

**ESCOLA TÈCNICA SUPERIOR D'ENGINYERIA DE
TELECOMUNICACIÓ DE BARCELONA (UPC)**

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

**SISTEMAS DIFUSOS DINÁMICOS
PARA EL
TRATAMIENTO DE INFORMACIÓN
TEMPORAL IMPRECISA**

Autor: Orestes Mas i Casals
Director: Joan Maria Miró Sans

Barcelona, 1997

5.
Diseño de circuitos para la realización de
conceptos temporales difusos

5.1 Introducción

En el capítulo anterior, al tratar de la realización de sistemas temporales difusos, se ha puesto de manifiesto la necesidad de disponer de circuitos cuya respuesta impulsional coincida con las funciones de pertenencia asignadas a los distintos conceptos temporales allí definidos. Parece lógico, pues, afrontar el problema del diseño de circuitos con una respuesta impulsional ajustada al máximo a una preestablecida.

Para ello existen distintos métodos que pueden agruparse en dos familias. La primera incluye los métodos analíticos no iterativos mientras que a la segunda se incorporan aquellos basados en estrategias de optimización. Su estudio detallado desborda ampliamente el ámbito de esta tesis, por lo que se describirán únicamente los más eficaces en la solución de los problemas concretos que se plantean en el diseño de sistemas temporales difusos.

En una primera aproximación, la forma concreta que se asigna a los grados de pertenencia de los conceptos temporales difusos no es un factor muy relevante para el correcto funcionamiento de tales sistemas, lo que justifica que se elijan formas sencillas, entre las que destacan la triangular y otras más generales, como son las lineales a tramos. Precisamente, uno de los métodos analíticos, basado en la aproximación de Padé, se ha revelado muy eficaz en la síntesis de circuitos con una respuesta impulsional que se ajuste bien a estas formas. Así, este método se presentará con cierto detalle en este capítulo.

De todas maneras, hay que contemplar la posibilidad de tener que aproximar formas más complejas. En estos casos, puede procederse a una previa aproximación lineal a tramos o a recurrir a métodos de optimización. Estos métodos consisten en minimizar, a través de un proceso iterativo, una función de error definida de forma que evalúe cuantitativamente la diferencia entre la respuesta obtenida en cada iteración y la deseada. Estos métodos también se tratarán en este capítulo, a la vez que se presentarán resultados con ellos obtenidos.

5.2 El método de Padé

5.2.1 Descripción del método

Este método permite determinar una expresión racional de una función de manera que coincidan en el origen sus valores y los de un número finito de derivadas sucesivas. Obviamente, este enunciado equivale a expresar la coincidencia de los primeros términos de sus desarrollos en serie de Taylor en el origen. A la expresión racional de la función se le denomina aproximante de Padé. Con esto se abre la posibilidad de obtener expresiones racionales de funciones de red $H(s)$ a partir del desarrollo en serie de Taylor de la transformada de Laplace de la respuesta impulsional $h(t)$ deseada.

Como es sabido, la obtención de la función de red en forma racional constituye el paso previo para el diseño del correspondiente circuito. Si la función a aproximar es lineal a tramos puede expresarse como una combinación lineal de escalones y rampas debidamente retardadas, apareciendo en su transformada de Laplace términos de la forma $e^{-\tau s}$. Así, el desarrollo en serie en el origen de $H(s)$ puede obtenerse a partir del que corresponde a la función $e^{-\tau s}$ y que viene dado por la expresión:

$$e^{-\tau s} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} (\tau s)^k \quad (5.1)$$

Conviene insistir en que con mucha frecuencia la forma asignada a los grados de pertenencia de los conceptos temporales difusos es lineal a tramos, por lo que el método de Padé será de gran utilidad.

5.2.2 Aproximación de Padé de funciones lineales a tramos

Con el fin de determinar con mayor eficacia, las aproximaciones de Padé de funciones lineales a tramos, se ha elaborado un programa específico que obtiene el resultado a partir de una descripción de la respuesta impulsional que incluye únicamente las coordenadas de los punto inicial y final de cada tramo.

Así, si se pretende aproximar una respuesta impulsional, tal como la representada en la Figura 5.1, la especificación de los parámetros $(0,1)$ y $(1,0)$ bastará para que el programa obtenga la aproximación de Padé.

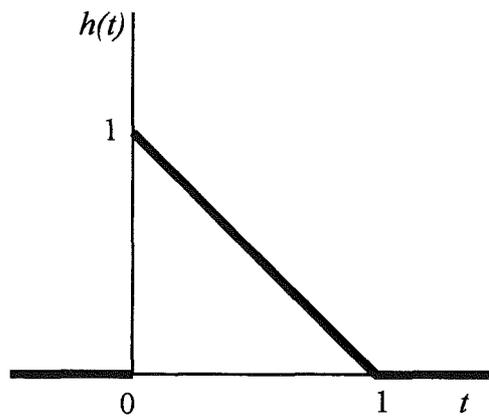


Figura 5.1: Respuesta impulsional triangular

Para ello se ha partido de la función representada en la Figura 5.2, que puede considerarse básica o elemental, en el sentido de que cualquier forma lineal a tramos puede reducirse a la suma de funciones de este tipo para distintos valores de los parámetros (a, t_1, b, t_2)

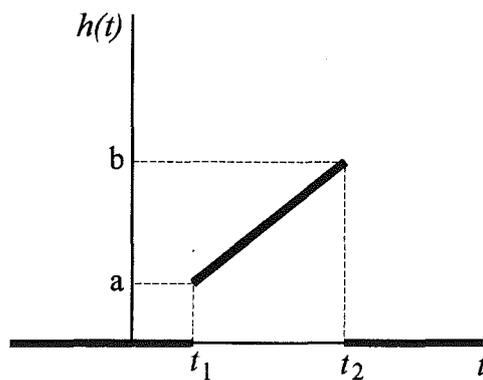


Figura 5.2: Función básica

En consecuencia, será importante que el programa incorpore toda la información del desarrollo en serie de Taylor en el origen de su transformada de Laplace.

