

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

DEPARTAMENT DE TEORIA DEL SENYAL I
COMUNICACIONS



BIBLIOTECA RECTOR GABRIEL FERRATE
Campus Nord

TESI DOCTORAL

TRANSFORMADA DE FOURIER EN PROCESSAMENT
NO LINEAL DEL SENYAL

AUTORA: ALBA M^a PAGÈS ZAMORA
DIRECTOR: MIGUEL ÀNGEL LAGUNAS HERNÁNDEZ
Barcelona, Octubre de 1996

Capítol 4

Model de Fourier en l'estimació de funcions densitat de probabilitat mitjançant mètodes d'estimació espectral

En el capítol anterior s'ha fet palesa l'estreta relació que el model de Fourier manté amb d'altres models lineals i, molt especialment, amb el model anomenat "Moving Average" (MA). Aquesta relació es posa de manifest sobretot en l'etapa de disseny del model de Fourier, que sota un criteri de error quadràtic mig mínim (MMSE) obté una solució que expressa el vector de pesos òptims com el producte entre una matriu i un vector que tenen unes propietats idèntiques a les de la matriu d'autocorrelació i vector de correlació creuada que sorgeixen en un disseny MMSE d'un model MA. Es pot afirmar doncs, que les solucions d'ambdós models són equivalents a efectes pràctics, però que estan expressades en termes d'unes funcions i/o variables diferents. En el tercer capítol, s'ha mostrat com aquesta semblança es pot aprofitar en un entorn de modelatge de sistemes no lineals ja que el model de Fourier permet l'ús de mètodes ja desenvolupats en processament lineal del senyal però aplicats al seu propi disseny (bàsicament, mètodes adaptatius i algorismes eficients d'inversió de matrius).

Aquest capítol explota al màxim aquest paral·lelisme entre el model de Fourier i un model MA, sense considerar l'interès que pugui tenir en un entorn de tractament no lineal del senyal tal i com s'ha enfocat al capítol anterior. És per això que la secció I està íntegrament

dedicada a presentar l'origen d'aquest paral·lelisme i a establir la relació que sorgeix entre certes variables d'un i altre model. Aquestes relacions són la base que ens permet formular de nou alguns problemes "típics" de processament lineal del senyal però en termes de les noves variables que utilitza el model de Fourier i, per tant, amb nous propòsits o objectius. Així, per exemple, a la secció II s'adreça el problema d'uniformitzar la funció densitat de probabilitat d'un senyal amb una distribució qualsevol tal com si es tractés d'un problema de *blanqueig* (de l'anglès "whitening"). Aquest cas particular amaga una relació encara més forta que suporta el model de Fourier. Concretament, a les seccions III i IV es mostrarà com certs mètodes d'estimació espectral combinats amb el model de Fourier poden ésser utilitzats per a estimar la funció densitat de probabilitat d'una variable aleatòria o d'un conjunt d'aquestes (cas multidimensional), d'una manera totalment equivalent a la desenvolupada en l'estimació d'espectre. Això és possible gràcies a que el paper que representa la funció densitat de probabilitat del senyal d'entrada en un model de Fourier és equivalent al de la densitat espectral de potència d'un procés estacionari en sistemes lineals. Finalment, es dedica una darrera secció (V) a discutir sobre la possibilitat d'aplicar mètodes superresolutius de detecció de senoides al cas de "detecció" de variables aleatòries discretes.

4.1 Una perspectiva nova sobre el model de Fourier

L'afirmació de que el model de Fourier guarda una simetria amb un model MA es refereix bàsicament al fet de que certes funcions involucrades en el model de Fourier representen un paper equivalent al d'altres funcions en el model MA. Aquesta secció pretén exposar d'una forma clara el vincle que uneix ambdós models, mitjançant la interrelació entre els respectius paràmetres. En el cas sense memòria, s'ha exposat com el criteri de MMSE resulta apropiat pel disseny del model de Fourier conduint-nos a la següent expressió dels coeficients òptims,

$$w_{opt} = R_{zz}^{-1} \cdot \gamma_{zg} \quad (4.1)$$

que s'expressa en termes del vector γ_{zg} (que conté el producte escalar entre la funció exponencial corresponent a cada coeficient i la referència g) i també la matriu R_{zz} que depèn de la funció característica de la variable d'entrada x (Eq.3.40). De fet, d'ara endavant ens referirem a aquesta matriu amb el nom de *matriu característica* i la denotarem per la matriu Ψ_{xx} .

$$R_{zz} \Big|_{\substack{\text{MODEL DE} \\ \text{FOURIER}}} \equiv \Psi_{xx} \Leftarrow \text{Matriu Característica} \quad (4.2)$$

Cada component de la matriu característica depèn de la funció característica del senyal d'entrada x

$$\Psi_{xx}(m,l) = E\left[e^{j(m-l)\omega_0 x}\right] \equiv \psi_X(j(m-l)\omega_0) \quad (4.3)$$

i gràcies a una propietat anàloga a l'estacionarietat en les exponencials complexes que ja es concretarà més endavant, la matriu característica d'un model de Fourier d'ordre P resulta tenir simetria hermítica i, a més a més, ésser Toeplitz.

$$\Psi_{xx} = \begin{bmatrix} \psi_X(0) & \psi_X(-1) & \dots & \psi_X(-2P-1) \\ \psi_X(1) & \psi_X(0) & \dots & \psi_X(-2P) \\ \dots & & \ddots & \dots \\ \psi_X(-2P-1) & \dots & & \psi_X(0) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Aquesta matriu desenvolupa un paper equivalent al que té la matriu d'autocorrelació en el disseny d'un filtre MA, suposant en aquest darrer cas que el senyal d'entrada fos estacionari. A nivell funcional, es pot comprovar que la funció característica té les mateixes propietats que la funció d'autocorrelació. D'entre elles destaquem les següents que fan referència bàsicament al caire no creixent de la funció i a la simetria hermítica.

$$\psi_X(0) = 1 \quad (4.5.a)$$

$$|\psi_X(j\nu)| \leq \psi_X(0) \quad \forall \nu \in \text{Re} \quad (4.5.b)$$

$$\psi_X(-j\nu) = \psi_X^*(j\nu) \quad \forall \nu \in \text{Re} \quad (4.5.c)$$

De fet, tot aquest conjunt de propietats que compleixen tant la funció d'autocorrelació com la funció característica [Stu94] es deuen a que totes dues tenen una transformada de Fourier que és real i positiva. Així, mentres que la transformada de Fourier de la funció d'autocorrelació d'un procés aleatori estacionari és la densitat espectral de potència (DEP), la transformada de Fourier de la funció característica d'una variable aleatòria x és proporcional a la funció densitat de probabilitat (FDP) d'aquesta variable.

$$\psi_X(j\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x) \cdot e^{j\nu x} dx \Rightarrow \psi_X(j\nu) = 2\pi \cdot F^{-1}\{p_X(x)\} \quad (4.6)$$

S'estableix doncs, un lligam entre ambdues funcions de manera que es pot entreveure que la funció característica (o la FDP) té un paper en el model de Fourier similar al que té la funció d'autocorrelació (o DEP) en sistemes lineals.

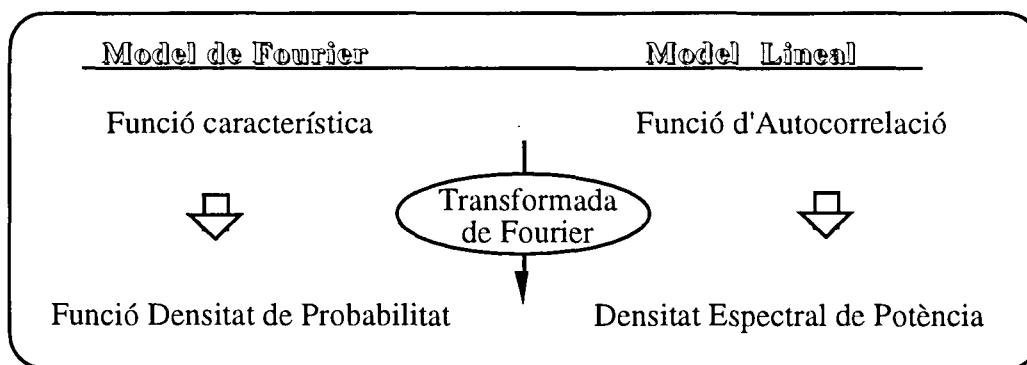


Figura 4.1 Relació entre variables del model de Fourier i models lineals en general.

Un aspecte en el que s'evidencia encara més aquesta relació entre la funció FDP i DEP és el comportament que té el model de Fourier en presència d'un senyal a l'entrada amb una distribució uniforme (que denotarem per $u(n)$), és a dir, amb una FDP plana en tot el rang d'entrada talment com si fos soroll blanc. En aquesta situació, la matriu característica (Eq.4.4) esdevé diagonal ja que la funció característica correspon a una delta de Kronecker i centrada a l'origen (comportament que és igual al dels models MA quan el procés d'entrada és soroll blanc).

$$p_U(u) = \begin{cases} \frac{1}{2U_0} & |u| \leq U_0 \\ 0 & |u| > U_0 \end{cases} \Rightarrow \Psi_{uu} = I \quad \text{si } \omega_0 = \frac{\pi}{U_0} \quad (4.7)$$

Així, es fa palès el paper de la distribució uniforme del senyal d'entrada a un model de Fourier com si es tractés de soroll blanc. De totes maneres, per tal d'ésser capaços d'aprofitar completament aquest paral·lelisme (Fig.4.1) cal presentar el model de Fourier com a eina d'anàlisi de senyals des d'un punt de vista de caracterització estadística i encerrar quina pot ser l'aportació del model de Fourier en relació a problemes de filtratge però formulats en termes de la FDP.

4.2 El model de Fourier i la caracterització estadística dels senyals

Centrant-nos en el cas sense memòria, es considera un SNL qualsevol caracteritzat per la funció $g[\cdot]$ que aplicada sobre el senyal d'entrada, $x(n)$, en resulta la sortida $y(n)$.

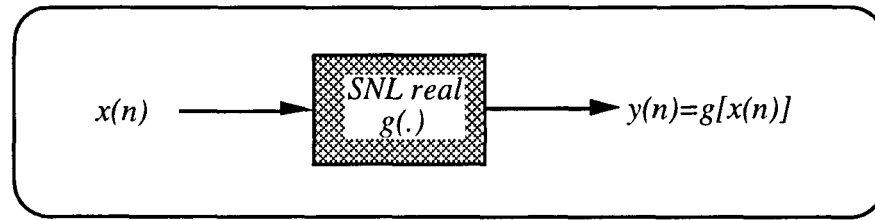


Figura 4.2 Representació d'un SNL sense memòria mitjançant la funció de relació entre entrada i sortida

En aquest cas, la relació entre la FDP de l'entrada, denotada per $p_X(x)$, i la de la sortida, $p_Y(y)$, depèn de la derivada de la funció $g[x]$, avaluada als valors x_i que compleixin $y=g[x_i]$ [Pap65].

$$p_Y(y) = \sum_{i=1}^L \frac{p_X(x_i)}{\left| \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right|_{x=x_i}} \quad (4.8)$$

En cas de que la funció $g[x]$ sigui biunívoca (funció estrictament creixent o decreixent) només existeix un valor $x_i=x$ tal que $y=g[x_i]$, de manera que s'arriba a la següent relació entre FDP's del senyal d'entrada i sortida.

$$p_Y(y) = \frac{p_X(x)}{\left| \frac{\partial g(x)}{\partial x} \right|_{x=g^{-1}(y)}} \quad (4.9)$$

Sota la hipòtesi de que x pertany al rang dels reals $[-X_0, X_0]$, tant la FDP de la variable d'entrada com la funció $g[x]$ es pot desenvolupar en sèrie de Fourier. Així, la funció $p_X(x)$ s'expressa en termes de la funció característica, mentre que $g[x]$ depèn dels coeficients w_p (Eq.3.34) ja que s'assumeix un model de Fourier per a implementar-lo

$$p_Y(y) = \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_X(jp\omega_0)}{2X_0} \cdot e^{jp\omega_0 x}}{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} w_p^* \cdot jp\omega_0 \cdot e^{jp\omega_0 x}} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{\psi_X(jp\omega_0)}{2X_0} \cdot z^p}{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} w_p^* \cdot jp\omega_0 \cdot z^p} \quad (4.10)$$

on ω_0 i z estan definits com segueixen.

$$\omega_0 \leq \pi / X_0 \quad (4.11.a)$$

$$z = e^{j\omega_0 x} \quad (4.11.b)$$

Tot i que a l'igual que la funció de transferència d'un model ARMA, la FDP de la sortida es pot expressar com una divisió de polinomis en la variable z , no sembla que el model de Fourier sigui capaç d'aportar res d'interessant en problemes formulats en termes de la FDP i equivalents als que en processament lineal del senyal es coneixen pel nom de *filtratge*, *identificació*, *inversió* (o equalització) o, fins i tot, *síntesi*. Així, per exemple, partint de l'expressió anterior (Eq.4.10), es pot comprovar que un problema interessant tal com la síntesi d'un senyal amb una FDP determinada a partir del filtratge d'un senyal amb una distribució uniforme a través d'un model de Fourier condueix a una equació fortament no lineal que, normalment, només admet una solució recursiva dels coeficients. Un altre possible problema interessant seria el de la inversió d'un sistema a partir del model de Fourier inicial i de la FDP de la seva sortida. Malauradament, no té una solució còmode pel fet de que els coeficients del desenvolupament en sèrie de Fourier d'una funció i els coeficients del desenvolupament de la seva inversa no estan relacionats.

L'única situació en la que els coeficients del model de Fourier es poden aïllar és en el problema de passar d'un senyal d'entrada x amb una FDP qualsevol $p_X(x)$, a un altre senyal que tingui una distribució uniforme. Aquest problema s'ha descrit amb el nom de "blanqueig" ja que sota el paral·lelisme establert entre DEP i FDP, aquest problema és equivalent a un problema de blanqueig.

4.2.1 Blanqueig de la funció densitat de probabilitat

A part d'altres possibles aplicacions, la motivació principal del problema de blanqueig de la FDP en l'entorn de SNLs en el que es situa aquesta tesi esdevé la possible simplificació en el disseny del model de Fourier que posteriorment es pot aplicar. Així, en el modelat de SNLs, en lloc d'aplicar directament el model de Fourier a un senyal donat $x(n)$, pot resultar profitós intercalar una altra funció que uniformitzi la FDP per després calcular els coeficients del model de Fourier sense necessitat d'invertir la matriu característica.

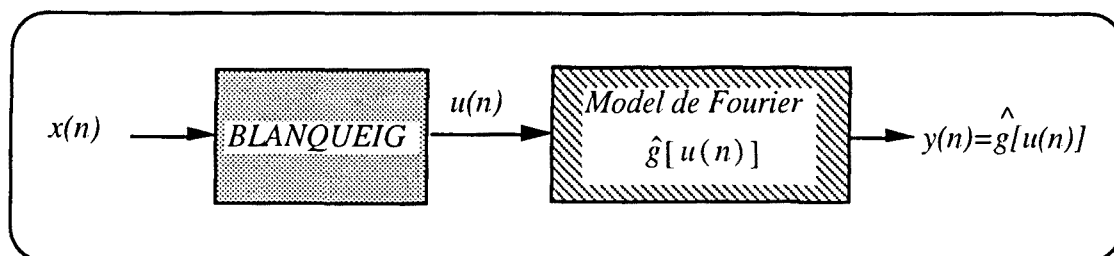


Figura 4.3 Pre-blanqueig del senyal abans d'aplicar-lo al model de Fourier.

La funció tèorica que aconseguim un blanqueig de la FDP de x depèn de la funció de distribució, denotada normalment per $F_X(x)$ [Pap65]. Així, sota la hipòtesi de que x pertany al rang de valors $[-X_0, X_0]$, la sortida $u(n)$ tindria una FDP uniforme dins el rang $[-U_0, U_0]$ hauria de complir la següent relació.

$$u(n) = 2U_0 F_X[x(n)] - U_0 \quad (4.12)$$

Donat que la funció $F_X(x)$ és estrictament creixent, la relació entre les FDP's de l'entrada i la sortida es pot expressar sense pèrdua de generalitat tal i com segueix,

$$p_U(u) = \left. \frac{p_X(x)}{\frac{df(x)}{dx}} \right|_{x=f^{-1}(u)} \quad (4.13)$$

conduint-nos a la següent expressió integral.

$$\int_{-\infty}^u p_U(\alpha) \cdot d\alpha = \int_{-\infty}^x p_X(\lambda) \cdot d\lambda \quad (4.14)$$

Prenent en consideració el rang desitjat de la variable uniforme i desenvolupant en sèrie de Fourier la FDP de l'entrada, $p_X(x)$, la integració de tots dos termes ens condueix a una relació entre l'entrada i sortida del sistema blanquejador,

$$\frac{u + U_0}{2U_0} = \frac{1}{2X_0} \left[x + \sum_{\substack{p=-\infty \\ p \neq 0}}^{+\infty} \frac{\psi_X(jp\omega_0)}{-jp\omega_0} \cdot e^{-jp\omega_0 x} \right] \quad \forall x \in [-X_0, X_0] \quad (4.15)$$

que revela una transformació no lineal del sistema blanquejador consistent en una predicció de x mitjançant un model de Fourier. En un problema pràctic, el rang de valors que pren l'índex p ha d'estar limitat i, a més a més, també es necessitarà una estimació de certs valors de la funció característica $\psi_X(j\nu)$. Tornant al cas particular d'aplicar el sistema blanquejador prèviament al model de Fourier (Fig.4.3), la sortida del mateix s'estableix ara en termes de la distribució uniforme $u(n)$,

$$\hat{y}(n) = \hat{g}[u(n)] = \sum_{p=-P}^P w_p^* \cdot e^{jp\omega'_0 u(n)} \quad \omega'_0 = \frac{\pi}{U_0} \quad (4.16)$$

i els coeficients del model poden obtenir-se directament com la correlació creuada entre la funció exponencial i la referència, denotada en un problema d'identificació per $g[x(n)]$.

$$w_p = E\left\{g^*[x(n)] \cdot e^{jp\omega_0 u(n)}\right\} \quad (4.17)$$

De totes maneres, del processament lineal del senyal és ben conegut el fet de que no sempre el blanquejat directe es pot aplicar. Així, sempre que la FDP del senyal d'entrada consisteixi en una colecció de funcions delta de Dirac (és a dir, sigui una variable aleatòria discreta), l'expressió (4.12) així com qualsevol aproximació que d'ella se'n faci, serà incapaç de proporcionar un senyal uniformement distribuït ja que donat un conjunt determinat de valors d'entrada x , la sortida u només podrà prendre també un conjunt determinat de valors.

Per altra banda, la generalització de la relació entre FDP's de l'entrada i sortida al cas multivariable no és evident (en aquest cas s'hauria de partir del model de Fourier multidimensional aplicat al capítol anterior per a modelar SNLs amb memòria).

En vistes d'aquests resultats sembla ser que el paral·lelisme existent entre el model de Fourier i un model MA no ha donat gaires fruits excepte en el cas de blanquejar la FDP d'una variable aleatòria unidimensional. En el següent apartat però, es mostrarà com mètodes d'estimació espectral tant unidimensionals com multidimensional poden ésser desenvolupats amb el suport del model de Fourier, proporcionant respectivament una estimació de la FDP del senyal d'entrada o de la FDP conjunta en el cas multivariable.

4.3 Mètodes d'estimació espectral per a estimació de FDP. Cas unidimensional

Per tal d'establir com mètodes d'estimació espectral aplicats sobre el model de Fourier proporcionen una estimació de la FDP del senyal d'entrada, és interessant desglossar el model de Fourier en dues etapes: una que conté la part no lineal i l'altra que és lineal.

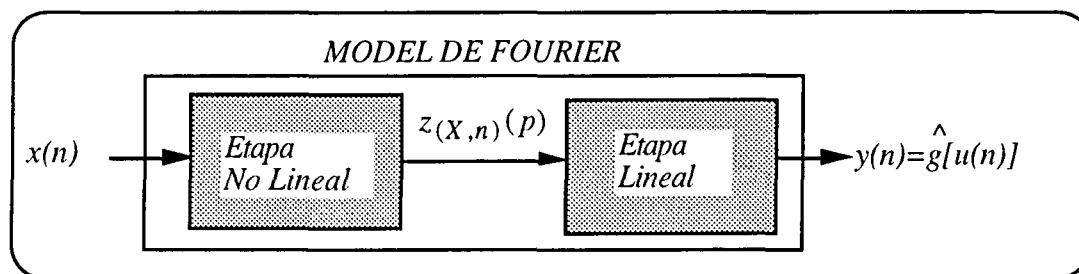


Figura 4.4 Descomposició del model de Fourier en dues etapes, una de no lineal i l'altra lineal.

La primera etapa es pot interpretar com una transformació no lineal de $x(n)$ que genera un procés que denotarem per $z(x,n)(p)$ que agrupa les exponencials complexes de diversos ordres que inclou el model.

$$z_{(X,n)}(p) = e^{jp\omega_0 x(n)} \quad \forall p = -P, \dots, P \quad (4.18)$$

Deixant de banda momentàniament l'etapa lineal del model (Fig.4.4) que s'encarrega de combinar linealment aquestes exponencials, cal notar que el procés $z_{(X,n)}(p)$ presenta una estacionarietat de segon ordre segons la variable p ,

$$R_{zz}(p+l, p) = E[z_X(p+l) \cdot z_X^*(p)] = E[e^{jl\omega_0 x(n)}] \equiv R_{zz}(l) \quad (4.19)$$

i, el que encara és més interessant, la seva funció d'autocorrelació ens condueix a la funció característica de la variable $x(n)$ (tot i que la dependència temporal s'ha suprimit per tal de simplificar la notació).

$$R_{zz}(l) \equiv \psi_X(jl\omega_0) \quad \forall l \quad (4.20)$$

És fàcil comprovar però, que el procés $z_{(X,n)}(p)$ no és estacionari en sentit lax perquè el valor mig depèn de l'índex p . Aquesta relació entre la funció d'autocorrelació de $z_X(p)$ i la funció característica de $x(n)$ és fonamental per a entendre que d'alguna manera, en aplicar mètodes d'estimació espectral al procés $z_{(X,n)}(p)$ per tal d'estimar la seva DEP (és a dir, la transformada de Fourier de $R_{zz}(l)$), s'obindrà una estimació de la FDP de $x(n)$ (és a dir, la transformada de Fourier de $\psi_X(jl\omega_0)$).

$$z_{(X,n)}(p) \xrightarrow{\text{Autocorrelació}} R_{zz}(l) \equiv \psi_X(jl\omega_0) \xrightarrow{\text{Estimació Espectral}} S_{zz}(\omega) \approx p_X(x) \quad (4.21)$$

De totes maneres, és imprescindible formular el problema de forma estricta per a saber quina és la relació entre les variables ω i x , de la DEP i FDP respectivament. Així si denotem per $S_{zz}(\omega)$ la transformada de Fourier de la funció discreta $\psi_X(jl\omega_0)$, es té la següent expressió que és periòdica en ω amb un període de 2π .

$$S_{zz}(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \psi_X(l) \cdot e^{j\omega l} \quad \text{on } \psi_X(l) \equiv \psi_X(jl\omega_0) \quad (4.22)$$

La transformada inversa aplicada sobre $S_{zz}(\omega)$ ens ha de conduir un altre cop a $\psi_X(l)$,

$$\psi_X(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_{zz}(\omega) \cdot e^{j\omega l} d\omega \quad (4.23)$$

que per altra banda sabem que està relacionada amb la FDP de la variable aleatòria x , que suposarem que pertany al rang $[-X_0, X_0]$.

$$\psi_X(l) = E\left[e^{jl\omega_0 x}\right] = \int_{-X_0}^{+X_0} p_X(x) \cdot e^{jl\omega_0 x} dx \quad (4.24)$$

Fent el canvi de variable de $\omega = x\omega_0$ a (Eq.4.23) i igualant amb (Eq.4.24) s'arriba a la següent equivalència entre la transformada de Fourier de $\psi_X(l)$, que és el que s'obindrà dels mètodes d'estimació espectral, amb la FDP $p_X(x)$ de la variable d'entrada.

$$p_X(x) \equiv \frac{\omega_0}{2\pi} S_{zz}(\omega) \Big|_{\omega=x\omega_0} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{\omega_0}, \frac{\pi}{\omega_0}\right] \quad (4.25)$$

Atès que la funció obtinguda, $p_X(x)$, és periòdica amb una cadència de $2\pi/\omega_0$, el valor ω_0 s'ha d'escollir de manera que el període de repetició sigui major o igual que el rang de la variable aleatòria de l'entrada per tal d'evitar un efecte de "aliasing" en l'estimació. En definitiva, els mètodes d'estimació espectral proporcionaran una funció que denotem per $S_{zz}(\omega)$, que és periòdica en ω cada 2π , i que equival a una estimació de la $p_X(x)$ teòrica repetida amb una cadència de $2X_0$.

$$S_{zz}(\omega) \Big|_{\omega=\pi\frac{x}{X_0}} = 2X_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p_X(x + m2X_0) \quad ; \quad \omega_0 \equiv \frac{2\pi}{2X_0} \quad (4.26)$$

En general, els mètodes d'estimació espectral requereixen una estimació de la matriu d'autocorrelació, o matriu característica en el nostre cas d'estimació de FDP. Si s'assumeix que es disposa d'un total de M valors independents i idènticament distribuïts de la variable d'entrada $x(n)$, es pot recórrer a la funció característica empírica (Ap.3.1) per a estimar la matriu característica tal i com segueix,

$$\hat{R}_{zz}(l) = \hat{\psi}_X(l) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jl\omega_0 x(n)} \Rightarrow \hat{\Psi}_{xx} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} z_n \cdot z_n^H \quad (4.27)$$

on el vector z_n agrupa totes les exponencials complexes que es generen a partir de el valor corresponent de $x(n)$.

$$z_n = \left[e^{-jP\omega_0 x(n)} \ e^{-j(P-1)\omega_0 x(n)} \ \dots \ 1 \ \dots \ e^{jP\omega_0 x(n)} \right]^T \quad (4.28)$$

A l'igual que en estimació espectral, la robustesa del consegüent estimador de FDP en front a estimacions sorolloses de la matriu característica és crucial a l'hora d'obtenir estimacions fiables de la FDP. Aquest aspecte esdevé més important en entorns no estacionaris ja que es disposarà de poques dades per a estimar la matriu característica. Tot i que la discussió de diferents mètodes d'estimació de la matriu característica està fora de l'abast d'aquesta tesi,

sembla a priori que els diferents mètodes existents d'estimació de la matriu d'autocorrelació (Pre-windowing, Post-windowing i el mètode de la covariància) no aporten res de significatiu quan es traslladen a l'estimació de la matriu característica. De totes maneres, sembla interessant determinar quines són les prestacions estadístiques de la funció característica empírica en la que es basa l'estimació de la matriu característica. Tal i com es pot comprovar a l'apèndix (Apèn.4.A), es tracta d'un estimador no-esbiaixat i a més a més consistent, ja que la variància tendeix a zero a mesura que el nombre de dades N de les que es disposa augmenta.

Per tal d'establir una comparació entre els mètodes d'estimació de FDP que es presentaran en els propers apartats i els ja existents, és important destacar que en l'entorn d'estimació de FDP es parla de mètodes paramètrics i no-paramètrics [Dud73]. Els primers fan referència a estimadors que assumeixen una distribució donada de la que un cop s'han estimat els paràmetres que la determinen ja es disposa d'una estimació de FDP. Així, amparant-se en la llei dels grans nombres, és comú assumir una distribució normal que queda totalment caracteritzada per la mitjana i variància. Per contra, els mètodes no-paramètrics són indicats pel cas en el que no és possible pressuposar una distribució determinada i estan representats bàsicament pels mètodes basats en les anomenades *finestres de Parzen* [Par62]. A partir d'un conjunt de mostres independents i idènticament distribuïdes de la variable aleatòria de la que es pretén estimar la FDP, diguem-ne $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, es proposa un estimador que segueix l'expressió,

$$\hat{P}_n^{PARZEN}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{h_n} \cdot \varphi\left(\frac{x - x_k}{h_n}\right) \quad (4.29)$$

on la funció $\varphi(x)$ representa una funció de Parzen i h_n representa la durada d'aquesta finestra. Sota determinades condicions que ha de complir aquesta funció, per exemple veure [Dud73], es pot demostrar que l'estimador anterior és asimptòticament no esbiaixat i consistent.

Els mètodes d'estimació de la FDP que presentarem a continuació desenvolupats a partir de mètodes d'estimació espectral també es poden subdividir alhora en mètodes paramètrics i mètodes no paramètrics. Envers això, cal destacar que els mètodes paramètrics d'estimació espectral aplicats a l'estimació de la FDP, tot i que certament es fonamenten en un model per a la FDP, no assumeixen una distribució determinada. Així, la comparació entre mètodes d'estimació de FDP existents i els mètodes espectrals s'estableix principalment entre els mètodes no-paramètrics i es farà de manera general, com a conseqüència del gran ventall de possibilitats que les finestres de Parzen ofereixen, ressaltant-ne les diferències i punts en comú que vagin sorgint.

Pel que fa al cas multivariable, val a dir que Cacoullos [Cac66] es va encarregar de generalitzar el treball de Parzen al cas multivariable, establint també sota quines condicions la funció $\varphi(x)$, ara multivariable, fa convergir l'estimador en mitjana i variància cap a la FDP real.

