción de los contenidos elementales de la Estadística

elemental. El objetivo de esta situación es una toma de decisión colectiva (viaje, concierto, festival de cine, etc).

Esta misma situación se puede aplicar tal y como está diseñada para los niveles de 3º y 4º de la ESO.

iii) *Tratamiento gráfico de la información*, que permite trabajar cualquiera de las situaciones de aprendizaje planteadas en nuestra propuesta.

iv) *Clasificación*, que permite realizar trabajo matemático: teoría de conjuntos, teoría matemática, combinatoria (mediante la utilización de diagramas de árbol).

Eje 6. La metodología utilizada. Ingeniería didáctica y metodología espiral. Transposición didáctica y “rapports au savoir”

E6.C1. En esta investigación se han utilizado todos los métodos que Brousseau (1986a) identifica como necesarios en lo que él denomina “*método espiral*” de investigación en DM:

i) Se han realizado *análisis a priori de los protocolos* destinados a la obtención de datos (cuestionarios, fichas de observación, etc.) que se confrontan con los resultados, para evitar la lectura empirista de los datos.

ii) Se han utilizado *métodos de análisis estadísticos multidimensionales de datos*, clasificación y análisis jerárquico, y análisis implicativo- que permiten análisis cualitativos y no solo cuantitativos de los datos, tanto de los análisis a priori, como en el análisis de los resultados.

iii) Nos hemos *centrado en las situaciones didácticas*: en el estudio y modelización de los conocimientos matemáticos en juego a través de la elaboración de las situaciones didácticas adecuadas, mediante la identificación y control de las variables que definen la situación, y la observación de estas situaciones elaboradas **en un marco de ingeniería didáctica**. Y es en este contexto cuando cobra sentido y puede ser comprendido el análisis de datos que se realiza en el marco de la TSD.

E6.C2. La metodología referida en la conclusión anterior, ha sido utilizada como un “*método espiral*” en investigación en DM, tal y como la identifica Brousseau (1986a) ya que cada realización y cada observación de lección (“Juegos de la agencia de viajes”

y “Juegos de clasificación”), han sido la ocasión de poner a prueba las concepciones teóricas (gestión del razonamiento del profesor, devolución, elección de las variables didácticas) y la tecnología didáctica que las acompañan (preparación previa con el profesor del aula, experimentación de las lecciones con investigadores-observadores, grabación de las sesiones), los métodos de estudio y de análisis (utilización de los métodos clásicos de Estadística para la interpretación de los datos y de la aplicación del ASI, para obtener además una interpretación cualitativa de los datos), los resultados experimentales ya obtenidos y la formulación realizada por los maestros de las proposiciones de enseñanza.

E6.C3. Se ha confirmado la pertinencia de introducir la tabla de datos como un instrumento didáctico pertinente en la etapa de secundaria, para resolver el problema didáctico de la gestión del razonamiento a través de la misma, actuando como “objeto transicional” (E2C8). En la experimentación en la que el profesor no ha podido disponer de la tabla de datos, no se ha producido de forma objetiva la validación de las actividades resueltas por los alumnos (Peydró, 2015).

E6.C4. Hemos utilizado el programa informático CHIC, de implementación de las técnicas de clasificación jerárquica, implicativas y cohesivas propias del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) para el análisis de los datos, tanto de los análisis a priori, como de los resultados obtenidos tras la experimentación de las situaciones.

E6.C5. Éste nos ha facilitado el estudio a priori del cuestionario Q (capítulo 3): la elección de las variables didácticas, la caracterización de las preguntas según el tipo de operaciones a realizar y de las respuestas dadas por los alumnos, la identificación de las asociaciones y estructuraciones de los datos (las cuestiones, los sujetos, las variables...). El análisis cluster jerárquico, a través de CHIC, de los datos del estudio a priori de las preguntas de Q, confirma cómo las cuestiones que forman el cuestionario se agrupan según el tipo de trabajo lógico-matemático que se exige en las mismas.

E6.C6. Asimismo este software nos ha permitido realizar la interpretación de los resultados sobre el cuestionario Q. Uno de los resultados de dicha interpretación ha sido la clasificación de las cuestiones que han tenido menor éxito como una clase del análisis cluster. Este dato nos ha permitido elegir el tipo de trabajo lógico-matemático con el que seguir trabajando con los alumnos, a través de otras situaciones de

aprendizaje. Así pues, “El cuestionario Q” ha actuado como pre-experimentación de las familia de situaciones planteadas en la propuesta didáctica.

E6.C7. CHIC también ha sido aplicado para el diseño y elaboración de la situación de aprendizaje “El juego de la agencia de viajes”, en el estudio a priori realizado en el capítulo 4. De forma análoga CHIC nos ha permitido confirmar la elección de las variables didácticas pertinentes para trabajar los conocimientos matemáticos en juego: las operaciones lógicas de conjunción, combinación de conjunción con negación, implicación (y su recíproca) y atribución de verdad.

E6.C8. La relación que existe entre los criterios de la tabla de datos, nos ha permitido decidir el planteamiento de tres modalidades distintas para las actividades del “Juego de la agencia de viajes” de manera que los alumnos puedan trabajar con la componente “semántica”. Hemos elegido las actividades de cultura, deportivas y de ocio para plantear las preguntas que tienen respuestas iguales o semejantes, independientemente de la modalidad del viaje. Los resultados que nos facilita el ASI, mediante CHIC, nos ha confirmado que la elección de estas variables es adecuada para lograr el objetivo de que las preguntas planteadas sean homólogas con respecto al trabajo lógico que exigen cada una de ellas (capítulo 4).

E6.C9. Las nociones específicas de la TAD, transposición didáctica y “rapports au savoir”, han sido utilizadas como elementos metodológicos en diferentes momentos de la tesis. Fundamentalmente en el capítulo 1, para identificar los dominios de referencia de nuestra problemática de investigación y para determinar los ejes que han estructurado nuestras conclusiones (el saber oficial a enseñar, el saber enseñado, el saber aprendido...)

Hasta aquí mostramos las conclusiones del trabajo realizado. A continuación exponemos con más detalle algunos aspectos referentes a la nueva propuesta didáctica.

Tal y como hemos indicado en las últimas conclusiones, las condiciones que debe cumplir la nueva propuesta planteada serían las siguientes: secuenciación a lo largo de la ESO e interdisciplinariedad. Hemos propuesto como áreas fundamentales, por un lado las Matemáticas y por otro lado, las Ciencias Naturales. Habría que realizar un análisis más exhaustivo de los currículos de las distintas áreas de conocimiento y en los diversos niveles de la ESO, para estudiar de forma concreta la viabilidad y la

interdisciplinariedad mencionadas. El objetivo sería la elaboración de una nueva ingeniería de dos secuencias didácticas por nivel y, preferiblemente, no todas en clase de Matemáticas, utilizando el tratamiento de la información como eje vertebrador. Secuencias que podrían ser experimentadas/observadas en sucesivos cursos escolares. Existen ingenierías al respecto ya experimentadas (Orús, 1986b, 1992), que podrían ser utilizadas como base de la nueva propuesta: el “juego de la agencia de viajes” como situación fundamental que permitió abordar la gestión didáctica del razonamiento; “el juego de coalición”, que facilitó abordar el aspecto más formal del razonamiento con la toma de decisiones; “la clasificación de plantas”, en el que se utilizó el análisis tipológico como medio de negociación didáctica con los alumnos, relativa al razonamiento. Con estas situaciones Orús (1986b, 1992) consiguió, en definitiva, una renegociación del contrato didáctico materializado en un cambio de estatus del razonamiento natural dentro de la relación didáctica.

En nuestro caso, la nueva propuesta didáctica, esbozada en E5.C6., podría desarrollarse a partir de las indicaciones que exponemos a continuación.

Consideramos que el desarrollo de la situación “Corrección colectiva del cuestionario Q” es muy pertinente, ya que los alumnos de esta etapa que han resuelto el cuestionario Q, esperan -de alguna manera- conocer los resultados del mismo. Es decir, su desarrollo permitiría la devolución de la corrección a los alumnos y de esta forma, lo que los alumnos habían empezado a nivel de acción, se completaría a nivel de formulación y validación. En este sentido, esta situación enriquece a la que nos ha servido como situación de referencia: “El cuestionario Q”, cerrando el ciclo iniciado en el primer trimestre del curso 2014-15.

Por otra parte, proponemos como continuidad de esta investigación, ampliar la experimentación de la situación “El juego de la agencia de viajes” en los cursos del tercer ciclo de la educación primaria, e incluso proponerla para que se considere como una “propuesta curricular”, incluyéndola en el currículo de Matemáticas del tercer ciclo de primaria y de primero de la ESO. En nuestro caso hemos realizado una propuesta a nivel experimental, el objetivo óptimo sería conseguir que fuera una propuesta curricular.

En cuanto a la lección “Juegos de clasificación” proponemos adaptarla para el primer ciclo de la ESO, realizando cambios en las variables didácticas (la cantidad de criterios

en el diagrama de árbol, que el diagrama de árbol lo elabore el propio alumno a partir de dos o tres criterios...). Para el segundo ciclo de la ESO, se puede mantener como está planteada, añadiendo alguna actividad más sobre la clasificación que pueda favorecer la introducción de la combinatoria que se desarrolla en estos cursos de la etapa.

En cambio, la situación “Organización del viaje fin de curso” se debe plantear, como iniciación a la Estadística en 2º de la ESO y en el segundo ciclo de la ESO tal y como está diseñada, por tratarse de contenidos relacionados con la Estadística descriptiva elemental conjuntamente con razonamiento lógico.

Por otra parte proponemos ampliar nuestra propuesta didáctica con otra situación de aprendizaje para trabajar la “Clasificación de plantas”, en 1º de la ESO, como continuación del trabajo de Orús (1992), ya que ésta nos permitiría trabajar de forma interdisciplinar el tratamiento de la información, contribuyendo de esta manera al desarrollo de la competencia del tratamiento de la información, no sólo en el área de las Matemáticas sino también en las Ciencias Naturales. Se puede aprovechar que en esta asignatura se trabaja la clasificación de los seres vivos, en particular las plantas.

Y como otra posibilidad, el diseño de otra situación de aprendizaje a partir de los trabajos iniciados por Villarroya y Orús (2002, 2003) con la aplicación del programa TGINF que permitiría trabajar el tratamiento gráfico de los datos y conocimientos del bloque de contenidos de la Estadística. En este caso se estaría contribuyendo en lo que concierne tanto al tratamiento de la información, como a la competencia digital.

La posibilidad que nos ha facilitado el colegio “Grans i menuts” de Castellón, para realizar las experimentaciones/observaciones nos abre una vía de continuidad para nuestra nueva propuesta. Podemos seguir realizando experimentaciones utilizando tanto las lecciones diseñadas con sus respectivas adaptaciones y modificaciones, como de las que diseñaremos en la nueva propuesta. La colaboración de los docentes -del área de Matemáticas y otras áreas- en la elaboración y experimentación de estas lecciones, puede servir como formación continua del profesorado y al mismo tiempo como continuidad de nuestra investigación. Este doble objetivo es el que se plantea desde la TSD y así es como se trabajaba en la Escuela de J. Michelet.

Bibliografía

- Alfonso, J. y Gracia F. (1995). El juego de las ranas. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. N° 5 (pp. 123-131).
- Almouloud, A. (1992). *L'ordinateur, outil d'aide à la démonstration et au traitement de données didactiques*. Thèse présentée à l'Université Rennes I.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M. y Cañadas, G. (2012). Evaluación del conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores. *Investigación en educación matemática XVI*, (pp.135 -143) .
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., y Gómez, P. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *México: una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica*.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7, (pp. 245–274).
- Artigue M. (2010). The Future of Teaching and Learning Mathematics with Digital Technologies. In *Hoyles, C. and J.-B. Lagrange (eds). Mathematics Education and Technology—Rethinking the Terrain*. (pp. 463-476).
- Artigue M. (2011). La educación matemática como un campo de investigación y como un campo de práctica : Resultados, Desafíos. *XIII CIAEM, celebrada en Recife, Brasil*.
- Baena, J. (1999). Sistemas de datos en el currículo. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. N° 20, (pp. 9-24).
- Balacheff N. (1988). *Etude des processus de preuve chez des élèves de Collège*. Thèse d'état. Grenoble. Université Joseph Fourier.
- Balacheff, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14.
- Balacheff, N. (1999). ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate. *Laboratoire Leibniz. Grenoble, France*.

Bibliografía

- Balacheff, N. (2000a). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Universidad de los Andes. Bogotá. Ed: una empresa docente (traducción: Pedro Gómez).
- Balacheff, N. (2000b). Entornos informáticos en la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. *Matemáticas y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional*, (pp. 91-108). Vol 154.Ed: graó.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J.D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, 9, (pp. 25-31).
- Batanero, C., Godino, J.D., Vallecillos, A., Green, D.R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding statistical concepts. *International journal of mathematics education in science and technology*, 25(4) (pp. 527-547).
- Batanero, C. (1995). Probabilidad y estadística. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. N° 5, (p.4), julio 1995.
- Batanero, C. (1999). Taller sobre análisis exploratorio en la educación secundaria. *Revista de filosofía*, n°- 35, (pp. 41-49). Universidad de Granada.
- Batanero, C., Garfield, J., Ottaviani, M.G. y Truran, J. (2000a). Investigación en educación estadística: algunas cuestiones prioritarias. *Universidad de Granada y otras internacionales*.
- Batanero, C. (2000b). ¿Hacia dónde va la estadística?. *Blaix15*, 2-13. (pp. 5-8). Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2001a). Didáctica de la estadística. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada. <http://www.ugr.es/~iase/hipotesis.htm> .(fecha de acceso: 23 de septiembre de 2009).
- Batanero, C y Godino, J.D. (2001b). *Análisis de datos y su didáctica*. Grupo de investigación en educación estadística. Dpto de didáctica de la matemática. Ed: Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires. Conferencia inaugural.

- Batanero, C. (2004). Presente y futuro de la Educación Estadística. *Dpto de didáctica de la matemática. Universidad de Granada*, en <http://www.ugr.es/local/batanero>.
- Batanero, C. y Godino, J.D. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. *Universidad de Granada*.
- Batanero, C. (2009). Educación estadística en los niveles no universitarios. oportunidades y desafíos actuales. *IX Congreso Galego de Estatística e Investigación de Operacións. Ourense 12-14*
- Batanero, C., Arteaga, P y Contreras, J.M. (2011). El Currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *EM TEIA . Revista de Educaçã*
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. *I jornadas Virtuales de Didáctica de la estadística, la Probabilidad y la Combinatoria. Granada*.
- Batanero, C. (2014). La estadística en la educación obligatoria: revisión del currículo español. *Revista digital. Matemática, Educación e Interet (<http://tecdigital.itcr.ac.cr/revistamatematica/>). Vol 14, n° 2. ISBN:16590643*.
- Begg, A. (1997). Some emerging influences underpinning assessment in statistics. *En I. Gal, y J. B. Garfield (Eds.), The assessment challenge in statistics education (pp. 17-26). Amsterdam: IOS Press*.
- Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). *Représentation de l'espace chez l'enfant et enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire. Thèse, Université Bordeaux I*.
- Biehler, R. (1997). Software for learning and for doing statistics. *International Statistical Review, 65(2), (pp. 167-190)*.
- Blanco, R. (2009). *El pensamiento lógico desde la perspectiva de las neurociencias cognitivas*. Tesis doctoral. Dpto de Filosofía. Universidad de Oviedo.
- Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad*. Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Bosch, M.; Chevallard, Y. (1999). La sensibilidad de la actividad matemática a los ostensivos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.19, N°1, (pp. 77-124)*.