La expresión temporal de la función básica viene dada por

$$h(t) = a \cdot u(t - t_1) + \frac{b - a}{t_2 - t_1} (t - t_1) \cdot u(t - t_1) - \frac{b - a}{t_2 - t_1} (t - t_2) \cdot u(t - t_2) - b \cdot u(t - t_2) \quad (5.2)$$

y aplicando la expresión de la transformada de Laplace de una función desplazada en el tiempo, dada por

$$L\{f(t - \tau) \cdot u(t - \tau)\} = e^{-s\tau} L\{f(t) \cdot u(t)\} \quad (5.3)$$

resulta

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{ae^{-t_1s}}{s} + \frac{b-a}{t_2-t_1} \frac{e^{-t_1s} - e^{-t_2s}}{s^2} - \frac{be^{-t_2s}}{s} \\ &= \frac{1}{s^2} \left[\left(as + \frac{b-a}{t_2-t_1} \right) e^{-t_1s} - \left(bs + \frac{b-a}{t_2-t_1} \right) e^{-t_2s} \right] \end{aligned} \quad (5.4)$$

expresión que, después de aplicar la expresión (5.1), toma la forma de un desarrollo en serie potencial, según

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^2} \left[\left(as + \frac{b-a}{t_2-t_1} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\tau s)^k \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(bs + \frac{b-a}{t_2-t_1} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\tau s)^k \right) \right] \end{aligned} \quad (5.5)$$

que puede escribirse de forma compacta como

$$\begin{aligned} H(s) &= \sum_{p=0}^{\infty} h_p s^p \\ \text{con } h_p &= (-1)^p \left[at_1^{p+2} - bt_2^{p+2} + \frac{b-a}{t_2-t_1} (t_2^{p+3} - t_1^{p+3}) \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Esta expresión permite obtener la transformada de Laplace en forma de serie de potencias de cualquier respuesta impulsional lineal a tramos a partir de su expresión como suma de funciones básicas cuyos parámetros (a, t_1, b, t_2) son las coordenadas de los puntos inicial y final de cada tramo.

5.2.3 Determinación del aproximante de Padé

Partiendo de $H(s)$ expresada como

$$H(s) = \sum_{p=0}^{\infty} h_p s^p \quad (5.7)$$

el método de Padé permite obtener una función racional de la forma

$$\frac{P_{mn}(s)}{Q_{mn}(s)} = \frac{a_m s^m + \dots + a_0}{b_n s^n + \dots + b_0} \quad (5.8)$$

denominada aproximante de Padé de orden m, n , tal que los coeficientes de los $(m+n+1)$ primeros términos de su desarrollo en serie de Taylor en el origen coincidan con los valores de h_p . Dicho de otra manera, se trata que las funciones $H(s)$ y $P_{mn}(s)/Q_{mn}(s)$ y sus $(m+n)$ primeras derivadas tomen los mismos valores en el origen ($s=0$).

Para ello, es necesario que el polinomio $P_{mn}(s) - Q_{mn}(s) \cdot H(s)$, numerador de la función

$$\frac{P_{mn}(s)}{Q_{mn}(s)} - H(s) = \frac{P_{mn}(s) - Q_{mn}(s) \cdot H(s)}{Q_{mn}(s)} \quad (5.9)$$

tenga los coeficientes de las primeras $(m+n+1)$ potencias iguales a cero.

Desarrollando este polinomio según

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) - (b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0)(h_{m+n} s^{m+n} + \dots + h_1 s + h_0) \quad (5.10)$$

en la que la serie correspondiente a $H(s)$ se ha truncado para que el producto incluya todos los sumandos del coeficiente de s^{m+n} , e igualando a cero sus $(m+n+1)$ coeficientes resulta el sistema de ecuaciones

de la respuesta impulsional $h(t)$ que pretende aproximar. En efecto, la transformada de Laplace de $h(t)$ viene dada por

$$H(s) = L\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot e^{-st} dt \quad (5.13)$$

de forma que para $s=0$ resulta

$$H(0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot dt \quad (5.14)$$

expresión que indica que el área definida por $h(t)$ es igual al valor que toma $H(s)$ en el origen, parámetro que, según se ha visto anteriormente, se conserva en la aproximación de Padé. De esta forma, si la función grado de pertenencia ya se define normalizada a área unidad, también lo será la que resulte de aplicar el método.

Por otra parte, queda pendiente hacer una consideración acerca del orden a elegir para la aproximación de Padé. Parece lógico pensar que cuanto mayor sea el orden mejor será la aproximación, aunque evidentemente el circuito a diseñar será de mayor complejidad. Esta suposición se confirma en la mayoría de casos, siendo la simulación una herramienta de gran ayuda para llegar a un compromiso entre estos dos factores contradictorios. De todas formas, si se pretende que el ajuste de la respuesta impulsional sea perfecto en el instante inicial ($t=0$), deben imponerse algunas restricciones a los valores de m y n , y, en algún caso, también a los coeficientes.

Para delimitar estas restricciones es fundamental la relación entre los valores inicial y final de $h(t)$ y $H(s)$ dada por

$$h(0) = \lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot H(s) \quad (5.15)$$

de manera que si se pretende que $h(0)$ sea nulo, los valores de m y n deben cumplir la relación $m < n-1$, o lo que es equivalente, la diferencia entre los grados del denominador y del numerador debe ser como mínimo igual a 2.

De forma análoga, resulta que si se impone la condición $h(0) = a \neq 0$, la relación a cumplir debe ser $m = n-2$ y, además se debe imponer una restricción adicional dada por

$a_m=ab_m$. Esta condición debe incorporarse al sistema de ecuaciones (5.12), eliminando al mismo tiempo la última de ellas¹⁶, de manera que se reduce en una unidad el número de términos coincidentes en el desarrollo de la serie. Con esto se consigue que la respuesta impulsional deseada y su aproximación coincidan para $t=0$.

Las restricciones podrían extenderse a la derivada de $h(t)$ en el origen, aunque la experiencia demuestra que un mejor ajuste en $t=0$ puede ir en detrimento del grado de aproximación global.

5.2.4 Resultados obtenidos con la aproximación de Padé

Se presentan a continuación algunos resultados obtenidos por aplicación del método de Padé a la aproximación de distintas respuestas impulsionales que corresponden a grados de pertenencia asociados a conceptos temporales difusos.

En la Figura 5.3 se muestran aproximaciones de distinto orden a una respuesta impulsional triangular correspondiente al concepto temporal difuso "Ahora". En ella puede observarse que incluso con una función de red tan sencilla como de segundo orden, realizable con una célula *biquad*, se llega a un grado de aproximación suficiente; la máxima divergencia se produce en $t=1$, donde la derivada es discontinua. Como era previsible. Al aumentar el orden a (7,8) el ajuste es prácticamente perfecto.

¹⁶ De esta forma se pierde la coincidencia con el último término del desarrollo de Taylor, a cambio de obtener la coincidencia de la respuesta impulsional en $t=0$.

