



Universitat Politècnica de Catalunya

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació

**EFFECTOS DE LA TURBULENCIA ATMOSFÉRICA  
EN LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.**

Aniceto Belmonte Molina

Director: Adolfo Comerón Tejero

Tesis doctoral presentada en la Universitat Politècnica de Catalunya.

Febrero de 1995

Universitat Politècnica de Catalunya

Departament de Teoria del Senyal i Comunicacions

Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació

**EFFECTOS DE LA TURBULENCIA ATMOSFÉRICA  
EN LA PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS.**

Aniceto Belmonte Molina

Director: Adolfo Comerón Tejero

Tesis doctoral presentada en la Universitat Politècnica de Catalunya.

Febrero de 1995

**A mis Padres.**

Este trabajo se ha desarrollado parcialmente dentro del proyecto CICYT ESP 978/90, de las Acciones Integradas Hispano-Francesas HF287 y HF250B, y de los contratos de la Agencia Espacial Europea 8131/88/NL/DG, 8973/90/NL/SG (bajo subcontrato de CRISA) y 114918 (Purchase Order).

## AGRADECIMIENTOS

Quisiera mostrar mi agradecimiento hacia los miembros del grupo que hicieron posible, con su apoyo y experiencia, la realización de este trabajo. Y fueron todos.

Adolfo Comerón fue durante todos estos años un ejemplo de metodología y capacidad de trabajo. Su revisión crítica del manuscrito, necesariamente lenta por tediosa, mostró que un buen técnico no tiene porque ser un mal literato.

El trabajo experimental, más que ningún otro, necesita de la labor de equipo. Aunque fueron varias las personas que colaboraron en el desarrollo y puesta a punto de los sistemas de medida, tengo una deuda especial con Juan Antonio Rubio por la dedicación que siempre mostró. De igual modo con Belén Velasco, quién soportó estoicamente las largas sesiones de medida.

El temible Jordi Romeu, el incisivo Alfredo Cano o el amigo Xavier Fàbregas son ejemplos de la gente especial que uno se puede encontrar en nuestro grupo. Desde luego, no todo el mundo puede tener la misma suerte.

## ÍNDICE

1	Introducción . . . . .	1
2	La turbulencia atmosférica . . . . .	3
	2.1 Introducción . . . . .	3
	2.2 Descripción de la turbulencia atmosférica . . . . .	3
	2.3 Modelos para la turbulencia atmosférica . . . . .	7
3	Propagación a través de la turbulencia . . . . .	13
	3.1 Introducción . . . . .	13
	3.2 Método de Rytov . . . . .	17
	3.3 Teoría heurística . . . . .	27
	3.4 Teoría asintótica . . . . .	36
	3.5 Simulación de la propagación de ondas . . . . .	45
4	Datos experimentales para un enlace óptico en la atmósfera turbulenta . .	61
	4.1 Introducción . . . . .	61
	4.2 Correlación de las fluctuaciones de intensidad . . . . .	65
	4.3 Espectros de frecuencia de las fluctuaciones de intensidad . . . . .	70
	4.4 Distribución de probabilidad de las fluctuaciones de intensidad . . . .	77
	4.5 Fluctuaciones del ángulo de llegada . . . . .	94
5	Análisis estadístico de un sistema receptor multiapertura en un enlace atmosférico . . . . .	107
	5.1 Introducción . . . . .	107
	5.2 Pérdidas asociadas a las fluctuaciones de potencia . . . . .	109
	5.3 Pérdidas asociadas a las fluctuaciones del ángulo de llegada . . . . .	121
	5.4 Funcionamiento de un sistema multiapertura . . . . .	143
6	Conclusiones . . . . .	149
	Referencias . . . . .	151



## CAPITULO 1

### INTRODUCCIÓN

Las inhomogeneidades o desviaciones aleatorias en torno a su valor medio son una característica importante del índice de refracción atmosférico. Como consecuencia de ellas, y junto a los efectos de dispersión y a las pérdidas de energía asociadas a la absorción, cualquier onda electromagnética que se propaga en la atmósfera sufre distorsiones en la amplitud y la fase. Esto explica fenómenos tan conocidos como el centelleo de las estrellas, la reducción drástica de la resolución angular de los instrumentos formadores de imágenes a través de la atmósfera o el desvanecimiento de las señales en cualquier sistema de comunicaciones ópticas que opere en el medio turbulento.

Muchos años de observación han conducido a un conocimiento cualitativo de todos estos fenómenos. Sin embargo, la naturaleza aleatoria de las fluctuaciones del índice de refracción da lugar a campos electromagnéticos también aleatorios que exigen un tratamiento estadístico complejo de los procesos y que, hasta el momento, ha impedido una descripción cuantitativa completamente satisfactoria. De todos modos, la teoría de la propagación de ondas, creada para predecir los momentos estadísticos de los campos aleatorios, ha visto progresos considerables en los últimos años, gracias tanto al desarrollo de nuevos planteamientos teóricos, sólidamente fundamentados en estudios experimentales, como al uso de técnicas numéricas de simulación, propiciadas por la potencia de cálculo a la que se tiene acceso en la actualidad.

En el capítulo 2 se presenta un resumen introductorio a la teoría sobre las inhomogeneidades atmosféricas (turbulencia). Se discuten los principales parámetros y funciones que describen las fluctuaciones aleatorias del índice de refracción, y las relaciones que se establecen con las características climáticas y geográficas del escenario de la propagación.

En el capítulo 3 se muestran los desarrollos teóricos más importantes de los que abordan la problemática de la propagación de ondas a través de la atmósfera turbulenta. La aproximación de Rytov, la teoría heurística, el método de los momentos y las simulaciones numéricas se presentan como soluciones a la misma ecuación de ondas parabólica, estableciéndose las limitaciones que cada una de ellas pretende superar de

la anterior. Se presta especial atención a la agrupación y sistematización de la notación utilizada, algo que se hecha de menos en la bibliografía disponible al respecto.

El capítulo 4 evalúa las conclusiones a las que nos conducen los desarrollos del capítulo anterior mediante un estudio experimental de la propagación de haces láser en la atmósfera. Tras clarificar los procedimientos de medida y análisis utilizados, se muestran resultados sobre correlaciones espaciales, espectros temporales de potencia y estadísticas para las fluctuaciones tanto de intensidad como de fase (ángulo de llegada).

Reflejo de la actividad desarrollada en el ámbito de proyectos contratados por la Agencia Espacial Europea (ESA) para estudiar, teórica y experimentalmente, la idoneidad de la climatología y las características geográficas de las Islas Canarias para el establecimiento de una estación óptica terrena que controle los sistemas embarcados en satélites de comunicaciones, en el capítulo 5 se aplica todo lo visto anteriormente al análisis estadístico de un sistema receptor en un enlace atmosférico. Se considera la posibilidad de que el receptor posea más de una apertura colectora de potencia y, función de su configuración espacial, se estudian tanto las fluctuaciones de intensidad como de fase para establecer la estadística de la señal recibida. Esto nos permitirá establecer las condiciones bajo las cuales un sistema multiapertura es preferible a una única apertura receptora.

## CAPITULO 2

# LA TURBULENCIA ATMOSFÉRICA

### 2.1 Introducción.

Las magnitudes macroscópicas de la atmósfera, tales como velocidad y dirección del viento, humedad y temperatura, sufren fluctuaciones. La complejidad de los fenómenos que las caracterizan hace imposible una descripción determinista y obliga a observarlas como procesos estocásticos. Asociadas a ellas, aparecen perturbaciones del índice de refracción atmosférico que, por lo general, son difíciles de medir. Estas fluctuaciones del índice de refracción son las que determinan las distorsiones de una onda propagándose en la atmósfera. Este capítulo estudia los parámetros más influyentes en la aparición de las fluctuaciones en el índice atmosférico, así como sus características espaciales.

### 2.2 Descripción de la turbulencia atmosférica.

Una descripción completa y rigurosa de los conceptos fundamentales en la teoría de la turbulencia atmosférica puede encontrarse en Tatarskii (1971) e Ishimaru (1978). Limitémonos, pues, a una sucinta introducción al problema.

La atmósfera es un fluido caracterizado por un número de Reynolds  $Re$  grande. Este parámetro viene dado por

$$Re = \frac{Vl}{\nu} \quad (2.1)$$

donde  $V$  y  $l$  son la velocidad y tamaño característicos del fluido y  $\nu$  su viscosidad cinemática. Cuando  $Re$  es mayor que un cierto valor crítico  $Re_{cr}$ , el movimiento del fluido pasa a ser turbulento. En este caso, al contrario que en un fluido laminar, donde la velocidad es una función determinista, el fluido turbulento está caracterizado por una velocidad descrita por una función aleatoria de la posición y el tiempo.

Kolmogorov (1941) avanzó las hipótesis básicas que permitieron introducir

simplificaciones en la descripción de la turbulencia y una interpretación sencilla del fenómeno. Según éstas, la energía de la turbulencia es generada por las variaciones con una gran escala espacial en la velocidad media del fluido: esta escala espacial se conoce como margen de energía. Los grandes remolinos que aparecen están influidos por sus características geométricas y, a consecuencia de ello, no podemos considerarlos isotrópicos. El tamaño medio  $L_o$  de estas remolinos se conoce como escala externa de la turbulencia.

Los remolinos mayores que  $L_o$  son, generalmente, anisótropos, pero en regiones menores que  $L_o$  la turbulencia puede ser considerada localmente isotrópica y homogénea. Aquí, la energía de los remolinos grandes es transferida a los remolinos menores por fragmentación, proceso que continúa hasta que el número de Reynolds de los remolinos generados pasa a ser menor que  $Re_{cr}$ . El tamaño característico  $l_o$  de estos torbellinos se conoce como escala interna de la turbulencia.

El proceso de turbulencia para remolinos menores que  $l_o$  está dominado por la disipación de energía cinética en calor mediante rozamientos internos (viscosidad). Por ello, a esta región se la conoce como margen de disipación. A la región de escalas espaciales entre los márgenes de energía y disipación se le conoce como margen inercial.

La velocidad no es la única función de la posición y el tiempo con un comportamiento aleatorio. Temperatura, humedad, presión y otras características del aire sufren fluctuaciones debido a la turbulencia. Como consecuencia de todo ello, aparecen también fluctuaciones en el índice de refracción, las cuales determinan las propiedades estadísticas de la onda propagándose en la atmósfera terrestre. Aunque las fluctuaciones de humedad pueden llegar a ser importantes, por lo general, tanto ellas como las fluctuaciones de presión pueden ser ignoradas. Bajo esta simplificación, las fluctuaciones en el índice de refracción  $n$  pueden considerarse proporcionales a las fluctuaciones de temperatura  $T$  (Hufnagel, 1978):

$$n = 78 \frac{P}{T_o^2} \times 10^{-6} T \quad (2.2)$$

donde  $P$  es la presión local del aire,  $T_o$  la temperatura absoluta media y  $T = T' - T_o$  describe las fluctuaciones de temperatura. Si denotamos con  $n_o$  al valor medio del índice de refracción atmosférico y con  $n'$  al valor instantáneo, las fluctuaciones de interés resultan  $n = n' - n_o$ .

### 2.2.1 Espectros para las fluctuaciones del índice de refracción.

La dispersión que introduce el medio sobre la onda propagada no depende sólo del valor medio de las fluctuaciones  $n$ . Como los procesos turbulentos con dimensiones menores que la escala externa se consideran homogéneos e isotrópicos, podemos

introducir la función de correlación de las fluctuaciones del índice de refracción como una medida del tamaño de una irregularidad típica del medio:

$$B_n(r) = \langle n(0) n(r) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(K) e^{-jKr} dK \quad (2.3)$$

Aquí,  $\langle \rangle$  denota el promediado de conjunto y  $\Phi_n(K)$  es el espectro espacial de las fluctuaciones del índice de refracción.

Asumiendo que la forma del espectro de fluctuaciones de temperatura, y por tanto del índice de refracción, es igual a la del espectro de velocidades, Kolmogorov (1961) usa la siguiente expresión para  $\Phi_n(K)$  :

$$\Phi_n(K) = 0.033 C_n^2 K^{-\frac{11}{3}} \quad (2.4)$$

donde la llamada constante de estructura del índice de refracción,  $C_n^2$ , nos caracteriza la intensidad de las fluctuaciones del índice de refracción. La ecuación es una mala aproximación para escalas grandes o pequeñas, es decir fuera del rango inercial  $(2\pi/L_0) \leq K \leq (2\pi/l_0)$ , dominado por el proceso de transferencia de energía mencionado previamente

Como ya se comentó, para torbellinos de tamaño menor que la escala interna  $l_0$ , la energía de la turbulencia se disipa por efectos de viscosidad. La evidencia de que el espectro en esta región debe caer más rápidamente que  $K^{-11/3}$  hace que Tatarskii (1971) proponga modificar el espectro de Kolmogorov a través de un decaimiento gaussiano para las escalas más pequeñas

$$\Phi_n(K) = 0.033 C_n^2 K^{-\frac{11}{3}} e^{-\frac{K^2}{K_m^2}} \quad (2.5)$$

donde  $K_m = 5.92/l_0$ . Con ello consigue que la expresión sea también una aproximación razonable para  $K \geq K_m$ .

Para los dos espectros anteriores se observa una singularidad en el origen. Como consecuencia, la energía asociada a remolinos mayores que  $L_0$  es más grande de lo aceptable. Para evitar esta dificultad, algunas aplicaciones utilizan el espectro modificado de Von Kármán (Strohbehn, 1968):

$$\Phi_n(K) = 0.033 C_n^2 (K^2 + K_0^2)^{-11/6} e^{-K^2/K_m^2} \quad (2.6)$$

con  $K_0 = 2\pi/L_0$ . Como los anteriores, este espectro presenta un comportamiento correcto únicamente sobre el rango inercial:  $K^{-11/3}$  (figura 2-1). Sin embargo, fuera de este rango no posee ningún fundamento físico. Por ello, éste sólo puede ser usado como indicador de los efectos de  $L_0$  y  $l_0$  en la estadística de la propagación.

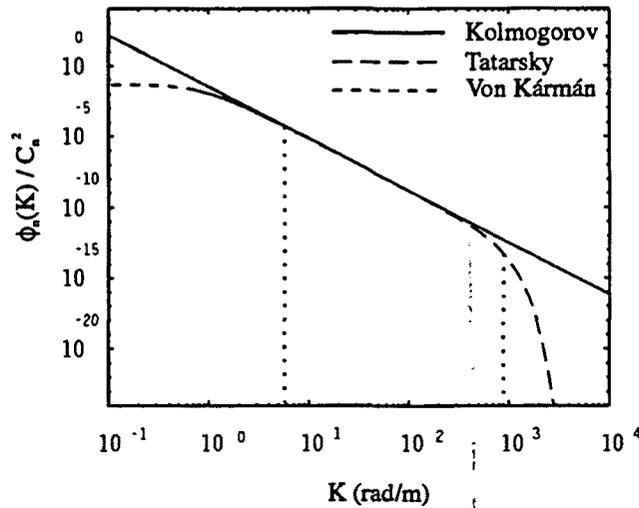


Fig. 2-1. Espectros para las fluctuaciones del índice de refracción.

Por último, Hill y Clifford (1978) presentaron una modificación a estos espectros basada en observaciones experimentales que mostraban la forma de la parte alta del espectro de fluctuaciones, precisamente la porción de éste que más fuertemente afecta a la propagación óptica en la atmósfera. Estas medidas revelaron que, para frecuencias espaciales elevadas, el espectro decrece menos rápidamente de lo predicho por la ley  $K^{-11/3}$ . Este espectro para el índice de refracción puede ser expresado como:

$$\Phi_n(K) = 0.033 C_n^2 K^{-11/3} F(Kl_0) \quad (2.7)$$

donde la función  $F(Kl_0)$  es igual a uno para valores muy pequeños de  $Kl_0$  y tiende a cero cuando  $Kl_0$  es mucho mayor que la unidad. Puede ser aproximada por (Churnside, 1990):

$$f(Kl_0) = \exp(-1.29K^2l_0^2) + 1.45 \exp[0.97 (\ln Kl_0 - 0.452)^2] \quad (2.8)$$

La expresión equivalente de  $F(Kl_0)$  para el espectro más tradicional de Tatarskii es  $\exp[-(Kl_0/5.9)^2]$ . Si representamos ambas funciones (figura 2-2) podemos observar la protuberancia para las altas frecuencias característico del espectro de Hill. Se ha establecido que estas predicciones son compatibles con el comportamiento atmosférico, lo que no ocurre con los espectros tradicionales (Hill, 1992).

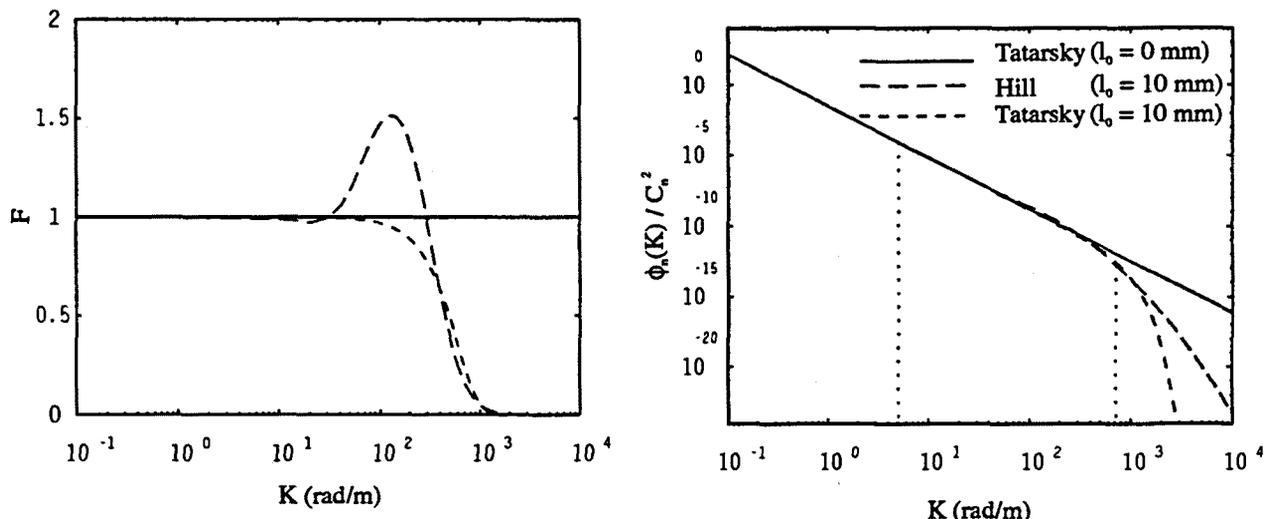


Fig. 2-2. Espectros del índice de refracción para diferentes valores de la escala interna  $l_0$ . La línea continua es para el espectro de Hill y la rayada para el espectro de Tatarskii.

Hasta aquí, hemos discutido la forma del espectro de fluctuaciones del índice de refracción de la atmósfera y nos hemos referido de forma genérica a los parámetros que la caracterizan:  $l_0$  y  $L_0$ , entre los cuales se define el rango inercial con una dependencia espectral de  $K^{-11/3}$ , y el parámetro de estructura del índice de refracción  $C_n^2$ , como medida de la intensidad de las fluctuaciones del índice. Aunque todos estos parámetros son ajustables a las condiciones particulares del medio que consideremos, en la mayoría de situaciones prácticas el valor de  $C_n^2$  es crítico para la correcta modelización de la atmósfera. Consideremos en detalle este parámetro.

### 2.3 Modelos para la turbulencia atmosférica.

La correcta estimación del funcionamiento de un sistema óptico en la atmósfera necesita del conocimiento y empleo de las representaciones apropiadas de la turbulencia y, en particular, dada su importancia, de la constante de estructura del índice de refracción,  $C_n^2$ . Ello hace necesario presentar modelos que describan la turbulencia en la atmósfera, teniendo siempre presente que los límites de validez de éstos vendrán determinados por la comparación con medidas.

Dos características fundamentales podemos encontrar en los modelos usuales: en primer lugar, estos modelos representan un valor medio de  $C_n^2$ , pudiendo oscilar los valores instantáneos hasta un orden de magnitud en torno al valor predicho. Por otro lado, los modelos presuponen la estratificación de la turbulencia atmosférica; así, un perfil típico de  $C_n^2$  presentará capas con un grosor variable entre unos pocos y centenares de metros.

Debido a los diferentes regímenes dinámicos de la atmósfera, se observa un

margen de algunos órdenes de magnitud para la turbulencia atmosférica: desde  $10^{-12} m^{-2/3}$  cerca de la superficie, hasta  $10^{-20} m^{-2/3}$  en las capas superiores de la estratosfera. Esto hace necesario el modelar la dependencia de la turbulencia con la altura en dos pasos: uno, turbulencia cerca del suelo; y dos, turbulencia en atmósfera libre. Es decir, consideramos la turbulencia por debajo de la primera capa de inversión térmica de la atmósfera, donde los efectos del terreno no son despreciables y, a continuación, el comportamiento de  $C_n^2$  por encima de esta capa, alturas para las cuales se está aislado de toda perturbación que pudiera introducir el terreno. Es necesario considerar una segunda capa estructuralmente diferente: la capa superficial, es decir, las primeras decenas de metros sobre la superficie terrestre. El movimiento de aire en esta capa está principalmente controlado por la fricción con la superficie, efecto que se extienden al resto de la atmósfera por mezcla turbulenta.

### 2.3.1 Turbulencia por debajo de la primera capa de inversión.

La interacción del suelo con el aire es muy compleja y depende de multitud de parámetros difíciles de cuantificar (figura 2-3).

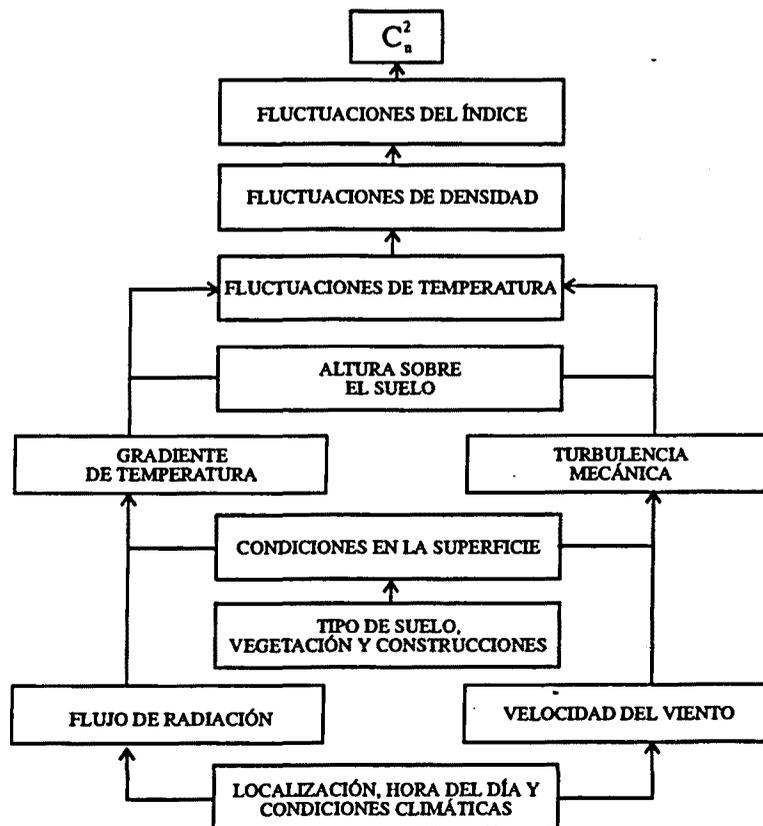


Fig. 2-3. Parámetros del suelo y relación con la turbulencia.

El proceso físico fundamental implicado en la aparición de la turbulencia es mecánico: comportamientos no laminares de las corrientes de aire que ocasionan la agitación de la atmósfera. La fricción del viento con el terreno, por un lado, y el hecho de que este último actúa como una fuente térmica generadora de corrientes de convección, por otro, producen la inestabilidad atmosférica expresada como fluctuación de magnitudes como presión de vapor de agua, temperatura, etc. (Lumley y Panofsky, 1965). La turbulencia aparece como consecuencia de una mezcla incompleta de estas cantidades atmosféricas y la consecuente aparición de inhomogeneidades espaciales. Cuando la mezcla térmica se completa, las inhomogeneidades locales desaparecen y, con ellas, la turbulencia atmosférica.

Por lo general, los modelos para la turbulencia atmosférica cerca del suelo comienzan por valorar la constante de estructura  $C_n^2$  para una altura de referencia función de los parámetros dados en la figura 1.3a. A continuación, se establecen dependencias de  $C_n^2$  con la altura válidas en términos generales para cualquier conjunto de valores de los parámetros anteriores. La combinación de los dos resultados anteriores permite establecer modelos para el perfil de  $C_n^2$  a lo largo de un trayecto de propagación.

Los procesos que ocasionan la agitación térmica son fuertemente dependientes de la hora del día; piénsese por ejemplo, en el suelo como fuente térmica: durante el día hay capas frías sobre el suelo caliente y, por el contrario, por la noche el aire está más caliente que el suelo. Esto provoca que  $C_n^2$  se defina sobre un rango de valores que varía en varios órdenes de magnitud a lo largo de un mismo día. La imposibilidad de desarrollar un modelo lo suficientemente general, válido para todas las condiciones, obliga a considerar por lo menos tres casos diferenciados: día, noche y la transición entre ambos.

#### a) Turbulencia diurna.

La turbulencia diurna es producida por el calentamiento del suelo por el sol. Esto crea condiciones de inestabilidad que conducen a corrientes de convección y penachos ("plumes") térmicos. En promedio, la turbulencia  $C_n^2$  decrece con la altura sobre el terreno como  $h^{-4/3}$  si  $h$  es lo suficientemente grande (Wyngaard et al, 1971; Kaynal et al, 1976); pero para valores bajos de  $h$  (capa superficial) el decrecimiento es con  $h^{-2/3}$ . Además, en la base de la primera capa de inversión es frecuente un pico local para  $C_n^2$ , el cual es aproximadamente un orden de magnitud mayor que  $C_n^2$  en la región anterior. Las dependencias  $h^{-4/3}$  y  $h^{-2/3}$  se extienden sólo por debajo de la capa de inversión y no representan la capa en sí. Por ello, ante la falta de resultados teóricos y experimentales, nos vemos obligados a suponer en esta zona una simple dependencia potencial:  $h^a$ . Si denotamos como  $h_s$  la altura de la capa superficial,  $h_i$  la altura de la capa de inversión y  $h_0$  la altura de referencia, estas consideraciones pueden sumarse mediante el siguiente modelo:

$$\frac{C_n^2(h)}{C_n^2(h_0)} = \begin{cases} \left(\frac{h_s}{h_0}\right)^{-4/3} & h \leq h_s \\ \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-4/3} & h_s \leq h_0, h < 0.5h_i \\ 0.5 \frac{h_i}{h_0} & 0.5h_i \leq h < 0.7h_i \\ \left(0.7 \frac{h_i}{h_0}\right)^{-4/3} \left(\frac{1}{0.7} \frac{h}{h_i}\right)^a & 0.7h_i \leq h < h_i \end{cases} \quad (2.9)$$

Expresar de esta forma el funcionamiento de  $C_n^2$  nos permite sustituir el modelo teórico de la turbulencia para la altura de referencia,  $C_n^2(h_0)$ , por una medida en la localización donde se pretende caracterizar la turbulencia. La figura 2.3b muestra el modelo para valores típicos de  $h_s$ ,  $h_i$  y  $C_n^2(h_0)$ . Recuérdese que estos valores representan turbulencias medias y que normalmente observaremos fluctuaciones próximas al orden de magnitud entorno a los valores predichos. Además, dependiendo de las condiciones propias del terreno y la climatología,  $C_n^2(h_0)$  admite valores que se mueven en un rango de varios órdenes de magnitud.

#### b) Turbulencia nocturna.

De noche el aire suele estar más caliente que el entorno, lo que crea condiciones muy estables en la atmósfera. De hecho, sobre el suelo se inicia una fuerte capa de inversión térmica que se extiende sobre varias decenas de metros. De nuevo no resulta sencillo estudiar la turbulencia atmosférica en el interior de la capa de inversión. Sin embargo, cuando no hay viento, o su velocidad es pequeña, podemos asumir que, por encima de los dos metros,  $C_n^2$  es independiente de la altura y tomarla constante sobre toda la capa de inversión. Más allá de esta región, y debido a que de noche la velocidad del viento generalmente suele aumentar con la altura, observamos un rápido decrecimiento como  $h^{-4/3}$  hasta alcanzar valores propios de atmósfera libre (Nieuwstadt, 1984). Una formulación para el modelo nocturno de la turbulencia atmosférica podría ser:

$$\frac{C_n^2(h)}{C_n^2(h_0)} = \begin{cases} \left(\frac{h}{h_s}\right)^{-2/3} & h \leq h_s \\ 1 & h_s \leq h_0, h < h_i \\ \left(\frac{h}{h_i}\right)^{-4/3} & h_i \leq h \end{cases} \quad (2.10)$$

c) Transición día-noche.

Entorno a la hora previa al amanecer o la posterior al atardecer, las temperaturas del aire y el suelo son idénticas, dando lugar a condiciones de estabilidad. Además, es la hora del día en la que el viento sopla con menos fuerza. Así, la ausencia de gradientes de temperatura o viento capaces de producir agitación atmosférica explica que en estos momentos del día la turbulencia alcance sus valores mínimos. Es usual suponer un decrecimiento  $h^{-2/3}$  para  $C_n^2$  (Wyngaard et al, 1971):

$$\frac{C_n^2(h)}{C_n^2(h_0)} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^{-2/3} \quad (2.11)$$

En la figura 2-4 pueden verse los modelos atmosféricos descritos para valores típicos de sus parámetros característicos.

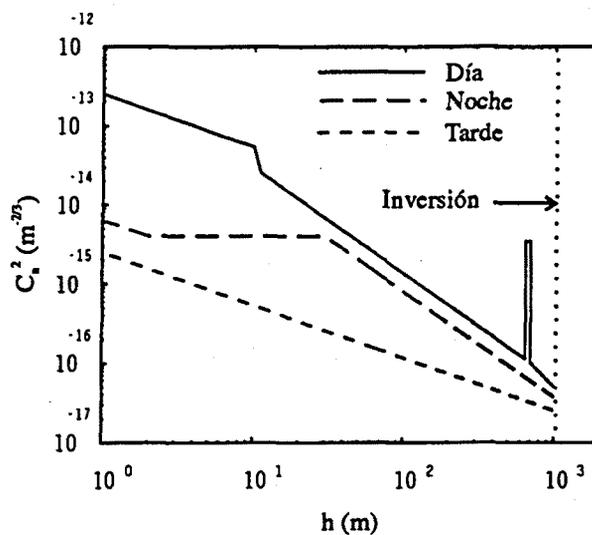


Fig. 2-4. Turbulencia por debajo de la capa de inversión. Diurna:  $h_0=4m$  ;  $C_n^2(h_0) = 10^{-13} m^{-2/3}$  .  
 Nocturna:  $h_s=2m$  ;  $h_i=30m$  ;  $C_n^2(h_0) = 5 \times 10^{-15} m^{-2/3}$  . Transición:  $h_0=4m$  ;  
 $C_n^2(h_0) = 10^{-15} m^{-2/3}$  .

### 2.3.2 Turbulencia en atmósfera libre.

Debido a la complejidad de la dinámica atmosférica, no hay modelos simples que representen la turbulencia por encima de la primera capa de inversión. De hecho, los datos que se poseen son todos empíricos y difícilmente extrapolables a otras localizaciones distintas a aquéllas donde se realizaron las medidas (véase, por ejemplo, Barletti et al, 1973). Aún así, estos resultados han llevado a varios autores a asumir un decrecimiento exponencial de  $C_n^2$  con la altura como base a modelos sencillos de la turbulencia en atmósfera libre (Hufnagel y Stanley, 1964; Fried, 1967). Aunque todos ellos añaden parámetros propios de la localización donde se pretendía caracterizar el  $C_n^2$ , de forma general podemos expresarlos como:

$$C_n^2(\hat{h}) = C_0 \hat{h}^{-b} \exp\left(-\frac{\hat{h}}{\hat{h}_0}\right) + C_1(\hat{h}_p) \delta(\hat{h}-\hat{h}_p) \quad (2.12)$$

Aquí,  $\hat{h}$  es altura sobre el nivel del mar y  $C_1(\hat{h}_p) \delta(\hat{h}-\hat{h}_p)$  representa una contribución impulsional asociada a fuertes corrientes atmosféricas observadas en la tropopausa ('jet stream'); como valores típicos,  $\hat{h}_p = 12 \text{ Km}$  y  $C_1(\hat{h}_p) = 4-5 \times 10^{-13} \text{ m}^{1/3}$ .

Mientras que cerca de la superficie  $C_n^2$  puede variar de día a noche en cuatro o cinco órdenes de magnitud,  $C_n^2$  se mantiene dentro de un orden de magnitud en las capas altas de la atmósfera (figura 2-5). Ello hace innecesario considerar los modelos como una función de la hora del día.

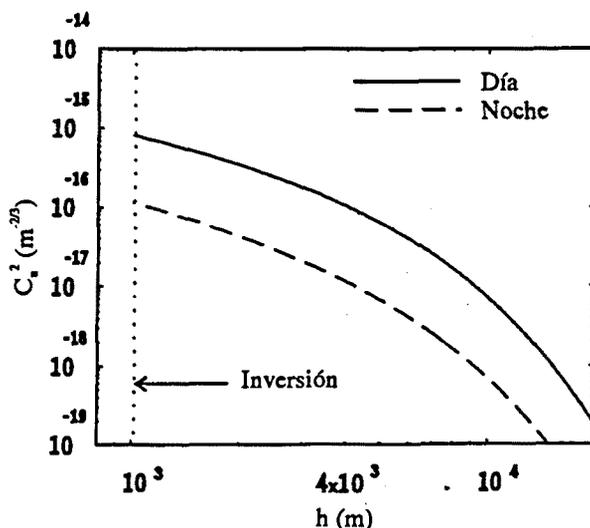


Fig. 2-5. Turbulencia en atmósfera libre. Diurna:  $b=5/6$ ;  $h_0=3200 \text{ m}$ ; ;  $C_0 = 3.6 \times 10^{-13} \text{ m}^{1/6}$  .  
Nocturna:  $b=1$ ;  $h_0=3200 \text{ m}$ ; ;  $C_0 = 1.6 \times 10^{-13} \text{ m}^{-5/3}$  .

## CAPITULO 3

# PROPAGACIÓN A TRAVÉS DE LA TURBULENCIA

### 3.1 Introducción

Cuando estudiamos la propagación de algún tipo de onda electromagnética a través de la atmósfera, nuestros sistemas de recepción pueden detectar fluctuaciones aleatorias, tanto espaciales como temporales, de la amplitud y la fase asociadas. El problema de propagación de ondas en medios turbulentos consiste fundamentalmente en relacionar estas fluctuaciones de amplitud y fase con las del índice de refracción que las causan.

Una vez establecida la ecuación de ondas en la atmósfera, base del análisis matemático de nuestro problema, consideraremos las aproximaciones clásicas a su solución. Tras describir las discrepancias entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas basadas en cualquier técnica perturbativa, y en particular el efecto de saturación en las fluctuaciones de amplitud, examinaremos las diferentes técnicas que tratan de resolver estas divergencias.

#### 3.1.1 Ecuación de ondas atmosférica

El problema que estamos tratando de resolver conlleva el análisis de una ecuación de onda estocástica. Aunque los resultados que presentaremos al respecto pueden encontrarse en la literatura (Strohbehn, 1968; Lawrence y Strohbehn, 1970), suele pasar desapercibido el hecho de que todas las teorías desarrolladas para el estudio de ondas electromagnéticas a través de la atmósfera parten de la misma ecuación de onda (la llamada ecuación de onda parabólica) y, por tanto, hacen uso de las mismas aproximaciones. En este apartado estableceremos una notación compacta que nos servirá para todas las teorías desarrolladas, algo que se hecha a faltar en las referencias consultadas.

Si asumimos que la atmósfera no tiene cargas libres (conductividad nula), que la permeabilidad magnética es constante y que la dependencia temporal de los campos está dada por  $\exp(-j\omega t)$ , la ecuación vectorial de ondas resulta:

$$\nabla^2 \mathcal{E} + k^2 (1+2n) \mathcal{E} + 2\nabla [ \mathcal{E} \cdot \nabla \log(1+n) ] = 0 \quad (3.1)$$

donde  $k=2\pi/\lambda$ , con  $\lambda$  la longitud de onda, y  $n(r)$  representa las fluctuaciones del índice de refracción.

