

M M M M M M M M M M M M M M M
I M M M M M M M M M M M M M M I
M M M M M M M M M M M M M M M

Universitat
Politécnica
de Catalunya

Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica

**Digrafs Línia:
Alguns Aspectes
en Comunicacions.
(Broadcasting i Vulnerabilitat)**

Tesi doctoral presentada per:
Xavier Muñoz López

Director de la Tesi:
Josep Fàbrega i Canudas

T 97/71

T MUÑ

Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica
Universitat Politècnica de Catalunya



**Digrafs Línia:
Alguns Aspectes
en Comunicacions.
(Broadcasting i Vulnerabilitat)**

Tesi doctoral presentada per: **Xavier Muñoz López**
ADMINISTRACIÓ D'INSTRUMENTS ACADÈMICS

Director de la Tesi: **Josep Fàbrega i Canudas**
a la pàgina 03 amb el número 831

Barcelona, 15-1-97

L'ENCARREGAT DEL REGISTRE.



Als meus pares.

Índex

Prefaci	1
0 Teoria de grafs i xarxes d'interconnexió	3
0.1 Xarxes d'interconnexió	5
0.1.1 Aspectes d'eficiència	6
0.2 Teoria de Grafs: Definicions bàsiques	8
0.3 Alguns digrafs bàsics	11
0.4 Homomorfismes i isomorfismes	12
1 La tècnica del digraf línia	15
1.1 Introducció	17
1.2 Definició i propietats	18
1.3 Algunes famílies de digrafs línia iterats	19
1.3.1 Digrafs de De Bruijn	19
1.3.2 Digrafs de Kautz	20
1.3.3 Digrafs Papallona	22
1.4 Producte acolorit de digrafs	22
1.4.1 Coloracions en digrafs	23
1.4.2 Producte acolorit: Definició i propietats	25
1.4.3 Producte acolorit i digraf línia iterat	27
1.5 Homomorfismes en digrafs línia	28
2 Algorismes de broadcasting en digrafs línia	29
2.1 Introducció	31
2.2 Broadcasting en digrafs línia	34
2.2.1 Inducció d'un algorisme en LG	35
2.2.2 Millora de l'algorisme en LG	36
2.2.3 Exemple	40

2.3	Algorisme en L^2G	42
2.3.1	Emulació sobre G d'un algorisme en L^2G	43
2.3.2	Disseny a partir de valors petits del grau	47
2.3.3	Alguns casos particulars	51
2.3.4	Un altre exemple	52
2.3.5	Aplicabilitat del mètode	56
2.4	Protocol en L^kG	56
2.4.1	Fites per al nombre d'iteracions	57
2.4.2	Disseny a partir de valors petits del grau	60
2.5	Broadcasting en dígrafs línia iterats	62
2.5.1	Coloracions compatibles	64
2.5.2	Broadcasting en algunes famílies de dígrafs	65
2.6	Altres models	66
3	Vulnerabilitat en dígrafs línia	69
3.1	Vulnerabilitat de l'encaminament	71
3.1.1	Alguns paràmetres i propietats	72
3.1.2	Dígraf de supervivència. Fites per al diàmetre	75
3.1.3	Dígraf de supervivència en dígrafs línia iterats	80
3.2	Vulnerabilitat del diàmetre	81
3.2.1	Camins disjunts en el dígraf de Kautz amb $D \leq 3$	82
3.2.2	Camins disjunts en els dígrafs de Kautz i de De Bruijn	83
3.2.3	Noves famílies de dígrafs poc vulnerables	88
	Conclusions	93
A	Taules referents als algorismes de broadcasting	97
B	Dígrafs (Δ, D', s) més grans	102
	Bibliografia	107

Prefaci

El problema tècnic de més dificultat en el disseny d'una màquina de connexió és el del disseny de la xarxa d'interconnexió general a través de la qual es comuniquen els processadors. La xarxa de comunicació suposa la major part del cost del sistema, la major part de l'energia dissipada, la major part del cablatge, i la major part de les limitacions del seu funcionament. Això és degut en part a la poca experiència que tenim en el disseny d'aquestes xarxes, i per tant els nostres mètodes estan lluny de ser òptims. Però és degut també al fet que el disseny d'aquestes xarxes és fonamentalment complicat: la xarxa de comunicació fa la major part de la computació.

W. D. Hillis [29]

Aquesta tesi s'engloba dins les activitats del grup d'investigació de Teoria de Grafs i Combinatòria del Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la UPC. Ha estat realitzada parcialment amb el suport dels projectes TIC 94-0592 i TIC 92-1228-E de la CICYT i del projecte HCM ERBCHRX-CT920049 de la Unió Europea. Part d'aquest treball ha estat realitzat al Dipartimento di Informatica e Sistemistica de la Università degli studi "La Sapienza", a Roma.

Moltes de les aportacions que apareixen aquí han estat publicades prèviament en diferents revistes o presentades a congressos ([8, 41, 42, 45]), i

fruit d'aquests resultats ha estat possible la realització de diversos projectes de final de carrera a l'ETSETB.

Les paraules citades a l'inici d'aquesta introducció situen l'àmbit en que es mou aquest treball: les xarxes d'interconnexió. L'eina utilitzada per modelar-les és la Teoria de Grafs, mitjançant la qual hem estudiat alguns paràmetres en comunicacions —temps de broadcasting i tolerància a fallades de la xarxa— per algunes famílies prou conegudes de topologies: els digrafs línia iterats.

La forma en que hem estructurat aquesta tesi és la següent:

En el Capítol 0 es dona un cop d'ull a les xarxes d'interconnexió en els sistemes massivament paral·lels, així com les definicions bàsiques de la Teoria de Grafs que necessitarem per presentar els resultats obtinguts en la tesi. A continuació, el Capítol 1 anirà dedicat exclusivament a la tècnica del digraf línia. En ell es presenten algunes de les característiques que la fan interessant en xarxes d'interconnexió, així com una nova caracterització dels digrafs línia iterats que ens serà útil per altres resultats (Secció 1.4).

Els dos darrers capítols es centren en els dos aspectes que pretenem estudiar: Algorismes de Broadcasting (Capítol 2) i Vulnerabilitat (Capítol 3). Aquest últim dividit en dues parts corresponents a diferents aspectes de la tolerància a fallades d'una xarxa: vulnerabilitat de l'encaminament i vulnerabilitat del diàmetre. Hem afegit també dos apèndixs on es presenten taules i resultats complementaris corresponents a aquests capítols.