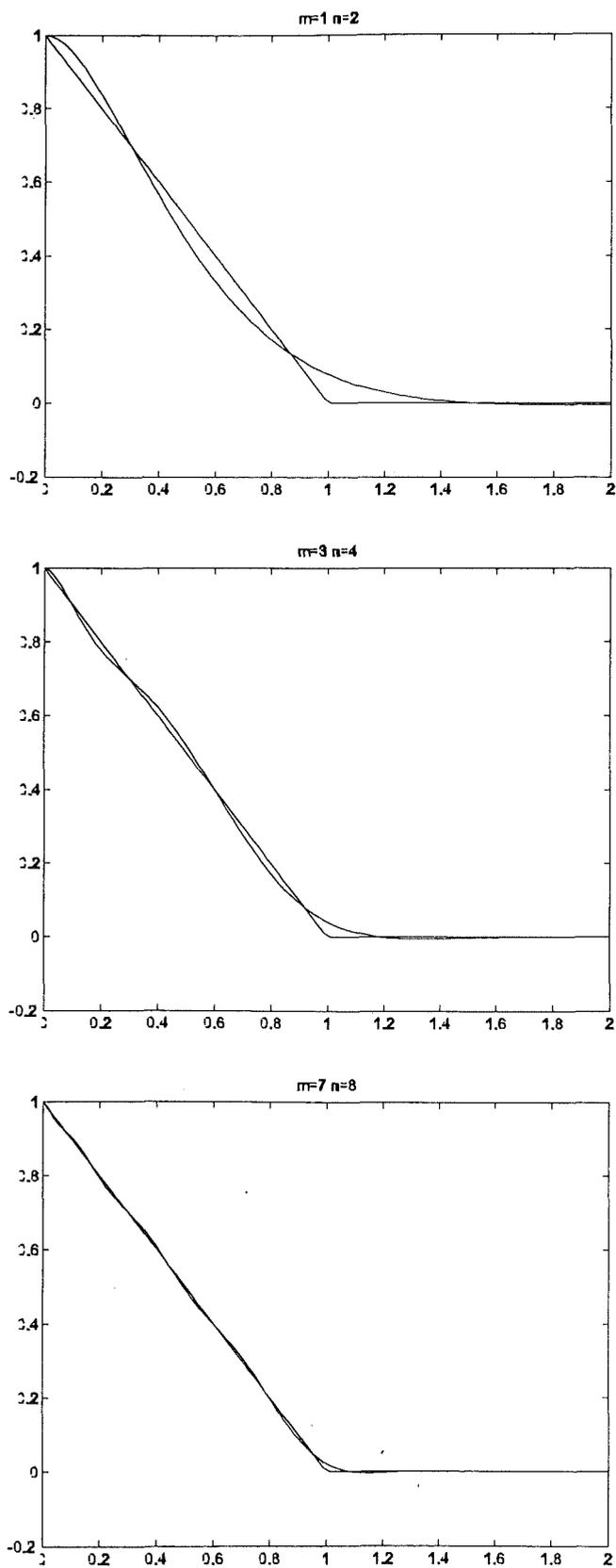


Figura 5.3: Aproximaciones de distinto orden a un concepto temporal "Ahora" triangular

Mayores dificultades se observan en la Fig 5.4, debido a la exigencia de mantener constante la respuesta impulsional, lo que puede interpretarse como un retardo. Con un orden (5,6), que puede considerarse elevado, el error máximo es del 4% respecto al valor teórico. Este error se reduce en gran manera al aumentar el orden a (7,8). Tanto en este caso como en el anterior se ha impuesto la restricción $m=n-1$ y $a_m=b_n$ para que $h(0)$ sea igual a la unidad.

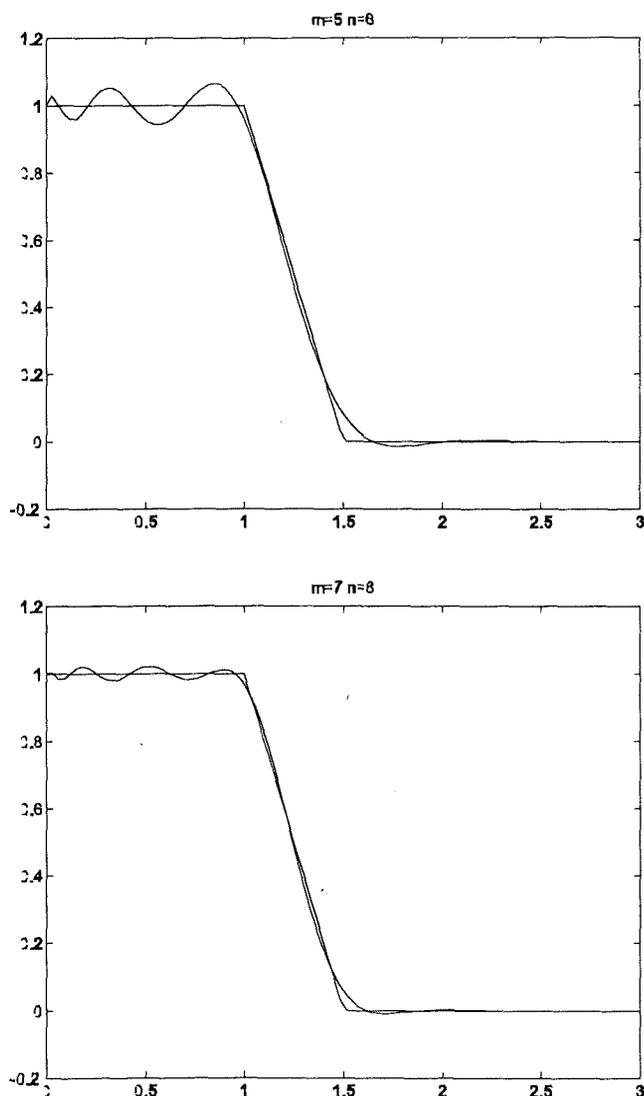


Figura 5.4: Aproximaciones de distinto orden a un concepto temporal "Ahora" trapezoidal

En la Figura 5.5 y la Figura 5.6 se muestran resultados para el concepto temporal difuso "Antes", en los que se aprecian las mayores dificultades que tiene el método de aproximación en este caso, que se traducen en la necesidad de un orden mas elevado, cuando la respuesta impulsional contiene tramos de valor constante.