El hecho experimental (Strohbehn y Clifford, 1967) de que las fluctuaciones  $n(r,t)$  sean de variación lenta, tanto espacial como temporalmente, provoca que la turbulencia atmosférica no introduzca efectos de despolarización apreciables en la onda propagada (Tatarskii, 1971). La ausencia de componente despolarizada permite eliminar el último término de la ecuación de onda y, lo que es más importante, sustituir la ecuación vectorial de onda por su equivalente escalar:

$$\nabla^2 \mathcal{E} + k^2(1+2n)\mathcal{E} = 0 \quad (3.2)$$

La dificultad para resolver esta ecuación estriba en la naturaleza aleatoria de  $n(r,t)$ , el cual es un coeficiente del campo  $\mathcal{E}(r,t)$  que pretendemos hallar. El problema se simplifica bajo la asunción crítica, aunque razonable para propagación en la atmósfera, de que el tamaño típico de las irregularidades del índice de refracción  $l$  es mucho mayor que una longitud de onda,  $\lambda \ll l_0$ : si no hay cambios significativos en el índice de refracción sobre distancias del orden de la longitud de onda, no se puede observar retrodifusión en la propagación (Uscinski, 1978); ésta es la situación que describe la turbulencia atmosférica. Si asumimos que la dirección inicial de propagación es a lo largo del eje Z

$$\mathcal{E}(r) = E(r) \exp(jkz) \quad (3.3)$$

las consideraciones anteriores permiten suponer  $|\partial^2 E/\partial z^2| < 2k |\partial E/\partial z|$ ; es decir, al considerar la retrodifusión completamente despreciable, las fluctuaciones del índice de refracción sólo provocan difusión directa con un ángulo de radiación muy pequeño. La "Aproximación de ángulo pequeño" también es referida como "Aproximación parabólica" ya que permite transformar la ecuación de onda completa en una ecuación diferencial de tipo parabólica:

$$\nabla_T^2 E + 2jk \frac{\partial E}{\partial z} + 2k^2 n E = 0 \quad (3.4)$$

donde  $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ . Como veremos a lo largo de este capítulo, esta ecuación es el punto de partida de todas las técnicas que tratan de establecer los efectos de propagación a través de un medio aleatorio como la atmósfera.

Pese a estas simplificaciones, la ecuación de onda no puede resolverse de forma exacta. El hecho de que los campos resultantes sean aleatorios hace que la descripción

obvia se haga a partir de sus propiedades estadísticas; usualmente, se utilizan sus momentos transversales  $\Gamma_n$  de orden uno (media), dos (función de coherencia del campo) y cuatro (correlación de la intensidad):

$$\begin{aligned}\Gamma_1(r_1) &= \langle E(r_1) \rangle \\ \Gamma_2(r_1, r_2) &= \langle E(r_1) E^*(r_2) \rangle \\ \Gamma(r_1, r_2, r_3, r_4) &= \langle E(r_1) E(r_3) E^*(r_2) E^*(r_4) \rangle\end{aligned}\tag{3.5}$$

El problema de determinar estos momentos transversales ha sido considerado mediante el uso de diferentes técnicas. La primera de ellas deduce una expresión para el campo aleatorio en el punto de observación, calculándose los momentos estadísticos a partir de promedios de conjunto de éstos. Ésta es la base de la teoría perturbativa de Rytov (Tatarskii, 1971) y heurísticas (Clifford et al, 1974; Hill, 1982).

En lugar de hallar una buena solución aproximada a las ecuaciones diferenciales para el campo instantáneo y utilizarla para calcular los valores medios, una técnica alternativa es desarrollar, a partir de la ecuación parabólica, ecuaciones diferenciales para los momentos de interés: entre la diversidad de teorías basadas en el método de los momentos, quizás la mejor de las disponibles sea la teoría asintótica (Prokhorov et al, 1975; Frehlich, 1987). Junto a las asunciones adoptadas que han conducido a la ecuación de onda parabólica, el método de los momentos hace uso de otra aproximación crítica a la hora de cerrar las diferentes ecuaciones diferenciales que se plantean. Esta aproximación, usualmente denominada como aproximación de Markov, establece que la función de correlación de las fluctuaciones del índice de refracción,  $B_n(\mathbf{r})$ , se puede como un impulso (delta) de Dirac en la dirección de propagación. La justificación para esta aproximación se basa en la suposición de que la longitud de correlación del índice  $n$  en la dirección de propagación es mucho menor que cualquier escala de interés en el campo y esa dirección. De hecho, como veremos, esta aproximación se usa también en cualquier otro método diferente al de los momentos cuando se obtienen expresiones que contienen  $\Phi_n(K_x, K_y, 0)$ .

Una nueva técnica, propiciada por la potencia de cálculo a la que se tiene acceso actualmente y el desarrollo de algoritmos que hacen eficaces los métodos de propagación espectral, ha sido utilizada para atacar el problema de la propagación de ondas en medios turbulentos (Fleck et al, 1977; Martin y Flatté, 1990). Esta técnica de simulación numérica usa las aproximaciones parabólica a la ecuación de onda y de Markov a la correlación del medio, pero no requiere asunciones adicionales, necesarias en los cálculos según los otros métodos que implican desarrollos teóricos más restrictivos.

En lo que sigue, daremos una visión de las diferentes técnicas de resolución de nuestra ecuación de onda. La bibliografía disponible al respecto es considerable y, en su mayor parte, los resultados que se presentan pueden ser encontrados en ella. Sin embargo, como ya se comentó, creemos necesaria una agrupación y sistematización de la notación utilizada por las distintas teorías. Por ello, a parte de la discusión y

comparación de los resultados que cada una de ellas es capaz de predecir, ésta será nuestra labor principal.

### 3.2 Método de Rytov

Las fluctuaciones del índice de refracción atmosférico en torno a su valor medio son muy pequeñas, en torno a valores de  $10^{-6}$ . Por ello, es de esperar que las características del campo eléctrico propagado puedan definirse por aquéllas propias de una propagación en el vacío, exceptuando pequeñas perturbaciones o fluctuaciones. Por esta razón, es natural aplicar una técnica perturbativa a la resolución de la ecuación de onda: ésta conlleva la expansión del campo en una serie de términos, siempre decrecientes, que puede o no converger.

#### 3.2.1 Formulación del método

El método de Rytov utiliza una técnica perturbativa tras modificar la forma en que hemos aplicado la aproximación parabólica a la ecuación escalar de onda:

$$\nabla_T^2 E + 2jk \frac{\partial E}{\partial z} + 2k^2 n E = 0 \quad (3.6)$$

Al definir  $E = \exp(\Phi)$ , la ecuación de onda se transforma en una ecuación de Ricatti

$$\nabla^2 \Phi + \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + k^2(1+2n) = 0 \quad (3.7)$$

cuya principal ventaja sobre la ecuación original es su forma no paramétrica. Si ahora suponemos la propagación inicial a lo largo del eje  $z$ ,  $\Phi = \Psi + jkz$ , y las asunciones propias de la aproximación parabólica,  $|\partial^2 \Psi / \partial z^2|$  y  $|\partial \Psi / \partial z|^2 < 2k |\partial \Psi / \partial z|$ , la ecuación de Ricatti se convierte en

$$\nabla_T^2 \Psi + 2jk \frac{\partial \Psi}{\partial z} + 2k^2 n = 0 \quad (3.8)$$

Obsérvese que si  $E = A e^{jS}$ , con  $A$  y  $S$  la amplitud y la fase de la onda respectivamente, entonces  $\Psi = \chi + jS$  con  $\chi \equiv \ln A$ . Así, la llamada log-amplitud  $\chi$  es la parte real de  $\Psi$  y la fase  $S$  su parte imaginaria. El problema es resolver esta ecuación para las fluctuaciones de log-amplitud y fase.

Consideremos una expansión de  $\Psi$

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2 + \dots \quad (3.9)$$

Si la magnitud de los términos sucesivos es suficientemente pequeña comparada con el término de orden inferior  $|\Psi_{m+1}| < |\Psi_m|$ , la serie converge y con sólo un número finito de términos podremos describir con suficiente aproximación el problema de

propagación. Sin embargo, esto no ocurre para todas las situaciones y la serie puede ser divergente. La interpretación física de este hecho se basa en la identificación de los términos de orden superior como difusión múltiple. El término  $\Psi_0$  representa la onda no difusa, el primer orden da cuenta de la difusión simple, el segundo difusión doble, etcétera. Cuando el efecto de la difusión múltiple (órdenes superiores) aumenta (por un incremento en la intensidad de la turbulencia,  $C_n^2$ , o un mayor trayecto de propagación), los resultados obtenidos mediante técnicas perturbativas dejan de ser válidos. Aun así, una gran variedad de problemas pueden ser resueltos en el supuesto de una única difusión simple utilizado por el método de Rytov:  $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$ , donde  $\Psi_0$  verifica la ecuación de propagación en el vacío

$$\nabla_T^2 \Psi_0 + 2jk \frac{\partial \Psi_0}{\partial z} = 0 \quad (3.10)$$

Sustituyendo  $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$  en la ecuación (3.8) y usando (3.10) anterior, se encuentra que  $\Psi_1$  satisface

$$\nabla_T^2 \Psi_1 + 2jk \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} + 2k^2 n = 0 \quad (3.11)$$

### 3.2.2 Espectros de potencia de las fluctuaciones de amplitud y fase

Tatarskii (1971) fue el primero en desarrollar el método de Rytov y demostrar que, si consideramos una onda propagada en un medio turbulento desde  $z=0$  hasta un punto de observación situado a distancia  $L$ , la solución de la ecuación (3.11) para  $\Psi_1 = \chi_1 + jS_1$  puede escribirse como:

$$\Psi_1(\rho, L) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho' \int_0^L dz h(\rho - \rho', L-z) n(\rho', z) \quad (3.12)$$

donde  $\rho = x\hat{x} + y\hat{y}$  y  $h$  es la respuesta impulsional de la propagación:

$$h(\rho - \rho', L-z) = \frac{k^2}{2\pi} \frac{1}{\gamma(L-z)} \exp \left[ j \frac{k}{2} \frac{|\rho' - \gamma \rho|^2}{\gamma(L-z)} \right] \quad (3.13)$$

El término  $\gamma$  distingue el tipo de onda considerada:  $\gamma=1$  cuando hablemos de onda plana en  $z=0$  ( $E(r) = E_0$ ), y  $\gamma=z/L$  al examinar una onda esférica radiada desde el origen ( $E(r) = E_0/4\pi r \exp(jkr)$ ). Tras introducir (3.13), podemos diferenciar las partes real e imaginaria en (3.12)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \chi(\rho, L) \\ S(\rho, L) \end{array} \right\} &= \frac{k^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho' \int_0^L dz \frac{1}{\gamma(L-z)} \times \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} \cos \left[ j \frac{k}{2} \frac{|\rho' - \gamma \rho|^2}{\gamma(L-z)} \right] \\ \text{sen} \left[ \frac{k}{2} \frac{|\rho' - \gamma \rho|^2}{\gamma(L-z)} \right] \end{array} \right\} n(\rho', z) \end{aligned} \quad (3.14)$$

obteniendo las expresiones que nos dan en el punto de observación la log-amplitud y la fase del campo aleatorio, caracter conferido por la aleatoriedad del índice de refracción atmosférico  $n(\rho, z)$ .

A partir de estas expresiones sería sencillo calcular los momentos de  $\Psi_1 = \chi_1 + jS_1$  como función de los momentos de las fluctuaciones del índice de refracción  $n$ . Por ejemplo, las funciones de correlación

$$\begin{aligned} B_x(\rho_1, \rho_2, L) &= \langle \chi_1(\rho_1, L) \chi_1(\rho_2, L) \rangle \\ B_S(\rho_1, \rho_2, L) &= \langle S_1(\rho_1, L) S_1(\rho_2, L) \rangle \end{aligned} \quad (3.15)$$

vendrían dadas por

$$\begin{aligned} B_{x,S}(\rho_1, \rho_2, L) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\rho'_1 \int_0^L dz_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\rho'_2 \int_0^L dz_2 \frac{k^2}{2\pi} \frac{1}{\gamma(L-z_1)} \times \\ &\times \left\{ \begin{array}{l} \cos \left[ \frac{k}{2} \frac{|\rho'_1 - \gamma \rho_1|^2}{\gamma(L-z_1)} \right] \\ \text{sen} \left[ \frac{k}{2} \frac{|\rho'_1 - \gamma \rho_1|^2}{\gamma(L-z_1)} \right] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \cos \left[ \frac{k}{2} \frac{|\rho'_2 - \gamma \rho_2|^2}{\gamma(L-z_2)} \right] \\ \text{sen} \left[ \frac{k}{2} \frac{|\rho'_2 - \gamma \rho_2|^2}{\gamma(L-z_2)} \right] \end{array} \right\} \times \\ &\times B_n(\rho'_1, \rho'_2, L) \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde  $B_n(\rho_1, \rho_2, L) = \langle n(\rho'_1, L) n(\rho'_2, L) \rangle$  es la función de correlación de las fluctuaciones del índice de refracción. Realizando esta integral obtendríamos  $B_{x,S}$  función de  $B_n$ . Sin embargo, la dificultad del cálculo, sólo posible para formas sencillas de la función de correlación  $B_n$ , obliga a utilizar otras técnicas que aproximan la solución del problema al tiempo que simplifican las operaciones matemáticas. Así, será más comodo de utilizar una representación espectral de las fluctuaciones de amplitud y fase en lugar de la representación (3.14) deducida en el espacio directo.

#### a) Representación espectral de las fluctuaciones de amplitud y fase.

Si suponemos la onda  $\Psi_1$  homogénea e isotropa sobre el plano XY, se puede utilizar una representación bidimensional para expresarla. Esta suposición de homogeneidad e isotropía no es correcta a lo largo de la dirección de propagación  $z$ , ya que esperamos que las fluctuaciones  $\chi_1$  y  $S_1$  se incrementen conforme aumente el trayecto recorrido y se atravesase más turbulencia. Así, la correlación entre los valores

de  $\Psi_1$  en puntos distintos dependerá fuertemente de las características de correlación de las fluctuaciones del índice de refracción  $n$  en el plano XY, pero muy poco de sus características de correlación en la dirección de propagación Z. Por ello, también es suficiente una representación espectral bidimensional de  $n$ .

Tras estas consideraciones, tomemos la transformada de Fourier bidimensional de la expresión (3.12) para  $\Psi_1$ :

$$\Psi_1(\mathbf{K}, L) = \int_{-\infty}^{\infty} d\rho \int_{-\infty}^{\infty} d\rho' \int_0^L dz' h(\rho - \rho', L - z') n(\rho', z') e^{-j\mathbf{K} \cdot \rho} \quad (3.17)$$

donde  $\mathbf{K} = K_x \hat{x} + K_y \hat{y}$ . Realizando las integraciones sobre  $\rho$  y  $\rho'$ , encontramos

$$\Psi_1(\mathbf{K}, L) = j \int_0^L dz n\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}, z\right) H(\mathbf{K}, L - z) \quad (3.18)$$

donde  $n(\mathbf{K}, z)$  es la representación espectral bidimensional de  $n(\rho, z)$  y  $H(\mathbf{K}, L - z)$  la respuesta espectral de la propagación, calculada como transformada de Fourier de la respuesta impulsional  $h(\rho - \rho', L - z')$ :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{K}, L - z) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\rho e^{-j\mathbf{K} \cdot \rho} h(\rho, L - z) = \\ &= \frac{k}{\gamma} \exp\left\{j \frac{(L - z)K^2}{2k\gamma}\right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Aquí,  $K^2 = |\mathbf{K}|^2 = K_x^2 + K_y^2$ . Considerando la parte real e imaginaria de  $\Psi_1 = X_1 + jS_1$

$$\begin{bmatrix} X_1(\mathbf{K}, L) \\ S_1(\mathbf{K}, L) \end{bmatrix} = k \int_0^L dz n\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}, z\right) \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \text{sen} \\ \text{cos} \end{bmatrix} \left[ \frac{(L - z)K^2}{2k\gamma} \right] \quad (3.20)$$

obtenemos las ecuaciones que constituyen la representación espectral de las fluctuaciones de amplitud y fase. Estas indican que el espectro de las fluctuaciones del índice en  $z$  es modificado por  $H(\mathbf{K}, L - z)$  para producir el espectro de las fluctuaciones de la onda

$\Psi_1 = X_1 + jS_1$ . Así,  $H(\mathbf{K}, L - z)$  representa el efecto de la propagación desde  $z$  hasta  $L$  (figura 3-1) y la fluctuación total de  $\Psi_1$  es la suma de todas las contribuciones desde  $z=0$  hasta  $z=L$ .

### 3.2.3 Funciones de correlación de amplitud y fase.

Consideremos ahora los momentos para el campo  $\Psi_1$  sobre el plano de observación  $L$ . Los primeros momentos de  $X_1$  y  $S_1$  son ambos cero, ya que por definición  $\langle n \rangle = 0$ . Al suponer que la onda admite una estadística homogénea, es decir, una estadística que no depende del punto considerado, sobre el plano XY, podemos

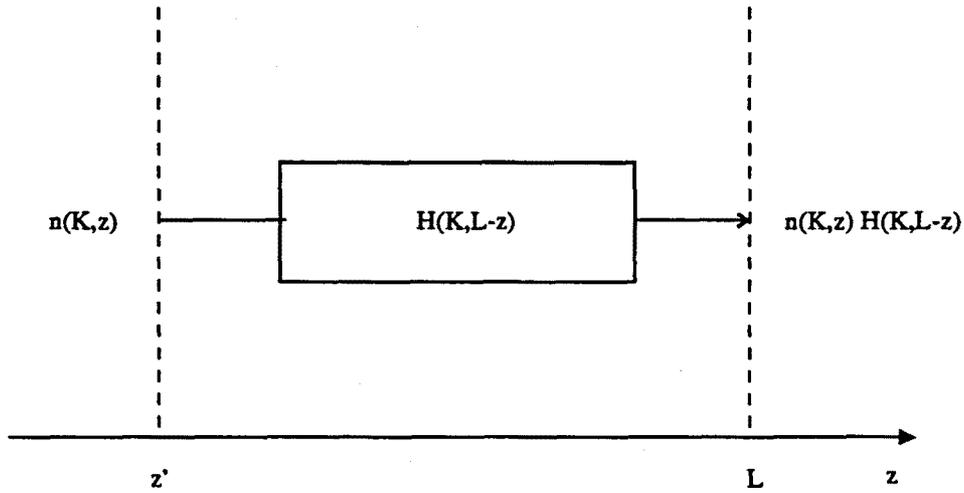


Fig. 3-1. Fluctuación de la onda como fluctuación del índice de refracción  $n$  modificada por la respuesta frecuencial de la propagación,  $H$ .

estimar las funciones de correlación bidimensional de la log-amplitud  $\chi_1$  y la fase  $S_1$  en el plano  $z=L$ . Al disponer del campo en su representación espectral, nos será más cómodo calcular sus transformadas de Fourier, los espectros de potencia de las fluctuaciones de  $\Psi_1$  y  $S_1$ :

$$\begin{aligned} \Phi_x(\mathbf{K}) &= \langle \chi_1(\mathbf{K}) \chi_1^*(\mathbf{K}) \rangle \\ \Phi_s(\mathbf{K}) &= \langle S_1(\mathbf{K}) S_1^*(\mathbf{K}) \rangle \end{aligned} \quad (3.21)$$

Sustituyendo la representación espectral del campo (3.20) en las igualdades anteriores, obtenemos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Phi_x(\mathbf{K}, L) \\ \Phi_s(\mathbf{K}, L) \end{bmatrix} &= 2\pi k^2 \int_0^L dz \int_0^L dz' \Phi_n\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}, z, z'\right) \times \\ &\times \frac{1}{\gamma^2} \frac{\text{sen}\left[\frac{(L-z)K^2}{2k\gamma}\right]}{\cos\left[\frac{(L-z)K^2}{2k\gamma}\right]} \frac{\text{sen}\left[\frac{(L-z')K^2}{2k\gamma}\right]}{\cos\left[\frac{(L-z')K^2}{2k\gamma}\right]} \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde

$$\Phi_n\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}, z, z'\right) = \left\langle n\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}, z\right) n\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}, z'\right) \right\rangle \quad (3.23)$$

Para simplificar las expresiones analíticas es necesario suponer que el espectro  $\Phi_n$  toma la forma

$$\Phi_n\left(\frac{K}{\gamma}, z, z'\right) = 2\pi \Phi_n\left(\frac{K}{\gamma}\right) \delta(z-z') \quad (3.24)$$

que no es más que una expresión de lo que, en la introducción al capítulo, habíamos llamado aproximación de Markov: la función de correlación para las fluctuaciones del índice de refracción se considera impulsional (delta) en la dirección de propagación  $z$ :

$$B_n(\rho, z-z') = B_n(\rho) \delta(z-z') \quad (3.25)$$

Sustituyendo la aproximación (3.24) para  $\Phi_n$  en la ecuación (3.22), obtenemos el resultado principal de la teoría de Rytov:

$$\begin{bmatrix} \Phi_x(K, L) \\ \Phi_s(K, L) \end{bmatrix} = 2\pi k^2 \int_0^L dz \Phi_n\left(\frac{K}{\gamma}\right) \frac{1}{\gamma^2} \begin{bmatrix} \text{sen}^2 \\ \text{cos}^2 \end{bmatrix} \left[ \frac{(L-z)K^2}{2k\gamma} \right] \quad (3.26)$$

La transformación inversa de Fourier de estas expresiones nos da la correlación espacial de las fluctuaciones de log-amplitud y fase:

$$B_{x,s}(\rho) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{x,s}(K) e^{jK\rho} dK \quad (3.27)$$

Con turbulencia isotrópica, tal como hemos supuesto, la parte azimutal de la integración es fácil de calcular, obteniéndose:

$$B_{x,s}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} dK K J_0(K, \rho) \Phi_{x,s}(K) \quad (3.28)$$

donde  $J_0$  es la función de Bessel de orden cero.

Insertando el espectro de potencia de Von Kármán para el índice de refracción (ecuación 2.6) se pueden estimar algunas características generales de los espectros  $\Phi_x$  y  $\Phi_s$  (figuras 3-2 y 3-3): obsérvese cómo el espectro de la log-amplitud tiene una característica pasa-bajo con un decrecimiento rápido más allá de la frecuencia espacial  $K \sim 2\pi/\sqrt{\lambda L}$ . Esto implica que las fluctuaciones de log-amplitud están producidas principalmente por inhomogeneidades en el índice de refracción atmosférico con tamaño del orden de la zona de Fresnel  $\sqrt{\lambda L}$ . Por otro lado, el espectro de la fase toma valores despreciables para frecuencias superiores a  $K \sim 2\pi/L_0$ , tal como era de esperar pues las fluctuaciones de fase son causadas predominantemente por las

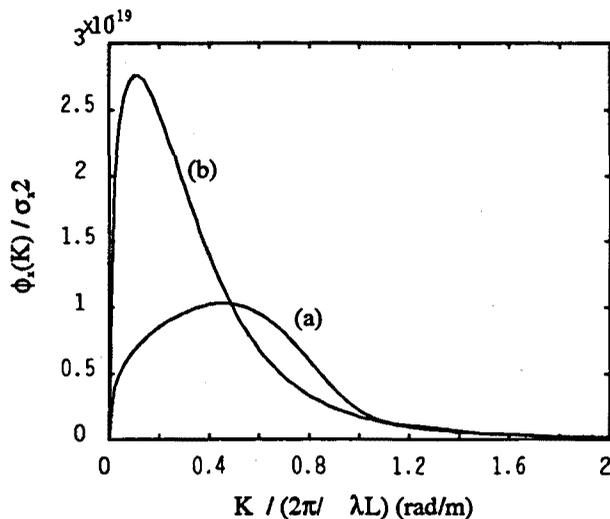


Fig. 3-2. Espectro de las fluctuaciones de log-amplitud función del número de onda normalizado.  
 a) Onda plana; b) onda esférica.

irregularidades de mayor escala en el índice. Estos resultados se traducen, sobre las funciones de covarianza correspondientes, en longitudes de correlación del orden de  $\sqrt{\lambda L}$  y  $L_0$  para la log-amplitud y la fase, respectivamente (figuras 3.4 y 3.5).

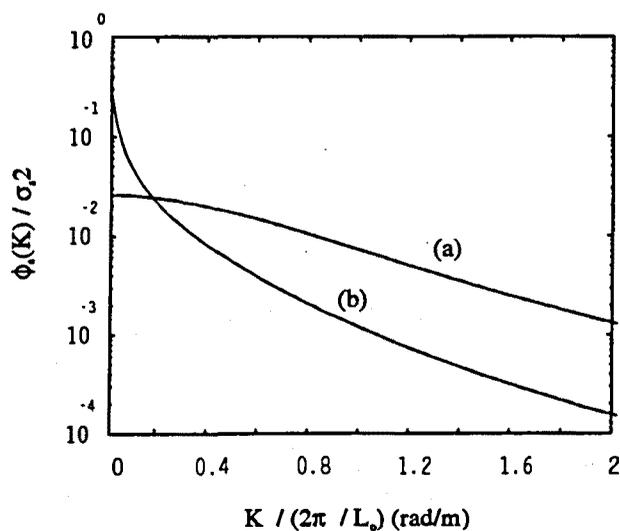


Fig.3-3. Espectro de las fluctuaciones de fase función del número de onda normalizado.  
 a) Onda plana; b) onda esférica.

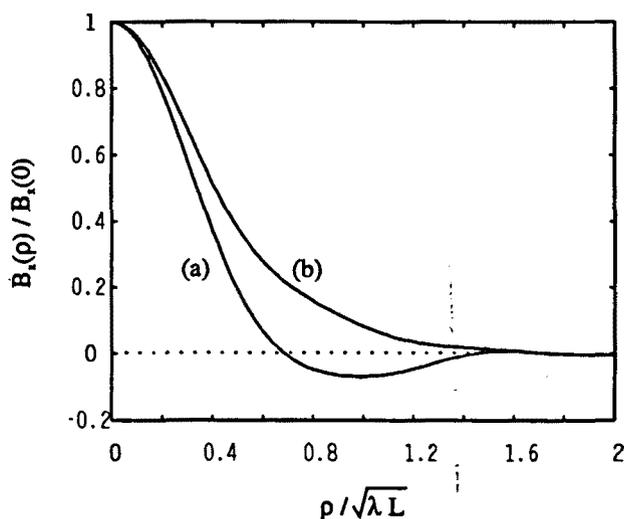


Fig. 3-4. Función de covarianza espacial de la log-amplitud como función de la separación espacial normalizada. a) Onda plana; b) onda esférica.

#### a) Funciones de estructura de amplitud y fase.

La fuerte dependencia de la fluctuación de fase con las inhomogeneidades del orden de la escala externa de la turbulencia,  $L_0$ , hace difícil la medida directa de su función de covarianza: en virtud de la hipótesis de Taylor (que será detallada en el capítulo siguiente y que liga las fluctuaciones espaciales y temporales del índice de

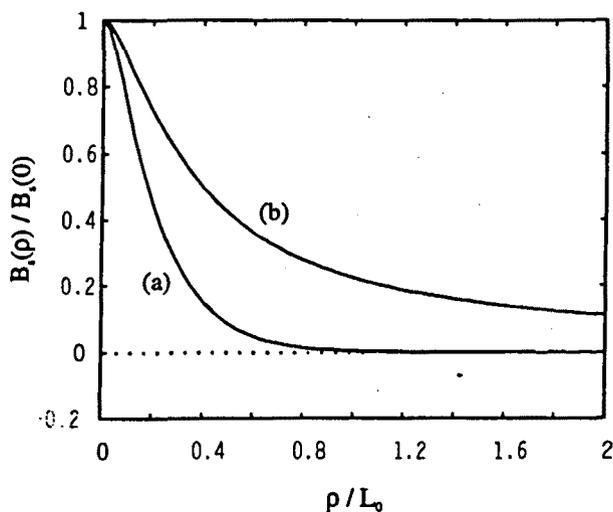


Fig. 3-5. Función de covarianza espacial de la fase como función de la separación espacial normalizada. a) Onda plana; b) onda esférica.

refracción atmosférico a través de la velocidad del viento en el trayecto de propagación), las escalas espaciales grandes implican tiempos de medida largos para conseguir estadísticas adecuadas y, si estos tiempos son demasiado elevados, la falta de estacionariedad atmosférica sesga nuestra medida. Por esta razón, se suele describir la onda, y en especial su fase, no a través de las funciones de correlación sino mediante el uso de las funciones de estructura:

$$\begin{aligned} D_x(\rho) &= \langle [\chi(\rho'+\rho) - \chi(\rho')]^2 \rangle \\ D_s(\rho) &= \langle [S(\rho'+\rho) - S(\rho')]^2 \rangle \end{aligned} \quad (3.29)$$

La principal ventaja de usar esta función para la fase de la onda estriba en que actúa como un filtro espacial pasa alto que elimina la influencia de las escalas grandes de la turbulencia.

Las funciones de estructura se relacionan de forma sencilla con las correspondientes funciones de correlación de  $\chi_1$  y  $S_1$ , y consecuentemente con los espectro de potencia asociados:

$$\begin{aligned} D_{x,s}(\rho) &= 2 [B_{x,s}(0) - B_{x,s}] = \\ &= 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{x,s}(K) [1 - e^{jK \cdot \rho}] dK \end{aligned} \quad (3.30)$$

### 3.2.4 Limitaciones al método de Rytov.

Las fórmulas anteriores para la estadística de la log-amplitud y la fase han sido deducidas usando la aproximación de Rytov, cuyo margen de validez viene determinado por la pequeñez del campo difundido con respecto al campo imperturbado; es decir,  $\Psi_1 \ll \Psi_0$ .

El término de orden cero de la log-amplitud  $\chi_0 = \ln A_0$  permanece constante mientras que los términos de orden uno  $\chi_1$  y superiores crecen con la longitud del trayecto o incrementos del parámetro que caracteriza la intensidad de la turbulencia,  $C_n^2$ . De hecho, como la energía de las componentes difundidas proviene del valor medio, éste debe disminuir. Por ello, es de esperar que el primer término del desarrollo perturbativo  $\chi_1$  sea una mala aproximación para la log-amplitud cuando aumentan los efectos introducidos por la propagación atmosférica. Varios autores (véase, por ejemplo, Brown (1966)) han investigado la región de aplicación del método de Rytov mediante el análisis de los términos de segundo orden  $\Psi_2$  y observado que los resultados obtenidos por este método son sólo válidos cuando

$$\sigma_x^2 \leq 0.3 \quad (3.31)$$

Aquí,  $\sigma_x^2$  es la varianza de la log-amplitud, calculable a partir de la expresión (3.28) para la correlación haciendo  $\rho=0$  :

$$\sigma_x^2 = 2\pi \int_0^\infty K \Phi_x(K) dK \quad (3.32)$$

Para las fluctuaciones de fase, sin embargo, la aproximación de Rytov es válida para márgenes mayores que los que aplican para las fluctuaciones de la log-amplitud. Se ha encontrado evidencia experimental (Strohbehn y Clifford, 1967) de que, para trayectos donde  $\sigma_x^2 \leq 0.3$ , la teoría de primer orden de Rytov estima correctamente las medidas de fase. La razón puede estribar en el hecho de que, al contrario que en la log-amplitud, el término de espacio libre u orden cero de la fase aumenta con la longitud del trayecto, de forma que los términos superiores permanecen pequeños comparados con él. Esto permitirá utilizar siempre los resultados de Rytov para calcular cantidades relacionadas con la fase, tales como ensanchamiento del haz, longitudes de coherencia o fluctuaciones del ángulo de llegada, de gran importancia al describir el frente de onda que se ha propagado.

A pesar de la eficacia del método de Rytov en la estimación de la estadística de la fase asociada a la onda propagada, la incapacidad de explicar los efectos de difusión múltiple condujo al desarrollo de teorías con un margen de aplicación mayor. Con el mismo animo tanto de agrupación de las teorías que se pueden encontrar dispersas en la bibliografía, como de sistematización de la notación utilizada, que nos ha guiado hasta el momento, discutiremos aquí dos de los métodos desarrollados (Fante, 1980), destacables por razones diferentes: la teoría heurística, puesta al día por Hill (1982), que, aunque de éxito limitado, ha ayudado a mejorar la comprensión del problema; y la teoría asintótica, generalizada por Frechlich (1987), hasta el momento la mejor de las teorías analíticas utilizable en regiones no aptas para el método de Rytov.

### 3.3 Teoría heurística

La expresión (3.32) deducida por el método de Rytov para  $\sigma_x^2$ , y particularizada a la aproximación más simple del espectro de Kolmogorov  $\Phi_n = 0.033 C_n^2(z) K^{-11/3}$ ,

$$\sigma_x^2 = 0.56 k^{7/6} \int_0^L C_n^2(z) \gamma^{5/6} (L-z)^{5/6} dz \quad (3.33)$$

predice que la varianza de las fluctuaciones de log-amplitud crece sin límite cuando  $C_n^2$  o la longitud de propagación  $L$  aumentan. Sin embargo, cuando esto ocurre, la experiencia muestra (Gracheva et al, 1978) que  $\sigma_x^2$  alcanza un valor máximo en torno a 0.3 para luego decrecer ligeramente: es el efecto conocido como saturación.

De un modo cualitativo, la saturación puede explicarse en términos de pérdida de coherencia espacial de la onda al propagarse. En la teoría de Rytov está implícita la coherencia de la onda a lo largo de todo el trayecto de propagación, aunque es de esperar que las distorsiones del frente de onda acarreen una pérdida gradual de esta propiedad. Como consecuencia, las irregularidades del índice de refracción de tamaño menor que la longitud de coherencia transversal de la onda serán efectivas para producir centelleo, y serán ineficaces las irregularidades de tamaño mayor. En efecto, los remolinos más pequeños están iluminados coherentemente y pueden producir centelleo como en el límite de débil turbulencia; mientras que los remolinos mayores están iluminados incoherentemente, de forma que sus figuras de difracción aparecen borrosas. De hecho, el comportamiento de un remolino turbulento se asemeja al de una lente: cuando la onda que la ilumina pierde su coherencia, no puede ser correctamente focalizada.

Diversos autores (Clifford et al, 1974; Hill y Clifford, 1981; Hill, 1982) han desarrollado una teoría para la saturación del centelleo por fuerte turbulencia basándose en las consideraciones cualitativas anteriores. La describiremos como teoría heurística, porque no está deducida de forma rigurosamente matemática a partir de las ecuaciones de Maxwell. La principal suposición de esta teoría es que los efectos de saturación se consideran adecuadamente mediante una modificación del espectro de Rytov para las fluctuaciones de log-amplitud utilizando una función que actúa como filtro espacial. Este filtro da cuenta de la modificación de la figura de difracción de los remolinos turbulentos cuando éstos son iluminados incoherentemente.

#### 3.3.1 Modificación del espectro de las fluctuaciones de log-amplitud.

Por el modelo cualitativo anterior, cada irregularidad del índice de refracción en  $z$  se considera como una apertura que transmite una onda distorsionada por la

turbulencia a través del medio hasta un plano de recepción alejado una distancia  $(L-z)$ .

Para calcular el deterioro de los detalles en la figura de difracción asociada a un remolino iluminado de forma incoherente, y la consiguiente reducción de la varianza de log-amplitud, se considera la extensión del principio de Huygens-Fresnel a un medio que exhibe un índice de refracción descrito por una variable aleatoria. Como para el problema en el vacío, el frente de onda secundario se determina por la envolvente de pequeñas ondas esféricas generadas en cada punto del frente de onda primario; sin embargo, ahora cada una de estas pequeñas ondas se calcula mediante la propagación de una onda esférica en el medio aleatorio. Según este principio de Huygens-Fresnel extendido, el perfil de intensidad  $I$  observado en un punto  $(\rho, z)$  iluminado por una apertura  $A$  sobre la que se define el campo aleatorio  $E$ , viene dado por (Lutomirski y Yura, 1971)

$$I(\rho, z) = \left[ \frac{1 + \cos\theta_0}{2\lambda E_0} \right]^2 \int_A \int_A \exp[jk(u_1 - u_2) + \Psi_1(u_1) + \Psi_1^*(u_2) + \Psi_1(r_1)] E_0(r_1) E_0^*(r_2) dr_1 dr_2 \quad (3.34)$$

donde  $|u_1| = u_1$ ,  $|u_2| = u_2$  son las distancias geométricas entre el punto de observación  $(\rho, z)$  y los puntos  $r_1$  y  $r_2$  en la apertura, y  $\Psi_1(r_1)$ ,  $\Psi_1(r_2)$  las perturbaciones del campo en  $(\rho, z)$  debido a las ondas esféricas emitidas en  $r_1$ ,  $r_2$  (véase la figura 3-6). Por definición,  $E = \exp(\Psi) = \exp(\Psi_0 + \Psi_1) = \exp(\Psi_0) \exp(\Psi_1) = E_0 \exp(\Psi_1)$ .