Bibliografía

- Briand, J. (1993). *L'énumération dans le mesurage des collections, un dysfonctionnement de la transposition didactique*. Thèse de 3ème cycle, Université Bordeaux I.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en didactique en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol.4.2*.
- Brousseau, G. (1986a). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse d'Etat, Université de Bordeaux-I. Ed: IREM de Bordeaux.
- Brousseau, G. (1986b). La relation didactique: le milieu. *Actes de la IVème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, IREM de Paris VII, Université de Paris VII*.
- Brousseau, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, 2/23, (pp. 14-24)*. [traducción al español: Parra y Saiz *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones (1994), Paidós Educador, Bs. As.*].
- Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. 9/3, (pp.308-336)*. *La Pensée Sauvage, Grenoble*.
- Brousseau, G. y Lacasta E. (1995). L'analyse statistique des situations didactiques. *Actes du Colloque Méthodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en Didactique des Mathématiques, ARDM, (pp 53-107)*.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990). *La Pensée Sauvage, Grenoble*.
- Brousseau, G. (1999). Educación y Didáctica de las matemáticas. V Congreso Nacional de Investigación Educativa, México. [Traducción al español: Block, D. y Martínez, P.]
- Brousseau, G. (2007). Iniciación al estudio de la Teoría de situaciones didácticas. *Colección "Formación docente-matemática". Libros del Zorzal, Buenos Aires*.
- Brousseau, G. (2015). *Commentaires 2015 de Gy Brousseau sur son petit livret de 1964. Les Mathématiques du cours préparatoire, premier fascicule, Dunod, 19652* [Traducido por Mabel Aguilar y Dilma Fregona].

- Campos, J.M. (2000). Un papel de la lógica dentro de la enseñanza. *Revista de Filosofía*, nº- 35. Universidad De Zacatecas. México. (pp. 41-49)
- Cañadas, M^a C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral de la Universidad de Granada
- Cerda, G., Ortega, R., Pérez, C., Flores C. y Melipillán, R. (2011). Inteligencia Lógica y rendimiento académico en matemáticas: un estudio con estudiantes de Educación Básica y Secundaria de Chile. *Anales de psicología*, vol. 27, nº 2, (pp.389-398).
- Codina, A. y Lupiañez, J.L. (1999). El razonamiento matemático: argumentación y demostración. *XXXII Congreso Nacional de la Sociedad Matemática Mexicana (oct 1999)*. Guadalajara, México.
- Cuadras, C.M. (1991). *Métodos de análisis multivariante*. Universitat de Barcelona. Ed: PPU.
- Curcio, F.R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (5), (pp. 382-393).
- Curcio, F.R. (1989). Developing graph comprehension. *Reston, VA: N.C.T.M.*
- Chamorro, M^aC. (2005). *Didáctica de las matemáticas para educación infantil*. Universidad Complutense de Madrid. Ed: Pearson Educación.
- Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné. *La Pensée Sauvage éditions, Grenoble*.
- Chevallard, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. *Publicado en Maury et Caillont (eds)*. Ed: Fabert. París (pp. 81-104).
- D'Amore, B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (nyaya). *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. N° 38, (pp 83-99).
- Decreto 111/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunitat Valenciana. [2007/9730]. LOE.
- Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana. [2007/9717].LOE.

Bibliografía

- Decreto 87/2015, de 5 de junio, del Consell, por el que establece el currículo y desarrolla la ordenación general de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en la Comunitat Valenciana. [2015/5410]. LOMCE.
- Digneau, J.M. (1980). *Création d'un code à l'école maternelle: Etude d'un saut informationnel*. Thèse présentée à l'Université de Bordeaux.I. Ed: IREM de Bordeaux.
- Domínguez, J.I. (1999). Información y análisis exploratorio de datos. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. N° 20, (p.41).
- Dueñas, M^aF. (2010). Argumentar: una herramienta en la construcción del conocimiento circulante del aula de clase. *Memoria 11º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*. U. N. de San Martín (Argentina)
- Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse soutenue à l'Université Claude Bernard, Lyon I.
- Duval, R. y Egret, M.A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. En *Repère*, n° 12, (pp. 114-140).
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne. Peter lang.[traducción en idioma español: Universidad del Valle.
- Duval, R. (1999). Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva? *México D.F.: Iberoamérica*.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J.M. (2004). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental en profesores en formación. *Educación Matemática* 16. (pp.89-112).
- Ferrater, J. y Leblanc H. (1955). *Lógica matemática*. Ed: fce (fondo de cultura económica). México.
- Fregona, D. Orús, P. (2005). Une étude des effets du contrat didactique à l'aide de la structuration du milieu didactique. Deux exemples: les cas du raisonnement et des figures planes sur la théorie des situations *didactiques*. *Questions, réponses*,

- ouvertures. Hommage à Guy Brousseau.* Marie-Hélène Salin, Pierre Clanché, Bernard Sarrazy, Ed.
- Fregona, D. y Orús, P. (2010). La noción de medio en la teoría de las situaciones didácticas. Una herramienta para analizar decisiones en las clases de matemáticas. *Publicaciones preliminares del departamento de matemáticas. Universidad Jaume I de Castellón (UJI) ; n°139. [Primera edición en 2011, colección libros Zorzal].*
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review* 70(1),(pp. 1-25).
- Gibel, P. y Brousseau, G. (1999). Analyse didactique d'une séquence de classe destinée à développer certaines pratiques du raisonnement des élèves. *Actes de la X^o Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, (2) (pp.54-71).*
- Gibel P. (2004). *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire.* Thèse de Doctorat, soutenue à l'Université de Bordeaux 2.
- Gibel, R. y Brousseau, G. (2005). Didactical handling of students reasoning processes in problem solving situations . *Educationnal Studies in Mathematics* 59, (pp. 13-58).
- Gibel, P. (2011). Un Modele d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques: etude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques.*
- Gibel, P. (2013). Analysis of a lesson including a situation of validation fostering argumentation. *Cerme 8. Working group. "Argumentation And proof" 6-10 de february. Manavgat-side, Antalya – Turkey.*
- Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M. J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.
- Godino, J.D. (1995). ¿Qué aportan los ordenadores a la enseñanza y aprendizaje de la estadística?. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas. N° 5, (pp. 45-55).*
- Gras, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certain objectifs didactiques en mathématique.* Thèse d'état présentée à l'Université Rennes I.

- Gras, R. (1992). L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions de didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, vol. 12-1.
- Gras, R. et Larher, A. (1992). L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse des données. *Math. Inf. Sci. Hum*, n°: 120, (pp. 5-31).
- Gras, R. (1995a). Traitement "à la main" de tableaux de données par des méthodes classificatoires. *Actes du colloque "methodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques" I.U.F.M.. de Caen.* (pp 211-217).
- Gras, R. (1995b). L'analyse statistique implicative. Introduction. *Actes du colloque "Methodes d'analyses statistiques multidimensionnelles en didactique des mathématiques" I.U.F.M.. de Caen.* (pp 129-143).
- Gras, R., Couturier, R., Bodin, A. (2007). *Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive, CHIC. Software, versión 4.1.*
- Gregori, P., Orús, P., Pitarch, I. (2009). Reflexiones sobre el análisis a priori de los cuestionarios basado en técnicas del Análisis Estadístico Implicativo. *Teoría y aplicaciones del ASI: primera aproximación en lengua hispana.* Isbn: 978-84-692-3925-4 ed. U. Jaume I. Castellón. (pp. 159-190)
- Grupo de Filosofía del casal del Mestre de Sta Coloma de Gramenet (1996). Problemas en la enseñanza elemental de los conceptos de verdad, falsedad, validez e independencia lógica. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas.* N° 7, (pp. 111-117).
- Guerrero, C. (1999). La importancia de la información a priori. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas.* N° 20, (p.57).
- Guerrero, S. (1999). Tratamiento de la información. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas.* N° 20, (pp. 5-8).
- Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (2005). The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. *Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument.* New York : Springer.
- Haton, J.P. y Hanton, M.C. (1993). *L'intelligence artificielle. Què sais-je?*. Presses Universitaires de France.

- Holmes, P. (2002). Some lessons to be learnt from curriculum developments in statistics. En B. Phillips (ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics. Ciudad del Cabo: IASE. CD Rom.*
- Huget, Ll. (2013). El año de Turing. Alan M. Turing y Claude E. Shannon: matemáticas para la informática. *Publicación en el País, 14 de marzo.*
- Lerman, I. (1981). *Classification et analyse ordinale des données.* París: Dunod.
- Lerman, I., Gras, R. y Rostam, H. (1981). Elaboration et évaluation d'un indice d'implication pour des données binaires. *I et II, Mathématiques et Sciences Humaines n° 74, (pp. 5-35) et n° 75, (pp. 5-47).*
- Margolinas, C. y Steinbring, H. (1994). Double analyse d'un episode: cercle épistémologique et structuration du milieu. Artigue, M., R. Gras, C. Laborde. P. Tavinot, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage a Guy Brousseau et Gérard Vergnaud. La Pensée Sauvage.*
- Margolinas, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Les d'ébats de didactique des mathématiques, la pensée sauvage, (pp.89-102). *Recherches en Didactique des Mathématiques.*
- Maudet, C. (1982). *Les situations et les processus de l'apprentissage d'une fonction logique.* Thèse présentée à l'Université de Bordeaux.I. Ed: IREM de Bordeaux.
- Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2013). *Guía para la formación en centros sobre las competencias básicas.* Dirección general de evaluación y cooperación territorial centro nacional de innovación e investigación educativa (CNIIE) Ed. ©Secretaría General Técnica. Subdirección General de Documentación y Publicaciones. NIPO: 030-13-192-1. ISBN: 978-84-369-5466-1
- Moreira, M. (1993). *Le traitement de la vérité mathématique à l'école.* Thèse présentée à l'Université de Bordeaux.I. Ed: IREM de Bordeaux.
- Ortega, T. (2001). Debate del seminario I: prueba y demostración: razonamiento matemático . *V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).U. de Almería, (pp. 65-67).*

- Orús, P. (1986a). Informe sobre la escuela J. Michelet. *Memoria de la estancia en el COREM de l'Université de Bordeaux.I, financiada por la Conselleria d'Educació i Ciència de la Generalitat Valenciana.*
- Orús, P. (1986b). L'enseignement des méthodes de classification. Proposition d'une ingénierie pour le cours moyen. *Coll. Études en Didactiques des Mathématiques. Université de Bordeaux-I. Ed: IREM de Bordeaux.*
- Orús, P. (1989). La Dévolution du raisonnement logique, problème d'ingénierie. Un exemple de rupture de contrat. *Actes du Vème école d'été de didactique des mathématiques et de l'informatique. Ed. Institut mathématique de Rennes. Ireste de Nantes.*
- Orús, P. (1992). *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire.* Thèse présentée à l'Université de Bordeaux.I. *Ed: IREM de Bordeaux.*
- Orús, P. (1993a). Un Champ commun de représentation de certaines connaissances personnelles, des raisonnements naturels, des connaissances officielles, même des savoirs, dans la relation didactique: les tableaux des données de l'analyse typologique. *Actes du VIIème école d'été de didactique des mathématiques. Ed. IREM De Clermont-Fd.*
- Orús, P. (1993b). La utilización de un concepto matemático –el análisis tipológico– como útil didáctico en la escolaridad obligatoria. *IV Congreso internacional sobre investigación en la didáctica de las ciencias y de las matemáticas. Barcelona, septiembre. Ed: Universitat de Barcelona.*
- Orús, P. (1993c). El Lugar del razonamiento natural de los alumnos en la negociación didáctica: posibilidades de la iniciación al análisis clasificatorio en la escolaridad obligatoria. *Seminario Inter-Universitario de Investigación en Didáctica de las matemáticas (SI-IDM). U. Complutense de Madrid.*
- Orús, P. (1996a). La clasificación jerárquica, un instrumento matemático e interdisciplinar en la ESO. *Jornadas de formación del profesorado de matemáticas. Pola De Siero, Asturias.*
- Orús, P. (1996b). Problèmes du traitement des différentes formes de raisonnement "logique" des enfants , dans la relation didactique: recherche d'une ingénierie

- utilissant l'analyse typologique. *Seminaire national de Didactique des Mathématiques. . U. Paris-VII, París.*
- Orús, P. (1999). La Actividad clasificatoria y el tratamiento de datos, en la enseñanza obligatoria, contenido procedimental e instrumento de negociación didáctica. *Ponencia presentada en el XIII Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las matemáticas. El Escorial.*
- Orús, P. y Bort, T. (2000a). El “medio” en la teoría de situaciones, como instrumento de análisis didáctico del artículo .“El Peso de un recipiente”. *XIV Jornadas del SI-IDM. Cangas do Morrazo.*
- Orús, P. y Pitarch, I. (2000b). Utilisation didactique des tableaux des données et du logiciel chic à l'école élémentaire. *Actes des journées sur la fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative. Caen. Ed: École Polytechnique de l'Université de Nantes, (pp. 85-98)*
- Orús, P. (2001). Análisis De datos e investigación en didáctica de la matemática. Una aproximación desde el marco de la teoría de situaciones. *V simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Unversidad de Almería, (pp. 95-111).*
- Orús P. (2003). Tratamiento de datos, grafos, y didáctica de las matemáticas. *Ed. UNED, n° 26 de la Colección Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales. Madrid.*
- Orús, P. y Gregori P. (2005). Des variables supplémentaires et des élèves “fictifs” dans la fouille des dones avec CHIC *Quaderni di ricerca in didattica. Supplemento n.2 al n. 15, Ed. GRIM, Palermo (pp. 279- 293)*
- Orús, P., Zamora, L., Alonso, I., Gorina, A. y Álvarez, M. (2009). Tratamiento de datos, lógica y estadística en la enseñanza preuniversitaria. Un estudio mediante la aplicación del CHIC. *Teoría y aplicaciones del ASI: primera aproximación en lengua hispana. Ed. U. Jaume I Castellón. ISBN: 978-84-692-3925-4, (pp. 279-298)*
- Ottaviani, M.G. (1998). Developments and perspectives in statistical education, *Proceedings IASS/IAOS Joint Conference, Statistics for Economic and Social Development, Aguascalientes, Mexico.*

- Peres, J. (1984). *Utilisation d'une théorie des situations en vue de l'identification des phénomènes didactiques au cours d'une activité d'apprentissage: construction d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle*. Etudes en didactique des mathématiques, IREM de Bordeaux.
- Peydró, L. (2015). *La lógica en Formación de Maestros: necesaria e insuficiente*. Tesis doctoral, dirigida por Pilar Orús Báguena. Universidad Jaume I. Castellón.
- Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. (1978). *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*. Delachaux et Niestle. París.
- Pitarch, I. y Orús, P. (2001). Lógica y tratamiento de datos en la ESO. *V simposio de Investigación en Educación Matemática*. Almería.
- Pitarch, I. (2002). Estudio sobre la viabilidad y el interés didáctico del tratamiento de la información en la ESO. Trabajo de investigación de tercer ciclo dirigido por P. Orús. (DEA 2004). U. Jaume I de Castellón.
- Pitarch, I. y Orús, P. (2003). Logic and data handling in secondary education. *Cerme 3: Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. Bellaria, Italy.
- Pitarch, I. y Orús, P. (2005). Análisis didáctico de un cuestionario en el marco de la teoría de las situaciones didácticas. *Actas del VIII Simposio de investigación en Educación Matemática*. Ed. U. Coruña, (pp 1-20).
- Pólya, H. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.
- Ratsimba-Rajohn, H. (1992). *Contribution à l'étude de hiérarchie implicative. Application à l'analyse de la gestion didactique des phénomènes d'ostension et de contradiction*. Thèse présentée à l'Université Rennes I.
- Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre (BOE nº5, 5-1-07) por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. LOE.

- Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, (BOE nº 266. 6-11-07) por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. LOE.
- Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, (BOE nº 3. 3-1-15) por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. LOMCE.
- Recio, T. (1999). Tratamiento automático de la información geométrica. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. Nº 20, (pp. 5-8).
- Rivadulla, A. (1991). *Probabilidad e inferencia*. Barcelona: Anthropos.
- Rodríguez, C. y Batista, T. (2013). La cultura estadística: un reto a la didáctica del proceso docente educativo de la matemática. *Revista de pedagogía universitaria*. Vol XVIII nº 3. Universidad de la isla de la juventud "Jesús Montané Oropesa"
- Russell, S.J. y Mokros, J.R. (1991). What's typical: children's ideas about average. *Documento Presentado en la American Educational Research Association, Boston*.
- Russell, S.J. y Mokros, J.R. (1995). Children's concepts of average and representativeness. . *En Journal for Research in Mathematics Education* 26, (pp. 21-39).
- Shaughnessy, J.M., Garfield, J. y Greer, B. (1997). Data handling. *En A. Bishop et al. (Eds.) International handbook of mathematics education*. Dordrecht: kluwer, a. P. (v.1, pp. 205-237).
- Suppens, P.; Hill, S. (1986). *Introducción a la lógica matemática*. Ed: Reverté S.A.
- Tormo, C. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la media aritmética. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. Nº 5, (pp. 29-36).
- Tukey, J.W. (1962). The future of data analysis. *Annals of Mathematical Statistics*, 33, (pp. 1-67).
- Tukey, J.W. (1970). *Exploratory data analysis*. New york: Addison Wesley.
- Turing, A.M. (1950). Computing machinery and intelligence. *Mind*, 59, (pp. 433-460).

Bibliografía

- Vallecillos, A. (1995). Consideraciones epistemológicas sobre la inferencia estadística: implicaciones para la práctica docente. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*. N° 5, (pp. 80-90).
- Villarroya, G., Orús, P. (2002). Presentación de un software de tratamiento gráfico de datos a través de su clasificación. *Actas VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Universidad de la Rioja*.
- Villarroya, G., Orús, P. (2003). TGINF: Graphic information processing for teaching. *Congrés Européen ITEM "Intégration des technologies dans l'enseignement des Mathématiques"*. Reims.
- Vygotsky, L. (1978). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: crítica.
- Wermus, H. (1976). Essai de représentation de certaines activités cognitives à l'aide des prédicats avec composantes contextuelles. *Archives de Psychologie, Genève, 44, n. 171, (pp. 205-221)*.
- Wermus, H. (1987). Wermus, H. Modelisation de certaines activités de la pensée à l'aide des predicats amalgamés, in la Pensée naturelle, structures, procédures et logique du sujet. *Publications de l'université de Rouen, (pp.86, 53-36)*.

ANEXOS

ANEXO 1

**Contenidos del currículo oficial de la
ESO (LOE), relacionados con el
tratamiento de la información, la
Estadística y el razonamiento lógico**

En este anexo presentamos con más detalle la selección de las directrices del currículum de la ESO, en referencia a los conocimientos: tratamiento de la información, razonamiento lógico y Estadística elemental. Diferenciando los distintos apartados que los componen: objetivos, contenidos y criterios de evaluación.

En este caso sólo aportamos estos apartados con respecto a la LOE, puesto que los alumnos que han participado en nuestras experimentaciones han desarrollado su escolarización según el currículum de este decreto, concretamente el que hace referencia a la comunidad valenciana ((información extraída del D. 112/07 por el que se establece el currículo de la ESO en la comunidad valenciana correspondiente a la ley educativa LOE).

La siguiente referencia corresponde a la introducción del área de Matemáticas del decreto mencionado:

*“(…)El estudio de las relaciones entre **variables y su representación mediante tablas, gráficas** y modelos matemáticos es de gran utilidad para describir, interpretar, predecir y explicar fenómenos diversos de tipo económico, social o natural (…)*

*(…)Debido a su presencia en los **medios de comunicación** y el uso que de ella hacen las diferentes materias, **la estadística tiene en la actualidad una gran importancia** y su estudio ha de capacitar a las y los estudiantes para **analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística** (…)”p. 30552*

Algunos de los objetivos generales de la etapa del mismo decreto, proponen de forma explícita el desarrollo del tratamiento de la información y de la Estadística, e indirectamente la aplicación del razonamiento lógico:

*“f) Desarrollar destrezas básicas en la **utilización de las fuentes de información** para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. **Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.***

*g) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado que se estructura en distintas disciplinas, así como **conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.***

h) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades, así como valorar el esfuerzo con la finalidad de superar las dificultades” (pp 30405).

Asimismo, también se exponen en los objetivos concretos del área de Matemáticas:

“La educación secundaria obligatoria contribuirá a desarrollar en las alumnas y los alumnos las capacidades que les permitan:(...)

*1. Mejorar la **capacidad de pensamiento reflexivo** e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y **razonamiento matemático**, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana, con el fin de comunicarse de manera clara, concisa y precisa.*

*4. permitan interpretarla mejor: utilizar **técnicas de recogida de la información** y procedimientos de medida, **realizar el análisis de los datos** mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados, todo ello de la forma más adecuada, según la situación planteada.*

*5. Identificar los elementos matemáticos (**datos estadísticos**, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los **medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información**, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.*

7. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

*9. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del **análisis de los resultados** y de su carácter exacto o aproximado.*

*11. Integrar los **conocimientos matemáticos** en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas materias de modo que puedan emplearse **de forma creativa, analítica y crítica.**” pg 30554*

También da orientaciones distintas en cuanto a los cuatro niveles de la etapa. En los primeros cursos se pretende una aproximación al estudio estadístico mediante la

experimentación y a través de fenómenos sencillos usando tablas y gráficas. Y así ir profundizando de forma que en los últimos cursos el trabajo se encamina al manejo de gráficos y datos estadísticos más complejos con el objetivo de obtener conclusiones a partir de ellos.

Los contenidos generales según los cuatro niveles de la ESO serían los siguientes (pp 30555-30566):

- Utilización de estrategias y técnicas en la resolución de problemas, tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la división del problema en partes, y comprobación de la solución obtenida. (1º,2º)
- Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas, tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada.(3º)
- Planificación y utilización de procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, tales como la emisión y justificación de hipótesis o la generalización. (4º)
- Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales y procedimientos de resolución con la precisión y rigor adecuados a la situación. (4º)
- Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre cantidades y medidas o sobre elementos o relaciones espaciales (1º, 2º, 3º, 4º)
- Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas (1º, 2º, 3º, 4º)
- Interpretación y lectura de gráficas relacionadas con los fenómenos naturales y el mundo de la información (1º, 2º, 4º)
- Detección de errores en las gráficas que pueden afectar a su interpretación (1º)
- Construcción de tablas y gráficas a partir de la observación y experimentación en casos prácticos (2º)

- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas (2º)
- Uso de las tecnologías de la información para el análisis y reconocimiento de propiedades de funciones (3º, 4º)
- Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado (3º)
- Diferentes formas de recogida de información. Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Frecuencias absolutas y relativas.(1º, 2º)
- Diagramas de barras, de líneas y de sectores. Análisis de los aspectos más destacables de los gráficos estadísticos. (1º, 2º)
- Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados (2º, 3º)
- Cálculo e interpretación de los parámetros de centralización (media, moda, cuartiles y mediana) y dispersión (rango y desviación típica) (3,4º)
- Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias (4º)

Y los criterios de evaluación generales para poder evaluar los contenidos indicados se resumen en los que siguen, (pp 30557-30566):

- Expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución de un problema (1,2º)
- Expresar verbalmente con precisión razonamientos, relaciones cuantitativas e informaciones que incorporen elementos matemáticos; valorar la utilidad y simplicidad del lenguaje matemático. (3º, 4º)
- Expresar mediante el lenguaje algebraico una propiedad o relación dada en un enunciado (3º,4º)
- Organizar e interpretar informaciones diversas mediante tablas y gráficas, e identificar relaciones de dependencia en situaciones cotidianas (1º)

- Intercambiar información entre tablas de valores y gráficas y obtener información práctica de gráficas cartesianas sencillas referidas a fenómenos naturales, a la vida cotidiana y al mundo de la información (2º, 3º, 4º)
- Formular las preguntas adecuadas para conocer las características de una población y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas, utilizando los métodos estadísticos apropiados y las herramientas informáticas adecuadas (2º)
- Obtener e interpretar la tabla de frecuencias y el diagrama de barras o de sectores, así como la moda y la media aritmética, de una distribución discreta sencilla, con pocos datos, sirviéndose, si es preciso, de una calculadora de operaciones básicas o científica (2º, 3º, 4º).

ANEXO 2

**Contribución de las áreas de la ESO
al desarrollo de la competencia
“tratamiento de la información
y competencia digital”**

Resumen de los aspectos más importantes del currículo oficial que hacen referencia a la contribución de las áreas de la etapa para desarrollar la competencia *tratamiento de la información y competencia digital* y los contenidos -de las áreas en los que aparecen- que están directamente relacionados con el razonamiento lógico, la clasificación y la Estadística elemental. (información extraída del D. 112/07 por el que se establece el currículo de la ESO en la comunidad valenciana correspondiente a la ley educativa LOE).

Los fragmentos del decreto que hemos seleccionado para este cometido son originales, aunque hemos subrayado en gris las referencias que consideramos que están relacionadas con los conocimientos que tratamos en nuestra investigación.

Artículo 4. Objetivos de la etapa (p. 30405)

(se refiere a los objetivos generales de toda la etapa)

“La educación secundaria obligatoria contribuirá a desarrollar en las alumnas y los alumnos las capacidades que les permitan:

(...)

f) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.”

Contribución de las distintas materias para desarrollar dicha competencia

CASTELLANO Y VALENCIANO: LENGUA Y LITERATURA. (p. 30420)

“La materia incide en el tratamiento de la información y competencia digital al tener como una de sus metas proporcionar conocimientos y destrezas para la búsqueda y selección de información relevante de acuerdo con diferentes necesidades, así como para su reutilización en la producción de textos orales y escritos propios. La búsqueda y selección de muchas de estas informaciones requerirá, por ejemplo, el uso adecuado de bibliotecas y el aprovechamiento de las tecnologías de la información y la comunicación. La realización guiada de estas búsquedas constituirá un medio para

desarrollar la competencia digital. A ello apunta también el hecho de que el currículo incluya el uso de soportes electrónicos en la composición de textos, de modo que se aborden más eficazmente algunas operaciones participantes en el proceso de escritura (planificación, ejecución del texto, revisión...) y que constituyen uno de los contenidos básicos de esta materia. También pueden contribuir al desarrollo de esta competencia el uso en esta materia de los nuevos medios de comunicación digitales que implican una utilización social y colaborativa de la escritura y de los conocimientos.”

C.C. NATURALES (p. 30456)

“La competencia matemática está íntimamente asociada a los aprendizajes de las Ciencias de la naturaleza. La utilización del lenguaje matemático para cuantificar los fenómenos naturales, para analizar causas y consecuencias y para expresar datos e ideas sobre la naturaleza proporciona contextos numerosos y variados para poner en juego los contenidos asociados a esta competencia y, con ello, da sentido a esos aprendizajes. Pero se contribuye desde las Ciencias de la naturaleza a la competencia matemática en la medida en que se insista en la utilización adecuada de las herramientas matemáticas y en su utilidad, en la oportunidad de su uso y en la elección precisa de los procedimientos y formas de expresión acordes con el contexto, con la precisión requerida y con la finalidad que se persiga. Por otra parte en el trabajo científico se presentan a menudo situaciones de resolución de problemas de formulación y solución más o menos abiertas, que exigen poner en juego estrategias asociadas a esta competencia. El trabajo científico tiene también formas específicas para la búsqueda, recogida, selección, procesamiento y presentación de la información que se utiliza además en muy diferentes formas: verbal, numérica, simbólica o gráfica. La incorporación de contenidos relacionados con todo ello hace posible la contribución de estas materias al desarrollo de la competencia en el tratamiento de la información y competencia digital. Favorece la adquisición de esta competencia la mejora en las destrezas asociadas a la utilización de recursos frecuentes en las materias como son los esquemas, mapas conceptuales, etc., así como la producción y presentación de memorias, textos, etc. Por otro lado, en la faceta de competencia digital, también se contribuye a través de la utilización de las tecnologías de la información y la comunicación en el aprendizaje de las ciencias para comunicarse, recabar información, retroalimentarla, simular y visualizar situaciones, para la obtención y el tratamiento de datos, etc. Se trata de un recurso útil en el campo de las

ciencias de la naturaleza y que contribuye a mostrar una visión actualizada de la actividad científica.”

Objetivos

La enseñanza de las Ciencias de la naturaleza en esta etapa tendrá como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Comprender y expresar mensajes con contenido científico utilizando el lenguaje oral y escrito con propiedad, así como argumentar y dar explicaciones entre otros en el ámbito de la ciencia. Interpretar y construir, a partir de datos experimentales, mapas, diagramas, gráficas, tablas y otros modelos de representación, y formular conclusiones.
 2. Utilizar la terminología y la notación científica. Interpretar y formular los enunciados de las leyes de la naturaleza, asimismo los principios físicos y químicos, a través de expresiones matemáticas sencillas. Manejar con soltura y sentido crítico la calculadora.
 3. Comprender y utilizar las estrategias y conceptos básicos de las ciencias de la naturaleza para interpretar los fenómenos naturales, y para analizar y valorar las repercusiones de las aplicaciones y desarrollos tecnocientíficos.
 4. Aplicar, en la resolución de problemas, estrategias coherentes con los procedimientos de las ciencias, tales como la discusión del interés de los problemas planteados, la formulación de hipótesis, la elaboración de estrategias de resolución y de diseños experimentales, el análisis de resultados, la consideración de aplicaciones y repercusiones del estudio realizado y la búsqueda de coherencia global.
 6. Obtener información sobre temas científicos utilizando las tecnologías de la información y la comunicación y otros medios y emplearla; valorar su contenido, para fundamentar y orientar los trabajos sobre temas científicos.
 7. Adoptar actitudes críticas fundamentadas en el conocimiento para analizar, individualmente o en grupo, cuestiones científicas y tecnológicas.
- (...)

1º ESO

Contenidos

Bloque 1. Contenidos comunes.

- *Familiarización con las características básicas del trabajo científico, por medio de: planteamiento de problemas, discusión de su interés, formulación de conjeturas, experimentación, etc., para comprender mejor los fenómenos naturales y resolver los problemas que su estudio plantea.*
- *Utilización de los medios de comunicación y las tecnologías de la información para seleccionar información sobre el medio natural.*
- *Interpretación de datos e informaciones sobre la naturaleza y su utilización para conocerla.(...)*

Bloque 4. Los seres vivos y su diversidad

- *Clasificación de los seres vivos.*

Criterios de evaluación

(...)

13. *Establecer los criterios que sirven para clasificar a los seres vivos e identificar los principales modelos taxonómicos a los que pertenecen los animales y plantas más comunes, relacionando la presencia de determinadas estructuras con su adaptación al medio. (...)*

2º ESO

Contenidos

Bloque 1. Contenidos comunes

- *Familiarización con las características básicas del trabajo científico, por medio de: planteamiento de problemas, discusión de su interés, formulación de conjeturas, diseños experimentales, etc., para comprender mejor los fenómenos naturales y resolver los problemas que su estudio plantea.*
- *Utilización de los medios de comunicación y las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información sobre los fenómenos naturales.*

- Interpretación de información de carácter científico y su utilización para formarse una opinión propia y expresarse adecuadamente (...).