No voldria acabar aquesta introducció sense agrair el suport que m'han donat tantes persones en la realització d'aquest treball. En primer lloc, i de manera especial, a en Josep Fàbrega, director de la tesi. També a en Miquel Angel Fiol, Jean-Claude Bermond i Alberto Marchetti-Spaccamela, per l'ajut que m'han prestat.

Agraixo també el recolzament que m'han donat tots els meus companys del Departament i tots els amics que durant aquests anys he fet arreu del món.

X.M.

Barcelona, 2 d'octubre del 1996.

Capítol 0

Teoria de grafs i xarxes d'interconnexió

Resum

Es presenten en aquest capítol algunes nocions i conceptes de la Teoria de Grafs que s'utilitzen en la resta d'aquest treball. Aquestes definicions i d'altres complementàries es poden trobar a [13] i a [25]. També fem una breu descripció dels problemes pràctics que justifiquen aquest treball.

0.1 Xarxes d'interconnexió

Moltes aplicacions, especialment en el càlcul científic i la simulació per ordinador, requereixen una gran potència de càlcul. Per tal de poder proporcionar eines adequades per a aquests problemes, durant els darrers anys s'han anat desenvolupant els sistemes de computació *massivament paral·lels*. Aquests sistemes consisteixen, típicament, en un conjunt de processadors connectats mitjançant algun tipus de xarxa d'interconnexió. Aquest conjunt de processadors pot estar integrat en un únic sistema, com ara en el cas dels superordinadors, o bé distribuït geogràficament, apareixent el concepte de *superordinador virtual*. En aquest últim cas, la interconnexió es pot realitzar mitjançant xarxes d'àrea local (LAN), metropolitana (MAN) o inclús xarxes amb una distribució geogràfica més àmplia (WAN), naixent el que ha començat a denominar-se *metacomputació* ([12]) o *computació universal* ([38]). A la pràctica s'ha vist que l'eficiència de la comunicació entre els diferents processadors esdevé crucial en el temps d'execució dels algorismes paral·lels. En especial, el temps de comunicació és molt més crític en el cas de xarxes distribuïdes on la connexió entre processadors és molt més lenta.

Per tal de minimitzar el temps de comunicació, a part de comptar amb els avenços tecnològics, un aspecte molt important serà l'elecció adequada

de la topologia de la xarxa. Bàsicament pot ser de dos tipus: El processadors poden compartir un medi comú de transmissió, un *bus*, o bé es pot fer mitjançant una connexió *punt a punt*, en la qual cada enllaç connecta només dos processadors. En aquest treball considerarem únicament aquest darrer tipus de topologia.

Si hi ha un nombre elevat de processadors o bé la distància entre els diferents elements és gran, és impensable establir un enllaç entre cada parell de processadors. Per tant, la informació que es transmeti d'un processador a un altre haurà de passar per altres processadors intermedis, que actuaran com a repetidors (*sistemes multihop*). Per tal que la comunicació es faci de manera eficient serà necessari escollir de manera adequada entre quins processadors s'estableixen els enllaços. Aquest concepte de "topologia adequada" engloba diferents aspectes, alguns d'ells contraposats, de tal forma que s'haurà d'arribar a una solució de compromís entre tots ells.

Per modelar la topologia de la xarxa és habitual utilitzar la Teoria de Grafs: cada processador o node es pot modelar mitjançant un vèrtex i cada enllaç, a través d'un arc en cas que sigui unidireccional, o bé d'una branca, en el cas bidireccional. En qualsevol cas, un enllaç bidireccional també pot venir modelat, des del punt de vista topològic, per dos d'unidireccionals en sentits oposats.

0.1.1 Aspectes d'eficiència

Tal com hem dit, hi ha diferents aspectes a l'hora de determinar quina ha de ser la topologia adequada per a una xarxa d'interconnexió. Destaquem en primer lloc, el nombre màxim de repetidors que es requereixen per establir una comunicació entre dos nodes qualssevol (diàmetre del graf), ja que serà bàsic des del punt de vista del retard de la comunicació (en especial utilitzant sistemes *store and forward*) i de la congestió de tràfic en els enllaços (sistemes de *wormhole routing*). Aquest aspecte entra en conflicte, però, amb el nombre d'enllaços que surten de cada node (grau màxim del graf), que per problemes tecnològics i de cost no pot ser massa elevat. Aquest primer compromís, des del punt de vista de la Teoria de Grafs és el que s'anomena problema (Δ, D) ([4, 11]), és a dir quin és el nombre màxim de vèrtexs que pot tenir un graf per a un diàmetre i grau màxim fixats.

La topologia de la xarxa ha de ser tal que aquests paràmetres es vegin

mínimament afectats en cas que es produeixin avaries a la xarxa, tant en els nodes com en els enllaços. És a dir, s'ha de procurar que un nombre petit d'avaries no deixi la xarxa desconnectada (connectivitat [13, 19]), i a més que el diàmetre del graf s'incrementi el mínim possible (problema (Δ, D', s) , [34]).

Un altre aspecte a tenir en consideració és que la pròpia topologia permeti algorismes eficients per l'encaminament dels missatges. Aquesta eficiència s'ha de considerar al seu torn sota diferents punts de vista. Així per exemple, els encaminaments han d'ésser senzills compaginant-se dos aspectes contraposats: les adreces dels nodes han de ser el més curtes possible, per maximitzar la *information ratio* dels missatges, però simultàniament això no ha de provocar un consum excessiu de memòria a cada node per emmagatzemar les taules d'encaminament ([46]). Que es pugui arribar a un bon compromís depèn en gran manera de la topologia de la xarxa.

S'ha de procurar que aquests encaminaments facin mínim el congestiament de la xarxa (índex de transmissió, [14, 27]), i que a més, en cas d'avaries, es vegin afectats el mínim possible (graf de supervivència, [16]).