Estamos interesados no en la distribución de intensidad instantánea anterior, sino en su valor medio. En este caso, si caracterizamos el medio a través de las fluctuaciones

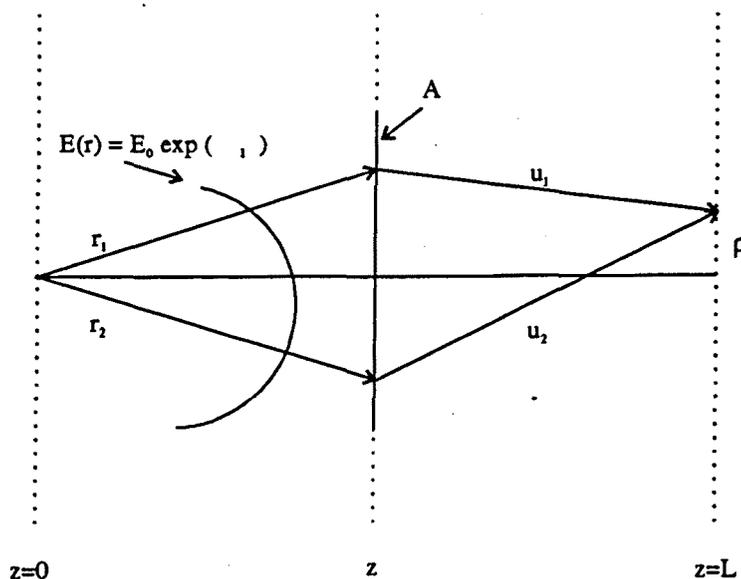


Fig. 3-6. Geometría de la propagación.  $E(r)$  es el campo incidente perturbado.

aleatorias del índice de refracción, esta irradiancia media  $\langle I(\rho, z) \rangle$  puede calcularse siempre que el término

$$\langle \exp [\Psi_1(r_1) + \Psi_1^*(r_2) + \Psi_1(u_1) + \Psi_1^*(u_2)] \rangle_{ST} \quad (3.35)$$

se conozca para todo  $r_1, r_2, u_1$  y  $u_2$  (aquí,  $\langle \rangle_{ST}$  denota un proceso de promediado espacial de corto término, es decir, sobre escalas del mismo orden que la longitud de correlación espacial de las fluctuaciones de intensidad: escalas grandes producen un movimiento de los detalles finos de la figura de difracción, pero no un efecto de emborronado de estos. De hecho, los remolinos muy grandes provocarán una inclinación de la onda y moverán la mancha focal como un todo sobre el plano de recepción sin modificar su tamaño). Al suponer que los efectos integrados de la turbulencia desde  $z=0$  hasta  $z$  son independientes de los que tienen lugar desde  $z$  hasta  $L$ , hipótesis aceptable si se piensa en la aproximación de Markov que descorrela las fluctuaciones del medio en la dirección de propagación, podemos reemplazar el término (3.35) por

$$\begin{aligned} \langle \exp [\Psi_1(r_1) + \Psi_1(r_2)] \rangle_{ST} \cdot \langle \exp [\Psi_1(u_1) + \Psi_1(u_2)] \rangle_{ST} &\equiv \\ &\equiv M_{ST}(r_2 - r_1, z) M_{ST}(u_2 - u_1, L - z) \end{aligned} \quad (3.36)$$

La cantidad  $M_{ST}$  es la llamada función de transferencia de modulación atmosférica

$$M_{ST}(r_1, r_2) = \langle \exp [\Psi_1(r_1) + \Psi_1(r_2)] \rangle_{ST} \quad (3.37)$$

Recordando que la función de coherencia espacial o momento de orden dos del campo  $E = E_0 \exp(\Psi_1)$  se define como

$$\Gamma_{ST}(r_1, r_2) = \langle E(r_1) E^*(r_2) \rangle \quad (3.38)$$

vemos que la función  $M_{ST}$  no es más que la función de coherencia espacial normalizada (Hufnagel y Stanley, 1964).

Así, utilizando (3.36) sobre la nueva expresión (3.34) del principio de Huygens-Fresnel extendido, el valor medio de la irradiancia resulta:

$$\begin{aligned} \langle I(\rho) \rangle_{ST} &= \left[ \frac{k}{2\pi(L-z)} \right]^2 \int d\xi \exp \left[ \frac{jk(\rho \cdot \xi)}{(L-z)} \right] \\ &M_{ST}(\xi, z) M_{ST}(\xi, L-z) \int d\eta \exp \left[ -\frac{jk(\eta \cdot \xi)}{(L-z)} \right] E_0^*(\eta - \frac{\xi}{2}) E_0(\eta + \frac{\xi}{2}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

donde  $\rho = r_2 - r_1$  y  $2\eta = r_2 + r_1$ . Esta expresión, deducida al considerar cada irregularidad del índice de refracción como una apertura que transmite una onda distorsionada por la atmósfera, describe el ensanchamiento de la mancha focal en el plano receptor debido a la turbulencia a lo largo del trayecto.

Conocido el valor medio de la irradiancia perturbada por las inhomogeneidades del índice, la teoría heurística presenta como principal suposición el que la turbulencia modifica el centelleo en el plano de recepción a través de una convolución de las fluctuaciones de log-amplitud predichas por la teoría de Rytov y la distribución de intensidades deducida anteriormente. En el dominio frecuencial, esto resulta en una modificación del espectro deducido en la teoría de Rytov para las fluctuaciones de log-amplitud a través de un filtro espectral  $H(\mathbf{K})$  dado por la transformada de Fourier bidimensional de (3.39)

$$H(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle I(\boldsymbol{\rho}) \rangle_{ST} e^{-j\mathbf{K}\cdot\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} \quad (3.40)$$

donde  $\mathbf{K}$  y  $\boldsymbol{\rho}$  están referidos al plano de observación  $z=L$ . Aquí,  $\langle I(\boldsymbol{\rho}) \rangle_{ST}$  debe ser normalizada a su potencia media  $\int d\boldsymbol{\rho} \langle I(\boldsymbol{\rho}) \rangle_{ST}$  para que sea una función peso correcta. Sustituyendo la versión normalizada de (3.39) en (3.40) e integrando, resulta:

$$H(\mathbf{K}) = M_{ST}\left(\frac{\mathbf{K}(L-z)}{z}, z\right) M_{ST}\left(\frac{\mathbf{K}(L-z)}{z}, L-z\right) \quad (3.41)$$

Si, como es habitual, suponemos que la turbulencia, además de homogénea, es isotrópica, tendremos  $H(\mathbf{K})=H(K)$ .

De este modo, expresando el espectro de Rytov para las fluctuaciones de log-amplitud (3.26) mediante una descomposición en la que aparezcan explícitamente las contribuciones asociadas a las diferentes posiciones  $z$  a lo largo del trayecto,

$$\begin{aligned} \Phi_x(\mathbf{K}) &= 2\pi k^2 \int_0^L dz \Phi_x\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}\right) \frac{1}{\gamma^2} \text{sen}^2\left[\frac{K^2(L-z)}{2k\gamma}\right] = \\ &= 2\pi k^2 \int_0^L d\Phi_x(\mathbf{K}, z) \end{aligned} \quad (3.42)$$

la modificación heurística consiste en reemplazar  $d\Phi_x(\mathbf{K}, z)$  por

$$d\Phi'_x(\mathbf{K}, z) = d\Phi_x(\mathbf{K}, z) M_{ST}\left(\frac{\mathbf{K}(L-z)}{k}, z\right) M_{ST}\left(\frac{\mathbf{K}(L-z)}{k}, L-z\right) \quad (3.43)$$

donde las funciones  $M_{ST}$  representan la pérdida de coherencia en la onda propagada y son, por tanto, la causa del efecto de saturación en el centelleo.

De estos resultados se hace evidente que, para seguir adelante en el desarrollo de la teoría heurística, necesitamos una expresión manejable para la función de transferencia  $M_{ST}$ .

### 3.3.2 Función de transferencia de modulación atmosférica.

Una expresión para la función de transferencia de modulación en largo término, definida como la correlación cruzada de las fluctuaciones del campo en una dirección transversal a la dirección de propagación,

$$M(\rho, z) = \langle \exp[\Psi_1(\rho + \rho') + \Psi_1(\rho')] \rangle \quad (3.44)$$

(donde  $\langle \rangle$  vuelve a indicar un proceso de promediado sobre todas las escalas espaciales y temporales de la turbulencia) fue deducida por Fried (1966) en un cálculo ya clásico. Para ello, utilizando el hecho de que, en  $\Psi_1 = \chi_1 + jS_1$ , tanto  $\chi_1$  como  $S_1$  son variables homogéneas, isotrópicas e independientes, Fried expresa

$M$  en términos de las funciones de estructura de log-amplitud  $\chi_1$  y fase  $S_1$  (definidas anteriormente; ecuaciones 3.30):

$$M(\rho, z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}[D_s(\rho, z) + D_x(\rho, z)]\right\} = \exp\left\{-\frac{1}{2}D_w(\rho, z)\right\} \quad (3.45)$$

Aquí,  $D_w(\rho) \equiv D_s(\rho) + D_x(\rho)$  es la llamada función de estructura de onda; por definición de  $D_s$  y  $D_x$ , tenemos:

$$D_w(\rho, z) = 2 \int \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_x(\mathbf{K}, z) + \Phi_s(\mathbf{K}', z)] [1 - e^{j\mathbf{K}\cdot\rho}] d\mathbf{K} \quad (3.46)$$

Recordando las expresiones para los espectros de log-amplitud y fase

$$\begin{cases} \Phi_x(\mathbf{K}', L) \\ \Phi_s(\mathbf{K}', L) \end{cases} = 2\pi k^2 \int_0^L dz' \Phi_n\left(\frac{\mathbf{K}'}{\gamma}\right) \frac{1}{\gamma^2} \frac{\sin^2\left[\frac{(L-z')K^2}{2k\gamma}\right]}{\cos^2\left[\frac{(L-z')K^2}{2k\gamma}\right]} \quad (3.47)$$

(con  $\gamma=1$  para onda plana y  $\gamma=z/L$  para onda esférica), obtenemos:

$$D_w(\rho, z) = 2 \left[ 2\pi k^2 \int_0^L dz' \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}\right) \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) [1 - e^{j\mathbf{K}\cdot\rho}] d\mathbf{K} \right] \quad (3.48)$$

De este modo, sustituyendo (3.48) en (3.45), la función de transferencia de modulación la expresaremos como

$$M(\rho, z) = \exp \left\{ -2\pi k^2 \int_0^L dz' \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{\mathbf{K}}{\gamma}\right) \left(\frac{1}{\gamma^2}\right) [1 - e^{j\mathbf{K}\cdot\rho}] d\mathbf{K} \right\} \quad (3.49)$$

La isotropía de la turbulencia, que implica el que el espectro de las fluctuaciones del

índice de refracción atmosférico  $\Phi_n$  es función de  $K$  y no de  $\mathbf{K}$ , nos permite calcular la parte azimutal de la integración sobre  $d\mathbf{K} = K dK d\phi$  :

$$M(\rho, z) = \exp \left\{ -4\pi^2 k^2 \int_0^L dz' \left( \frac{1}{\gamma^2} \right) \int_0^\infty dK K \Phi_n \left( \frac{K}{\gamma} \right) [1 - J_0(K\rho)] \right\} \quad (3.50)$$

Para llegar a esta expresión hemos supuesto que todas las escalas de la turbulencia afectan a la onda propagada. Sin embargo, como ya discutimos anteriormente, los efectos asociados a escalas muy grandes (básicamente inclinación de la onda) no afectan a los detalles finos que caracterizan la deformación de nuestro frente de onda. Por ello, estas escalas no juegan un papel determinante en la función de transferencia de modulación, lo que nos obliga a eliminar los efectos de inclinación del haz en la función de transferencia de largo término  $M(\rho, z)$  anterior para así obtener la equivalente de corto término  $M_{ST}(\rho, z)$  que necesitamos.

Este proceso puede ser aproximado por un filtrado pasa altos del espectro de las fluctuaciones del índice de refracción usado para caracterizar la turbulencia en la determinación de  $M(\rho, z)$  :

$$M_{ST}(\rho, z) = \exp \left\{ -4\pi^2 k^2 \int_0^L dz \left( \frac{1}{\gamma^2} \right) \int_0^\infty dK K \Phi_n \left( \frac{K}{\gamma} \right) h(K, K') [1 - J_0(K\rho)] \right\} \quad (3.51)$$

donde  $h(K, K')$  es una función filtro pasa altos que se determina a continuación.

El hecho de que la separación entre las componentes asociadas a escalas grandes (inclinación) y las asociadas a escalas pequeñas (emborronado) en nuestra función de transferencia de modulación está definida de forma imprecisa, nos dificulta el cálculo del filtro pasa altos  $h(K, K')$ . Para superar esta dificultad, la teoría heurística hace uso de la evidencia experimental de que la densidad de probabilidad de las fluctuaciones de intensidad de la onda propagada a través de la turbulencia tiende a ser exponencial en el límite de fuerte turbulencia (estas cuestiones serán discutidas en el próximo capítulo), y la implicación teórica de que la varianza de la log-amplitud tiende asintóticamente a  $\pi^2/24$  (Fante, 1975; Clifford y Hill, 1981). Así, si llamamos  $\sigma_T^2$  a la varianza de la log-amplitud prevista por la teoría de Rytov (ecuación 3.32)

$$\sigma_T^2 = 2\pi \int_0^\infty dK K \int_0^L d\Phi_x(K, z) \quad (3.52)$$

y ahora  $\sigma_x^2$  es la varianza deducida a partir del espectro de log-amplitud modificado por la teoría heurística

$$\sigma_x^2 = 2\pi \int_0^\infty dK K \int_0^L d\Phi_x(K,z) M_{ST}\left(\frac{K(L-z)}{k}, z\right) M_{ST}\left(\frac{K(L-z)}{k}, L-z\right) \quad (3.53)$$

imponiendo  $\sigma_x^2 \rightarrow \pi^2/24$  cuando  $\sigma_T^2 \rightarrow \infty$ .

Hill (1982) muestra que el filtro espacial a utilizar en la definición de la función de transferencia  $M_{ST}$  debe ser:

$$h(K, K') = \frac{12}{\pi^2} \begin{cases} \Pi(K'-K), & \text{(Onda plana)} \\ \Pi(K'-K) + K \delta(K-K'), & \text{(Onda esférica)} \end{cases} \quad (3.54)$$

Aquí,  $\Pi$  es la función escalón: uno para argumentos positivos y cero para argumentos negativos.

### 3.3.3 Resultados y limitaciones.

En la teoría heurística, hemos visto como las pérdidas de coherencia espacial, causa del efecto de saturación, son consideradas mediante la modificación del espectro de potencia de las fluctuaciones de log-amplitud predicha por la teoría de Rytov mediante una función filtro  $H(K)$

$$d\Phi'_x(K) = d\Phi_x(K) H(K) \quad (3.55)$$

donde  $M_{ST}$  y  $H(K)$  la función que expresa la coherencia de la onda propagada (ecuación 3.51).

Veamos cómo los resultados teóricos que se obtienen son capaces de predecir algunas de las observaciones experimentales no previstas por Rytov. Consideremos la varianza de la log-amplitud y describamos el medio mediante el espectro clásico de Von-Kármán. Los resultados para una onda esférica se muestran en la figura 3-7. Los resultados de la teoría convergen a los de Rytov para  $\sigma_x^2 < 0.3$  y, como deben, exhiben el efecto de saturación observado experimentalmente: cuando  $\sigma_x^2$  excede 0.3, el fenómeno de saturación aparece y posteriores incrementos de  $C_n^2$  o de la longitud del trayecto no dan lugar a incrementos de  $\sigma_x^2$ . Incluso mayores aumentos de  $C_n^2$  producen un notable decrecimiento de  $\sigma_x^2$  hacia el valor asintótico  $\pi^2/24$ .

La concordancia de los resultados heurísticos con las observaciones de la varianza de la log-amplitud nos indica que las bases de la teoría parecen suficientemente realistas como para examinar el funcionamiento previsto para otros parámetros estadísticos: analicemos la estructura espacial del centelleo en régimen de fuerte turbulencia a través de la función de correlación espacial de la log-amplitud (ecuación 3.28):

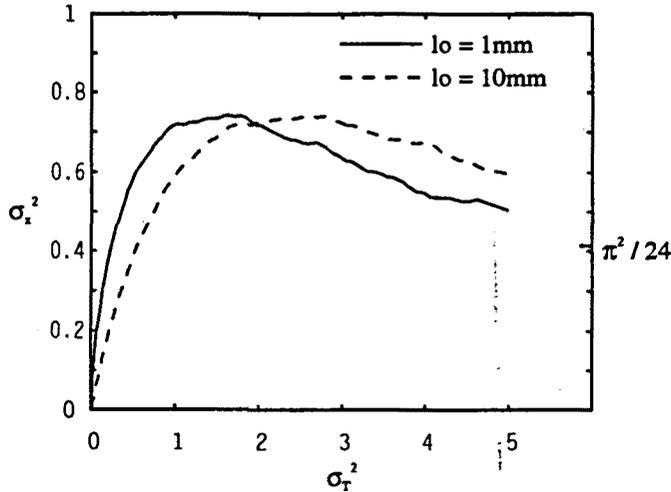


Fig. 3-7. Varianza de la log-amplitud para ondas esféricas calculada mediante la teoría heurística para diferentes valores de  $\sqrt{\lambda L} / l_0$ . En abscisas aparece la varianza de Rytov, incluyendo los efectos de la escala interna  $l_0$ .

$$B_{\chi, \rho}(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} dK K J_0(K, \rho) \Phi_{\chi}'(K) \quad (3.56)$$

donde ahora  $\Phi_{\chi}'(K)$  es el espectro modificado por la teoría heurística. La figura 3-8 muestra el funcionamiento de la correlación teórica normalizada  $B_{\chi}(\rho) / \sigma_{\chi}^2$  para onda esférica y la suposición adicional de que la turbulencia es uniforme ( $C_n^2 = \text{Cte}$ , para todo  $z$ ) a lo largo del camino de propagación. Cada curva corresponde a una cantidad diferente de turbulencia integrada  $\sigma_T^2$  predicha por la teoría de Rytov. Además de notar que para valores de  $\sigma_T^2$  que no exceden 0.3 los resultados convergen a los de Rytov, tal como debe ser, en estas curvas pueden observarse las siguientes características en la estructura espacial del centelleo propias del régimen de fuerte turbulencia: decrecimiento rápido de la función de correlación para separaciones ( $\rho$ ) pequeñas cuando aumenta la turbulencia integrada  $\sigma_T^2$ ; y una gran cola de correlación positiva residual. Estas características coinciden con las observadas experimentalmente (Gracheva et al, 1978).

A pesar de la buena concordancia con resultados experimentales, esta teoría presenta un importante problema de carácter práctico. La teoría nace como modificación heurística (basada en consideraciones más físicas que matemáticas) de la teoría de primer orden de Rytov y, consecuentemente, al igual que ésta, realiza todos sus desarrollos sobre la log-amplitud de la onda propagada ( $\chi = 1/2 \ln(I/I_0)$ ). El hecho de que esta magnitud sea muy sensible al valor medio de la intensidad, que puede estar afectado por no estacionariedades, y al ruido de los detectores provoca que muy raramente se puedan

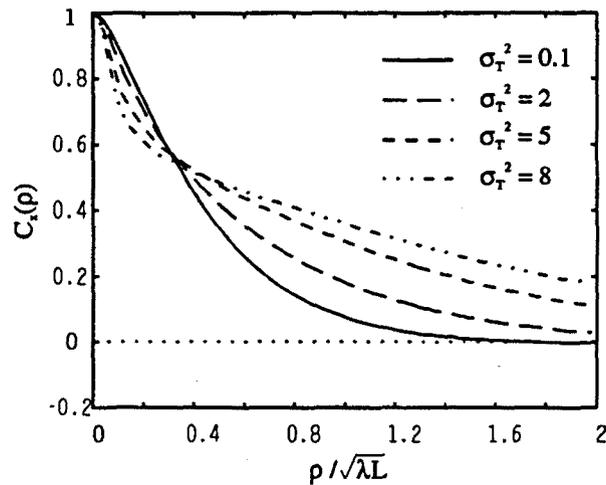


Fig. 3-8. Funciones de correlación determinadas mediante la teoría heurística. Cada curva se evalúa con un valor diferente para la turbulencia integrada  $\sigma_T^2$  predicha por Rytov.

medir estadísticas no sesgadas de la log-amplitud. La calidad superior de las medidas de intensidad, menos afectadas por los problemas anteriores, ha hecho que prevalezcan teorías basadas en las estadísticas de ésta y, por tanto, más fácilmente comparables con los resultados experimentales.

### 3.4 Teoría asintótica

El problema que se plantea es la resolución de una ecuación de ondas estocástica y, como es natural en cualquier problema definido a partir de variables aleatorias, la determinación de los valores medios de las magnitudes de interés. En lo visto hasta el momento, el problema era aproximado mediante la obtención de una ecuación diferencial para el campo instantáneo y un posterior promediado de sus soluciones. Alternativamente, se podría tratar de hallar ecuaciones diferenciales para los valores medios de interés. Los llamados de forma genérica métodos de momentos utilizan esta técnica y se concentran en hallar ecuaciones diferenciales para cantidades tales como el campo medio, la función de coherencia mutua o cualquier momento de orden superior.

La técnica de momentos encuentra el inconveniente de que no es posible encontrar un conjunto de ecuaciones cerradas para las cantidades medias deseadas: cuando promediamos para un momento dado siempre aparecen momentos de orden superior. Como ejemplo, y sabiendo que los métodos de los momentos son aplicados sobre la ecuación parabólica (con las consiguientes aproximaciones: efectos de despolarización despreciables, ángulo pequeño de difusión y retrodifusión despreciable),

$$\nabla_T^2 + 2jk \frac{\partial E}{\partial z} + 2k^2 n E = 0 \quad (3.57)$$

promediamos esta ecuación de ondas directamente para obtener una ecuación diferencial para el campo medio:

$$\nabla_T^2 \langle E \rangle + 2jk \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} + 2k^2 \langle n(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) \rangle = 0 \quad (3.58)$$

Hemos obtenido una ecuación que contiene no sólo la magnitud que estamos buscando  $\langle E \rangle$ , sino también un momento de orden dos desconocido  $\langle n(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) \rangle$ : estamos ante una ecuación con dos variables a calcular. Así pues, el primer problema a solventar es como evitar la aparición en nuestras ecuaciones de los momentos de orden superior al que deseamos encontrar.

#### 3.4.1 Deducción de las ecuaciones para los momentos: método de las pequeñas perturbaciones locales.

Han sido varias las maneras propuestas para cerrar las ecuaciones diferenciales de los momentos: el método del diagrama (Tatarskii, 1971), la aproximación de Markov (Strohbehn, 1978) y el método de las pequeñas perturbaciones locales (Beran y Ho, 1969) entre otros. Como todos ellos han llegado a las mismas expresiones finales, nosotros presentaremos aquí, atendiendo a su claridad conceptual, el método de las

pequeñas perturbaciones locales. En este método, el medio aleatorio se divide en capas orientadas perpendicularmente a la dirección de propagación, investigándose los diferentes términos en las ecuaciones promediadas cuando la onda se propaga a través de una de estas capas (véase la figura 3-9).

Con  $\rho$  el vector de posición transversal, definamos el momento de orden  $n$  evaluado en el plano  $z$  como

$$\Gamma_n = \langle E_1 \dots E_m E_{m+1}^* \dots E_n^* \rangle \tag{3.59}$$

donde  $E_i = E(\rho_i, z)$  satisface la ecuación de onda parabólica y  $E_j^* = E_j^*(\rho_j, z)$  la correspondiente ecuación parabólica conjugada. Multiplicando a las ecuaciones para las  $E_k$

por  $\prod_{i=1}^{i=k} E_i \prod_{j=m+1}^j E_j^*$ ,

$$\begin{aligned} & \nabla_{\rho_k}^2 E_k \prod_{i=1}^{i=k} E_i \prod_{j=m+1}^j E_j^* + 2jk \frac{\partial E_k}{\partial z} \prod_{i=1}^{i=k} E_i \prod_{j=m+1}^j E_j^* + \\ & + 2k^2 n(\rho_k, z) E_k \prod_{i=1}^{i=k} E_i \prod_{j=m+1}^j E_j^* = 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

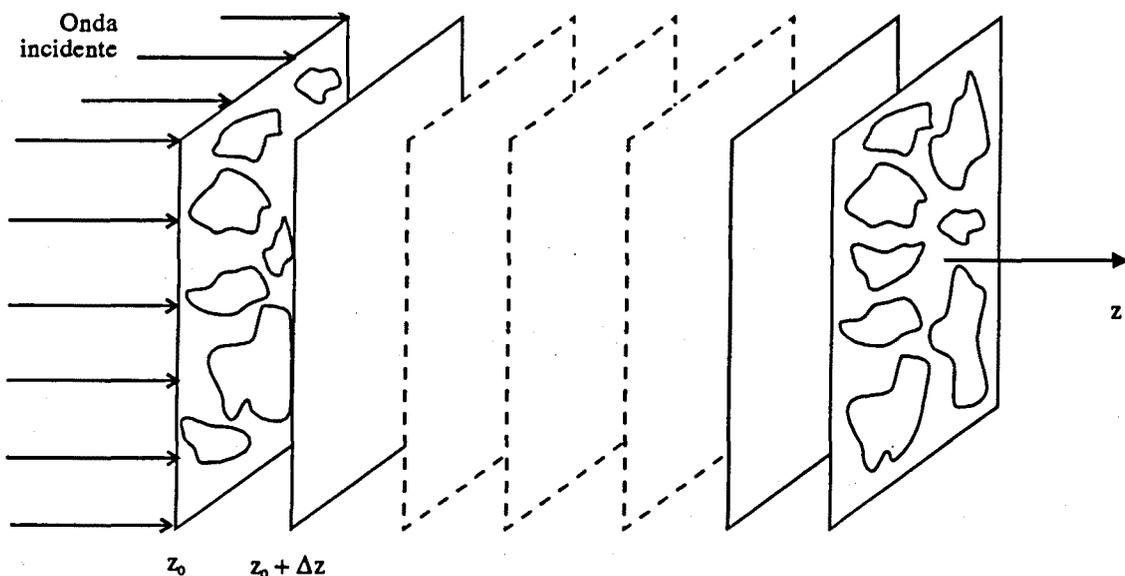


Fig. 3-9. Representación del medio de propagación mediante un conjunto de capas independientes.

y a las ecuaciones conjugadas para  $E_i^*$  por  $-\prod_{i=1}^m E_i \prod_{\substack{j=m+1 \\ j \neq k}}^n E_j^*$ , al sumarlas obtenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \nabla_{\pi k}^2 \left( \prod_{i=1}^m E_i \prod_{j=m+1}^n E_j^* \right) - \sum_{l=m+1}^n \nabla_{\pi l}^2 \left( \prod_{i=1}^m E_i \prod_{j=m+1}^n E_j^* \right) + \\ & + 2jk \frac{\partial \prod_{i=1}^m E_i \prod_{j=m+1}^n E_j^*}{\partial z} + 2k^2 \left[ \sum_{k=1}^m n(\rho_k, z) - \sum_{l=m+1}^n n(\rho_l, z) \right] \times \\ & \times \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m E_i \prod_{j=m+1}^n E_j^* = 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

Si promediamos (3.61) conseguimos la ecuación diferencial válida para cualquier momento  $n$ -ésimo  $\Gamma_n$  :

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{k=1}^m \nabla_{\pi k}^2 - \sum_{l=m+1}^n \nabla_{\pi l}^2 \right) \Gamma_n + 2jk \frac{\partial \Gamma_n}{\partial z} + \\ & + 2k^2 \left\langle \left[ \sum_{k=1}^m n(\rho_k, z) - \sum_{l=m+1}^n n(\rho_l, z) \right] \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m E_i \prod_{j=m+1}^n E_j^* \right\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

Como discutimos anteriormente, la dificultad de esta ecuación estriba en el último sumando, desconocido al igual que el momento  $\Gamma_n$  buscado. Si queremos seguir adelante, hemos de obtener una expresión para los términos de la forma

$$\left\langle n(\rho_k, z) \prod_{i=1}^m E(\rho_i, z) \prod_{j=m+1}^n E^*(\rho_j, z) \right\rangle \quad (3.63)$$

sin introducir ningún otro factor desconocido.

Para conseguirlo, el método de las pequeñas perturbaciones locales considera qué ocurre con el campo propagado entre dos planos, uno localizado en  $z_0$  y el otro en  $z_0 + \Delta z$ . Para ello, supone  $\Delta z$  grande comparado con las mayores inhomogeneidades del medio (de tamaño  $L_0$ ), pero lo suficientemente pequeño como para que sea posible utilizar un método perturbativo al calcular los campos cuando se propagan desde  $z_0$  hasta  $z_0 + \Delta z$ : en la región entre los planos  $z_0$  y  $z_0 + \Delta z$  suponemos  $E_i = E_{i0} + E_{i1}$ , donde  $E_{i0}$  denota el campo que existiría si no hubiese un medio turbulento y  $E_{i1}$  la perturbación de primer orden en el campo causada por la capa turbulenta de grosor  $\Delta z$ . De este modo, apliquemos el método de pequeñas perturbaciones localmente cerca de  $z$ . La ecuación parabólica

$$\nabla_T^2 E_i + 2jk \frac{\partial E_i}{\partial z} + 2k^2 n E_i = 0 \quad (3.64)$$

puede ser resuelta para el caso en que  $n=0$ ,

$$E_{i0}(\rho, z) = \frac{k}{2\pi j(z-z_0)} \iint d\rho \exp\left[j \frac{k(\rho_i - \rho)^2}{2(z-z_0)}\right] E(\rho, z_0) \quad (3.65)$$

e igualmente para el término perturbativo de primer orden

$$E_{i1}(\rho, z) = \frac{2k^2}{4\pi} \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \frac{dz'}{z-z_0} \iint d\rho \exp\left[j \frac{k(\rho_i - \rho)^2}{2(z-z_0)}\right] n(\rho, z') E(\rho, z_0) \quad (3.66)$$

Insertando este  $E_i(\rho, z) = E_{i0}(\rho, z) + E_{i1}(\rho, z)$  en (3.63), obtenemos (Prokhorov et al, 1975):

$$\langle n(\rho_k, z) \prod_{i=1}^m E_i(\rho_i, z) \prod_{j=m+1}^n E_j^*(\rho_j, z) \rangle = 2jk^3 Q_n \Gamma_n \quad (3.67)$$

donde

$$Q_n = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \left[ R(\rho_k - \rho_l) - R(\rho_k - \rho'_l) - R(\rho'_l - \rho_k) - R(\rho'_k + \rho'_l) \right] \quad (3.68)$$

Aquí,  $R(\rho_k - \rho_l)$  denota la función de correlación de las fluctuaciones del índice de refracción integrada entre los planos  $z_0$  y  $z_0 + \Delta z$ :

$$\begin{aligned} R(\rho_k - \rho_l) &= \int_{z_0}^{z_0+\Delta z} \langle n(\rho_k, z) n(\rho_l, z) \rangle dz = \\ &= \int_0^{\Delta z} B_n(\rho_k - \rho_l, z) dz \end{aligned} \quad (3.69)$$

Al reemplazar la integral entre  $z_0$  y  $z_0 + \Delta z$  por otra entre cero e infinito, hemos utilizado lo que conocíamos como aproximación de Markov:  $\Delta z$  es mucho mayor que la longitud de correlación definida por  $B_n$  en (3.25). Sustituyendo (3.67) en la ecuación diferencial (3.62) para los momentos, conseguimos una ecuación cerrada para cualquier  $\Gamma_n$ :

$$\left( \sum_{k=1}^m \nabla_{T_k}^2 - \sum_{l=m+1}^n \nabla_{T_l}^2 \right) \Gamma_n + 2jk \frac{\partial \Gamma_n}{\partial z} + 2jk^3 Q_n \Gamma_n = 0 \quad (3.70)$$

### 3.4.2 Soluciones a las ecuaciones de los momentos: teoría asintótica.

Una vez hemos establecido las ecuaciones diferenciales para los momentos  $n$ -ésimos, describamos los resultados que nos son de interés; en particular el valor medio del campo, la función de coherencia mutua y, sobre todo, la función de correlación de la intensidad como caso particular del momento de orden cuatro del campo.

#### a) Valor medio.

El momento de orden uno,

$$\Gamma_1(\rho, z) = \langle E(\rho, z) \rangle \quad (3.71)$$

es fácilmente calculable. Su ecuación diferencial, obtenida al considerar  $n=1$  en (3.70),

$$\nabla_T^2 \langle E \rangle + 2jk \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial z} + 2jk^3 R(0) \langle E \rangle = 0 \quad (3.72)$$

admite como solución general (Ishimaru, 1978)

$$\langle E(\rho, z) \rangle = E_0(\rho, z) \exp(-k^2 R(0) z) \quad (3.73)$$

Este resultado establece una constante de atenuación

$$\alpha = k^2 R(0) \quad (3.74)$$

que modifica en la dirección de propagación el campo  $E_0(\rho, z)$  que satisface la ecuación de espacio libre  $\nabla_T^2 E_0(\rho, z) + 2jk / z E_0(\rho, z) = 0$ .

#### b) Función de coherencia del campo.

La ecuación diferencial para el momento de orden dos

$$\Gamma_2(\rho_1, \rho_2, z) = \langle E(\rho_1, z) E^*(\rho_2, z) \rangle \quad (3.75)$$

se expresa como:

$$\left(\nabla_{T1}^2 - \nabla_{T2}^2\right) \Gamma_2 + 2jk \frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} + jk D_w(\rho_1 - \rho_2) \Gamma_2 = 0 \quad (3.76)$$

Aquí

$$\begin{aligned} D_w(\rho) &= 2k^2 [R(0) - R(\rho)] = 2k^2 \int [\sigma_n^2 - B_n(\rho)] dz = \\ &= 4\pi k^2 \int dz \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{K}, z) [1 - e^{j\mathbf{K}\cdot\rho}] d\mathbf{K} \end{aligned} \quad (3.77)$$

es la función de estructura de onda y  $\Phi_n$  el espectro de las fluctuaciones del índice de refracción

$$\Phi_n(\mathbf{K}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\rho) e^{-j\mathbf{K}\cdot\rho} d\rho \quad (3.78)$$

La solución para el momento de orden dos es bien conocida (Tatarskii, 1971):

$$\Gamma_2(\rho_1, \rho_2, z) = \left\langle E_0(\rho_1, z=0) E_0^*(\rho_2, z=0) \right\rangle \exp\left[-\frac{1}{2} D_w(\rho_1, \rho_2, z)\right] \quad (3.79)$$

como una función de la función de estructura  $D_w$  y las condiciones  $E_0(\rho, z=0)$ .

c) Covarianza de la intensidad: teoría asintótica.

La solución a la ecuación para el momento de orden cuatro

$$\left(\nabla_{T1}^2 - \nabla_{T2}^2 + \nabla_{T3}^2 - \nabla_{T4}^2\right) \Gamma_4 + 2jk \frac{\partial \Gamma_4}{\partial z} + 2jk F \Gamma_4 = 0 \quad (3.80)$$

donde

$$\begin{aligned} 2F &= D_w(\rho_1 - \rho_2) + D_w(\rho_1 - \rho_4) + D_w(\rho_2 - \rho_3) + \\ &+ D_w(\rho_3 - \rho_4) - D_w(\rho_1 - \rho_3) - D_w(\rho_2 - \rho_4) \end{aligned} \quad (3.81)$$

es interesante, como ya comentamos, por su relación con la función de correlación de la intensidad:

$$\begin{aligned} B_I(\rho_1, \rho_2, z) &= \langle I(\rho_1, z) I(\rho_2, z) \rangle = \\ &= \langle E(\rho_1, z) E(\rho_2, z) E^*(\rho_1, z) E^*(\rho_2, z) \rangle = \Gamma_4(\rho_1, \rho_2, \rho_1, \rho_2, z) \end{aligned} \quad (3.82)$$

Aunque se han propuesto varias teorías para resolver de forma exacta la ecuación para  $\Gamma_4$  (Macaskill, 1983; Uscinsky, 1985 y 1986; Whitman y Beran, 1992) sus desarrollos efectivos exigen tratamientos matemáticos y tiempos de cálculo que las hacen

ineficientes sobre un amplio margen de condiciones de propagación.

Frente a éstas, la llamada teoría asintótica es la mejor de las que se disponen. Esta teoría fue desarrollada para la covarianza de intensidad,

$$C_I(\rho_1, \rho_2, z) = \frac{B_I(\rho_1, \rho_2, z)}{\langle I(\rho_1, z) \rangle \langle I(\rho_2, z) \rangle} - 1 \quad (3.83)$$

bajo el supuesto de un medio descrito por un espectro de Kolmogorov, y fue revisada tanto para onda plana como onda esférica por Prokhorov et al (1975). Los efectos de la escala interna  $l_0$  fueron incluidos en trabajos más recientes de Fante (1983) y Frehlich (1987). En esta teoría, la función de covarianza se expresa mediante una serie asintótica en principio infinita. Para el caso en que la escala interna es pequeña, la fórmula asintótica suele aproximarse mediante los tres primeros términos de la serie (Turn y Beran, 1983; Chumside, 1991):

$$C_I(\rho) = \exp\left[-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{5/3}\right] + \frac{1}{2} N_3 \left(\frac{k\rho_0^2}{L}\right) [b_1(\rho) + b_2(\rho)] \quad (3.84)$$

El segundo de estos términos se asocia al efecto de enfoque refractivo por irregularidades de gran tamaño en el medio (bajas frecuencias espaciales), característico del comportamiento en débil turbulencia. El primero y principal, por el contrario, muestra la modulación introducida por las escalas de pequeño tamaño (altas frecuencias) en los procesos anteriores de gran escala, propia del régimen de fuerte turbulencia. El tercero de los términos considerados es, tal como puede verse en la figura 3-10, una corrección al término anterior.