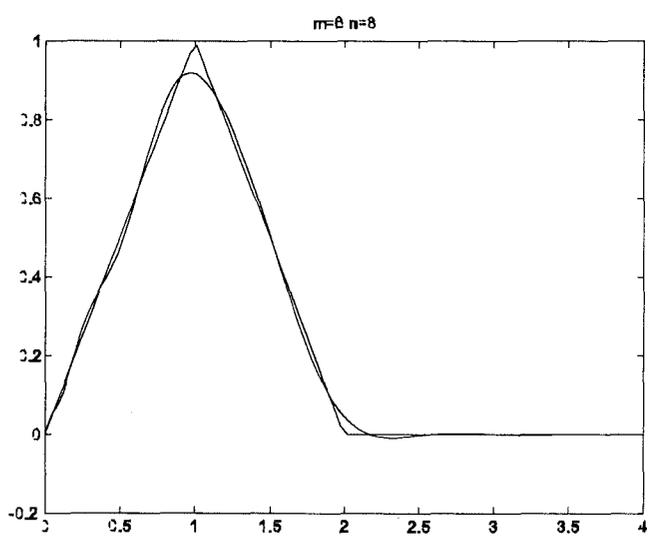
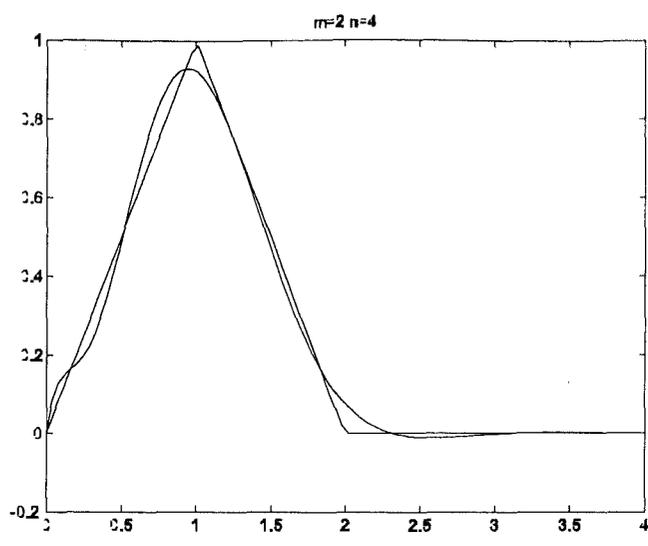


Figura 5.5: Aproximaciones de distinto orden a un concepto temporal "Antes" triangular

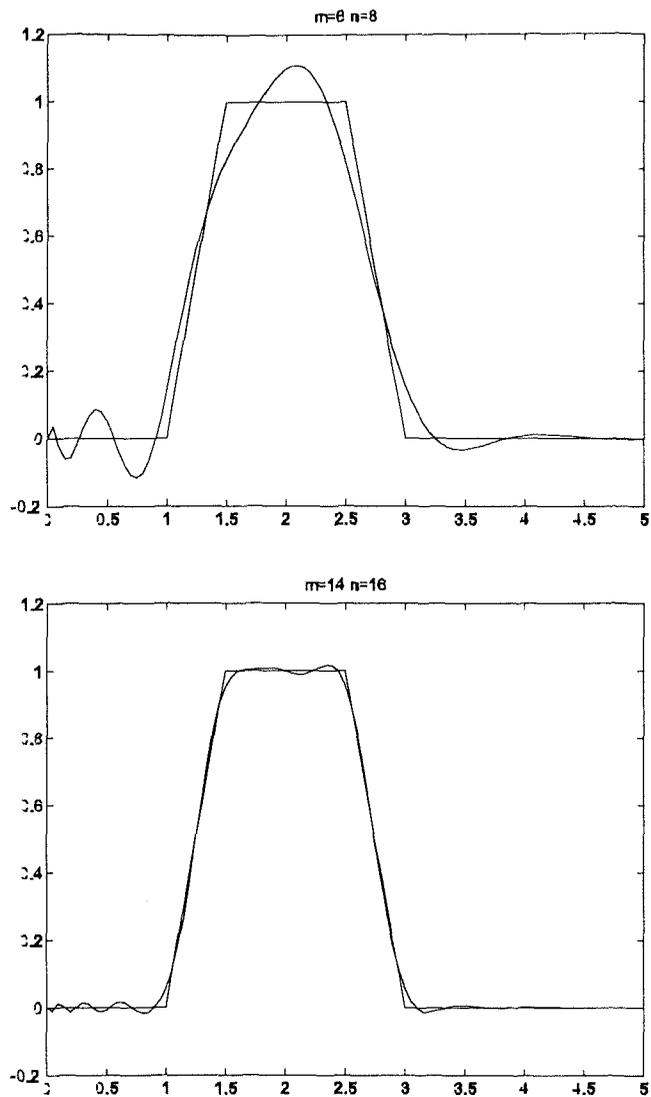


Figura 5.6: Aproximaciones de distinto orden a un concepto temporal "Antes" trapezoidal

Una vez mas hay que destacar que un orden mayor de la aproximación implica un aumento de la complejidad del circuito. Al compromiso entre exactitud y complejidad se llegará como resultado de la evaluación del comportamiento del sistema concreto al que se incorporen los circuitos correspondientes a estas aproximaciones.

5.3 Métodos de optimización

5.3.1 Conceptos generales

De forma muy general, el concepto de optimización se puede definir como la obtención del mejor resultado en unas circunstancias dadas. El grado de consecución de

un determinado objetivo puede expresarse habitualmente como una función de ciertas variables de diseño, por lo que puede afirmarse que la optimización es el proceso de búsqueda de los valores de las variables de diseño que minimizan una cierta función, denominada función error o función de coste. Nótese que la equivalencia entre optimización y minimización no supone pérdida alguna de generalidad por cuanto un problema de maximización puede traducirse en uno de minimización sin más que cambiar el signo de la función objetivo.

No será el objetivo de este capítulo hacer un análisis detallado de los diferentes algoritmos de optimización existentes¹⁷. Por este motivo nos limitaremos a presentar las ideas básicas imprescindibles para resolver el problema de diseñar circuitos con una respuesta impulsional preestablecida, utilizando con eficacia los paquetes estándar que ofrecen los fabricantes de *software* científico, uno de los cuales, el denominado *Optimization Toolbox* para Matlab es el que se ha utilizado en este trabajo.

5.3.2 Formulación del problema de optimización

El problema de optimización puede plantearse en su forma mas general como determinar el vector $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ que minimice la función $f(\mathbf{x})$, sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} g_j(x) &\leq 0 & j = 1, 2, \dots, n \\ l_i(x) &= 0 & i = 1, 2, \dots, p \end{aligned} \tag{5.16}$$

Un caso particular interesante se da cuando no existen restricciones, que es como se plantea en esta tesis el diseño de un circuito con respuesta impulsional preestablecida.

El vector \mathbf{x} , denominado vector de diseño, agrupa las variables de diseño mientras que la función $f(\mathbf{x})$ evalúa la diferencia entre el objetivo deseado y el obtenido con el actual vector de diseño. En el caso que nos ocupa, el vector de diseño incluirá los parámetros que determinan la respuesta impulsional. Concretamente, se tratará de la amplitud, constante de tiempo, pulsación y fase inicial de cada una de sus componentes,

que permiten determinar los coeficientes de la función de red y, en última instancia, el diseño del circuito.