Tradicionalment, els mètodes d'estimació espectral es classifiquen alhora en mètodes paramètrics i no-paramètrics. Dins d'aquests darrers no-paramètrics, es podria parlar de dos grans grups. El primer englobaria els mètodes derivats de l'aplicació més o menys directa de la transformada discreta de Fourier a partir d'una estimació de la funció d'autocorrelació (per exemple, el Periodograma o el mètode de Blackman-Tukey). En segon lloc, resta el mètode de Mínima Variància, que obté una estimació de la potència en una determinada freqüència mitjançant un filtratge lineal i selectiu efectuat sobre el procés d'entrada. Respecte dels models paramètrics, la seva principal característica està en que es basen en un model de generació del procés, proporcionant una estimació de la DEP a partir de l'estimació dels paràmetres del model. El més estès d'aquests és el basat en un model AR gràcies bàsicament a l'existència de mètodes eficients de resolució dels paràmetres.

Tots ells, tant paramètrics com no-paramètrics, estan estretament relacionats de manera que, de vegades, diferents mètodes condueixen a la mateixa solució sota determinades condicions de treball, així com un mateix mètode admet diversos criteris de disseny proporcionant perspectives diferents de la solució trobada. En aquest sentit, cal destacar que tots ells admeten un disseny variacional formulat a partir d'un filtratge lineal sobre el procés d'entrada mitjançant un filtre lineal tal que els seus coeficients es calculen proposant una funció de cost per minimitzar, sotmesa a unes determinades restriccions, diferents per a cada cas [Lag86a].

És important destacar que la present tesi no proporciona cap innovació en el camp d'estimació espectral i, en conseqüència, la presentació dels mètodes d'estimació espectral es farà de forma ràpida i des d'un punt de vista molt personal, fent contínues referències a l'extensa bibliografia que hi ha sobre el tema. Bàsicament, ens centrarem en l'adaptació i interpretació de la formulació dels mètodes pel cas que ens ocupa d'estimació de FDP, així com aspectes relacionats amb l'estudi estadístic dels mètodes sempre que sigui possible. Així, en primer lloc, es presta atenció als mètodes no paramètrics, per després passar als paramètrics on es proporciona una relació força interessant entre mètodes basats en model AR o Predicció Lineal, el mètode de *Màxima Entropia* gràcies a Burg [Rep78] i el model de Fourier.

4.3.1 Mètodes clàssics d'estimació espectral: Periodograma i mètode de Blackman-Tukey

El fet de que tant el Periodograma com el mètode de Blackman-Tukey estiguin basats en l'aplicació directa de la Transformada de Fourier va propiciar que a finals dels 60, principis dels 70 fossin àmpliament utilitzats com a conseqüència del desenvolupament de l'algorisme FFT (*Fast-Fourier Transform*) que calcula de manera eficient la Transformada Discreta de Fourier. Aquests mètodes se'ls coneix generalment amb el nom de tècniques "clàssiques" d'estimació espectral i, d'una forma totalment paral·lela al cas d'estimació d'espectre, quan s'apliquen a l'estimació de FDP esdevenen la transformada de Fourier d'una versió en finestrada de la funció característica empírica (Eq.4.27).

El Periodograma consisteix en, donat el conjunt de valors $\{z_{(X,n)}(p) \ p=0, \dots, P-1\}$ (Eq.4.18), estimar l'espectre mitjançant la densitat espectral d'energia del procés (és a dir, el mòdul al quadrat de la transformada de Fourier de $z_{(X,n)}(p)$) dividit pel nombre de mostres del procés, P . En el cas que ens ocupa, l'estimació resultant esdevé una estimació de la FDP, denotada per $\hat{p}_X(x)$.

$$\hat{p}_X(x) = \frac{1}{P} \left| \sum_{p=0}^{P-1} z_{(X,n)}(p) \cdot e^{-jp\omega_0 x} \right|^2 \quad \forall x \in [-X_0, X_0] \quad (4.30)$$

Si es desenvolupa el quadrat anterior i s'agrupen termes s'arriba a la següent expressió,

$$\hat{p}_X(x) = \sum_{l=-P+1}^{P-1} \hat{r}_{zz}(l) \cdot e^{-jl\omega_0 x} \quad (4.31)$$

on la seqüència $\hat{r}_{zz}(l)$ representa una estimació de la funció d'autocorrelació del procés $z_{(X,n)}(p)$, o, el que és el mateix, de la funció característica de x .

$$\hat{r}_{zz}(l) = \begin{cases} \frac{1}{P} \sum_{m=0}^{P-1-l} z_{(X,n)}^*(m) \cdot z_{(X,n)}(m+l) & \forall l = 0, \dots, P-1 \\ \hat{r}_{zz}^*(-l) & \forall l = -P+1, \dots, -1 \end{cases} \quad (4.32)$$

És interessant observar com a partir de la definició del procés $z_{(X,n)}(p)$ (Eq.4.18), l'estimació de la funció $\hat{r}_{zz}(l)$ es redueix a,

$$\hat{r}_{zz}(l) = \frac{P-|l|}{P} \cdot z_{(X,n)}(l) \equiv w(l) \cdot z_{(X,n)}(l) \quad (4.33)$$

que no és res més que el procés $z(X,n)(p)$ en finestrat amb una finestra triangular o de Bartlett denotada per $w(l)$. Substituint l'expressió obtinguda per a $\hat{r}_{zz}(l)$ (Eq.4.33) a l'estimació proposada de la FDP (Eq.4.31), obtindriem per a cada valor de la variable aleatòria, és a dir, per a tot $x \in [-X_0, X_0]$, una estimació de la seva FDP. Atès que cada mostra del senyal d'entrada $x(n)$ proporciona una estimació de la FDP, i suposant que el conjunt de dades $\{x(n) \ n=0, \dots, M-1\}$ són independents i idènticament distribuïdes, és adequat calcular la mitjana d'aquests estimadors de manera que, tal i com es veurà més endavant, la variància de l'estimació resultant disminueixi. Així, l'estimador del Periodograma que es proposa consistiria en obtenir la mitjana del conjunt de M estimadors,

$$\hat{p}_X^{PER}(x) = \frac{1}{MP} \sum_{n=0}^{M-1} \left(\left| \sum_{p=0}^{P-1} z_{(X,n)}(p) e^{-jp\omega_0 x} \right|^2 \right) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(\sum_{l=-P+1}^{P-1} w(l) z_{(X,n)}(l) e^{-jl\omega_0 x} \right) \quad (4.34)$$

de manera que es pot finalment expressar com la transformada de Fourier de la funció característica empírica en finestrada per la funció Bartlett de durada $(2P-1)$.

$$\hat{p}_X^{PER}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l) \left(\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} z_{(X,n)}(l) \right) e^{-jl\omega_0 x} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l) \cdot \hat{\psi}_X(jl\omega_0) \cdot e^{-jl\omega_0 x} \quad (4.35)$$

La principal diferència entre el Periodograma i l'estimador proporcionat pel mètode de Blackman-Tukey radica en la consideració de finestres $w(l)$ diferents [Kay88]. Així, l'estimador de Blackman-Tukey té la mateixa expressió del Periodograma però amb una finestra, $w(l)$, diferent de la de Bartlett.

$$\hat{p}_X^{BT}(x) = \sum_{l=-P+1}^{P-1} w(l) \cdot \hat{\psi}_X(jl\omega_0) \cdot e^{-jl\omega_0 x} \quad (4.36)$$

És interessant remarcar que l'estimador de Blackman-Tukey (Eq.4.36) coincideix amb l'expressió que proporcionaria un estimador de Parzen amb una finestra de Parzen $\varphi(y)$ (Eq.4.29), tal que la seva transformada de Fourier mostrejada coincidís amb la de la finestra de Blackman-Tukey, $w(l)$ [Par62].

$$\varphi(y) \xrightarrow[\text{de Fourier}]{\text{Transformada}} \vartheta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cdot e^{-j\omega y} dy \Rightarrow w(l) = \vartheta(h_n l \omega_0) \quad (4.37)$$

Amb aquesta equivalència, la finestra $w(l)$ ha de complir les condicions que s'imposen a les funcions de Parzen, veure per exemple [Dud73], per tal de que l'estimador de Blackman-Tukey tingui les propietats d'assimptòticament no-esbiaixat i consistència de l'estimador de

Parzen. Respecte de les particularitats estadístiques d'aquests estimadors en l'entorn d'estimació de FDP's, és necessari calcular tant la seva mitjana com variància. A l'igual d'estimació espectral, la mitjana de l'estimador correspon a una convolució de la FDP real amb la transformada de Fourier de la finestra emprada.

$$\begin{aligned}
 E[\hat{p}_X(x)] &= E\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l) \cdot \hat{\psi}_X(l) \cdot e^{-j\omega_0 xl} \right] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l) \cdot \psi_X(l) \cdot e^{-j\omega_0 xl} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_{zz}(\theta) \cdot W(\omega - \theta) d\theta = \left\{ \begin{array}{l} \theta = \omega_0 \alpha \\ \omega = \omega_0 x \end{array} \right\} = \int_{-X_0}^{X_0} p_X(\alpha) \cdot W(\omega_0(x - \alpha)) d\alpha
 \end{aligned}
 \tag{4.38}$$

De la mateixa manera que en estimació espectral, un augment del nombre de dades M que proporciona una estimació més acurada de la funció característica, no fa que el biaix de l'estimació de la FDP dels mètodes clàssics disminueixi. És necessari que la transformada de Fourier de la finestra utilitzada, és a dir, $W(\omega)$, tendeixi a una delta per tal d'obtenir una estimació no-esbiaixada. Per altra banda, l'estimador és consistent ja que la variància de l'estimador (Apèn.4.B) tendeix a zero a mesura que el nombre de dades M augmenta,

$$|\text{var}\{\hat{p}_X(x)\}| \leq \frac{2}{N} \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{ww}(l)
 \tag{4.39}$$

on $r_{ww}(l)$ representa l'autocorrelació de la finestra $w(l)$ utilitzada per l'estimador. De totes maneres, apareix el compromís entre esbiaix i variància, ja que en el moment en que la finestra en freqüència tendeixi a una delta, el sumatori de la seva autocorrelació divergeix i la variància també. Per tant, es crea una situació de compromís similar a l'existent en el Periodograma o també en el mètode de Blackman-Tukey en estimació espectral [Kay88].

És interessant, en vistes a establir una comparació amb d'altres mètodes, formular la solució del Periodograma de manera matricial,

$$\hat{p}_X^{PER}(x) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \left(\frac{1}{P} |s_x^H \cdot z_n|^2 \right) = \frac{s_x^H \cdot \hat{\Psi}_{XX} \cdot s_x}{P}
 \tag{4.40}$$

on la matriu $\hat{\Psi}_{XX}$ es correspon amb la matriu característica empírica (Eq.4.27) i el vector s_x agrupa les exponencials complexes d'ordre succesiu.

$$s_x^H = \left[1 \quad e^{-j\omega_0 x} \quad e^{-j2\omega_0 x} \quad \dots \quad e^{-j(P-1)\omega_0 x} \right]
 \tag{4.41}$$

Val a dir que, en el cas de Blackman-Tukey el resultat anterior (Eq.4.40) només canviaria en que cada element de la matriu característica empírica estaria multiplicat pel valor corresponent de la finestra $w(l)$ utilitzada.

Tal i com es mostrarà a la següent secció dedicada a l'estimador de Mínima Variància, aquesta formulació posa de relleu la interpretació de filtratge del Periodograma. En efecte, l'estimació proporcionada pel Periodograma (Eq.4.40) és equivalent a la mitjana temporal de la potència instantània de la sortida d'un sistema tal i com el de la figura (4.4) de manera que l'etapa lineal correspongués a un sistema amb una resposta impulsional igual en freqüència a una funció sinc centrada en el valor concret de x on s'estima la FDP. En comunicacions, aquest filtre resulta ésser el filtre adaptat a un pols de radiofreqüència amb una freqüència $\omega = \omega_0 x$ contaminat additivament per soroll gaussià i blanc [Lag86a]. En el cas d'estimació de FDP, els tons purs freqüencials (deltes en l'espectre) equivalen a variables aleatòries discretes, i el soroll blanc (espectre pla) a una variable aleatòria uniforme. És important remarcar que en aquest aspecte ja s'entreveu una disparitat en la generalització dels mètodes d'estimació espectral i els mètodes d'estimació de FDP: mentre que la DEP de la suma de dos senyals incorrelats correspon a la suma de les respectives DEP's, la FDP de la suma de dues variables aleatòries independents equival a la convolució de les respectives FDP's. Aquesta propietat de les FDP és molt important ja que no ens permet extrapolar certes característiques dels estimadors espectrals relacionades amb aquesta propietat dels espectres. Concretament, i pel que fa al Periodograma, tot i proporcionar una estimació de la FDP real no es correspon al filtre adaptat en cas de rebre una variable aleatòria discreta contaminada amb un soroll uniforme.

Més endavant, quan es valori la possibilitat d'estimar FDP de variables aleatòries discretes, aquest problema resorgirà i el presentarem amb més formalitat. Abans d'això, a la següent secció es presenta el mètode d'estimació de Mínima Variància des d'un punt de vista de filtratge i sota un criteri de disseny variacional.

4.3.2 Mètodes d'Estimació Espectral basats en filtratge: mètode de Mínima Variància

El mètode de Mínima Variància va ser desenvolupat per Capon [Rep78] i per tant, també se'l coneix pel nom de mètode de Capon i, a més a més, pel de Màxima Versemblança. Aquest darrer nom, que indueix a confusions, va sorgir originàriament com a conseqüència de que l'estimador de Capon coincideix amb el de màxima versemblança en cas d'estimar l'amplitud complexa d'un senyal senoidal complexa contaminat per soroll Gaussià.

Aquest mètode permet una interessant interpretació de filtratge del procés $z(x,n)(p)$ com el representat a la figura (4.4) que es reproduïx a continuació per comoditat.

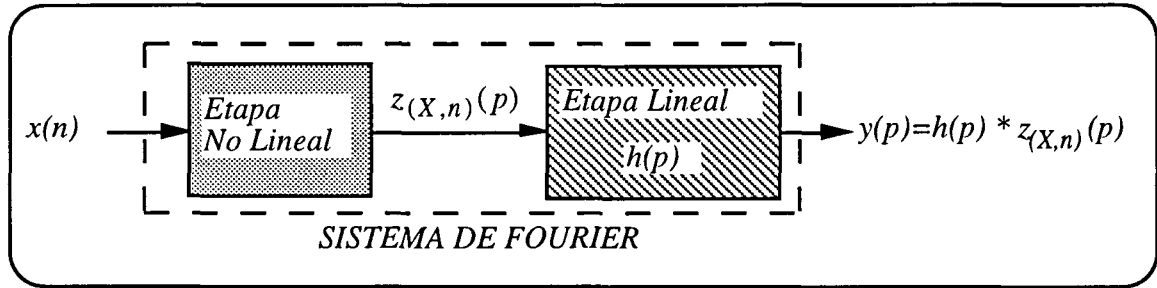


Figura 4.5 Sistema de Fourier en el que es basen els mètodes d'estimació espectral mitjançant filtratge.

Anteriorment, ja s'ha avançat que altres mètodes d'estimació espectral admeten també un disseny des del punt de vista de filtratge i, en conseqüència, resulta interessant formular el problema de manera genèrica per tal de poder establir comparacions, abans de particularitzar-lo pel cas de Mínima Variància .

Tal i com mostra la figura (4.5) es tracta de filtrar el procés $z_{(X,n)}(p)$ de manera que a la sortida es pugui obtenir una estimació de la potència del procés, que en el nostre cas equivaldrà a una estimació de la FDP de x . És interessant remarcar que el fet de que el filtratge realitzat sobre $z_{(X,n)}(p)$ sigui de tipus lineal comporta que aquests mètodes d'estimació de FDP puguin ésser implementats per un sistema no lineal que segueix les pautes d'un model de Fourier.

Suposant que l'etapa lineal es caracteritza per un sistema amb una resposta impulsional denotada per $h(p)$, la sortida que proporciona l'esquema anterior consisteix en la convolució del procés $z_{(X,n)}(p)$ i la resposta impulsional $h(p)$.

$$y(p) = z_{(X,n)}(p) * h(p) \quad (4.42)$$

Si es proposa un filtre de resposta impulsional finita de longitud P i caracteritzat pels coeficients $\{h(p) = a^*(p) \forall p=0, \dots, P-1\}$, la sortida $y(p)$ es pot expressar en una formulació vectorial,

$$y(p) = \sum_{l=0}^{P-1} a^*(l) \cdot z_{(X,n)}(p-l) = \sum_{l=0}^{P-1} a^*(l) \cdot e^{j(p-l)\omega_0 x(n)} = \mathbf{a}^H \cdot \mathbf{z}_n \quad (4.43)$$

que depèn dels vectors \mathbf{a} i \mathbf{z}_n definits tal i com segueix.

$$\mathbf{a} = [a(0) \quad a(1) \quad \dots \quad a(P-1)]' \quad (4.44.a)$$

$$\mathbf{z}_n = [e^{jP\omega_0 x(n)} \quad e^{j(p-1)\omega_0 x(n)} \quad \dots \quad e^{j(p-P+1)\omega_0 x(n)}]' \quad (4.44.b)$$

Pel fet de que el procés $z_{(X,n)}(p)$ és estacionari en p , i donat que el filtre $h(p)$ és lineal, la sortida també és estacionària. Aquesta propietat permet estimar la potència del senyal de sortida

particularitzant per $p=0$ sense cap pèrdua de generalitat (de fet, és per això que no s'ha denotat explícitament la dependència del vector z_n en p).

$$E\left[|y(0)|^2\right] = E\left[\left|a^H \cdot z_n\right|_{p=0}^2\right] = a^H \cdot E\left[z_n \cdot z_n^H\right] \cdot a \equiv a^H \cdot \Psi_{xx} \cdot a \quad (4.45)$$

Es pot observar com la matriu característica es veu involucrada en el càlcul de la potència del senyal $y(p)$ de manera que, en general, es necessitarà una estimació d'aquesta matriu, proporcionada en el nostre cas per l'estimador funció característica empírica (Eq.4.27). Una altra manera d'expressar la potència de la sortida i que deixa palès el filtratge que s'està efectuant sobre la FDP real sorgeix d'expressar el valor esperat en termes de la funció $p_X(x)$.

$$E\left[|y(0)|^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(0)|^2 \cdot p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{l=0}^{P-1} a^*(l) \cdot e^{-jl\omega_0 x} \right|^2 \cdot p_X(x) dx \quad (4.46)$$

Si es reconeix el valor que apareix en mòdul al quadrat com la funció de transferència del filtre que denotem per $H_{x'}(x)$ (ja que, en general, depèn del valor on es proporciona l'estimació de la FDP denotat per x'),

$$H_{x'}(x) \equiv \sum_{l=0}^{P-1} a^*(l) \cdot e^{-jl\omega_0 x} \quad (4.47)$$

es pot veure clarament que el filtre $h(p)$ està realitzant un filtratge sobre la FDP real del senyal d'entrada i que, per tant, un disseny adequat dels coeficients del filtre podrà proporcionar una estimació d'aquesta FDP a cada valor de x' .

$$E\left[|y(0)|^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_{x'}(x)|^2 \cdot p_X(x) dx \approx \hat{p}_X(x') \quad (4.48)$$

Els diferents mètodes que es relacionen amb aquest desenvolupament només es diferencien en el criteri que segueixen a l'hora de dissenyar els coeficients del filtre lineal. Així, per exemple, ara es pot comprovar que el Periodograma és un cas particular on els coeficients que formen el vector a coincideixen amb els del vector s (Eq.4.41) però particularitzats en $x=x'$. La funció de transferència del filtre, $H_{x'}(x)$, resulta ser una sinc centrada a la freqüència de x' evidenciant la dependència del filtre respecte de x' . En aquest cas però, aquesta dependència es limita a introduir un desplaçament en freqüència per tal de centrar el lòbul principal de la funció sinc al voltant del valor on s'estima la FDP.

En aquest sentit, sembla que d'altres dissenys del filtre que per a cada valor x' s'adaptin millor a la FDP real hagin d'aportar millors estimacions de la FDP. De totes maneres, tal i com

mostra la següent figura, sempre que la funció de transferència $H_{x'}(x)$ del filtre lineal difereixi de la funció delta de Dirac centrada al valor x' , l'estimació proporcionada per la potència de la sortida no coincidirà exactament amb el valor real de la FDP real ja que el filtre $H_{x'}(x)$ introdueix energia d'altres valors de x , efecte que en anglès es coneix pel nom de "leakage".

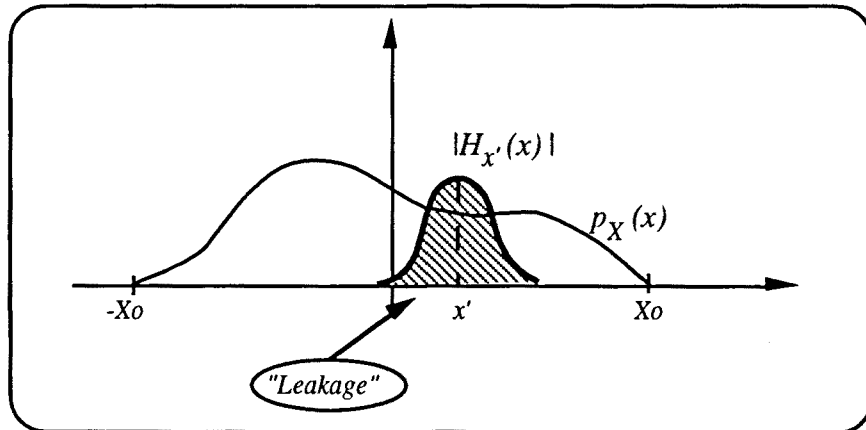


Figura 4.5 Efecte del "leakage" del filtratge de la FDP $p_{X'}(x)$

El mètode de Mínima Variància dissenya els coeficients del filtre $\{a_{x'}(p) \forall n=0, \dots, P-1\}$ minimitzant la potència de sortida (de manera que el "leakage" introduït pel filtre sigui el més petit possible),

$$\left\{ \hat{p}_X(x') = E[|y(0)|^2] = \mathbf{a}_{x'}^H \cdot \Psi_{xx} \cdot \mathbf{a}_{x'} \right\}_{MINIM} \quad (4.49)$$

però alhora, per tal d'evitar la solució nul·la, força que la funció de transferència del filtre valgui 1 al valor x' on s'estima la FDP.

$$H_{x'}(x)|_{x=x'} = \sum_{l=0}^{P-1} a^*(l) \cdot e^{-jl\omega_0 x'} \equiv \mathbf{a}_{x'} \cdot \mathbf{s}_{x'} = 1 \quad (4.50)$$

Aquesta restricció imposada sobre el filtre es formula en termes del vector $\mathbf{s}_{x'}$ que, a diferència del Periodograma (és el vector complex conjugat), es defineix tal i com segueix.

$$\mathbf{s}_x = \left[1 \quad e^{-j\omega_0 x} \quad e^{-j2\omega_0 x} \quad \dots \quad e^{-j(P-1)\omega_0 x} \right]' \quad \omega_0 \equiv \frac{2\pi}{2X_0} \quad (4.51)$$

La solució al problema variacional plantejat es troba mitjançant el mètode de Lagrange minimitzant la funció de cost respecte del vector de coeficients,

$$\xi_{\mathbf{a}_{x'}} = \{Funció de cost\} = \mathbf{a}_{x'}^H \cdot \hat{\Psi}_{xx} \cdot \mathbf{a}_{x'} + \lambda \cdot (\mathbf{a}_{x'} \cdot \mathbf{s}_{x'} - 1) \quad (4.52)$$

sota la restricció imposada per (Eq.4.50) (cal notar que en la funció de cost s'ha substituït la matriu característica estadística en comptes de l'estimada). És fàcil arribar a la següent expressió pels coeficients del filtre que, tal i com s'havia previst amb el subíndex x' , depenen del valor on la FDP s'estima,

$$a_{x'}^{MV} = \frac{\hat{\Psi}_{XX}^{-1} \cdot s_{x'}}{s_{x'}^H \cdot \hat{\Psi}_{XX}^{-1} \cdot s_{x'}} \quad (4.53)$$

així com a la següent expressió per a la potència de sortida que proporciona l'estimació del mètode de Mínima Variància de la FDP a x' .

$$\hat{p}_X^{MV}(x') = \frac{1}{s_{x'}^H \cdot \hat{\Psi}_{XX}^{-1} \cdot s_{x'}} \quad (4.54)$$

El mateix Capon va demostrar, a partir d'uns resultats estadístics de Goodman, que el mètode d'estimació espectral de Mínima Variància era asimptòticament no-esbiaixat i consistent [Cap70,71]. Tota la demostració parteix de la hipòtesi de que la matriu d'autocorrelació del senyal d'entrada que s'utilitzaria a (Eq.4.54) en estimació d'espectre, consisteix en la suma del producte de parells de vectors, tals que constitueixen un conjunt de vectors independents i idènticament distribuïts, i que les seves components són variables aleatòries complexes Gaussianes. Per tal de que aquesta demostració es pugués generalitzar al cas d'estimació de FDP seria necessari que els vectors $\{z_n \forall n=0, \dots, M-1\}$ a partir dels quals s'estima la matriu característica,

$$\hat{\Psi}_{xx} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} z_n \cdot z_n^H \quad (4.55)$$

cumplissin aquesta propietat. Ateses les propietats d'independència i de idèntica distribució del conjunt $\{x(n)\}$, això afecta també al conjunt dels vectors $\{z_n\}$. L'impediment important està però, en el fet de que les components de cada vector z_n siguin Gaussianes ja que són una transformació no lineal de la dada $x(n)$ i llavors, fins i tot en el cas de que $x(n)$ fos Gaussianes, z_n no ho seria. Per això, i donada la complexitat que requeriria, l'estudi estadístic del mètode de Mínima Variància en l'estimació de FDP està fora de l'abast d'aquesta tesi, basant les valoracions del mètode en funció dels resultats que s'obtinguin a les simulacions.

A partir d'aquest mètode es va desenvolupar el mètode de Mínima Variància Normalitzat [Lag86a] que consisteix en dividir l'estimació per l'amplada equivalent del filtre ja que les unitats de l'expressió (Eq.4.54) no corresponen a les de la FDP (en estimació espectral el problema es trasllada a que el que es vol estimar és una DEP i l'estimador de Mínima Variància proporciona potència, per tant cal dividir per l'amplada equivalent del filtre).

$$\hat{p}_X^{MVN}(x') = \frac{s_{x'}^H \cdot \hat{\Psi}_{XX}^{-1} \cdot s_{x'}}{s_{x'}^H \cdot \hat{\Psi}_{XX}^{-2} \cdot s_{x'}} \quad (4.56)$$

En efecte, de l'estimació proporcionada per l'estimador de Mínima Variància (Eq.4.48, Fig.4.5) es pot comprovar que en filtrar la funció $p_X(x)$ amb un filtre d'amplada no nul·la, s'està obtenint la probabilitat de que la x pertanyi al rang de valors que inclou el filtre $H_X(x)$. En conseqüència, per tal d'obtenir un valor de "densitat" de probabilitat és necessari dividir l'estimació de probabilitat de MV obtinguda per l'amplada equivalent del citat filtre, que vé a ésser el rang de valors, resultant-ne l'anterior expressió (Eq.4.56).

En general, es pot afirmar que el mètode normalitzat està dotat d'una major resolució però també d'una major variància. A l'igual que aquest darrer (Eq.4.56), l'estimació espectral proporcionada pels anomenats *Quocients de Rayleigh* de qualsevol ordre també serien vàlids, així com també l'estimació de Pisarenko a la que convergeixen quan l'ordre tendeix a infinit, veure per exemple [Lag86a]. Aquest darrer mètode generalment s'engloba dins de mètodes que es basen en la descomposició en valors singulars (de l'anglès "Singular Value Decomposition") de la matriu d'autocorrelació, que més que estimar l'espectre, proporcionen una estimació de la freqüència de tons senoidals. Aquests mètodes basats en SVD també es poden aplicar dins l'entorn d'estimació de FDP, concretament són interessants en presència de variables aleatòries discretes ja que són equivalents a deltes en el domini de la FDP. De totes maneres, abans de discutir la utilitat d'aquests mètodes, cal que es presentin els mètodes paramètrics d'estimació espectral, concretament el basat en models AR, anomenat també mètode de Predicció Lineal, i la relació interessant que sorgeix entre el triangle format per mètode de Predicció Lineal, mètode de Màxima Entropia i model de Fourier.

4.3.3 Mètodes paramètrics d'estimació espectral.

Els mètodes paramètrics d'estimació espectral es defineixen com aquells que, a diferència dels mètodes presentats a les darreres dues seccions, pressuposen més informació sobre la DEP d'un procés que la que proporciona el teorema de Wiener-Kinchin [Kay88]. Concretament, en aquesta tesi es presta atenció als mètodes que pressuposen un determinat model racional a seguir per la DEP i caracteritzat per un conjunt de paràmetres, de manera que l'estimació de la DEP s'obté a partir d'una estimació dels paràmetres i de l'arquitectura que proporciona el model assumit. Tradicionalment, en estimació espectral, aquests models consideren que el procés del que la DEP s'estima, respon a un procés MA, AR o bé ARMA (de l'anglès *Moving Average*, *AutoRegressive* i *AutoRegressive-Moving Average* [Kay88]). De tots tres, els que s'han desenvolupat i estudiat més són els dos darrers, i especialment els mètodes basat en modelatge AR [Mak75], com a conseqüència bàsicament de la possibilitat

d'aplicar algorismes eficients pel càlcul dels paràmetres del model. És per això, que aquest apartat es dedica exclusivament a modelatge diguem-ne "AR" aplicat a l'estimació de FDP. Queda per discutir però, què significa en aquest entorn d'estimació de FDP parlar d'un model AR.