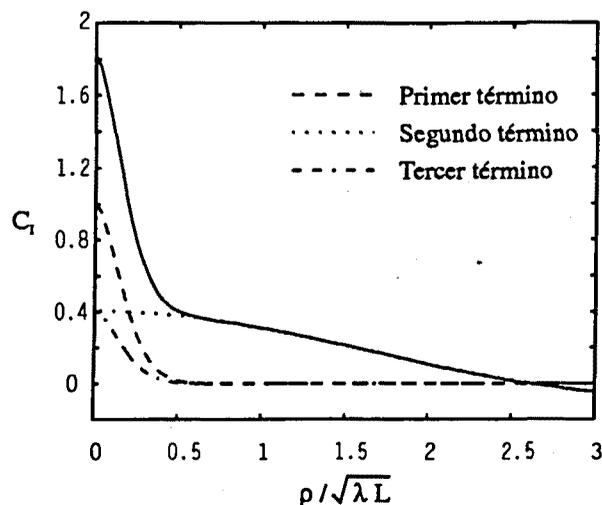


Fig. 3.10. Términos principales en la teoría asintótica para la covarianza de intensidad ( $\sigma_1^2 = 10$ ).

donde  $\rho_0$  es la longitud de coherencia transversal calculada usando la teoría de Rytov:

$$\rho_0 = \left( \left\{ \begin{array}{l} 1.46 \\ 0.545 \end{array} \right\} k^2 \int_0^L dz C_n^2(z) \right)^{-3/5} \quad (3.85)$$

para onda plana y esférica, respectivamente.  $N_3$  es una constante igual a 1.22 para onda plana y 3.86 para onda esférica. Las dos funciones  $b_1$  y  $b_2$  tienden a uno cuando  $\rho$  tiende a cero y a cero cuando  $\rho$  tiende a infinito.  $b_1$  viene dada por

$$b_1(\rho) = \begin{cases} 7/3 \int_0^1 dx x^{4/3} J_0(k\rho\rho_0 x/L). \\ 0.915 \int_0^1 dx x^{-1/3} (1-x^2) \int_0^\infty d\tau \tau^{-4/3} \times \\ \quad \times J_0\left(\frac{k\rho\rho_0\tau}{L}\right) \exp[-\tau^{5/3}(1-x)^{5/3}]. \end{cases} \quad (3.86)$$

La otra función  $b_2$  es mucho más compleja. Sin embargo, sabiendo que es una corrección al primer término que depende sólo del cociente  $\rho/\rho_0$  y que tiene una escala característica de tamaño  $\rho_0$ , suele suponerse que  $b_2$  es aproximable por

$$b_2 = \exp[-(\rho/\rho_0)^{5/3}] \quad (3.87)$$

La figura 3-11 muestra el comportamiento de la covarianza de intensidad normalizada  $C_I(\rho)/\sigma_I^2$  predicha por la teoría asintótica tras suponer onda plana y turbulencia uniforme a lo largo del camino de propagación. Cada curva corresponde a una varianza de la intensidad prevista por la teoría de Rytov  $\sigma_I^2$  diferente (la distinguimos de la varianza  $\sigma_I^2$  calculada en la teoría asintótica). Como era de esperar, observamos en la estructura espacial del centelleo las características propias del régimen de fuerte turbulencia: por un lado longitudes de correlación del orden de las longitudes de coherencia de la onda y, por tanto, inversamente proporcionales a la potencia  $3/5$  de la turbulencia integrada  $\sigma_I^2$  (ecuación 3.85); y por otro, colas de correlación positiva residual.

Las predicciones para valores muy fuertes de centelleo (correspondientes a  $\sigma_I^2$  elevados) están confirmados por resultados numéricos que consideran varios términos más en los desarrollos asintóticos (Whitman y Beran, 1992). Sin embargo, para propagaciones caracterizadas por valores de  $\sigma_I^2$  intermedios (curvas para  $\sigma_I^2 = 1$  y  $\sigma_I^2 = 10$  en la figura 3-11) los resultados de la teoría asintótica presentan diferencias notables al comparar con los obtenidos mediante cálculos más precisos.

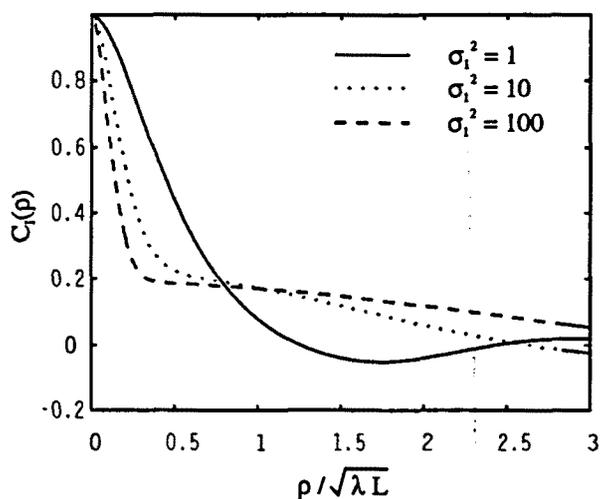


Fig. 3-11. Funciones de covarianza de intensidad determinadas mediante la teoría asintótica. Cada curva se evalúa con un valor diferente de la turbulencia integrada  $\sigma_1^2$  predicha por Rytov.

Para superar tanto las limitaciones intrínsecas a la aproximación asintótica en el margen de valores intermedios para  $\sigma_1^2$ , como la ineficiencia práctica de los métodos numéricos que consideran más términos en las series que definen la covarianza de intensidad, se hace necesaria una técnica conceptualmente diferente a las consideradas hasta el momento: el problema no se plantea ya en términos de resolución de una ecuación de ondas (para el campo o los momentos), sino en simular numéricamente la propagación de la onda en el medio de interés.

### 3.5 Simulación de la propagación de ondas

El efecto de las variaciones en el índice de refracción de la atmósfera sobre ondas que se propagan a su través está bien caracterizado mediante la teoría de Rytov si las fluctuaciones de intensidad son débiles. De igual modo, también son utilizables los resultados de la teoría asintótica para propagación con una turbulencia muy fuerte. Entre estos dos casos límite, sin embargo, se define toda una región de interés donde la estadística de la intensidad no se conoce tan bien. La simulación que vamos a describir a continuación es una herramienta muy efectiva para examinar esta región pero su aplicación se limita tan sólo a condiciones de moderadamente fuerte turbulencia. Por ello, es el complemento a los resultados teóricos obtenidos por las teorías de Rytov y asintótica para débil y muy fuerte turbulencia, respectivamente. Aunque el algoritmo de simulación que vamos a describir es bien conocido, las dificultades que de orden práctico se plantean a la hora tanto de su fijación en un código, como del control de todos los parámetros que lo caracterizan, hacen difícil encontrar en la bibliografía referencias que muestren resultados obtenidos utilizando estas técnicas.

Pese a la variedad de métodos desarrollados, el uso del análisis de Fourier ha prevalecido gracias a la eficiencia computacional del algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT). Los resultados que presentaremos sobre la propagación atmosférica se basan en estos algoritmos.

Tras describir el algoritmo de simulación, discutiremos los límites en la aplicabilidad de las simulaciones. Igualmente, observaremos la notación que hemos definido para las otras teorías en el resto del capítulo.

#### 3.5.1 Tratamiento de la ecuación de propagación: algoritmo de simulación.

La ecuación de onda en la aproximación parabólica

$$\nabla_T^2 E + 2jk \frac{\partial E}{\partial z} + 2k^2 n E = 0 \quad (3.88)$$

puede reescribirse como

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -j \left( \frac{\nabla_T^2}{2k} + kn \right) E \quad (3.89)$$

La integración de esta ecuación diferencial permite relacionar la amplitud compleja  $E$  en el plano  $z + \Delta z$  en términos de la solución en el plano  $z$ :

$$E(x,y,z+\Delta z) = \exp\left[-j\left(\frac{\nabla_T^2}{2k}\Delta z + \Delta S_n\right)\right] E(x,y,z) \quad (3.90)$$

donde  $\Delta S_n = k \int_z^{z+\Delta z} n dz$ . Prescindiendo de que  $\nabla_T^2$  es un operador diferencial y no una cantidad numérica, lo que hace que en general éste y  $\Delta S_n$  no conmuten, reemplazemos formalmente el operador exponencial por el llamado "operador separado simétricamente" (Fleck et al, 1976):

$$E(x,y,z+\Delta z) = \exp\left(-\frac{j}{4k}\Delta z\nabla_T^2\right) \exp(-j\Delta S_n) \exp\left(-\frac{j}{4k}\Delta z\nabla_T^2\right) \times E(x,y,z) + O(\Delta z^3) \quad (3.91)$$

donde  $O(\Delta z^3)$  es el remanente asociado al error de separar el operador  $\nabla_T^2$ .

La interpretación física de esta ecuación es sencilla: Por un lado, el término  $\exp(-j\Delta S_n)$  es un cambio de fase asociado a la turbulencia e idéntico a la transformación que provocaría una lente delgada interpuesta en el trayecto de propagación de la onda desde  $z$  hasta  $z+\Delta z$ . Estas pantallas de fase aleatoria permiten modelar el medio de propagación con un simple agrupamiento de lentes delgadas (figura 3-12). La implicación más importante de este resultado es que podemos dividir el medio extenso en capas de grosor  $\Delta z$ , cada una de las cuales introduce una contribución aleatoria independiente en la fase de la onda pero sin producir cambios en la amplitud. Las variaciones en esta amplitud aparecen como consecuencia de la propagación sobre varios  $\Delta z$ .

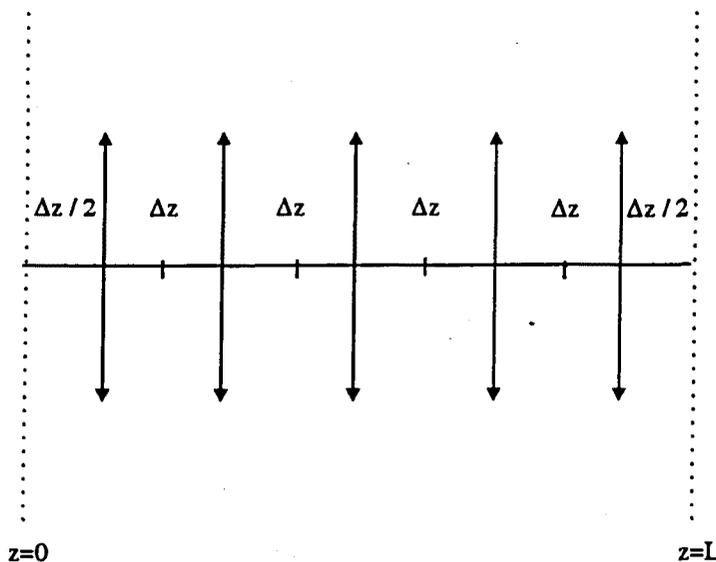


Fig. 3-12. Interpretación física del operador separado. Para introducir la simetrización sólo es necesario iniciar el procedimiento mediante un salto de propagación en el vacío desde  $z=0$  hasta  $z=\Delta z/2$ .

Por otro lado, los términos  $\exp(-j/(4k) \Delta z \nabla_T^2)$  expresan el efecto debido a la propagación de la onda a través de un medio homogéneo una distancia  $\Delta z$ , es decir, la solución a la ecuación de onda (3.88) para  $n=0$ . Las técnicas espectrales mencionadas anteriormente son la forma más cómoda de obtener esta solución: resolveremos en el dominio espectral la ecuación correspondiente

$$\nabla_T^2 E + 2jk \frac{\partial E}{\partial z} = 0 \quad (3.92)$$

descomponiendo el campo  $E$  en sus componentes de Fourier

$$E(x,y,z) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} E_{mn}(z) \exp[j(K_{xm}x + K_{yn}y)] \quad (3.93)$$

y resolviendo (3.92) explícitamente para cada una de ellas:

$$E_{mn}(z+\Delta z) = E_{mn}(z) \exp\left[ j \frac{\Delta z}{2k} (K_{xm}^2 m^2 + K_{yn}^2 n^2) \right] \quad (3.94)$$

aquí, las frecuencias espaciales  $K_{xm} = 2\pi/L m$ ,  $K_{yn} = 2\pi/L n$  se relacionan con las dimensiones  $L$  de la ventana de cálculo, mientras  $N$  es el número de componentes de Fourier (o número de puntos en el entramado de la ventana de cálculo). El salto  $\Delta z$  es, en principio, ilimitado, aunque se suele restringir para asegurar el correcto funcionamiento del campo en los contornos de la malla de cálculo entre dos planos sucesivos (más adelante se detallan estas consideraciones).

Todas estas consideraciones nos permiten establecer cuáles son los pasos que debe seguir el algoritmo de simulación para proceder a propagar una onda sobre el medio aleatorio, desde  $z$  hasta  $z+\Delta z$ , es decir, a través de la capa con grosor  $\Delta z$ . Siendo  $E(x,y,z-)$  el campo incidente en  $z$  sobre la capa, se define el siguiente procedimiento:

- a.- Añadimos el cambio de fase ocasionado por la turbulencia en la capa atmosférica  $\Delta z$  considerada:

$$E(x,y,z) = E(x,y,z-) \exp(-j\Delta S_n)$$

- b.- Descomponemos el campo a propagar  $E(x,y,z)$  en sus componentes de Fourier:  $E_{mn}(z)$  con  $m,n=1,\dots,N$ .
- c.- Propagamos en el vacío cada una de estas componentes una distancia  $\Delta z$ :

$$E_{mn}(z+\Delta z) = E_{mn}(z) \exp\left[ j \frac{\Delta z}{2k} (K_{xm}^2 m^2 + K_{yn}^2 n^2) \right]$$

- d.- Obtenemos el campo en el espacio directo, que se define en  $z+\Delta z-$  saliendo de

la pantalla anterior e incidiendo sobre la siguiente , mediante una transformación de Fourier inversa:

$$E(x,y,z+\Delta z-) = \sum_{n=-N/2+1}^{N/2} \sum_{m=-N/2+1}^{N/2} E_{mn}(z+\Delta z) \exp[ -j(K_{xm}x + K_{ym}y) ] \quad (3.93)$$

El procedimiento se repite para todas las pantallas hasta alcanzar el plano de observación. El diagrama de bloques de la figura 3-13 presenta el algoritmo de simulación descrito.

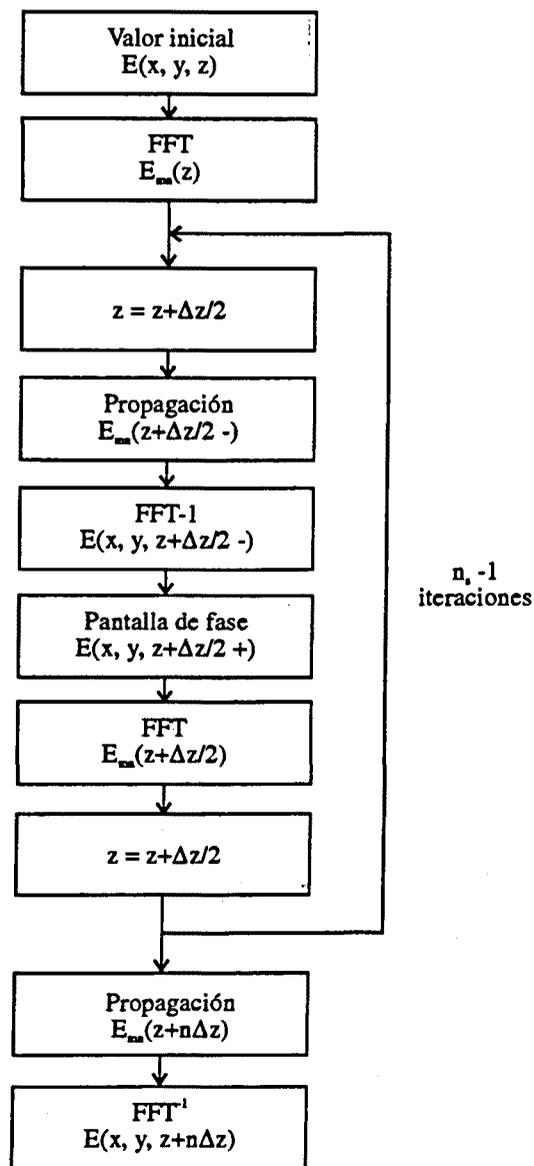


Fig. 3-13. Diagrama de bloques del algoritmo de simulación.

### 3.5.2 Tratamiento de la turbulencia atmosférica.

El efecto de la turbulencia atmosférica sobre la propagación desde  $z$  hasta  $z + \Delta z$  es introducido mediante el cálculo en cada posición  $z$  del cambio de fase

$$\Delta S_n(x,y) = k \int_z^{z+\Delta z} n(x,y,z) dz \quad (3.95)$$

Tratemos en detalle este término. El problema esencial al simular numéricamente estas pantallas de fase  $\Delta S_n(x,y)$  es que sólo pueden ser caracterizadas por sus propiedades estadísticas: debemos construir un algoritmo que provea de mallas de números aleatorios  $f_z(x,y)$  con las mismas propiedades estadísticas que las pantallas de fase  $\Delta S_n(x,y)$ . En particular, requeriremos que tanto la media del conjunto de funciones  $f_z$  sea cero,  $\langle f_z(x,y) \rangle = 0$ , como que su función de correlación,  $\langle f_z(x,y) f_z(x',y') \rangle$ , sea igual a la correspondiente cantidad de la pantalla  $\Delta S_n(x,y)$ . Como experimentalmente sólo tenemos información sobre la forma de  $B_{\Delta S_n}$  y por lo general no la hay sobre correlaciones de orden mayor, aceptaremos además la hipótesis de que la distribución de probabilidad de la malla aleatoria  $f_z$  es gaussiana (Rusbridge, 1968), de tal forma que la especificación de  $\langle f_z \rangle$  y  $B_f$  es suficiente para conocer todos los momentos de orden mayor.

#### a) Estadística de las pantallas de fase.

Con estas consideraciones, calculemos la función de correlación y el correspondiente espectro espacial de las variaciones de fase  $\Delta S_n$  que necesitamos para especificar la estadística de cada pantalla de fase  $f_z$ . Al utilizar el operador separado simétricamente (3.91), los efectos de difracción asociados a la propagación se diferencian del cambio de fase introducido por la pantalla de fase, por lo que podemos definir la función de correlación de la fase  $\Delta S_n$  como un resultado de la óptica geométrica:

$$\begin{aligned} B_{\Delta S_n}(x',y') &= \langle \Delta S_n(x,y) \Delta S_n(x+x',y+y') \rangle = \\ &= \left\langle k \int_z^{z+\Delta z} n(x,y,z) dz \cdot k \int_z^{z+\Delta z} n(x+x',y+y',z) dz \right\rangle = \\ &= k^2 \int_z^{z+\Delta z} dz_1 \int_z^{z+\Delta z} dz_2 \langle n(x,y,z_1) n(x+x',y+y',z_2) \rangle \end{aligned} \quad (3.96)$$

donde  $\langle n(x,y,z_1) n(x+x',y+y',z_2) \rangle$  es la función de correlación de las fluctuaciones del

índice de refracción,  $B_n$ . Suponiendo que no hay correlación entre los remolinos turbulentos sobre dos pantallas sucesivas, es decir,

$$\langle n(x,y,z)n(x+x',y+y',z+\Delta z) \rangle = 0 \quad (3.97)$$

podemos simplificar la expresión de  $B_{\Delta S_n}$ :

$$B_{\Delta S_n}(x',y') = k^2 \Delta z B_n(x',y') \quad (3.98)$$

(Obsérvese que esta suposición, que no es más que la aproximación de Markov ya vista a lo largo de este capítulo, restringe  $\Delta z$  a valores mayores que la escala externa de la turbulencia  $L_0$  que caracteriza el medio de propagación: en efecto, el suponer  $\Delta z < L_0$  conllevaría una correlación entre las fluctuaciones del índice de pantallas sucesivas.) Expresando  $B_n(x',y')$  como la transformada de Fourier del espectro espacial de las fluctuaciones del índice de refracción atmosférico  $\Phi_n(K_x, K_y)$  descrito en el capítulo anterior (Tatarskii, 1971):

$$B_n(x',y') = 2\pi \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(K_x, K_y) \exp[j(K_x x' + K_y y')] dK_x dK_y \quad (3.99)$$

la relación (3.98) queda

$$B_{\Delta S_n}(x',y') = 2\pi \Delta z k^2 \int \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(K_x, K_y) \times \exp[j(K_x x' + K_y y')] dK_x dK_y \quad (3.100)$$

O bien, definiendo el espectro de potencia de las fluctuaciones de fase introducidas por una pantalla de grosor  $\Delta z$ ,  $\Phi_{\Delta S_n}(K_x, K_y)$ , como la transformada de Fourier de  $B_{\Delta S_n}$ :

$$\Phi_{\Delta S_n}(K_x, K_y, K_z) = 2\pi \Delta z k^2 \Phi_n(K_x, K_y, K_z=0) \quad (3.101)$$

#### b) Generación de pantallas aleatorias de fase.

Una vez suponemos la estadística que describe de forma general las pantallas de fase, abordemos el problema de generar realizaciones particulares que verifiquen esa estadística: dada la función de correlación y un conjunto de números aleatorios, escogidos de una distribución gaussiana, operemos sobre este conjunto de forma que se produzcan elementos de nuestro conjunto de funciones  $f_z(x,y)$  con la función de correlación especificada. Cada uno de estos elementos será una malla de puntos con un cierto espaciado sobre el plano XY.

Un método para generar las pantallas de fase es el filtrar ruido blanco gaussiano obteniendo mallas donde los puntos vecinos no son independientes (Martin et al, 1988): si, en primer lugar, discretizamos el espectro de la fase  $\Delta S_n$ ,  $\Phi_{\Delta S_n}(K_x, K_y)$ , sobre una malla de NxN puntos de espaciado  $\Delta K$  en el espacio transformado, cada punto de la malla representará un modo de Fourier; seguidamente, utilizemos técnicas de Montecarlo y generemos una superficie de NxN números pseudoaleatorios, elegidos de una distribución gaussiana de media cero y varianza unidad,  $A(K_x, K_y)$ . Si, por último, filtramos esta malla de ruido blanco con la discretización del espectro  $\Phi_{\Delta S_n}$  de forma que se obtengan varianzas adecuadas,

$$A(K_x, K_y) [\Phi_{\Delta S_n}(K_x, K_y)]^{1/2} \quad (3.102)$$

y transformamos inversamente por Fourier, obtenemos una pantalla de fase:

$$f_z(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(K_x, K_y) [\Phi_{\Delta S_n}(K_x, K_y)]^{1/2} e^{j(K_x x + K_y y)} dK_x dK_y \quad (3.103)$$

que define una malla de puntos correlados de acuerdo a la estadística deseada.

Recordando la relación entre el espectro de la fase para cada pantalla y el espectro de las fluctuaciones del índice de refracción,  $\Phi_{\Delta S_n}(K_x, K_y) = 2\pi \Delta z \Phi_n(K_x, K_y, K_z=0)$ ,

$$f_z(x, y) = [2\pi \Delta z k^2]^{1/2} \iint_{-\infty}^{\infty} A(K_x, K_y) [\Phi_n(K_x, K_y)]^{1/2} \times \\ \times e^{j(K_x x + K_y y)} dK_x dK_y \quad (3.104)$$

podemos generar pantallas de fase sólo con conocer el espectro del medio  $\Phi_n$ . En las figura (3-14) se presentan varias pantallas generadas por esta técnica. En los cálculos se ha considerado un espectro modificado de Von-Kármán (ecuación 2.6) con diferentes valores para las escalas externas e internas de la turbulencia. En ellas, el brillo de cada pixel en la imagen es proporcional a la diferencia de fase que la pantalla impone a la onda incidente en ese punto (si no hubiera fluctuaciones, la imagen tendría un brillo uniforme de valor el medio de la escala utilizada). Puede observarse la presencia tanto de variaciones de gran escala, como estructuras de pequeña escala en las figuras a) y c). En b) y d), las fluctuaciones de pequeña escala desaparecen y permanecen las variaciones de gran escala.

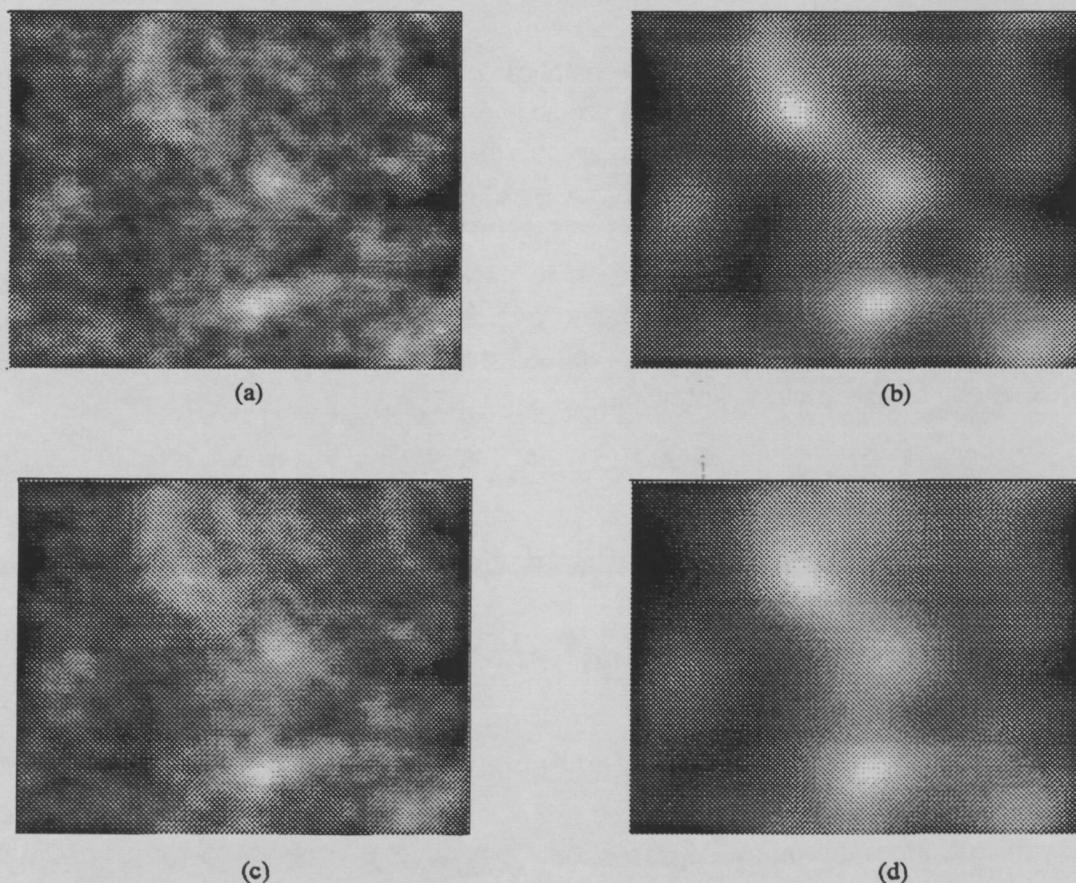


Figura 3-14. Realizaciones de pantallas de fase para un espectro modificado de Von-Kármán.  
 a)  $L_0=10\text{m}$ ,  $l_0=1\text{cm}$ ; b)  $L_0=10\text{m}$ ,  $l_0=10\text{cm}$ ; c)  $L_0=15\text{m}$ ;  $l_0=1\text{cm}$ .

### 3.5.3 Optimización de las simulaciones: bandas de absorción.

Tanto la solución numérica de la ecuación de onda homogénea como el algoritmo de generación de pantallas de fase conllevan el uso de transformadas discretas de Fourier. La teoría del muestreo (Press et al, 1985) nos enseña que debemos considerar con detalle las cuestiones de muestreo y enventanado: si deseamos obtener una solución muy precisa, hemos de mantener pequeña tanto la intensidad del haz en los límites de la malla en el espacio directo, como su transformada de Fourier en los bordes del entramado en el espacio transformado. En particular, la utilización de una cierta malla de cálculo puede limitar la resolución espacial del campo propagado por debajo del valor deseado.

Una forma de incrementar el rango dinámico espacial de las transformadas de Fourier es aumentar el número de puntos  $N \times N$  de la malla de cálculo. Sin embargo, las limitaciones de computación lo imposibilitan en la mayoría de los casos y hacen necesario el considerar otras técnicas. Una de las más utilizadas consiste en definir zonas de absorción en los bordes de la malla de cálculo. Imponiendo una atenuación

determinista en los extremos del mallado, las ondas que alcanzan estos límites en cada salto de propagación sufren una disminución gradual de la amplitud. Con ello conseguimos evitar interferencias espúreas en el interior de la malla de cálculo, El factor de atenuación se define de manera que decaiga muy rápidamente cuando nos alejamos del borde del mallado:

$$L(\rho) = \begin{cases} \exp\left[-\alpha \rho \exp\left(-\frac{\rho - \rho_{\max}}{\beta}\right)\right] & \text{si } \rho \leq \rho_e \\ \exp(-\alpha \rho) & \text{si } \rho > \rho_e \end{cases} \quad (3.105)$$

donde  $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $\beta$  es el ancho de la región con absorción significativa y  $\alpha$  la intensidad de esta absorción. Con  $\alpha = 25$ ,  $\beta = 0.004 \rho_e$  y  $\rho_e = L/2$ , siendo L las dimensiones de la malla, se pueden conseguir absorciones mayores a los 100 dB para distancias del orden de las de la malla de cálculo (figura 3-15).

Otra técnica, propiciada por los avances teóricos en la propagación de haces láser gaussianos, que trata de minimizar los efectos de aliasing en la propagación, evitando mallas con un excesivo número de puntos, aplica los llamados cambios de coordenadas adaptativos (Fleck et al, 1977; Wash y Ulrich, 1978). En esencia el método consiste en reescalar las variables independientes  $(x, y, z)$  y el campo  $E$  propagado de forma que el centroide de intensidades permanezca invariante y el ensanchamiento (o focalización) del haz sean cero para toda la propagación. Esto último provoca que el intervalo de muestreo en el espacio transformado de Fourier decrezca al aumentar la distancia de propagación, pero conseguimos que los valores del campo en los extremos de la malla de cálculo en el espacio directo sean pequeños y, por tanto, incrementamos el rango dinámico espacial del entramado. De hecho, esta técnica es estrictamente válida sólo para propagaciones numéricas en el vacío. En un medio con un índice de refracción arbitrario sólo conseguiremos parte de las ventajas comentadas. La dificultad que implica su fijación en el algoritmo de simulación, la baja eficiencia computacional y la posibilidad de introducir en nuestras simulaciones errores sistemáticos de difícil cuantificación, hace que las coordenadas adaptativas sean menos utilizadas que las previas bandas circulares de absorción.

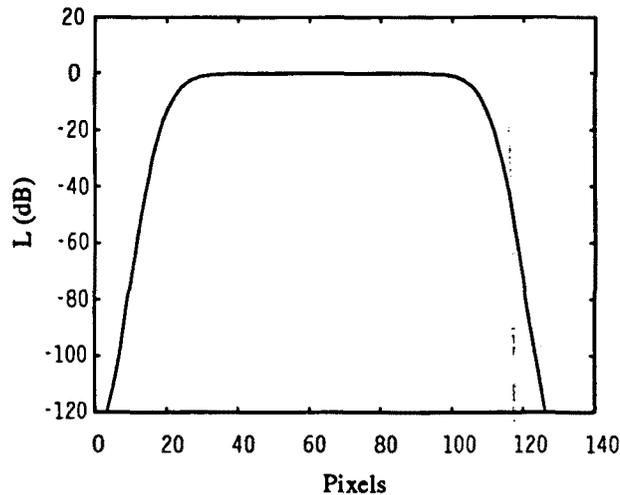


Figura 3-15. Banda de absorción en los bordes de la malla de cálculo:  $\alpha = 25$  ,  $\beta = 0.004 \rho_e$  y  $\rho_e = L/2$

### 3.5.4 Límites en la aplicabilidad de las simulaciones.

Cuando se utilizan las técnicas que estamos describiendo es necesario que el algoritmo definido simule correctamente tanto la propagación en el vacío, como los efectos que la turbulencia atmosférica introduce en la onda. Analicemos cuáles son las relaciones que deben establecerse entre los diferentes parámetros que caracterizan a la propagación en el vacío (longitud de onda,  $\lambda$  , y longitudes de Fresnel totales y parciales,  $R_f = \sqrt{\lambda L}$ ,  $r_f = \sqrt{\lambda \Delta z}$  , con  $L$  la distancia de propagación y  $\Delta z$  la longitud de cada salto en el vacío) y los parámetros que definen a nuestro medio (las escalas internas y externas,  $l_o$  y  $L_o$  , y la turbulencia integrada  $\sigma_I^2$  ) para que las simulaciones modelen correctamente una onda propagada a través de la atmósfera turbulenta.

En primer lugar, ya se ha establecido que este algoritmo necesita que no haya correlación entre los remolinos turbulentos de dos pantallas consecutivas (aproximación de Markov). Esta condición restringe  $\Delta z$  a valores mayores que la escala externa de la turbulencia,  $L_o$ ; o bien,  $r_f > \sqrt{L_o k}$  .

Por otro lado, el número de pantallas  $n_p$  para una propagación dada no puede ser hecho arbitrariamente pequeño (o la distancia entre pantallas -y por tanto  $r_f$  no puede ser arbitrariamente grande). Para caracterizar un medio extenso, hemos supuesto que no se producen fluctuaciones de intensidad sobre la distancia  $\Delta z$  y que el efecto del medio es modelable añadiendo una fase pura. Podemos cumplir esta condición si imponemos que la difusión de la onda sobre la distancia entre pantallas es débil ,es decir, que la varianza normalizada predicha por Rytov para la intensidad verifique  $\sigma_1^2(\Delta z) < 0.1$  . Aun si la simulación realizada representase un medio extenso débilmente turbulento,  $\sigma_1^2(L_z) < 0.1$  , con  $L_z$  la longitud total del trayecto de propagación,

debemos muestrear el trayecto con el número suficiente de pantallas. Para ello se exige que menos del 10% del centelleo total ocurra sobre la distancia entre pantallas:  $\sigma_1^2(\Delta z) < 0.1 \sigma_1^2(L_z)$  (Martin et al, 1988). Así, para un valor dado de  $\sigma_1^2$  integrado sobre todo el trayecto, estas condiciones determinan un mínimo  $n_p$  y, consecuentemente, un valor máximo para la distancia de Fresnel entre pantallas,  $r_f$ .

Por último, la limitación más importante a la aplicabilidad de las simulaciones es el rango dinámico espacial impuesto por el tamaño finito de la malla de cálculo. Para que una simulación reproduzca la estructura fina del espectro de intensidad, la frecuencia espacial más grande de la malla debería ser mayor que la frecuencia máxima  $K_{\max}$  en la representación de Fourier del espectro de intensidad (criterio de Nyquist):

$$\min \left( \frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta y} \right) \geq K_{\max} \quad (3.106)$$

donde  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  son los pasos de muestreo en la malla. Igualmente, si queremos que todos los componentes importantes del espectro de intensidad estén contenidos en la ventana espectral definida por la malla, debemos considerar el valor mínimo  $K_{\min}$

$$\max \left( \frac{2\pi}{L_x}, \frac{2\pi}{L_y} \right) \leq K_{\min} \quad (3.107)$$

con  $L_x = N\Delta x$ ,  $L_y = N\Delta y$  las dimensiones del entramado de cálculo función del número de puntos  $N \times N$  en la malla de cálculo. Cuando  $\sigma_1^2$  aumenta, el rango dinámico  $K_{\max}/K_{\min}$  necesario incrementa hasta superar el rango dinámico disponible. Si ello ocurre, los problemas de aliasing falsean los resultados de la simulación. Estas limitaciones hacen necesario estimar el rango dinámico requerido para una simulación dada como paso previo a su realización.

### 3.5.5 Perfiles de los campos iniciales.

Si queremos que nuestra simulación sea válida, no sólo hemos de escoger con cuidado el conjunto de parámetros anterior, sino que también hemos de considerar en detalle la elección del campo inicial  $E(x, y, 0)$ .