3º ESO

Contenidos

Bloque 1 (Común). Introducción a la metodología científica

- Utilización de estrategias propias del trabajo científico como el planteamiento de problemas y discusión de su interés, la formulación y puesta a prueba de hipótesis y la interpretación de los resultados. El informe científico. Análisis de datos organizados en tablas y gráficos.

- Búsqueda y selección de información de carácter científico mediante las tecnologías de la información y comunicación y otras fuentes.

- Interpretación de información de carácter científico y utilización de ésta para formarse una opinión propia, expresarse con precisión y argumentar sobre problemas relacionados con la naturaleza. La notación científica. (...)

Bloque 6. La actividad humana y el medio ambiente

- Los recursos naturales: definición y clasificación.
- Los residuos y su gestión. Valoración del impacto de la actividad humana en los ecosistemas. Análisis crítico de las intervenciones humanas en el medio. (...)

Bloque 7. Transformaciones geológicas debidas a la energía externa

- La formación de las rocas sedimentarias: la diagénesis. Clasificación de las rocas sedimentarias. (...)

Criterios de evaluación

(...)

23. Relacionar los procesos geológicos externos e internos mediante la explicación del ciclo litológico y su representación esquemática.

24. Identificar las acciones de los agentes geológicos externos en el origen y modelado del relieve terrestre, así como en el proceso de formación de las rocas sedimentarias.

25. Identificar las principales rocas sedimentarias, relacionar su origen con su estructura y texturas, con especial atención a la Comunitat Valenciana.

4º ESO

Física y química

Contenidos

Bloque 4. Estructura y propiedades de las sustancias

- Clasificación de las sustancias según sus propiedades. Estudio experimental.

Biología y geología

Contenidos

Bloque 1. La metodología científica

- Actuación de acuerdo con el proceso de trabajo científico: planteamiento de problemas y discusión de su interés, formulación de hipótesis, estrategias y diseños experimentales, análisis e interpretación y comunicación de resultados.

- Búsqueda y selección de información de carácter científico mediante las tecnologías de la información y comunicación y otras fuentes.

- Interpretación de información de carácter científico y su utilización para formarse una opinión propia, expresarse con precisión y tomar decisiones sobre problemas relacionados con las ciencias de la naturaleza.

(...)

CONCLUSIONES DE CCNN

En los objetivos sí se propone de forma “ambiciosa” trabajar los conocimientos con respecto a la competencia en cuestión. Sin embargo éstos aparecen sobre todo en el bloque de “contenidos comunes” de cada curso y apenas se desarrolla en los otros bloques de contenidos. En cuanto a la clasificación y razonamiento lógico y estadístico se proponen escasos procedimientos para desarrollarlos.

CC SOCIALES, GEOGRAFÍA E HISTORIA (p. 30471).

(...) p.p. 30474-75

“Se contribuye a la competencia en el tratamiento de la información y competencia digital por la importancia para comprender los fenómenos sociales e históricos de contar con destrezas relativas a la obtención y comprensión de información, elemento imprescindible de una buena parte de los aprendizajes de la materia. Se aporta, de manera particular, en la búsqueda, obtención y tratamiento de información procedente de la observación directa e indirecta de la realidad, así como de fuentes escritas, gráficas, audiovisuales, tanto en soporte de papel como digital. Establecer criterios de selección de la información proporcionada por diversas fuentes desde la objetividad y pertinencia, distinguir entre los aspectos relevantes y los que no lo son, relacionar y comparar fuentes o integrar y analizar la información de forma crítica son algunas de las aportaciones fundamentales a la adquisición de esta competencia.

(...)

Se contribuye también, en cierta manera, adquirir la competencia matemática. El conocimiento de los aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad lo permite en la medida en que la materia incorpora operaciones sencillas, magnitudes, porcentajes y proporciones, nociones de estadística básica, uso de escalas numéricas y gráficas, sistemas de referencia o reconocimiento de formas geométricas, así como criterios de medición, codificación numérica de informaciones y su representación gráfica. La utilización de todas estas herramientas en la descripción y análisis de la realidad social amplían el conjunto de situaciones en las que las alumnas y alumnos perciben su aplicabilidad y, con ello, hacen más funcionales los aprendizajes asociados a la competencia matemática”.

Objetivos (p. 30476)

12. *Buscar, seleccionar, comprender y relacionar información verbal, gráfica, icónica, estadística y cartográfica, procedente de fuentes diversas, incluida la proporcionado por el entorno físico y social, los medios de comunicación y las tecnologías de la información, tratarla de acuerdo con el fin perseguido y comunicarla a los demás de manera organizada e inteligible.*

13. *Utilizar las imágenes y las representaciones cartográficas para identificar y localizar objetos y hechos geográficos, y explicar su distribución a distintas escalas, con especial atención al territorio español.*

14. *Utilizar, asimismo, fuentes geográficas de información: textos escritos, series estadísticas, gráficos e imágenes, y elaborar croquis y gráficos apropiados.(...)*

1º ESO

Contenidos

Bloque 1. Contenidos comunes

– *Lectura e interpretación de imágenes y mapas de diferentes escalas y características. Percepción de la realidad geográfica mediante la observación directa o indirecta. Interpretación de gráficos y elaboración de éstos a partir de datos. (...)*

– *Valoración de las fuentes históricas para el conocimiento del pasado. Obtención de información a través de fuentes documentales, arqueológicas y de obras de arte; clasificación del tipo de información que proporcionan y elaboración escrita de la información obtenida. Utilidad de las tecnologías de la información y la comunicación para el estudio de la Historia.*

Criterios evaluación (p. 30478)

15. *Obtener y emplear informaciones relevantes sobre los temas estudiados. Relacionar las informaciones, valorarlas y combinarlas para explicar hechos históricos y espaciales. Consultar las diversas fuentes disponibles y utilizar las nuevas tecnologías de la información. (...)*

18. *Utilizar, interpretar y elaborar distintos tipos de mapas, croquis, gráficos y tablas estadísticas, y servirse de ellos como fuente de información y medios de análisis y síntesis.*

2º ESO

Contenidos

Bloque 1. Contenidos comunes

– *Lectura e interpretación de datos y gráficos demográficos; transformación de información estadística en información gráfica.*

– *Localización en el tiempo y en el espacio de periodos y acontecimientos históricos. Identificación de nociones de simultaneidad y evolución. Representación gráfica de secuencias temporales.(...)*

Criterios de evaluación (p. 30480)

1. *Describir los factores que condicionan la evolución de una población, identificar las variables y las tendencias demográficas predominantes en el mundo, y aplicar este conocimiento al análisis de la población de la Comunitat Valenciana y de España, así como sus consecuencias.*

2. *Conocer la distribución de la población en el mundo, diferenciando regiones, con referencia específica a la Comunitat Valenciana, y estados por la densidad de población, su dinámica y su estructura. Aplicar los conceptos de superpoblación, migración y envejecimiento a distintas escalas. Interpretar mapas temáticos sobre población. Elaborar gráficos referentes a hechos demográficos. (...)*

16. *Interpretar y elaborar distintos tipos de mapas, croquis, gráficos y tablas estadísticas, y utilizarlos como fuente de información y medios de análisis y síntesis.*

3º ESO

Contenidos (p.30482)

Bloque 1. Contenidos comunes a todos los bloques

– *Obtención y procesamiento de información, explícita e implícita, a partir de la observación de la realidad geográfica y de documentos visuales, cartográficos y estadísticos, incluidos los proporcionados por las tecnologías de la información y la comunicación. Comunicación oral o escrita de la información obtenida. (...)*

Criterios de evaluación

(...)

16. Interpretar y elaborar distintos tipos de mapas, croquis, gráficos y tablas estadísticas, y utilizarlos como fuente de información y medios de análisis y síntesis.

4º ESO

Contenidos

Bloque 1. Contenidos comunes (p.30583)

– Búsqueda y selección de información de fuentes escritas, diferenciando los hechos de las opiniones y las fuentes primarias de las secundarias. Contraste de informaciones contradictorias o complementarias a propósito de un mismo hecho o situación. Análisis y trabajo con textos históricos de especial relevancia; valorar la importancia del patrimonio documental para el estudio de la Historia y el significado de los grandes archivos históricos.

Criterios de evaluación (p. 30584)

(...)

14. Interpretar y elaborar distintos tipos de mapas, croquis, gráficos y tablas estadísticas, y utilizarlos como fuente de información y medios de análisis y síntesis.

CONCLUSIONES DE CC SOCIALES, GEOGRAFÍA E HISTORIA

Los contenidos que están relacionados con el tratamiento de la información, la argumentación, uso de la Estadística (a nivel elemental) sólo se proponen en el bloque de contenidos comunes. También se ven reflejados en algunos de los criterios de evaluación, según los distintos niveles. Se plantean en pocos objetivos al respecto y no se proponen en el resto de bloque de contenidos.

EDUCACIÓN VISUAL Y PLÁSTICA (p. 30503)

“La importancia que adquieren en el currículo los contenidos relativos al entorno audiovisual y multimedia expresa el papel otorgado a esta materia para adquirir la competencia en tratamiento de la información y, en particular, al mundo de la imagen que dicha información incorpora. Además, el uso de recursos tecnológicos específicos no sólo supone una herramienta potente para producir creaciones visuales sino que, a su vez, colabora en la mejora de la competencia digital. Por último, aprender a desenvolverse con comodidad a través del lenguaje simbólico es objetivo de la materia, así como profundizar en el conocimiento de aspectos espaciales de la realidad, mediante la geometría y la representación objetiva de las formas. Las capacidades descritas, anteriormente, contribuyen a que el alumnado adquiera competencia matemática.”

INFORMÁTICA (optativa) (p. 30519)

La información que aporta el decreto con respecto a la contribución a las competencias básicas es el fragmento redactado a continuación. No hace mención especial ni a la competencia tratamiento de la información ni la competencia digital.

“Esta materia contribuye a la adquisición de la competencia en el conocimiento y la interacción con el medio físico mediante el conocimiento del entorno informático y a través del desarrollo de destrezas técnicas para interactuar con éste en diversos procesos y actividades.

La contribución a la autonomía e iniciativa personal se desarrollará mediante una metodología activa que, como en otros ámbitos de la educación tecnológica, emplee procesos en forma de proyectos que permitan, dentro de lo posible, la necesaria aportación personal. El tratamiento específico de las tecnologías de la información y la comunicación, se integra en esta materia de forma principal. No sólo plantea un conocimiento instrumental y técnico, sino toda la necesaria reflexión sobre el marco social y cultural que la Informática ha modificado desde su irrupción a finales del siglo XX. La adquisición de la competencia social y ciudadana se construye tanto a partir de las posibilidades de proyectos de aplicación que permitan adquirir destrezas sociales básicas desde la interacción y toma de decisiones del alumnado, como de la

imprescindible reflexión sobre las responsabilidades ciudadanas adquiridas en el uso de las tecnologías de la información. Para mejorar el conocimiento de la organización y funcionamiento de las sociedades se colabora desde el análisis y uso de la información y la comunicación como fuentes de comprensión y transformación del entorno social. La contribución a la competencia en comunicación lingüística se realiza a través de la adquisición de vocabulario específico en los procesos de búsqueda, análisis, selección, resumen y comunicación de información, y en todas las actividades que proponen como finalidad la publicación y difusión de contenidos. La contribución a la competencia para aprender a aprender se materializa mediante estrategias de resolución de problemas donde, tras adquirir los necesarios conocimientos, es imprescindible hacerlos significativos para abordar un proyecto.”

LATÍN (optativa) (p. 30523)

“Desde el Latín se contribuye a la competencia en el tratamiento de la información y competencia digital ya que una parte de la materia requiere la búsqueda, selección y tratamiento de la información. Por otra, en la medida en que se utilicen las tecnologías de la información y la comunicación como herramienta para la comunicación del conocimiento adquirido, se colaborará en la adquisición de la competencia digital.”

LENGUA EXTRANJERA (p. 30529)

“Las competencias citadas están en la actualidad en relación directa con la competencia en tratamiento de la información y competencia digital. Las tecnologías de la información y la comunicación nos ofrecen la posibilidad de comunicarnos en tiempo real con cualquier parte del mundo y también el acceso sencillo e inmediato a un flujo incesante de información que crece cada día. El conocimiento de una lengua extranjera facilita el acceso a la información que se puede encontrar en esta lengua, al tiempo que ofrece la posibilidad de comunicarnos utilizándola. Además, simplifica la comunicación personal a través del correo electrónico o videoconferencia en intercambios con jóvenes de otros lugares, y, lo que es más importante, crea contextos reales y funcionales de comunicación. Asimismo, en la medida en que la lengua extranjera exige el contacto con modelos lingüísticos muy diversos, la utilización de recursos digitales para el aprendizaje, es inherente a la materia y este uso cotidiano contribuye directamente al desarrollo de esta competencia.”

MATEMÁTICAS (p. 30553)

En este apartado sólo indicamos el párrafo del decreto en el que se justifica claramente la aportación desde las Matemáticas a las competencias *matemática* y *tratamiento de la información y competencia digital*.

Los apartados del decreto con mayor detalle en cuanto a los contenidos concretos de cada curso del bloque de contenidos de “Estadística y Probabilidad”, sus criterios de evaluación y objetivos de la materia, están detallados en el anexo 1.

*“Puede entenderse que todo el currículo de la materia contribuye a la adquisición de la **competencia matemática**, puesto que la capacidad para utilizar distintas formas de pensamiento matemático, con objeto de interpretar y describir la realidad y actuar sobre ella, forma parte del propio objeto de aprendizaje. Todos los bloques de contenidos están orientados a aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas, e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad. Conviene señalar que no todas las formas de enseñar Matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: el énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las Matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana.*

.....

*Por su parte, la incorporación de herramientas tecnológicas como recurso didáctico para el aprendizaje y para la resolución de problemas, contribuye a mejorar el **tratamiento de la información y competencia digital** de los estudiantes, del mismo modo que la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico ayuda a interpretar mejor la realidad expresada por los medios de comunicación. No menos importante resulta la interacción entre los distintos tipos de lenguaje: natural, numérico, gráfico, geométrico y algebraico como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de las alumnas y alumnos.”*

MÚSICA (p. 30569)

“La materia de Música también contribuye de manera directa al desarrollo del tratamiento de la información y competencia digital. El uso de los recursos tecnológicos en el campo de la música posibilita el conocimiento y dominio básico del hardware y el software musical, los distintos formatos de sonido y de audio digital o las técnicas de tratamiento y grabación del sonido relacionados, entre otros, con la producción de mensajes musicales, audiovisuales y multimedia. Favorece, asimismo, su aprovechamiento como herramienta para los procesos de autoaprendizaje y su posible integración en las actividades de ocio. Además la obtención de información musical necesita de destrezas relacionadas con el tratamiento de la información aunque desde esta materia, merece especial consideración el uso de productos musicales y su relación con la distribución y los derechos de autor.”

TECNOLOGÍAS (p. 30579)

“La materia contribuye específicamente en el tratamiento de la información y competencia digital mediante varios bloques específicos de contenidos. Es imprescindible su empleo no como fin en sí mismas, sino como herramienta del proceso de aprendizaje.

.....

El análisis de los objetos tecnológicos existentes y la emulación de procesos de resolución de problemas permiten el uso instrumental y contextualizado de herramientas matemáticas, además de los contenidos específicos como son la medición y el cálculo de magnitudes básicas, el uso de escalas, la lectura e interpretación de gráficos y la resolución de problemas basados en la aplicación de expresiones matemáticas”

ÁREAS QUE NO CONTRIBUYEN A ESTA COMPETENCIA

(según el decreto analizado.)