En aquest sentit, és ben conegut que existeixen altres interpretacions, basades en criteris de disseny diferents, que condueixen a la mateixa solució que a la que s'arribaria suposant que la DEP que es vol estimar es correspon a un procés AR. En concret, es pot parlar de dos criteris diferents d'estimació espectral: Predicció Lineal i Màxima Entropia. El primer d'ells realitza un filtratge del procés d'entrada tal que, a diferència del mètode de Mínima Variància on el disseny del filtre busca un filtratge de la DEP real el més selectiu possible per tal d'aconseguir una bona estimació a partir de la potència de la sortida, el mètode de Predicció Lineal el que fa és "blanquejar" al màxim el procés de sortida de manera que la funció de transferència del predictor retengui tota la informació espectral del procés d'entrada.

Per altra banda està el mètode anomenat de Màxima Entropia [Rep78, Burg] basat en un desenvolupament variacional (funció de cost amb restriccions) en el que la funció de cost a maximitzar també maximitza l'entropia del procés d'entrada (sempre que es tracti d'un procés Gaussià) subjecte a unes restriccions sobre certs valors de la funció d'autocorrelació del procés d'entrada. En definitiva, Burg va proposar un criteri de disseny de la DEP tal que, sense deixar de ser positiva i fixant uns determinats valors de la funció d'autocorrelació, extrapolés els valors desconeguts de la funció d'autocorrelació de manera que el procés d'entrada fos el més aleatori possible, o equivalentment, que la DEP del procés fos el més plana o "blanca" possible. És, en aquest sentit, que es pot comprovar que la funció de cost proposada per Burg és equivalent a un criteri de disseny en la "forma" de la DEP per tal de que sigui el més plana possible però sota unes determinades restriccions [Kay88].

A continuació es mostrarà com en aplicar-se els criteris de Predicció Lineal i de Màxima Entropia a l'estimació de FDP's, ens condueixen a un model de Fourier de manera que es reforça el paral·lelisme entre modelatge AR de sistemes lineals i model de Fourier en sistemes no lineals. Cal destacar que els aspectes relacionats amb la determinació de l'ordre del model no entren dins les expectatives d'aquesta tesi.

4.3.3.1 Mètode de Predicció Lineal

Aquest mètode, tal i com indica el seu nom, es basa en aplicar un Predictor Lineal sobre el procés $z_{(X,n)}(p)$ (Fig.4.6) de manera que l'error de predicció, denotat per $e(p)$ contingui tota la informació de $z_{(X,n)}(p)$ que no és possible predir.

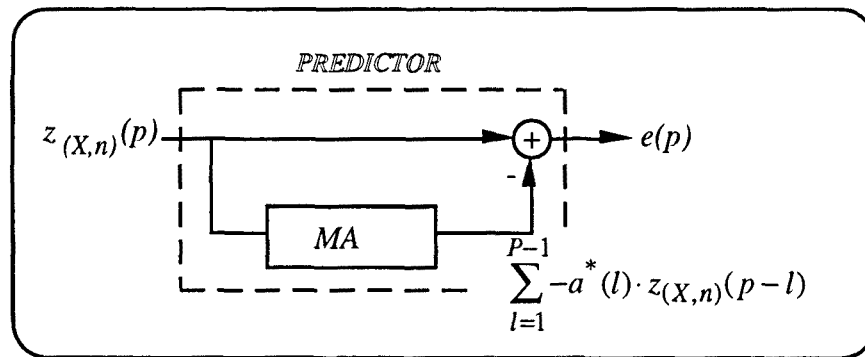


Figura 4.6 Predictor lineal del procés $z_{(X,n)}(p)$.

Es pot comprovar, per exemple a [Kay88], que el fet de minimitzar la potència de l'error equival a blanquejar el procés de sortida un cop es tenen fixades la DEP del procés d'entrada i la potència del mateix. Així, en certa manera, el predictor conserva la informació de l'espectre del procés d'entrada, $S_{zz}(\omega)$, i per tant de la FDP de la variable aleatòria x . El disseny dels coeficients $\{a(k) \ k=1, \dots, P-1\}$ del predictor s'encamina a minimitzar la potència de l'error denotada per ξ_e que, pel fet d'ésser $e(p)$ un procés estacionari en la variable p , es defineix sense pèrdua de generalitat tal i com segueix.

$$\xi_e = E[|e(0)|^2] = E \left[\left| z_{(X,n)}(0) + \sum_{l=1}^{P-1} a^*(l) \cdot z_{(X,n)}(-l) \right|^2 \right] \quad (4.57)$$

Per tal de minimitzar aquesta funció cal diferenciar respecte de cada coeficient $a^*(l)$ i igualar a zero. El resultat, després d'aplicar equivalentment l'ortogonalitat entre l'error conjugat i les dades, es resumeix en les següents $(P-1)$ equacions,

$$\psi_X(-jm\omega_0) + \sum_{l=1}^{P-1} a(l) \cdot \psi_X[j(l-m)\omega_0] = 0 \quad \forall m = 1, \dots, P-1 \quad (4.58)$$

i també ens condueix al següent valor mínim de potència assolit, denotat per η_e , expressat en termes dels coeficients.

$$\eta_e = \psi_X(0) + \sum_{k=1}^{P-1} a(k) \cdot \psi_X(jk\omega_0) \quad (4.59)$$

Normalment, les equacions (4.58) i (4.59) s'agrupen en un sistema lineal pel que fa als coeficients que es coneix pel nom de les equacions de Yule-Walker que permeten l'ús de l'algorisme eficient de Levinson-Durbin que necessita de l'ordre de $O(P^2)$ trobar la solució,

mentres que d'altres mètodes clàssics d'inversió de matrius (per exemple, mètode per eliminació de Gauss) necessiten de l'ordre de $O(P^3)$.

$$\Psi_{xx} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Aquestes equacions de Yule-Walker utilitzen la matriu característica, Ψ_{xx} , en lloc de la matriu d'autocorrelació, però com que ambdues matrius tenen les mateixes propietats (hermiticitat i simetria Toeplitz), l'algorisme de Levinson-Durbin es pot aplicar igualment. Per altra banda, val a dir que el vector \mathbf{a} agrupa els $(P-1)$ coeficients del predictor, mentre que el vector $\mathbf{0}$ té dimensió també $(P-1)$.

Alternativament, i amb la intenció de deixar palesa la flexibilitat del mètode variacional fins i tot en el que podriem dir domini "temporal" p , els coeficients del predictor es poden obtenir minimitzant la potència expressada ara en forma matricial (Eq.4.61.a), subjecte a que el coeficient $a(0)$ valgui 1 (Eq.4.61.b) (ara el vector \mathbf{a} és de dimensió P ja que inclou el coeficient $a(0)$).

$$\xi_e|_{MINIM} \equiv \mathbf{a}^H \cdot \Psi_{xx} \cdot \mathbf{a}|_{MINIM} \quad (4.61.a)$$

$$\mathbf{a}^H \cdot \mathbf{1} = 1 \quad \mathbf{1} = [1 \quad \mathbf{0}]' \quad (4.61.b)$$

Aplicant el mètode de Lagrange, s'arriba a la següent expressió pels coeficients i per l'error

$$\mathbf{a} = \frac{\Psi_{xx}^{-1} \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1} \cdot \Psi_{xx}^{-1} \cdot \mathbf{1}} \quad i \quad \xi_e|_{MINIM} \equiv \eta_e = \frac{1}{\mathbf{1} \cdot \Psi_{xx}^{-1} \cdot \mathbf{1}} \quad (4.62)$$

que coincideixen amb l'anterior disseny. A partir de la figura (4.6), l'estimador de la FDP esdevé,

$$S_{zz}(\omega) = \frac{S_{ee}(\omega)}{\left| 1 + \sum_{l=1}^{P-1} a(l) \cdot e^{j\omega l} \right|^2} \quad (4.63)$$

on, suposant que $e(p)$ correspon a un soroll blanc amb potència η_e , s'arriba a la següent estimació de la FDP de x proporcionada pel mètode de Predicció Lineal .

$$\hat{p}_X^{PL}(x) = S_{zz}(\omega) \Big|_{\omega=\omega_0 x} = \frac{\eta_e}{\left| 1 + \sum_{l=1}^{P-1} a^*(l) \cdot e^{-j\omega_0 xl} \right|^2} \quad (4.64)$$

És ben conegut que les propietats de concordança espectral entre l'estimador espectral del Predictor Lineal i l'espectre real responen a la integral de la divisió de l'espectre aproximat i el real. És interessant doncs veure com a partir de l'expressió (4.64) es pot establir una relació equivalent entre la FDP estimada i la real. Per tal d'aconseguir arribar a aquesta relació cal expressar la potència de l'error del predictor en termes estadístics, és a dir, com a funció de la FDP de l'error, denotada per $p_E(e)$.

$$E[|e(0)|^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} |e(0)|^2 \cdot p_E(e) de \quad (4.65)$$

Prenent en consideració que el predictor efectua una transformació no lineal sobre la variable aleatòria x ,

$$e(0) = g[x(n)] = 1 + \sum_{l=1}^{P-1} a^*(l) \cdot e^{-jl\omega_0 x(n)} \quad (4.66)$$

la relació entre la FDP de l'error i la de l'entrada es pot expressar tal i com segueix, sense pèrdua de generalitat de cara a una futura substitució a l'equació integral (Eq.4.65).

$$p_E(e) = \frac{p_X(x)}{\frac{de}{dx}} \quad (4.67)$$

D'aquesta manera la funció de cost a minimitzar (Eq.4.65) queda expressada en funció de la FDP real de x , així com en funció dels coeficients del predictor i, en conseqüència, de la FDP estimada.

$$\xi_e = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| 1 + \sum_{l=1}^{P-1} a^*(l) \cdot e^{-jl\omega_0 x(n)} \right|^2 \cdot p_X(x) dx = \eta_e \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_X(x)}{\hat{p}_X^{PL}(x)} dx \quad (4.68)$$

La minimització de la potència de l'error, que condueix a $\xi_e = \eta_e$, implica una relació entre FDP totalment equivalent a la que s'aconsegueix entre DEP's en estimació espectral.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_X(x)}{\hat{p}_X^{PL}(x)} dx = 1 \quad (4.69)$$

En conseqüència, el comportament del mètode d'estimació de FDP per Predicció Lineal tendirà, a l'igual del cas d'estimació espectral, a aproximar bé la FDP real allà on pren valors més elevats ja que és en aquests valors de x on la funció de cost es veu més penalitzada. Això dotarà a l'estimació de la FDP d'una forma amb pics (com a conseqüència de que $\hat{p}^{XPL}(x)$ només té zeros en el denominador), intentant col·locar-los allà on la FDP real pren valors més alts.

Tot i que no ho detallarem, és interessant remarcar que també és possible la representació alternativa del model en funció dels coeficients de reflexió o PARCORs en lloc dels paràmetres AR. En efecte, el Predictor Lineal admet una implementació indirecta mitjançant una arquitectura lattice equivalent a la que apareix a l'apartat (3.3) del capítol anterior, íntegrament dedicat a la implementació lattice del model de Fourier.

En aquest estimador sorgeixen dos problemes importants. El primer d'ells és l'ordre del predictor P i el segon, encara més rellevant, és el qüestionar-se el propi model. Aquest aspecte és crucial ja que, en el moment en que l'expressió (Eq.4.64) no és vàlida, és a dir, que $e(p)$ no és un procés blanc, no es pot esperar gaire del subseqüent estimador.

Una altra característica interessant de destacar és la diferència de metodologia que sorgeix entre els mètodes d'estimació espectral clàssics, Periodograma i Blackman-Tukey, i el de Predicció Lineal. Mentre que en els primers l'estimació de la FDP es proporciona a partir d'uns valors estimats de la funció característica i s'assumeix que els altres són zero, el mètode de Predicció Lineal extrapola els valors de la funció característica (Eq.4.64). En aquest sentit, Burg va plantejar-se quin seria un criteri "adequat" d'extrapolació de les mostres desconegudes de la funció característica de manera que proporcionessin una estimació de la DEP.

4.3.3.2 Mètode de Màxima Entropia

El mètode de Màxima Entropia és representatiu del procediment de resolució de problemes variacionals en el domini freqüencial en els que l'objectiu és la maximització o minimització d'una determinada funció de cost que depèn de l'estimació, subjecte a un conjunt de restriccions. La combinació de diverses funcions de cost amb diversos tipus de restriccions originen un nombre elevat de criteris d'estimació [Lag86b]. L'acceptació més o menys àmplia d'un criteri envers els altres està condicionada per la "simplicitat" de la solució, així com, evidentment, els resultats obtinguts a la pràctica.

El problema variacional és una tàctica força habitual en l'estimació de FDP [Ziv95] així com també l'ús de restriccions sobre certs moments estimats a priori de la variable aleatòria [Vid94]. En el nostre cas, i seguint les pautes marcades pels mètodes d'estimació espectral, el que es fixa són certes mostres de la funció característica que s'han estimat prèviament.

Concretament, en el cas del disseny de Màxima Entropia proposat inicialment per Burg i en un entorn d'estimació espectral, el que es fa és maximitzar la següent funció de cost,

$$\xi \equiv - \int_{-\infty}^{+\infty} \ln[\hat{S}_{zz}^{MEM}(\omega)] d\omega \quad (4.70)$$

subjecte a determinades restriccions imposades sobre la funció d'autocorrelació del procés del qual la DEP es pretén estimar.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{S}_{zz}^{MEM}(\omega) \cdot e^{-jm\omega} d\omega = r_{zz}(m) \quad |m| < P-1 \quad (4.71)$$

Respecte de la funció de cost, val a dir que la seva maximització és equivalent a maximitzar l'entropia del procés $z(p)$ en cas de que fos Gaussià. Donat que en el nostre cas el procés respon a una transformació no lineal del procés d'entrada $x(n)$ (Eq.4.18), no es pot suposar que $z(p)$ sigui, en general, Gaussià. De totes maneres, és també conegut que el criteri imposat per la maximització de la funció de cost (Eq.4.70), subjecte a que el valor de $r_{zz}(0)$ és fixe, equival a forçar que $\hat{S}_{zz}^{MEM}(\omega)$ sigui el més plana possible. Així, en definitiva, Burg va imposar un criteri d'extrapolació de la funció d'autocorrelació de manera que, sense que $\hat{S}_{zz}^{MEM}(\omega)$ deixés de ser real i positiva, el procés $z(p)$ fos el més aleatori, el més impredecible possible.

En el cas d'adaptar aquest plantejament variacional a l'estimació de la FDP, la funció de cost anterior esdevé igual a,

$$\xi \equiv - \int_{-X_0}^{+X_0} \ln[\hat{p}_X^{MEM}(x)] dx \quad (4.72)$$

mentres que les restriccions s'imposen sobre la funció característica de x i no sobre els moments.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_X^{MEM}(x) \cdot e^{-jm\omega_0 x} dx = \psi_X(m) \quad |m| < P-1 \quad (4.73)$$

Es pot comprovar que el criteri de disseny de maximització de la funció de cost (Eq.4.72) equival a minimitzar la divergència entre la FDP que s'estima i una FDP uniforme dins el rang de $[-X_0, X_0]$. És en aquest sentit que el que realment s'està obtenint amb aquest criteri és la FDP més plana possible (o més uniforme possible) que compleixi les restriccions imposades sobre la funció característica. El procediment de resolució de la maximització de la

funció de cost (Eq.4.72), subjecte al conjunt de condicions (Eq.4.73) es realitza de forma totalment paral·lela al mètode de Burg pel cas d'estimació espectral. Així, aplicant el mètode de Lagrange s'arriba a la següent expressió,

$$\hat{p}_X^{MEM}(x) = \frac{1}{\sum_{l=-P+1}^{P-1} \lambda_l \cdot e^{-jl\omega_0 x}} \quad (4.74)$$

on els coeficients $\{\lambda_k \ k=-P+1, \dots, P-1\}$ són els multiplicadors de Lagrange. A continuació, i tenint en consideració que l'estimació $\hat{p}_X^{MEM}(x)$ és real i positiva, el denominador anterior (Eq.4.74) es pot factoritzar i aplicant el teorema dels residus (per exemple a [Hay91]) s'arriba a la següent expressió per l'estimador de Màxima Entropia

$$\hat{p}_X^{MEM}(x) = \frac{\eta_e}{\left| 1 + \sum_{l=1}^{P-1} a^*(l) \cdot e^{-j\omega_0 xl} \right|^2} \quad (4.75)$$

on els coeficients del denominador coincideixen amb els de la solució de l'equació de Yule-Walker (Eq.4.60).

La lectura més important que se'n fa d'aquest resultat és que, tant l'estimador de FDP seguint les pautes del mètode de Burg així com del de Predicció Lineal condueixen a la mateixa solució i, a més a més, aquesta segueix un modelatge de Fourier. En definitiva, a part de la importància dels estimadors anteriors, val a dir que aquest resultat reforça la idea de que el model de Fourier és en l'entorn de modelatge de SNLs, el que en sistemes lineals representa el modelatge MA, necessari per a blanquejar un procés AR.

Un cop s'ha mostrat com els mètodes d'estimació espectral es poden utilitzar per a obtenir una estimació de la FDP, es proposa generalitzar aquests mètodes, sempre que sigui possible, al cas multidimensional de manera que proporcionin mètodes d'estimació de la FDP conjunta d'un grup de variables aleatòries.

4.4 Mètodes d'estimació espectral per a estimació de FDP conjunta. Cas multivariable

Aquesta secció està bàsicament motivada per la possibilitat de generalitzar certs mètodes d'estimació espectral presentats anteriorment al cas multivariable. Aquesta generalització permetrà utilitzar-los per a l'estimació de FDP conjunta de més d'una variable aleatòria. El desenvolupament matemàtic que es presenta tot seguit, es centra en el cas bidimensional ja que,

sense pèrdua de generalitat, aquest cas particular del problema d'estimació de FDP multidimensionals ens facilita la tasca representativa del cinqué capítol dedicat a simulacions.

Abans però de passar als mètodes d'estimació espectral multidimensional, és necessari determinar quin és en aquest cas el procés tal que (com succeïa amb $z(X,n)(p)$ en una sola dimensió) la seva funció d'autocorrelació sigui equivalent a la funció característica conjunta de les variables aleatòries de les que es vol estimar la FDP conjunta. Amb vista a això, considerarem el model de Fourier de 2 dimensions, en el que el senyal d'entrada es representa pel vector x format per dues variables aleatòries diferents, denotades per x_1 i x_2 .

$$x'(n) = [x_1(n) \quad x_2(n)] \tag{4.76}$$

El model de Fourier bidimensional ja s'ha vist al capítol anterior que segueix l'expressió,

$$g[x(n)] = \sum_{p_1=-P+1}^{P-1} \sum_{p_2=-P+1}^{P-1} a^*(p_1, p_2) \cdot e^{-j[p_1 \omega_1 x_1(n) + p_2 \omega_2 x_2(n)]} \tag{4.77}$$

on les freqüències (ω_1, ω_2) s'escullen de manera que no es cometi aliasing en l'aproximació ja que l'expressió anterior és inherentment periòdica.

$$\omega_i \leq \frac{2\pi}{2(X_{max})_i} \quad \forall i = 1, 2 \tag{4.78}$$

A l'igual del cas unidimensional, el model de Fourier es pot interpretar com una transformació no lineal seguida d'una de lineal caracteritzada per la resposta impulsional, $h(p_1, p_2)$.

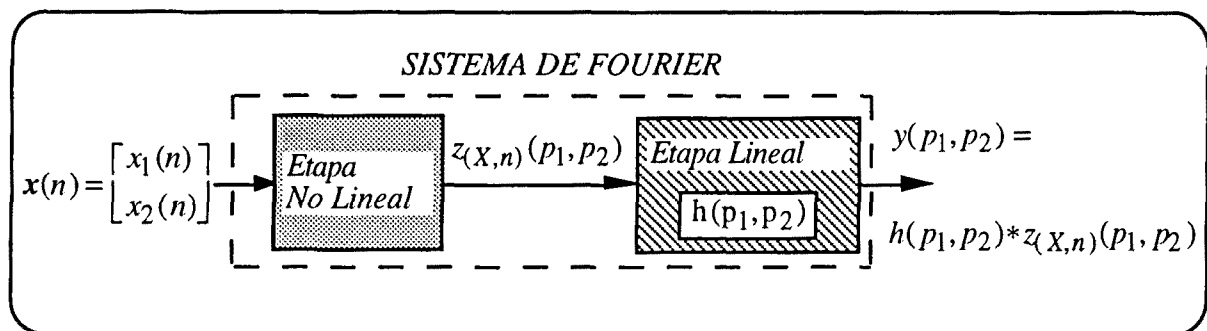


Figura 4.7 Descomposició del model de Fourier bidimensional en dues etapes, una de no lineal i l'altra lineal.

La primera etapa no lineal transforma cada vector d'entrada $x(n)$ en un procés de dues dimensions, denotat per $z(X,n)(p_1, p_2)$,

$$z_{(X,n)}(p_1, p_2) = e^{j[p_1 \omega_1 x_1(n) + p_2 \omega_2 x_2(n)]} \quad \forall p_1, p_2 = -P+1, \dots, P-1 \quad (4.79)$$

tal que combinat linealment amb els coeficients del filtre lineal, proporciona la sortida del model de Fourier particularitzant-ho en $p_1=p_2=0$ (Eq.4.77). Sense tenir present el model de Fourier com a model de SNLs multivariable, es pot veure la sortida $y(p_1, p_2)$ com un procés bidimensional resultat de la convolució de $z_{(X,n)}(p_1, p_2)$ amb $h(p_1, p_2)$.

$$\begin{aligned} y(p_1, p_2) &= h(p_1, p_2) * z_{(X,n)}(p_1, p_2) = \\ &= \sum_{l_1=-P+1}^{P-1} \sum_{l_2=-P+1}^{P-1} a^*(l_1, l_2) \cdot e^{j[(p_1-l_1)\omega_1 x_1(n) + (p_2-l_2)\omega_2 x_2(n)]} \end{aligned} \quad (4.80)$$

A l'igual del cas d'una sola variable aleatòria, l'autocorrelació del procés $z_{(X,n)}(p_1, p_2)$ continua dependent només de la diferència entre els índexs, tot i que ara respon a una funció bidimensional.

$$\begin{aligned} R_{zz}(p_1, l_1, p_2, l_2) &= E[z_{(X,n)}(p_1 + l_1, p_2 + l_2) \cdot z_{(X,n)}^*(p_1, p_2)] = \\ &= E[e^{j[l_1 \omega_1 x_1(n) + l_2 \omega_2 x_2(n)]}] \equiv R_{zz}(l_1, l_2) \end{aligned} \quad (4.81)$$

Es pot comprovar (Eq.4.81), que la funció d'autocorrelació $R_{zz}(l_1, l_2)$ coincideix amb la funció característica conjunta [Pap65] de les variables aleatòries x_1 i x_2 . En conseqüència, amb aquest resultat queda palès que els mètodes multidimensionals d'estimació espectral poden aplicar-se sobre el procés $z_{(X,n)}(p_1, p_2)$ i, en estimar el seu espectre, s'obindrà una estimació de la FDP conjunta de x_1 i x_2 , que es denotarà per $p_X(x_1, x_2)$.

$$R_{zz}(l_1, l_2) = E[e^{j[l_1 \omega_1 x_1(n) + l_2 \omega_2 x_2(n)]}] \equiv \psi_X(jl_1 \omega_1, jl_2 \omega_2) \quad (4.82)$$

Cal notar que s'ha omès la dependència temporal de la funció característica ja que s'assumeix que el conjunt de mostres de les variables aleatòries $\{x_i(n) \ n=0, \dots, M-1 \text{ on } i=1, 2\}$ formen un conjunt independent i idènticament distribuït. A l'igual del cas unidimensional, és amb aquestes mostres que s'estima la funció característica,

$$\hat{\psi}_X(jl_1 \omega_1, jl_2 \omega_2) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Funció característica} \\ \text{conjunta empírica} \end{array} \right\} = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{j[l_1 \omega_1 x_1(n) + l_2 \omega_2 x_2(n)]} \quad (4.83)$$

i a partir d'aquesta funció que la matriu característica empírica del cas multivariable que es definirà més endavant.

Respecte de la generalització al cas multidimensional dels mètodes d'estimació espectral exposats anteriorment pel cas d'una sola dimensió, és important destacar que aquesta no és

immediata. La causa radica bàsicament en dos problemes; el primer fa referència al cost computacional, que es veu considerablement incrementat, i per altra banda està la precarietat d'eines matemàtiques multidimensionals, en comparació amb les disponibles per a una dimensió. En conseqüència, als propers apartats es fa un repàs ràpid però formal de l'estimació bidimensional de FDP conjunta. Igualment, l'estudi estadístic dels estimadors espectrals multidimensionals aplicats a l'estimació de FDP conjunta queda fora de l'abast d'aquesta tesi, bàsicament perquè tampoc són disponibles pel cas d'estimació espectral.

4.4.1 Mètodes clàssics

La generalització dels mètodes tals com el Periodograma o Blackman-Tukey són directes a partir de la definició de la transformada de Fourier multivariable. Concretament, per dues dimensions resulta la següent expressió,

$$\hat{p}_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{P_1 P_2} \left| \sum_{p_1=0}^{P_1-1} \sum_{p_2=0}^{P_2-1} z_{(X,n)}(p_1, p_2) e^{-j(p_1 \omega_1 x_1 + p_2 \omega_2 x_2)} \right|^2; \forall x_i \in [-(X_0)_i, (X_0)_i]; i = 1, 2 \quad (4.84)$$

que també admet una formulació vectorial, útil per a comparar amb altres mètodes d'estimació espectral. En aquest sentit, ens definim el vector s (Eq.4.85.a) de dimensió $P_1 P_2$ que ordena les exponencials complexes de la transformada anterior, i el vector z_n (Eq.4.85.b) que agrupa les components del procés $z_{(X,n)}(p_1, p_2)$ implicades a (Eq.4.84) i d'acord amb l'ordre del vector s .

$$s = \left[1 \ e^{-j\omega_2 x_2} \dots e^{-j(P_2-1)\omega_2 x_2} \ e^{-j\omega_1 x_1} \ e^{-j(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \dots e^{-j(\omega_1 x_1 + (P_2-1)\omega_2 x_2)} \right. \\ \left. \dots e^{-j(P_1-1)\omega_1 x_1} \ e^{-j((P_1-1)\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)} \dots e^{-j((P_1-1)\omega_1 x_1 + (P_2-1)\omega_2 x_2)} \right]^H \quad (4.85.a)$$

$$z_n = \left[z_{(X,n)}(0,0) \ z_{(X,n)}(0,1) \dots z_{(X,n)}(0, P_2 - 1) \ z_{(X,n)}(1,0) \ z_{(X,n)}(1,1) \dots z_{(X,n)}(1, P_2 - 1) \right. \\ \left. \dots z_{(X,n)}(P_1 - 1,0) \ z_{(X,n)}(P_1 - 1,1) \dots z_{(X,n)}(P_1 - 1, P_2 - 1) \right] \quad (4.85.b)$$

Aquests vectors permeten expressar l'estimació de la FDP conjunta anterior (Eq.4.84) de forma vectorial,

$$\hat{p}_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{P_1 P_2} |s^H \cdot z_n|^2 \quad (4.86)$$

de manera que si, a més a més, es calcula la mitjana temporal sota la hipòtesi de que es disposa de mostres independents i idènticament distribuïdes per a cada variable aleatòria x_1 i x_2 , però que poden estar correlades entre elles, s'arriba a la següent expressió,

$$\hat{p}_X^{PER}(x) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \frac{1}{P_1 P_2} |s^H \cdot z_n|^2 = \frac{s^H \cdot \hat{\Psi}_{XX} \cdot s}{P_1 P_2} \quad (4.87)$$

en la que apareix l'anomenada matriu característica empírica, $\hat{\Psi}_{XX}$. A l'igual del cas unidimensional, cada component de la matriu es pot expressar en termes de la funció característica empírica tenint en consideració la definició del vector z_n (Eq.4.85.b) i del procés $z(X,n)(p_1,p_2)$ (Eq.4.79).

$$\hat{\Psi}_{XX}(l,m) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} z_n(l) \cdot z_n^*(m) \quad (4.88)$$

També és interessant veure que si es calcula la mitjana temporal del producte (Eq.4.84) i es desenvolupa, el resultat es pot expressar en termes de la funció característica empírica (Eq.4.83)

$$\hat{p}_X^{PER}(x) = \sum_{l_1=-P_1+1}^{P_1-1} \sum_{l_2=-P_2+1}^{P_2-1} w(l_1, l_2) \cdot \hat{\Psi}_X(j_{l_1} \omega_1, j_{l_2} \omega_2) e^{-j[l_{l_1} \omega_1 x_1 + l_{l_2} \omega_2 x_2]} \quad (4.89)$$

on la funció $w(l_1, l_2)$ representa la finestra de Bartlett bidimensional.

$$w(l_1, l_2) = \begin{cases} \frac{P_1 - |l_1|}{P_1} \cdot \frac{P_2 - |l_2|}{P_2} & l_i \leq P_i \quad i = 1, 2 \\ 0 & \text{altres} \end{cases} \quad (4.90)$$

Aquesta darrera expressió de l'estimador del Periodograma de la FDP conjunta bidimensional (Eq.4.89) deixa palesa la simplificació del mètode si les variables x_1 i x_2 són variables aleatòries independents. En aquest supòsit, la funció característica empírica és separable

$$\begin{array}{l} \text{Si } x_1(n) \text{ i } x_2(n) \\ \text{independents } \forall n \end{array} \Rightarrow \hat{\Psi}_X(j_{l_1} \omega_1, j_{l_2} \omega_2) = \hat{\Psi}_{X_1}(j_{l_1} \omega_1) \cdot \hat{\Psi}_{X_2}(j_{l_2} \omega_2) \quad (4.91)$$

i el càlcul de la transformada de Fourier de 2 dimensions, esdevé el càlcul de 2 transformades de Fourier de 1 dimensió, amb la qual cosa es redueix el cost computacional. A part d'això, l'expressió (Eq.4.89) també mostra com variant la finestra $w(l_1, l_2)$ es poden aconseguir altres

tendeixen a infinit. De totes maneres, a les simulacions (Ap.5.3.2) s'ha utilitzat la regió QP d'ordre P_1 i P_2 de manera que l'error de predicció esdevé igual a

$$e(p_1, p_2) = z_{(X,n)}(p_1, p_2) + \sum_{l_1=0}^{P_1-1} \sum_{\substack{l_2=0 \\ (\text{si } l_1=0 \\ l_2 \neq 0)}}^{P_2-1} a^*(l_1, l_2) \cdot z_{(X,n)}(p_1 - l_1, p_2 - l_2) \quad (4.93)$$

que, particularitzat per $p_1=p_2=0$ en vistes al càlcul de la potència, també es pot expressar de forma vectorial en funció del vector z_n (Eq.4.85.b) i el vector a que agrupa convenientment els coeficients del filtre lineal.

$$e(0,0) = \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix}^H \cdot z_n \quad (4.94)$$

La minimització de la potència de l'error de predicció ens condueix a l'ortogonalitat entre l'error i les dades, i juntament amb la potència d'error mínima assolida, denotada per η_e , s'obté un sistema d'equacions lineals molt semblant al que s'arribava en el cas unidimensional.

$$\Psi_{xx} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

L'única diferència radica en que pel cas bidimensional la matriu característica és de dimensió $P_1 P_2$. A més a més, a diferència del Periodograma (Eq.4.88), els seus elements es corresponen amb els valors exactes, i no estimats, de la funció característica conjunta. Aquesta matriu depèn de l'ordre en el que es conforma el vector z_n de manera que, si s'adopta l'ordre proposat a (Eq.4.85.b), la inversió de la matriu anterior es pot solucionar amb l'algorisme eficient de Levinson-Durbin per filtratge multicanal, veure per exemple [Kay88].