Por todo lo visto hasta ahora, desearíamos que nuestro campo estuviese muy confinado tanto espacial como angularmente (ensanchamiento). Sin embargo, las ondas planas y esféricas se oponen por definición a este confinamiento: las primeras, sin ensanchamiento angular pero extendidas sobre todo el espacio; y las segundas, aunque originadas en un único punto del espacio, divergentes en todas direcciones. Solamente un tipo de ondas, los haces gaussianos, admiten simultáneamente un alto aislamiento espacial y angular; así, la energía del haz se extiende en una pequeña región en torno

al eje del haz, y la divergencia de las normales al frente de ondas es la mínima permitida por la ecuación de onda. La amplitud inicial para uno de estos haces puede escribirse como

$$E(x,y,0) = E_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^2\right] \quad (3.108)$$

donde  $\rho = (x^2+y^2)^{1/2}$  es la distancia transversal, en nuestro caso desde el centro de la malla, y  $2\sigma$  el ancho inicial a  $1/e^2$  del haz. Ante la imposibilidad de definir en nuestra malla de cálculo, necesariamente finita, campos iniciales imposibles de limitar espacial y angularmente, hay que aproximar las ondas planas y esféricas mediante expresiones que introduzcan las características de confinamiento de los haces gaussianos. Para simular un haz con un comportamiento próximo a una onda plana, o haz casi plano, usaremos la distribución de intensidad dada por (Martin et al., 1990)

$$E(x,y,0) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{\sigma^2}\right)^8\right] \quad (3.109)$$

equivalente a considerar una apertura de diámetro  $2\sigma$  uniformemente iluminada con un efecto de apodizado o suavizado de los bordes. Con esto conseguimos ensanchamientos despreciables y un frente de onda plano en las proximidades del eje del haz, comportamiento que clásicamente describe la propagación de una onda plana.

Por otro lado, cuando pretendemos que el campo inicial represente una fuente puntual capaz de generar una onda esférica, éste sólo debe hacerlo sobre una extensión angular limitada. Si no fuera así, para propagaciones demasiado largas, la energía alcanzará los bordes de la malla de cálculo produciendo aliasing; igualmente, para ensanchamientos muy grandes, la ecuación parabólica, base de esta técnica, dejaría de ser válida. Del mismo modo, el ancho espacial de la fuente no puede ser hecha arbitrariamente pequeña con el fin de alcanzar el ensanchamiento angular deseado (la resolución de la malla de cálculo establece un mínimo en el tamaño de una fuente puntual). Martin y Flatté (1990) resuelven estos problemas simulando una onda esférica a través de una modificación de un haz gaussiano que incrementa la divergencia del haz (haz casi esférico):

$$E(x,y,0) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(-jk\frac{\rho^2}{2f}\right) \quad (3.110)$$

El término de fase añadido corresponde a pasar el haz gaussiano a través de una lente divergente de longitud focal  $f$ . Los perfiles de intensidad y fase de estos haces se muestran en la figura 3-16.

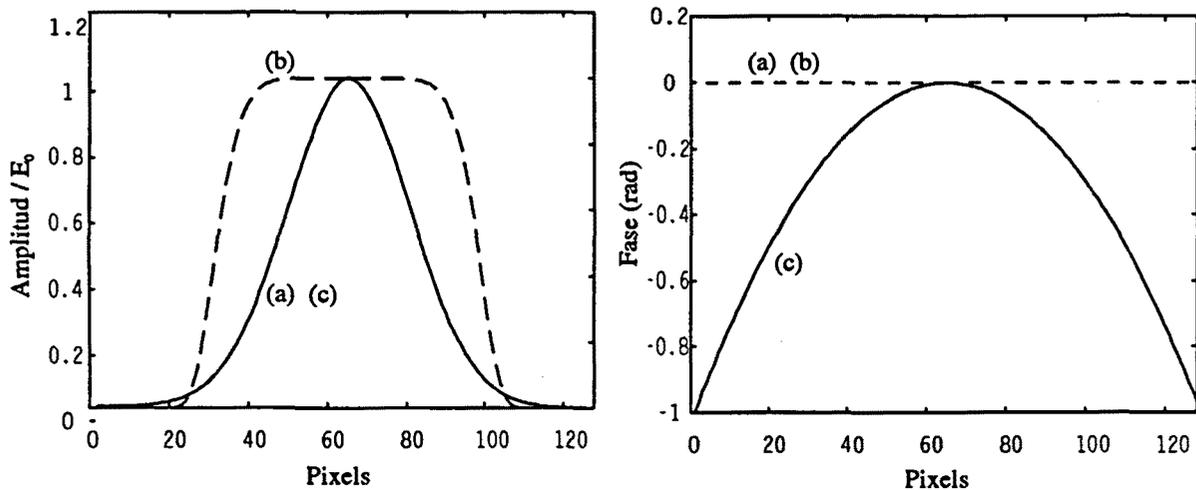


Figura 3-16. Perfiles de intensidad de los campos iniciales. a) Haz gaussiano; b) haz casi plano; c) haz casi esférico.

### 3.5.6 Resultados.

Cualquier simulación nace del interés de estudiar un problema para el cual las teorías analíticas son inadecuadas. Esto hace difícil estimar la exactitud de las simulaciones bajo las condiciones de estudio interesante. Por ello, es necesario evaluar el funcionamiento correcto de la simulación utilizando parámetros para los cuales se hayan obtenido previamente resultados numéricos o analíticos. En nuestro caso, utilizemos la teoría de Rytov para estimar la corrección de nuestras simulaciones: calculemos la función de covarianza de intensidad con  $\sigma_1^2 = 0.1$ , tanto para onda plana como onda esférica, y comparemos con los resultados de las simulaciones. En la tabla 3-I se resumen los datos más relevantes de entrada al algoritmo de simulación. Suponemos que la luz es monocromática. Igualmente, aunque la simulación admite condiciones más generales, consideramos que la constante de estructura  $C_n^2$  y las escalas de la turbulencia,  $L_0$  y  $l_0$ , son constantes a lo largo de todo el trayecto de propagación (atmósfera estable).

Los errores estadísticos asociados a fluctuaciones del valor medio de la varianza de la intensidad podrían disminuirse simplemente promediando más realizaciones de una realización dada. Sin embargo, tal como hemos comprobado, los errores sistemáticos producidos por la naturaleza no ideal de los modelos para onda plana y esférica son del mismo orden de magnitud que el error producido al promediar unas 50 realizaciones. Por ello, aumentar el número de realizaciones promediadas no mejorará significativamente la exactitud de nuestros resultados.

En la figura 3-17 comparamos los resultados teóricos y simulados para la covarianza de las fluctuaciones de intensidad. Las curvas son prácticamente iguales, con

errores relativos menores en cualquier caso al 3%.

Una vez hemos establecido con estos ejemplos el funcionamiento correcto de las simulaciones, presentemos algunos resultados propios del método y difíciles de obtener con los métodos analíticos más restrictivos. Considerando los parámetros de propagación adecuados (tabla 3-II) estimemos las funciones de covarianza para turbulencia integrada  $\sigma_1^2 = 1$  y  $\sigma_1^2 = 10$  (figura 3-18). Como era de esperar, hay una clara tendencia al estrechamiento de las funciones de covarianza cuando la turbulencia integrada aumenta (para mayor claridad, estas funciones se presentan normalizadas a la varianza). Hay que destacar las discrepancias entre estos resultados y los presentados en la teoría asintótica para iguales valores de la varianza  $\sigma_1^2$  (figura 3-11). Eran de esperar si recordamos que la teoría asintótica sólo es valida cuando la varianza  $\sigma_1^2$  para el trayecto considerado es muy elevada. La figura 3-19 muestra como también los resultados de nuestras simulaciones exhiben el efecto de saturación observado experimentalmente.

Tabla 3-I. Datos para la simulacion numérica:  $\sigma_1^2 = 0.1$

Parámetro	Valor
Longitud de onda del láser	10 $\mu m$
Distancia de propagación	100 m
Escala externa de la turbulencia	1 m
Escala interna de la turbulencia	5 mm
Tamaño de la malla de cálculo	1 m
Nodos de la malla de cálculo	128x128
Número de pantallas de fase	20
Número de realizaciones	50

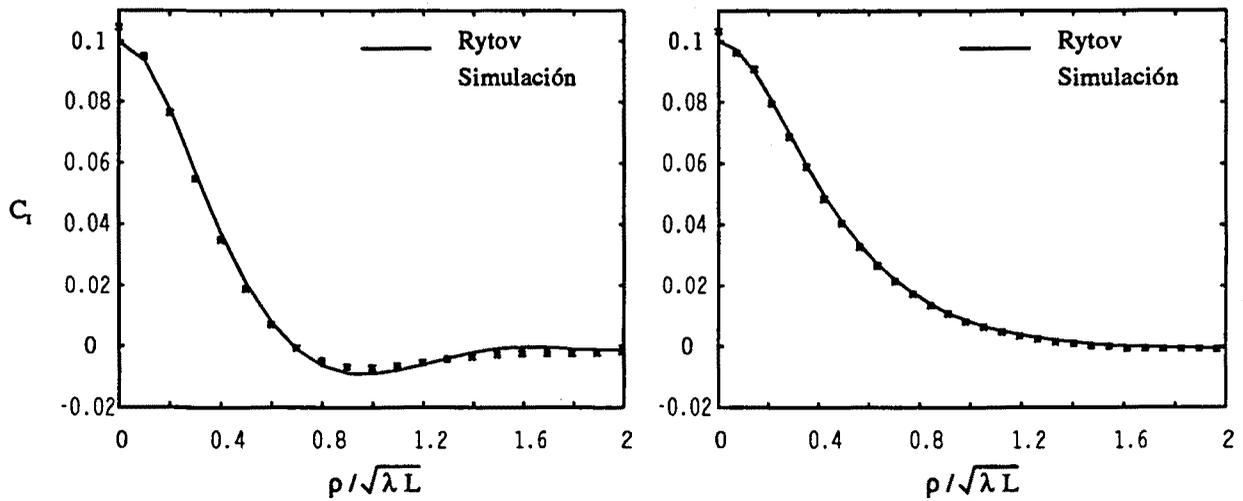


Figura 3-17. Comparación de las simulaciones con la teoría de Rytov para  $\sigma_1^2 = 0.1$  . a) Onda plana; b) onda esférica.

Tabla 3-II. Datos para la simulación numérica:  $\sigma_1^2 = 1, 10$

Parámetro	Valor
Longitud de onda del láser	10 $\mu m$
Distancia de propagación	200 m
Escala externa de la turbulencia	1 m
Escala interna de la turbulencia	5 mm
Tamaño de la malla de cálculo	2 m
Nodos de la malla de cálculo	256x256
Número de pantallas de fase	20
Número de realizaciones	50

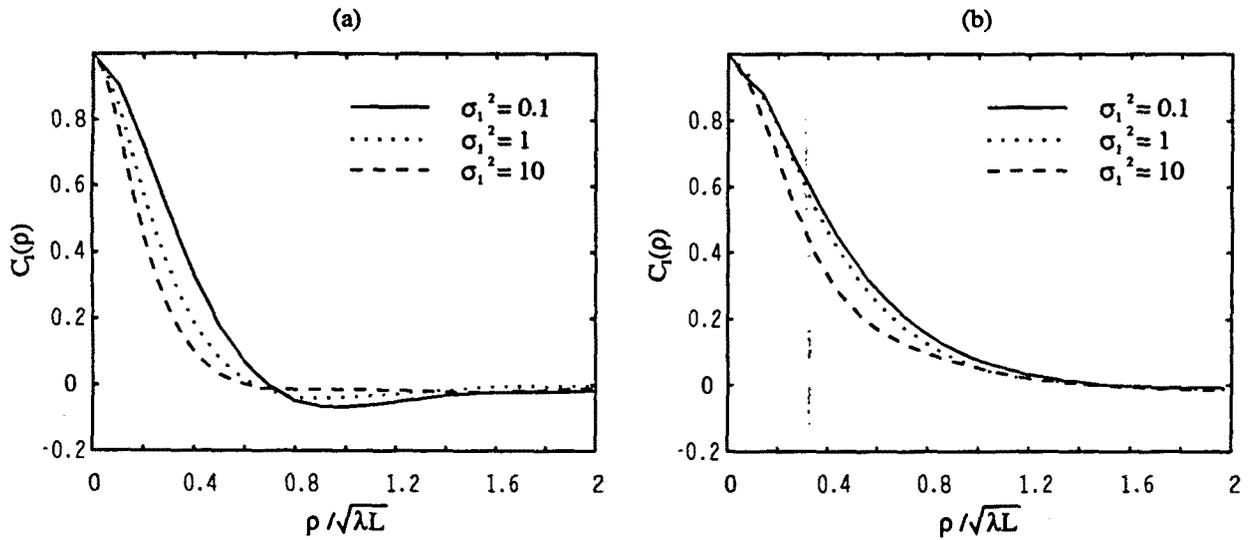


Figura 3-18. Funciones de covarianza de las fluctuaciones de intensidad correspondientes a las turbulencias integradas  $\sigma_1^2 = 0.1, 1, 10$ .

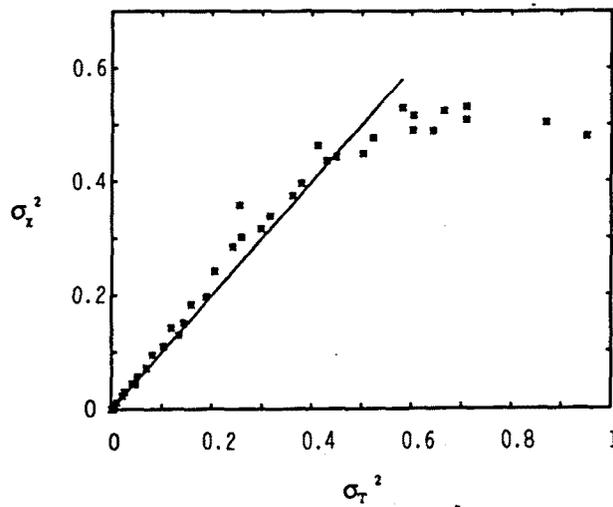


Figura 3-19. Evolución del centelleo para una onda plana función de  $\sigma_T^2$ . La línea continua muestra la predicción de la teoría de Rytov.

## CAPITULO 4

# DATOS EXPERIMENTALES PARA UN ENLACE ÓPTICO EN LA ATMÓSFERA TURBULENTA

### 4.1 Introducción.

En los capítulos previos hemos presentado los tratamientos teóricos generales de la propagación de ondas en un medio aleatorio como la atmósfera. Allí dimos especial atención al conocimiento de la física de los fenómenos implicados, el formalismo matemático necesario para la descripción de éstos y mostramos algunos resultados teóricos significativos.

Extendamos ahora los resultados de las teorías anteriores abordando cuestiones de interés. De esta forma, podremos considerar algunas aplicaciones de utilidad en los problemas que usualmente aparecen cuando se examina la propagación de ondas en la atmósfera turbulenta.

En la mayoría de los sistemas de ingeniería que conllevan propagación atmosférica, las características temporales de las fluctuaciones de la señal recibida determinan de forma decisiva su diseño. Sin embargo, las teorías presentadas hasta el momento describen únicamente las características espaciales de la onda que llega al plano de recepción. Por ello, tras estudiar experimentalmente la estructura espacial del centelleo mediante las funciones de covarianza de las fluctuaciones de intensidad, estableceremos la relación entre las fluctuaciones espaciales y las fluctuaciones temporales de los parámetros que definen la onda sobre el receptor. Entre ellos, nos limitaremos a las fluctuaciones de intensidad y de ángulo de llegada, un parámetro este último ligado a las perturbaciones de fase, por la importancia que éstos poseen al establecer el funcionamiento del sistema receptor.

Una vez establecidas estas relaciones, nos preguntaremos por las funciones de densidad de probabilidad de las fluctuaciones temporales de intensidad y ángulo de llegada: la completa caracterización de cualquier sistema de comunicaciones exige el conocimiento no sólo de algunos parámetros relevantes en la estadística de la señal recibida, tales como la varianza, sino la ley de probabilidad que rige las fluctuaciones en la onda en recepción.

Todos los resultados teóricos presentados serán validados mediante la comparación con resultados experimentales. Parte básica de este capítulo será la presentación de éstos, así como de las técnicas de adquisición y procesado utilizadas. Por ello, y antes de continuar, hagamos una descripción somera del equipo utilizado en la realización de nuestras medidas.

#### 4.1.1 Descripción del experimento: localización e instrumentación.

En el marco del proyecto SILEX ('Semiconductor laser Intersatellite Link Experiment') de la Agencia Espacial Europea (Popescu et al., 1993), participamos en la realización de enlaces ópticos atmosféricos experimentales entre dos puntos situados a 2400 m de altura y separados 143.5 Km en las islas de Tenerife y La Palma del archipiélago Canario. El propósito era comprobar las esperadas buenas características de este escenario para la instalación de una estación óptica terrena que evaluara y monitorizara los sistemas ópticos de comunicaciones embarcados en los satélites (Ruiz et al., 1990). Si bien el equipo y las condiciones de experimentación no estuvieron tan controlados, la experiencia que adquirimos entonces ha sido la guía esencial en el desarrollo del trabajo experimental que presentamos a continuación.

Nuestros experimentos fueron realizados en la ciudad de Barcelona sobre un trayecto de 3,4 Km, cuyo perfil se muestra en la figura 4-1. La fuente emisora fue un diodo láser de GaAlAs ( $\lambda = 830\text{nm}$ ) que permitía una potencia máxima radiada de 25 mW. Mediante una señal externa de 10 KHz, modulamos la potencia emitida; esto nos

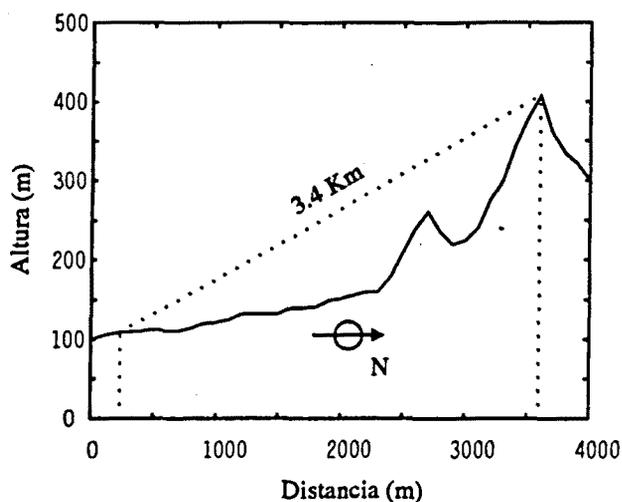


Fig. 4-1. Perfil del trayecto de propagación.

permitía discriminar en recepción nuestra señal de la iluminación de fondo asociada a fuentes naturales ('background'). Se utilizaba un pequeño colimador a la salida del diodo para fijar la divergencia del haz en un valor próximo a 1 mrad. Con ello, asegurábamos, para medidas realizadas en las proximidades del eje del haz, un comportamiento cercano al de una onda esférica poco afectada por el perfil gaussiano del haz, al tiempo que manteníamos una densidad de potencia suficiente para el correcto funcionamiento del equipo de recepción.

Tras propagarse a través de la turbulencia atmosférica, la señal era recogida por ópticas de diámetro variable y pasada a través de filtros interferenciales y de color para eliminar en lo posible la luz de fondo que llegaba a los receptores (figura 4-2).

Para el análisis de la estadística de potencia se utilizaron fotodetectores de silicio. Las corrientes de salida alimentaban un amplificador de transimpedancia seguido de un amplificador de tensión. A continuación, un detector de envolvente demodulaba la señal recibida y se recuperaban las fluctuaciones de potencia debidas a la turbulencia atmosférica. Las ganancias y anchos de banda de todo el sistema de detección podían ser ajustados a las necesidades de cada medida. Finalmente, un ordenador controlaba la tarjeta de adquisición de 12 bits que digitalizaba la señal demodulada y amplificada, que se almacenaba para su posterior procesado. La figura 4-3 muestra el diagrama de bloques de la electrónica de recepción.

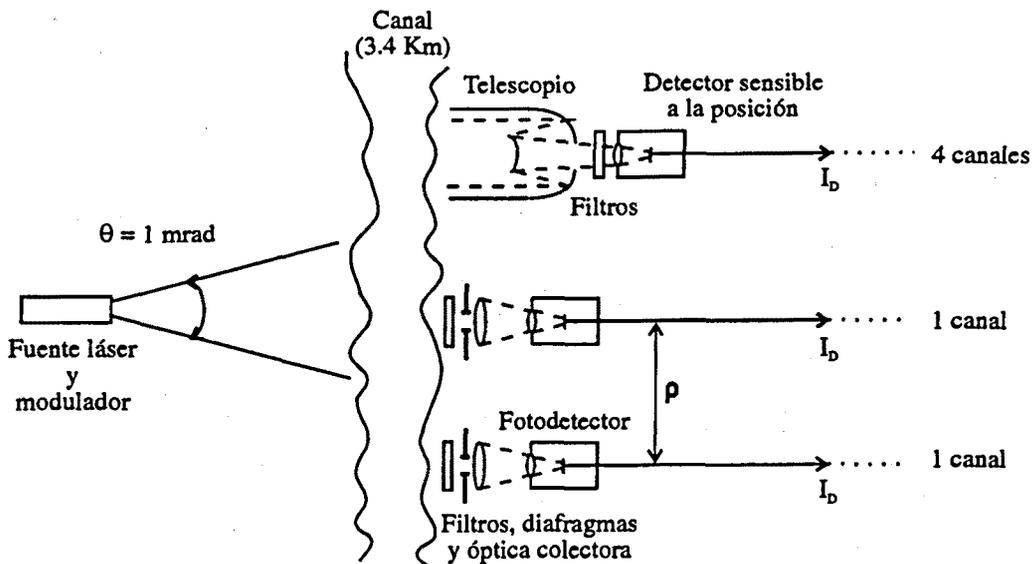


Fig. 4-2. Configuración del sistema receptor.

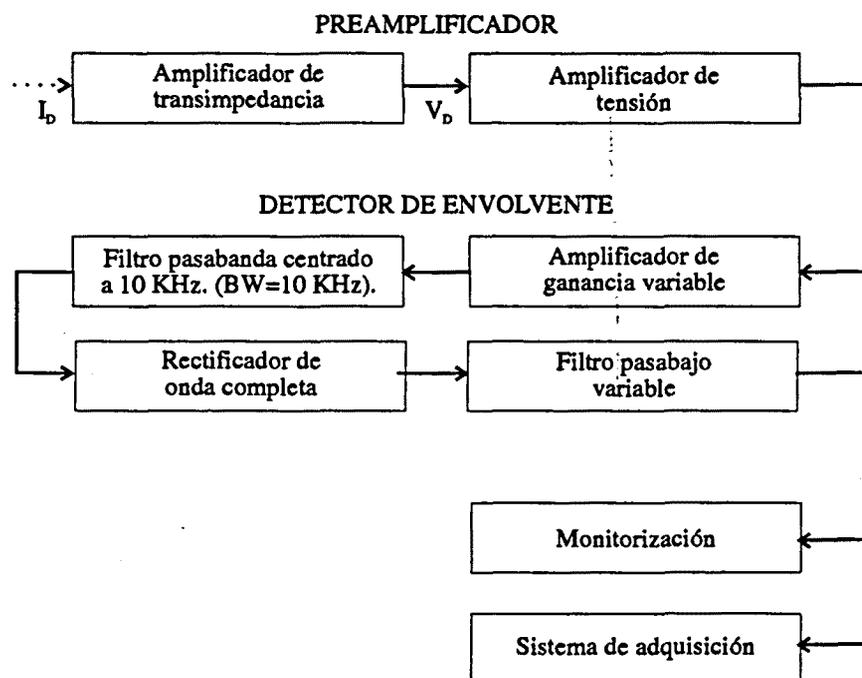


Fig. 4-3. Diagrama de bloques de la electrónica de recepción.

Junto a las medidas de centelleo, se estudió la estadística de las fluctuaciones del ángulo de llegada. Las distorsiones introducidas por la turbulencia provocan que la inclinación media del frente de ondas sobre la apertura receptora fluctúe aleatoriamente. Una medida del movimiento consecuente de la mancha focal producida por el sistema óptico nos permitía conocer la magnitud de las fluctuaciones del ángulo de llegada. Para ello, situamos un fotodetector sensible a la posición en el plano focal de un telescopio Schmidt-Cassegrain de 20 cm de diámetro, obscurecimiento central de 6 cm y distancia focal de 2 m. De este modo asegurábamos la suficiente sensibilidad en la determinación de la posición de la mancha focal. Como en las medidas del centelleo, la señal recibida por el fotodetector, tras atravesar los filtros interferenciales y de color, era amplificada, demodulada y filtrada antes de llegar al sistema de adquisición: la electrónica descrita para los fotodetectores de silicio se repite para cada una de las cuatro salidas del fotodetector sensible a la posición.

## 4.2 Correlación espacial de las fluctuaciones de intensidad.

El propósito de este apartado es el mostrar observaciones de las funciones de covarianza de la intensidad para diferentes condiciones de propagación y tratar de validar los resultados teóricos que al respecto habíamos presentado en el capítulo anterior.

La varianza de las fluctuaciones de intensidad es una forma muy limitada de describir las características de la propagación óptica atmosférica: si queremos conocer la estructura espacial del centelleo, debemos medir la función de covarianza de las fluctuaciones de intensidad. Esta información es necesaria para el diseño de cualquier sistema óptico, pues, como veremos, de sus características dependerá la facilidad con que una o varias aperturas promedien las fluctuaciones de intensidad no deseadas.

Hay que hacer notar que para el caso de débil turbulencia, hemos teorizado, como suele ser usual, sobre la varianza y la covarianza de las fluctuaciones de log-amplitud en lugar de las fluctuaciones de intensidad. Esto, sin embargo, no significará un gran inconveniente si la log-amplitud está normalmente distribuida: como ya mostramos (véase el apartado 4.4 anterior) que la función de covarianza de la log-amplitud

$$B_x(\rho_1, \rho_2) \equiv \langle (\chi(\rho_1) - \langle \chi(\rho_1) \rangle) (\chi(\rho_2) - \langle \chi(\rho_2) \rangle) \rangle \quad (4.1)$$

se relaciona con la equivalente de intensidad

$$B_I(\rho_1, \rho_2) \equiv \langle (I(\rho_1) - \langle I(\rho_1) \rangle) (I(\rho_2) - \langle I(\rho_2) \rangle) \rangle \quad (4.2)$$

a través de la expresión

$$B_I(\rho_1, \rho_2) = I_0^2 \left\{ \exp[4B_x^2(\rho_1, \rho_2)] - 1 \right\} \quad (4.3)$$

donde  $I_0^2$  es la intensidad media  $\langle I(\rho_1) \rangle = \langle I(\rho_2) \rangle$ . Así, conocidos los resultados teóricos para  $B_x$ , los propios para  $B_I$  se obtienen de (4.3).

Habíamos modelado los remolinos turbulentos como lentes e interpretamos a las fluctuaciones de intensidad como una consecuencia de la capacidad de éstas de focalizar la radiación en el receptor. En débil turbulencia, mostramos cómo las lentes (remolinos) más eficientes al focalizar son aquellas con diámetros del orden de la longitud de Fresnel  $\sqrt{\lambda z}$ . Esto hace que la teoría establezca el que en débil turbulencia las fluctuaciones de intensidad estén correladas sobre distancias transversales  $\sqrt{\lambda L}$ , con  $L$  la distancia total de propagación. Sin embargo, la naturaleza y características del centelleo en fuerte turbulencia son bastantes diferentes de aquéllas en débil turbulencia. La razón física es que ahora hay que considerar el hecho de que la onda incidente se hace más y más incoherente a medida que se propaga en el medio. Así, los remolinos

están difundiendo una onda sólo parcialmente coherente lo que merma su capacidad de focalización. Mostramos cómo, en este caso, los remolinos más efectivos a la hora de producir centelleo en el plano de recepción no son aquéllos con diámetro  $\sqrt{\lambda z}$ , sino los que tienen tamaños comparables a la longitud de coherencia de la onda que lo está atravesando. Ahora, se predice un estrechamiento de la función de covarianza de la intensidad, de tal forma que la longitud de correlación transversal para las fluctuaciones de intensidad tiende a la longitud de coherencia lateral (la cual es una función decreciente de la turbulencia integrada  $\sigma_1^2$ ).

Tratemos de observar experimentalmente los resultados que hemos establecido para los diferentes regímenes de propagación atmosférica; la importancia de éstos en el desarrollo posterior de este trabajo lo hace necesario.

#### 4.2.1 Procedimientos de medida y análisis.

Para el trayecto de propagación caracterizado ( $L=3.9$  Km) y la fuente emisora utilizada ( $\lambda=830$  nm) se define una longitud de Fresnel  $\sqrt{\lambda L}$  de casi 6 cm. Por ello, podemos aproximar receptores puntuales (necesarios si queremos medir fluctuaciones de intensidad y no de potencia) mediante aperturas de 10 mm de diámetro y mantener, al mismo tiempo, razonables relaciones señal-ruido en nuestros detectores. Empleamos dos detectores, el espaciado entre los cuales variaba de forma discreta. Ello nos permitía medir el coeficiente de correlación para varias separaciones laterales  $\rho$  (véase la figura 4-2 anterior). Las distancias  $\rho$  entre aperturas fueron escogidas de forma que  $\rho/\sqrt{\lambda L}$  barriese varias longitudes de Fresnel.

Los datos fueron adquiridos en una amplia franja horaria de forma que pudiéramos verificar la estructura espacial del centelleo en un extenso margen de condiciones de propagación. Cada conjunto de datos consistía en la medida repetida de la intensidad sobre dos puntos separados la distancia  $\rho$ . Sobre cada par de puntos se adquiría la señal durante un minuto con una frecuencia de muestreo de 500 Hz (no se esperaban, como verificaron las medidas posteriores, anchos de banda mayores en la señal recibida). Un ciclo de datos medía la intensidad sobre ocho pares de puntos y varios de estos ciclos formaban el conjunto completo de datos a partir del cual estimábamos la función de correlación. Aunque hubiera sido deseable un número elevado de ciclos por cada conjunto de datos, esto hubiera significado un tiempo de adquisición extremadamente alto y, consecuentemente, una falta de estacionariedad atmosférica que sesgaría nuestra medida. El procesado de los datos adquiridos comenzaba con una normalización de las señales dividiendo por su valor medio; ello evitaba posibles problemas asociados a errores de puntería en alguno de los dos detectores y para cualquiera de los ciclos que componían el conjunto de datos. A continuación, se calculaban los coeficientes de correlación para cada par de puntos separados una distancia  $\rho$

$$B_I(\rho) = \frac{1}{\sigma_I^2} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt I(r+\rho,t) I(r,t) \quad (4.4)$$

promediando sobre el intervalo de adquisición  $2T = 1 \text{ mn}$  .

4.2.2 Resultados del experimento.

En las figuras siguientes se presentan los resultados experimentales para la covarianza de las fluctuaciones de intensidad. La ordenada es la función de covarianza normalizada por la varianza y la abscisa la separación entre los detectores de medida en unidades de una zona de Fresnel.

La figura 4-4 muestra las funciones de covarianza bajo condiciones de débil turbulencia como una función de la separación entre los puntos de observación. Ambas medidas fueron realizadas al anochecer, cuando la atmósfera está en condiciones más estables y, por tanto, se esperan fluctuaciones de intensidad muy pequeñas. Así, se midieron  $\sigma_I^2$  entre 0.5 y 1. En este caso, la teoría de Rytov para onda esférica (curva continua) presenta una muy buena concordancia con los datos.

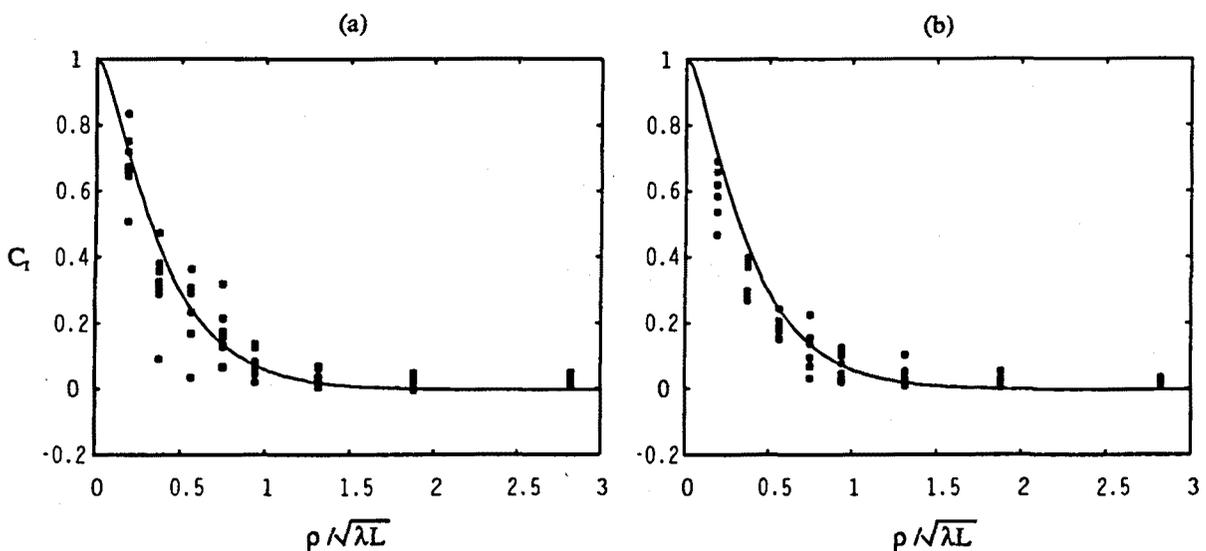


Fig. 4-4. Funciones de covarianza de las fluctuaciones de intensidad medidas bajo condiciones de débil turbulencia. La línea continua presenta la predicción de la teoría de Rytov para onda esférica.

Cuando la intensidad de la turbulencia aumenta (figura 4-5), las curvas de covarianza progresivamente caen más deprisa para separaciones menores que  $\sqrt{\lambda L}$ . El efecto de estrechamiento de la función de correlación está de acuerdo con las predicciones teóricas basadas en el modelo para alta turbulencia. Los resultados mostrados corresponden a medidas realizadas en las primeras horas de la tarde, cuando la turbulencia atmosférica es más notable. Se midieron varianzas de intensidad  $\sigma_I^2$  en torno a 5 en cualquiera de los casos, valores para los que ya están presentes los efectos de saturación.

Para un trayecto de propagación como el analizado es difícil observar la aparición de colas de correlación positivas en las funciones de correlación, el segundo de los efectos predicho en régimen de fuerte turbulencia. En efecto, del mismo modo que el estrechamiento de la función de correlación está ocasionado por la turbulencia próxima al receptor, la cola de correlación residual se debe a la turbulencia cerca del emisor y la posterior ganancia de coherencia espacial por propagación de la onda distorsionada. Así, para observar este efecto, se hacen necesarias distancias de propagación mayores a las que tenemos en nuestro enlace. Los experimentos previos realizados en el archipiélago Canario, como ya se comentó sobre un enlace de más de 140 Km, si mostraron, tal como era de esperar, las colas de correlación. La figura 4-6 muestra una de las correlaciones de las fluctuaciones de log-amplitud allí medidas donde ambos efectos, estrechamiento de la función de correlación y cola residual positiva, son

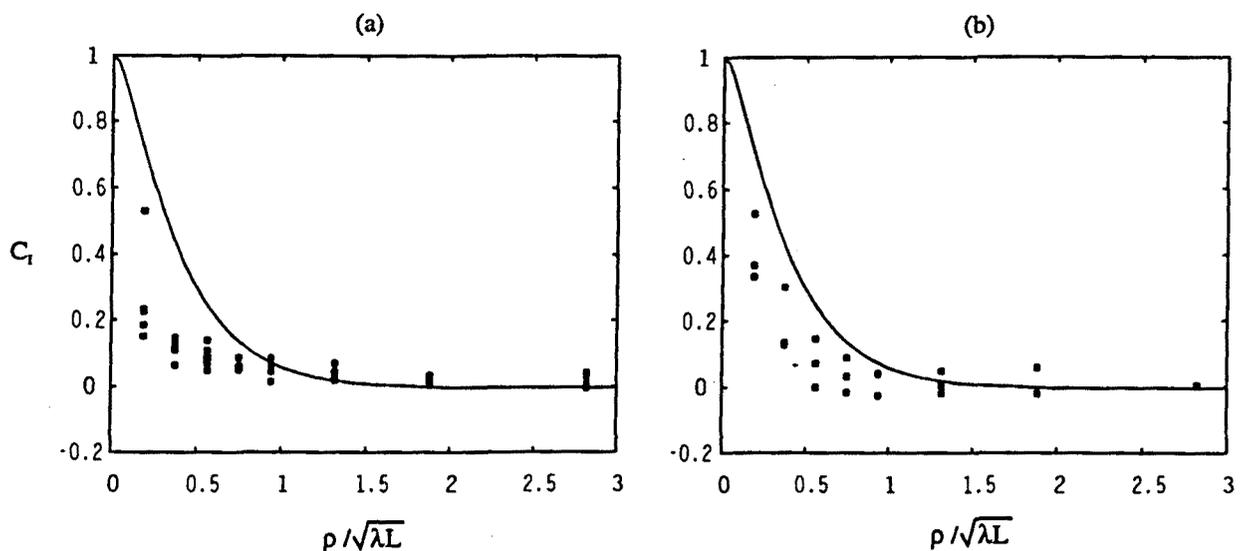


Figura 4-5. Funciones de covarianza de las fluctuaciones de intensidad medidas bajo condiciones de más alta turbulencia. La línea continua presenta la predicción de la teoría de Rytov para onda esférica.

claramente identificables. La medida fue realizada en torno al mediodía y, consecuentemente, bajo condiciones de fuerte turbulencia. Tras modelizar la constante de estructura del índice de refracción  $C_n^2$  para el enlace Canario (Comerón et al., 1993), y utilizando la teoría heurística descrita en el capítulo anterior, pudimos predecir con buena precisión los resultados de la medida, tal como muestra la línea continua en la figura. En ella se han tenido en cuenta los efectos asociados al diámetro de la aperturas receptoras (10 cm).