El vector \mathbf{x} determina un punto en el espacio n -dimensional de diseño al que corresponde el valor $f(\mathbf{x})$. El lugar geométrico de los puntos que satisfacen la ecuación $f(\mathbf{x}) = c$, con c constante, es una hipersuperficie en el espacio de diseño. En el caso de tener únicamente dos variables de diseño estas superficies son curvas cerradas, denominadas curvas de nivel, que encierran un área cada vez menor a medida que se aproximan al mínimo de la función error, tal como se muestra en la Figura 5.7

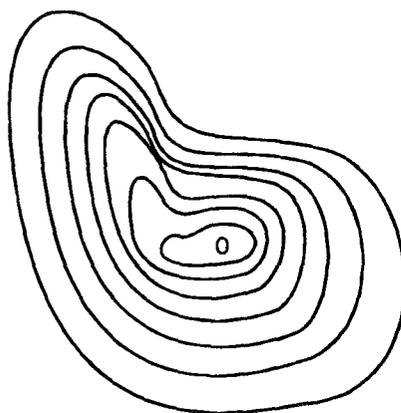


Figura 5.7: Superficie $f(\mathbf{x})=c$ para dos variables de diseño

Una estrategia de optimización puede entenderse como la búsqueda de un camino para descender con eficacia hacia el mínimo de la función error.

5.3.3 Breve panorámica de los métodos de optimización

Los distintos métodos de optimización pueden agruparse en familias, según el nivel de conocimiento de la función error que requieran. Así, los llamados métodos directos o de orden cero se basan solamente en los valores de la función de error en los distintos puntos de diseño, mientras que los de primer orden requieren el conocimiento del vector gradiente, $\nabla f(\mathbf{x})$ y, por último, los de segundo orden se formulan a partir del hessiano $H(\mathbf{x})$. En un problema concreto la elección del método viene muy condicionada

¹⁷ El lector puede remitirse a [Rao 1978] para una referencia detallada de los mismos.

por la posibilidad de expresar el gradiente y el hessiano en función de los parámetros de diseño.

En cuanto a los métodos directos, se basan en la determinación de la función de error en un conjunto de puntos y en una estrategia inteligente para descartar aquellos en los que la función error es mayor y substituirlos por otros, de forma que nos acerquemos al mínimo.

En una primera aproximación se podría pensar en minimizar sucesivamente la función error en la dirección del gradiente. En realidad esta no es la mejor estrategia ya que la propiedad de máxima pendiente en la dirección del gradiente es local y no global. La aplicación de esta idea da lugar a un camino con cambios bruscos en la dirección, lo que se traduce en una convergencia lenta.

Una mejora sustancial consiste en utilizar de forma inteligente la información de las direcciones elegidas anteriormente, lo que da lugar a los métodos denominados de direcciones conjugadas, que poseen una mejor convergencia.

Por último, cabe destacar el método de Newton, que en su aplicación utiliza el hessiano $H(x_i)$. Como es conocido, la condición necesaria para que un punto del espacio de diseño x^* sea solución del problema de optimización es que en él el gradiente se anule

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{5.17}$$

expresión que debe interpretarse como un sistema de ecuaciones no lineales. El método clásico de solución de este problema es el de Newton, que se basa en la linealización de $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ en el punto \mathbf{x}^* . Así, si $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_i + \mathbf{s}$ puede escribirse que

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \nabla f(\mathbf{x}_i + \mathbf{s}) = \nabla f(\mathbf{x}_i) + H(\mathbf{x}_i) \cdot \mathbf{s} \tag{5.18}$$

donde $H(\mathbf{x}_i)$ es el hessiano de la función error en \mathbf{x}_i .

De esta ecuación resulta

$$\mathbf{s} = \mathbf{x}_i - H(\mathbf{x}_i)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_i) \tag{5.19}$$

Debido a los errores que introduce la linealización será necesario un esquema iterativo de la forma

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \mathbf{H}(\mathbf{x}_i)^{-1} \cdot \nabla f(\mathbf{x}_i) \quad (5.20)$$

El método de Newton presenta dos inconvenientes importantes. Por una parte exige determinar el hessiano en función de los parámetros de diseño, y por otro implica resolver el sistema de ecuaciones

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}_i) \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i+1}) = -\nabla f(\mathbf{x}_i) \quad (5.21)$$

en cada iteración.

Por esta razón, son de gran utilidad los métodos denominados quasi-Newton basados en la estimación de la matriz inversa del Hessiano a partir de los valores del gradiente.

Aunque para el problema planteado en esta tesis es posible determinar exactamente el hessiano y, por tanto, implementar alguna de las distintas variantes del método de Newton, se ha utilizado la rutina *leastsq* de Matlab, que implementa un método de estimación del hessiano, habiéndose obtenido resultados suficientemente satisfactorios.

Es muy importante destacar que la eficacia de cualquier método de optimización depende en gran manera de lo alejado del mínimo que esté la estimación inicial del vector de diseño. Por esta razón, y como se detallará mas adelante, en nuestro caso se parte de los resultados que suministre una aproximación de Padé con el fin de que el punto de partida esté suficientemente próximo al mínimo.

Queda ahora entrar con detalle en la aplicación de la optimización al ajuste de la respuesta impulsional

5.3.4 La optimización en el ajuste de la respuesta impulsional

Los métodos de optimización son muy adecuados para la aproximación de respuestas impulsionales definidas de forma arbitraria de las que no se conoce su expresión analítica.

Al haberse elegido un método de optimización del tipo quasi-Newton será necesario, además de definir los parámetros de diseño, expresar en función de ellos la función error y su gradiente.

En este trabajo se ha partido de una respuesta impulsional genérica formada por la combinación lineal de p funciones senoidales amortiguadas exponencialmente de la forma

$$h(t) = \sum_{k=1}^p A_k \exp(-t / \tau_k) \cdot \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (5.22)$$

siendo los parámetros de diseño la amplitud, constante de tiempo, pulsación y fase inicial de cada una de las componentes que, reunidas, forman el vector de diseño

$$\mathbf{x} = (A_1, \tau_1, \omega_1, \varphi_1, \dots, A_p, \tau_p, \omega_p, \varphi_p)^T \quad (5.23)$$

La elección de senoides amortiguadas viene dictada por el hecho de que ofrecen mayor flexibilidad que las simples exponenciales. De todas formas se puede incorporar un término exponencial decreciente anulando los parámetros ω_k y φ_k de la función senoidal.