Per altra banda, la formulació variacional del problema pot establir-se igual que en el cas unidimensional però en termes de la nova matriu característica i vector de coeficients (Eq.4.61). El resultat és en definitiva el mateix,

$$a = \frac{\hat{\Psi}_{xx}^{-1} \cdot \mathbf{1}}{\mathbf{1} \cdot \hat{\Psi}_{xx}^{-1} \cdot \mathbf{1}} \quad i \quad \eta_e = \frac{1}{\mathbf{1} \cdot \hat{\Psi}_{xx}^{-1} \cdot \mathbf{1}} \quad (4.96)$$

tot i que serà necessari substituir la matriu característica exacta, Ψ_{XX} , per una estimació tal com la proporcionada per l'estimador empíric, $\hat{\Psi}_{XX}$.

Malgrat que, tal i com podem deduir, el model de Fourier continua responent a un modelatge MA, la relació entre Predicció Lineal i mètode de Màxima Entropia existent en estimació espectral d'una dimensió es perd en el cas multidimensional. Bàsicament, el problema

radica en la factorització de la FDP en termes dels multiplicadors de Lagrange (Eq.4.74) que en el cas de dues o més dimensions no sempre es pot realitzar [Kay88]. Per altra banda, existeixen també algorismes recursius d'estimació dels paràmetres, com per exemple a [Lim83] on aprofita una relació que es compleix en una dimensió entre modelatge AR i el mètode de Mínima Variància, estenent-la al cas multivariable d'una forma totalment *ad hoc* però que no deixa de ser interessant.

4.4.3 Mètode de Mínima Variància

Es podria afirmar que aquest mètode és el que més acceptació ha tingut en el cas multidimensional. La idea intuïtiva de filtratge de la FDP real del cas unidimensional es manté íntegra, només que ara aplica sobre la FDP conjunta real. A partir de l'esquema de la figura (4.7) es pretén obtenir una estimació de la FDP conjunta mitjançant la potència del procés de sortida. Així, si els coeficients del filtre lineal es denoten igual que abans pel conjunt $\{a(p_1, p_2)\}$ i suposem una regió de suport QP truncada, la sortida esdevé

$$y(p_1, p_2) = \sum_{l_1=0}^{P_1-1} \sum_{l_2=0}^{P_2-1} a^*(l_1, l_2) \cdot z_{(X,n)}(p_1 - l_1, p_2 - l_2) \quad (4.97)$$

mentres que la potència es pot expressar, sense pèrdua de generalitat, en funció del valor de la sortida a l'origen.

$$\begin{aligned} \xi_y &= E[|y(0,0)|^2] = E \left[\left| \sum_{p_1=0}^{P_1-1} \sum_{p_2=0}^{P_2-1} a^*(p_1, p_2) \cdot z_{(X,n)}(-p_1, -p_2) \right|^2 \right] = \\ &= E \left[\left| a^H \cdot z_n \right|^2 \right] = a^H \cdot E[z_n \cdot z_n^H] \cdot a = a^H \cdot \Psi_{XX} \cdot a \end{aligned} \quad (4.98)$$

Des del punt de vista de la FDP, la potència del procés de sortida s'està obtenint a partir d'un filtratge efectuat sobre la FDP conjunta,

$$\xi_y = \int_X H_{x'}(x) \cdot p_X(x) dx \approx \hat{p}_X(x) \quad (4.99)$$

on la variable X denota la regió d'integració tal que $\{x_i \in [-(X_0)_i, (X_0)_i] \ i=1,2\}$. Per altra banda, la funció $H_{x'}(x)$ equival a la transformada de Fourier bidimensional del filtre lineal utilitzat.

$$H_{x'}(x) \equiv \sum_{l_1=0}^{P_1-1} \sum_{l_2=0}^{P_2-1} a^*(l_1, l_2) \cdot e^{-j(l_1 \omega_1 x_1 + l_2 \omega_2 x_2)} \equiv a_x^H \cdot s_X \quad (4.100)$$

En l'expressió anterior (Eq.4.99) queda palès el fet de que en la mesura en que $H_{x'}(x)$ estigui ben dissenyat, la potència del procés de sortida pot proporcionar una "bona" estimació de la FDP conjunta en el valor x' . Concretament, en cas de que el filtre correspongués a una delta de Dirac bidimensional, la potència de sortida coincidirà amb el valor real de la FDP conjunta. Seguint la pauta del cas unidimensional, el criteri de disseny del filtre és el de minimitzar la potència de sortida ξ_y , per tal d'eliminar el "leakage" introduït per $H_{x'}(x)$ donat que, en general, no serà una delta de Dirac, subjecte a que la resposta freqüencial del filtre valgui la unitat allà on es pretén estimar la FDP conjunta.

$$H_{x'}(x') = a_{x'}^H \cdot s_{x'} = 1 \quad (4.101)$$

Aquest problema admet una formulació variacional a l'igual que en el cas unidimensional, arribant a l'expressió següent pels coeficients del filtre

$$a_{x'}^{MV} = \frac{\hat{\Psi}_{XX}^{-1} \cdot s_{x'}}{s_{x'}^H \cdot \hat{\Psi}_{XX}^{-1} \cdot s_{x'}} \quad (4.102)$$

i a l'estimació de la FDP conjunta,

$$\hat{p}_X^{MV}(x') = \frac{1}{s_{x'}^H \cdot \hat{\Psi}_{XX}^{-1} \cdot s_{x'}} \quad (4.103)$$

totes dues expressades en termes de la funció característica empírica (Eq.4.88) del cas multivariable.

Després d'aquesta perspectiva ràpida dels mètodes d'estimació espectral multidimensionals aplicats a l'estimació de la FDP conjunta de dues o més variables aleatòries, és pràcticament obligatori prestar una atenció especial al cas de variables aleatòries discretes. En aquest sentit, s'ha de destacar que la resolució dels mètodes d'estimació espectral presentats en els dos darrers apartats no és gaire elevada [Kay88]. Així, en presència de variables aleatòries discretes contaminades per soroll gaussià i blanc (possible aplicació en comunicacions) aquests mètodes no seran capaços de discernir els valors de la variable aleatòria discreta si estan massa junts. En aquest cas particular, i atès que la FDP d'una variable aleatòria discreta consisteix en un conjunt de funcions delta de Dirac, sembla doncs interessant veure què poden aportar els mètodes d'alta resolució de detecció de senoides basats en la Descomposició en Valors Singulats (DVS) de la matriu d'autocorrelació.

4.5 Tècniques basades en DVS aplicades a variables aleatòries discretes.

A partir de l'equivalència establerta entre DEP i FDP, sembla evident que les variables aleatòries discretes són en termes de la FDP, el que els senyals senoidals són en DEP. En estimació espectral, existeixen altres mètodes d'estimació de freqüència que són més resolutius que els presentats anteriorment (per exemple, el mètode de Pisarenko, MUSIC [Sch86], el mètode de Johnson [Joh93] i d'altres [Kay88]). Aquests mètodes, més que estimar la DEP, el que proporcionen és una estimació de la freqüència quan el procés que s'està rebent correspon a un conjunt de senyals senoidals amb soroll additiu, Gaussià i blanc. En conseqüència, en aplicar-los al cas de variables aleatòries discretes, no seran vàlids per a estimació de la FDP sino, més aviat, per a determinació dels valors que pot prendre la variable aleatòria. Aquesta característica pot ésser profitosa en un entorn de comunicacions digitals, en el que ens interessés estimar la constel.lació que s'està rebent, per exemple en un entorn d'anàlisi del comportament d'un canal. Concretament, els mètodes unidimensionals serien útils per a transmissió digital pas baix, mentres que els multivariables podrien servir per a comunicacions digitals pas banda, amb constel.lacions en fase i quadratura.

De totes maneres, ja s'ha anat assenyalant durant el capítol que existeix una diferència important entre el problema d'estimació de FDP i DEP que no ens permet formular-los d'una manera totalment paral.lela. Concretament, aquestes tècniques d'alta resolució per a detecció de senoides estan basades en la descomposició en valors singulars (DVS) de la matriu d'autocorrelació, de manera que els autovalors més elevats es poden associar a una contribució majoritàriament dels senyals senoidals, mentres que els més baixos es deuen exclusivament al soroll. La propietat d'ortogonalitat entre els vectors de senyal i els autovectors associats als autovalors del soroll són la base teòrica sobre la que es formulen tots aquests mètodes d'alta resolució basats en DVS.

Aquesta visió d'un espai de senyal i un de soroll està motivada pel fet de que la matriu d'autocorrelació es pot expressar com la suma de dues matrius, la matriu d'autocorrelació del senyal més la matriu d'autocorrelació del soroll. Suposant que es disposa d'una variable aleatòria discreta x que pot prendre NS valors diferents $\{x=x_i \ i=1, \dots, NS\}$ en funció del símbol que representa, i que està contaminada per un soroll additiu, blanc i Gaussià de mitja nul.la i variància σ^2 , $w:N(0, \sigma^2)$, el resultat del que rebem es pot expressar com una nova variable aleatòria, z ,

$$z = x + w \tag{4.104}$$

tal que la seva FDP condicionada a que $x=x_i$ és una distribució normal $z:N(x_i, \sigma^2)$. Assumint independència entre la variable x i el soroll w , la funció característica, a partir de la qual es calcula la matriu característica, esdevé el producte de les respectives funcions característiques,

$$\psi_Z(jl\omega_0) = E[e^{jl\omega_0 z}] = E[e^{jl\omega_0(x+w)}] = \psi_X(jl\omega_0) \cdot \psi_W(jl\omega_0) \quad (4.105)$$

de manera que la FDP de la variable z és la convolució de les respectives FDP (a diferència de la DEP que seria la suma).

$$p_Z(z) = p_X(x) * p_W(w) \xrightarrow{\text{Variable Discreta}} p_Z(z) = \sum_{i=1}^M P(x_i) \cdot p_W(z - x_i) \quad (4.106)$$

Com a conseqüència de la relació entre les funcions característiques de x , w i z (Eq.4.105), la matriu característica de la variable z no es pot expressar com la suma de les respectives matrius característiques, de manera que en aquest problema la interpretació d'espai de senyal i espai de soroll no és factible.

En simulacions que s'han realitzat [Pag96] s'ha comprovat que amb relacions senyal a soroll elevades, és a dir, quan la contribució del soroll és minça, els mètodes d'alta resolució obtenen una bona estimació de la constel.lació, fins i tot, amb poques mostres (de l'ordre de 10^2). De fet, el problema que es planteja és equivalent als anomenats problemes de "clustering". En aquest tipus de problemes, i sense un model de senyal que permeti la distinció entre espai de senyal i de soroll, és força habitual la descomposició DVS de la matriu d'autocorrelació per tal d'obtenir informació del senyal a partir dels autovalors més elevats. No obstant això, en aquesta tesi s'ha optat per prescindir d'aquests mètodes, fins i tot en les simulacions, per la manca de base teòrica que justifiqui els resultats obtinguts.

4.6 Conclusions

La principal contribució d'aquest capítol ha consistit en presentar com mètodes existents d'estimació espectral poden ésser utilitzats per a l'estimació de la funció densitat de probabilitat d'una variable aleatòria determinada. L'arquitectura que suporta aquest paral.lelisme és el model de Fourier ja que, és en aquest model on la funció densitat de probabilitat presenta un comportament similar al que té la densitat espectral de potència en sistemes lineals. Concretament, es pot entendre que les diferents mostres de les que es disposa per a estimar la funció densitat de probabilitat serveixen per a estimar els coeficients d'un sistema de Fourier de manera que, o bé en la seva sortida, o bé en la seva relació, proporciona l'estimació d'aquesta funció densitat de probabilitat per a successius valors de la variable aleatòria.

En primer lloc, s'han presentat els mètodes clàssics (Periodograma, Blackman-Tukey) que guarden una estreta relació amb el mètode no paramètric d'estimació de funcions densitat de probabilitat per excel·lència com és el mètode basat en les finestres de Parzen. També s'ha demostrat que, en l'entorn d'estimació de funcions densitat de probabilitat, també és possible establir una relació entre el mètode de Predicció Lineal i el de Màxima Entropia, i, el que és més important, com tots dos ens condueixen a un model de Fourier, cosa que reforça el paral·lelisme entre aquest i un model AR. En darrer lloc, resta el mètode de Mínima Variància que, possiblement, representa l'aportació més important especialment en l'àmbit d'estimació de funcions densitat de probabilitat conjunta en cas de disposar d'una variable aleatòria multidimensional.

Per altra banda, s'ha intentat remarcar la possibilitat d'utilitzar en tots ells un procediment variacional de disseny que, a part de proporcionar una perspectiva comú a tots ells, també està expressada amb una formulació matricial molt útil alhora d'estudiar l'aplicació d'algorismes de resolució i aspectes relacionats amb el cost computacional.

En contrapartida, s'ha vist que el paral·lelisme no és complet i, en aquest sentit, dues característiques diferencials han sorgit. Primerament ha estat la impossibilitat d'aprofitar la relació entre les funcions densitat de probabilitat de les variables d'entrada i sortida d'un sistema de Fourier per a desenvolupar en aquest entorn altres problemes de processament lineal del senyal (a excepció del blanqueig de la funció densitat de probabilitat d'una variable aleatòria). En segon lloc està la distorsió convolucional que experimenten les funcions densitat de probabilitat de dues variables aleatòries que es sumen, fet que impossibilita el desenvolupament d'una base teòrica que permeti l'ús de mètodes basats en descomposició en valors singular de la matriu característica de cara a possibles aplicacions relacionades amb variables aleatòries discretes.

4.7 Referències

- [Cac66] Cacoullos T., "Estimation of Multivariate Density", *Annals of Institute of Statistics Mathematics*, Vol.18, pp.178-189, 1966.
- [Cap70] Capon J., Goodman N.R., "Probability Distributions for Estimators of the Frequency-Wavenumber Spectrum", *Proc. IEEE*, Vol.58, pp.1785-1786, Octubre 1970.
- [Cap71] Capon J., "Correction to "Probability Distributions for Estimators of the Frequency-Wavenumber Spectrum"", *Proc. IEEE*, Vol.59, pp.112, Gener 1971.
- [Dud73] Duda R.O., Hart P.E., *Pattern Classification and Scene Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1973.

- [Fis63] Fisz M., *Probability Theory and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 1963.
- [Hay91] Haykin S., *Adaptive Filter Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- [Joh93] Johnson D.H., Dudgeon D.E., *Array Signal Processing. Techniques and Concepts*, Prentice-hall, Eng. Cliff, NJ, 1993.
- [Kay88] Kay S.M., *Modern Spectral Estimation*, Prentice-Hall, Eng. Cliff, NJ, 1988.
- [Lag86a] Lagunas M.A., "The Variational Approach in Spectral Estimation", *Proc. of EUSIPCO'86*, La Haya, The Netherlands, Vol. III, pp. 307-314, Setembre 1986.
- [Lag86a] Lagunas M.A., "Use of the Most Significant Autocorrelation Lags in Iterative ME Spectral Estimation", *IEEE Trans. on ASSP*, Vol. 32, pp. 445-448, N° 2 April 1984.
- [Lag86a] Lagunas M.A., Santamaria M.E., Gasull A., Moreno A., "Maximum Likelihood Filters in Spectral Estimation Problems", *Signal Processing*, Vol.10, No.1, pp. 19-34, January 1986.
- [Lim83] Lim J.S., Dowla F.U., "Improved Maximum Likelihood Method for Two-dimensional Spectral Estimation", *Proc. ICASSP'83*, pp.851-853, Boston, NY, 1983.
- [Mak75] Makhoul J., "Linear Prediction: A tutorial Review", *Proc. IEEE*, Vol.63, pp.561-580, Abril 1975.
- [Pag96] Pagès-Zamora A., Lagunas M.A., "Nonlinear Signal Processing From Fourier Series Based Models", Pendent de publicació a *IEEE Trans. on ASSP*, Juny 1996.
- [Pap65] Papoulis A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, USA, 1965.
- [Par62] Parzen E., "On Estimation of a Probability Density Function and Mode", *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 33, pp.1065-1076, Setembre 1962.
- [Rep78] "Modern Spectrum Analysis", Childers D.G., *IEEE Press in Sel. Reprint Series*, Inc., Ny, 1978.
- [Sch86] Schmidt R.O., "Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation", *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, Vol.AP-34, No.3, Març 1986.
- [Stu94] Stuart A., Ord K., *Kendall's Advanced Theory of Statistics. Vol.I: Distribution Theory*, Edward Arnold, London, 6th Edition, 1994.
- [Vid94] Vidal J. et al., "Parametric Modeling of PDF Using a Convolution of ONE-Sided Exponentials: Application to HMM", *Proc. of EUSIPCO'94*, Edimburgh, Scotland, U.K., Vol. VII, pp. 54-57, Setembre 1994.

- [Ziv95] Zivojnovic V., "Higher-Order Statistics and Huber's Robustness", *Proc. IEEE-ATHOS Workshop on Higher-Order Statistics*, pp.236-240, Aiguablava, Girona, Spain, June 1995.

Apèndix 4A Càlcul de la mitjana i variància de la funció caraterística empírica.

Respecte de la mitjana, és fàcil comprovar que sota la hipòtesi de que els valors $\{x(n) \mid n=0, \dots, M-1\}$ són idènticament distribuïts, l'estimador es no-esbiaixat.

$$E[\hat{\psi}_X(jl\omega_0)] = E\left[\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jl\omega_0 x(n)}\right] = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} E[e^{jl\omega_0 x(n)}] = \psi_X(jl\omega_0)$$

Per altra banda, per tal d'arribar a una expressió tancada per a la variància es necessita tant de la hipòtesi de distribució idèntica com d'independència entre els diferents valors de $x(n)$,

$$\begin{aligned} \sigma_M^2 &= E\left[\left|\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jl\omega_0 x(n)} - \psi_X(jl\omega_0)\right|^2\right] = E\left[\left|\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jl\omega_0 x(n)}\right|^2\right] - |\psi_X(jl\omega_0)|^2 = \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{M-1} E\left\{e^{jl\omega_0 [x(n)-x(s)]}\right\} - |\psi_X(jl\omega_0)|^2 = \\ &= \frac{1}{M^2} \left(M + M(M-1) \cdot |\psi_X(jl\omega_0)|^2\right) - |\psi_X(jl\omega_0)|^2 = \frac{1}{M} \left(1 - |\psi_X(jl\omega_0)|^2\right) \end{aligned}$$

de tal manera que es pot veure que la funció característica empírica és un estimador consistent.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M^2 = 0$$

✱

Apèndix 4B Càlcul de la variància de l'estimador de FDP Blackman-Tukey

Pel càlcul de la variància primer trobarem el que val l'expressió

$$E\left[\left|\hat{p}_X^{BT}(x)\right|^2\right] = E\left[\left|C \sum_{l=-\infty}^{\infty} w(l) \cdot \hat{\psi}_X(l) \cdot e^{-j\omega_0 xl}\right|^2\right] = E\left[C^2 \cdot Y(x) \cdot Y^*(x)\right]$$

on C agrupa les constants que contempli l'estimador. La funció $Y(x)$ representa la transformada de Fourier d'una seqüència que hem denotat per $y(l)$, avaluada a $\omega = \omega_0 x$.

$$y(l) = w(l) \cdot \hat{\psi}_X(l) \Rightarrow Y(x) \equiv \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(l) \cdot e^{-j\omega_0 xl}$$

Fent ús de les propietats de la transformada de Fourier, la multiplicació de transformades és igual a la transformada de la convolució.

$$\begin{aligned} E\left[|\hat{p}_X^{BT}(x)|^2\right] &= E\left[C^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{q=-\infty}^{+\infty} y^*(q) \cdot y(q+l)\right) \cdot e^{-j\omega_0 xl}\right] = \\ &= E\left[C^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} w^*(q) \cdot w(q+l) \cdot \hat{\psi}_X(q) \cdot \hat{\psi}_X^*(q+l) \cdot e^{-j\omega_0 xl}\right] = \\ &= C^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} w^*(q) \cdot w(q+l) \cdot E\left[\hat{\psi}_X(q) \cdot \hat{\psi}_X^*(q+l)\right] \cdot e^{-j\omega_0 xl} \end{aligned}$$

Gràcies a la linealitat de l'operador esperança, el valor esperat anterior necessita el càlcul del valor esperat del producte de la funció característica empírica (Eq.4.27),

$$\begin{aligned} E\left[\hat{\psi}_X(q) \cdot \hat{\psi}_X^*(q+l)\right] &= E\left[\left(\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{jq\omega_0 x(n)}\right) \left(\frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-j(q+l)\omega_0 x(n)}\right)\right] = \\ &= E\left[\frac{1}{M^2} \sum_{n=0}^{M-1} e^{-jl\omega_0 x(n)} + \frac{1}{M^2} \sum_{n=0}^{M-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{M-1} e^{j\omega_0 [lx(n) - (q+l)x(m)]}\right] = \\ &= \frac{1}{M} \psi_X^*(jl\omega_0) + \frac{M-1}{M} \psi_X(jl\omega_0) \cdot \psi_X^*(j(q+l)\omega_0) \end{aligned}$$

on s'han usat les hipòtesis d'independència i idèntica distribució de les mostres del senyal $\{x(n) \mid n=0, \dots, M-1\}$. Substituint aquest resultat al valor esperat de l'estimador s'arriba a

$$\begin{aligned} E\left[|\hat{p}_X^{BT}(x)|^2\right] &= \frac{C^2}{M} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} w^*(q) \cdot w(q+l) \cdot \psi_X^*(jl\omega_0) \cdot e^{-j\omega_0 xl} \\ &+ (1 - \frac{1}{M}) C^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} w^*(q) \cdot w(q+l) \cdot \psi_X(jl\omega_0) \psi_X^*(j(q+l)\omega_0) \cdot e^{-j\omega_0 xl} \end{aligned}$$

Per tal de calcular la variància de l'estimador és necessari obtenir també el valor esperat de l'estimador al quadrat. Per això, es fa servir l'expressió del valor esperat (Eq.4.38), arribant a la següent forma tancada.

$$\begin{aligned} E\left[\hat{p}_X^{BT}(x)\right]^2 &= \left| \sum_{l=-\infty}^{+\infty} Cw(l) \cdot \psi_X(jl\omega_0) \cdot e^{-j\omega_0 xl} \right|^2 = \\ &= C^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} w^*(q) \cdot w(q+l) \cdot \psi_X(jl\omega_0) \psi_X^*(j(q+l)\omega_0) \cdot e^{-j\omega_0 xl} \end{aligned}$$

Ara ja estem en disposició de trobar la variància de l'estimador,

$$\begin{aligned} \text{var}\{\hat{p}_X^{BT}(x)\} &= E\left[\left|\hat{p}_X^{BT}(x)\right|^2\right] - E\left[\hat{p}_X^{BT}(x)\right]^2 = \\ &= \frac{C^2}{M} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} w^*(q) \cdot w(q+l) \cdot \left[\psi_X^*(q) - \psi_X(q) \cdot \psi_X^*(q+l)\right] \cdot e^{-j\omega_0 xl} \end{aligned}$$

i a partir d'ella una cota superior, on s'ha fet ús de la propietat de que el mòdul de la funció característica sempre és menor o igual a 1 (Eq.4.5)

$$\begin{aligned} \left|\text{var}\{\hat{p}_X^{BT}(x)\}\right| &\leq \frac{C^2}{M} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left|w^*(q) \cdot w(q+l) \cdot \left[\psi_X^*(q) - \psi_X(q) \cdot \psi_X^*(q+l)\right]\right| \leq \\ &\leq \frac{2C^2}{M} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \left|w^*(q) \cdot w(q+l)\right| \end{aligned}$$

En general, la finestra $w(q)$ és real i positiva [Kay88], així que la cota superior pot desfer-se de les barres de valor absolut, i expressar-se en termes de la funció d'autocorrelació de la finestra.

$$\left|\text{var}\{\hat{p}_X^{BT}(x)\}\right| \leq \frac{2C^2}{M} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} w(q) \cdot w(q+l) = \frac{2C^2}{M} \sum_{l=-\infty}^{\infty} r_{ww}(l)$$

♣

Capítol 5

Avaulació del comportament experimental

La finalitat d'aquest capítol és la d'avaluar experimentalment els resultats teòrics als que s'ha arribat al llarg d'aquesta tesi. Lògicament, i seguint la mateixa organització dels capítols II i III, les simulacions efectuades es divideixen en dues aplicacions diferents. La primera d'elles consisteix en presentar el sistema de Fourier com a model de sistemes no lineals, tant per a sistemes amb memòria com sense. En vista del que s'ha presentat al capítol III, el disseny d'aquest model es realitza de dues maneres: en bloc i adaptatiu. Pel cas adaptatiu, s'ha utilitzat bàsicament l'algorisme NLMS i, en situacions molt concretes, el RLS o d'altres mètodes recursius. Per tal de comparar els resultats, es proposaran a cada simulació concreta models de Volterra alternatius que permetin una discussió sobre els resultats. El segon grup d'aplicacions es centra en els mètodes d'estimació espectral aplicats a l'estimació de funcions densitat de probabilitat de variables aleatòries contínues, tant pel cas d'una sola variable aleatòria com en el cas multivariable. Els resultats dels diferents mètodes que s'han presentat al capítol III es compararan entre ells i també amb el conegut mètode de l'histograma.

5.1 Modelatge de SNLs amb el model de Fourier

El problema en el que es valorarà experimentalment el sistema de Fourier com a model de SNLs és la identificació d'un SNL donat, la sortida del qual està contaminada per soroll additiu, Gaussià i blanc. En primer lloc, es comença per un cas sense memòria i després es passarà al cas amb memòria.

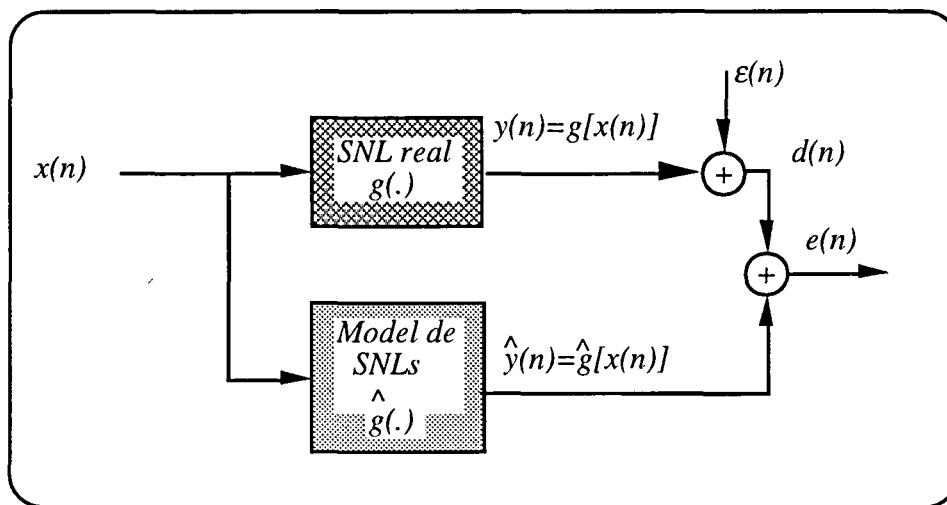


Figura 5.1 Identificació d'un SNL sense memòria en presència d'un soroll additiu de mesura denotat per $\varepsilon(n)$.