Alguns dels processos fonamentals de comunicació, que es donen freqüentment en un entorn distribuït són els de *broadcasting*, *acumulació* i *gossiping* ([22, 32]). *Broadcasting* és el procés de disseminar la informació contenida en un node a la resta de la xarxa (one to all). *Acumulació* és el procés invers, és a dir, el d'agrupar la informació distribuïda en tots els nodes en un de sol (all to one). Finalment, *gossiping* és el procés d'acumular en cada node la informació contenida en tots els nodes de la xarxa (all to all). Aquests tres processos són parts crucials (i sovint crítiques) en moltes implementacions paral·leles d'aplicacions importants, com ara *branch and bound*, simulació numèrica, processament d'imatge o sincronització. Per tant, el fet que la xarxa permeti realitzar aquests processos de manera eficient és realment fonamental.

Hem descrit alguns dels paràmetres més importants a l'hora de dissenyar una possible xarxa d'interconnexió. Evidentment no hi són tots, i en casos concrets n'hi ha d'altres que poden ser més determinants, com ara que l'estructura de connexió permeti fer un disseny del *layout* que sigui simple (*planaritat*), com en el cas de sistemes VLSI, o que la topologia faciliti la implementació d'algorismes paral·lels determinats en xarxes dissenyades per resoldre problemes específics (*embeddings*).

0.2 Teoria de Grafs: Definicions bàsiques

Definirem tot seguit els principals conceptes de la Teoria de Grafs que utilitzarem en aquest treball. Es poden trobar aquestes definicions i d'altres complementàries que no es donen aquí en [13] i en [25].

Grafs i digrafs. Vèrtexs, arcs i branques

Un *graf* $G = (V, E)$ és un parell ordenat format per un conjunt $V = V(G)$ de *vèrtexs* i un conjunt $E = E(G)$ de parells no ordenats de vèrtexs, anomenats *branques*. Anàlogament, un *graf dirigit* o *digraf*, $G = (V, A)$, està format per un conjunt de vèrtexs i un conjunt $A = A(G)$ de parells ordenats de vèrtexs, anomenats *arcs*. En aquest treball considerarem només digrafs. En qualsevol cas, la major part dels conceptes que definirem aquí es poden referir també a grafs.

Generalment considerarem el conjunt A com un conjunt simple, és a dir, donats dos vèrtexs u, v només pot haver-hi un arc de la forma (u, v) . En alguns casos admetrem, de totes maneres, digrafs amb arcs múltiples, i parlarem de *multidigrafs*.

En ocasions ens serà útil considerar el concepte de *graf subjacent* d'un digraf $G = (V, A)$, que es defineix com el (multi)graf resultant de considerar el conjunt A com un conjunt de branques, és a dir de parells no ordenats de vèrtexs.

Graus

L'*ordre* d'un digraf $G = (V, A)$ és el nombre de vèrtexs que té, és a dir la cardinalitat del conjunt $V = V(G)$, $(|V|)$. Si u i v són vèrtexs del digraf G tals que $(u, v) \in A(G)$, direm que u és *adjacent cap a* v o que v és *adjacent des de* u . També direm que l'arc (u, v) és *incident des de* u o *incident cap a* v . Un arc de la forma (v, v) s'anomena *llaç*. De la mateixa forma, donats dos arcs (u, v) i (v, w) , on el vèrtex cap al qual és incident el primer coincideix amb el vèrtex des del qual és incident el segon, es diu que són *adjacents* l'un cap a l'altre.

El conjunt de vèrtexs adjacents des d'un vèrtex $u \in V(G)$ es representa com $\Gamma^+(u)$ i la seva cardinalitat és el *grau de sortida* del vèrtex u , $d^+(u) =$

$|\Gamma^+(u)|$. El conjunt de vèrtexs adjacents cap a un vèrtex u i el grau d'entrada d'aquest vèrtex es defineixen de manera similar, $d^-(u) = |\Gamma^-(u)|$. Donat un digraf G , es defineix el grau màxim de sortida, Δ^+ , com el màxim dels graus de sortida d'entre tots els vèrtexs de G . Anàlogament es defineixen el grau màxim d'entrada, Δ^- , grau mínim de sortida, δ^+ , i el grau mínim d'entrada, δ^- . El grau màxim i el grau mínim d'un digraf es defineixen respectivament com $\Delta = \max\{\Delta^+, \Delta^-\}$ i $\delta = \min\{\delta^+, \delta^-\}$. Un digraf es diu que és d -regular si $d = \delta = \Delta$. També es pot parlar de digrafs d -regulars d'entrada o de sortida quan $d^- = \delta^- = \Delta^-$ o, respectivament, quan $d^+ = \delta^+ = \Delta^+$.

Camins i distàncies. Diàmetre

Siguin u, v dos vèrtexs d'un digraf G . Un recorregut de llargada m de u a v , denotat per $u \rightsquigarrow v$, és un seqüència de vèrtexs

$$u = u_0, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m = v$$

de forma que per a tot i , $(u_i, u_{i+1}) \in A(G)$. Un recorregut en el qual $u_i \neq u_j$ per tot $i \neq j$ s'anomena camí¹. Un camí en el qual $u = v$ es diu cicle. Un recorregut, cicle o camí també es pot expressar com una seqüència d'arcs en comptes de vèrtexs:

$$(u, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{m-2}, u_{m-1}), (u_{m-1}, v)$$

Dos recorreguts es diu que són *disjunts* si no contenen cap vèrtex en comú, excepte, potser, els vèrtexs finals dels mateixos. Es diu que són *arc-disjunts* si no tenen cap arc en comú². Donats dos vèrtexs u, v , la *distància* de u a v , $d(u, v)$, és la llargada del camí més curt possible de u a v . Si no existeix cap camí de u cap a v es diu que $d(u, v) = \infty$. El *diàmetre* d'un digraf G , $D(G)$, és la màxima de les distàncies d'entre tots els vèrtexs del digraf

$$D(G) = \max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$$

Es diu que un digraf és k -*assolible* si entre qualsevol parell de vèrtexs del digraf existeix un camí o recorregut de llargada exactament igual a k .

¹En els casos en que sigui irrelevant el fet que en un recorregut es repeteixin vèrtexs, utilitzarem el nom de recorregut o camí indistintament.

²Cal destacar que la restricció de ser arc-disjunts és més feble que no pas la de ser simplement disjunts.

Connectivitat

Si $D(G) \neq \infty$ es diu que el digraf G és *fortament connex*³. Direm que un digraf G està *desconnectat* si no és fortament connex.