En el decreto no se menciona la contribución a la competencia de *tratamiento de la información y competencia digital* desde las siguientes materias: Educación Física, Ed.Ciudadanía o Cívico-Ética y Segunda lengua extranjera.

No obstante, creemos que existe posible aportación a dicha competencia básica desde el área de Educación Física. Para constatarlo realizamos una búsqueda en el decreto de los conocimientos que pueden estar relacionados con el tratamiento de la información y competencia digital, concretamente en los apartados de objetivos, contenidos y criterios de evaluación de esta asignatura

EDUCACIÓN FÍSICA (p. 30484.)

En la parte de objetivos de Educación Física, aparece uno de ellos (14) que hace referencia al tratamiento de la información, en cambio en la contribución de la materia a esta competencia no aparece ninguna relación ni referencia al respecto. Es más, en el texto, se menciona la contribución de esta asignatura a otras competencias, pero no concretamente a la *tratamiento de la información y competencia digital*.

(p. 30585)

Por lo tanto, se presenta una contradicción, porque en el decreto no está explícita dicha contribución, en cambio en los objetivos sí aparece la relación que existe entre la Educación Física y la competencia básica mencionada.

Objetivos (p. 30487)

(...)

14. *Utilizar las tecnologías de la información y la comunicación como recurso de apoyo a la materia.*

1º ESO

Contenidos

Bloque 1. Condición física y salud

– *Uso de las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información sobre la salud y la condición física.(...)*

Criterios de evaluación (p. 30488)

1. *Recopilar actividades, juegos, estiramientos y ejercicios de movilidad articular apropiados para el calentamiento y realizados en clase. (...)*

8. *Usar las tecnologías de la información y la comunicación de forma cooperativa y con sentido crítico para obtener información relacionada con la Educación física y para establecer intercambio de opiniones con el alumnado de otros centros docentes.*

2º ESO

Contenidos

Bloque 1. Condición física y salud

– *Control de la intensidad del esfuerzo mediante la frecuencia cardíaca: toma de pulsaciones y cálculo de la zona de actividad. (p.30489) (...)*

– *Uso de las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información sobre la salud y la condición física.(...)*

Criterios de evaluación (p. 30490)

9. *Usar las tecnologías de la información y la comunicación de forma cooperativa y con sentido crítico para obtener información relacionada con la Educación física y para establecer intercambio de opiniones con el alumnado de otros centros docentes. (...)*

3º ESO

Contenidos

Bloque 1. Condición física y salud

– *Uso de las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información sobre la salud y la condición física (...)*

Criterios de evaluación (p. 30491)

8. *Usar las tecnologías de la información y la comunicación de forma cooperativa y con sentido crítico para obtener información relacionada con la Educación física y para establecer intercambio de opiniones con el alumnado de otros centros docentes.*

4º ESO

Contenidos

Bloque 1. Condición física y salud

– *Uso de las tecnologías de la información y la comunicación para obtener información sobre la salud y la condición física (...)*

Criterios de evaluación (p. 30493)

10. *Usar las tecnologías de la información y la comunicación de forma cooperativa y con sentido crítico para obtener información relacionada con la Educación física y para establecer intercambio de opiniones con el alumnado de otros centros docentes.”*

CONCLUSIONES DE E.F.

En los cuatro cursos aparecen parte de contenidos y de criterios de evaluación que se pueden relacionar con la competencia tratamiento de la información y competencia digital -en el bloque condición física y salud-, en cambio en el decreto no se manifiesta de forma explícita cuando presenta la contribución del área al desarrollo de las competencias básicas.

ANEXO 3

Contenidos del currículo oficial de la educación primaria (LOE), relacionados con el tratamiento de la información, la Estadística y el razonamiento lógico

La información que se anexa está estructurada siguiendo el mismo orden que viene establecido en el documento oficial, es decir: los bloques de contenidos del área de Matemáticas, contribución del área al desarrollo de las competencias básicas, contenidos y criterios de evaluación del bloque “tratamiento de la información, azar y probabilidad” (información extraída del D. 111/07 por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la comunidad valenciana correspondiente a la ley educativa LOE).

Hemos indicado con subrayado en gris los aspectos del currículum oficial que hacen referencia al tratamiento de la información y el razonamiento lógico; que básicamente aparecen en el bloque de contenidos mencionado.

DISTRIBUCIÓN DE LA MATERIA EN BLOQUES DE CONTENIDOS (p. 30387)

“Los contenidos se han organizado en cuatro bloques que responden al tipo de objetos matemáticos que se manejan en cada uno de ellos: Números y operaciones, Medida, Geometría y Tratamiento de la información, azar y probabilidad. Asimismo, en cada ciclo se han incluido unos contenidos comunes a todos los bloques, que se refieren básicamente a la adquisición de actitudes. Es preciso advertir que esta agrupación es sólo una forma de organizar los contenidos, que habrán de abordarse de manera relacionada. La enseñanza de las Matemáticas atenderá a la configuración cíclica de los contenidos que están siempre relacionados y se construyen unos sobre otros. La resolución de problemas actúa como eje vertebrador que recorre transversalmente todos los bloques y por ello se incluye con especial relevancia en cada uno de ellos.”

EXPLICACIÓN DEL BLOQUE TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN, AZAR Y PROBABILIDAD (p. 30388)

“Los contenidos del bloque 4, Tratamiento de la información, azar y probabilidad, adquieren su pleno significado cuando se presentan en conexión con actividades que implican a otras áreas de conocimiento. Igualmente el trabajo ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, para suscitar el interés por los temas y para ayudar a valorar las ventajas que los conocimientos estadísticos proporcionan en la toma de decisiones, normalmente sobre cuestiones que estudian otras áreas. Tienen importancia en los contenidos que favorecen la presentación de los datos de forma ordenada y gráfica, y permiten

descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas de la vida diaria. A su vez, los contenidos de este bloque deben iniciar en el uso crítico de la información recibida por diferentes medios.

El uso de la calculadora se irá introduciendo como instrumento de apoyo para el cálculo mental, búsqueda de regularidades, comprobación o estimación de resultados, así como herramienta economizadora de tiempo en procesos en los que interese más valorar las estrategias y mecanismos utilizados en la resolución, que en el mismo resultado. No considerándola como sustituta de procesos lógico-matemáticos, que deberán hacerse sin ella. También deberemos tener en cuenta los grandes avances tecnológicos que en poco tiempo se han producido en nuestra sociedad y que en gran parte afectan a la educación y, como no, a las matemáticas. Por lo que en la medida que corresponda se incluirán o incorporarán a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas como soporte tecnológico de primer orden y como herramienta de aprendizaje motivadora a la vez que práctica. Al mismo tiempo, estos avances hacen que la información llegue con gran celeridad y en abundancia por lo que deberá ser analizada y seleccionada desde una perspectiva crítica.

Por último, de modo general, debe garantizarse que el alumnado que termina la Educación Primaria posee un dominio aceptable del cálculo, lo que se conoce como las cuatro reglas, una comprensión de la lectura que le permita entender el enunciado de un problema: la información que recibe y las preguntas que se le plantean, un conocimiento suficiente del sistema métrico decimal y del sistema de medición del tiempo, un lenguaje geométrico mínimo para referirse con propiedad al mundo que le rodea y, finalmente, los conocimientos estadísticos imprescindibles para entender la información que le llega por los medios de comunicación. Todo ello permitirá su promoción a la siguiente etapa de la educación básica en condiciones adecuadas para cursar con aprovechamiento la materia homónima en la Educación Secundaria Obligatoria.”

CONTRIBUCIÓN DEL ÁREA AL DESARROLLO DE LAS COMPETENCIAS BÁSICAS (pp.30388-30390)

“Los contenidos del área se orientan de manera prioritaria a garantizar el mejor desarrollo de la competencia matemática en todos y cada uno de sus aspectos, lo que incluye la mayor parte de los conocimientos y de las destrezas imprescindibles para ello. Es necesario subrayar, sin embargo, que la contribución a la competencia matemática se logra en la medida en que el aprendizaje de dichos contenidos va dirigido precisamente a su utilidad para enfrentarse a las múltiples ocasiones en las que las niñas y los niños emplean las matemáticas fuera del aula.

El desarrollo del pensamiento matemático contribuye a la competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico porque hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. En primer lugar, con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), las niñas y los niños mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de gran utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etc. En segundo lugar, a través de la medida se logra un mejor conocimiento de la realidad y se aumentan las posibilidades de interactuar con ella y de transmitir informaciones cada vez más precisas sobre aspectos cuantificables del entorno. Por último, la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad.

Las Matemáticas contribuyen al tratamiento de la información y competencia digital en varios sentidos. Por una parte porque proporcionan destrezas asociadas al uso de los números, tales como la comparación, la aproximación o las relaciones entre las diferentes formas de expresarlos, facilitando así la comprensión de informaciones que incorporan cantidades o medidas. Por otra, a través de los contenidos del bloque homónimo se contribuye a la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico, esenciales para interpretar la información sobre la realidad. En menor escala, la iniciación al uso de calculadoras y de herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de contenidos matemáticos, está también unida al desarrollo de la competencia digital.

(...)

El carácter instrumental de una parte importante de los contenidos del área proporciona valor para el desarrollo de la competencia para aprender a aprender. A menudo es un requisito para el aprendizaje la posibilidad de utilizar las herramientas matemáticas básicas o comprender informaciones que utilizan soportes matemáticos.
(...)

Para fomentar el desarrollo de la competencia en comunicación lingüística desde el área de Matemáticas se debe insistir en dos aspectos.

Por una parte la incorporación de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y la adecuada precisión en su uso. Por otra parte, es necesario incidir en los contenidos asociados a la descripción verbal de los razonamientos y de los procesos. Se trata tanto de facilitar la expresión como de propiciar la escucha de las explicaciones de los demás, lo que desarrolla la propia comprensión, el espíritu crítico y la mejora de las destrezas comunicativas.” (...)

OBJETIVOS (pp.30390)

“La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como objetivo el desarrollo de las siguientes capacidades:

(...)

7. Utilizar de forma adecuada los medios tecnológicos tanto en el cálculo como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas, así como para la ampliación de los contenidos matemáticos y su relación con otros de las distintas áreas del currículo.

9. Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

11. Inventar y formular problemas matemáticos usando de forma lógica y creativa la comunicación oral, la comprensión lectora y la expresión escrita.

14. Comprender la necesidad de la argumentación mediante razonamientos lógicos en el estudio de las Matemáticas.

CONTENIDOS 1R CICLO (p. 30392)

“Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad

- *Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos.*
- *Utilización de técnicas elementales para la recogida y ordenación de datos en contextos familiares y cercanos .Carácter aleatorio de algunas experiencias” (...)*

CRITERIOS EVALUCIÓN DE ESTOS CONTENIDOS (p.30393)

“17. Obtener información y comunicar oralmente la información obtenida a partir de gráficos sencillos.

18. Formular y resolver problemas sencillos en los que intervenga la lectura de gráficos. (...)”

CONTENIDOS SEGUNDO CICLO (pp.30395-96)

“Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad

- *Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición.*
- *Lectura, interpretación y elaboración de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana.*
- *Construcción de tablas de frecuencias absolutas. (...)”*

CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE ESTOS CONTENIDOS (pp. 30397)

“20. Construir tablas sencillas de recogida de datos, proporcionados desde distintos medios (prensa, libros, informáticos), reconociendo e indicando la frecuencia absoluta de esos datos, y expresar el resultado de forma gráfica.

21. Obtener y comunicar información, de forma clara y ordenada, a partir del estudio y la representación de pictogramas y diagramas de barras sencillos.

22. Resolver problemas relacionados con el entorno que exijan cierta planificación, aplicando dos operaciones con números naturales como máximo, así como los contenidos básicos de geometría o tratamiento de la información y utilizando estrategias de resolución. (...)

CONTENIDOS 3R CICLO (pp. 30399-30400)

“Bloque 4. Tratamiento de la información, azar y probabilidad

- Gráficos y parámetros estadísticos

– Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos.

– Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas.

(...)

– Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales.

– Análisis crítico de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.

(...)”

CRITERIOS DE EVALUACIÓN TERCER CICLO (pp. 30402)

“20. Saber construir tablas sencillas de recogida de datos no agrupados, proporcionados desde distintos medios (prensa, libros, programas informáticos), para facilitar la representación mediante diagramas de barras y sectoriales, y calcular la media aritmética y la moda, interpretando correctamente los resultados.

21. Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos relativos al entorno inmediato. (...)

ANEXO 4

DEBATE DEL SEMINARIO I:

prueba y demostración:

razonamiento matemático

(Tomás Ortega, 2001. V simposio SEIEM)

En este anexo presentamos el resumen realizado por Ortega sobre el debate que se llevó a cabo en el V simposio de la SEIEM (sociedad española de investigación en educación matemática) en torno al tema de la demostración y razonamiento matemático en la etapa de secundaria obligatoria y bachillerato (Ortega, 2001 pp. 65-67).

Se expone el resumen tal y como se publica en las actas correspondientes a este simposio, a excepción del texto que hemos indicado en “negrita” para mostrar las aportaciones que consideramos interesantes para nuestra investigación.

“Se presenta un resumen de las notas tomadas en el transcurso del debate siguiendo el orden de las intervenciones y citando a los autores de las mismas.

*Comienza el Seminario de Investigación a las 9:45 h con la exposición de Marcelino Ibañes, a continuación intervienen César Sáez y Ángel Martínez, que cierra el turno de ponencias. A continuación, en el turno de réplica, interviene José Manuel Matos, que deja planteadas **3 cuestiones para el debate: la primera es de tipo curricular y en ella se pregunta si todos los alumnos deben estudiar demostraciones, y si algunos tipos de alumnos revelan mayores dificultades con las demostraciones; la segunda es de naturaleza didáctica y plantea qué características debe reunir una cultura de aula para que se desarrolle el aprendizaje de la demostración; la tercera es ideológica cuestiona la relación entre la demostración y una racionalidad de génesis europea.***

*Los tres ponentes dan respuestas afirmativas a la primera pregunta. Cesar apuesta por el esquema de Lakatos, **indica que debemos clarificar el concepto de demostración matemática y que si ésta debe ser lógico-deductiva, entonces no debe ser el único camino a seguir en Educación Secundaria.** Marcelino comenta que su exposición está basada en un trabajo de investigación mucho más amplio en el que sí que se ha tenido en cuenta la vertiente curricular, y ello desde distintos enfoques, y que, **incluso, se dan orientaciones curriculares precisas.***

Interviene Juan Díaz Godino afirmando que el campo de la Investigación en Educación Matemática, que es muy amplio, se centra en un enfoque unidimensional, cognitivo-ideológico, pero el campo didáctico, el campo de la acción, requiere

procesos instrumentales. La investigación tiene que pasar al campo de la acción y aquí son muy importantes las situaciones de validación.

Eduardo Lacasta indica que quizás Ibañes se ha centrado más en un enfoque cognitivo; pero que si uno piensa en la filosofía Piagetiana, más allá de los 12-13 años los alumnos están preparados para el pensamiento matemático lógico-deductivo. Sin embargo, según lo que se ha mostrado parece que esta demostración no puede hacerse.

Toma la palabra César Sáez y afirma que la teoría de los estadios de Piaget está superada y que las investigaciones actuales indican que la demostración lógico matemática no se puede abordar, hay que ir a un concepto mucho más amplio, más abierto, y admitir demostraciones menos formales.

Ángel Martínez abunda en este planteamiento y afirma que en Bachillerato deben admitirse demostraciones informales.