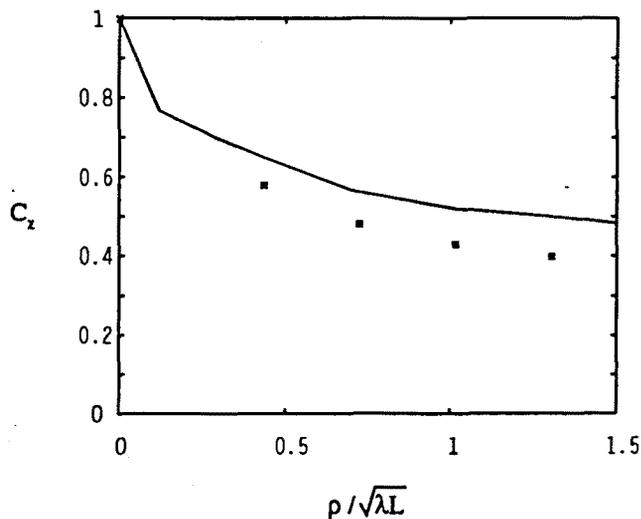


Figura 4-6. Función de correlación de las fluctuaciones de log-amplitud medidas con aperturas de 10 cm de diámetro durante los experimentos Canarios. La curva continua muestra las predicciones teóricas que se extraen de la teoría heurística tras modelar la constante de estructura  $C_n^2$  para el enlace.

### 4.3 Espectros de frecuencia para las fluctuaciones de intensidad.

Para los sistemas atmosféricos es deseable conocer el espectro temporal de frecuencia de las fluctuaciones de intensidad medidas por el receptor. El tiempo requerido por la luz para propagarse a través de la atmósfera es insignificante frente al tiempo de fluctuación de la componente aleatoria  $n$  del índice de refracción. Por esta razón, la dependencia temporal de  $n$  suele suprimirse y las teorías desarrolladas sólo prestan interés a las fluctuaciones espaciales.

Si las propiedades temporales interesan en algún problema particular, éstas pueden introducirse mediante la llamada hipótesis de Taylor o de "la turbulencia congelada" (Lumley y Panofsky, 1965; Ishimaru, 1978), la cual supone que los remolinos de turbulencia que atraviesan el trayecto de propagación lo hacen con una velocidad igual a la del viento local y sin ningún cambio en su estructura (algo semejante a como, sin deformarse, una nube es transportada por el viento).

Si suponemos válida la hipótesis de Taylor, es obvio pensar que, cuando las fluctuaciones del índice de refracción se muevan a través del trayecto de propagación, la figura de centelleo que se define sobre el plano de recepción se mueva a lo largo de la apertura de medida. Para una onda plana incidente y un viento espacialmente uniforme, la figura de centelleo espacial en un plano perpendicular a la dirección de propagación está congelada pero trasladada a lo largo del plano de recepción.

Utilicemos estas sencillas ideas para establecer una relación entre las estadísticas espaciales y temporales de la intensidad de una onda propagada a través de la turbulencia.

#### 4.3.1 Espectros de potencia de las fluctuaciones temporales de intensidad.

En el capítulo anterior habíamos obtenido expresiones para la correlación espacial de la intensidad de la onda. Usemos estas expresiones y las implicaciones que se infieren de la hipótesis de Taylor para obtener las funciones de correlación temporal y sus correspondientes espectros de potencia (Fante, 1975).

La conversión de espacio a tiempo se realiza suponiendo que la figura entera de intensidad se mueve como un todo, ignorando tanto cualquier fluctuación en la velocidad de transporte como la deformación de las inhomogeneidades mientras se mueven. Observando que la principal contribución a la translación de la figura de irradiancia proviene de la componente transversal de la velocidad del viento a la dirección de propagación  $V_{\perp}$ , podemos relacionar  $I(r,t)$  y  $I(r,t+\tau)$  a través de

$$I(r,t+\tau) = I(r-V_{\perp}\tau,t) \quad (4.5)$$

Si sobre la función de correlación temporal

$$R_I(\tau) = \langle I(r, t + \tau) I(r, t) \rangle \quad (4.6)$$

consideramos la igualdad (4.5), obtenemos la relación

$$R_I(\tau) = C_I(V_{\perp} \tau) \quad (4.7)$$

donde  $C_I(v_{\perp} \tau)$  es la función de correlación espacial. A partir de este resultado es fácil obtener el espectro de frecuencia de las fluctuaciones de intensidad,  $W_I(f)$ , mediante una simple transformada de Fourier de  $R_I(\tau)$ :

$$\begin{aligned} W_I(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_I(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} C_I(V_{\perp} \tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \end{aligned} \quad (4.8)$$

Podemos extraer alguna información interesante sobre los perfiles de estas densidades espectrales mediante consideraciones sencillas basadas en la hipótesis de Taylor y sin necesidad de entrar en análisis cuantitativos engorrosos (Fante, 1975; Ishimaru, 1978) y, por tanto, poco esclarecedores. Pensemos, para ello, que en la figura de irradiancia sobre el plano de recepción se definirán zonas con alta y baja intensidad de dimensiones típicas del orden de la longitud de correlación; si se cumple la hipótesis de Taylor y suponemos una apertura receptora puntual, cada una de estas manchas de intensidad espacialmente correladas podrá ser observadas durante el tiempo que tarde toda ella en pasar sobre la apertura. Independientemente de la posición donde la apertura corte a la mancha de intensidad, el tiempo de pasada siempre será menor o igual que  $\tau$

$$\tau = \frac{2a_0}{V_{\perp}} \quad (4.9)$$

donde  $a_0$  es el radio de correlación de las fluctuaciones de intensidad y  $V_{\perp}$  la velocidad transversal del viento a la dirección de propagación (figura 4-7).

Podemos estimar un valor para el tiempo medio en que la apertura observa una de estas manchas de intensidad; para ello, sustituyamos  $a_0$  en la expresión (4.9) por el valor medio que ve la apertura puntual en función del punto de corte con la mancha de intensidad (figura 4-8)

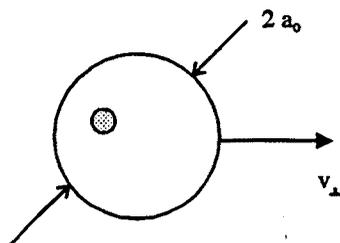


Fig. 4-7. Si la hipótesis de Taylor se cumple, una mancha de intensidad debe ser observada durante un tiempo igual a la duración de su paso frente a la apertura receptora. Este tiempo depende de dónde corte la apertura a esta mancha de intensidad.

$$\langle a_0 \rangle = \frac{\int_{-a_0}^{a_0} \sqrt{a_0^2 - y^2} dy}{\int_{-a_0}^{a_0} dy} \quad (4.10)$$

De este modo, el tiempo típico de paso de una inhomogeneidad de intensidad puede estimarse en

$$\tau_m = \frac{2 \langle a_0 \rangle}{V_{\perp}} = \frac{\pi}{2} \frac{a_0}{V_{\perp}} \quad (4.11)$$

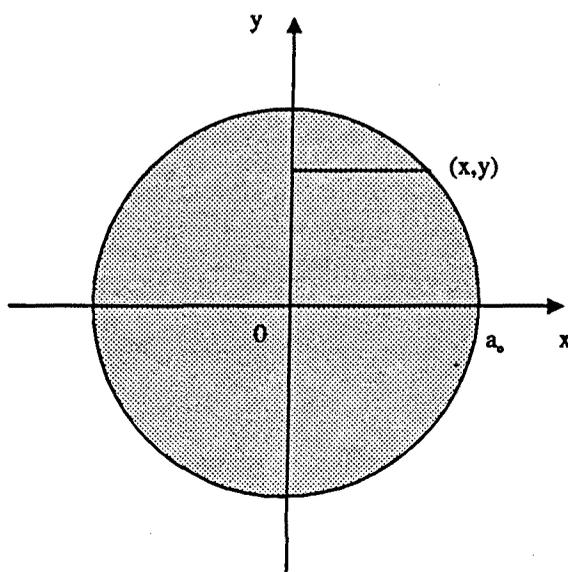


Fig. 4-8. Valor medio de los arcos de una circunferencia.

Esto implica que los espectros temporales de las fluctuaciones de intensidad que estamos considerando deberían presentar valores aún significativamente altos para frecuencias próximas a

$$f_m = \frac{1}{\tau_m} = \frac{2}{\pi} \frac{V_{\perp}}{a_0} = 0.64 \frac{V_{\perp}}{a_0} \quad (4.12)$$

Bajo condiciones de débil turbulencia, donde hemos visto que  $a_0$  es del orden de la longitud de Fresnel, el espectro presentará un máximo para  $f_m = 0.64 V_{\perp} / \sqrt{\lambda L}$ . De igual modo, cuando la turbulencia sea más intensa, la longitud de correlación de la intensidad tiende a disminuir hasta valores de la longitud de coherencia de la onda  $r_0 < \sqrt{\lambda L}$ ; en este caso,  $f_m = (0.64 V_{\perp} / r_0) > (0.64 V_{\perp} / \sqrt{\lambda L})$

Estudiemos experimentalmente los espectros de las fluctuaciones de intensidad y establezcamos la bondad de las consideraciones presentadas hasta aquí.

#### 4.3.2 Procedimientos de medida y análisis.

Las medidas del espectro fueron llevadas a cabo bajo un amplio margen de condiciones meteorológicas. Se utilizó una apertura colectora con 10 mm de diámetro que permitía identificar, para las longitudes de correlación de intensidad medidas (véase apartado 4.2), las fluctuaciones de potencia registradas por el detector con aquellas de intensidad (puntual) que pretendíamos medir.

Cada conjunto de datos lo componían 15 repeticiones de un ciclo consistente en un minuto de adquisición con una frecuencia de muestreo de 1KHz (no se esperaban anchos de banda mayores en la señal recibida, ni tan siquiera bajo condiciones de muy fuerte turbulencia). Tras restar a la señal recibida  $I(t)$  su valor medio, se estimaba el espectro de potencia de las fluctuaciones de intensidad: si la transformada de Fourier de la señal  $I(t)$  es  $\mathcal{F}[I(t)]$ , su espectro de potencia  $W_f(f)$  obedece la siguiente expresión

$$W_f(f) = |\mathcal{F}[I(t)]|^2 \quad (4.13)$$

Se promediaban los espectros de  $n_s$  subsecuencias de datos formados a partir de la secuencia original del ciclo y de longitud más pequeña. Esto nos permitía disminuir el sesgo de la estimación a errores  $\epsilon \leq 1/\sqrt{n_s}$  (Bendat y Piersal, 1986). Buscando un buen compromiso entre la precisión en la estimación de los parámetros y la resolución espectral, se dividió la secuencia original, de 1 mn de duración, en 117 subsecuencias de 0.512 s (512 muestras). De este modo, la frecuencia máxima analizable se fijaba en 500 Hz, la resolución espectral en 1.95 Hz y el error de estimación inferior a 0.1. Posteriormente, los espectros obtenidos para cada ciclo de medida se promediaban sobre todos los ciclos que componían cada conjunto de datos.

### 4.3.3 Resultados del experimento.

Los espectros presentados en la figura 4-9 ponen de manifiesto la dependencia de la forma del espectro  $W_f(f)$  con la fuerza de las fluctuaciones de intensidad  $\sigma_I^2$ . Para propagaciones con  $\sigma_I^2 < 1$ , el ancho del espectro de potencia medido a 10 dB estaba entorno a algunas decenas de hertzios, como se esperaba para una señal sólo débilmente perturbada por la atmósfera. Sin embargo, cuando  $\sigma_I^2$  dejaba de ser pequeño, el espectro se ensanchaba considerablemente, comportamiento típico de una señal fuertemente perturbada. Estos resultados eran de esperar a tenor de las consideraciones que habíamos establecido acerca de la frecuencia  $f_m$ : un incremento de la turbulencia provoca un desplazamiento de  $f_m$  hacia regiones de más alta frecuencia y, por tanto, un progresivo incremento de las contribuciones relativas a las altas frecuencias en la varianza de la intensidad recibida.

La función  $U_f(f) = fW_f(f)$  nos permitirá observar con mayor precisión la posición de las frecuencias de pico  $f_m$  predichas para los espectros  $W_f(f)$ . La figura 4-10 muestra esta función  $U_f(f)$  para diferentes intensidades de la turbulencia medida. Agrupamos los resultados en dos grupos diferenciados por la intensidad de la turbulencia registrada. Para la situación de débil turbulencia (a) se midieron varianzas de intensidad entre 0.5 y 1; igualmente, para las curvas (b) con turbulencia más intensa se tenían varianzas un orden de magnitud mayores a las del caso anterior. Observamos que, dentro de cada grupo, con varianzas de intensidad parecidas, la posición de los picos  $f_m$  en los espectros se mueve dentro de un cierto margen de valores. Esto es un indicativo de las diferentes velocidades de viento que teníamos en nuestro trayecto de propagación cuando los espectros fueron recogidos.

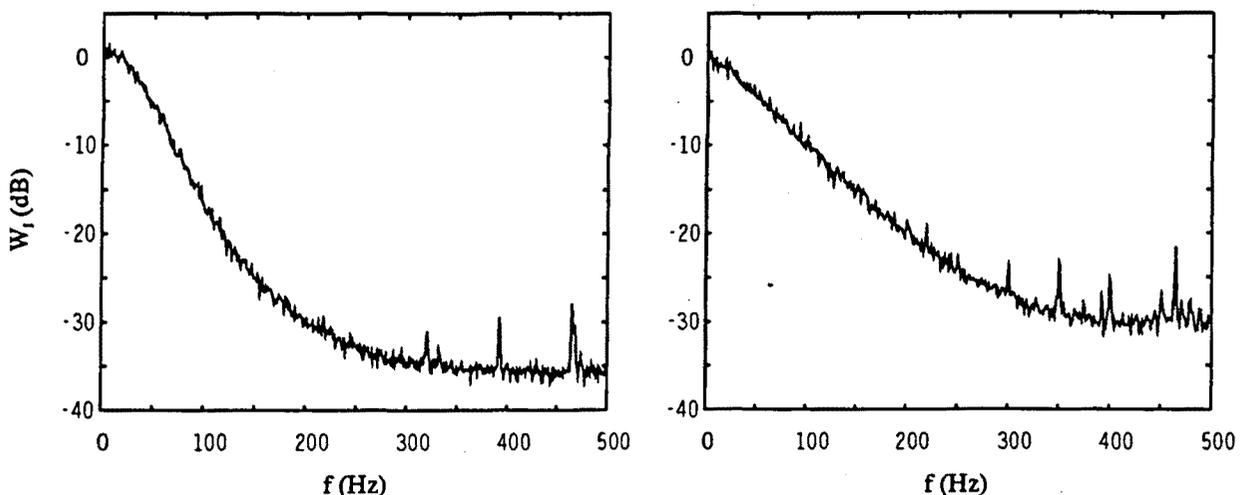


Fig. 4-9. Espectros de potencia de las fluctuaciones de intensidad. a) Fluctuaciones débiles de intensidad.  
b) Fluctuaciones fuertes de intensidad.

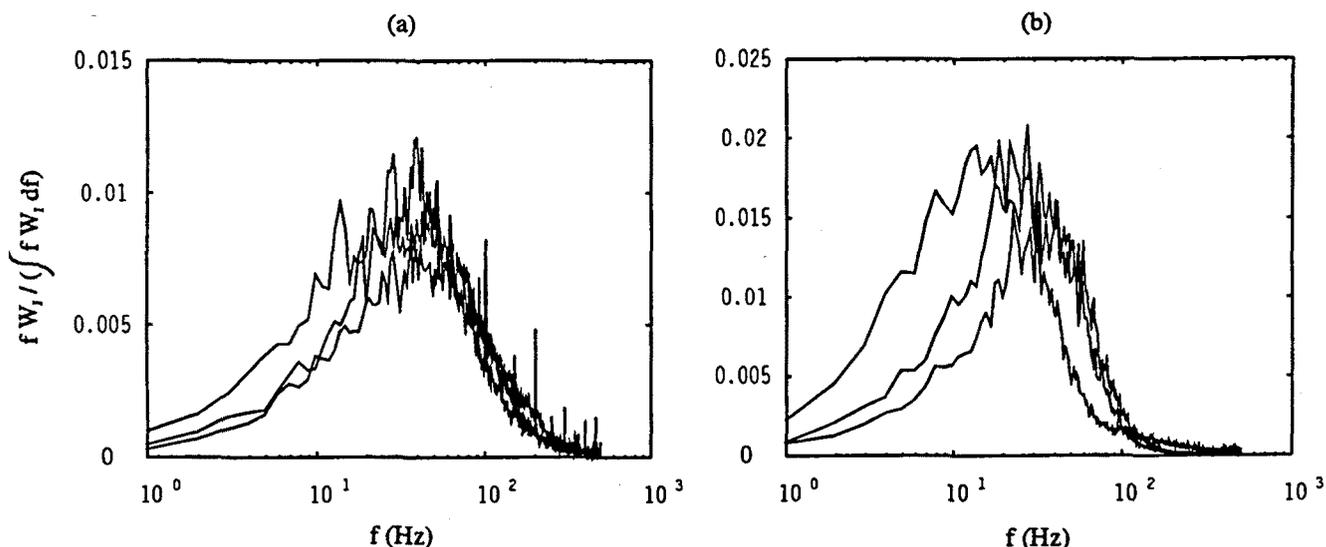


Fig. 4-10. Espectros  $fW_i(f)$  para las fluctuaciones de intensidad. a) Fluctuaciones débiles de intensidad. b) Fluctuaciones fuertes de intensidad.

Todos los espectros de la figura 4-10 se muestran en la figura 4-11 como una función del argumento adimensional  $f\sqrt{\lambda L}/v_{\perp}$ . Aquí,  $V_{\perp}$  ha sido estimado burdamente a partir de las mismas curvas de la figura 4-10: midiendo sobre ellas la posición del máximo  $f_m$  y haciendo uso de la relación que hemos presentado entre éste y la velocidad,  $f_m = 0.64\sqrt{\lambda L}/V_{\perp}$ , deducimos los valores buscados para  $V_{\perp}$ . Hay que tener muy presente que estos valores son sólo indicativos de la velocidad media del viento transversal a la dirección de propagación; de hecho, para velocidades bajas como las

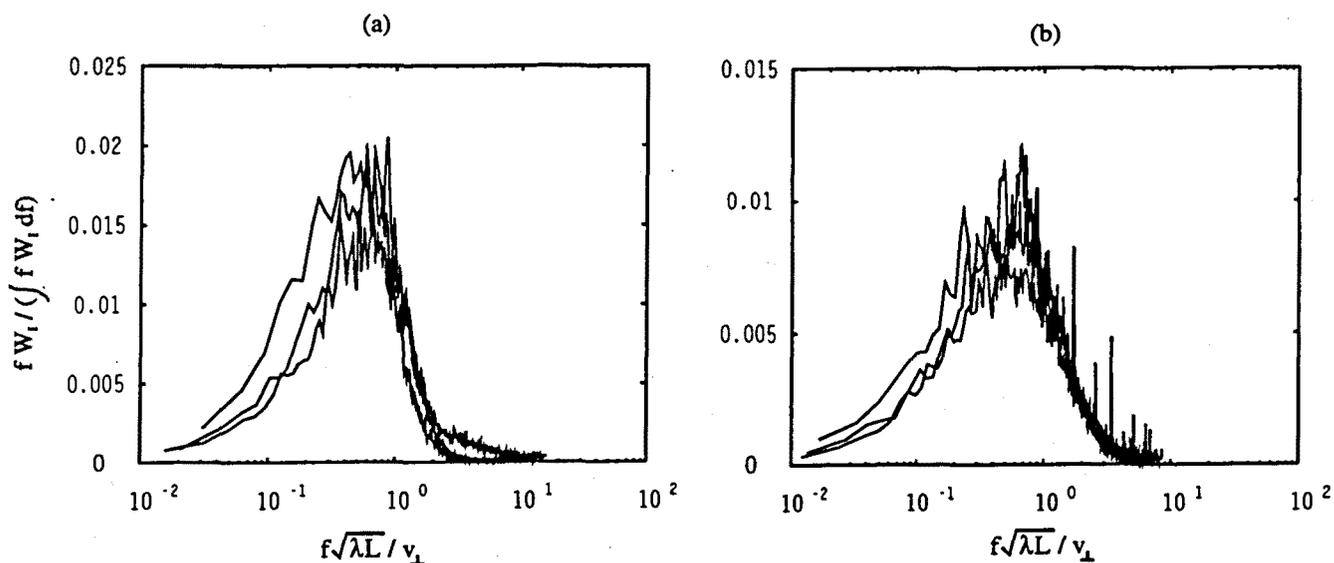


Fig. 4-11. Los mismos espectros que en la figura 4-10 como una función del argumento adimensional  $f\sqrt{\lambda L}/v_{\perp}$ .

medidas (entre 2 y 15 m/s), el viento es particularmente variable, dependiendo tanto de la posición a lo largo del trayecto como del instante de tiempo considerado. Esto provoca el que la hipótesis de Taylor utilizada para deducir la relación  $f_m = 0.64 \sqrt{\lambda L} / v_{\perp}$  deje de ser totalmente aplicable. Seguramente la relación anterior, aunque válida en general, debería diferir en el coeficiente numérico 0.64.

Pese a estas consideraciones, las curvas de la figura 4-11 están prácticamente superpuestas una sobre otra, indicativo de que la hipótesis de 'la atmósfera congelada' es una muy buena aproximación al funcionamiento atmosférico real.

Por último, en la figura 4-12 se compara la curva teórica (4.8) para el espectro de las fluctuaciones de intensidad, en el supuesto de débil turbulencia, con el promediado de los espectros del grupo (a) en la figura 4.3f. La concordancia de los resultados es evidente. Tan solo hay que destacar un cierto ensanchamiento del espectro medido. Probablemente, este ensanchamiento esté provocado por el hecho ya comentado de que las velocidades del viento no son constantes a lo largo de todo el trayecto de propagación.

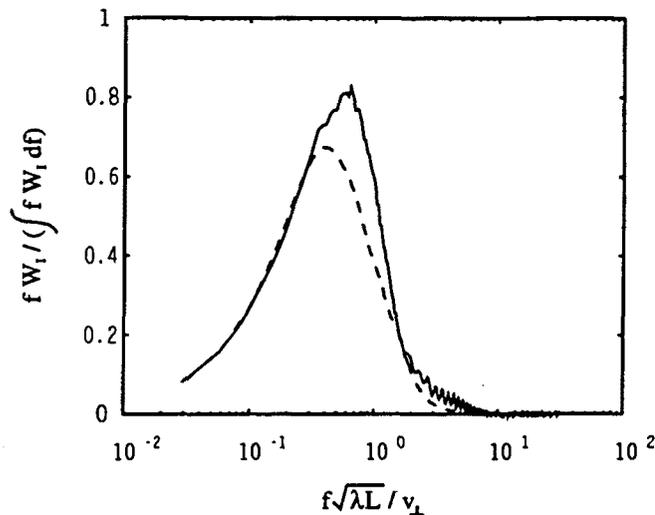


Fig. 4-12. Promediado de los espectros de las fluctuaciones de irradianza para medidas con valores  $\sigma_I^2 < 1$ . La línea discontinua es el espectro teórico.

#### 4.4 Distribución de probabilidad de las fluctuaciones de intensidad.

Cuando una onda se propaga a través de la atmósfera turbulenta, la amplitud en cualquier punto de su frente fluctúa. Hasta el momento, hemos hecho consideraciones teóricas sobre los parámetros de la distribución de estas fluctuaciones, tales como la varianza o momentos de orden superior. Sin embargo, nada hemos dicho sobre la forma de la función de densidad de probabilidad (FDP) asociada a la irradiancia de la onda propagada, un problema de gran interés en el estudio de canales atmosféricos para comunicaciones ópticas.

La mayoría de los modelos teóricos propuestos para las fluctuaciones de amplitud de una onda que se haya propagado a través de la turbulencia atmosférica han sido deducidos heurísticamente (Strohbehn et al, 1975). La concordancia de las predicciones de estos modelos físicos con los datos experimentales muestran la validez de sus planteamientos frente a teorías matemáticamente más completas pero con resultados difícilmente contrastables con medidas experimentales (cálculo de los momentos por de Wolf, 1973; cálculo de la función característica por Furutsu, 1972).

Tras presentar los fundamentos de las teorías clásicamente aceptadas al respecto de las FDP veremos los resultados teóricos más recientes, que proporcionan soluciones más depuradas al problema. Finalmente, las diferentes predicciones son comparadas con datos experimentales.

##### 4.4.1 Predicciones clásicas: distribución de Rice-Nakagami o Rayleigh y distribución log-normal.

Supongamos que la onda se propaga en la dirección del eje  $z$ ,  $\mathcal{E} = E \exp(jkz)$ . Cuando ésta atraviese la atmósfera, el modo en que se disperse parte de su energía determinará la forma de la distribución de probabilidad. Podemos considerar dos casos límites de difusión, los cuales determinan las teorías más clásicas.

##### a) Distribución Rice-Nakagami.

Para el primer caso, suponemos que la zona turbulenta sobre la que incide la onda está contenida en una pequeña porción del espacio con el receptor alejado de ésta (podría ser esta la situación en un enlace de comunicaciones tierra-satélite). En este modelo (figura 4-13a), es razonable suponer que el campo en el receptor es la suma de un gran número de ondas difundidas una vez por las diferentes irregularidades presentes en el índice de refracción de nuestro medio. Si suponemos incorreladas a estas irregularidades, podemos tratar como independientes a las diferentes componentes del campo en el receptor y escribir:

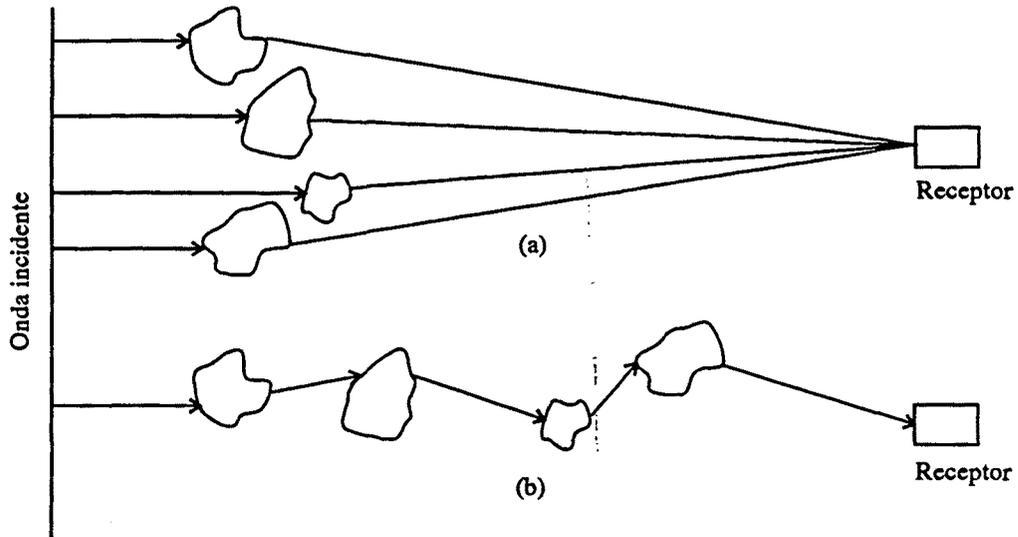


Fig. 4-13. (a) Modelo de difusión simple; y (b) modelo de difusión múltiple y un único trayecto de propagación.

$$E = E_d + E_r + jE_i \quad (4.14)$$

donde  $E_d$  es el campo medio no perturbado y  $E_r$ ,  $E_i$  son las componentes del campo resultantes de la suma de un gran número de ondas difundidas por inhomogeneidades independientes y, según el teorema del límite central, variables aleatorias normales decorreladas con igual varianza.

Si representamos la amplitud de la onda como  $A$  y suponemos  $E_d$  real, resulta

$$A = |E| = (E_d^2 + 2E_d E_r + E_r^2 + E_i^2)^{1/2} \quad (4.15)$$

lo que determina una ley de probabilidad Rice-Nakagami (Norton et al, 1955) con una densidad de probabilidad:

$$p(A) = \frac{2A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2 + E_d^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{2AE_d}{\sigma^2}\right) \quad (4.16)$$

Aquí,  $I_0$  es la función de Bessel modificada de orden cero y  $\sigma^2 = \langle E_r^2 \rangle + \langle E_i^2 \rangle = 2\langle E_r^2 \rangle$ .

En el caso que  $E_d = 0$ , que correspondería a condiciones de muy fuerte turbulencia, la  $p(A)$  se reduce a la distribución de Rayleigh:

$$p(A) = \frac{2A}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{A^2}{\sigma^2}\right) \quad (4.17)$$

Si, como es usual, consideramos la intensidad,  $I=A^2$ , en débil turbulencia la distribución Rice-Nakagami se expresa como

$$p(I) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{I+E_d^2}{\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{2E_d I^{1/2}}{\sigma^2}\right) \quad (4.18)$$

y para muy fuerte turbulencia la distribución de Rayleigh se convierte en una exponencial negativa en intensidad:

$$p(I) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{\sigma^2}\right) \quad (4.19)$$

**b) Distribución log-normal.**

Las distribuciones anteriores esperaríamos medirlas con una geometría definida por una pequeña capa turbulenta y el receptor distante de ella. Cuando el receptor está inmerso en el medio turbulento (lo cual es la situación más común cuando consideramos enlaces de comunicaciones terrestres) el modelo utilizado debe cambiarse. En estecaso, si el cono de difusión es estrecho, el campo recibido es el resultado no de efectos aditivos, sino de efectos multiplicativos: si ahora consideramos el medio compuesto por un gran número  $n_c$  de capas independientes (es decir, el grosor de cada capa es grande comparado con la escala externa de la turbulencia) orientadas perpendicularmente a la dirección de propagación (véase la figura 4-13b anterior), el campo en recepción  $E$  será el resultado de  $n_c$  difusiones de la amplitud inicial  $E_0$  :

$$E = \prod_{i=1}^{n_c} M_i E_0 \quad (4.20)$$

Aquí,  $M_i$  son variables aleatorias independientes , expresión de la modulación introducida por cada una de las difusiones. Suponiendo  $E = A e^{jS}$  , con  $A$  y  $S$  la amplitud y fase de la onda respectivamente, y transformando el campo (4.20) mediante un logaritmo  $\Psi = \ln E/E_0 = \chi + jS$  , resulta:

$$\Psi = \chi + jS = \sum_{i=1}^{n_c} \ln M_i \quad (4.21)$$

Observamos que  $\Psi$  está compuesto por la suma de un gran número de componentes independientes y, en virtud del teorema del límite central, vendrá definida por una distribución de probabilidad gaussiana. Consecuentemente, lo mismo ha de ocurrir con las variables  $\chi = \ln(A/A_0)$  y  $S$ . Así, si consideramos la log-amplitud, su densidad de densidad de probabilidad será

$$p(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\chi} \exp\left\{-\frac{(\chi - \langle\chi\rangle)^2}{2\sigma_\chi^2}\right\} \quad (4.22)$$

donde, como muestra Fried (1967),

$$\langle\chi\rangle = -\sigma_\chi^2 \quad (4.23)$$

Recuérdese que el método de Rytov es una técnica perturbativa aplicada a la log-amplitud que incluye efectos de difusión múltiple sobre conos muy estrechos y, por tanto, es consistente con las suposiciones necesarias para una distribución log-normal.

Para hallar la forma de la función de densidad de probabilidad para la amplitud  $A = A_0 \exp(\chi)$ , introducimos la transformación  $p(A) = p(\chi = \ln A/A_0) \cdot |d\chi/dA|$  con  $d\chi/dA = 1/A$ , en la ecuación anterior:

$$p(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_\chi A} \exp\left\{-\frac{\left(\ln \frac{A}{A_0} - \langle\chi\rangle\right)^2}{2\sigma_\chi^2}\right\}, \quad (A \geq 0) \quad (4.24)$$

De igual forma, la FDP para la intensidad  $I = A^2$  viene dado por

$$p(I) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \sigma_\chi I} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{1}{2} \ln \frac{I}{I_0} - \langle\chi\rangle\right)^2}{2\sigma_\chi^2}\right\}, \quad (I \geq 0) \quad (4.25)$$

Ambas ecuaciones (4.24) y (4.25) son ejemplos de distribuciones log-normales. Utilizando (4.23)

$$p(I) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \sigma_\chi I} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{1}{2} \ln \frac{I}{I_0} + \sigma_\chi^2\right)^2}{2\sigma_\chi^2}\right\}, \quad (I \geq 0) \quad (4.26)$$

En la figura 4-14 se presentan las funciones densidad de probabilidad Rice-Nakagami y log-normal para la intensidad. Las diferencias entre ambas funciones de densidad de probabilidad tienden a acrecentarse conforme aumenta la varianza de  $I$  (

o de  $\chi$  ). De hecho, lo que ocurre es que, para propagaciones suficientemente grandes, tanto los efectos aditivos como los multiplicativos sobre el campo en el receptor pueden ser importantes y esto hace que ninguna de los dos modelos sea capaz de estimar correctamente las FDP que caracterizan las fluctuaciones de intensidad.

**4.4.2 Modificaciones a las teorías clásicas: distribución I-K y distribución log-normal perturbada.**

Las limitaciones de aplicabilidad de las distribuciones Rice-Nakagami y log-normal fuera de las condiciones de débil turbulencia han estimulado la aparición de modelos para la irradiancia bajo condiciones de turbulencia más generales. Analicemos los dos más prometedores, simples modificaciones heurísticas de los modelos clásicos descritos anteriormente.