La *connectivitat* d'un digraf G , $\kappa(G)$, és el nombre mínim de vèrtexs que s'han d'eliminar del digraf G per tal que esdevingui desconnectat o trivial (amb només un vèrtex). De la mateixa forma l'*arc-connectivitat* d'un digraf G , $\lambda(G)$, és el mínim nombre d'arcs que s'han d'eliminar del digraf G per tal que esdevingui desconnectat. A [23] es demostra que si $\delta(G)$ és el grau mínim del digraf G , llavors es verifica que $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$. Direm que un digraf és *maximalment connex* en cas que es verifiquin les igualtats, $\kappa(G) = \lambda(G) = \delta(G)$. Observem que el màxim valor de les connectivitats per a un digraf d -regular amb llaços és $d - 1$.

Subdigrafs i producte de grafs

Donat un digraf $G = (V, A)$, es diu que $H = (V', A')$ és un *subdigraf* de G , si $V' \subseteq V$ i $A' \subseteq A$. Es diu que és un *subdigraf generador* si $V' = V$. Un *subdigraf induït* pel conjunt de vèrtexs $U \subset V$ és aquell que té U com a conjunt de vèrtexs, i com a conjunt d'arcs tots aquells arcs $(u, v) \in A(G)$ tals que $u, v \in U$. De manera anàloga es defineix el *subdigraf induït per un conjunt d'arcs*. Finalment s'anomena *contracció d'un arc* al procés mitjançant el qual s'identifiquen dos vèrtexs adjacents en un de sol, eliminant-se l'arc que els uneix. Un subdigraf obtingut per contracció d'arcs es diu que és un *subdigraf per contracció*.

Donats dos digrafs $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ el *producte directe* de $G_1 \times G_2$ es defineix com el digraf $H = (V', A')$ que té per conjunt de vèrtexs el producte cartesià dels conjunts V_1 i V_2 , és a dir $V'(H) = \{(u_1, u_2) | u_1 \in V_1, u_2 \in V_2\}$. Dos vèrtexs són adjacents en H si i només si les seves coordenades corresponen a vèrtexs adjacents en G_1 i G_2 . És a dir, $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in A'(H) \Leftrightarrow (u_1, v_1) \in A_1, (u_2, v_2) \in A_2$.

³Es diu que és *dèbilment connex* si per a qualsevol parell de vèrtexs u, v del digraf existeix un camí de u cap a v en el graf subjacent. Atès que en el cas de grafs tots dos conceptes són iguals, es parla simplement de grafs *connexes*.

0.3 Alguns digrafs bàsics

Presentem en aquesta secció alguns del digrafs bàsics que utilitzarem en la resta d'aquest treball.

cicle

El *cicle*⁴ amb n vèrtexs, C_n , es defineix com el digraf que té per conjunt de vèrtexs \mathbb{Z}_n , i el conjunt d'arcs està format per les parelles $(n, n + 1)$. En el context de multidigrafs denotem per dC_n el cicle C_n al qual es substitueix cada arc per un conjunt de d arcs paral·lels.

arbre

Un *arbre* T_n és un digraf amb n vèrtexs tal que el seu graf subjacent és connex i no té cicles. Es diu que és una *arborescència* si existeix un vèrtex u de forma que per a tot $v \in V(T_n)$, $v \neq u$, existeix un camí $u \rightsquigarrow v$, o bé si per a tot $v \in V(T_n)$, $v \neq u$, existeix un camí $v \rightsquigarrow u$.

digraf complet

El *digraf complet* amb n vèrtexs, K_n , és aquell digraf tal que per a qualssevol $u, v \in V(K_n)$, $u \neq v$, el parell (u, v) és un arc del digraf.

digraf complet amb llaços

El *digraf complet amb llaços* amb n vèrtexs, K_n^* , es defineix de manera similar al digraf complet, afegint-hi un llaç a cada vèrtex, és a dir, per a qualssevol $u, v \in V$, amb u no necessàriament diferent de v , existeix un arc de la forma (u, v) . En el context de multidigrafs denotem per K_n^p el digraf complet al qual s'han afegit p llaços a cada vèrtex.

⁴El nom de cicle té també l'accepció de camí tancat, tal com ho hem definit abans. Això no representa, però, cap inconvenient, ja que el digraf C_n es pot veure com el subdigraf format pels vèrtexs i arcs pertanyents a un camí tancat.

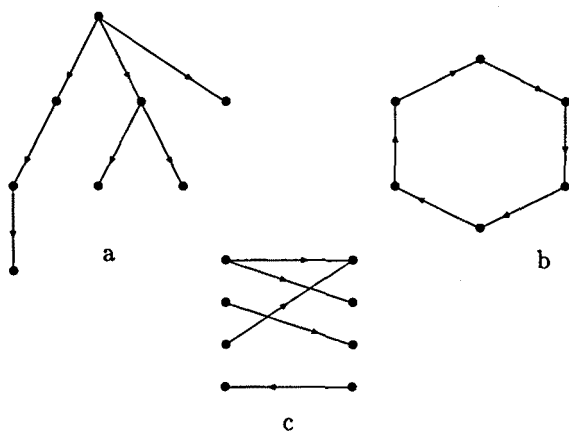


Figura 0.1: Alguns digrafs bàsics: (a) arborescència (b) cicle (c) digraf bipartit

digraf bipartit

Un digraf $G = (V, A)$ es diu que és bipartit si existeix una partició dels seus vèrtexs $V = V_1 \cup V_2$ en dos conjunts disjunts anomenats *ribes* de forma que dos vèrtexs en la mateixa riba no són adjacents. Un *digraf bipartit semicomplet* K_{n_1, n_2} és aquell digraf bipartit amb $|V_1| = n_1$ i $|V_2| = n_2$ tal que per a tot $u \in V_1$ i per a tot $v \in V_2$ existeix un arc de la forma (u, v) .⁵ Un *digraf bipartit complet* K_{n_1, n_2}^+ és aquell digraf bipartit tal que per a tot $u \in V_1$ i per a tot $v \in V_2$ existeix un arc de la forma (u, v) i un altre de la forma (v, u) .