Interviene Modesto Sierra postulando que los alumnos de Bachillerato deben hacer demostraciones y que las demostraciones matemáticas que estos alumnos deben hacer son las que aparecen en los libros buenos de matemáticas, y hace la distinción entre finitistas, que son propias de la Geometría, y no finitistas, que son propias del Análisis.

María Lluïsa Fiol destaca que la demostración presenta una matemática muy árida y muy rígida, ya cristalizada, le parece que la demostración bloquea al estudiante. Termina su intervención preguntando cuál es el camino por el que se debe llevar a la gente para que los alumnos pongan en marcha la imaginación y el aspecto creativo.

Tomás Ortega hace referencia a los estilos de la demostración, que tienen que ver con el tipo de inteligencias de los alumnos y afirma que un tipo de demostración adecuada al tipo de inteligencia puede favorecer la creatividad y la imaginación. Como ejemplo cita la propiedad citada por Ángel Martínez del ángulo de las bisectrices de dos ángulos adyacentes y afirma que echa en falta un estilo geométrico, que para muchos alumnos podía ser más interesante. Después, citando la tesis de Marcelino Ibañes, indica la conveniencia de distinguir la demostración matemática de otros procesos, ya presentes en la literatura como vías intermedias entre la explicación intuitiva y la demostración formal, destaca Harel y Showder (1998) utilizan el término de esquema de prueba desde la perspectiva del alumno y hacen una clasificación, que es

completada por Ibañes en 2001, T. Ortega propone la utilización de esta terminología, ya establecida.

*M^a Victoria Sánchez propone pasar a debatir el punto que hace referencia a **la cultura de aula y propone que se promueva el aprendizaje de la demostración.***

Carlos Castro indica que él lo plantearía en términos de contrato didáctico y que sí que pediría a los alumnos de Bachillerato que “probaran algo”, ahora, esto se hace de forma muy mutilada.

José Manuel Matos afirma que si pensamos en la demostración con perspectivas de futuro, entonces, ésta tiene que ver, como proceso, con otras características, y sí que se deben hacerse demostraciones porque éstas son el único vehículo para establecer matemáticas. Sin embargo, sólo los alumnos que van a cursar “Ciencias” en la Universidad son los que necesitan estudiar el tipo clásico de demostraciones. Termina su intervención haciendo referencia a los tipos de alumnos, afirmando que hay relaciones de tipo epistemológico que se reflejan más en los alumnos de la periferia de las grandes ciudades.

*Nuria Rosich postula que **el tema de las demostraciones se plantea desde el punto de vista de los que enseñamos y, si bien es verdad que muchas veces se pretende despertar la imaginación y la creatividad en los alumnos, muchas otras se plantea la clase sin la finalidad clara de que los alumnos razonen, justifiquen, construyan, etc.***

*Juan Díaz Godino lanza como hipótesis de trabajo que hay una postura de “**confusión argumentativa**” en el seno de la clase de matemáticas, de tal manera que **en las fases exploratorias de resolución de problemas, es necesario utilizar cualquier tipo de recurso exploratorio** (incluyendo razonamientos de tipo inductivo, analógico, etc.). Pero en la fase de institucionalización de los conocimientos la argumentación que se requiere es de tipo deductivo. Los alumnos no discriminan de manera inmediata las circunstancias en las que es pertinente cada tipo de argumentación.*

*Se producen otras intervenciones apuntando que hay una orientación corriente en la que se ha pasado de una matemática universal a otra muy concreta, del “2+2” al “dos cosas concretas + dos cosas concretas”. **En algún punto hay que basarse en el razonamiento matemático, porque es el fundamento del conocimiento matemático, y el pensamiento abstracto es el núcleo y la base de la matemática.***

*Finaliza el debate con la intervención de T. Ortega indicando que **el razonamiento matemático no es sinónimo de demostración matemática** y señala la dificultad que ésta entraña y hace una reflexión en voz alta preguntándose el porqué buen número de sus alumnos del CAP, que se han pasado cinco años demostrando, no consiguen demostrar que los ángulos opuestos por el vértice son iguales.*

Siendo las 13:30 el coordinador agradece el trabajo realizado a los tres ponentes y al reactor, lamenta la incomparecencia de Philippe R. Richard, y da por terminado el Seminario de Investigación. Este Seminario ha tenido una asistencia de 58 personas”. Tomás Ortega (2001, pp. 65-67).

ANEXO 5

Ejemplos de pruebas de aptitudes diferenciales, utilizadas por el gabinete psicopedagógico del colegio “Grans i menuts”, para evaluar el razonamiento “lógico”

Hemos querido presentar estas pruebas de aptitudes sobre razonamiento lógico porque son las que se utilizan en el centro donde se ha realizado la experimentación (colegio “Grans i menuts”, de Castellón). A su vez, permiten ver cómo un mismo objeto “el razonamiento lógico” es distinto según la institución en donde se considere. En este caso el razonamiento lógico desde la Psicopedagogía, porque no es sólo el gabinete de este centro, sino que son unas pruebas de uso generalizado en gran número de centros.

Presentamos las pruebas que usan para medir el razonamiento lógico a partir de tres ítems: analogías verbales, series numéricas y matrices lógicas (pruebas 1, 2 y 3 respectivamente). Las tres primeras pruebas que anexamos son las del nivel tercer ciclo de primaria y las tres siguientes (para los mismos ítems) para niveles de secundaria obligatoria.

Se puede observar que al principio de cada prueba están las instrucciones para realizarla, donde se explica que la prueba está formada por 32 ejercicios. En el anexo sólo hemos presentado a modo de ejemplo, parte de la misma.

Las pruebas para tercer ciclo de primaria son, por ejemplo:

Rv (E3) ANALOGÍAS VERBALES 2

ANALOGÍAS VERBALES

PRUEBA 1

INSTRUCCIONES DE ADMINISTRACIÓN

Se trata de encontrar relaciones analógicas semejantes entre conceptos. Una de las relaciones nos la dan completa y a la otra le falta un término que hay que buscar entre las cinco posibles respuestas.

Deben responder en PRUEBA 1, COLOR NARANJA, ANALOGÍAS, en la página 2 de su *hoja de respuestas* y una vez completados los datos de la portada de esa *hoja de respuestas*.

Fijense en el **ejemplo y**: la respuesta correcta es la 'L', *plumas*, porque el pájaro se cubre con plumas y el pez con escamas. Rodeen con un círculo la letra 'L', en su *hoja de respuestas*, junto al **ejemplo y**. Vean donde pone HOJADE RESPUESTAS, cómo pueden corregir una equivocación. En este ejemplo está tachada la letra 'O', por haberse marcado equivocadamente.

Ejemplo z: la respuesta correcta es *oír*, la 'R', ya que con el oído oímos y con el ojo vemos. Rodeen con un círculo la letra 'R' en su *hoja de respuestas*, junto al **ejemplo z**.

Cuando se indique, deben comenzar en la página siguiente por el ejercicio 1 en adelante, hasta un máximo posible de 32 ejercicios. Aprovechen con intensidad el tiempo, pero si no terminan no se preocupen, que es bastante habitual. No se entretengan demasiado en una sola pregunta. La que no sepan la pueden saltar. ¿Alguna duda antes de empezar? (es el momento de aclarar las posibles dudas que puedan haber surgido)

Para hacer esta prueba disponen de:

5º PRIMARIA=7 minutos	6º PRIMARIA=6 minutos
1º ESO=5 minutos	

- 17 trueno es a oído como relámpago es a → ?
brillo .F rayo .G ceguera .H tormenta .I vista .J
- 18 profecía es a futuro como historia es a → ?
pasado .K asignatura .L cuento .M prehistoria .N presente .O
- 19 animal es a piel como árbol es a → ?
madera .P ramaje .Q tronco .R corteza .S hojas .T
- 20 alcalde es a ciudadano como general es a → ?
nación .V guerra .W soldado .X ejército .Y sargento .Z
- 21 vertical es a pared como horizontal es a → ?
muro .A suelo .B mesa .C línea .D tumbado .E
- 22 escudo es a defensa como lanza es a → ?
lanzamiento .F ataque .G puntaguda .H empuje .I persecución .J
- 23 ciudad es a barrio como bosque es a → ?
arboleda .K árbol .L arbusto .M selva .N pino .O
- 24 excavadora es a tierra como segadora es a → ?
labrador .P campo .Q hierba .R maquinaria .S huerta .T
- 25 planta es a raíces como edificio es a → ?
sótanos .V ladrillos .W vigas .X cimientos .Y paredes .Z
- 26 carretera es a superficie como túnel es a → ?
cueva .A oscuridad .B perforación .C interioridad .D profundidad .E
- 27 reina es a súbdito como alcaldesa es a → ?
alcaldía .F ciudadano .G ciudad .H trabajador .I secretario .J
- 28 oscuro es a opaco como claro es a → ?
visible .K negruzco .L sólido .M transparente .N acristalado .O
- 29 paraguas es a lluvia como sombrero es a → ?
calor .P gorra .Q rayos de sol .R cabeza .S viento .T
- 30 electricidad es a televisor como gasolina es a → ?
petróleo .V movimiento .W gasolinera .X gasóleo .Y avión .Z
- 31 tartamudear es a hablar como tropezar es a → ?
caminar .A caer .B pie .C acelerar .D engancharse .E
- 32 restaurar es a mejorar como corroer es a → ?
perder .F demorar .G deteriorar .H oxidar .I ensuciar .J

Rn (E3) SERIES NUMÉRICAS 6

SERIES NUMÉRICAS

PRUEBA 2

INSTRUCCIONES DE ADMINISTRACIÓN

Se trata de completar cada serie numérica con el número que debería ir a continuación, teniendo en cuenta que los números están ordenados siguiendo cada vez una secuencia lógica.

Deben responder en PRUEBA 2, COLOR MORADO, SERIES, de su hoja de respuestas.

Ejemplo y: 19 16 13 10 → ? . Esta serie va disminuyendo cada vez 3 unidades. El número que debe ponerse a continuación es el '7'. Como en ninguna de las respuestas indicadas pone '7', deben elegir la última como la respuesta buena, la que pone *otra distinta*. Cuando no vean ninguna respuesta adecuada, deben elegir la última, *otra distinta*. Rodeen con un círculo la letra 'O', junto al **ejemplo y**, en su hoja de respuestas.

Ejemplo z: 12 12 14 14 16 → ? . En esta serie se va repitiendo un número (o aumentando 0 unidades) y luego aumenta 2 unidades. El número que la continuaría es el '16'. Rodeen con un círculo la letra 'R' en su hoja de respuestas, junto al **ejemplo z**.

Cuando se indique, deben empezar en la página siguiente por el ejercicio 1 en adelante, hasta un máximo posible de 32 ejercicios. Aprovechen con intensidad el tiempo, pero si no terminan no se preocupen, que es bastante habitual. No se entretengan mucho en una sola pregunta. Las que no sepan las pueden saltar. Si tienen que escribir algo pueden hacerlo en su *hoja de respuestas* donde pone 'Apuntes Borrador'. ¿Alguna duda antes de empezar? (es el momento de aclarar las posibles dudas que puedan haber surgido)

Para hacer esta prueba disponen de:

5º PRIMARIA=9 minutos 6º PRIMARIA=8 minutos
1º ESO=7 minutos

Rn	(E3)	SERIES NUMÉRICAS						8
1	2	4	6	8	10 → ?			
			11 .F		14 .G	12 .H	13 .I	otra distinta .J
2	1	3	5	7	9 → ?			
			10 .K		12 .L	8 .M	11 .N	otra distinta .O
3	17	15	13	11	9 → ?			
			10 .P		7 .Q	8 .R	6 .S	otra distinta .T
4	4	8	12	16	→ ?			
			20 .V		18 .W	19 .X	17 .Y	otra distinta .Z
5	50	45	40	35	30 → ?			
			20 .A		29 .B	28 .C	25 .D	otra distinta .E
6	8	15	22	29	→ ?			
			37 .F		36 .G	35 .H	33 .I	otra distinta .J
7	20	17	14	11	→ ?			
			9 .K		6 .L	8 .M	7 .N	otra distinta .O
8	5	10	10	15	20	20 → ?		
			25 .P		20 .Q	30 .R	22 .S	otra distinta .T
9	6	6	12	12	24 → ?			
			28 .V		48 .W	36 .X	24 .Y	otra distinta .Z
10	48	42	36	30	→ ?			
			24 .A		20 .H	26 .G	28 .D	otra distinta .F
11	7	8	10	11	13	14 → ?		
			15 .F		16 .G	17 .H	18 .I	otra distinta .J
12	6	8	11	13	16	→ ?		
			20 .K		18 .L	19 .M	21 .N	otra distinta .O
13	8	8	14	14	20	20 → ?		
			26 .P		20 .Q	24 .R	21 .S	otra distinta .T
14	80	76	70	66	60	→ ?		
			54 .V		52 .W	56 .X	50 .Y	otra distinta .Z
15	90	70	50	→ ?				
			40 .A		10 .B	60 .C	20 .D	otra distinta .E
16	32	32	29	29	26	26 → ?		
			23 .F		22 .G	25 .H	26 .I	otra distinta .J

Re (E3) MATRICES LÓGICAS 10

MATRICES LÓGICAS

PRUEBA 3

INSTRUCCIONES DE ADMINISTRACIÓN

Se trata de buscar en cada ejercicio el dibujo que debe ir por lógica donde está la interrogación.

Deben responder en **PRUEBA 3, COLOR AZUL, MATRICES**, de su *hoja de respuestas*.

Ejemplo y: en ese espacio rectangular van aumentando de tamaño los círculos blancos y los cuadrados grises. Donde la interrogación falta un círculo blanco más grande que el anterior. La respuesta correcta es la 'E'. Rodeen con un círculo la letra 'E' en su *hoja de respuestas*, junto al **ejemplo y**.

Ejemplo z: *deben ver cómo se ordenan esas figuras y cuál deberíamos poner en lugar de la interrogación.* Será una figura grande porque abajo son todas más grandes que las de arriba. Será negra porque cuando arriba es blanca abajo es negra. Y tendrá forma circular, porque arriba y abajo se repite la misma forma. La respuesta correcta es la 'G'. Rodeen con un círculo la letra 'G', junto al **ejemplo z**, en su *hoja de respuestas*.

Cuando se indique, deben empezar en la página siguiente por el ejercicio 1 en adelante, hasta un máximo posible de 32 ejercicios. Aprovechen con intensidad el tiempo, pero si no terminan no se preocupen, que es bastante habitual. No se entregan demasiado en una sola pregunta. Las que no sepan las pueden saltar. ¿Alguna duda antes de empezar? (es el momento de aclarar las posibles dudas que puedan haber surgido)

Para hacer esta prueba disponen de:

5° PRIMARIA=9 minutos	6° PRIMARIA=8 minutos
1° ESO=8 minutos	

1

○	□□	△△	□□□□
?	□□	△	□

K	L	M	N	O
□□	○○	○○	□□	○○○

2

□	□	?	⬡
○	○	△	△

P	Q	R	S	T
□	△	⬡	⬡	○

3

?	⊥	⊥	
⌋	⌋	⌋	⌋

V	W	X	Y	Z
⊥	⊥	⊥	⊥	⊥

4

⬢	▨	▲	?
⬢	■	▲	●

A	B	C	D	E
●	▨	⊙	▨	▲

5

?	■	■	■
△	△	△	△

F	G	H	I	J
△	□	■	⬡	■

6

?	⬢	⬢	⬢
□	△	◇	⬡

K	L	M	N	O
⬢	⊙	⊙	○	⬡

Pruebas para la etapa de ESO.