**a) Distribución I-K.**

La distribución I-K (Andrews y Phillips, 1985; Andrews y Phillips, 1986; Andrews et al, 1988) parte de supuestos parecidos a los que originaron la distribución de Rice-Nakagami: representamos el campo por la suma coherente de dos componentes principales

$$E = E_d + R(t)e^{j\phi(t)} \tag{4.27}$$

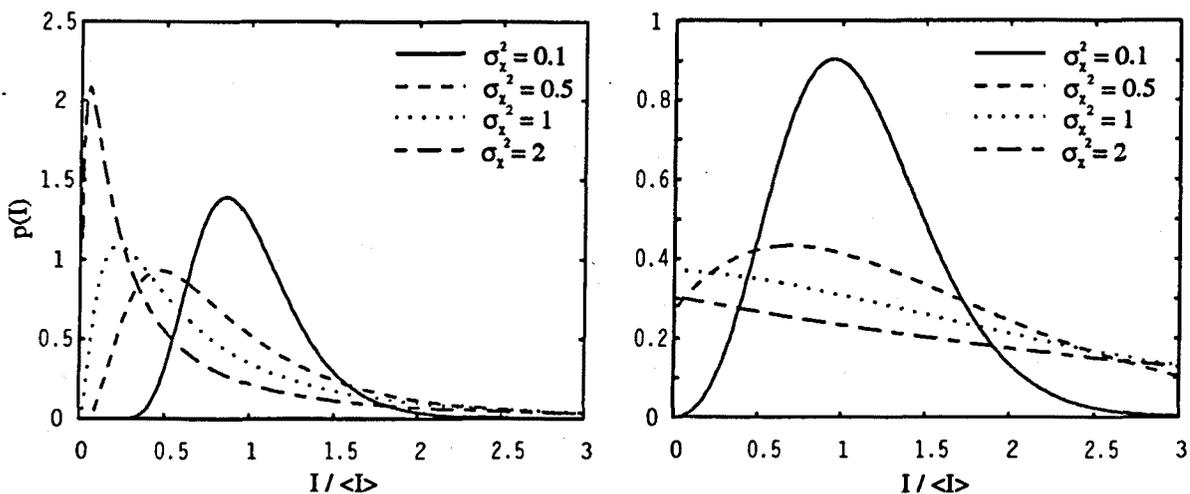


Fig. 4-14. Funciones de densidad de probabilidad (a) Rice-Nakagami y (b) Log-normal.

donde el primer término  $E_d$  es una componente constante que representa la porción no difundida de la onda, y  $R(t)e^{j\phi(t)}$  una componente aleatoria resultante de  $N$  diferentes inhomogeneidades en el índice de refracción atmosférico (véase, de nuevo, la figura 4-13a). Escribiremos:

$$R(t)e^{j\phi(t)} = \sum_{i=1}^N r_i(t) e^{j\phi_i(t)} \quad (4.28)$$

Como vimos, tenemos que la amplitud  $R$  sigue una distribución de Rayleigh, la fase  $\phi$  está uniformemente distribuida sobre  $2\pi$  radianes, y la intensidad  $I = |E|^2$  del campo total se rige por la distribución de Rice-Nakagami:

$$p(I) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{(E_d^2 + I)}{\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{2E_d}{\sigma^2}\sqrt{I}\right), \quad (I > 0) \quad (4.29)$$

donde el parámetro  $\sigma^2$  es la varianza del campo o valor medio de la intensidad de la porción de campo difundido:

$$\sigma^2 = \langle R^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle r_i^2 \rangle \quad (4.30)$$

Hechas estas consideraciones, la suposición adicional más importante de esta distribución nace de la idea de falta de estacionariedad a corto plazo en la atmósfera. Como consecuencia de ello, hemos de suponer que el valor medio de la intensidad debe ser tratado como una magnitud fluctuante descrito por una variable aleatoria. De este modo, debemos modelar el campo propagado como un proceso aleatorio doble, es decir, condicionado al valor medio de la intensidad: la distribución para  $I$  se convierte en la condicional Rice-Nakagami

$$p(I|\sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{(E_d^2 + I)}{\sigma^2}\right] I_0\left(\frac{2E_d}{\sigma^2}\sqrt{I}\right), \quad I > 0 \quad (4-31)$$

La densidad de probabilidad incondicionada se determina calculando

$$p(I) = \int_0^\infty p(I|\sigma^2) p(\sigma^2) d\sigma^2, \quad I > 0 \quad (4.32)$$

donde  $p(\sigma^2)$  es la función de distribución de irradiancia media. Si como hicimos para la distribución Rice-Nakagami, suponemos que las partes real e imaginaria de cada componente de la intensidad difundida  $r_i e^{j\phi_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) son gaussianas de igual varianza y media cero, entonces el valor medio de cada término de

intensidad  $\langle r_i^2 \rangle$  estará exponencialmente distribuido. En este caso, la probabilidad para  $\sigma^2 = \sum_i \langle r_i^2 \rangle$  se definirá mediante una distribución gamma:

$$p(\sigma^2) = \frac{\alpha(\alpha\sigma^2/\sigma_0^2)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\sigma_0^2} \exp(-\alpha\sigma^2/\sigma_0^2) \quad (4.33)$$

Aquí,  $\Gamma$  es la función gamma y  $\sigma_0^2$  la media de  $\sigma^2$ . Para generalizar el modelo, se sustituye el valor discreto  $N$  por el parámetro continuo y positivo  $\alpha$ , el cual puede interpretarse como una medida del número efectivo de inhomogeneidades en el índice de refracción atmosférico que contribuyen a la intensidad en un punto dado del plano de recepción (así,  $\alpha$  tendería a la unidad cuando operásemos bajo condiciones de débil turbulencia y crecería indefinidamente cuando el régimen fuese de fuerte turbulencia). La sustitución de (4.31) y (4.33) en (4.32) nos permite obtener la función de densidad de probabilidad IK buscada:

$$p(I) = \begin{cases} \frac{2\alpha}{\sigma_0^2} \left(\frac{\sqrt{I}}{E_d}\right)^{\alpha-1} K_{\alpha-1}\left(2E_d\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma_0^2}}\right) I_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha I}{\sigma_0^2}}\right), & (I < E_d^2) \\ \frac{2\alpha}{\sigma_0^2} \left(\frac{\sqrt{I}}{E_d}\right)^{\alpha-1} I_{\alpha-1}\left(2E_d\sqrt{\frac{\alpha}{\sigma_0^2}}\right) K_{\alpha-1}\left(2\sqrt{\frac{\alpha I}{\sigma_0^2}}\right), & (I > E_d^2) \end{cases} \quad (4.34)$$

donde  $K_n$  es la función modificada de Bessel de segunda especie y orden  $n$ . El término superior de la igualdad define la FDP para valores de la irradianza menores que la intensidad del campo difundido, mientras que el inferior lo hace para valores superiores.

Los momentos estadísticos asociados con la distribución anterior

$$\langle I^n \rangle = \int_0^\infty I^n \int_0^\infty p(I/\sigma^2) p(\sigma^2) d\sigma^2 dI, \quad n=1,2,\dots \quad (4.35)$$

son fácilmente integrables:

$$\langle I^n \rangle = \left(\frac{\sigma_0^2}{\alpha}\right)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+k)} \frac{(\alpha\rho)^k}{k!}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.36)$$

donde  $\rho = E_d^2/\sigma_0^2$  es el cociente entre las intensidades medias coherente y aleatoria. Si normalizamos los momentos

$$\frac{\langle I^n \rangle}{\langle I \rangle^n} = \frac{n!}{\alpha^n (1+\alpha)^n} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+k)} \frac{(\alpha\rho)^k}{k!}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.37)$$

y la intensidad para la que definimos la función de distribución, es decir,  $I_n = I/\langle I \rangle$

$$p(I_n) = \begin{cases} 2\alpha (1+\rho) \left[ \frac{(1+\rho)I_n}{\rho} \right]^{(\alpha-1)/2} K_{\alpha-1}[2(\alpha\rho)^{1/2}] \times \\ \times I_{\alpha-1}\{2[a(1+\rho)I_n]^{1/2}\}, & I_n < \frac{\rho}{1+\rho} \\ 2\alpha (1+\rho) \left[ \frac{(1+\rho)I_n}{\rho} \right]^{(\alpha-1)/2} I_{\alpha-1}[2(\alpha\rho)^{1/2}] \times \\ \times K_{\alpha-1}\{2[a(1+\rho)I_n]^{1/2}\}, & I_n > \frac{\rho}{1+\rho} \end{cases} \quad (4.38)$$

conseguimos expresiones función únicamente del número efectivo de difusores  $\alpha$  y el parámetro de coherencia  $\rho$ .

#### b) Distribución log-normal perturbada.

Otro modelo propuesto para superar las limitaciones que, en régimen de fuerte turbulencia, aparecen en el cálculo de la estadística de la irradianza es el que da lugar a la distribución log-normal perturbada (LNP) (Churnside y Clifford, 1987). Para trayectos largos o turbulencia intensa, puede ocurrir que los efectos asociados a la difusión múltiple con ángulos grandes no sean despreciables, tal como habíamos supuesto al discutir la distribución log-normal. Si ello es así, los efectos aditivos, propios del modelo Rice-Nakagami, deben ser considerados junto a los multiplicativos que describían el comportamiento log-normal de la irradianza. Parece lógico proponer una distribución que sea combinación de ambas, log-normal y Rice-Nakagami, para describir en el receptor irradianzas afectadas por difusión múltiple a lo largo de más de un trayecto (véase la figura 4-15). Escribimos el campo observado como el producto de los campos aditivos de Rice-Nakagami  $(E_d + E_r + jE_i)$  y multiplicativos del modelo log-normal  $\exp(\chi + jS)$ :

$$E = (E_d + E_r + jE_i) \exp(\chi + jS) \quad (4.39)$$

donde  $E_d$  es una cantidad determinista,  $(E_r + jE_i)$  una variable compleja gaussiana, y los términos real e imaginario de  $\Psi = \chi + jS$  variables aleatorias gaussianas reales. La irradianza será:

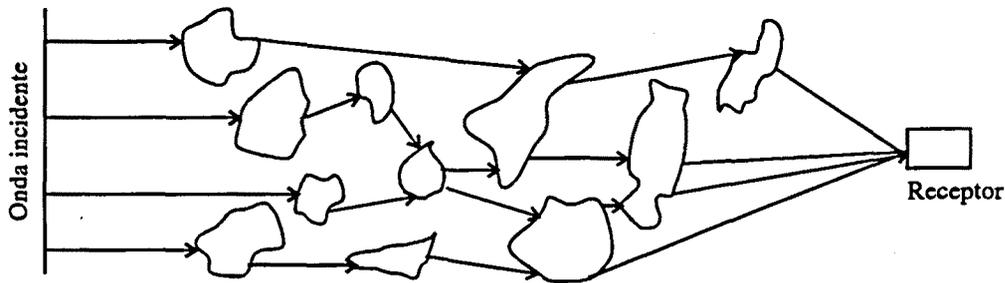


Fig. 4-15. Modelo para la difusión múltiple con trayectos diversos.

$$I = |E_d + E_r + jE_i|^2 \exp(2\chi_m) \tag{4.40}$$

con distribuciones Rice-Nakagami y log-normal para  $|E_d + E_r + jE_i|$  y  $\exp(2\chi_m)$ , respectivamente. Al igual que hacíamos con el modelo IK, estas suposiciones permiten estudiar la irradianza como un proceso aleatorio condicionado: la distribución para la intensidad será una Rice-Nakagami, propia de las componentes aditivas  $|E_d + E_r + jE_i|^2$ , modulada por la distribución log-normal de las componentes multiplicativas  $\exp(\chi_m)$ :

$$p(I) = \int_0^\infty p[I/\exp(2\chi_m)] p[\exp(2\chi_m)] d[\exp(2\chi_m)] \tag{4.41}$$

Sustituyendo las distribuciones Rice-Nakagami en  $p[I/\exp(2\chi_m)]$  y log-normal en  $p[\exp(2\chi_m)]$  obtenemos, tras hacer el cambio de variables  $z = \exp(2\chi_m)$ , el resultado principal de este modelo:

$$p(I) = \frac{(1+\rho')e^{-\rho'}}{\sqrt{2\pi}\sigma_z} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2} I_0 \left\{ 2 \left[ \frac{(1+\rho')\rho'}{z} I \right]^{1/2} \right\} \times \exp \left[ -\frac{1+\rho'}{z} I - \frac{1}{2\sigma_z^2} \left( \ln z + \frac{1}{2}\sigma_z^2 \right)^2 \right] \tag{4.42}$$

donde  $\rho'$  es el parámetro de coherencia  $|E_d|^2 / \langle |E_r + jE_i|^2 \rangle$ .

La evaluación de los momentos

$$\langle I^n \rangle = \int_0^\infty dI I^n p(I) \quad (4.43)$$

es sencilla:

$$\langle I^n \rangle = \frac{(n!)^2}{(1+\rho')^n} \exp\left[\frac{1}{2}n(n-1)\sigma_z^2\right]' \times \sum_{k=0}^n \frac{(\rho')^k}{(n-k)! (k!)^2}, \quad n=1,2,\dots \quad (4.44)$$

El método más sencillo de obtener valores tanto para los parámetros  $\rho'$  y  $\sigma_z^2$ , propios de la distribución log-normal perturbada, como para aquéllos  $\rho$  y  $\alpha$  que caracterizan la distribución IK, es utilizar sus momentos segundo y tercero: teniendo

$$\left. \begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \frac{\rho^2 + 4\rho' + 2}{(1+\rho')^2} \exp(\sigma_z^2) \\ \langle I^3 \rangle &= \frac{\rho^3 + 6\rho^2 + 18\rho' + 6}{(1+\rho')^2} \exp(3\sigma_z^2) \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

para la distribución log-normal perturbada, y

$$\left. \begin{aligned} \langle I^2 \rangle &= \frac{\rho^2}{(1+\rho)^2} + 2 \frac{1+\alpha^{-1}}{1+\rho} \\ \langle I^3 \rangle &= \frac{\rho^3}{(1+\rho)^3} + 3 \frac{(1+2\alpha^{-1})\rho^2}{(1+\rho)^3} + 6 \frac{(1+\alpha^{-1})(1+2\alpha^{-1})}{(1+\rho)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

para la distribución IK, sólo hemos de resolver las ecuaciones para cada caso particular. Aunque la utilización de la ecuación de ondas y una correcta modelización del medio nos permitiría calcular los momentos requeridos  $\langle I^2 \rangle$  e  $\langle I^3 \rangle$  (Andrews et al., 1988), en la práctica se suelen medir los momentos para estimar los parámetros.

En la figura 4-16 comparamos algunos casos particulares de las funciones de densidad de probabilidad IK y LNP. Elegimos los momentos normalizados  $\langle I^2 \rangle$  e  $\langle I^3 \rangle$  de forma que la propagación para la que se describe la estadística considere tanto régimen de débil como fuerte turbulencia.

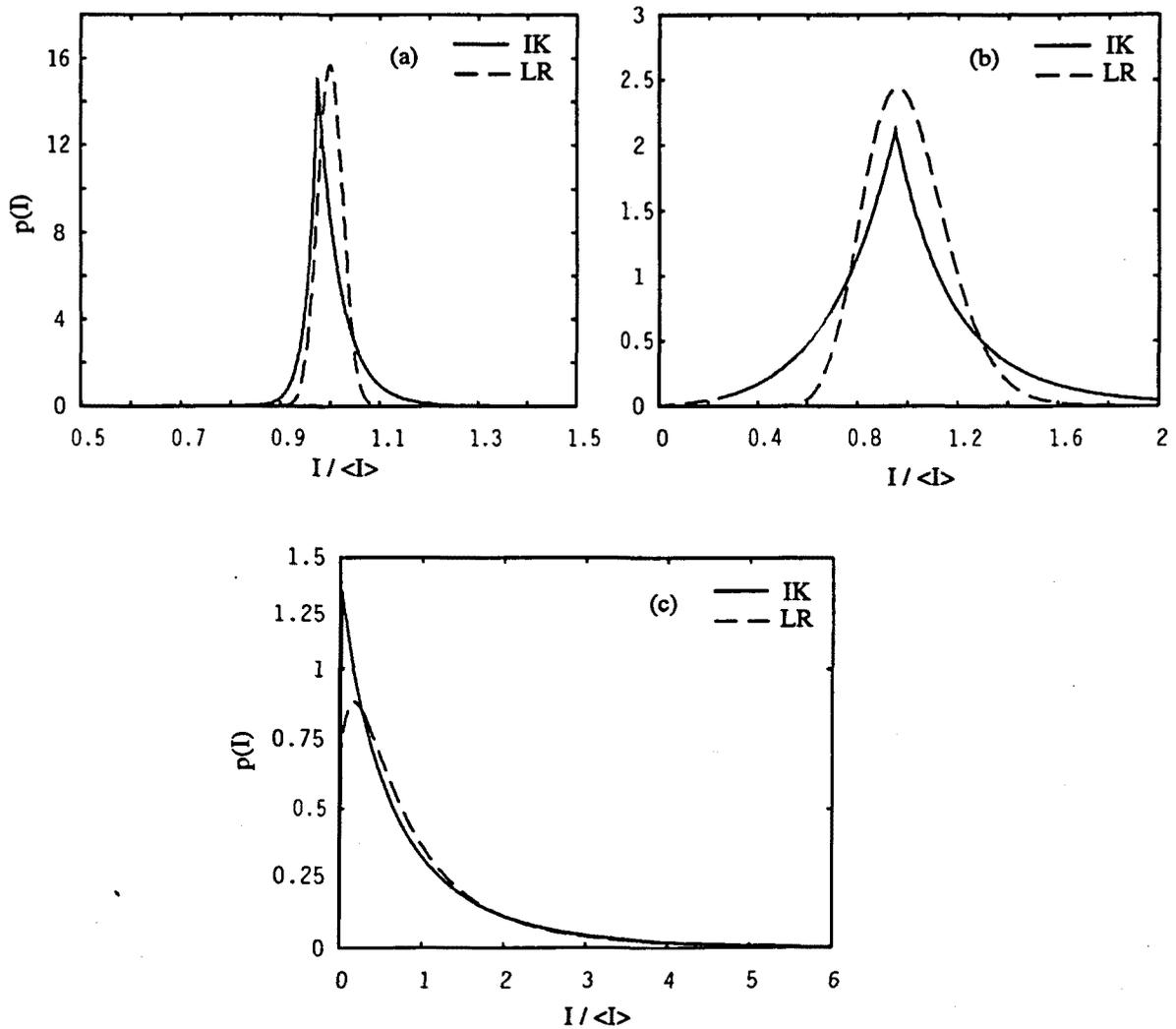


Fig. 4-16. Funciones de densidad de probabilidad log-normal perturbada e IK para diferentes valores de los momentos  $\langle I^2 \rangle$  e  $\langle I^3 \rangle$  :

Caso	$\langle I^2 \rangle$	$\langle I^3 \rangle$	$\alpha$	$\rho$	$\rho'$	$\sigma_z^2$	
(a)	1.003	1.0	37.52	26.95	-	-	(Turbulencia débil)
(b)	1.1	1.4	19.22	0.84	-	-	(Turbulencia moderada)
(c)	2.4	10.2	0.02	4.53	1.83	0.37	(Turbulencia fuerte)

Las discrepancias observadas entre las predicciones de uno y otro modelo nos invitan a comparar estos resultados con la evaluación experimental de las densidades de probabilidad de la irradiancia. Con ello podremos establecer la bondad de las teorías fenomenológicas presentadas.

#### 4.4.3 Procedimientos de medida y análisis.

En un estudio experimental que trate de verificar las predicciones teóricas hechas acerca de la distribución de probabilidad de las fluctuaciones de irradianza, se deben considerar una serie de fenómenos, relacionados con el proceso de detección, debido a los cuales la estadística de la señal detectada puede ser significativamente diferente a la de la irradiancia que se pretende estudiar (Consortini et al, 1986; Ben-Yosef y Goldner, 1988; Churnside et al, 1989).

##### a) Apertura, ancho de banda y saturación del detector.

La teoría normalmente considera la estadística de la irradianza en un punto del espacio. Sin embargo, los experimentos están limitados a medir la estadística de la potencia recogida por una apertura finita: esto provocará un promediado espacial de las fluctuaciones. De hecho, se producirá una alteración de la ley de distribución cuando el diámetro de la apertura colectora sea apreciablemente mayor que la longitud de correlación de las fluctuaciones de amplitud.

Del mismo modo, los estudios teóricos se desarrollan para estadísticas de la irradianza instantánea y, sin embargo, la electrónica de medida, con un ancho de banda limitado, introduce promediados temporales en la señal. Solamente si el ancho de banda es suficientemente grande podemos asegurar que la señal medida representa la irradianza.

Por razones prácticas, no podemos disminuir la apertura (bajo nivel de señal) y aumentar el ancho de banda (niveles altos de ruido) tanto como deseamos. Si queremos buenas relaciones señal-ruido que nos aseguren medidas fiables, deberíamos usar las mayores aperturas y menores anchos de banda que nos sean posibles. Para el enlace considerado en nuestros experimentos, nunca hemos observado correlaciones de la intensidad de onda menores a 2-3 cm, ni señales con anchos de banda mayores a 1 KHz, incluso bajo condiciones de fuerte turbulencia en horas cercanas al mediodía. Por ello, la utilización de aperturas receptoras con diámetros de 1 cm y limitando el ancho de banda de toda la cadena electrónica de recepción a 1 KHz, evitamos los efectos indeseados de promediado espacial y temporal y aseguramos a la vez la suficiente relación señal-ruido.

Otro hecho a tener en cuenta es el que las medidas sólo pueden generar muestras de datos recogidas en un tiempo finito y, por tanto, con un tamaño limitado (Ben-Yosef, 1988): por un lado, el tiempo de la medida debe ser lo suficientemente pequeño como para asegurar la estacionariedad de las medidas y, por otro, el tamaño de la muestra recogida ha de garantizar que los valores elevados de intensidad, aunque raros, presenten la frecuencia de aparición adecuada. Habiéndose observado desviaciones típicas para los valores medidos de la varianza de intensidad cuando la adquisición duraba en torno al minuto (calculábamos para ello la varianza de las fluctuaciones de

intensidad para cada segundo de señal y, sobre los 60 valores obtenidos, estimábamos la desviación típica), se hace necesario considerar conjuntamente un gran número de adquisiciones cortas para, tras un proceso de normalización de la potencia media, construir una muestra con un tamaño que permita estimar la distribución de irradiancia en un extenso rango de valores. Para tiempos de adquisición mayores al minuto, la falta de estacionariedad en los parámetros atmosféricos, como velocidades de viento y escalas de turbulencia, sesgaban nuestros resultados.

Por último, otro factor ha considerar es el posible deterioro de la estadística debida a la saturación del sistema de detección y adquisición: asumimos que el sistema es lineal hasta una cierta intensidad dada  $I_{DS}$ ; más allá de este límite se le supone saturado (véase la figura 4-17). Cualquiera de los sistemas clásicos de adquisición, basado en la digitalización de la señal con un número dado de bits, viene descrito por este comportamiento. Consortini y Conforti (1984) han demostrado que la medida correcta de los momentos de orden superior de la estadística de irradianza exige que el límite superior de saturación de nuestros aparatos  $I_{DS}$  sea varias decenas de veces superior al valor medio de la distribución  $\langle I \rangle$ . Definiendo la cantidad

$$\alpha_{DS} = \frac{I_{DS}}{\langle I \rangle} \quad (4.47)$$

en todas las medidas realizadas ésta ha tomado valores entre 30 y 50, asegurándonos de esta forma que no hay efectos significativos de saturación y que los valores más extremos de la distribución están correctamente evaluados.

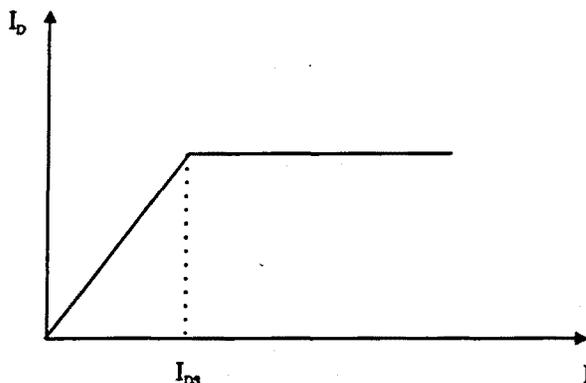


Fig. 4-17. Linealidad en un sistema de adquisición.

### b) Condiciones de adquisición y procesado.

Los datos fueron recogidos en varios días y en una amplia gama de condiciones de propagación que cubrían desde la muy débil hasta la fuerte turbulencia. Cada conjunto de datos consistía de 15 repeticiones de un ciclo de adquisición. Este ciclo se reducía a un minuto de adquisición con una frecuencia de muestreo de 1 KHz (60000 muestras) seguido de 3000 muestras de offset más ruido tomadas mientras la fuente láser estaba apagada. Cada conjunto de datos se definía a partir de 15 de estos ciclos.

El procesado de los datos comenzaba con una corrección de offset, restando a la señal el valor medio de éste sobre todo el conjunto de datos. A continuación, la señal resultante era normalizada por su valor medio. Posteriormente, se calculaba un histograma de probabilidad y los momentos de orden dos y tres, necesarios para establecer los parámetros que definen las funciones de probabilidad teórica (véase 4.4.2).

#### 4.4.4 Resultados del experimento.

Mostraremos los resultados de nuestras medidas al representar la función de densidad de probabilidad frente a la irradiancia. Consideremos varias curvas típicas, representativas de las diferentes condiciones de propagación que, en función de la hora del día, hemos encontrado. En la tabla 4.1 pueden verse los valores de los momentos de orden dos y tres medidos, así como los parámetros calculados a partir de ellos para estimar las curvas teóricas, de todas las distribuciones de las que se presentan resultados.

La figura 4-18 muestra una curva típica del comportamiento observado en la estadística de la irradiancia cuando la turbulencia era muy débil. Los momentos de orden dos y tres medidos fueron 1.62 y 3.96, respectivamente. En la figura lineal observamos

Tabla 4.1. Funciones de densidad de probabilidad presentadas: momentos de orden dos y tres medidos y parámetros calculados a partir de aquéllos.

$\sigma_I^2$	$\langle I^2 \rangle$	$\langle I^3 \rangle$	$\alpha$	$\rho$	$\rho'$	$\sigma_z^2$
0.62	1.62	3.96	29.58	0.32	4.64	0.21
1.06	2.06	7.20	6.67	0.12	1.40	0.22
1.55	2.55	12.31	2.83	0.06	0.90	0.34
4.63	5.63	72.60	0.55	0	0	1.03

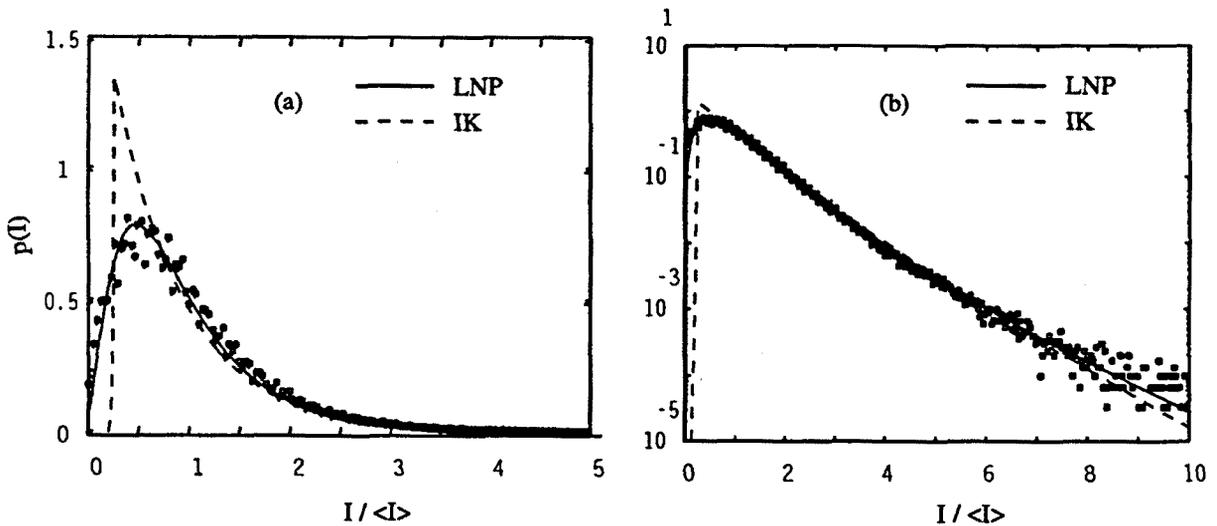


Fig. 4-18. Funciones de densidad de probabilidad medida, IK y log-normal perturbada para una varianza de intensidad  $\sigma_I^2 = 0.62$ . a) Representación lineal; b) representación logarítmica.

que la distribución IK estima el pico de probabilidad con un valor excesivo. Igualmente, en la representación logarítmica vemos como la distribución log-normal perturbada presenta un ajuste más fino en las colas de la densidad de probabilidad. Era de esperar: para una tan baja turbulencia se ha mostrado el comportamiento log-normal de la irradianza; en estas condiciones, la coherencia  $\rho'$  tiende a infinito y la distribución log-normal perturbada se reduce a la log-normal:

$$p(I) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi} \sigma_z^2 I} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_z^2} \left(\frac{1}{2} \ln I + \sigma_z^2\right)^2\right] \quad (4.48)$$

Sin embargo, el límite de débil turbulencia para la IK,

$$p(I) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_I} I^{-3/4} \exp\left(-\frac{2^{3/2}}{\sigma} |1 - \sqrt{I}|\right) \quad (4.49)$$

deducido de la expresión general (4.38) tomando el parámetro de coherencia  $\rho'$  grande y el número de dispersores  $\alpha$  pequeño, es ligeramente diferente a la log-normal.

Las figuras 4-19 y 4-20 muestran las funciones de densidad de probabilidad medidas para varianzas de 1.06 y 1.55 (para el resto de parámetros véase la tabla 4.I anterior). Aunque no estamos propiamente en régimen de fuerte turbulencia, medimos la desviación del comportamiento log-normal que dió lugar a la aparición de las nuevas teorías IK y LNP. Pese al buen ajuste que presentan ambas predicciones, aún es de notar la prevalencia de la teoría log-normal perturbada en la predicción tanto del pico como de las colas de la densidad de probabilidad.

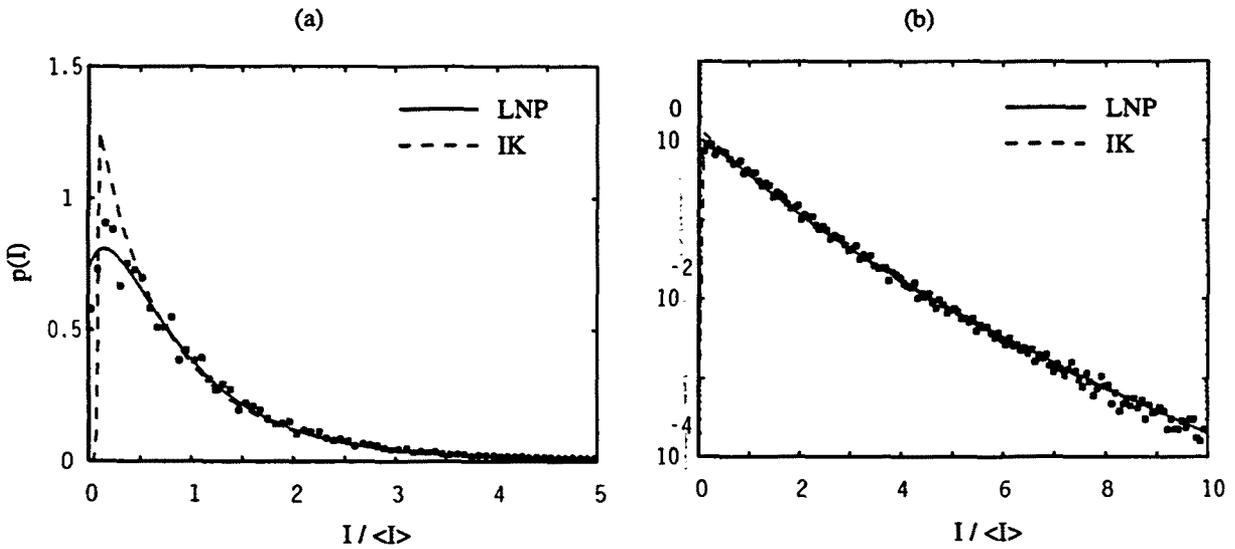


Fig. 4-19. Funciones de densidad de probabilidad medida, IK y log-normal perturbada para una varianza de intensidad  $\sigma_I^2 = 1.06$  . a) Representación lineal; b) representación logarítmica.

Las discrepancias observables en las figuras para los valores más bajos de la irradianza  $I$  se explican por una posible contaminación de la medida por los offset y ruido del detector incompletamente compensados. Serían necesarias medidas con una mayor potencia media recibida para poder despreciar completamente estos efectos.

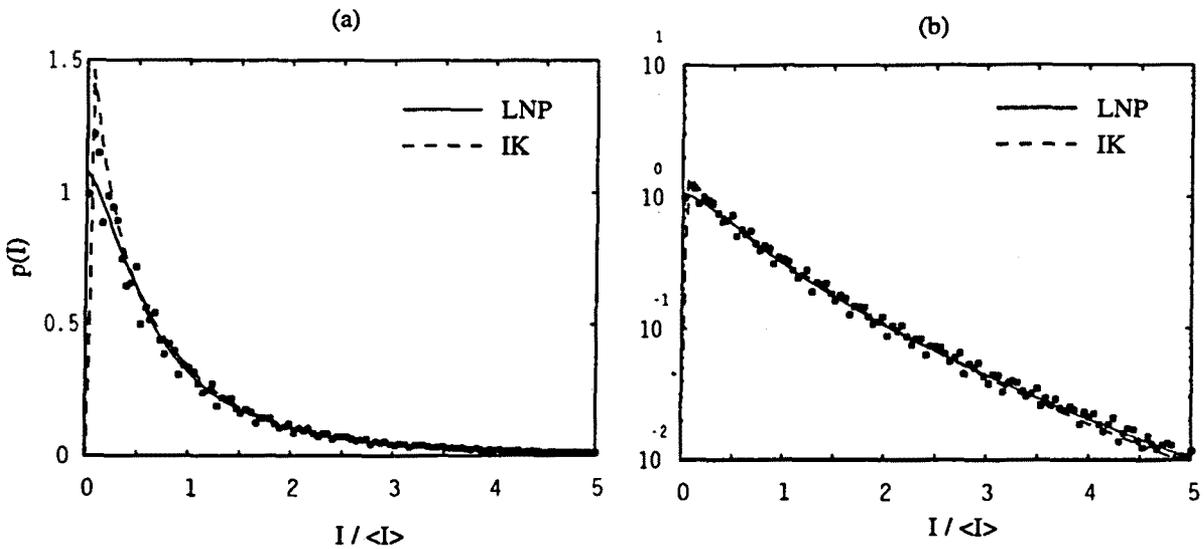


Fig. 4-20. Funciones de densidad de probabilidad medida, IK y log-normal perturbada para una varianza de intensidad  $\sigma_I^2 = 1.55$  . a) Representación lineal; b) representación logarítmica.

En la figura 4-21 mostramos los resultados obtenidos para la densidad de probabilidad bajo condiciones de más fuerte turbulencia ( $\sigma_I^2 = 4.63$ ). La distribución IK ya no presenta el pico de probabilidad que sobrevaloraba el medido en las curvas anteriores.

Las diferencias que, en general, se han observado para las colas de la distribución (irradiancias elevadas) son sólo las lógicas fluctuaciones de las estadísticas para probabilidades pequeñas. Aunque un aumento sustancial del tamaño de la señal analizada disminuiría estas discrepancias, esto es de difícil aplicación: muestras grandes implican el alargar el tiempo de medida hasta valores que nos impiden asegurar la estacionariedad a largo plazo del medio (consecuencia, básicamente, de la variación en la posición del sol).

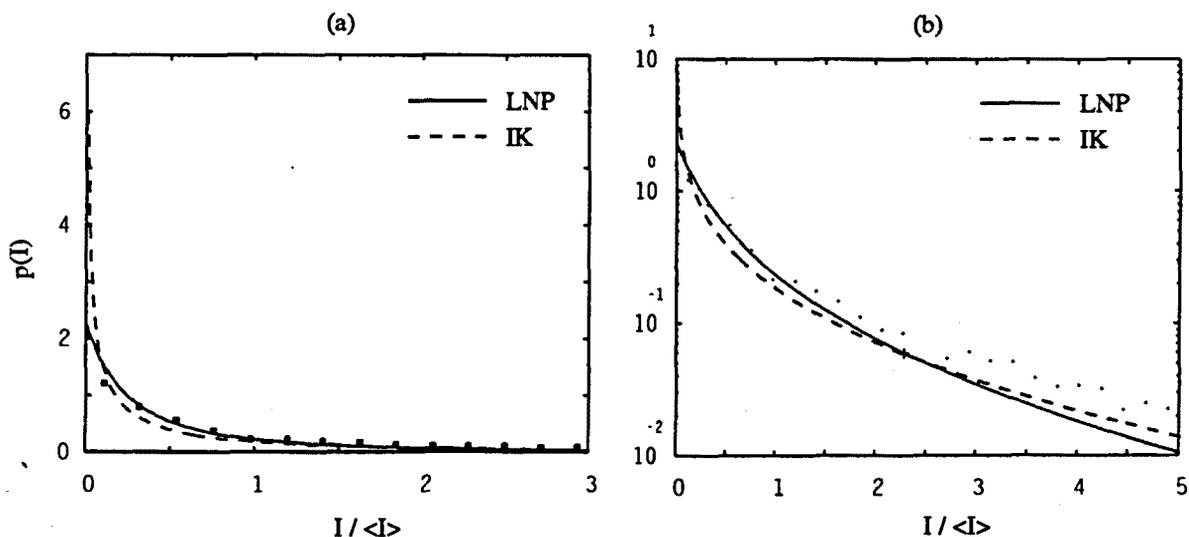


Fig. 4-21. Funciones de densidad de probabilidad medida, IK y log-normal perturbada para una varianza de intensidad  $\sigma_I^2 = 4.63$ . a) Representación lineal; b) representación logarítmica.

#### 4.5 Fluctuaciones del ángulo de llegada.

Debido a las fluctuaciones espaciales del índice de refracción atmosférico, el frente de onda que alcanza el plano de recepción presenta distorsiones aleatorias en su fase. A consecuencia de ellas, sobre una lente colectora de diámetro  $D$  situada en este plano, el frente de onda presenta en el orden más bajo de perturbación una inclinación neta o variación del ángulo de llegada que modifica la posición aparente del emisor. Superpuesta a esta inclinación, el frente presenta una fluctuación de la fase en torno al valor medio esperado. Sin embargo, consideremos tan sólo en el estudio de las fluctuaciones del ángulo de llegada, asociadas a inhomogeneidades de la fase cuya escala sea mayor que el diámetro  $D$  de la lente considerada, y desestimemos las distorsiones de fase asociadas a inhomogeneidades de menor escala que las anteriores.

Las fluctuaciones del ángulo de llegada se traducen en fluctuaciones de la posición del centroide  $(x,y)$  de la distribución de intensidades que se define sobre el plano focal (figura 4-22). Los ángulos de llegada del frente de onda  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ , medidos desde el eje óptico del sistema y las coordenadas del vector  $(x,y)$  se relacionan a través de las expresiones:

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \arcsen \frac{x}{f} \\ \alpha_y &= \arcsen \frac{y}{f}\end{aligned}\tag{4.50}$$

donde  $f$  es la distancia focal del sistema colector.