Atesa la manca de SNLs estàndard per a testejar el nostre model, es presenten diferents sistemes per a identificar sense un marc clar d'aplicació. De ben segur, aquests sistemes es podrien trobar en problemes tals com predistorsió no lineal [Pag96b], equalització de canals de fase no mínima [Pag94], modelatge de SNLs per a simulació o anàlisi, entre d'altres. En la mesura del possible s'ha escollit SNLs per a identificar que siguin prou representatius en el sentit de que es puguin testejar les diverses versions del model de Fourier que s'han anat presentant.

5.1.1 Identificació de SNLs sense memòria mitjançant el model de Fourier sense memòria.

El SNL sense memòria que s'identifica en aquest apartat consisteix en una relació polinòmica, és a dir, un sistema de Volterra, d'ordre 16 però que només conserva les potències parelles. Es tracta així, d'un sistema caracteritzat per una relació entrada/sortida amb simetria parell.

$$y(n) = g[x(n)] = \sum_{p=0}^8 a_{2p} \cdot x^{2p}(n) \quad x \in [X_{min}, X_{max}] \quad (5.1)$$

Els coeficients parells del SNL real estàn resumits a la següent taula (Tau.5.1), mentres que la representació gràfica, suposant que la variable d'entrada x està normalitzada dins el rang $[-1,1]$, s'inclou en línia contínua a qualsevol de les figures de la gràfica (Gràf.5.1).

Coeficient	a_0	a_2	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	a_{14}	a_{16}
Valor	-126.7	515.6	-873.5	801.9	-434.0	141.2	-27.22	2.62	62e-4

Taula 5.1 Valor dels coeficients parells del SNL real sense memòria (Eq.5.1). Els coeficients senars són nuls.

Per tal d'emmarcar el problema d'identificació, aquest SNL que es proposa respon a la característica AM/PM d'un tipus de transistor BJT [Sto95]. Concretament, la relació (Eq.5.1) és la distorsió additiva de fase que introdueix aquest tipus d'amplificadors no lineals d'alta potència. La identificació d'un sistema d'aquestes característiques pot estar motivada doncs, pel fet d'intentar predistorsionar la fase del senyal que entra a l'amplificador de manera que es compensi la distorsió de fase que introdueix. En aquest entorn, la potència de soroll present a la sortida de l'amplificador és molt baixa, de l'ordre de 60dB de SNR, i és per això que a les simulacions es consideraran valors relativament elevats de SNR.

Per a la identificació d'aquest sistema es proposen bàsicament 5 models diferents:

- a.-Model de Volterra ($P=16$). N° de coeficients=17. (V)
- b.-Model de Volterra Parell ($P=16$). N° de coeficients=9. (VP)
- c.-Model de Fourier amb Exponencials ($P=8, P=4$ i $P=2$). N° de coeficients complexes=17, 9 i 5, respectivament. (F).
- d.-Model de Fourier amb Cosinus ($P=8$ i $P=3$). N° de coeficients=9 i 4, respectivament. (FC).
- e.-Model de Fourier Lattice ($P=8$). N° de Coeficients de Reflexió=8 i n° de coeficients=17 (ambdos grups de coeficients són complexos). (FL).

Evidentment, l'ordre P dels models de Volterra, V i VP, s'ha escollit d'acord amb l'ordre del SNL real que s'ha d'identificar ($P_V=P_{VP}=16$), mentres que l'ordre dels models de Fourier, F i FC, s'ha escollit per tal de que tinguin el mateix nombre de coeficients que els respectius models de Volterra ($P_F=P_{FC}=8$), o bé, també perquè tinguin el mateix cost computacional ($P_F=4$ i 2, $P_{FC}=3$). L'ordre del model de Fourier Lattice pren el mateix valor que un cas particular del model de Fourier amb exponencials ($P_L=8$), per tal de comprovar que

representen la mateixa relació però implementada amb arquitectures diferents. El disseny es farà en primer lloc en bloc i, més endavant, en un apartat posterior, es farà adaptatiu.

5.1.1.1 Disseny de mínims quadrats en la identificació d'un SNL sense memòria

En el disseny en bloc de mínims quadrats del model escollit per a la identificació del SNL en qüestió (Eq.5.1), el que s'ha fet és agafar M valors del senyal d'entrada, $\{x(n) \ n=1, \dots, M\}$, i de la referència o sortida sorollosa, $\{d(n) \ n=1, \dots, M\}$, pel càlcul dels coeficients i per a la posterior obtenció de l'error quadràtic. El senyal d'entrada $x(n)$ té una distribució Gaussiana amb mitjana nul·la i variància $\sigma^2=1/9$. Per tal de restringir el rang d'entrada als valors de $[-1,1]$ (6 cops la desviació típica), s'han descartat les mostres de $x(n)$ que sobresortin d'aquest rang. Així, la probabilitat de que això succeeixi és de $\text{erfc}(3/\sqrt{2})=0.0027$. En conseqüència, pels models de Fourier la freqüència principal que s'ha escollit és de $\omega_0=\pi$, el valor mínim per tal de no cometre aliasing.

Pel que fa al soroll, s'ha considerat un soroll additiu Gaussià i blanc, denotat per $\varepsilon(n)$, amb una SNR de 10dB respecte de la potència de sortida del SNL real. A la secció dedicada al disseny en bloc del model de Fourier sense memòria en el capítol 3 (Ap.3.1.4.1), es va demostrar que la mitjana de l'error quadràtic mig assolit en un disseny de mínims quadrats es veu incrementat per un factor que depèn de la potència del soroll i del nombre de mostres M . Atès que aquest terme de soroll sobrepassa l'error comès per cada model, s'ha considerat oportú tabular l'error corresponent exclusivament al model, entenent així l'error com la diferència entre la sortida del SNL real i la sortida del model. A més a més, tractant-se d'una simulació en la que es coneix la distribució del senyal d'entrada, els valors de la taula (Tau.5.2) corresponen a la mitjana estadística de l'error quadràtic,

$$10 * \log \left(\frac{\int_{-1}^{+1} p_X(x) \cdot |g(x) - \hat{g}(x)|^2 dx}{\int_{-1}^{+1} p_X(x) \cdot |g(x)|^2 dx} \right) \quad (5.2)$$

expressada en dB respecte de la potència estadística de la sortida del SNL. L'obtenció d'ambdues integrals (Eq.5.2) s'ha aconseguit mitjançant mètodes numèrics, i s'ha trobat el valor mig de 30 realitzacions independents.

Model \ M	500	1000	2000	5000
V ($P=16$)	-7.82	-15.26	-23.74	-38.22
VP ($P=16$)	-13.68	-28.2	-33.21	-42
F ($P=8$)	-28.25	-31.86	-34.73	-38.65
FC ($P=8$)	-31.86	-34.77	-37.92	-41.70
FL ($P=8$)	-28.25	-31.86	-34.73	-38.65
F ($P=4$)	-29.62	-31.28	-32.26	-33.04
FC ($P=3$)	-17.77	-17.86	-17.92	-17.94
F ($P=2$)	-15.32	-15.40	-15.40	-15.41

Taula 5.2 Taula amb valors de la mitjana estadística de l'error quadràtic (Eq.5.2) comès per diversos models, expressat en dB respecte de la potència de la sortida del SNL real. S'ha trobat el valor mig dels respectius errors quadràtics de 30 realitzacions independents.

El fet de que el senyal d'entrada sigui Gaussià és decisiu alhora del càlcul de les respectives matrius d'autocorrelació que cada model necessita per a obtenir el vector de coeficients òptim, i més concretament, en el càlcul de la inversa d'aquesta matriu. El que s'ha observat en les 30 simulacions realitzades per a cada model és que, en general, els models de Fourier són més robusts a mals condicionaments de la matriu d'autocorrelació tal i com s'havia avançat al capítol III com a conseqüència de la seva relació amb la funció característica del senyal d'entrada i la seva disposició (pren valors màxims en la diagonal principal, i és hermítica i Toeplitz).

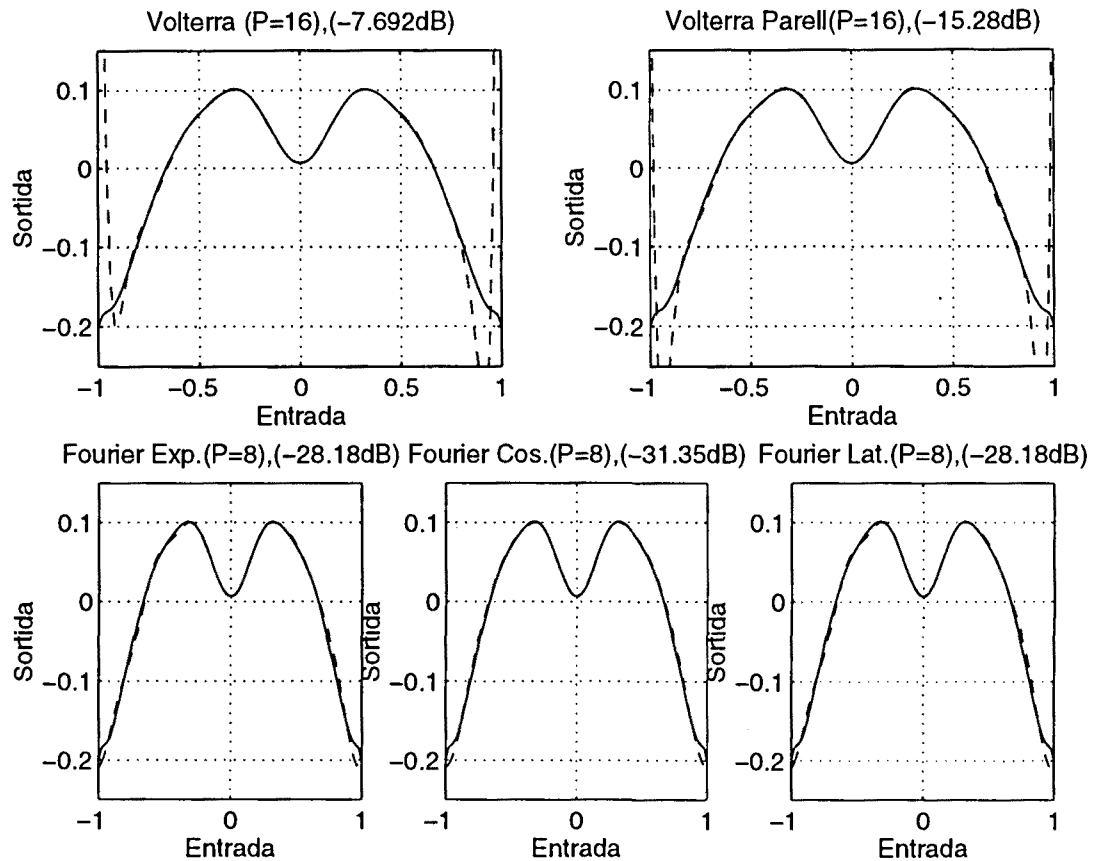
Respecte dels resultats resumits a la taula anterior (Tau.5.2), es pot comprovar que, tot i tractar-se el SNL real d'un model de Volterra, els models de Fourier amb un ordre alt ($P=8$) en general assoleixen un grau d'error menor al dels models de Volterra, especialment quan el nombre de dades M és baix ja que l'aproximació assolida pel model de Volterra està força condicionada al rang de valors dins del que es mou la realització del senyal d'entrada utilitzada. El que també s'ha pogut observar és que la desviació típica de l'error en aquestes 30 realitzacions és força major en el cas d'utilitzar un model de Volterra que un de Fourier. Malgrat

això, en el cas dels models de Fourier amb un ordre P baix per tal d'igualar el cost computacional amb el model de Volterra es pot observar que l'increment de l'error és significatiu en aquest cas. De totes maneres, és important destacar que, quan es fa referència a cost computacional no s'està tenint en compte el cost de la inversió de la matriu, sino només el cost del càlcul de la sortida un cop els coeficients dels respectius models ja s'haguessin obtingut. En efecte, donat que la matriu d'autocorrelació del model de Fourier és Toeplitz i hermítica (només en el cas del model exponencial) i la de Volterra no, el cost d'aquesta darrera és força més elevat que el de la primera.

Cal observar també, tal i com era d'esperar, que en el disseny de mínims quadrats del model de Fourier amb exponencials (F(8)) i la implementació lattice (FL(8)) s'obtenen exactament els mateixos resultats ja que tots dos corresponen al mateix model però amb implementacions diferents. El fet però, de que una i altra implementació estigui basada en la inversió de matrius diferents, fa que en situacions extremes (M baix, o bé, P alt) puguin observar-se comportaments diferents com a conseqüència de mals condicionaments de les respectives matrius d'autocorrelació.

A la figura (Gràf.5.1) s'han representat la funció d'entrada/sortida que els diferents models han assolit en una de les realitzacions amb un error quadràtic semblant al valor mig tabulat (l'error quadràtic assolit en la realització de la que s'ha tret les representacions està inclòs en els títols de cada gràfica). S'ha escollit el cas més desfavorable ($M=500$) i només es presenten els resultats dels 5 primers models de la taula anterior (Tau.5.2).

Val a dir, que les "conclusions" o comentaris que s'han mencionat al llarg d'aquest apartat es dedueixen a partir dels resultats obtinguts per a un SNL particular i que, evidentment, no es pot assegurar que en general el model de Fourier superi en comportament al model de Volterra. Això depèn de la funció $g[x]$ en concret que s'identifiqui, així com del nombre de coeficients de cada model i del nombre de dades que es disposa per a estimar el vector de coeficients, solució del problema de mínims quadrats. El que sí que s'ha pogut observar en les simulacions que s'han realitzat de problemes diferents, però que per raons d'espai no s'inclouen, és que en general la matriu del model de Fourier està millor condicionada que la del model de Volterra. Aquest fet dota al model de Fourier d'unes prestacions superiors, en general quan es tenen poques dades i molt especialment, en dissenys adaptatius tal i com es mostra al següent apartat.



Gràfica 5.1 En línia contínua es representa la relació $g(x)$ del SNL real i en línia discontinua la funció $\hat{g}(x)$ assolida en una realització particular per 5 models: V(16), VP(16), F(8), FC(8) i FL(8). Cada títol inclou el EQ en dB de cada model en aquesta realització. Paràmetres usats: $M=500$, $SNR=10dB$.

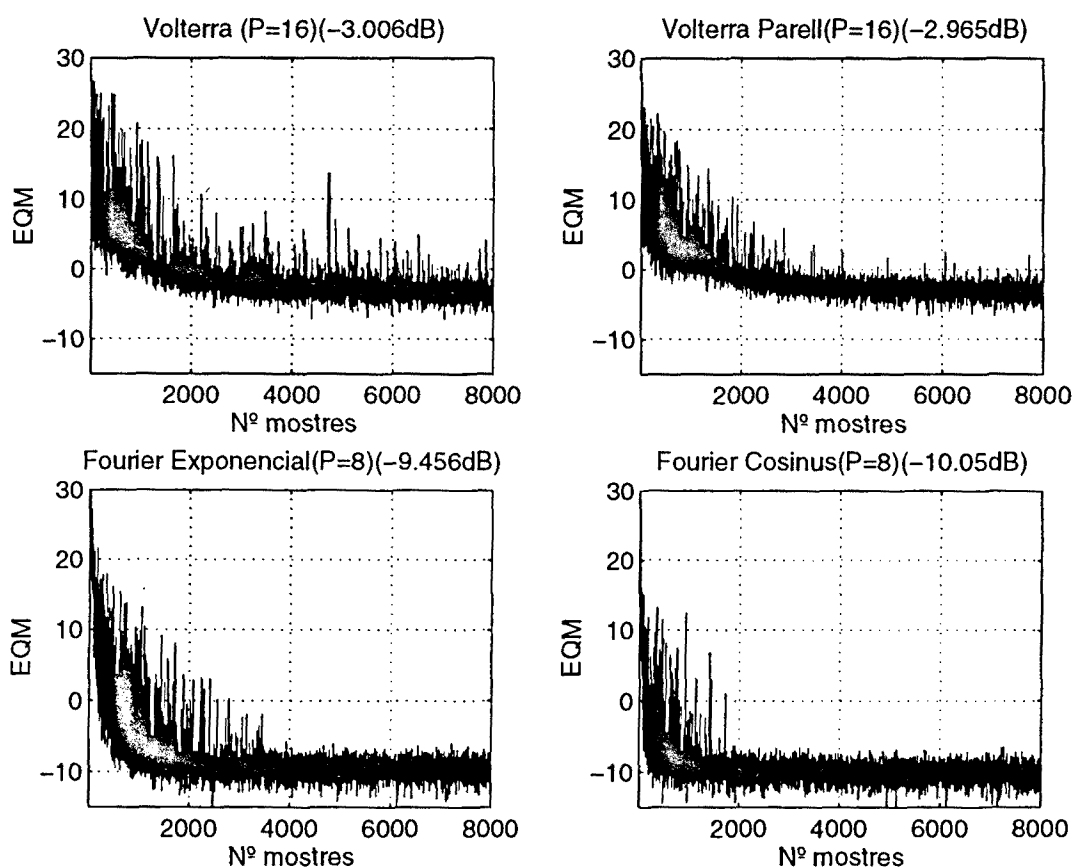
5.1.1.2 Disseny adaptatiu en la identificació d'un SNL sense memòria

En el disseny adaptatiu dels models proposats anteriorment s'utilitzarà, primerament, l'algorisme de gradient NLMS. Els valors dels paràmetres necessaris per a aquest algorisme pels diferents models (constant de pas μ (Eq.3.54) i paràmetre de memòria, β , per a l'estimació de la potència del vector de dades (Eq.3.55)) estan inclosos a la següent taula (Tau.5.3).

	V(16)	VP(16)	F(8)	FC(8)	FL(8)	F(4)	FC(3)	F(2)
μ	0.2	0.1	0.4	0.1	0.05	0.2	0.05	0.1
β	0.9999	0.9999	-	0.9999	0.9	-	0.9999	-

Taula 5.3 Taula amb els paràmetres μ i β de l'algorisme NLMS per a cada model.

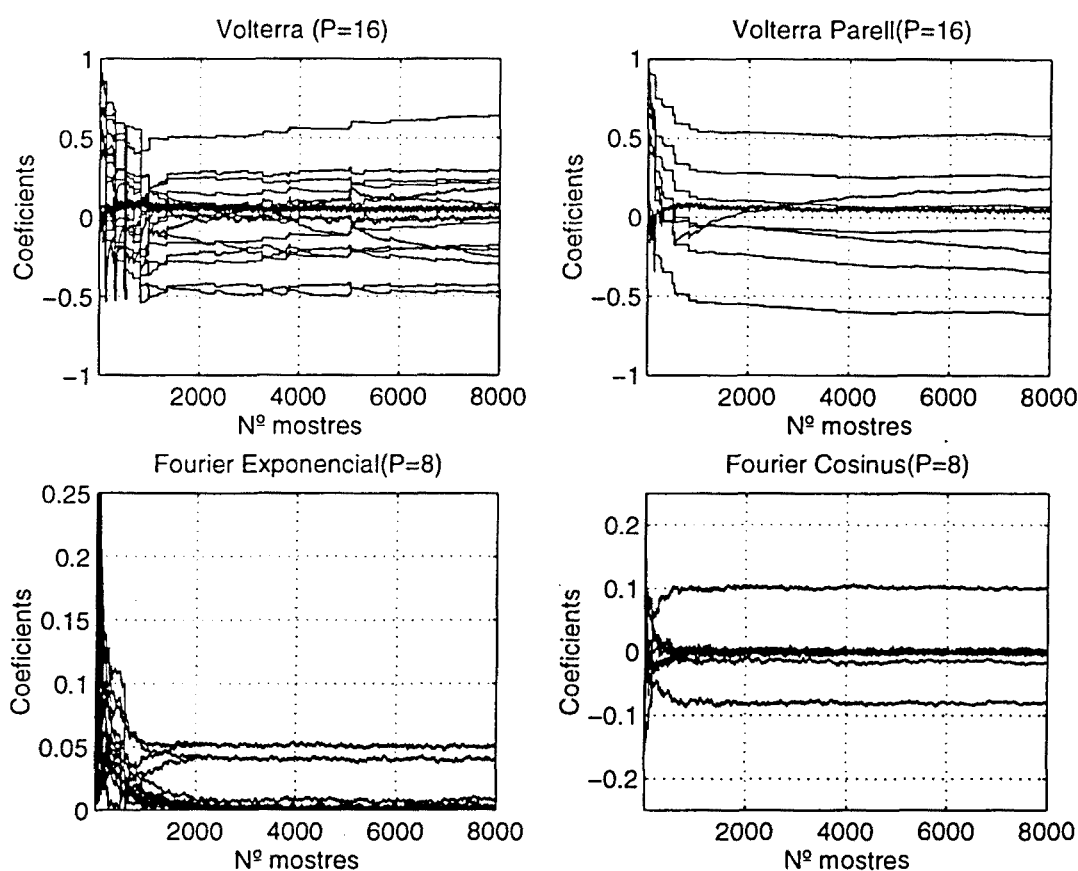
S'han utilitzat vectors de dades de $M=8000$ punts i per a la representació del EQM en dB respecte de la potència del senyal de referència s'han fet servir 30 realitzacions independents per a calcular els valors mitjos (ara l'error inclou l'aportació del soroll additiu $\varepsilon(n)$). A la següent gràfica (Gràf.5.2) s'inclou l'evolució temporal del EQM assolit pels 4 primers models de la taula anterior (Tau.5.3), incloent cada títol el valor mig de l'error de les darreres 2000 mostres. Tal i com es pot observar, per a un mateix nombre de coeficients, V amb F i VP amb FC, els respectius models de Fourier són capaços d'acostar-se a la potència de l'error (-10dB si és respecte de la potència del senyal de referència), mentre que els models de Volterra tot i respondre a una rèplica exacta del SNL real que s'ha d'identificar es queden a -3dB.



Gràfica 5.2 Representació de l'evolució del EQM en dB respecte de la potència del senyal de referència pels 4 primers models de la taula (Tau.5.3). El valor mig s'ha calculat a partir de 30 realitzacions independents i pel disseny s'ha utilitzat l'algorisme NLMS. Cada títol inclou el valor mig de l'error a partir de les darreres 2000 mostres.

Els valors de la constant de pas s'han escollit per tal de que el temps de convergència sigui similar en els respectius models. Per a més detall, s'inclou l'evolució temporal dels coeficients de cada model en una realització particular ja que són ells els que proporcionen una

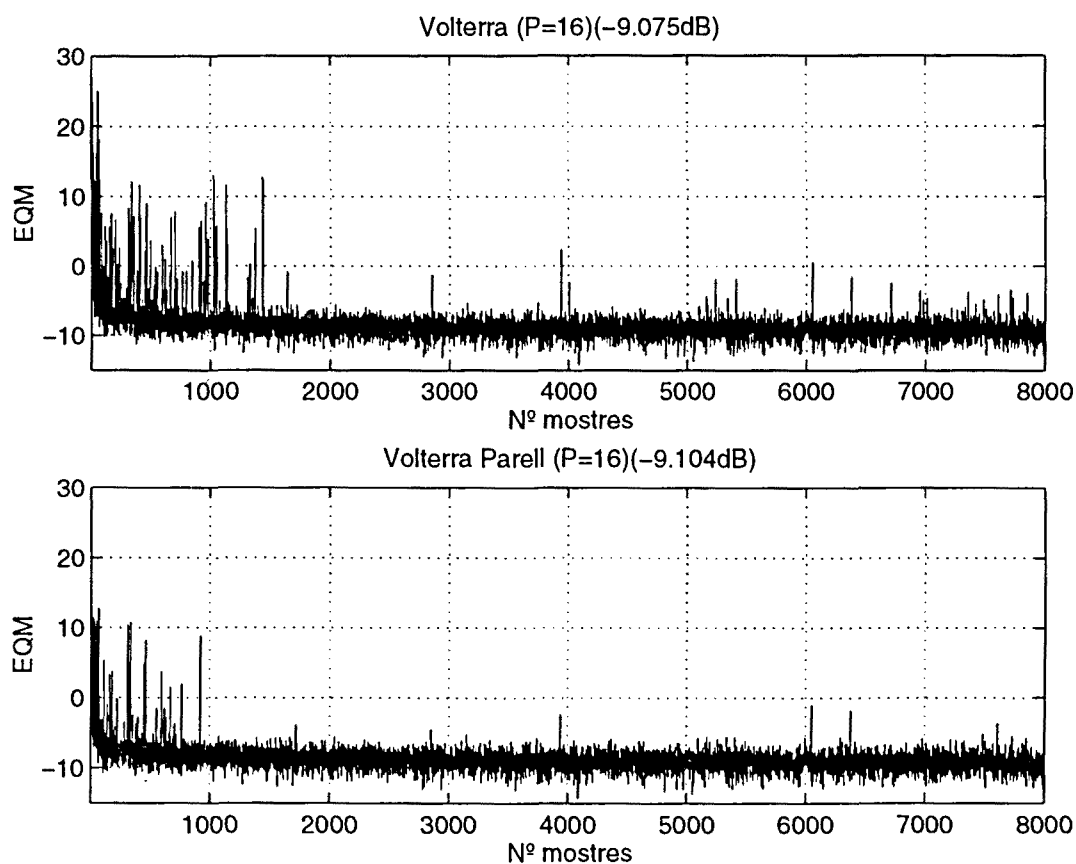
informació més concreta sobre la velocitat de convergència. Podem observar com els coeficients associats a un mateix model de Fourier presenten una convergència homogènia com a conseqüència de la semblança de la potència entre les diferents funcions que conformen l'espai de dades dels model de Fourier (per exemple, totes les exponencials complexes del model de Fourier amb exponencials tenen norma unitat). No succeeix el mateix en el cas dels models de Volterra on es pot observar la disparitat de convergència dels diferents modes com a conseqüència de la disparitat de la norma de les potències de diferent grau que conformen l'espai de dades dels models de Volterra.



Gràfica 5.3 Evolució temporal dels coeficients dels 4 primers models de la taula (Tau.5.3) en una realització particular, utilitzant l'algorisme NLMS. En el cas del model de Fourier amb exponencials s'ha representat el valor absolut dels respectius coeficients.

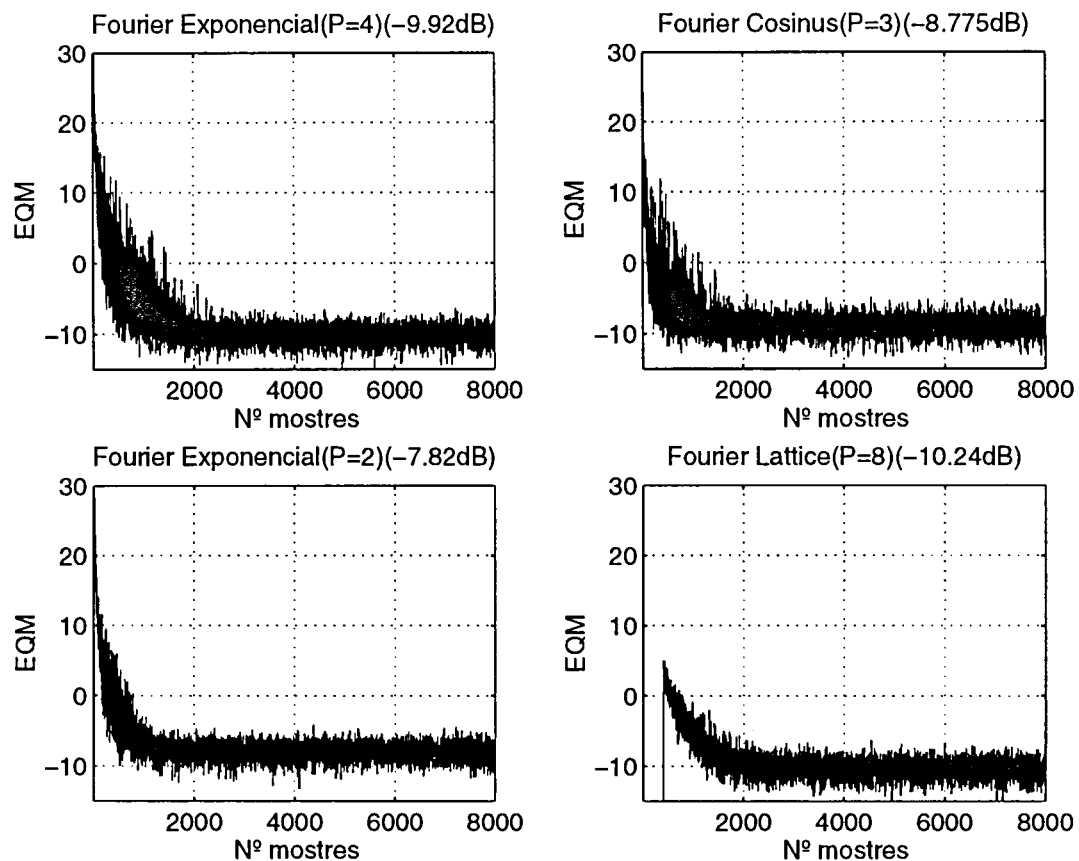
Una manera de comprovar que el problema dels models de Volterra resideix en l'alta dispersió d'autovalors de la matriu d'autocorrelació, o, el que és el mateix, la seva proximitat a la singularitat, consisteix en utilitzar un altre algorisme pel disseny dels coeficients que no sigui sensible a la dispersitat dels autovalors. Així, a la següent gràfica es poden observar els

resultats de l'evolució del EQM dels dos models de Volterra proposats (V(16) i VP(16)) mitjançant l'algorisme RLS. Es pot comprovar com en aquest cas el model de Volterra assoleix el llindar imposat pel soroll de -10dB però amb un cost computacional força més elevat (cost computacional de l'algorisme RLS és de l'ordre de $O(Nc^2)$ mentre que pel NLMS és de $O(Nc)$, on Nc representa el nombre de coeficients del model).