Rv (M) ANALOGÍAS VERBALES 2

ANALOGÍAS VERBALES

PRUEBA 1

INSTRUCCIONES DE ADMINISTRACIÓN

Se trata de encontrar relaciones analógicas semejantes entre conceptos. Una de las relaciones nos la dan completa y a la otra le falta un término que hay que buscar entre las cinco posibles respuestas.

Deben responder en PRUEBA 1, COLOR NARANJA, ANALOGÍAS, en la página 2 de su *hoja de respuestas* y una vez completados los datos de la portada de esa *hoja de respuestas*.

Fíjense en el **ejemplo y**: la respuesta correcta es la 'K', *timón*, porque con el timón se dirige el barco y con el volante se dirige el automóvil. Rodeen con un círculo la letra 'K', en su *hoja de respuestas*, junto al **ejemplo y**. Vean donde pone HOJA DE RESPUESTAS cómo pueden corregir una equivocación. Está tachada la letra 'O', por haberse marcado equivocadamente.

Ejemplo z: la respuesta correcta es la 'S', *suelo* porque, así como el suelo se encuentra abajo, el techo se encuentra arriba. Rodeen con un círculo la letra 'S' en su *hoja de respuestas*, junto al **ejemplo z**.

Cuando se indique, deben comenzar en la página siguiente por el ejercicio 1 en adelante, hasta un máximo posible de 32 ejercicios. Aprovechen con intensidad el tiempo, pero si no terminan no se preocupen, que es bastante habitual. No se entretengan demasiado en una sola pregunta. La que no sepan la pueden saltar. ¿Alguna duda antes de empezar? (es el momento de aclarar las posibles dudas que puedan haber surgido)

Para hacer esta prueba disponen de:

1º ESO=8 minutos	2º ESO=7 minutos
3º ESO=7 minutos	4º ESO=6 minutos

Rv (M)	ANALOGÍAS VERBALES				4
1	comida es a	hambre como	bebida es a	→ ?	
	sequedad .A	sed .B	agua .C	líquido .D	botella .E
2	lluvia es a	gota como	nieve es a	→ ?	
	nevada .F	granizo .G	capo .H	agua .I	frío .J
3	lejos es a	allá como	cerca es a	→ ?	
	acá .K	cercano .L	próximo .M	ahí .N	por aquí .O
4	decapitado es a	cabeza como	→ ?	es a	mano
	inválido .P	brazo .Q	pie .R	manco .S	codo .T
5	barco es a	pasajero como	hotel es a	→ ?	
	visitante .V	viajante .W	paseante .X	veraneante .Y	huésped .Z
6	prado es a	césped como	calle es a	→ ?	
	carretera .A	coches .B	asfalto .C	peatones .D	aceras .E
7	luz es a	ceguera como	→ ?	es a	sordera
	deficiencia .F	sonido .G	estruendo .H	orejas .I	aislamiento .J
8	ciclista es a	→ ?	como	levantador de pesas es a	brazos
	caderas .K	pedales .L	bicicleta .M	pies .N	piernas .O
9	transparente es a	claro como	→ ?	es a	oscuro
	apelmazado .P	negruzco .Q	traslúcido .R	opaco .S	sólido .T
10	tartamudear es a	hablar como	tropezar es a	→ ?	
	canliar .V	pie .W	engancharse .X	obstaculizar .Y	empujar .Z
11	ingerir es a	estómago como	inspirar es a	→ ?	
	oxígeno .A	pulmones .B	respiración .C	expirar .D	tráquea .E
12	cerrar es a	→ ?	como	abrir es a	facilitar
	destapar .F	quitar .G	clausurar .H	impedir .I	dificultar .J
13	profetisa es a	futuro como	→ ?	es a	pasado
	historiadora .K	anciana .L	antigüedad .M	previo .N	Edad Media .O
14	planta es a	raíces como	edificio es a	→ ?	
	muros .P	vigas .Q	cimientos .R	sótano .S	paredes .T
15	constelación es a	estrella como	archipiélago es a	→ ?	
	bahía .V	isla .W	mar .X	península .Y	continente .Z
16	escudo es a	→ ?	como	lanza es a	ataque
	muralia .A	tapar .B	retaguardia .C	defensa .D	espera .E

Rn (M) SERIES NUMÉRICAS 6

SERIES NUMÉRICAS

PRUEBA 2

INSTRUCCIONES DE ADMINISTRACIÓN

Se trata de completar cada serie numérica con el número que debería ir a continuación, teniendo en cuenta que los números están ordenados siguiendo cada vez una secuencia lógica.

Deben responder en PRUEBA 2, COLOR MORADO, SERIES, de su *hoja de respuestas*.

Ejemplo: 21 17 13 9 → ?. Esta serie va disminuyendo cada vez 4 unidades. El número que la continúa es el '5'. Como en ninguna de las respuestas indicadas pone '5', deben elegir la última como la respuesta buena, la que pone *otra distinta*. Cuando no vean ninguna respuesta adecuada, deben elegir la última, *otra distinta*. Rodeen con un círculo la letra 'O', junto al **ejemplo y**, en su *hoja de respuestas*.

Ejemplo z: 6 12 10 16 14 20 → ?. Esta serie va aumentando 6 unidades y luego disminuyendo 2. El número que debería ir a continuación es el '18'. Rodeen con un círculo la letra 'Q' en su *hoja de respuestas*, junto al **ejemplo z**.

Quando se indique, deben empezar en la página siguiente por el ejercicio 1 en adelante, hasta un máximo posible de 32 ejercicios. Aprovechen con intensidad el tiempo, pero si no terminan no se preocupen, que es bastante habitual. No se entretengan mucho en una sola pregunta. Las que no sepan las pueden saltar. Si tienen que escribir algo pueden hacerlo en su *hoja de respuestas* donde pone 'Apuntes Borrador'. ¿Alguna duda antes de empezar? (es el momento de aclarar las posibles dudas que puedan haber surgido)

Para hacer esta prueba disponen de:

1º ESO=10 minutos	2º ESO=9 minutos
3º ESO=8 minutos	4º ESO=7 minutos

Rn (M)	SERIES NUMÉRICAS						8
1	13	15	17	19	→ ?		
		18.F		22.G	21.H	20.I	otra distinta .J
2	23	23	19	19	15 → ?		
		14.K		12.L	11.M	15.N	otra distinta .O
3	20	25	30	35	→ ?		
		36.P		40.Q	45.R	38.S	otra distinta .T
4	16	13	10	7	4 → ?		
		1.V		0.W	3.X	2.Y	otra distinta .Z
5	4	4½	9	9½	19 → ?		
		38.A		29%.B	20.C	19%.D	otra distinta .E
6	1,2	2,3	3,4	4,5	→ ?		
		4,6.F		5,6.G	5,5.H	6,5.I	otra distinta .J
7	4	8	8	16	16	32	32 → ?
		48.K		62.L	64.M	96.N	otra distinta .O
8	6,6	7	7,4	7,8	8,2 → ?		
		8,6.P		9,5.O	8,8.R	9.S	otra distinta .T
9	64	32	16	8	→ ?		
		0.V		6.W	2.X	4.Y	otra distinta .Z
10	8	6½	6	4½	→ ?		
		4.A		1½.B	3.C	2½.D	otra distinta .E
11	2,2	1,8	1,4	1	→ ?		
		0.F		0,6.G	0,5.H	0,8.I	otra distinta .J
12	6	12	14	28	30	60	→ ?
		120.K		62.L	90.M	64.N	otra distinta .O
13	24	20	40	36	72 → ?		
		68.P		66.Q	84.R	144.S	otra distinta .T
14	1,1	1,3	1,7	1,9	2,3 → ?		
		2,6.V		2,4.W	2,5.X	2,7.Y	otra distinta .Z
15	2	4	5	10	11	22	23 → ?
		24.A		48.B	34.C	12.D	otra distinta .E
16	60	40	42	22	24 → ?		
		4.F		12.G	26.H	20.I	otra distinta .J

MATRICES LÓGICAS

PRUEBA 3

INSTRUCCIONES DE ADMINISTRACIÓN

Se trata de buscar en cada ejercicio el dibujo que debe ir por lógica donde está la interrogación.

Deben responder en PRUEBA 3, COLOR AZUL, MATRICES, de su *hoja de respuestas*.

Ejemplo y: en ese espacio rectangular falta una figura donde la interrogación. Las figuras están ordenadas siguiendo una lógica, por lo que podemos deducir la que falta. Será una figura blanca y de forma circular, porque arriba todas son blancas y se repite arriba y abajo la misma forma. La respuesta correcta es la 'E'. Rodeen con un círculo la letra 'E' en su *hoja de respuestas*, junto al **ejemplo y**.

Ejemplo z: comprueben que la circunferencia pequeña va saliendo de la grande, en la fila de abajo, en dirección contraria que en la de arriba. Miren abajo a la izquierda: la circunferencia pequeña está tocando a la grande por fuera. Después entra la mitad. Luego entra entera tocando por dentro en un solo punto y finalmente queda en el centro de la grande. Arriba va ocurriendo lo mismo pero empezando por el lado opuesto. La respuesta correcta es la 'F'. Rodeen con un círculo la letra 'F', junto al **ejemplo z**, en su *hoja de respuestas*.

Quando se indique, deben empezar en la página siguiente por el ejercicio 1 en adelante, hasta un máximo posible de 32 ejercicios. Aprovechen con intensidad el tiempo, pero si no terminan no se preocupen, que es bastante habitual. No se entreguen demasiado en una sola pregunta. Las que no sepan las pueden saltar. ¿Alguna duda antes de empezar? (es el momento de aclarar las posibles dudas que puedan haber surgido)

Para hacer esta prueba disponen de:

1º ESO=10 minutos
3º ESO=9 minutos

2º ESO=10 minutos
4º ESO=9 minutos

Re (M) MATRICES LÓGICAS 12

1

			?

K L M N O

--	--	--	--	--

2

	?		

P Q R S T

--	--	--	--	--

3

		?	

V W X Y Z

--	--	--	--	--

4

	?		

A B C D E

--	--	--	--	--

5

			?

F G H I J

--	--	--	--	--

6

			?

K L M N O

--	--	--	--	--

ANEXO 6

**CHIC (Classification Hiérarchique
Implicative et Cohésitive) que
implementa los cálculos de las técnicas
de análisis estadístico implicativo (ASI)**

EL PROGRAMA

CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) es un programa informático estadístico adaptado por Gras (1992) y Gras y Larher (1992.) a partir de los índices de proximidad o distancia de Lerman (1981) (uno de los índices del análisis tipológico).

Este software realiza el tratamiento automático de los cálculos estadísticos sobre variables binarias o variables cuantitativas entre $[0,1]$, obteniendo como resultado distintos grafos, según el tipo de clasificación que se le aplica: clasificación según los índices de proximidad o distancia, clasificación jerárquica, clasificación implicativa, clasificación cuasi-implicativa o clasificación inclusiva. El propio programa facilita, además de los distintos gráficos, todos los cálculos estadísticos que ha realizado, esto es: frecuencias, porcentajes, medias aritméticas, índices de proximidad/distancia, índices de correlación, índices de la cohesión implicativa, etc.

A partir de los gráficos que proporciona este programa informático se pueden obtener clases de casi-equivalencia entre las variables estudiadas. Esta partición del conjunto de los datos, permite obtener conclusiones acerca de la población tratada, tanto a nivel de clasificación por similaridad como por la jerarquía, según el grado de implicación entre dichas clases.

A continuación se expone un **ejemplo** para explicar los cálculos estadísticos y los árboles o grafos que realiza el programa **CHIC** (Gras, R. 1995a, pp. 211-216).

A partir del título del artículo de Gras: "*Traitement a la main de tableaux de données par des méthodes classificatoires*" en el que expone este ejemplo, se puede deducir que se muestra una situación en la que se consideran pocos datos, y por lo tanto se pueden realizar "a mano" los cálculos que se necesiten. Estos cálculos estadísticos (para obtener la clasificación/implicación entre sujetos o criterios) resultan relativamente sencillos cuando se tratan pocas variables, y el software C.H.I.C. nos proporciona con mucha más rapidez los mismos resultados (cálculos y gráficos), convirtiéndose, por tanto, en una herramienta de trabajo muy útil cuando se tratan conjuntos con muchos más datos.

Veamos pues, los distintos cálculos (de proximidad, implicación cohesiva y estadística) y gráficos a partir de dicho ejemplo.

CÁLCULO DE PROXIMIDADES: árbol de similaridad.

Supongamos que la siguiente matriz booleana se obtiene a partir de la observación de seis variables (a,b,...f) sobre 9 individuos:

Variables Individuos	a	b	c	d	e	f
1	1	1	1	0	1	0
2	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	1	0
5	1	0	0	1	0	1
6	0	1	1	1	0	1
7	1	0	0	1	1	0
8	0	1	1	0	0	1
9	0	1	1	0	1	1
Frecuencia (presencia): n_i	5	5	5	5	5	5

Tabla P₁

A partir de esta tabla (P₁) se obtienen las co-presencias entre las distintas variables (valor 1 en ambas variables, es decir, 1-1). El resultado es la siguiente matriz **simétrica**:

Co-presen.(P)	b	c	d	e	f
a	2	2	3	3	2
b		5	2	2	3
c			2	2	3
d				2	2
e					2

Tabla P₂

Para cada pareja de variables, se calculan los **índices de proximidad s(x,y)**, según el **modelo de Poisson**, es decir:

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) \leq P] = \sum_{k=1}^P \text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = k]$$

donde P es el valor del $\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y})$; (es decir, las co-presencias entre x e y)
 y según el modelo de Poisson, la

$$\text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = k] = \exp(-\lambda) \cdot \frac{(\lambda)^k}{k!} \quad \text{donde } \lambda = \frac{n_x \cdot n_y}{n}$$

Siendo n_i la frecuencia de presencias de la variable "i" y n el total de individuos.