A continuación repasaremos los resultados, ya clásicos, para el valor cuadrático medio, espectro de frecuencia y densidad de probabilidad de las fluctuaciones del ángulo de llegada. Posteriormente, estas conclusiones teóricas serán comparadas con la experiencia.

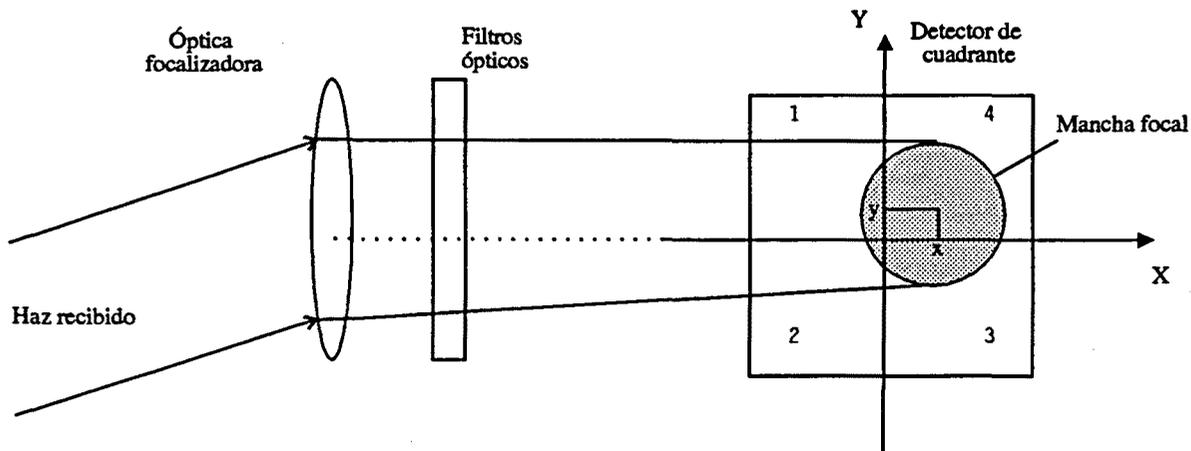


Fig. 4-22. Geometría de la distribución de intensidad sobre el plano focal.

#### 4.5.1 Espectros y densidades de probabilidad para las fluctuaciones del ángulo de llegada.

Interpretemos el ángulo de llegada como la inclinación neta que el frente de onda presenta a la entrada de la apertura colectora (Karp et al, 1988): la diferencia de fase  $\Delta S$  entre dos puntos separados una distancia igual al diámetro de apertura  $D$  (figura 4-23) puede considerarse una buena aproximación a esta inclinación,

$$\alpha = \frac{\Delta S}{kD} = \frac{S(\rho_1) - S(\rho_1 + D)}{kD} \tag{4.51}$$

con  $k = 2\pi/\lambda$  el número de onda,  $\rho_1$  una coordenada transversal de referencia y suponemos el ángulo de llegada  $\alpha$  lo suficientemente pequeño ( $\alpha$  representa indistintamente a  $\alpha_x$  o  $\alpha_y$ ). Si  $\langle S_1 \rangle = 0$  está claro que  $\langle \alpha \rangle = 0$  y, haciendo uso de la expresión anterior, podemos calcular la varianza de las fluctuaciones del ángulo de llegada como

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{\langle \Delta S_1^2 \rangle}{k^2 D^2} = \frac{D_s(D)}{k^2 D^2} \tag{4.52}$$

donde  $D_s(\rho) = \langle [S_1(\rho_1) - S_1(\rho_2)]^2 \rangle$  es la función de estructura de fase con  $\rho = |\rho_2 - \rho_1|$ . Para la mayoría de problemas que comúnmente se plantean, la función de estructura de fase  $D_s$  puede reemplazarse por la función de estructura de onda  $D_s(\rho) = D_s(\rho) + D_x(\rho) = D_w(\rho)$  (Fried, 1967) definida en el capítulo 3 y para la que habíamos encontrado la expresión:

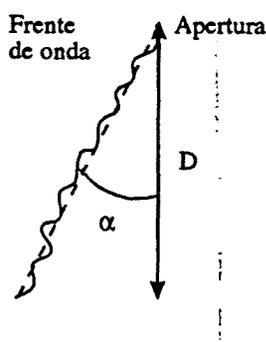


Fig. 4-23. Inclinación del frente de onda como fluctuación del ángulo de llegada.

$$D_w(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_s(K) + \Phi_x(K)] [1 - \exp(jK \cdot \rho)] dK \quad (4.53)$$

Aquí,  $\Phi_s$  y  $\Phi_x$  son los espectros de potencia de las fluctuaciones de fase y log-amplitud dados por la teoría de Rytov (ecuación 3.26). Sustituyendo y suponiendo que la turbulencia, isotrópica y homogénea, obedece un espectro de Kolmogorov, resulta:

$$D_s(\rho) = D_w(\rho) = 2.914 k^2 \rho^{5/3} \int_0^L C_n^2(z) \gamma^{5/3} dz \quad (4.54)$$

con  $\gamma = 1$  para onda plana y  $\gamma = z/L$  para onda esférica. Podemos reescribir la expresión anterior como

$$D_s(\rho) = C \rho^{5/3} \quad (4.55)$$

con  $C$  una constante determinada por el trayecto de propagación, las condiciones ambientales particulares, y la geometría y frecuencia de la onda que se ha propagado. Es conveniente reemplazar  $C$  por una nueva cantidad  $r_0$ , la cual posee dimensiones de longitud y viene dada por

$$r_0 = \left( \frac{6.88}{C} \right)^{3/5} \quad (4.56)$$

de forma que la función de estructura de fase en términos del llamado diámetro de coherencia  $r_0$ , resulta:

$$D_s(\rho) = 6.88 \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^{5/3} \quad (4.57)$$

Este parámetro  $r_0$  puede interpretarse físicamente como una medida de la distancia lateral sobre la cual la onda debe ser considerada coherente: en efecto, habíamos descrito la coherencia espacial de la onda a través de la función de coherencia normalizada para el campo (ecuación 3.45)

$$M(\rho) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} D_w(\rho) \right\} \quad (4.58)$$

y, si se aproxima  $D_w \approx D_s$ , al sustituir (4.57) resulta

$$\begin{aligned} M(\rho) &= \exp \left\{ -3.44 \left( \frac{\rho}{r_0} \right)^{5/3} \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\left( \frac{2\rho}{r_0} \right)^{5/3} \right\} \end{aligned} \quad (4.59)$$

expresión en la que  $r_0/2$  mide la distancia transversal a la cual la coherencia del frente de onda se ha reducido a  $1/e$ .

Si sustituimos (4.57) en (4.52) obtenemos una expresión para la varianza del ángulo de llegada función del diámetro de coherencia:

$$\langle \alpha^2 \rangle = 6.88 \frac{1}{k^2 r_0^{5/3} D^{1/3}} \quad (4.60)$$

Aunque la expresión utilizada para  $D_w$  fue deducida bajo condiciones de débil turbulencia y pareciera que, por tanto, la expresión (4.60) sólo podría ser utilizada en este régimen de propagación, se demuestra que el resultado anterior es aplicable incluso en condiciones de fuerte turbulencia (Fante, 1975). Era de esperar si recordamos que los efectos de saturación no afectan a la fase de igual manera a como lo hacen con la amplitud de la onda.

a) Espectro de las fluctuaciones del ángulo de llegada.

Consideremos la covarianza de las fluctuaciones de ángulo de llegada medida por aperturas de diámetro  $D$ :

$$\begin{aligned} B_\alpha(\rho) &= \langle \alpha(\rho+\rho_1) \alpha(\rho) \rangle = \\ &= \frac{1}{k^2 D^2} \langle [S(\rho+\rho_1) - S(\rho+\rho_1+D)] [S(\rho_1) - S(\rho_1+D)] \rangle \end{aligned} \quad (4.61)$$

Desarrollando este producto e identificando  $\langle S(\rho+\rho_1) S(\rho_1) \rangle$  con la correlación de las fluctuaciones de fase  $B_s(\rho)$ , resulta

$$B_\alpha(\rho) = \frac{1}{k^2 D^2} \{ 2B_s(\rho) - B_s(\rho+D) - B_s(\rho-D) \} \quad (4.62)$$

La correlación  $B_s(\rho)$  puede expresarse mediante la función de estructura de fase  $D_s(\rho)$ :

$$B_s(\rho) = \sigma_s^2 - \frac{1}{2} D_s(\rho) \quad (4.63)$$

Al sustituir (5.54) en (5.53) y considerar (4.57) obtenemos una expresión para la covarianza de las fluctuaciones del ángulo de llegada en términos del diámetro de coherencia  $r_0$ :

$$\begin{aligned} B_\alpha(\rho) &= \frac{1}{2k^2 D^2} [ D_s(\rho+D) + D_s(\rho-D) - 2D_s(\rho) ] = \\ &= \frac{6.88}{2k^2 D^2 r_0^{5/3}} [ (\rho+D)^{5/3} + (\rho-D)^{5/3} - 2\rho^{5/3} ] \end{aligned} \quad (4.64)$$

Como hicimos con la intensidad, utilizemos la hipótesis de Taylor para convertir las fluctuaciones temporales de fase en fluctuaciones espaciales más fácilmente tratables: cuando las inhomogeneidades del índice de refracción atraviesen el trayecto de propagación con velocidad  $V_\perp$  uniforme, las distorsiones del frente de fase se moverán sin evolucionar a lo largo de la apertura receptora. Así pues,

$$\Delta S_1(t+\tau) = S_1(0 - V_\perp \tau, t) - S_1(D - V_\perp \tau, t) \quad (4.65)$$

De este modo, las expresiones temporales se obtienen de las espaciales sólo con sustituir  $\rho$  por  $V_\perp \tau$ :

$$C_a(\tau) = \frac{1}{2k^2 D^2} [D_s(D-V_1\tau) + D_s(D+V_1\tau) - 2D_s(V_1\tau)] \quad (4.66)$$

y, consecuentemente, el espectro buscado  $W_a(f)$  :

$$W_a(f) = \frac{1}{4\pi k^2 D^2} \int_{-\infty}^{\infty} [D_s(D-v_1\tau) + D_s(D+v_1\tau) - 2D_s(v_1\tau)] \times e^{-2\pi f\tau} d\tau \quad (4.67)$$

Sin entrar en consideraciones cuantitativas más exhaustivas (Fante, 1974; 1975; 1980), la hipótesis de Taylor nos conduce a pensar que, al igual que ocurría con las intensidades, los espectros de frecuencia de las fluctuaciones de fase deben decaer para frecuencias  $f > V_1/D$  .

#### b) Densidad de probabilidad para las fluctuaciones de ángulo de llegada.

No se ha desarrollado ninguna teoría que resuelva de forma estricta el problema de determinar el perfil de la función de distribución que verifican las fluctuaciones del ángulo de llegada de una onda propagada a través de la atmósfera turbulenta. Tan sólo se han presentado consideraciones cualitativas que esbozan soluciones sencillas a la cuestión (Fried, 1973; Titterton, 1973; Goodman, 1985).

En ausencia de teorías que conduzcan a resultados contrarios, se suele suponer que el centroide, con coordenadas  $(x,y)$  , de la distribución de intensidad sobre el plano focal del sistema óptico colector describe una traza aleatoria tal que, recurriendo al teorema del límite central, nos permite suponer que  $x$  e  $y$  son variables gaussianas de media cero e igual varianza  $\sigma^2$  . Consecuentemente, la distancia  $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$  que separa el centroide del eje del sistema óptico será una variable aleatoria Rayleigh:

$$p(\rho) = \frac{2\rho}{\sigma_\rho^2} \exp(-\rho/\sigma_\rho^2) \quad (4.68)$$

Estas conclusiones también son válidas para los ángulos de interés  $\alpha_x = x/f$  ,  $\alpha_y = y/f$  y  $\sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$  .

Pasemos a estudiar experimentalmente todas estas cuestiones, base de algunas de las hipótesis que ha sido necesario considerar en el posterior desarrollo de este trabajo.

#### 4.5.2 Procedimientos de medida y análisis.

Con un sistema telescópico receptor que tenga un aumento angular suficientemente grande, el desplazamiento respecto al eje óptico del sistema del centro de gravedad  $(x,y)$  de la mancha focal es la medida más cómoda para caracterizar las

fluctuaciones del ángulo de llegada  $\alpha_x = x/f$  y  $\alpha_y = y/f$ .

Tras vigilar la acomodación del receptor para evitar que vibraciones del edificio introdujeran ruido mecánico en nuestras medidas, pasamos a estimar  $x$  e  $y$  situando en el plano focal del telescopio un detector sensible a la posición (véase la figura 4-24). Se exigía en primer lugar que la mancha focal entera estuviera localizada dentro del área del cuadrante (de lo contrario, parte de la energía se pierde, con la correspondiente degradación de la señal) y que cada uno de los cuadrantes reciba algo de señal (pues si no es así, entonces al menos uno de los cuadrantes recibe sólo radiación de fondo y, por tanto, este fotodetector no contribuye con información útil, indicativo de que el sistema no es

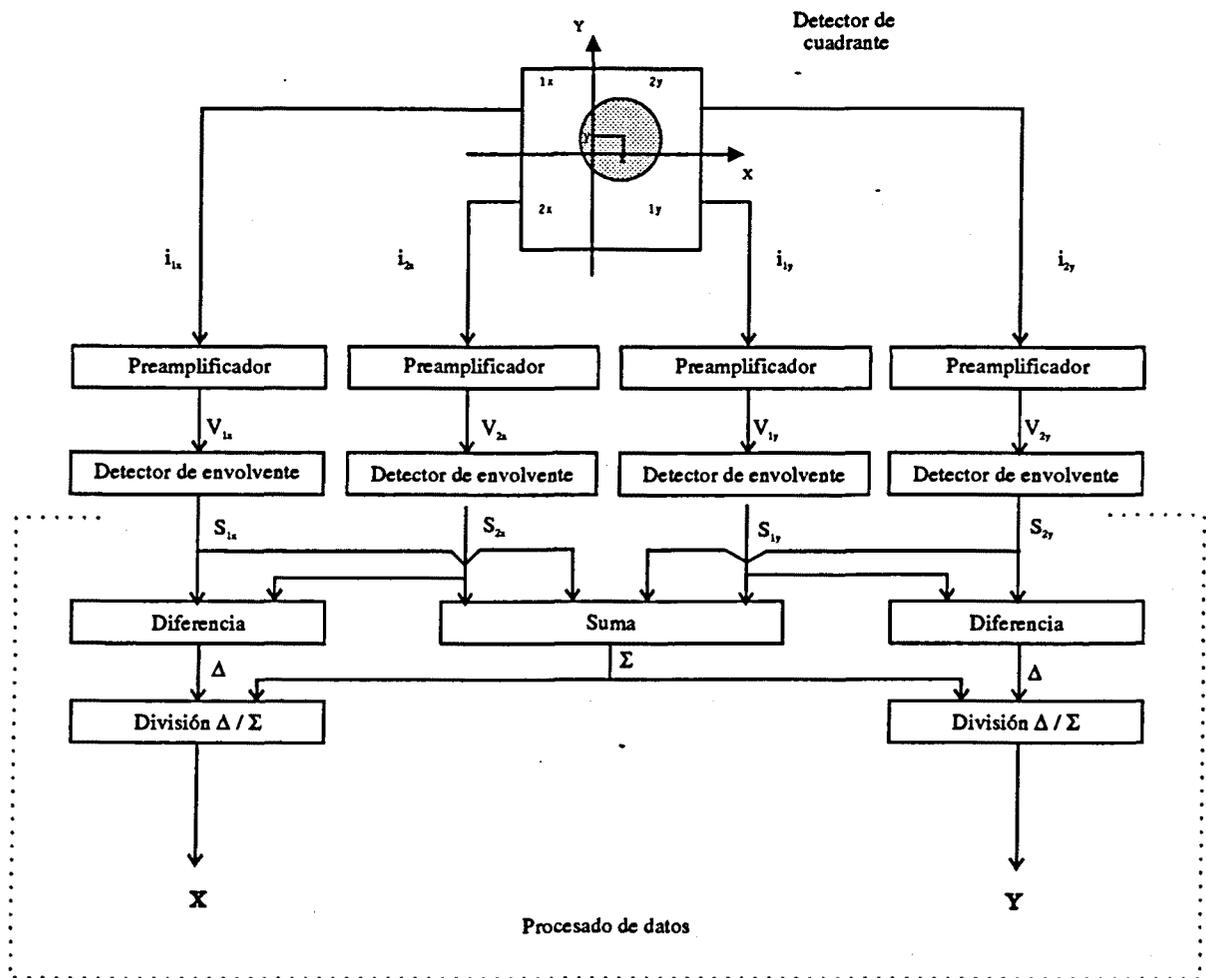


Figura 4-24. Estimación del vector  $(x, y)$  mediante un detector sensible a la posición.

utilizado de forma eficiente). A continuación, las tensiones de salida de los amplificadores de transimpedancia alimentados por las corrientes de los fotodetectores (cuadrantes) se filtraban con un pasobanda sintonizado a la frecuencia de modulación de la señal emitida y, posteriormente, rectificadas y transferidas al sistema de adquisición donde eran digitalizadas y almacenadas para un ulterior procesamiento que estimase las fluctuaciones del ángulo de llegada.

Como en el análisis de las fluctuaciones de intensidad, cada conjunto de datos consistió en 15 repeticiones de un ciclo de un minuto de adquisición con una frecuencia de muestreo muy por encima del ancho que caracterizaba la señal de salida de nuestro detector (500 Hz), seguido de 1500 muestras tomadas mientras el transmisor dejaba de funcionar (éstas eran utilizadas para, antes de normalizar la señal adquirida en cada ciclo por su valor medio, corregirla de cualquier offset y ruido).

Una vez obtenidas las coordenadas  $(x,y)$ , y por tanto los ángulos  $\alpha_x = x/f$  y  $\alpha_y = y/f$ , como salida del procesamiento primario (figura 4-24 anterior), éstos eran ordenados para construir un histograma que nos permitiera estimar la función de densidad de probabilidad de los ángulos de llegada  $p_\alpha$ . Igualmente, mediante un segundo procesamiento, eran estimados los espectros temporales de potencia de las fluctuaciones del ángulo de llegada (véase el apartado 4.3.2 correspondiente al análisis espectral de las fluctuaciones de intensidad).

#### 4.5.3 Resultados experimentales.

Mediante un procesamiento inicial, las salidas de la electrónica conectadas al detector sensible a la posición eran convertidas en inclinaciones del frente de onda en el plano de recepción: la figura 4-25 muestra las fluctuaciones temporales del ángulo de llegada medidas bajo condiciones de débil y más alta turbulencia. Las desviaciones típicas  $\sigma_\alpha$  para los datos mostrados en la figura están en torno a  $20 \mu\text{rad}$  y  $50 \mu\text{rad}$ , respectivamente.

La figura 4-26 analiza espectralmente las fluctuaciones anteriores, poniendo de manifiesto la dependencia de los anchos de banda con la intensidad de la turbulencia (a 15db, 25 Hz y 100 Hz, respectivamente).

Al igual que hicimos con las fluctuaciones de intensidad, una representación de la función  $U_\alpha(f) = fW_\alpha(f)$  nos mostrará el pico en los espectros que, de acuerdo con la hipótesis de Taylor, debe aparecer para frecuencias del orden de  $f_m \sim V_\perp/D$ : conocido el diámetro  $D$  de la pupila de entrada del telescopio receptor la determinación de la frecuencia de pico  $f_m$  sobre las figuras nos permite estimar burdamente el valor medio de la componente transversal del viento  $V_\perp$  a lo largo del trayecto de propagación.

En la figura 4-27 se presentan las funciones  $U_\alpha(f) = fW_\alpha(f)$  deducidas de los espectros mostrados en la figura 4-26. Como era de esperar, para el caso de más alta turbulencia la frecuencia  $f_m$  se halla desplazada ligeramente a la izquierda de la posición observada en débil turbulencia.

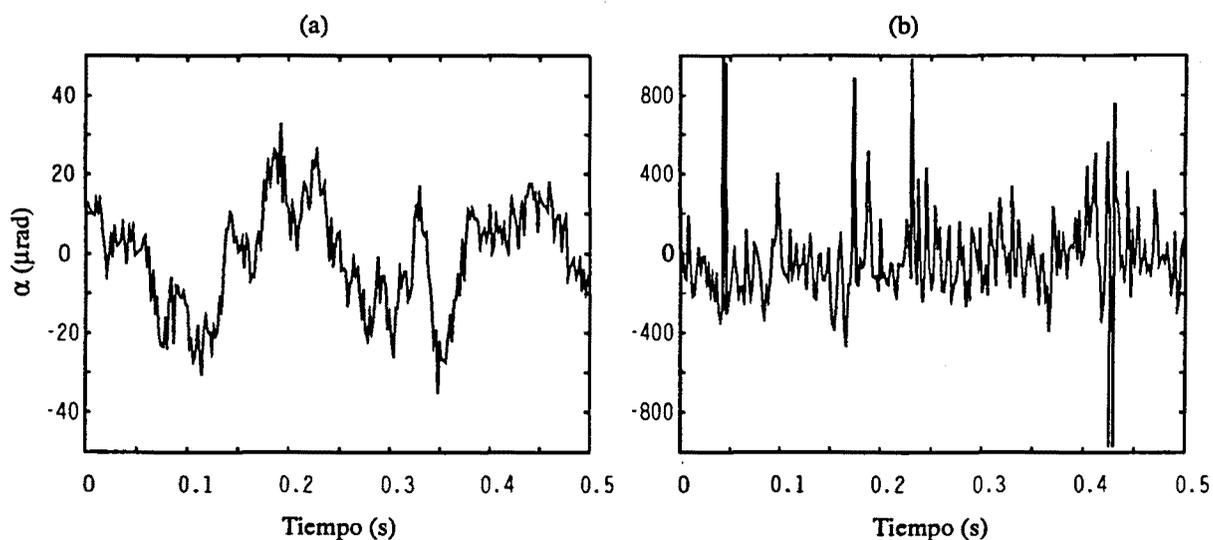


Figura 4-25. Fluctuaciones del ángulo de llegada como una función del tiempo, con débil (a) y más alta (b) turbulencia (Desviaciones típicas del ángulo de llegada: a)  $\sigma_{\alpha} = 20 \mu rad$  ; b)  $\sigma_{\alpha} = 50 \mu rad$  ).

Los resultados de estimar la función de densidad de probabilidad para las fluctuaciones del ángulo de llegada se muestran en las figuras 4-28 y 4-29, para débil y más alta turbulencia, respectivamente. En ambos casos, no queda lugar a dudas sobre el comportamiento gaussiano de los ángulos  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ , y, consecuentemente, el que la inclinación angular del frente de onda incidente respecto al eje óptico del sistema,  $\alpha_p = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$ , está descrita mediante una variable aleatoria Rayleigh.

Las curvas presentadas son típicas del conjunto de medidas realizadas bajo una amplio abanico de condiciones de propagación.

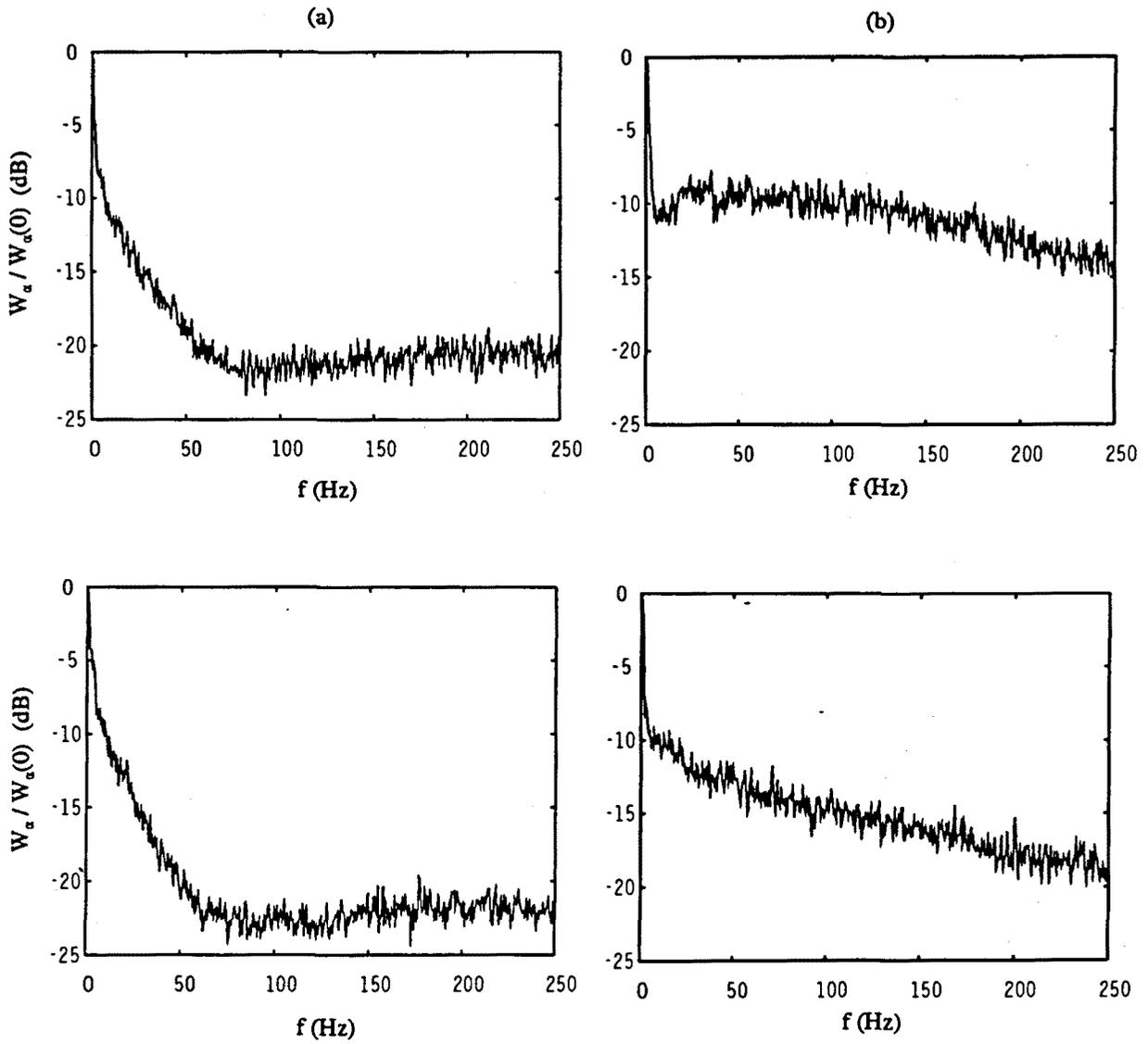


Figura 4-26. Espectros de potencia de las fluctuaciones del ángulo de llegada correspondientes a los datos presentados en la figura 4-25.

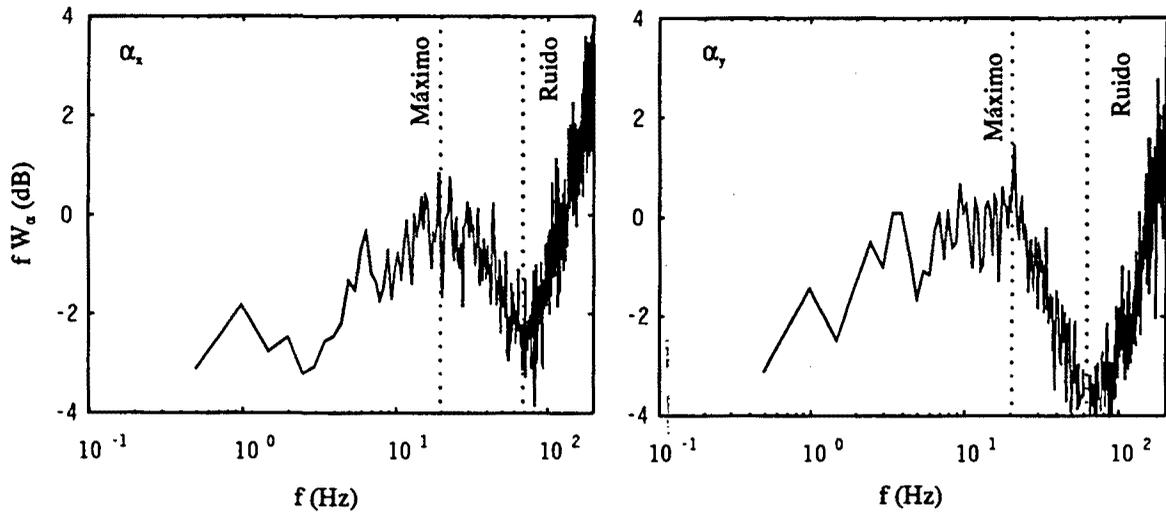


Figura 4-27. Espectros  $U_\alpha(f) = fW_\alpha(f)$  correspondientes a los presentados en la figura 4-25. Se observa un desplazamiento de la frecuencia  $f_m$  como una función de la intensidad de la turbulencia.

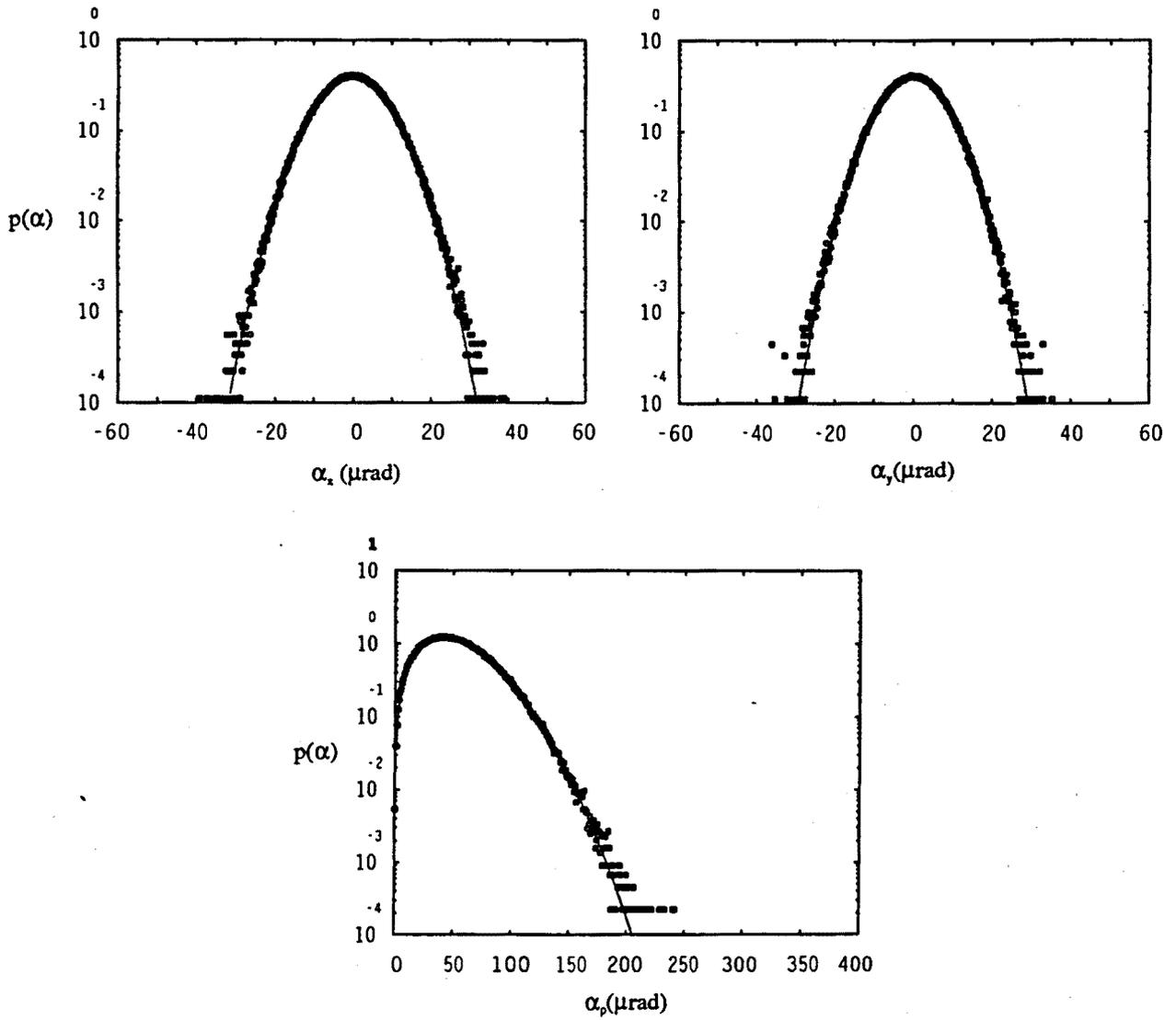


Figura 4-28. Funciones de densidad de probabilidad para las variables  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  y  $\alpha_\rho$ . Débil turbulencia.  $\sigma_\alpha = 20 \mu\text{rad}$ . Se superponen las distribuciones teóricas gaussianas (para  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ ) y de Rayleigh (para  $\alpha_\rho$ ).

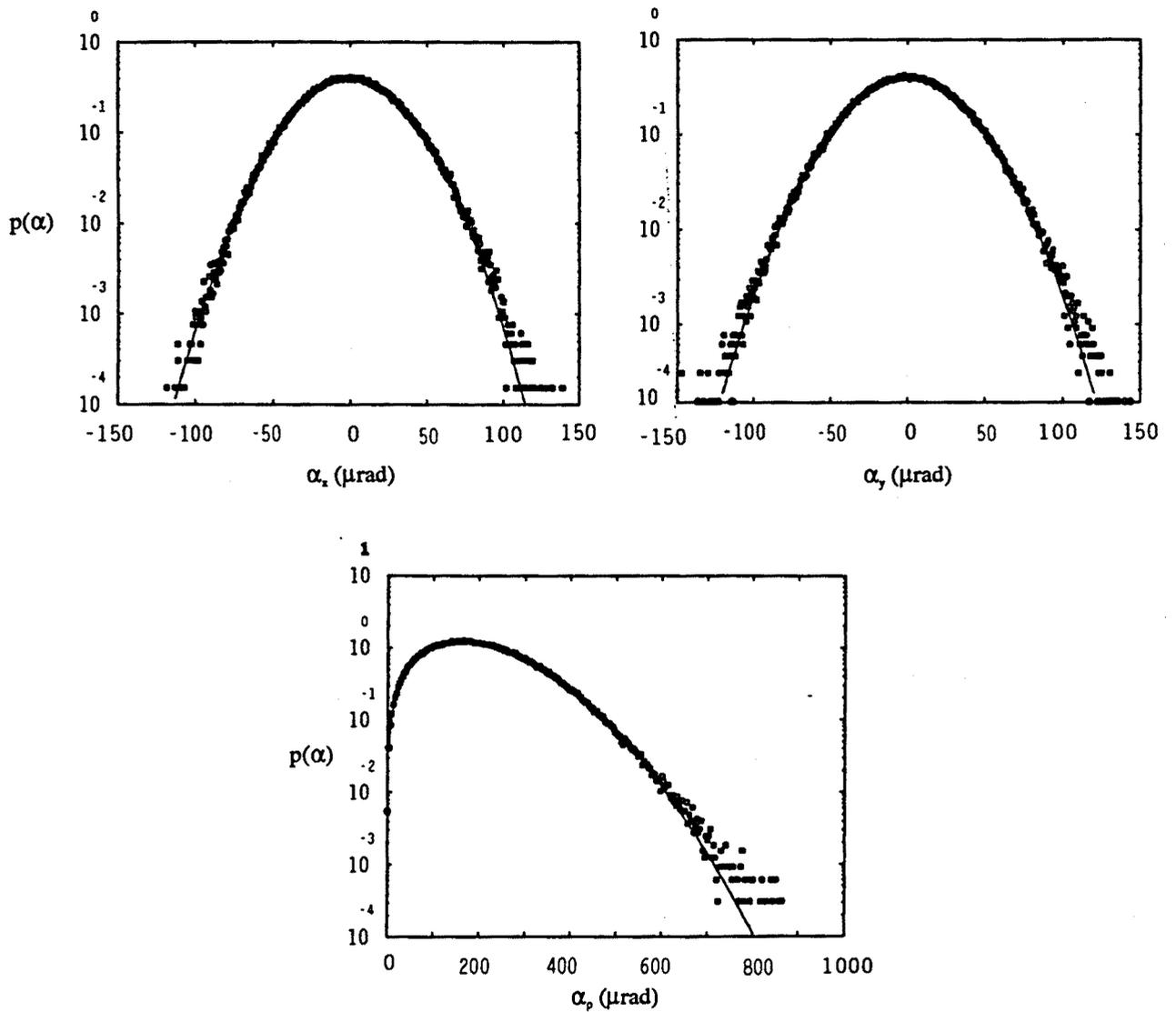


Figura 4-29. Funciones de densidad de probabilidad para las variables  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  y  $\alpha_p$ . Más alta turbulencia.  $\sigma_\alpha = 50 \mu\text{rad}$ . Se superponen las distribuciones teóricas gaussianas (para  $\alpha_x$  y  $\alpha_y$ ) y de Rayleigh (para  $\alpha_p$ ).