0.4 Homomorfismes i isomorfismes

La noció de homomorfisme és comú a l'àlgebra: un homomorfisme és una aplicació entre dos sistemes algebrics que preserva les estructures. Dins de la teoria de grafs, el concepte d'homomorfisme no sempre s'entén de la mateixa

⁵Remarquem que un digraf bipartit complet no és fortament connex.

forma. En aquest treball utilitzarem la següent definició:

Definició 0.4.1 *Siguin $G_1 = (V_1, A_1)$ i $G_2 = (V_2, A_2)$ dos digrafs, sigui $\psi : V_1 \mapsto V_2$ una aplicació entre els seus vèrtexs. Es diu que ψ és un homomorfisme de G_1 en G_2 si i només si és suprajectiva en arcs i preserva les adjacències, és a dir, verifica que*

- $\forall (u_2, v_2) \in A_2, \exists (u_1, v_1) \in A_1 | \psi(u_1) = u_2, \psi(v_1) = v_2,$
- $\forall (u, v) \in A_1, (\psi(u), \psi(v)) \in A_2.$

Denotem per $\psi^{-1}(v)$, $v \in V_2$, el conjunt de vèrtexs $u_i \in V_1$ tals que $\psi(u_i) = v$. Direm que un homomorfisme ψ és *arc-regular* si per a tot $(u_2, v_2) \in A_2$, el subdigraf format pel conjunt de vèrtexs $\psi^{-1}(u_2) \cup \psi^{-1}(v_2)$, i pel conjunt d'arcs $M = \{(u_1, v_1) \in A_1 | u_1 \in \psi^{-1}(u_2), v_1 \in \psi^{-1}(v_2)\}$ és tal que conté un subdigraf de forma que tots els vèrtexs en $\psi^{-1}(u_2)$ tinguin grau de sortida 1 i tots els vèrtexs en $\psi^{-1}(v_2)$ tinguin grau d'entrada 1.^{6 7}

Finalment, es diu que dos digrafs $G = (V, A)$ i $H = (V', A')$ són *isomorfs* si existeix una bijecció entre els seus conjunts de vèrtexs que preserva les adjacències. S'escriu $G \simeq H$.

⁶És habitual referir-se a aquesta condició com a existència d'un *perfect matching*.

⁷Cal remarcar que per que un homomorfisme sigui arc-regular és necessari que $|\psi^{-1}(v)|$ sigui independent de v . Aquesta condició és anomenada en [52] *vèrtex-uniformitat*.

Capítol 1

La tècnica del digraf línia

Resum

Exposem en aquest capítol els resultats sobre els digraf línia que farem servir en capítols posteriors. També descrivim les famílies més conegudes de digrafs línia. Per finalitzar el capítol, presentem una nova caracterització dels digrafs línia iterats a partir d'un producte de digrafs, el producte acolorit, que també presentem aquí.

1.1 Introducció

Donat un dígraf G es pot construir un altre dígraf LG que anomenem *dígraf línia* de G del qual donem la definició en la següent secció. Abans de fer-ho seria convenient aclarir alguns problemes de terminologia. El dígraf línia considerat com a tal va ser introduït per primer cop en [26] com una adaptació per a dígrafs del *graf línia* [53] que ja havia estat estudiat per al cas no dirigit, facilitant algunes demostracions en diferents àrees dins de la Teoria de Grafs (vegeu per exemple [48]).

Ara bé, el nom de dígraf línia també designa la tècnica de construcció d'aquests dígrafs. A [21] es va estudiar per primer cop des d'aquest punt de vista, com una manera de construir, iterant aquest mètode, famílies de dígrafs amb bones propietats, en especial des del punt de vista de les xarxes d'interconnexió. En particular, aquestes famílies resulten ésser òptimes o quasi-òptimes en la majoria d'aspectes que s'han destacat al Capítol 0: problema (Δ, D) ([21]), connectivitat ([19, 20]), problema (Δ, D', s) (Capítol 3, [43]), senzillesa en el routing ([21]), índex de transmissió ([14, 27]), dígraf de supervivència (Capítol 3, [45]), broadcasting (Capítol 2, [9]), ...

Sembla per tant justificat escollir aquest tipus de dígrafs com a models de xarxes d'interconnexió.

En aquest treball utilitzarem el nom de digraf línia en tots dos sentits, com a digraf i com a tècnica, distingint-se, si cal, de quin d'ells es tracta pel mateix context.

1.2 Definició i propietats

Sigui G un digraf. Es defineix el *digraf línia* LG com el digraf tal que el seu conjunt de vèrtexs $V(LG)$ correspon al conjunt d'arcs de G , és a dir, $V(LG) = \{x = uv \mid (u, v) \in A(G)\}$ i tal que dos vèrtexs en LG són adjacents si els corresponents arcs en G ho són, és a dir $uv \in V(LG)$ és adjacent cap als vèrtexs de la forma $vw \in V(LG)$.

Observem que els graus de entrada i de sortida d'un vèrtex de LG són $d^-(uv) = d^-(u)$ i $d^+(uv) = d^+(v)$. Per tant, els graus màxim i mínim d'entrada i de sortida de LG són els mateixos que en G . Així doncs, si G és d -regular també ho serà LG . L'ordre del digraf línia LG és, evidentment, el nombre d'arcs de G . En conseqüència, si G és d -regular i té ordre n , aleshores LG té ordre dn . És fàcil comprovar a partir de la definició que un digraf línia no pot tenir arcs múltiples i que només té llaços si el digraf del qual és línia també en té.

La proposició següent ens descriu el comportament del diàmetre respecte del digraf línia:

Proposició 1.2.1 ([21]) *Sigui G un digraf fortament connex diferent d'un cicle. Aleshores, el diàmetre del digraf LG és una unitat més gran que el diàmetre de G . És a dir, $D(LG) = D(G) + 1$.*

Donat un digraf G , considerem un vèrtex v . En el digraf línia LG , els conjunts de vèrtexs $B_v^- = \{uv \mid (u, v) \in A(G)\}$ i $B_v^+ = \{vw \mid (v, w) \in A(G)\}$ verifiquen que per a qualsevol $x \in B_v^-$ és té que $\Gamma^+(x) = B_v^+$, i de la mateixa forma, per a qualsevol $y \in B_v^+$, $\Gamma^-(y) = B_v^-$. Sigui B_v el subdigraf de LG induït pel conjunt de vèrtexs $B_v^- \cup B_v^+$. És immediat veure que si v no té cap llaç, el subdigraf B_v és un digraf bipartit semicomplet amb ribes B_v^- i B_v^+ .

Es poden trobar altres propietats dels digrafs línia en [2] (Capítol 10).