Gràfica 5.4 Evolució de l'EQM (30 realitzacions independents) dels models de Volterra, V(16) i VP(16) mitjançant l'algorisme adaptatiu RLS. Per ambdós models, el valor del paràmetre λ ha estat de 0.9999 i el valor inicial de la matriu d'autocorrelació és de $1e3I$, essent I la matriu unitat.

Per altra banda, també s'inclouen els resultats dels EQMs obtinguts per models de Fourier d'ordre més baix i també de la implementació lattice del model de Fourier (FL amb $P=8$) (Gràf.5.5). Respecte dels models d'ordre més baix (F(4), FC(3) i F(2), (Tau.5.3)) es pot comprovar que l'error que assoleixen, especialment pel cas de $P=2$, no arriba als -10dB corresponents al soroll.



Gràfica 5.5 Representació de l'evolució temporal del EQM en dB respecte de la potència del senyal de referència pels 4 darrers models de la taula anterior (Tau.5.3) en un disseny adaptatiu utilitzant l'algorisme NLMS. El valor mig del EQ s'ha calculat a partir de 30 realitzacions independents.

D'aquest darrer resultat, és important destacar l'evolució del model de Fourier d'ordre 8 implementat mitjançant l'arquitectura lattice. Tot i que aquest exemple no deixa palesa aquesta propietat, atesa l'ortogonalitat dels errors backward a partir dels quals es calcula l'estimació la convergència del EQM, en general, presenta menys variància que els seus homòlegs (Fourier amb exponencials (8) i Fourier amb cosinus (8)). Respecte dels coeficients de reflexió, $\{k(i) \ i=1, \dots, 8\}$, val a dir que s'han actualitzat mitjançant un algorisme recursiu que ja es va presentar al final del capítol tercer (Apèn.3.C) en el que, a cada nou valor del senyal d'entrada, el numerador i denominador de la solució dels PARCORS proposada per Burg es van actualitzant independentment. El valor escollit pel paràmetre λ utilitzat en aquest algorisme és de $\lambda=0.9995$. Per altra banda, es pot comprovar a la representació de l'error (Gràf.5.6) que l'etapa ladder del sistema de Fourier Lattice s'ha iniciat una mica més tard, concretament 400 mostres, per tal de que els coeficients de reflexió convergeixin.

Existeixen un gran nombre d'algorismes per a actualitzar els coeficients de reflexió d'un sistema lattice, algorismes tant de gradient com recursius [Pro92]. És important remarcar que,

en aquest cas particular, ens hem trobat que l'algorisme de gradient GAL (de l'anglès "Gradient Adaptive Lattice") no ha funcionat correctament ja que els coeficients PARCORs no convergien amb prou rapidesa per tal de permetre la posterior convergència dels coeficients de l'etapa ladder.

5.1.2 Identificació de SNLs amb memòria mitjançant el model de Fourier amb memòria

Aquesta secció es dedica a la identificació d'un SNL amb memòria, tant en un disseny en bloc com adaptatiu, mitjançant el model de Fourier i el model de Volterra, ambdós amb memòria.

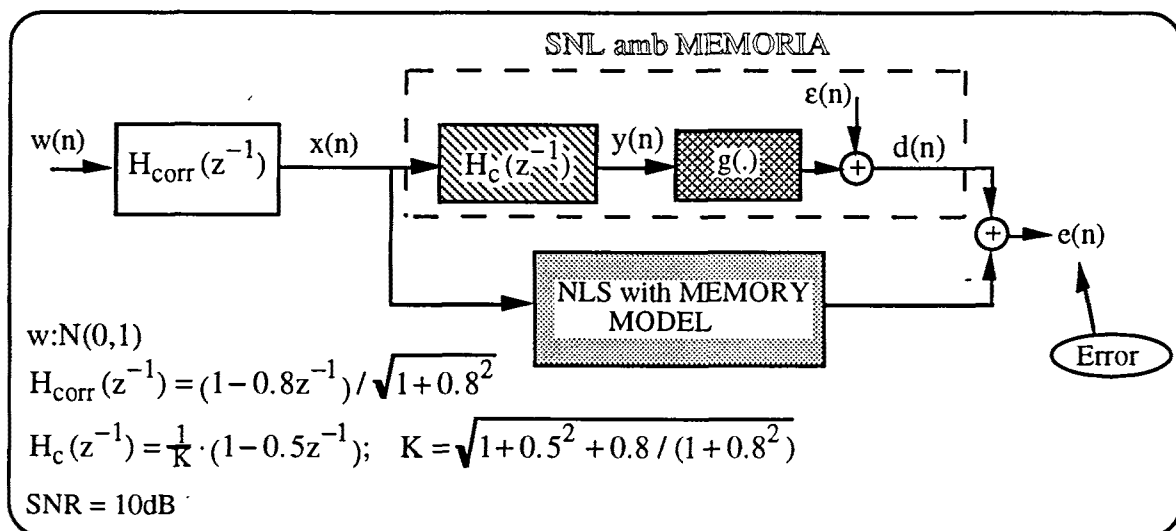


Figura 5.2 Identificació d'un SNL amb memòria que representa un canal de comunicacions amb una funció de transferència $H_c(z^{-1})$, seguit d'una no linealitat $g[y]$ que representa la característica AM/AM d'un amplificador no lineal, contaminat a la sortida per un soroll additiu Gaussià i blanc amb una SNR=10dB, denotat per $\varepsilon(n)$.

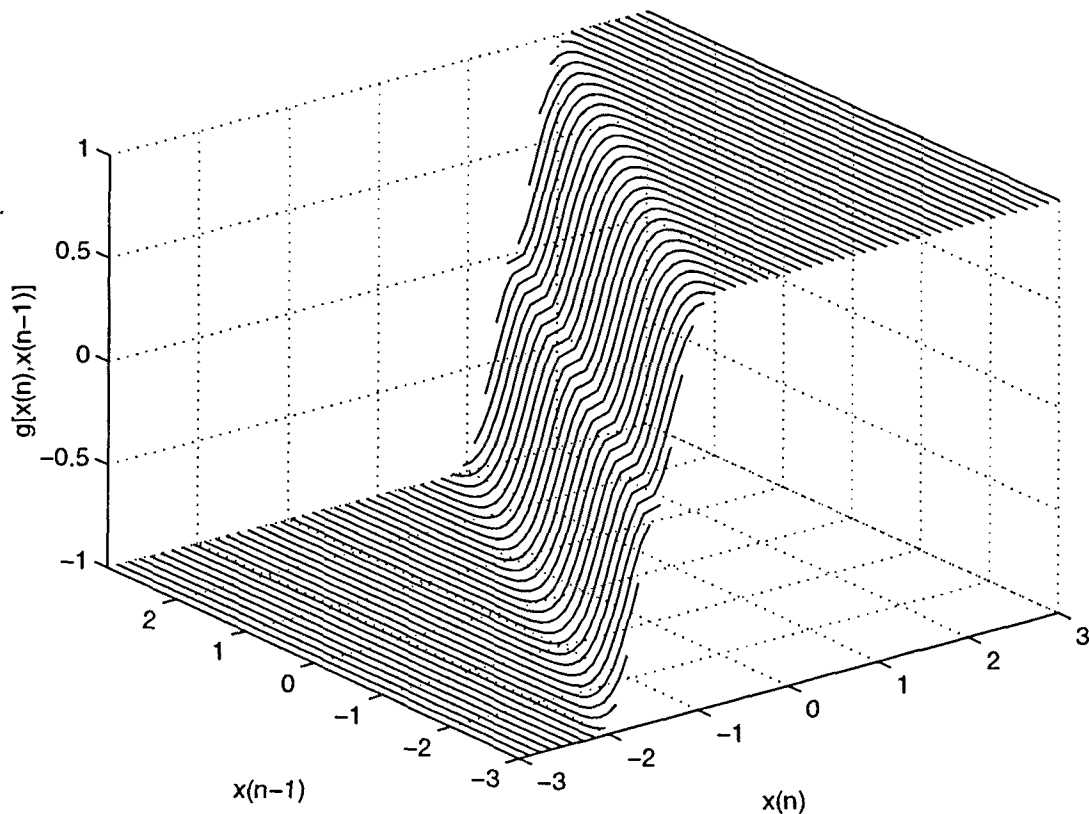
L'entrada $x(n)$ és un senyal Gaussià de mitja nul.la i variància unitat obtinguda a partir del filtratge d'un senyal Gaussià i blanc amb una distribució, $e: N(0,1)$.

El sistema particular que s'ha d'identificar (Fig.5.2) representa un canal de comunicacions, on $H_c(z^{-1})$ és la transformada Z de la resposta impulsional del canal, seguit del receptor que té un amplificador d'amplitud que presenta una no linealitat caracteritzada per la funció $g[y]$,

$$d(n) = g[y(n)] + \varepsilon(n) = \text{sign}(y(n)) \cdot \left(1 - e^{-y^2(n)/0.05}\right) + \varepsilon(n) \quad (5.3)$$

on $y(n)$ representa la sortida del canal. A la sortida de l'amplificador s'ha suposat l'existència d'un soroll additiu Gaussià i blanc, denotat per $\varepsilon(n)$, de mitjana nul.la i amb una variància tal que la SNR a la sortida és de 10dB. El senyal d'entrada al SNL real, $x(n)$, és un senyal Gaussià de mitjana nul.la i variància unitat obtingut a partir del filtratge d'un soroll Gaussià i blanc, $w:N(0,1)$, mitjançant un filtre correlador amb una funció de transferència igual a $H_{corr}(z^{-1})$ (Fig.5.2). En aquest sentit, cal destacar que la constant K de la funció de transferència del canal (Fig.5.2) s'ha escollit per tal de que la variància del senyal d'entrada a l'amplificador sigui igual a la unitat.

A l'igual del cas sense memòria s'han desestimat els valors de $x(n)$ que sobrepassin en valor absolut a $3\sigma_x$, essent la probabilitat de que això ocorri igual a $\text{erfc}(3/\sqrt{2})=0.0027$. D'aquesta manera, els models de Fourier escollits per a la identificació del SNL amb memòria treballen amb una freqüència principal de $\omega_0=\pi/(3*1.2)$.



Gràfica 5.6 No linealitat per a identificar de la figura (Fig.5.2) sense considerar el soroll de mesura.

Tot i que $g(y)$ és una funció no lineal sense memòria, el sistema complet és un SNL amb memòria ja que el canal introdueix aquesta memòria. S'ha considerat una resposta impulsional de només 2 coeficients per tal de que la memòria del sistema sigui $N=2$ i d'aquesta manera es puguin representar resultats de l'aproximació aconseguida pels diferents models. Així, sense

considerar el soroll de mesura, la gràfica (Gràf.5.6) representa la funció $g[x(n), x(n-1)]$ que implementa el SNL anterior (Fig.5.2).

Es pot observar que es tracta d'una no linealitat amb una simetria senar, de manera que els models que es proposen per a modelar aquest SNL consisteixen bàsicament en 4 de diferents:

- a.-Model de Volterra amb $N=2$ i P variable ($V(2,P)$).
- b.-Model de Volterra Senar amb $N=2$ i P variable ($VS(2,P)$).
- c.-Model de Fourier amb exponencial amb $N=2$ i P variable ($F(2,P)$).
- d.-Model de Fourier amb funcions Senoidals amb $N=2$ i P variable ($FS(2,P)$).

L'ordre dels diferents models, P , s'anirà indicant i modificant oportunament en funció de l'interès en deixar palès un o altre aspecte dels models. Tanmateix, el disseny s'efectuarà tant en bloc com adaptatiu.

5.1.2.1 Disseny de mínims quadrats en la identificació d'un SNL amb memòria

A l'igual del cas sense memòria, s'ha tabulat la mitjana de l'error quadràtic en dB respecte de la potència del senyal de referència que assoleixen diferents models per a diferents durades M , sense considerar el soroll. S'ha de destacar que en aquest cas no s'ha calculat la mitjana estadística perquè això implicaria el càlcul costós d'una integral doble i que, per altra banda, s'han utilitzat 30 realitzacions independents per a l'obtenció dels EQ's.

Els primers quatre models ($V(2,8)$, $VS(2,8)$, $F(2,8)$ i $FS(2,8)$) s'han utilitzat per tal d'il·lustrar el comportament dels models quan es necessita un nombre elevat de coeficients per modelar una no linealitat. Pel que fa al nombre de coeficients de cada model que apareix a la columna N_c , cal esmentar que els coeficients en el model de Fourier s'han agafat seguint el mateix criteri que en el cas de Volterra (veure figura (Fig.3.8)). A la taula anterior (Tau.5.4) es pot comprovar com, en aquest cas i per a un mateix ordre P , els models de Fourier obtenen uns resultats superiors als de Volterra, tot i que amb un augment important en el cost computacional necessari. És per això que, a continuació, s'han escollit uns models de Fourier amb un ordre més baix ($F(2,3)$ i $FS(2,3)$) que ja tenen un cost computacional comparable als models anteriors de Volterra d'ordre $P=8$. També s'ha considerat oportú testejar els models de Volterra amb un nombre més baix de coeficients ($V(2,5)$, $VS(2,5)$), semblant al nombre de coeficients dels models de Fourier d'ordre $P=3$. En les 30 realitzacions utilitzades i per a un mateix nombre de coeficients, s'ha pogut observar que la matriu d'autocorrelació derivada dels models de Fourier està millor condicionada que la dels models de Volterra. En darrer lloc, s'ha considerat oportú

baixar l'ordre P del model de Fourier (model de F(2,2)) per tal d'aconseguir un cost computacional semblant al del model de Volterra V(2,5).

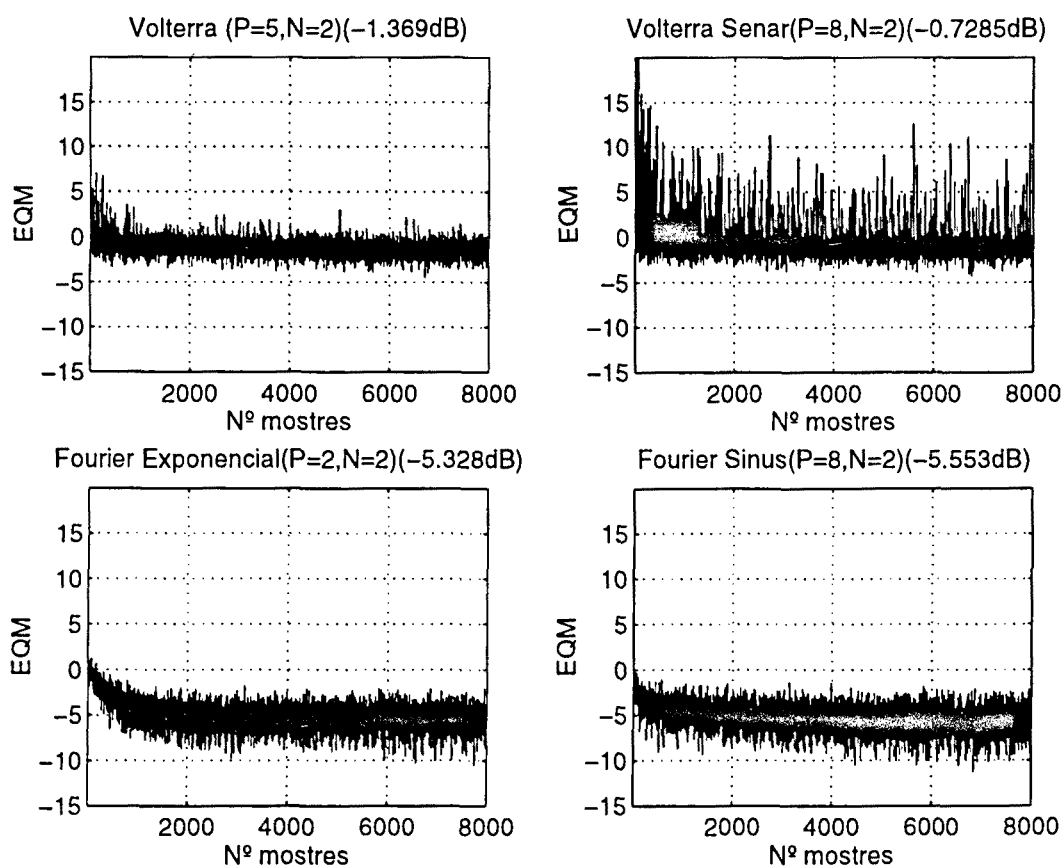
Model \ M	N_c	1000	2000	5000
V ($N=2,P=8$)	45	-15.48	-15.39	-15.18
VS ($N=2,P=8$)	20	-15.26	-15.14	-15.08
F ($N=2,P=8$)	145	-18.30	-20.74	-23.49
FS ($N=2,P=8$)	72	-20.76	-22.82	-24.90
V ($N=2,P=5$)	21	-12.66	-12.59	-12.54
VS ($N=2,P=5$)	12	-12.60	-12.54	-12.52
F ($N=2,P=3$)	25	-16.03	-16.15	-16.22
FS ($N=2,P=3$)	12	-16.14	-16.20	-16.23
F ($N=2,P=2$)	13	-11.90	-11.88	-11.89

Taula 5.4 Taula amb el EQM comès per diversos models (N_c indica el nombre de coeficients emprat en cada model), expressada en dB respecte de la potència del senyal de referència. Per a obtenir aquests valors s'ha calculat la mitjana dels respectius EQs temporals de 30 realitzacions independents.

Evidentment, aquests valors de EQMs (Tau.5.4) variaran en funció del problema concret de modelatge amb el que ens enfrontem, essent totalment factible que el model de Volterra assoleixi una aproximació millor (un EQM menor) que el model de Fourier per un mateix cost computacional. De totes maneres, en les diferents realitzacions efectuades s'ha observat el mal condicionament de la matriu d'autocorrelació dels models de Volterra envers la dels models de Fourier (per a un mateix nombre de coeficients), cosa que afavoreix a aquest darrer en un disseny adaptatiu, especialment utilitzant algorismes adaptatius de gradient.

5.1.2.2 Disseny adaptatiu en la identificació d'un SNL amb memòria

Els models escollits per a un disseny adaptatiu han estat: el model de Volterra senar amb ($N=2, P=8$) ja que el de Volterra normal ($2,8$) es comportaria aproximadament igual; el Volterra normal de ($2,5$); el de Fourier amb senoidals ($2,8$) (el $F(2,8)$ amb exponencials es comporta de manera molt semblant) i, finalment, el de Fourier amb exponencials ($2,2$). Els models escollits d'ordre $P=8$ il·lustren el comportament d'ambdós models en el cas de que el nombre de coeficients sigui elevat. Per altra banda, el model de $F(2,2)$ s'ha escollit pel fet de que implica el mateix cost computacional que el de $V(2,5)$. Així, a la següent gràfica (Gràf.5.7) es representa l'evolució temporal del EQM en dB respecte de la potència del senyal de referència assolit per cadascun d'aquests models. A més, cada títol inclou el EQM final assolit tenint en consideració les 2000 darreres mostres.

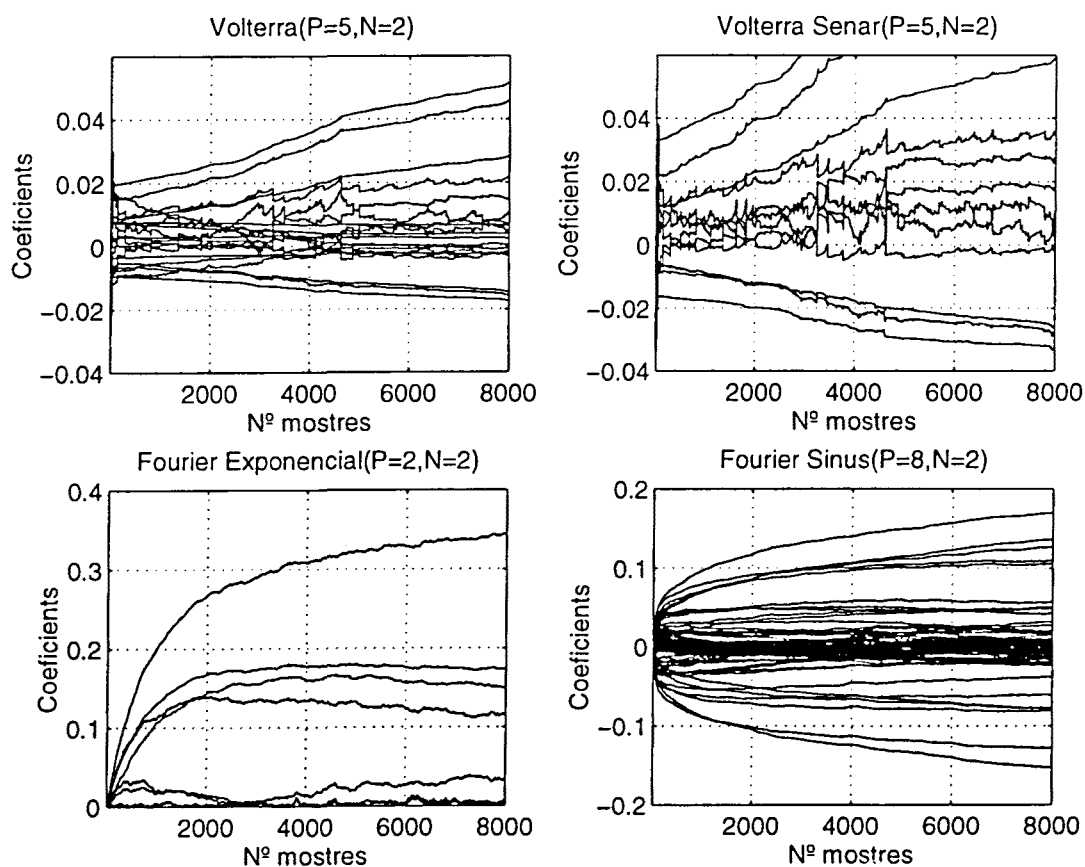


Gràfica 5.7 Evolució del EQM en dB respecte de la potència del senyal de referència pels models de $V(2,5)$, $VS(2,8)$, $F(2,2)$ i $FS(2,8)$. La mitjana del EQ s'ha obtingut a partir de 30 realitzacions independents. Els valors dels paràmetres μ i β necessaris per a l'adaptació dels coeficients en el NLMS es troben tabulats a (Tau.5.5).

Tal i com es pot apreciar, s'ha utilitzat una seqüència d'entrenament de 8000 mostres, mentre que el nombre de realitzacions independents a partir de les que s'ha obtingut el valor mig del EQ és de 30. Els valors per a cada model del paràmetre de pas, μ , i el factor de memòria, β , necessaris per a l'actualització dels pesos i potència del senyal, respectivament, es resumeixen a la següent taula (Tau.5.5).

	V(2,5)	VS(2,8)	F(2,2)	FS(2,3)
μ	0.03	0.002	0.009	0.006
β	0.997	0.98		0.997

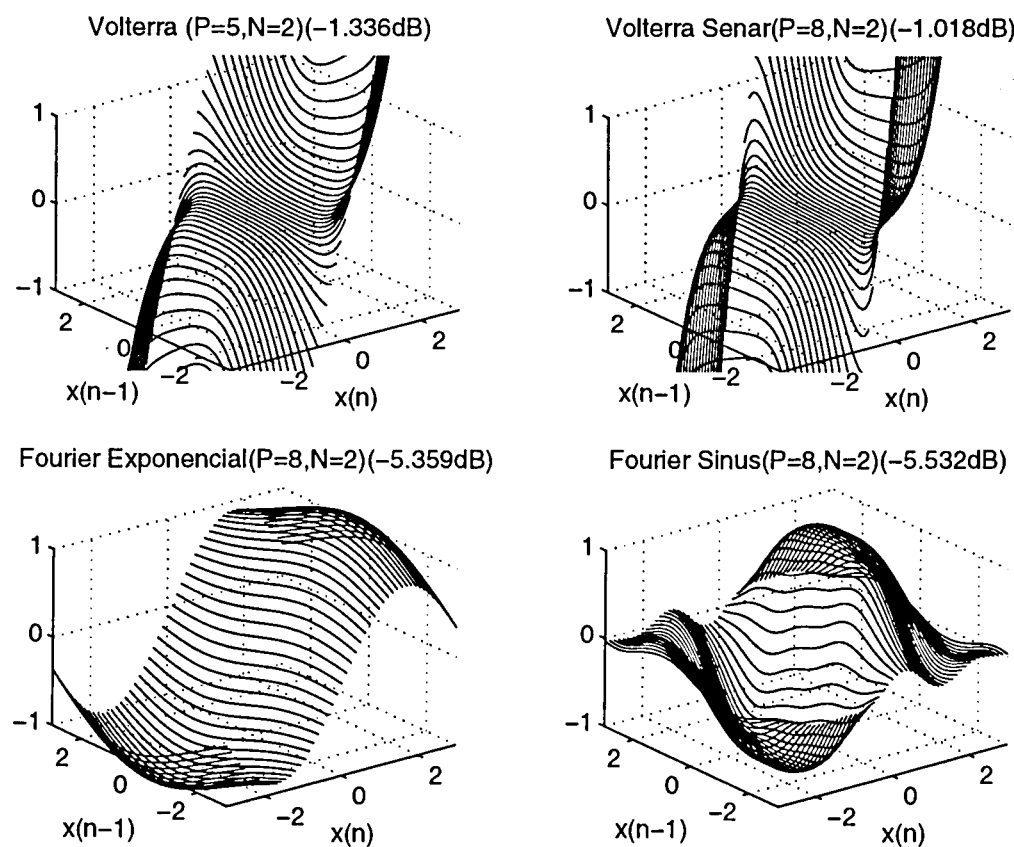
Taula 5.5 Taula amb els paràmetres μ i β de l'algorisme NLMS necessaris per a cada model en la simulació de les gràfiques (Gràf.5.9, Gràf.5.10).



Gràfica 5.8 Evolució dels coeficients en una realització particular dels diferents models de la gràfica anterior (Gràf.5.7). Pel model de Fourier amb exponencials s'ha representat l'evolució del valor absolut dels coeficients.

Aquests paràmetres, μ i β , s'han ajustat per tal d'aconseguir una velocitat de convergència semblant. Tal i com es pot comprovar a l'evolució del EQM (Gràf.5.7) o, fins i tot millor, en l'evolució dels coeficients en una realització particular (Gràf.5.8) això no ha estat possible, bàsicament com a conseqüència de la dificultat que suposa augmentar el paràmetre μ en els models de Volterra (per tal d'augmentar la velocitat) sense que l'EQM divergeixi. La raó principal radica en l'alta dispersió de la potència de les diferents funcions que conformen l'espai de senyal en els models de Volterra, que també força a escollir un valor de β petit ja que el senyal és força no estacionari. Aquest no és el cas dels models de Fourier en els que el comportament és més regular i, fins i tot, en el cas de decantar-nos per les exponencials complexes la potència de totes les funcions és igual a la unitat, cosa que ens estalvia l'estimació de la potència.

En darrer lloc, per tal d'il·lustrar els resultats als que s'arriba amb un disseny adaptatiu, la següent gràfica (Gràf.5.9) inclou les respectives no linealitats, $\hat{g}[x(n), x(n-1)]$ que implementen els quatre models discutits en aquest apartat.



Gràfica 5.9 Sistema No Lineal amb Memòria que implementen els següents models: V(2,5), VS(2,8), F(2,2) i FS(2,8), amb els coeficients obtinguts després d'un entrenament adaptatiu amb 8000 mostres (realització particular de (Gràf.5.8)). Cada títol inclou el EQ en dB que s'ha assolit en dita realització.

Amb aquesta darrera representació finalitza la presentació de les simulacions que pretenen deixar palesa la capacitat per a modelar SNLs, especialment en dissenys adaptatius, del model de Fourier i de totes les seves versions (amb senyals cosenoidals i senoidals, i també la implementació lattice). Cal destacar que en totes aquestes simulacions, tant en el cas amb memòria com sense, s'ha utilitzat un senyal d'entrada amb una funció densitat de probabilitat Gaussiana, mentre que ja es va veure al capítol tercer com una funció densitat de probabilitat (FDP) uniforme és molt adequada per al model de Fourier, especialment en dissenys adaptatius. Així, a la següent secció, es planteja la possibilitat d'introduir un "blanqueig" de la FDP prèviament a l'aplicació del model de Fourier, de tal manera que es mostrarà tant el comportament del model de Fourier en problemes d'identificació quan el senyal d'entrada és uniforme, així com la possibilitat de blanquejar la FDP d'un senyal a partir del que es va explicar al capítol anterior (Ap.4.2).