5.3.5 Determinación de la función error.

Planteado en términos matemáticos, un problema de optimización consiste en determinar el vector de diseño \mathbf{x} que minimiza la función error $f(\mathbf{x})$. Se plantea, así, en primer lugar, la necesidad de especificar la función error que se adapte a nuestro problema. Esta función debe condensar en un único valor la diferencia entre una determinada respuesta impulsional $h(\mathbf{x}, t)$ y la respuesta impulsional deseada $h_o(t)$. Así una primera idea podría ser

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} (h(\mathbf{x}, t) - h_o(t))^2 dt \quad (5.24)$$

en la que el integrando se ha elevado al cuadrado para evitar posibles cancelaciones debidas a diferencias de signo.

Durante el proceso de optimización será necesario evaluar repetidamente la función error para distintos conjuntos de valores de los parámetros de diseño. Por este

motivo, la expresión (5.24) no resulta adecuada como definición de la función error ya que su cálculo requerirá un proceso de integración numérica excesivamente costoso.

Basada en la idea anterior, se propone una función error que proporcionará un nivel de información muy similar con un coste de cálculo mucho mas reducido. La expresión de esta nueva función error es

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N w_k (h(\mathbf{x}, t_k) - h_o(t_k))^2 \quad (5.25)$$

en la que se considera un conjunto de N instantes de muestreo t_k no necesariamente equiespaciados, y se evalúan las diferencias únicamente en estos instantes. Asimismo, los factores w_k permiten dar mayor peso relativo a unos instantes de muestreo frente a otros.

Para la determinación de la función error será necesario evaluar los distintos valores que toma $h(t_k)$. Estos cálculos pueden llevarse a cabo matricialmente, lo que acelera notablemente la velocidad de cálculo en entornos vectorizados como Matlab. Por otro lado, la representación matricial facilitará el posterior cálculo de los gradientes, necesarios para abordar con eficacia el problema de optimización.

Así, el vector

$$\mathbf{h} = (h(t_1), h(t_2), \dots, h(t_N))^T \quad (5.26)$$

puede obtenerse como

$$\mathbf{h} = \mathbf{M}\mathbf{a} \quad (5.27)$$

donde

$$\mathbf{a} = (A_1, A_2, \dots, A_p)^T \quad (5.28)$$

y la matriz \mathbf{M} se calcula como el producto, elemento a elemento,

$$\mathbf{M} = \mathbf{C} \bullet * \mathbf{E} \quad (5.29)$$

en la que las matrices \mathbf{C} y \mathbf{E} , de dimensiones $N \times p$, se definen como

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \exp(-t_1 / \tau_1) & \exp(-t_1 / \tau_2) & \cdots & \exp(-t_1 / \tau_p) \\ \exp(-t_2 / \tau_1) & \exp(-t_2 / \tau_2) & \cdots & \exp(-t_2 / \tau_p) \\ \vdots & & & \\ \exp(-t_N / \tau_1) & \exp(-t_N / \tau_2) & & \exp(-t_N / \tau_p) \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

y

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t_1 + \varphi_1) & \cos(\omega_2 t_1 + \varphi_2) & \cdots & \cos(\omega_p t_1 + \varphi_p) \\ \cos(\omega_1 t_2 + \varphi_1) & \cos(\omega_2 t_2 + \varphi_2) & \cdots & \cos(\omega_p t_2 + \varphi_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(\omega_1 t_N + \varphi_1) & \cos(\omega_2 t_N + \varphi_2) & \cdots & \cos(\omega_p t_N + \varphi_p) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Finalmente, la función error se obtiene como

$$f = f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{w}^T (\mathbf{h} - \mathbf{h}_o) \bullet^2 \quad (5.32)$$

en la que \mathbf{w}^T es el vector de los pesos relativos asignados a los distintos instantes de muestreo, y la operación $\mathbf{z} \bullet^2$, realizada sobre un vector genérico \mathbf{z} , representa la operación $\mathbf{z} \bullet \mathbf{z}$, es decir, multiplicar cada componente del vector consigo misma.

5.3.6 Cálculo de los gradientes

El cálculo de los gradientes respecto a las variables de diseño A , τ , ω y φ se puede llevar a cabo sin más dificultad. Así, se obtiene

$$\nabla_A (f)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial A_1}, \frac{\partial f}{\partial A_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial A_p} \right) = \mathbf{w}^T \text{diag}(\mathbf{h} - \mathbf{h}_o) \mathbf{M} \quad (5.33)$$

Similarmente, definiendo

$$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_N)^T \quad (5.34)$$

y

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p)^T \quad (5.35)$$

resulta

$$\nabla_{\boldsymbol{\tau}}(f)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau_1}, \frac{\partial f}{\partial \tau_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \tau_p} \right) = \mathbf{w}^T \text{diag}(\mathbf{h} - \mathbf{h}_o) \text{diag}(\mathbf{t}) \mathbf{M} \text{diag}(\boldsymbol{\tau})^{-2} \mathbf{a} \quad (5.36)$$

Ahora, introduciendo la matriz adicional

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t_1 + \varphi_1) & \sin(\omega_2 t_1 + \varphi_2) & \cdots & \sin(\omega_p t_1 + \varphi_p) \\ \sin(\omega_1 t_2 + \varphi_1) & \sin(\omega_2 t_2 + \varphi_2) & \cdots & \sin(\omega_p t_2 + \varphi_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(\omega_1 t_N + \varphi_1) & \sin(\omega_2 t_N + \varphi_2) & \cdots & \sin(\omega_p t_N + \varphi_p) \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

se obtiene

$$\nabla_{\boldsymbol{\omega}}(f)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \omega_1}, \frac{\partial f}{\partial \omega_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \omega_p} \right) = \mathbf{w}^T \text{diag}(\mathbf{h} - \mathbf{h}_o) \text{diag}(\mathbf{t})(\mathbf{E} \bullet \mathbf{S}) \mathbf{a} \quad (5.38)$$

y

$$\nabla_{\boldsymbol{\varphi}}(f)^T = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varphi_p} \right) = \mathbf{w}^T \text{diag}(\mathbf{h} - \mathbf{h}_o)(\mathbf{E} \bullet \mathbf{S}) \mathbf{a} \quad (5.39)$$

Ahora, a partir de estos resultados se construye de forma inmediata el vector gradiente

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \left(\frac{\partial f}{\partial A_1}, \frac{\partial f}{\partial \tau_1}, \frac{\partial f}{\partial \omega_1}, \frac{\partial f}{\partial \varphi_1}, \frac{\partial f}{\partial A_2}, \frac{\partial f}{\partial \tau_2}, \frac{\partial f}{\partial \omega_2}, \frac{\partial f}{\partial \varphi_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial A_p}, \frac{\partial f}{\partial \tau_p}, \frac{\partial f}{\partial \omega_p}, \frac{\partial f}{\partial \varphi_p} \right)^T \quad (5.40)$$

necesario para el proceso de optimización, y que debe ser evaluado en cada iteración.