Els *digrafs línia iterats* d'un digraf G , $L^k G$, es defineixen de manera recursiva com $L^k G = LL^{k-1} G$. Per exemple, els vèrtexs de $L^2 G$ corresponen

als arcs de LG . En conseqüència, $V(L^2G) = \{uvw \mid (uv, vw) \in A(LG)\}$. Així doncs, els vèrtexs de L^2G representen els recorreguts de llargada 2 en G , i es poden escriure com a seqüències de 3 vèrtexs de G , $u_0u_1u_2$, de forma que cada vèrtex és adjacent en G cap al següent vèrtex en la seqüència. En general, els vèrtexs de L^kG corresponen a recorreguts de llargada k en G i es poden escriure en forma de seqüències de $k+1$ vèrtexs, $u_0u_1 \cdots u_k$, de forma que u_i és adjacent cap a u_{i+1} . El vèrtex $u_0u_1 \cdots u_k$ és adjacent en L^kG cap als vèrtexs de la forma $u_1 \cdots u_k\alpha$, on α és qualsevol element de $\Gamma^+(u_k)$ en G .

Si G és d -regular amb ordre n , llavors L^kG és d -regular amb ordre $d^k n$. Si a més G és fortament connex i diferent d'un cicle, llavors $D(L^kG) = D(G) + k$.

Un recorregut de llargada t en L^kG es pot representar com una seqüència de $k+t+1$ vèrtexs de G de manera que les subseqüències de $k+1$ vèrtexs consecutius són els vèrtexs del recorregut en L^kG .

1.3 Algunes famílies de digrafs línia iterats

Tot i que la major part dels resultats obtinguts i exposats en aquest treball es basen en les propietats dels digrafs línia, i en conseqüència no es tenen en compte les particularitats de les famílies concretes de digrafs línia, creiem convenient referir-nos a les famílies més conegudes d'aquest tipus de digrafs, ni que sigui per presentar els resultats generals referits a casos concrets.

Bé és cert que hi ha resultats que no hem estat capaços de obtenir per digrafs línia en general i ens hem limitat a provar-los per algunes famílies particulars, com ara els exposats a la Secció 3.2. En aquesta mateixa secció presentem a més unes altres famílies de digrafs línia iterats que no s'esmenten en aquest capítol.

1.3.1 Digrafs de De Bruijn

Els digrafs de *De Bruijn*, $B(d, D)$, $d \geq 2$, van ser introduïts en [15]. Es tracta de digrafs d -regulars amb diàmetre D i ordre d^D .

Aquesta família té una especial importància dins dels digrafs línia iterats, no només perquè ha estat la més estudiada, sino també perquè totes les altres famílies estan referides d'alguna forma a aquesta. Així, per exemple, a la Secció 1.4 es posa de manifest aquesta relevància. A la literatura, els digrafs

de De Bruijn han rebut diferents definicions, de les quals en presentem dues¹.

Definició a partir de seqüències

Els vèrtexs del dígraf de De Bruijn $B(d, D)$ són paraules de llargada D construïdes a partir d'un alfabet \mathcal{A} de d símbols, que identifiquem amb \mathbb{Z}_d . És a dir,

$$V(B(d, D)) = \{x_0x_1 \cdots x_{D-1} \mid x_i \in \mathcal{A}\}$$

El vèrtex $x_0x_1 \cdots x_{D-1}$ és adjacent cap als vèrtexs de la forma $x_1 \cdots x_{D-1}\alpha$ on α és qualsevol element de \mathcal{A} (Figura 1.1(a)).

Definició com a dígraf línia iterat

El dígraf $B(d, D)$ es pot obtenir també com el dígraf línia iterat del dígraf complet amb llaços amb d vèrtexs, K_d^* . És a dir, $B(d, D) \simeq L^{D-1}K_d^*$. L'equivalència entre aquesta definició i l'anterior és immediata si substituïm l'alfabet \mathcal{A} pel conjunt de vèrtexs del dígraf K_d^* .

De forma equivalent, si considerem multidígrafs, atès que K_d^* és al seu torn el dígraf línia de K_1^d , és a dir un dígraf amb un sol vèrtex amb d llaços, també podem definir el dígraf de De Bruijn $B(d, D)$ com $L^D K_1^d$.

1.3.2 Dígrafs de Kautz

Els dígrafs de Kautz, $K(d, D)$, foren introduïts en [35] i constitueixen una de les famílies de dígrafs amb ordre més gran, fixats el grau màxim i el diàmetre, coneguts fins ara. Són d -regulars, amb diàmetre D i ordre $d^D + d^{D-1}$. Aquests dígrafs es poden veure com a subdígrafs dels dígrafs de De Bruijn, $K(d, D) \subset B(d+1, D)$, i com aquests últims admeten diferents definicions —tradicionalment se'n donen tres—, totes elles equivalents. Presentem aquí dos d'elles que seran les que utilitzarem en aquest treball².

¹Existeix una tercera definició clàssica per a aquesta família de dígrafs a partir de congruències, que no presentem aquí ja que no en fem ús en tot el treball. Aquesta definició permet, a més, fer una generalització dels dígrafs de De Bruijn, definint-se així els dígrafs de Reddy, Pradhan i Kuhl, $RPK(d, n)$ [50].

²La tercera definició, també a partir de congruències, permet generalitzar els dígrafs de Kautz als dígrafs de Imase-Itoh, $II(d, n)$ [33].

Definició a partir de seqüències

De manera semblant als digrafs de De Bruijn, els vèrtexs del digraf de Kautz $K(d, D)$ són paraules de llargada D construïdes a partir d'un alfabet \mathcal{A} de $d + 1$ símbols, que identifiquem amb \mathbb{Z}_{d+1} amb la restricció que dos símbols consecutius han de ser diferents. És a dir,

$$V(K(d, D)) = \{x_0x_1 \cdots x_{D-1} \mid x_i \in \mathcal{A}, x_i \neq x_{i+1}\}$$

El vèrtex $x_0x_1 \cdots x_{D-1}$ és adjacent cap als vèrtexs de la forma $x_1 \cdots x_{D-1}\alpha$ on $\alpha \in \mathcal{A}, \alpha \neq x_{D-1}$ (Figura 1.1(b)).

Definició com a digraf línia iterat

També de forma similar a la família de digrafs de De Bruijn, el digraf de Kautz $K(d, D)$ es defineix com el digraf línia iterat del digraf complet amb $d + 1$ vèrtexs, K_d . És a dir, $K(d, D) \simeq L^{D-1}K_d$.