5.2 "Blanqueig" de la funció densitat de probabilitat

En aquesta secció es presenten resultats de com, efectivament, a partir d'un conjunt de M mostres d'una variable aleatòria (v.a.) amb una FDP donada, es pot "blanquejar", és a dir, es pot obtenir un altre conjunt de mostres tals que llur FDP sigui uniforme. Dins el context d'aquesta tesi, i concretament dins del modelatge de SNLs mitjançant el model de Fourier, aquesta transformació resulta interessant ja que es pot interpretar com un procés d'ortogonalització que facilita un posterior aprenentatge adaptatiu del model de Fourier. Així, tal i com mostra la següent figura (Fig.5.3), es considera un model de Fourier amb exponencials però que introdueix un "blanqueig" de la FDP de l'entrada, prèviament al model de Fourier pròpiament dit.

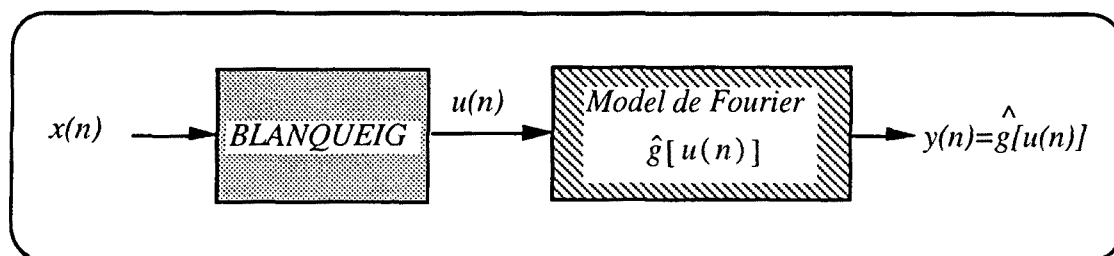


Figura 5.3 Pre-blanqueig del senyal abans d'aplicar-lo al model de Fourier.

Aquest model s'utilitzarà per al mateix problema d'identificació d'un SNL sense memòria presentat a la secció anterior (Ap.5.1.1), de tal manera que es podran comparar els resultats.

Respecte del sistema que realitza el blanqueig (o “whitening”), la relació entre la variable d’entrada, x , i la de sortida, u , respon a l’expressió (Eq.4.15) que reproduïm a continuació per comoditat, ja particularitzada pel cas d’ordre finit (és a dir Q) i disposant de la funció característica estimada.

$$u = 2U_0 \cdot \left(\frac{x}{2X_0} + \sum_{\substack{p=-Q \\ p \neq 0}}^Q \frac{\hat{\psi}_X(jp\omega_0)}{-jp2\pi} \cdot e^{-jp\omega_0 x} - 0.5 \right) \quad x \in \left[-\frac{X_0}{2}, \frac{X_0}{2} \right] \quad (5.4)$$

A l’igual de l’apartat anterior corresponent al cas sense memòria (Ap.5.1.1), el senyal d’entrada $x(n)$ té una distribució Gaussiana amb mitjana nul·la i variància $\sigma^2=1/9$. Per tal de restringir el rang d’entrada als valors de $[-1,1]$ (6 cops la desviació típica), s’han descartat les mostres de $x(n)$ que sobresortin d’aquest rang, essent la probabilitat de que això succeeixi de $\text{erfc}(3/\sqrt{2})=0.0027$. En conseqüència, la freqüència principal utilitzada en aquesta primera etapa de blanqueig és de $\omega_0=\pi$, el valor mínim per tal de no cometre aliasing. Un cop s’ha aplicat la transformació de blanqueig (Eq.5.4), la variable aleatòria que en resulta, u , està uniformement distribuïda dins del rang $[-U_0, U_0]$, concretament s’ha escollit $U_0=1$ i una freqüència ω_0 pel model de Fourier igual a $\omega_0=\pi$. L’ordre màxim que es considera en l’estimació de la funció característica és de $Q=10$.

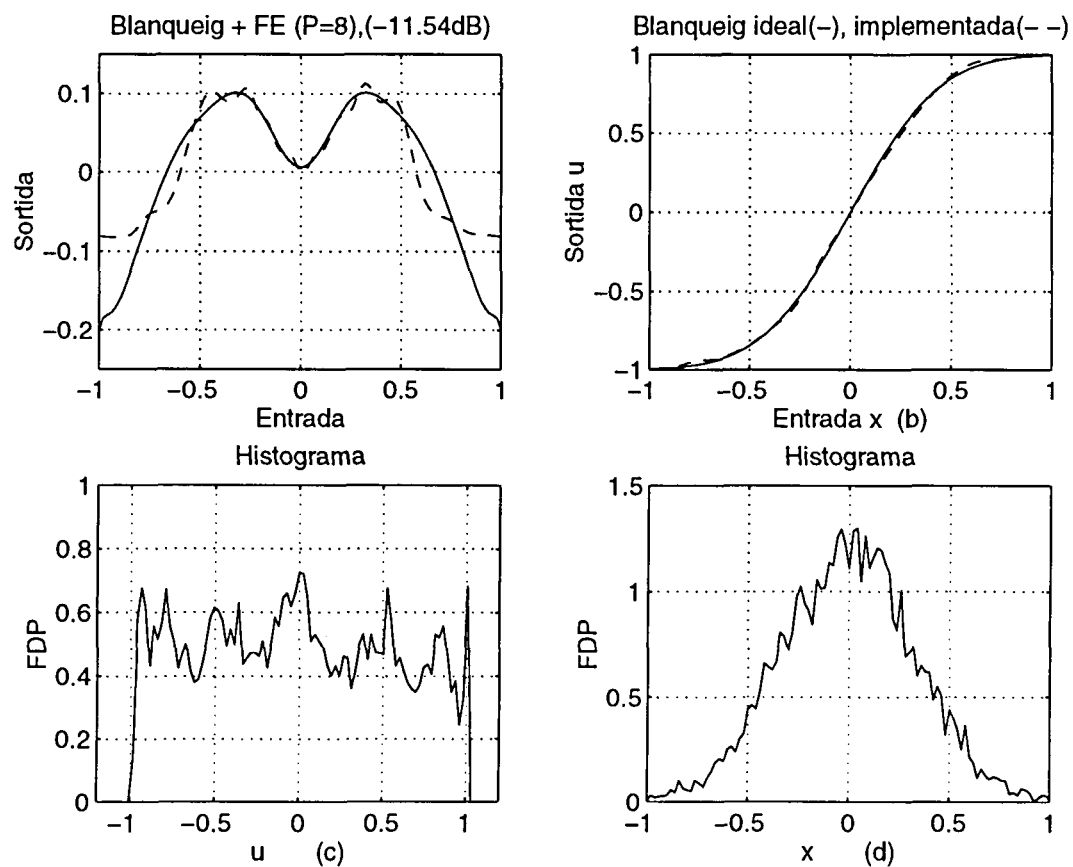
Respecte del model de Fourier amb exponencials sense memòria pròpiament dit, es testejen 3 casos diferents: $F(P=8)$, $F(P=4)$ i $F(P=2)$. Notar que es tracten dels mateixos ordres que es van provar a l’apartat (5.1.1) cosa que servirà per a poder establir comparacions.

Ordre \ M	500	1000	2000	5000
$P=8$	-11.49	-11.83	-11.58	-11.61
$P=4$	-9.66	-9.64	-9.57	-9.56
$P=2$	-7.34	-7.31	-7.26	-7.27

Taula 5.6 Taula amb EQMs obtinguts per models de Fourier amb exponencials de diferents ordres P , introduïnt un “blanqueig” de la FDP de l’entrada (Fig.5.3), utilitzats en la identificació del mateix SNL sense memòria de l’apartat (Ap.5.1.1). Pel blanqueig (Eq.5.3) s’ha considerat un ordre de $Q=10$ i una freqüència principal de $\omega_0=\pi$; pel posterior model de Fourier s’han considerat diversos ordres ($P=8, 3, 2$) i una freqüència principal també de $\omega_0=\pi$, ja que la variable u està continguda dins el rang de $[-1,1]$.

En primer lloc es presenten els resultats obtinguts sota un disseny en bloc de mínims quadrats, suposant que es disposa d'un conjunt de M mostres d'entrada, $\{x(n) \ n=1, \dots, M\}$. Val a dir però, que només les primeres 500 mostres s'han utilitzat per a estimar els valors de la funció característica mitjançant estimador empíric. La taula (Tau.5.6) recull la mitjana estadística de l'error quadràtic que comet el model en l'aproximació de la funció $g[\cdot]$ del SNL real, expressat en dB respecte de la potència del senyal de sortida no sorollós. A l'igual que a l'apartat (5.1.1), per tal d'obtenir aquest valor (Eq.5.2) és necessari recórrer a solucions numèriques. A part d'això, s'ha calculat la mitjana de 30 realitzacions independents.

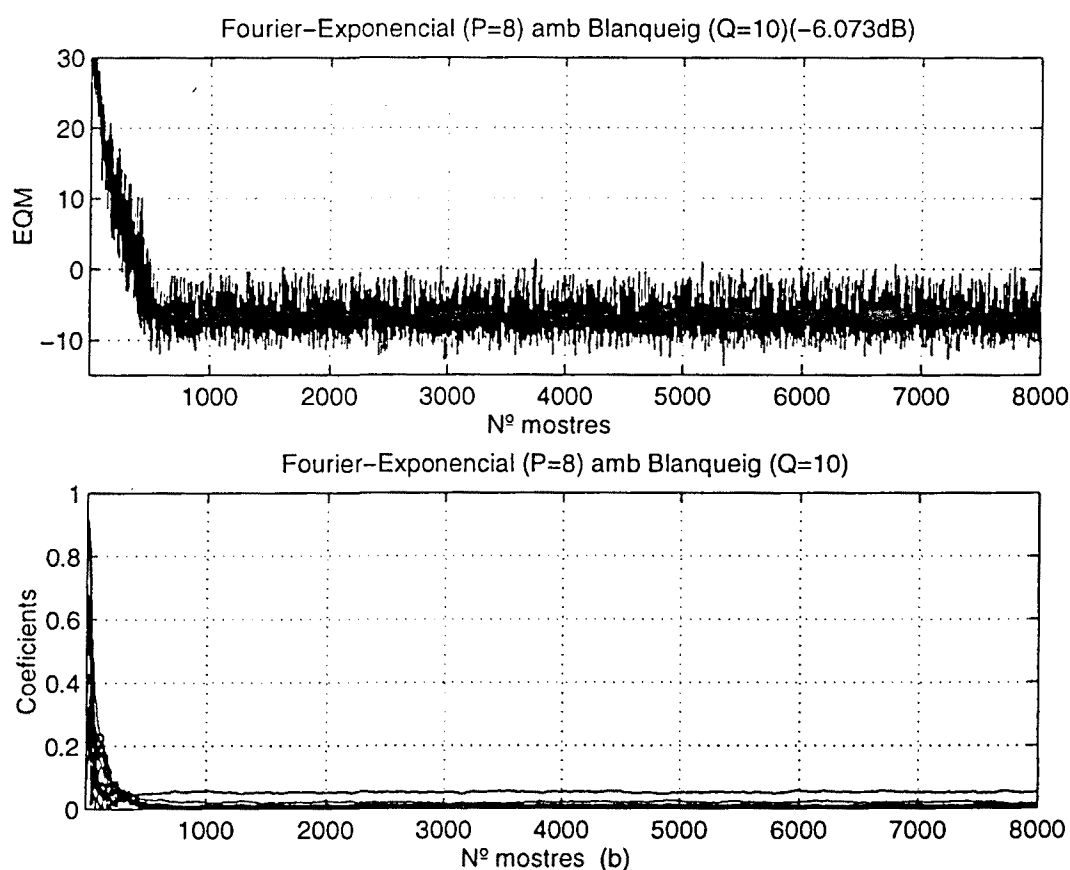
La figura (Gràf.5.10) inclou certs resultats del disseny en bloc. En primer lloc, la figura (Gràf.5.10.a) representa l'aproximació de la no linealitat implementada pel model de Fourier amb blanquejat ($P=8$) en una realització particular de la taula anterior amb $M=500$ (el títol inclou el EQ de la realització).



Gràfica 5.10 (a) No linealitat implementada pel model de Fourier amb exponencials d'ordre $P=8$ i amb blanquejat previ, en una realització particular de la taula anterior (Tau.5.6) amb 500 mostres. El títol inclou el EQ en % assolit en aquesta realització concreta. (b) Blanquejat ideal i real implementat pel sistema blanquejador en aquesta realització. (c) i (d) Histogrames amb 8000 mostres de les variables u i x , on la variable u s'ha obtingut aplicant el sistema blanquejador anterior a les 8000 mostres de x .

La figura (Gràf.5.10.b) inclou el blanquejat ideal en línia contínua (Eq.4.12) i el que implementa el sistema blanquejador (Eq.5.4). Per últim, les figures (Gràf.5.10.c) i (Gràf.5.10.d) mostren una estimació de la FDP mitjançant l'histograma de 8000 mostres la variable d'entrada x i 8000 de la variable u (només 500 s'han utilitzat pel càlcul de la funció característica empírica pel sistema blanquejador).

A continuació, i abans d'arribar a certes conclusions, es presenten resultats assolits pel model d'ordre $P=8$ però ara en un disseny adaptatiu, ja que pel nombre elevat de coeficients que té el sistema és el que presentava més variància en l'evolució temporal del EQM (Gràf.5.3). Els resultats de l'evolució temporal del EQM en el model de Fourier amb exponencials d'ordre 8 i amb blanquejat, així com també l'evolució del valor absolut dels coeficients s'inclou a la següent gràfica (Gràf.5.11).



Gràfica 5.11 Evolució temporal del EQM i valor absolut dels coeficients (8000 mostres) del model de Fourier d'ordre $P=8$ amb pre-blanqueig. Paràmetres de l'algorisme NLMS: $\mu=0.3$ i $\beta=0.995$

Els valors de les freqüències principals han estat els mateixos que els utilitzats a la taula (Tau.5.6), mentre que la constant de pas de l'algorisme NLMS és de $\mu=0.3$. La funció

característica s’ha anat actualitzant de manera recursiva (filtre pas baix de primer ordre) amb $\beta=0.995$.

Dels resultats obtinguts, tant en el disseny en bloc com adaptatiu, es pot comprovar que, en aquest problema concret, la introducció d’un sistema blanquejador no proporciona resultats superiors als obtinguts pels models de Fourier amb el mateix ordre però sense blanquejar. En aquest sentit, és important destacar el fet de que l’aplicació d’un sistema blanquejador prèviament al model de Fourier facilita l’aprenentatge dels coeficients del model de Fourier (comparar evolució temporal dels coeficients del sistema amb blanquejador (Gràf.5.12.b) i sense blanquejador (Gràf.5.4.c), tot i que això no significa que l’error resultant sigui millor que en cas d’utilitzar un model de Fourier directament o un model de Volterra. Això, evidentment, depèn de l’aplicació concreta a la que ens enfrontem. Per altra banda, s’ha de considerar també l’increment del cost computacional que suposa el blanquejador, que no discutim ja que es tracta d’un cas particular d’un sistema de Fourier i en capítols anteriors ja s’ha dedicat una especial atenció a aquest tema.

De totes maneres, i a banda de l’error assolit en aquest cas, volem remarcar que el blanquejat de la variable aleatòria d’entrada s’ha aconseguit de forma positiva, cosa que pot resultar interessant en altres problemes o aplicacions. D’ara endavant, i ja en la línia de variables aleatòries, l’apartat següent està íntegrament dedicat a presentar resultats obtinguts pels mètodes d’estimació espectral discutits al capítol quart aplicats a l’estimació de funcions densitat de probabilitat.

5.3 Estimació de la funció densitat de probabilitat.

Aquesta part del capítol està dedicada a la presentació dels resultats obtinguts per cadascun dels estimadors espectrals proposats al capítol quart aplicats a l’estimació de funcions densitat de probabilitat. S’han considerat dos casos diferents: el cas d’una sola v.a. i el cas multivariable (concretament, pel cas de dues variables aleatòries). Per cadascun d’ells s’han considerat tant variables aleatòries normals com no normals, així com independents o dependents (pel cas multivariable). La metodologia en tots els casos ha estat la mateixa. Aquesta consisteix en suposar un determinat nombre de mostres, denotat per M , de la variable aleatòria (o variables aleatòries), a partir de les quals s’obté una estimació de la funció característica (o funció característica conjunta) mitjançant l’estimador empíric. Un cop es té una estimació de la funció característica es construeix la matriu característica i, a partir d’ella, s’evaluen els diferents estimadors de la FDP (o FDP conjunta) per a un rang de valors de la variable aleatòria (o variables aleatòries). L’aproximació resultant s’ha normalitzat per tal de que l’àrea de la FDP estimada dins el rang considerat sigui igual a la unitat. Molts dels estimadors presentats

necessiten de la inversa de la matriu característica, de manera que el cost computacional d'aquests resideix bàsicament en el cost de la inversió de la matriu. Comencem doncs, pel cas d'una sola variable aleatòria abans de passar als exemples multivariables.

5.3.1 Estimació de FDP. Cas univariable.

Es presenten dues situacions diferents. El primer cas consisteix en l'estimació de la FDP d'una v.a. normal, denotada per x , amb una mitjana igual a 2 i una variància de 5. S'ha escollit aquest cas per tal d'evitar simetries de la FDP respecte de l'origen. Es consideren 5 estimadors diferents: el Periodograma (P), el mètode de Mínima Variància (MV), el mètode de Mínima Variància Normalitzat (MVN), el de Predicció Lineal (PL) i l'Histograma (H) (per tal d'establir comparacions amb un mètode àmpliament conegut). Tal i com ja es va avançar al capítol anterior, no s'ha aprofundit en el sentit de comparar aquests estimadors amb d'altres mètodes d'estimació de FDP clàssics tal i com podia ésser el basat en les finestres de Parzen (tot i que l'histograma es pot interpretar com un cas particular d'aquest) o el criteri de "Minimum Distance Length".

A la següent taula (Tau.5.7), s'inclouen diferents errors assolits per aquests estimadors a partir d'un conjunt més o menys extens de mostres de la v.a. (és a dir, variant M). Concretament, aquest error representa el valor mig (30 realitzacions independents) de l'error quadràtic de la funció estimada (FDP estimada menys FDP real), en % respecte del valor quadràtic de la FDP real juntament amb la desviació típica. Aquest EQ s'ha obtingut integrant mitjançant mètodes numèrics l'error quadràtic dins un rang de valors de x que van des del valor mínim, X_{min} , fins al màxim, X_{max} , dels valors que la v.a. x pren en el conjunt de M mostres.

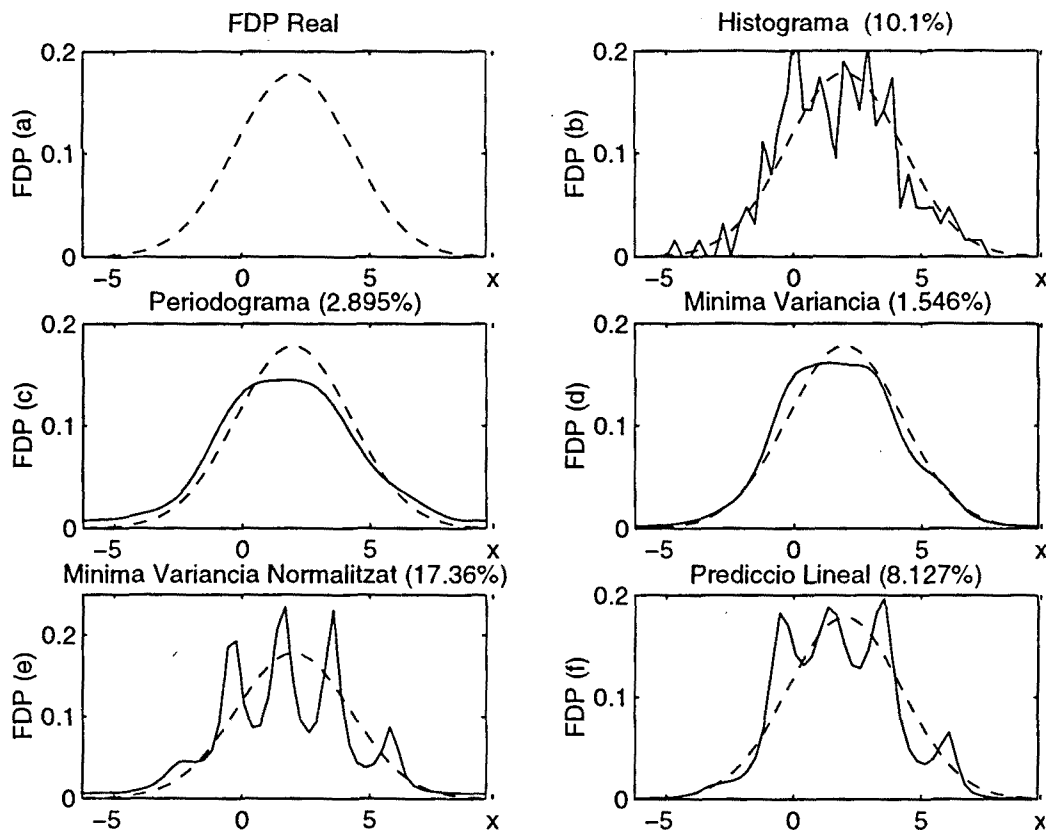
Per a tots els mètodes d'estimació espectral, l'ordre P , que representa el nombre de mostres que s'estimen de la funció característica a partir de la qual s'obté la matriu característica, és de $P=6$. Per altra banda, la freqüència principal, ω_0 , s'ha calculat a partir de la 1^a realització com la diferència entre el valor màxim que la v.a. x pren dins el conjunt de M mostres, X_{max} , menys el valor mínim, X_{min} . En aquest cas particular ω_0 és igual a $\omega_0=2\pi/X_0$, essent $X_0=1.3*(X_{max}-X_{min})$, és a dir, el rang de x s'ha allargat un 30% per cada límit. La raó de suposar un rang més elevat és per tal de disminuir l'aliasing que es produeix en l'estimació de la FDP ja que recordem que la freqüència principal, ω_0 , determina el període de repetició de la FDP de manera que sempre que el rang sigui il·limitat es produeix un aliasing.

Model \ M	100	200	500	1000	2000
H	18,1%±5,2	8,22%±2,33	2,77%±1,01	1,39%±0,6	0,61%±0,22
P	3,28%±2,22	2,47%±1,57	2,51%±0,87	2,44%±0,61	2,76%±0,31
MV	2,59%±1,81	1,22%±1,04	0,58%±0,41	0,38%±0,22	0,21%±0,10
MVN	6,15%±7,28	17,65%±15,82	21,56%±14,98	20,43%±10,48	32,21%±13,21
PL	10,19%±8,2	9,65%±6,85	6,34%±4,62	4,77%±3,21	5,54%±3,39

Taula 5.7 Errors absoluts per diferents estimadors: Histograma, Periodograma, Mínima Variància, Mínima Variància Normalitzat i Predicció Lineal, en aquests 4 darrers l'ordre és de $P=6$ i la freqüència principal val $\omega_0=2\pi/X_0$, essent $X_0=1.3*(X_{max}-X_{min})$ en l'estimació de la FDP d'una v.a. normal $x:N(2,5)$. L'error representa l'EQM (30 realitzacions independents) de l'estimació en % respecte del valor quadràtic de la FDP real i s'han adjuntat les desviacions típiques. El valor M representa el nombre de mostres de la v.a. x que s'han utilitzat per a l'obtenció dels estimadors.

A tall d'exemple, a la següent figura (Gràf.5.12) es representa l'estimació de la FDP assolida pels diferents mètodes en una realització particular ($M=200$) tal que el EQ sigui similar al valor mig tabulat. És important destacar que tots els estimadors s'han normalitzat per tal de que l'àrea de la FDP estimada dins el rang de valors escollit per a x , $[X_{max}, X_{min}]$, sigui igual a la unitat.

En vista d'aquests resultats (Tau.5.7, Gràf.5.12), és important destacar el comportament en general superior dels mètodes d'estimació espectral de P i MV, en front dels de MVN, PL i, fins i tot, del H. Això és bàsicament, com a conseqüència de la "suavitat" de la FDP real. Es pot observar com els mètodes de MVN i PL, en general més resolutius que els altres, presenten 5 màxims tal i com correspon a un ordre de $P=6$ en els models (veure capítol 4). Per altra banda, a la taula (Tau.5.7) es pot observar com sembla que tots els mètodes, a excepció del de MVN i PL, són consistents i que aquests mètodes d'estimació espectral poden suposar una bona eina d'estimació de FDP, especialment quan el nombre de mostres M de les que es disposa és baix.



Gràfica 5.12 Estimació de la FDP d'una v.a. normal $x:N(2,5)$ a partir de $M=200$ mostres amb diferents estimadors espectrals, i amb $P=6$ i $\omega_0=2\pi/X_0$, essent $X_0=1.3*(X_{max}-X_{min})$ (cas particular corresponent a la taula anterior (Tau.5.6)).

El segon grup de simulacions pel cas univariable consisteix en l'estimació de la FDP d'una v.a. no Gaussiana, denotada per y . Aquesta v.a. s'obté de la següent transformació no lineal,

$$y = (x + a)^2 \quad (5.5)$$

aplicada sobre x , que consisteix en una v.a. normal $x:N(0,1)$. Es troba que la FDP de la v.a. y , diguem-ne $p_Y(y)$, en funció de la variable a respon a la següent expressió [Pap65].

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot \cosh(a\sqrt{y}) \cdot e^{-\frac{y+a^2}{2}} & y \geq 0 \end{cases} \quad (5.6)$$

Per a l'estimació d'aquesta FDP s'han utilitzat els mateixos mètodes d'estimació spectral que en el cas de la v.a. Gaussiana. Els errors quadràtics (en % respecte del valor

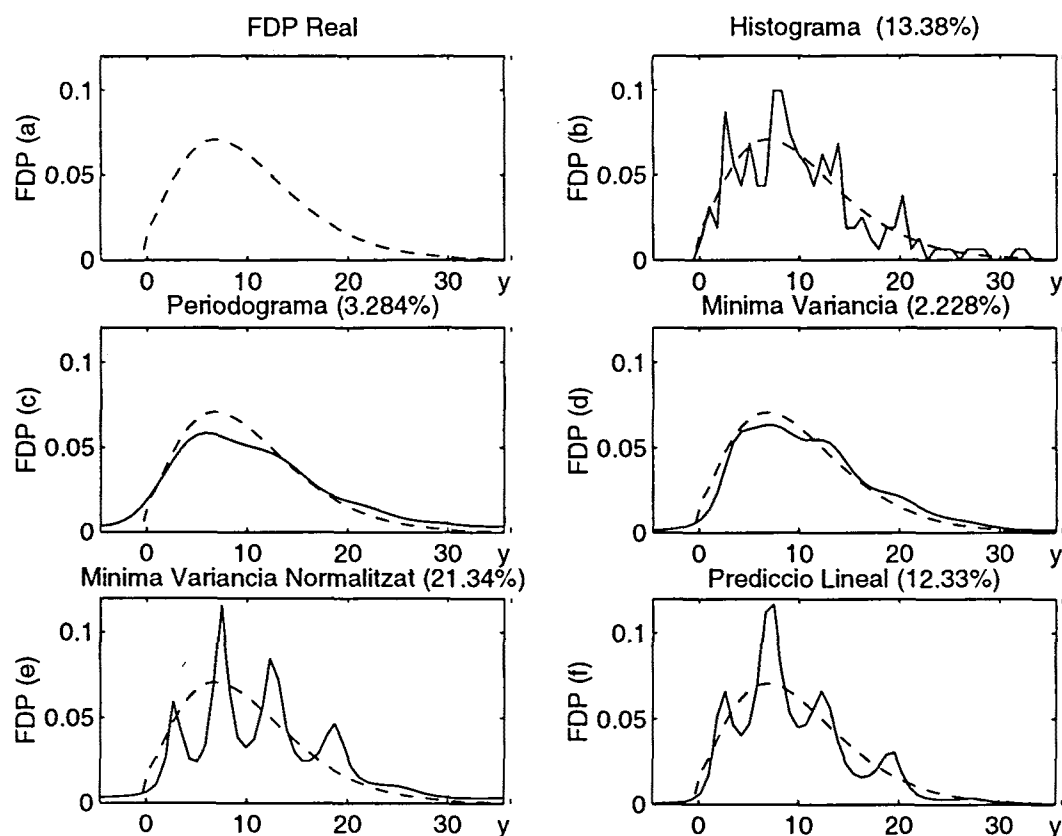
quadràtic de la FDP real, integrant mitjançant mètodes numèrics en el rang $[X_{min}, X_{max}]$ i fent la mitjana dels resultats de 30 realitzacions independents) estan inclosos a la taula (Tau.5.8).

Model \ M	100	200	500	1000	2000
H	19,3%±5,18	8,365%±3,11	2,58%±0,95	1,41%±0,49	0,64%±0,16
P	3,72%±1,90	2,9%±1,22	4,14%±0,67	4,12%±0,53	5,63%±0,33
MV	3,15%±1,5	1,86%±1,16	2,02%±0,73	2,00%±0,54	2,46%±0,38
MVN	12,11%±13,83	23,59%±19	43,26%±25,96	38,69%±12,64	69,04%±25,6
PL	14,02%±8,97	13,26%±8,44	15,56%±10,65	13,07%±6,23	24,56%±11,21

Taula 5.8 Errors assolits per diferents estimadors: Histograma, Periodograma, Mfnima Variància, Mínima Variància Normalitzat i Predicció Lineal, en aquests 4 darrers l'ordre $P=6$ i la freqüència principal $\omega_0=2\pi/X_0$, essent $X_0=1.3*(X_{max}-X_{min})$ en l'estimació de la FDP de la v.a. y (Eq.5.5, Eq.5.6). L'error representa l'EQM (30 realitzacions independents) de l'estimació en % respecte del valor quadràtic de la FDP real. El valor M representa el nombre de mostres de la v.a. y que s'han utilitzat per a l'obtenció dels estimadors.