5.3.7 Escalado de valores

Uno de los aspectos más importantes, aunque frecuentemente olvidados, a la hora de resolver cualquier problema de optimización es el escalado de los valores de las variables de diseño.

Algunas de las dificultades que aparecen al abordar un problema de optimización pueden entenderse imaginando éste como el proceso de encontrar el punto más bajo de una determinada región partiendo de un punto situado en medio de la ladera de una montaña. En la figura siguiente se ilustran dos situaciones que corresponden a una situación topológicamente idéntica:

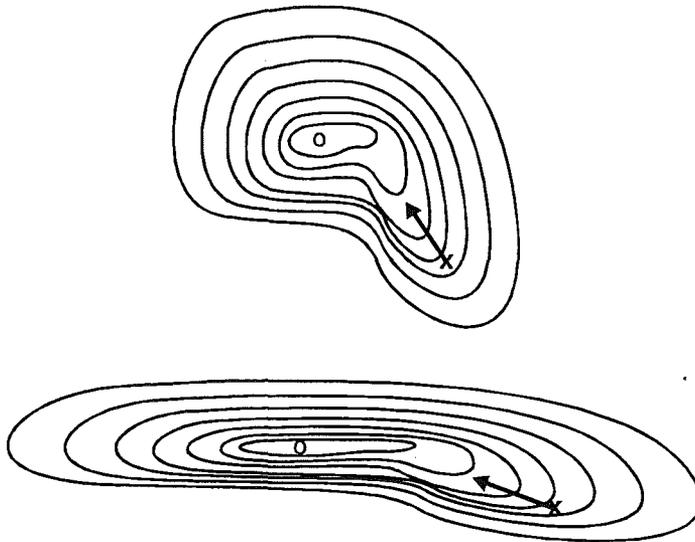


Figura 5.8: Efecto del escalado sobre las variables de diseño

En la primera de ellas, ambas variables de diseño están escaladas de forma que un pequeño cambio en una de ellas produce prácticamente el mismo efecto en la función error que el mismo cambio efectuado sobre la otra.

En la segunda figura, la función cambia más rápidamente al realizar un incremento en y que al realizar el mismo incremento en x . No es difícil ver que, al especificar la dirección de búsqueda, se requeriría mayor precisión en y que no en x . La dificultad estriba en que un optimizador standard desconoce a priori el escalado relativo de las variables de diseño. Por esta razón, es conveniente que todas ellas se muevan dentro de los mismos órdenes de magnitud.

En la ecuación (5.22) existen variables que, a priori, podrían diferir en muchos órdenes de magnitud. Si bien las fases tomarán valores entre $-\pi$ y π , las constantes de tiempo pueden ser inferiores a 10^{-3} y las pulsaciones superiores a 10^3 incluso en aplicaciones poco críticas. Esta disparidad en los valores de las variables de diseño hace que sea imperativo normalizar la función objetivo con el fin de que pulsaciones y constantes de tiempo tomen valores del orden de la unidad y posteriormente realizar la correspondiente compresión del eje de tiempos.

5.3.8 Ejemplo de aplicación

En este apartado se ilustra una aplicación práctica de estas ideas. Como se ha dicho anteriormente, la eficacia de un método de optimización depende en gran manera de lo próximo al mínimo que esté la estimación inicial de las variables de diseño.

Se presenta en este apartado un ejemplo de ajuste de una respuesta impulsional elegida arbitrariamente de la que, por tanto, no se conoce ni su expresión analítica ni de la que es posible obtener el desarrollo en serie de Taylor de su transformada de Laplace.

Aunque se podría proceder con una aproximación lineal en muchos tramos para después aplicar el método de Padé, ha demostrado ser más eficaz hacer una burda aproximación con una función triangular, obtener el aproximante de Padé de esta función y utilizar el resultado como estimación inicial en un método de optimización.

En la Figura 5.9 se muestra la respuesta impulsional a ajustar, la aproximación triangular antes comentada y el aproximante de Padé (6,8) de dicha función.

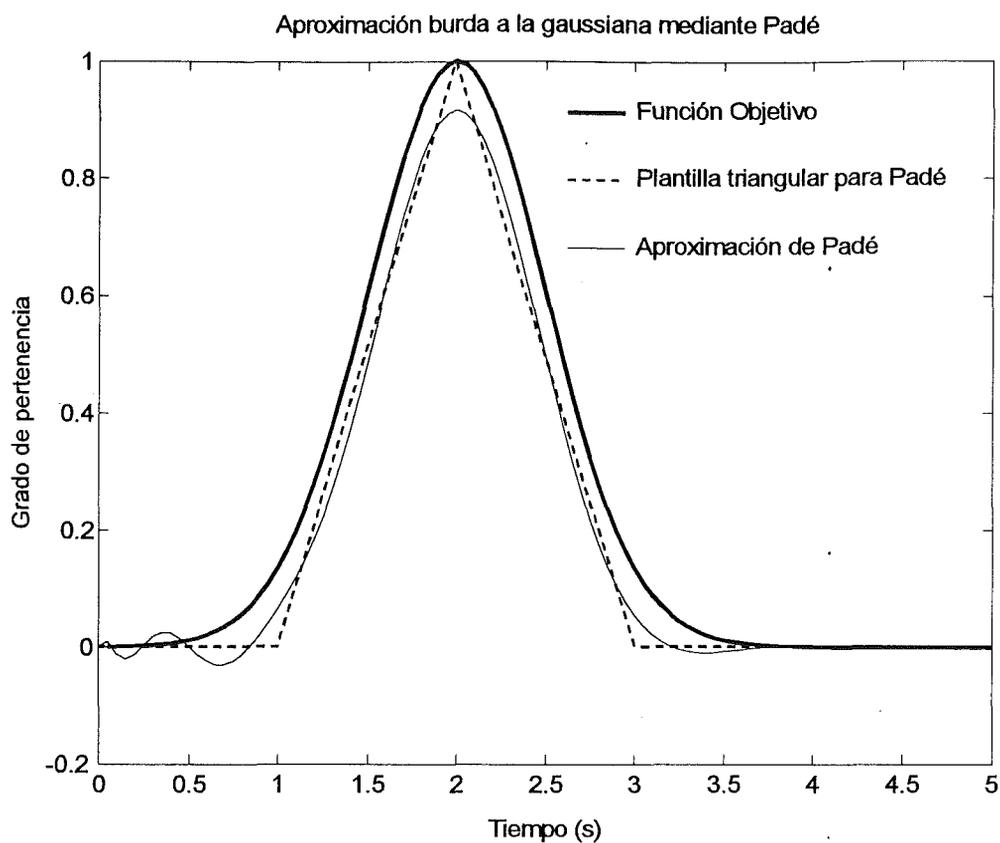


Figura 5.9: Plantilla para la respuesta impulsional deseada

En la Figura 5.10 se representan superpuestos los resultados del aproximante de Padé y los obtenidos después de la optimización. Puede observarse que se consigue una importante reducción del error.