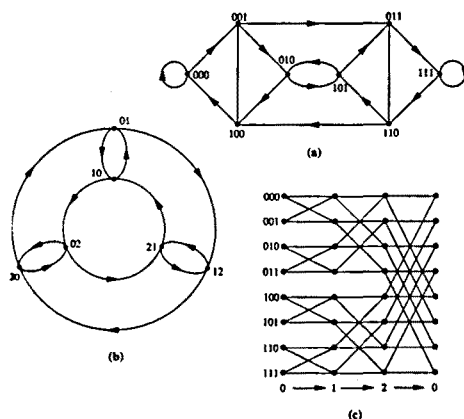


Figura 1.1: Digrafs (a) De Bruijn $B(2, 3)$, (b) Kautz $K(2, 2)$ i (c) Papallona $WDB(2, 3)$. Aquest últim s'ha d'entendre amb la direcció dels arcs de esquerra a dreta, i identificant la primera i última columnes.

1.3.3 Dígrafs Papallona

Els dígrafs *Papallona* han rebut una especial atenció des del punt de vista de comunicacions principalment per la seva alta transitivitat i per la facilitat per adaptar els algorismes de FFT (Fast Fourier Transform) a la seva topologia. A la literatura han rebut diferents noms i definicions no sempre totalment equivalents, com ara Sufflenet [30], Butterfly (Papallona) [37] o Generalized Cycles [49]. En centrem en aquest treball en la definició com a dígrafs regulars i ens referirem a aquests dígrafs amb la notació $WDB(d, n)$ (Wrapped Directed Butterfly). El dígraf $WDB(d, n)$ és d -regular amb diàmetre $2n - 1$ i ordre nd^n .

Definició a partir de seqüències

El dígraf Papallona $WDB(d, n)$ té com a conjunt de vèrtexs els parells (x, l) on $x \in \mathbb{Z}_d^n$ i $0 \leq l < n$. El vèrtex $(x_0x_1 \cdots x_{n-1}, l)$ és adjacent cap als vèrtexs de la forma $(x_0 \cdots x_{l-1}\alpha x_{l+1} \cdots x_{n-1}, l+1 \pmod n)$ amb $\alpha \in \mathbb{Z}_d$ (Figura 1.1(c)).

Altres caracteritzacions

No és difícil comprovar que la definició anterior correspon a un dígraf isomorf al producte directe d'un dígraf de De Bruijn i un cicle, $WDB(d, n) \simeq C_n \times B(d, n)$. D'aquesta última caracterització es desprén que també es tracta d'un dígraf línia iterat: $WDB(d, n) \simeq L^{n-1}(K_d^* \times C_n) \simeq L^n dC_n$ tal com es demostra a [3].

A diferència de les famílies anteriors, en que cada nova iteració del dígraf línia representa un nou dígraf de la mateixa família, el dígraf línia d'un dígraf Papallona no és un dígraf Papallona.

1.4 Producte acolorit de dígrafs

Presentem en aquesta secció un nou producte que, d'entre altres propietats, ens permetrà definir l'operació de dígraf línia d'una forma alternativa. Aquesta nova manera d'enfocar el dígraf línia ens serà d'utilitat per trobar

alguns nous resultats en les famílies de digrafs línia iterats, en especial pel que fa referència a algorismes de broadcasting, tal com es veurà al Capítol 2.

Abans, però, de parlar d'aquest producte haurem de definir alguns nous conceptes.

1.4.1 Coloracions en digrafs

Definició 1.4.1 *Sigui $G = (V, A)$ un digraf. Una arc-coloració de G és un parell (C, Ψ) , on C és un conjunt de d colors que quedarà identificat amb \mathbb{Z}_d , i Ψ és una aplicació $\Psi : A \rightarrow C$ tal que per a tot vèrtex $v \in V(G)$ l'aplicació Ψ restringida als arcs incidents des de v és injectiva, i també ho és l'aplicació Ψ restringida als arcs incidents cap a v . Un digraf G amb una arc-coloració (C, Ψ) vindrà denotat pel parell (G, Ψ) .*

En altres paraules, una arc-coloració de G és una assignació de colors als arcs de G de forma que els arcs incidents cap a un mateix vèrtex tenen colors diferents i el mateix passa amb els arcs incidents des d'un mateix vèrtex.

El següent és un resultat clàssic dins de la Teoria de Grafs:

Proposició 1.4.2 ([47]) *Tot digraf d -regular admet com a mínim una arc-coloració amb d colors.*

Per tant, d'ara endavant, quan ens referim a digrafs d -regulars amb una arc-coloració (C, Ψ) considerarem sempre $|C| = d$.

És fàcil observar que en el cas de digrafs d -regulars la aplicació Ψ restringida als arcs incidents des de o cap a un mateix vèrtex és també bijectiva. Per tant, donat (G, Ψ) on G és d -regular, és pot definir l'aplicació $c_i^\Psi : V \rightarrow V$, de forma que $c_i^\Psi v = u$ on u és tal que (v, u) és un arc de G amb $\Psi(v, u) = c_i$. L'aplicació c_i^Ψ és bijectiva, i denotarem la seva inversa com $c_i^{-\Psi}$.

Abans de seguir amb altres definicions serà útil considerar el resultat que ve a continuació:

Lema 1.4.3 *Sigui (G, Ψ) un digraf d -regular amb una arc-coloració. Donats dos vèrtexs $u, v \in V(G)$, $u \neq v$, i donada una seqüència d'operadors $c_1^\Psi \dots c_k^\Psi$ sempre es verifica que $c_1^\Psi \dots c_k^\Psi u \neq c_1^\Psi \dots c_k^\Psi v$.*

Demostració: Atès que les aplicacions c_i^Ψ són bijectives, tal com s'ha vist abans, estan definides les aplicacions $c_i^{-\Psi}$. Suposem que $c_1^\Psi \dots c_k^\Psi u = c_1^\Psi \dots c_k^\Psi v$. Per tant tenim $c_1^{-\Psi} c_1^\Psi \dots c_k^\Psi u = c_1^{-\Psi} c_1^\Psi \dots c_k^\Psi v$. Pel mateix raonament, $c_k^{-\Psi} \dots c_1^{-\Psi} c_1^\Psi \dots c_k^\Psi u = c_k^{-\Psi} \dots c_1^{-\Psi} c_1^\Psi \dots c_k^\Psi v$. Però atès que $c_i^{-\Psi} c_i^\Psi$ és l'operador identitat, tindriem $u = v$, en contradicció amb el que havíem suposat. ■