En la tabla P₁ todos los valores de n_i coinciden en todas las variables (frecuencia de presencias de cada variable igual a 5). Esto nos simplifica los cálculos, que según la fórmula anterior corresponden a:

Si $k = 0 \rightarrow \text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = 0] = 0.06218$

Si $k = 1 \rightarrow \text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = 1] = 0.1727$

Si $k = 2 \rightarrow \text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = 2] = 0.23987$

Si $k = 3 \rightarrow \text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = 3] = 0.22211$

Si $k = 4 \rightarrow \text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = 0] = 0.15424$

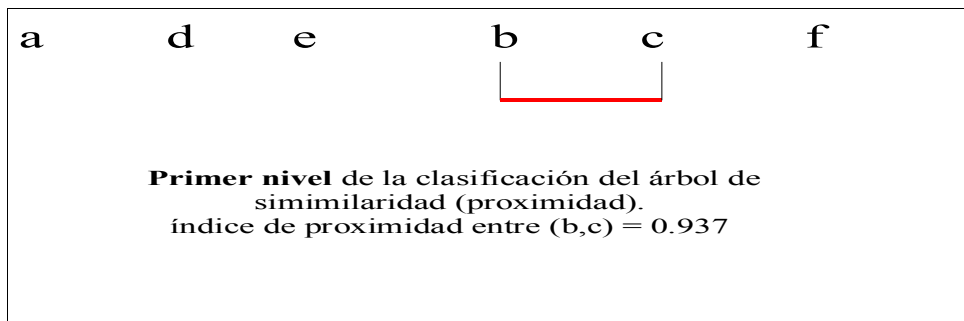
Si $k = 0 \rightarrow \text{Prob} [\text{card}(\mathbf{x} \cap \mathbf{y}) = 0] = 0.08569$

Realizando los sumatorios correspondientes, se calculan los índices de proximidad $s(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de cada par $\{x, y\}$ de variables. De esta manera se obtiene la siguiente **tabla simétrica**:

variables	b	c	d	e	f
a	0.4747	0.4747	0.6969	0.6969	0.4747
b		0.937	0.4747	0.4747	0.6969
c			0.4747	0.4747	0.6969
d				0.4747	0.4747
e					0.4747

Tabla P₃

Como se puede observar en la tabla P₃, el mayor índice de similaridad corresponde al par (b,c), por lo tanto en el árbol de similaridad (proximidad) formarán el primer nivel de la clasificación, es decir, formarán la primera clase de casi-equivalencia como se indica en el siguiente gráfico:



Para obtener el segundo nivel de la clasificación por proximidades, se deben calcular los índices de proximidad de los pares que siguen “libres” y de los pares de la forma $\{\{b,c\}, i\}$, donde “i” puede ser en este caso: a, d, e o f. Los índices de proximidad de estos pares, se obtienen a partir del siguiente algoritmo:

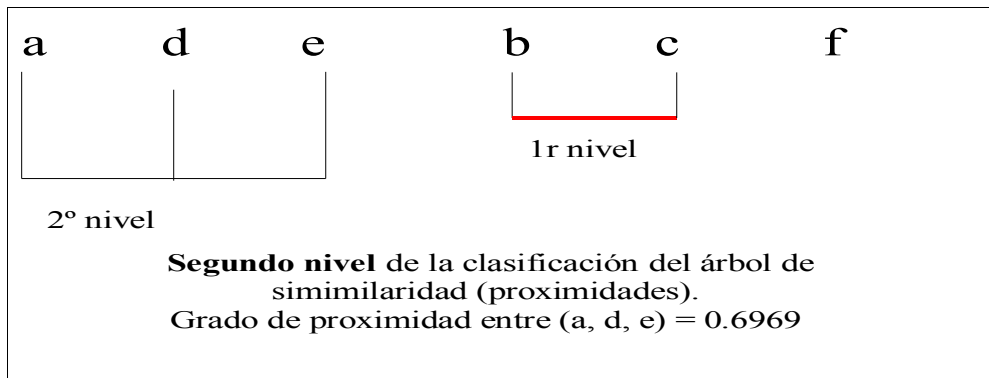
$$P[\{\{b,c\}, i\}] = [\max(s(b,i), s(c,i))]^2$$

A partir de la tabla P₃ y siguiendo este algoritmo se obtienen los siguientes resultados.

variables	{b, c}	d	e	f
a	$(0.4747)^2$	0.6969	0.6969	0.4747
{b, c}		$(0.4747)^2$	$(0.4747)^2$	$(0.6969)^2$
d			0.4747	0.4747
e				0.4747

Tabla P₄

Los índice s(a,d) y s(a,e) coinciden y son los de mayor valor de la tabla P₄, por lo tanto {a, d, e} formarán la siguiente clase de cuasi-equivalencia, tal y como se indica en el siguiente árbol:



Los siguientes cálculos se realizan a partir de los pares “libres” y los de la forma:

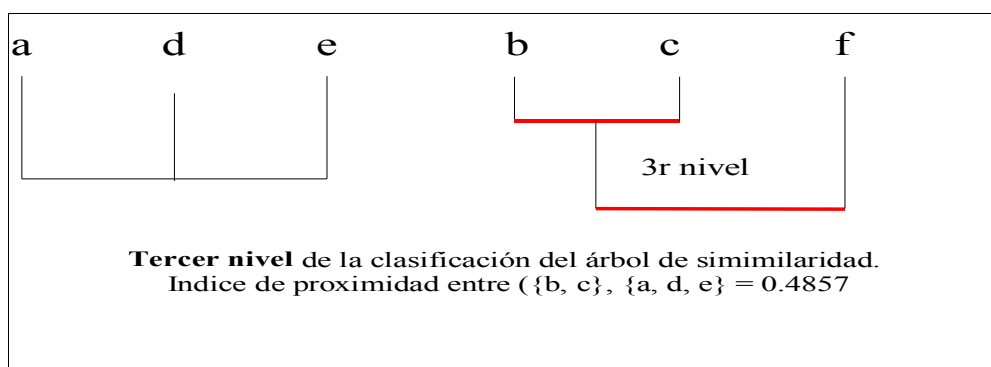
$$P [\{b, c\}, \{a, d, e\}] = [\max (s(b,a),s(b,d),s(b,e),s(c,a),s(c,d),s(c,e))]^{2 \times 3}$$

Según la tabla P₃ y esta última fórmula se obtienen los siguientes resultados:

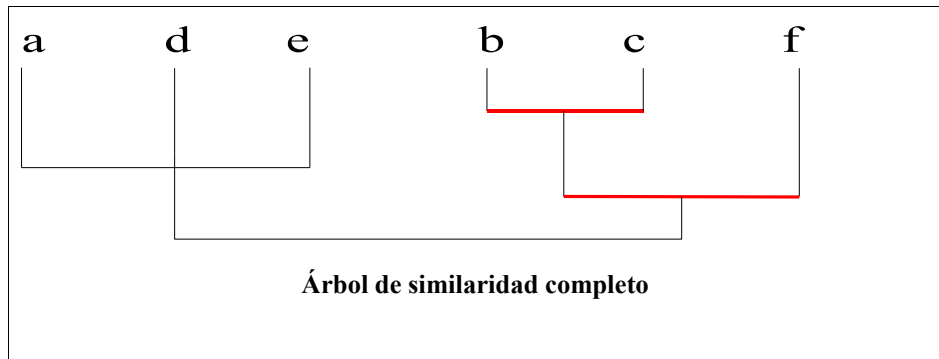
variables	{b, c}	f
{a,d,e}	$(0.4747)^6 = 0.1144$	$(0.4747)^3 = 0.1070$
{b, c}		$(0.6969)^2 = 0.4857$

Tabla P₅

A partir de los resultados de la tabla P₅ se obtiene el siguiente nudo o nivel de proximidad, que une la clase {b,c} con la variable f y cuyo índice corresponde al valor 0.4857. En el siguiente gráfico se reflejan estos resultados:



El último nudo sería el nivel que une ambas clases de cuasi-equivalencia obteniendo así el **árbol de similitud completo**:



Así pues hemos obtenido el **árbol de similitud** o proximidad entre las variables observadas. Según todos los cálculos realizados se puede deducir que este árbol es **simétrico**, es decir, la clase {a,b} coincide con la {b,a}, por lo tanto en este grafo “no es significativa” la dirección del nudo que une las variables.

ANÁLISIS IMPLICATIVO: árbol jerárquico de cohesión y grafo implicativo.

Supongamos que la siguiente matriz booleana se obtiene a partir de la observación de cinco variables (a,b,...e) sobre 10 individuos:

Variables Individuos	a	b	c	d	e
1	0	1	1	0	0
2	1	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1
4	1	0	1	1	0
5	1	0	0	1	1
6	0	1	0	0	0
7	1	0	0	0	1
8	0	1	1	1	0
9	1	0	1	1	1
10	0	0	0	1	1
frecuencia (presencia): n_i	5	3	4	7	6

Tabla I₁

Se define (Gras R. 1979) la **intensidad de la implicación** entre dos variables x e y: $x \rightarrow y$, como el valor de la probabilidad:

$$\varphi(\mathbf{x}, \bar{y}) = \mathbf{Prob}[(Q(\mathbf{x}, \bar{y}) > q(\mathbf{x}, \bar{y}))] \text{ cuando } n_x \leq n_y$$

siendo $Q(\mathbf{x}, \bar{y})$ la variable centrada y reducida, deducida de la variable aleatoria $\text{card}(x \cap \bar{y})$; $q(\mathbf{x}, \bar{y})$ una realización de $Q(\mathbf{x}, \bar{y})$

Como $\text{Prob}[Q(\mathbf{x}, \bar{y}) > q(\mathbf{x}, \bar{y})] = 1 - \text{Prob}[Q(\mathbf{x}, \bar{y}) \leq q(\mathbf{x}, \bar{y})]$ y esta última probabilidad la tenemos definida según el modelo de Poisson, en los índices de proximidades, se puede definir la intensidad de implicación según el modelo de Poisson o según el modelo de Gauss.

Cuando las condiciones de aproximación por la ley normal de una ley de Poisson son respetadas (teorema Central Límite específico de la ley de Poisson), entonces $Q(\mathbf{x}, \bar{y})$ es $N(0,1)$. De esta manera los valores de $Q(\mathbf{x}, \bar{y})$ y $q(\mathbf{x}, \bar{y})$ son los siguientes (Ratsimba, 1992, pp. 4-8 y Gras, 1995b, pp. 129-133):

$$Q(\mathbf{x}, \bar{y}) = \frac{\text{card}(x \cap \bar{y}) - \frac{n_x \cdot n_{\bar{y}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_x \cdot n_{\bar{y}}}{n}}} \quad \text{y} \quad q(\mathbf{x}, \bar{y}) = \frac{n_{x \wedge \bar{y}} - \frac{n_x \cdot n_{\bar{y}}}{n}}{\sqrt{\frac{n_x \cdot n_{\bar{y}}}{n}}}$$

$q(\mathbf{x}, \bar{y})$ es llamado índice de implicación

Siendo n_i la frecuencia de presencias de la variable "i"; $n_{\bar{y}} = 1 - n_y$ y $n_{x \wedge \bar{y}}$ la frecuencia de "x" y "no-y", es decir, el número de diferencias (1-0)

Así pues **la intensidad de implicación por el modelo de Poisson** es:

$$\varphi(\mathbf{x}, \bar{y}) = 1 - \sum_{k=0}^{n_{x \wedge \bar{y}}} \exp(-\lambda) \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \text{ donde } \lambda = \frac{n_x \cdot n_{\bar{y}}}{n}$$

Y la **intensidad de implicación** por la aproximación de Gauss es:

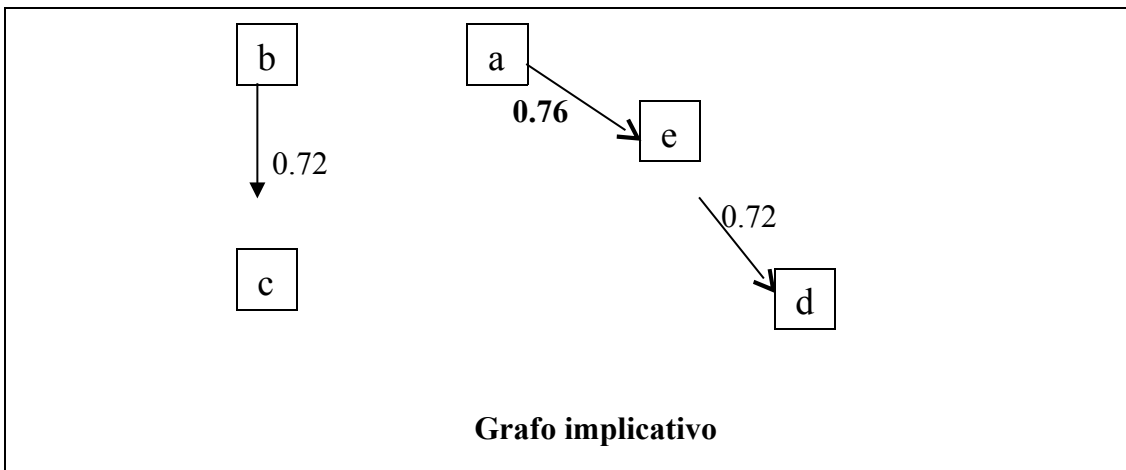
$$\varphi(x, \bar{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} q(x, \bar{y}) dt$$

Una vez definido el índice que “mide” la intensidad de implicación, podemos realizar los cálculos correspondientes a la tabla I₁ para obtener el grafo implicativo (ejemplo del artículo de Gras R, 1995a pp215-216), según el modelo de Gauss. El cálculo de las intensidades de implicación entre las variables de la tabla I₁ dan como resultado la siguiente tabla **no simétrica**:

variables	a	b	c	d	e
a				0.658	0.76
b	0.11		0.72	0.12	0.05
c	0.50			0.57	
d					
e				0.72	

Tabla I₂

A partir de la tabla I₂ se puede construir el grafo implicativo en un intervalo de confianza [0.70 , 0.80] (débil), obteniendo como resultado:



Según los cálculos obtenidos en la tabla I₂ se deduce claramente que el **grafo implicativo no es simétrico**.

A continuación se calculan los índices de cohesión $c(x,y)$ asociados a $\varphi(x, \bar{y})$ para obtener el árbol jerárquico de cohesión.

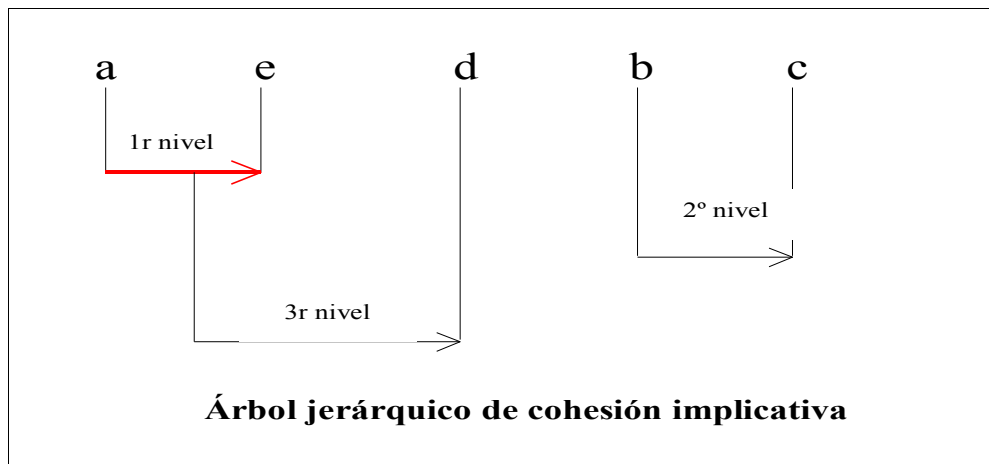
Se define la **cohesión implicativa** entre la clase (x,y) , denotado por $c(x,y)$ asociado a la intensidad de implicación $\varphi(x, \bar{y})$ (Ratsimba, H. 1992, pp13-17 y Gras R. 1995b, pp136-139)) como sigue:

$$\begin{aligned}
 & * \text{ Si } \begin{cases} p = \max[\varphi(x, \bar{y}), \varphi(y, \bar{x})] \geq 0.5 & \text{y} \\ E = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p) \end{cases} , & c(x,y) = \sqrt{1 - E^2} \\
 & * \text{ Si } \quad p = 1, & c(x,y) = 1 \\
 & * \text{ Si } \quad p \leq 0.5, & c(x,y) = 0
 \end{aligned}$$

Aplicando este algoritmo según los valores de la tabla I₂ se obtiene la siguiente matriz **no simétrica**:

variables	a	b	c	d	e
a				0.376	0.607
b	0		0.528	0	0
c	0			0.174	0
d					
e				0.72	

Así pues obtenemos el primer nivel de agregación por cohesión implicativa, agrupando las variables (a,e). En el segundo nivel de agregación corresponde a la clase (c,b) cuyo valor de cohesión implicativa corresponde a 0.528. Aplicando el mismo algoritmo a las variables libres y a las clases formadas en los dos primeros niveles se obtiene como mayor valor de cohesión implicativa: $c[(a,e), d] = 0.494$. El siguiente árbol representa los tres niveles de agregación jerárquica según la cohesión implicativa:



El **árbol jerárquico** de cohesión implicativa también es un árbol **no simétrico**. La dirección de la implicación es significativa (igual que en el grafo implicativo). Por lo tanto existe una diferencia entre el árbol de similaridad y el árbol de cohesión /grafo implicativo, siendo el primero simétrico y los dos últimos no simétricos.