A l'igual que pel cas de la v.a. normal, i per tal de tenir una representació visual d'aquests errors, a la següent gràfica (Gràf.5.13) s'inclouen les estimacions obtingudes per cada estimador en una realització amb $M=200$. Tal i com es pot comprovar (cada títol conté l'error quadràtic d'aquesta realització) s'ha escollit un cas representatiu pel que fa als valors tabulats anteriorment.

Les conclusions que s'en poden deduir són bàsicament les mateixes que pel cas anterior. Per una banda està l'aliasing que es produeix en l'estimació de la FDP (notar que l'estimació $\hat{p}_Y(y)$ no és nul·la per a $y < 0$), el comportament "picut" dels mètodes més resolutius (MVN i PL), l'esbiaixament en l'estimació proporcionada pel Periodograma, i els resultats superiors que obté el mètode MV en front de l'Histograma, especialment quan el nombre de dades a partir de les que s'ha d'estimar la FDP és baix.



Gràfica 5.13 Estimació de la FDP de la v.a. y a partir de $M=200$ mostres amb diferents estimadors espectrals i amb $P=6$ i $\omega_0=2\pi/Y_0$, essent $Y_0=1.3*(Y_{max}-Y_{min})$ (cas particular corresponent a la taula (Tau.5.7)).

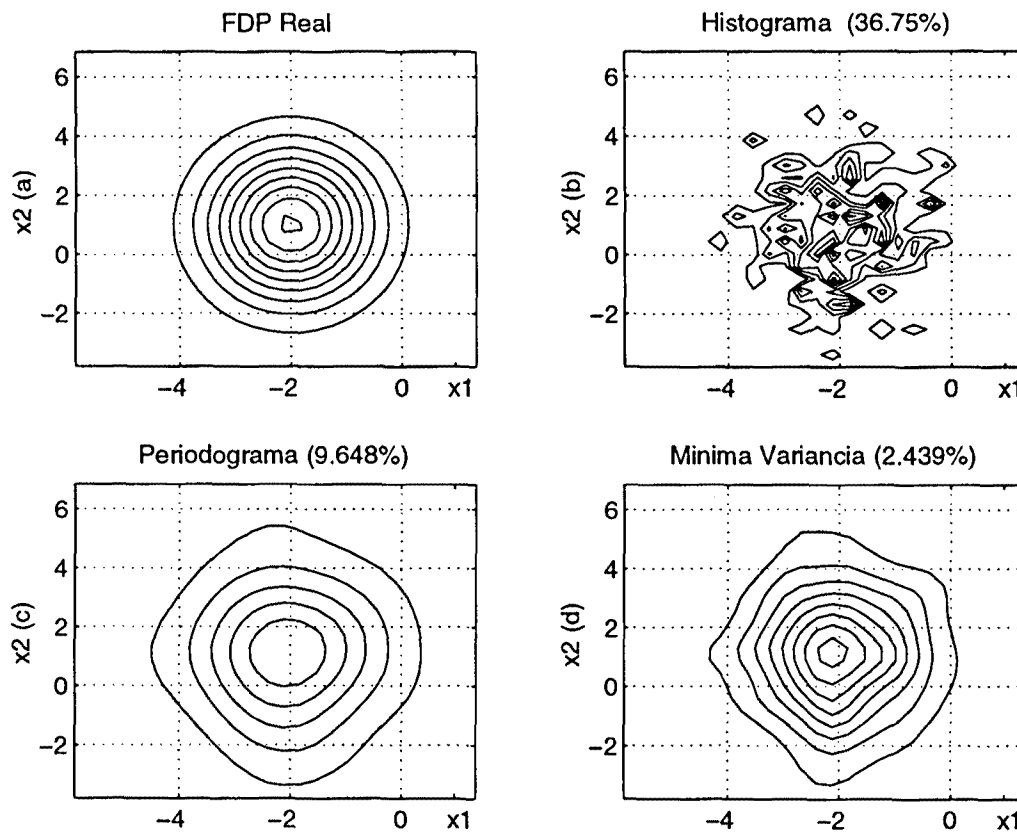
Aquest darrer resultat és el que va encoratjar-nos alhora de testejar aquests mètodes per a estimació de FDP conjunta, ja que tal i com s'ha presentat al capítol anterior (Ap.4.4) els mètodes d'estimació espectral que fàcilment es poden generalitzar al cas multidimensional són precisament el Periodograma i el mètode de Mínima Variància.

5.3.2 Estimació de FDP. Cas multivariable

En el cas multivariable s'ha escollit el cas bidimensional per raons de representació. Es presenten dos casos diferents. En primer lloc, l'estimació de la FDP conjunta de dues variables aleatòries normals i independents, i a continuació, el mateix però per a dues variables aleatòries dependents i no conjuntament Gaussians.

En el primer cas, s'estima la FDP conjunta de dues variables aleatòries normals i independents, denotades per les components del vector $x=[x_1 \ x_2]'$, on $x_1:N(-2,1)$ i $x_2:N(1,3)$. La figura (Gràf.5.14) representa tant la FDP real com l'estimació assolida mitjançant 3 mètodes diferents: l'Historigrama, el Periodograma i el mètode de Mínima Variància. En aquest cas particular s'han utilitzat $M=500$ mostres de cada v.a. per a l'estimació de la funció característica

conjunta, essent els ordres màxims estimats de $P_1=P_2=4$. En conseqüència, la matriu característica resultant té una dimensió de 16×16 . En aquest sentit, és important destacar que per a l'estimació de la funció característica no s'ha tingut en consideració la simplificació quan es coneix que les variables aleatòries són independents.



Gràfica 5.14 Estimació de la FDP conjunta de $x_1:N(-2,1)$ i $x_2:N(1,3)$ a partir de $M=500$ mostres de cadascuna mitjançant diferents mètodes: Histograma, Periodograma i Mínima Variància. En aquests dos darrers els respectius ordres en l'estimació de la funció característica conjunta han estat de $P_1=P_2=4$, mentre que les freqüències principals associades a cada v.a. són de $\omega_i=2\pi/X_i$, essent $X_i=1.3*(X_{max_i}-X_{min_i})$ per a $i=1,2$. L'eix de ordenades correspon a la v.a. x_1 mentre que el de coordenades a la x_2

La FDP real consisteix en un seguit d'el·lipses concèntriques centrades al voltant del valor mig $(-2,1)$ i amb una distància focal que depèn de la variància de cada variable aleatòria (atenció a la diferència d'escalat en els eixos de x_1 i x_2). De la mateixa manera que anteriorment, cada títol inclou l'error quadràtic comès per l'estimador (en % respecte del valor quadràtic de la FDP real). En aquest cas, no s'ha realitzat la integral per mètodes numèrics sino que s'ha estimat en un entrecreixat de 50×50 punts. Aquesta representació correspon a una realització particular de les 30 que s'han utilitzat per a calcular el valor mig i desviació típica de l'error

quadràtic assolit per diferents mètodes. Aquests valors, juntament amb d'altres obtinguts amb M diferents, es resumeixen a continuació a la següent taula (Tau.5.9).

Model \ M	100	200	500	1000	2000
H	>>	>>	36,43%±6,53	15,79%±2,17	8,05%±0,90
P	9,90%±3,39	9,42%±2,41	10,25%±1,74	10,75%±1,28	11,82%±1,43
MV	6,98%±2,59	4,19%±1,50	2,76%±1,11	2,11%±0,58	1,74%±0,39
MVN	53,12%±41,53	26,25%±16,74	25,34%±15,37	23,84%±9,08	27,67%±8,98
PL	>>	>>	>>	>>	>>

Taula 5.9 Errors en l'estimació de la FDP conjunta de dues v.a. Gaussians independents $x_1:N(-2,1)$ i $x_2:N(1,3)$, assolits per diferents estimadors: Histograma, Periodograma, Mínima Variància, Mínima Variància Normalitzat i Predicció Lineal, amb paràmetres iguals als de (Gràf.5.14). L'error representa l'EQM (30 realitzacions independents) de l'estimació en % respecte del valor quadràtic de la FDP real. El valor M representa el nombre de mostres del vector x que s'han utilitzat per a l'obtenció dels estimadors. El símbol ">>" s'ha utilitzat per denotar un EQM major que el 100%.

Es pot comprovar que en el cas bidimensional, les propietats dels diferents estimadors es mantenen on cal destacar que els mètodes de MVN i PL, a l'igual que en estimació espectral, no presenten bones propietats en estimació de FDP conjunta. El mètode de MV és el que continua presentant un comportament notablement superior als altres mètodes, especialment per M baixos.

Per últim, i abans de concloure aquest capítol de simulacions, es presenta l'estimació de la FDP conjunta de dues variables aleatòries, denotades per x i z , que són dependents. Mentre que x és una v.a. normal, $x:N(0,1)$, la v.a. z consisteix en la suma de dues variables aleatòries, y i w , de manera que la v.a. y és una transformació no lineal aplicada sobre x semblant a la utilitzada en el cas del SNL AM/AM (Ap.5.1.2),

$$y = g(x) = \text{sign}(x) \cdot \left(1 - e^{-x^2/0.5}\right) \quad (5.7)$$

que sumada amb una altra v.a. Gaussiana $w:N(0,1)$ produeixen z . La variància de w és una tal que la SNR entre la y i w sigui de -3dB.

$$z = y + w = g(x) + w \quad \left(\frac{\sigma_y^2}{\sigma_w^2} \right) = -3dB \tag{5.8}$$

La raó d'ésser d'aquest cas concret, sorgeix d'un problema inicial d'equalització amb referència, x , de la sortida d'un canal sorollós z a partir de l'expressió de l'estimador òptim de Bayes que necessita de l'estimació de la FDP de x condicionada a z , o el que és el mateix, la FDP conjunta de (z,x) i la FDP de x . En aquest cas, només ens centrem en exposar els resultats en l'estimació de la FDP conjunta de (z,x) deixant de banda la motivació inicial que, per altra banda, es pot trobar a [Pag96a].

La FDP conjunta real es pot obtenir com el producte de la FDP de z condicionada a x , multiplicada per la FDP de x . Sota la hipòtesi de que x i w són independents, la v.a. z condicionada a x consisteix en una v.a. Gaussiana de mitja igual a $g(x)$ (atès que w és de mitja nul·la) i amb una variància igual a la del soroll, σ_w^2 . En conseqüència, la FDP conjunta de (z,x) real equival a la següent expressió.

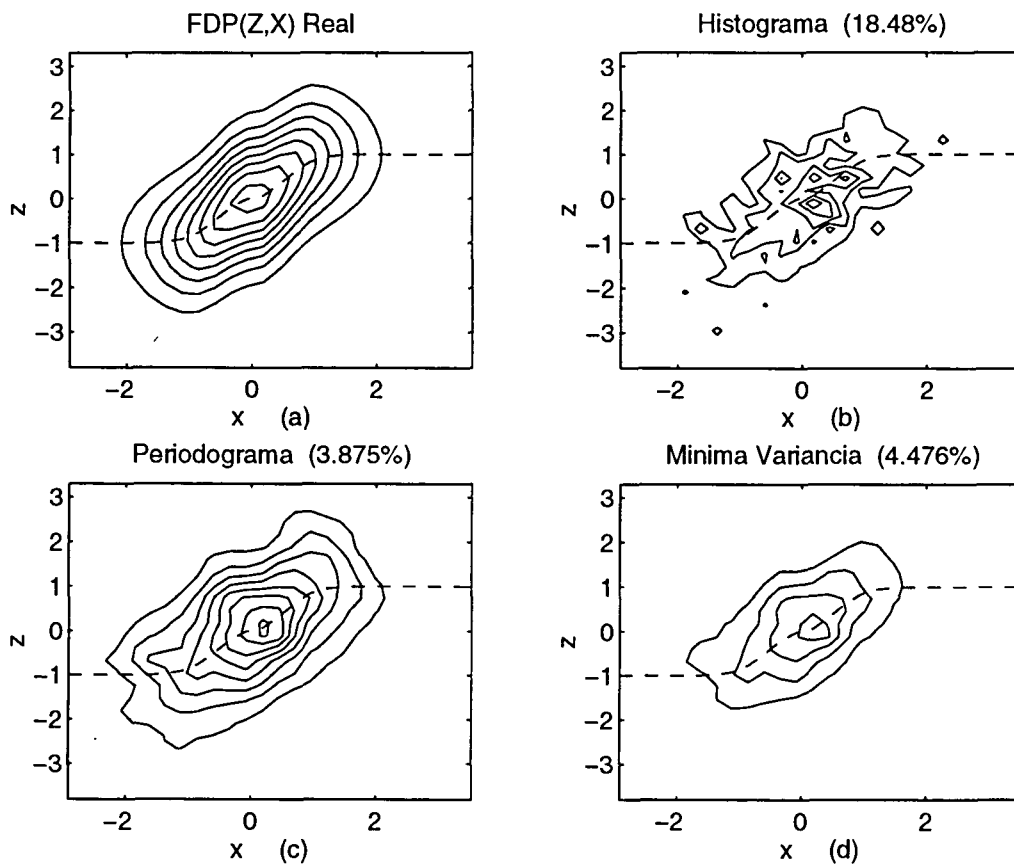
$$P_{(Z,X)}(z,x) = P_{(Z/X)}(z/x) \cdot P_X(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_w\sigma_x} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-g(x)}{\sigma_w}\right)^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2} \tag{5.9}$$

Per tal d'establir una comparació entre els diferents mètodes, a la següent taula (Tau.5.10) es resumeixen els EQMs assolits per diferents models i sota valors diferents del nombre de mostres de cada v.a., M , utilitzades en l'estimació de la funció característica conjunta.

Model \ M	200	500	1000	2000
H	>>	36,7%±5,79	17,3%±2,21	8,42%±0,85
P	11,05%±2,11	5,35%±1,04	3,66%±0,46	3,15%±0,39
MV	>>	12%±2,29	4,07%±0,82	1,46%±0,26

Taula 5.10 Errors en l'estimació de la FDP conjunta de dues v.a., z i x , no independents i no conjuntament Gaussians, assolits per diferents estimadors: Histograma, Periodograma i Mínima Variància amb paràmetres iguals als de (Gràf.5.15). L'error representa l'EQM (30 realitzacions independents) de l'estimació en % respecte del valor quadràtic de la FDP real. El valor M representa el nombre de mostres de la v.a. x que s'han utilitzat per a l'obtenció dels estimadors. El símbol ">>" s'ha utilitzat per denotar un EQM major que el 100%.

Tal i com es pot apreciar a la següent figura (Gràf.5.15(a)) la FDP conjunta real consisteix en una sèrie d'el·lipses concèntriques que estan deformades seguint la no linealitat que representa $g(x)$ (marcada amb una línia discontinua). En les altres tres figures es representa l'aproximació obtinguda per diferents mètodes (H, P i MV) a partir de 1000 mostres de cada v.a., x i z , i on a cada títol s'han inclòs els respectius errors quadràtics (en % respecte el valor quadràtic de la FDP real).



Gràfica 5.15 FDP real (a) i estimació de la FDP conjunta de x i z mitjançant diferents mètodes: Histograma (b), Periodograma (c) i Mínima Variància (d). En aquests dos darrers els respectius ordres en l'estimació de la funció característica conjunta han estat de $P_1=P_2=11$, mentre que les freqüències principals associades a cada v.a. són de $\omega_1=2\pi/X_0$, essent $X_0=X_{max}-X_{min}$ per a x , i $\omega_2=2\pi/Z_0$, essent $Z_0=Z_{max}-Z_{min}$ per a z .

Aquesta darrera taula no contempla els resultats obtinguts pels mètodes de MVN i PL, ja que necessiten uns valors de M més elevats ($M>2000$) per tal d'obtenir resultats satisfactoris. Cal destacar que el mal resultat del mètode de MV quan es disposa de 100 mostres és com a conseqüència de que l'estimació de la matriu característica resulta singular força cops de les 30 realitzacions pel fet de tractar-se d'una matriu de 121×121 i només es disposa de 100 mostres per a estimar-la. Aquest fet es soluciona baixant els ordres P_1 i P_2 a uns valors menors. Per

altra banda, i pels altres valors de M , el comportament dels diferents mètodes presentats és similar als altres casos.

5.4 Conclusions

En aquest capítol s'ha mostrat com el model de Fourier és una eina adequada pel disseny del SNLs, especialment per a disseny adaptatiu (tot i que això depèn del SNL concret amb el que ens enfrontem). D'alguna manera s'ha pretès reflexar el comportament de totes les possibilitats que ofereix el model. Per a això, s'ha escollit un problema d'identificació que ens ha permès testejar tant el model amb memòria com sense memòria, en aquest darrer cas s'ha comparat també el model d'implementació directa amb el basat en una arquitectura lattice, i també s'han testejat les versions simplificades del model que es poden considerar en presència de simetries (en lloc d'exponencials complexes, utilitzar funcions senoidals o cosenoidals). En aquest sentit, s'ha comprovat que aquestes darreres versions del model de Fourier ofereixen els mateixos resultats que el model general amb exponencials, però amb un cost computacional força més baix. Per altra banda, el model de Fourier-Lattice, només vàlid pel cas sense memòria, s'ha vist com presenta els mateixos resultats que el model de Fourier amb exponencials en un disseny en bloc (signe inequívoc de que equivalen a la mateixa estructura), mentres que en un disseny adaptatiu té una variància molt menor atesa la característica d'ortogonalitat entre funcions (tot i que a costa d'un nombre més elevat d'operacions per iteració).

Acte seguit d'aquesta part dedicada al model de Fourier com a model de SNLs, s'han mostrat certs resultats obtinguts pels estimadors espectrals presentats al capítol 4 aplicats però a l'estimació de funcions densitat de probabilitat de variables aleatòries contínues. S'han presentat simulacions tant pel cas d'una sola variable com pel cas multivariable, concretament i sense pèrdua de generalitat el cas bidimensional. Pel que fa al cas univariable, s'ha optat per presentar resultats sobre una v.a. Gaussiana així com per a una variable aleatòria no normal, en un intent de copçar el comportament dels mètodes en una situació molt típica (com és el cas de variables normals) i en un cas menys comú, cas no Gaussià. Per altra banda, en el cas bidimensional s'ha volgut avaluar el cas de variables aleatòries conjuntament Gaussianes, així com el cas de dues variables dependents, que sembla una situació interessant en vistes de possibles aplicacions. En totes aquestes simulacions s'ha vist com els mètodes d'estimació espectral, fent referència bàsicament al mètode de Mínima Variància que sembla, en vista dels resultats experimentals trobats, tenir un comportament asimptòticament no esbiaixat i consistent, útil per a situacions en que el nombre de mostres de la/les variable/s aleatòria/es és baix. Tot i que no s'ha realitzat un estudi seriós de comparació amb d'altres mètodes d'estimació de funcions densitat de

probabilitat, el que sí que s'ha pretès és mostrar els trets més importants d'aquests mètodes mitjançant aquesta selecció d'exemples, que considerem força generals.

5.5 Referències

- [Pag94] Pagès-Zamora A., Lagunas M.A., "Non-linear equalization for non-minimum phase channels", *CEE-COST #229, Proc. of the Workshop on Adaptive Systems, Intelligent Approaches, Massively Parallel Computing, and Emerging Techniques in Signal Processing and Communications*, Vigo, Spain, pp. 237-240, Octubre 1994.
- [Pag95] Pagès-Zamora A., Lagunas M.A., "New Approaches in Non Linear Signal Processing: Estimation of the Probability Density Function by Spectral Estimation Methods", *Proc. IEEE-ATHOS Workshop on Higher-Order Statistics*, pp.204-207, Aiguablava, Girona, Spain, June 1995.
- [Pag96a] Pagès-Zamora A., Lagunas M.A., "Joint Probability Density Function Estimation by Spectral Estimate Methods", *Proc. ICASSP'96*, Vol. 5, pp.2936-2939, Atlanta, Georgia, USA, Maig 1996.
- [Pag96b] Pagès-Zamora A., Lagunas M.A., Jiménez T., "Memoryless Predistortion of Nonlinear Amplifiers Based on Fourier Series Based Models", *Proc. IEEE-SSAP'96 Workshop*, pp.375-378, Corfu, Greece, Juny 1996.
- [Pag96c] Pagès-Zamora A., Lagunas M.A., "Nonlinear Signal Processing From Fourier Series Based Models", *Pendent de publicació a IEEE Trans. on ASSP*, Juny 1996.
- [Pap65] Papoulis A., *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, USA, 1965.
- [Pro92] Proakis J.G., Rader C.M., Ling F., Nikias C.L., *Advanced Digital Signal Processing*, Pacmillan Publishing Company, NY, 1992.
- [Sto95] Stonick J.T. *et al.*, "Memoryless Polynomial Adaptive Predistortion", *Proc. IEEE-ICASSP'95*, Detroit, Michigan, USA, pp.981-984, Maig 1995.

Capítol 6

Conclusions i futures línies de recerca

L'èxit del model de Volterra com a model de sistemes no lineals es fonamenta, essencialment, en tres aspectes. Per una banda està el caràcter general del model que permet, mitjançant l'increment de l'ordre i/o memòria, representar un ampli ventall de sistemes no lineals diferents. En segon lloc està la seva estabilitat, bàsicament garantida pel fet de que la construcció del senyal de sortida depèn exclusivament del senyal d'entrada (valor actual i també anteriors). En darrer lloc, està la dependència lineal en termes dels coeficients, cosa que permet l'ús de mètodes de disseny de sistemes lineals, tant en bloc com adaptatiu, en l'entorn de sistemes no lineals modelats mitjançant els sistemes de Volterra.

Per contra, les seves principals limitacions radiquen en l'elevat nombre de coeficients que requereixen certes aplicacions, així com també l'alta correlació existent entre les funcions polinòmiques que el model de Volterra utilitza com a espai de dades. Aquestes dues característiques condicionen enèrmement el comportament del model en un disseny adaptatiu, camp on, per altra banda, s'ha desenvolupat més significativament. En aquest cas, apareix un fort compromís envers el cost computacional requerit i les prestacions en l'error assolit per l'aproximació. Per una banda, atès l'elevat nombre de coeficients del model, els mètodes adaptatius de gradient són a priori preferits pel seu baix cost computacional en termes del nombre de coeficients. Aquesta opció es desestima sovint per les baixes prestacions que

ofereixen aquests algorismes com a conseqüència de l'alta correlació entre les funcions polinòmiques que enlenteix enèrmeent l'aprenentatge dels coeficients. En aquest sentit, també és rellevant el fet que la dispersitat en les potències (o norma) de les diferents funcions polinòmiques del model de Volterra dificulta l'elecció dels paràmetres dels algorismes adaptatius de gradient (concretament, la constant de pas).

En aquesta tesi s'ha presentat un model de sistemes no lineals basat en la sèrie de Fourier. Es tracta d'un model que conserva els principals avantatges citats anteriorment del model de Volterra, és a dir, generalitat, estabilitat i dependència lineal envers els coeficients. Tot i que el ritme de creixement del nombre de coeficients del model de Fourier en funció de l'ordre i memòria del mateix experimenta un creixement lleugerament superior al del model de Volterra, tots dos es mantenen dins els mateixos ordres de magnitud i per tant es pot assegurar que la complexitat d'ambdós models és comparable. De totes maneres, l'aportació més important d'aquest model consisteix en el bon condicionament de la matriu d'autocorrelació que apareix en un disseny d'error quadràtic mig mínim, com a conseqüència de la seva estreta relació amb la funció característica del senyal d'entrada. Això permet obtenir bons resultats en un disseny adaptatiu amb algorismes de gradient, sense la necessitat de recórrer a algorismes recursius ja que les funcions exponencials complexes que utilitza el model de Fourier, en general, estan menys correlades que les funcions polinòmiques del model de Volterra. A més a més, la poca dispersitat en la norma de les funcions que utilitza el model de Fourier (les exponencials complexes tenen norma unitat) facilita l'elecció de la constant de pas en el disseny de l'algorisme adaptatiu.

Per una altra banda, però sota el nostre punt de vista igualment important per tal de consolidar el model de Fourier com a eina útil en el processament no lineal del senyal, també s'ha comprovat com el model de Fourier resulta ésser un model versàtil i capaç d'adequar-se a diverses problemàtiques. Per una banda s'han presentat les versions simplificades del model que, pel que fa a cost computacional, són preferibles en presència de sistemes no lineals que presentin simetries de tipus parell o senar. En el capítol dedicat a les simulacions s'ha pogut comprovar com aquestes versions són capaces de proporcionar les mateixes prestacions que el model general, tot i que certes propietats com la relació entre matriu d'autocorrelació i funció característica o la propietat de norma unitària de les funcions ja no es mantenen.

En aquest mateix sentit, també s'ha presentat una versió que representa una implementació no directa del model de Fourier amb exponencials, realitzant un procés d'ortogonalització de les funcions exponencials que, tal i com s'ha pogut veure a les simulacions, presenta unes propietats de convergència superiors respecte de la versió directa sota un disseny adaptatiu. Atès que l'arquitectura resultant guarda una estreta relació amb la implementació lattice d'un filtre FIR, s'ha optat per anomenar-lo model de Fourier-Lattice. És

important destacar que aquest desenvolupament només s'ha presentat pel cas sense memòria, de manera que una futura línia de recerca podria consistir en la implementació no directa del model de Fourier amb exponencials amb memòria. De fet, pel cas del model de Volterra amb memòria ja existeixen arquitectures que orthogonalitzen les funcions polinòmiques utilitzant el que es coneix pel nom d'estructures multicanal. Aquestes mateixes estructures serien útils en el desenvolupament d'un model de Fourier amb memòria que integrés una orthogonalització de les funcions exponencials.

El fet de que la matriu que sorgeix en un disseny d'error quadràtic mig mínim del model de Fourier guardi una semblança a nivell funcional tant important amb la matriu d'autocorrelació que sorgeix en el disseny d'un filtre MA (enlloc de funció d'autocorrelació apareix la funció característica), reforçat per l'arquitectura lattice que en resulta de l'ortogonalització de les funcions exponencials, va motivar el quart capítol dedicat íntegrament a aquesta relació i a les possibilitats que ofereix. El paral·lelisme establert més rellevant sorgeix del fet de que la funció densitat de probabilitat del senyal d'entrada (vist com a una variable aleatòria) desenvolupa un paper en el model de Fourier talment com si es tractés de la densitat espectral de potència del procés d'entrada a un sistema lineal MA. En aquest sentit, s'ha comprovat com el fet de disposar a l'entrada d'un senyal amb una funció densitat de probabilitat uniforme, fa que el disseny del model de Fourier es simplifiqui com a conseqüència de l'ortogonalitat en la que cauen les funcions exponencials, a l'igual que succeeix en el disseny d'un filtre MA quan el senyal d'entrada té una densitat espectral de potència plana o blanca.

El profit però, més important que s'ha pogut extreure d'aquesta relació, és la possibilitat d'aplicar mètodes d'estimació espectral ja desenvolupats amb anterioritat, a l'estimació de la funció densitat de probabilitat del senyal d'entrada vist com a una variable aleatòria. La formulació variacional del problema ens condueix a una solució que és implementable amb un model de Fourier, fet que reforça la semblança anteriorment establerta. Potser la contribució més original en aquest sentit ha estat la possibilitat que ofereixen certs mètodes d'estimació espectral (bàsicament, s'han obtingut bons resultats utilitzant el mètode de mínima variància) a l'estimació de funcions densitat de probabilitat conjuntes pel cas de múltiples variables aleatòries. També resulta interessant la notació matricial i vectorial de l'estimació que ajuda a una possible quantificació del cost computacional de la solució proposada i també obre possibles vies d'estimació recursiva.

De totes maneres, també s'ha discutit el fet de que el paral·lelisme entre funció densitat de probabilitat i densitat espectral de potència no és absolut, i en aquest sentit s'ha vist com, en principi, mètodes superresolutius de detecció de senoides no poden ésser utilitzats per a l'estimació de variables aleatòries discretes, cosa que podria ésser d'utilitat en l'entorn de comunicacions digitals. La principal raó radica en el fet de que les funcions densitat de

probabilitat de dues variables aleatòries independents (diguem-ne, senyal+soroll) sumades es convolucionen, fet que provoca una distorsió multiplicativa de llurs funcions característiques. Això impedeix la definició d'un espai de senyal sumat a la contribució d'un espai de soroll en termes de la funció característica (tal i com passa amb la matriu d'autocorrelació), i el posterior ús de mètodes superresolutius basats en la descomposició en valors singulars de la matriu característica resultant. En aquest sentit, sorgeix una segona línia de recerca ja que aquesta distorsió multiplicativa que pateixen les funcions característiques i que impedeix la subdivisió en un espai de senyal i un de soroll, es podria superar utilitzant una transformació logarítmica de dita funció característica. En aquest supòsit, la mescla seria additiva de manera que es podrien desenvolupar els mètodes superresolutius en aquest espai i després desfer la transformació logarítmica únicament sobre la part que conté la informació de senyal i no de soroll.

A grans trets, i de manera resumida, aquesta és la tasca que s'ha desenvolupat a la present tesi juntament amb possibles futures línies de recerca que sorgeixen de la mateixa.