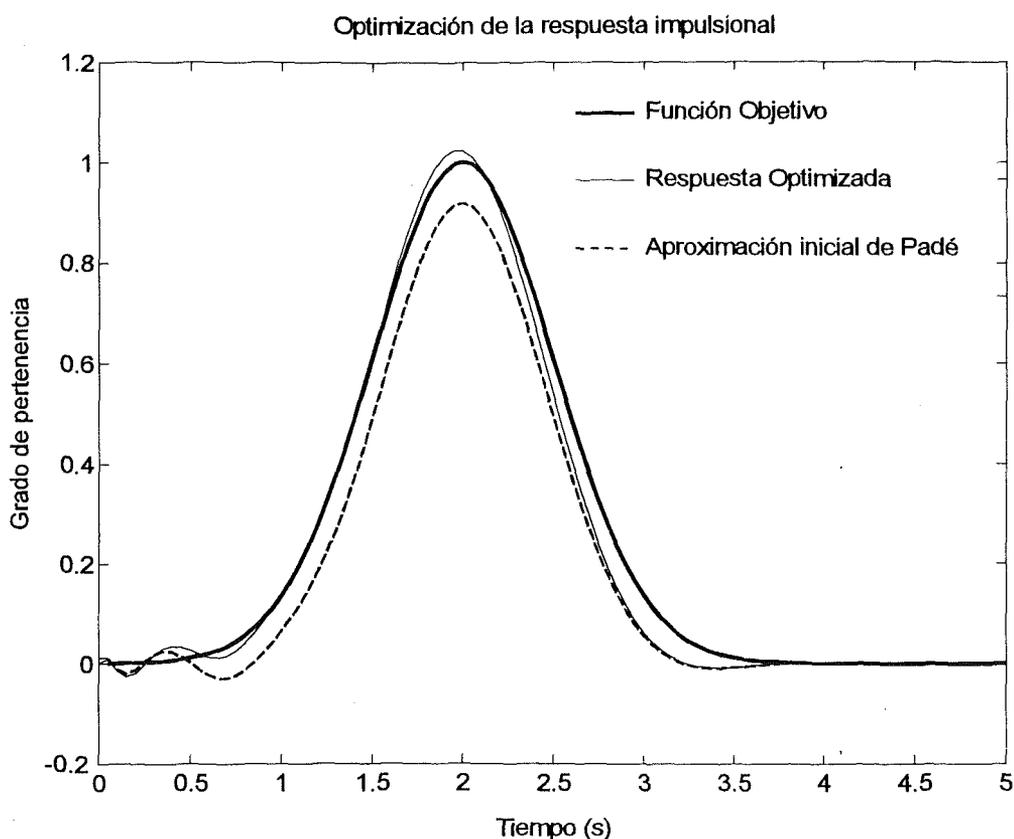


Figura 5.10: Resultados de la optimización

Por último, la Tabla 5-1 recoge los valores de los parámetros de diseño obtenidos.

Tabla 5-1: Parámetros de las funciones que componen la respuesta

	<i>función 1</i>	<i>función 2</i>	<i>función 3</i>	<i>función 4</i>
A	17.3	258.9	1150.1	2280.8
τ (segundos)	0.466	0.330	0.283	0.265
ω (rad/s)	4.337	3.009	1.781	5.902
φ (rad)	1.291	-1.680	1.512	-1.588

5.4 Diseño del circuito a partir de la respuesta impulsional

Los métodos de Padé y de optimización dan como resultado la función de red del circuito en forma de cociente de polinomios y la respuesta impulsional expresada como suma de componentes senoidales amortiguadas, respectivamente. En ambos casos, el diseño del circuito analógico lineal correspondiente no constituye un problema teórico difícil disponiéndose de una abundante y completa bibliografía sobre esta cuestión.

Aunque no se entre con detalle en la solución de este problema cabe decir que el resultado en el primer caso sugiere un circuito formado por la conexión en *cascada* de células activas *biquad* [Lam 1979], [Valkenburg 1982], mientras que en el segundo parece adecuada una estructura en *paralelo*, que incorpora un sumador y que presenta la forma mostrada en la Figura 5.11

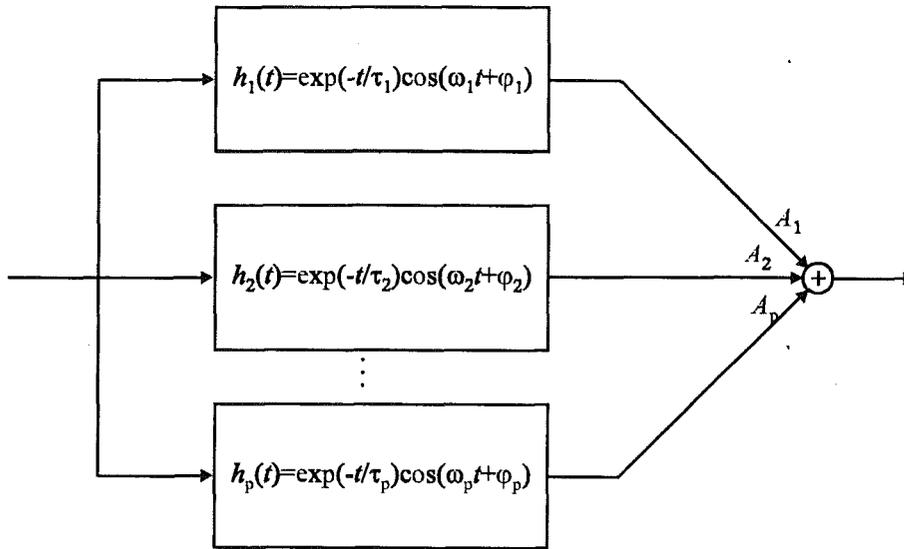


Figura 5.11: Realización del concepto temporal mediante células en paralelo

Cada término $h_i(t)$ corresponde a una función de transferencia de la forma

$$H_i(s) = A_i \frac{\cos \varphi_i s + \frac{\cos \varphi_i}{\tau_i} - \omega_i \sin \varphi_i}{s^2 + \frac{2}{\tau_i} s + \frac{1}{\tau_i^2} + \omega_i^2} \quad (5.41)$$

realizable también mediante una célula *biquad*.