Definim ara un altre tipus de coloració:

Definició 1.4.4 Sigui $G = (V, A)$ un digraf d -regular i k -assolible. Una B -coloració del digraf G , és una terna (C, Φ, Θ) , on C és un conjunt de d colors que serà identificat amb \mathbb{Z}_d , i Φ, Θ són aplicacions $\Phi : A \rightarrow C$, $\Theta : V \rightarrow C^k$ amb les següents propietats:

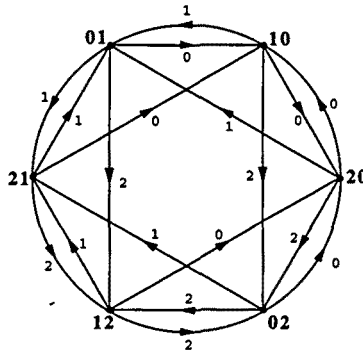
1. Per a tot $u \in V$, la aplicació Φ restringida al conjunt d'arcs incidents des de u és bijectiva.
2. La aplicació Θ és injectiva.
3. Per a tot $u, v \in V$ hi ha un camí de llargada k , u_0, u_1, \dots, u_k amb $u = u_0$ i $v = u_k$, de forma que $(\Phi(u, u_1), \dots, \Phi(u_{k-1}, v)) = \Theta(v)$.

Un digraf G amb una B -coloració (C, Φ, Θ) vindrà denotat per la terna (G, Φ, Θ) .

En altres paraules, una B -coloració d'un digraf G és una assignació de colors als arcs de G i un etiquetatge dels seus vèrtexs amb seqüències de k colors, de forma que des de qualsevol vèrtex, seguint el camí indicat per la seqüència de colors definida per l'etiqueta del vertex v , s'arriba al vèrtex v . A la Figura 1.2 es dona un exemple d'un digraf amb una B -coloració.

Igual que hem fet amb arc-coloracions, definim les aplicacions $c_i^\Phi : V \rightarrow V$ de forma que $c_i^\Phi v = u$ on u és tal que (v, u) és un arc de G amb $\Phi(v, u) = c_i$. Ara, però, les aplicacions c_i^Φ no són bijectives, ja que l'aplicació Φ restringida al conjunt d'arcs incidents cap a v no ho és.

En general no és cert que qualsevol digraf G , d -regular i k -assolible admeti una B -coloració. El fet que un digraf permeti una coloració d'aquest tipus representa un gran avantatge pel que fa a l'existència d'encaminaments

Figura 1.2: Digraf amb una B -coloració

senzills en comunicacions, permetent un sistema d'adreçament de missatges ràpid i que requereix poc consum de memòria. El següent resultat ens mostra una família de digrafs que admet una B -coloració.

Proposició 1.4.5 *Un digraf de De Bruijn $B(d, D)$ sempre admet almenys una B -coloració (C, Φ_B, Θ_B) que anomenarem B -coloració pròpia.*

Demostració: És immediat comprovar que la mateixa definició del digraf de De Bruijn a partir de seqüències correspon a una B -coloració si assignem el color α a l'arc $(x_0 \dots x_D, x_1 \dots x_D \alpha)$. ■

1.4.2 Producte acolorit: Definició i propietats

Definició 1.4.6 *Sigui $G = (V_1, A_1)$ un digraf d -regular amb una arc-coloració (C, Ψ) i sigui $H = (V_2, A_2)$ un digraf d -regular i k -assolible amb una B -coloració (C, Φ, Θ) . Es diu que F és el producte acolorit de (G, Ψ) per (H, Φ, Θ) , $F = (G, \Psi) \circledast (H, \Phi, \Theta)$, si $F = (V, A)$ és tal que*

- $V = V_1 \times V_2$
- $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in A$ si i només si $(u_1, u_2) \in A_1$, $(v_1, v_2) \in A_2$ i $\Psi(u_1, u_2) = \Phi(v_1, v_2)$.

Vegem a continuació algunes propietats bàsiques d'aquest producte:

Proposició 1.4.7 *Sigui G un dígraf d -regular amb una arc-coloració (C, Ψ) , i sigui H un dígraf d -regular i k -assolible amb una B -coloració (C, Φ, Θ) . Llavors el dígraf $F = (G, \Psi) \circ_d (H, \Phi, \Theta)$ és d -regular.*

Demostració: Atès que les aplicacions Ψ i Φ restringides als arcs incidents des d'un mateix vèrtex són bijectives, és immediat que F és regular de sortida, amb grau $d^+ = d$. Per veure que també és regular d'entrada, donat el vèrtex $(u, v) \in V(F)$, sigui quin sigui el color de l'arc $(v', v) \in A(H)$, sempre existirà només un vèrtex $u' \in V(G)$ adjacent cap a u de forma que $\Psi(u', u) = \Phi(v', v)$, doncs l'aplicació Ψ restringida al conjunt d'arcs incidents des d'un mateix vèrtex també és bijectiva. Es té, per tant, que $|\Gamma^-(u, v)| = |\Gamma^-(v)|$, i en conseqüència F també és regular d'entrada amb grau $d^- = d$. ■

Proposició 1.4.8 **Sigui G un dígraf d -regular amb diàmetre D i amb una arc-coloració (C, Ψ) , i sigui H un dígraf d -regular i k -assolible amb una B -coloració (C, Φ, Θ) . Llavors, donat el dígraf $F = (G, \Psi) \circ_d (H, \Phi, \Theta)$, es té $D(F) \leq D + k$.*

Demostració: Per provar-ho trobarem un camí entre dos vèrtexs qualssevol $x = (u_1, v_1)$ i $y = (u_2, v_2)$ amb $d(x, y) \leq D + k$. Éssent D el diàmetre del dígraf G , existirà en G un camí de llargada més petita o igual a D , des de u_1 fins a qualsevol altre vèrtex. És fàcil comprovar que, per a tot $w \in V(G)$, $w \neq u_1$, en el dígraf F existirà un camí de llargada més petita o igual a D des del vèrtex (u_1, v_1) a un vèrtex de la forma (w, z) per a algun $z \in V(H)$. Segons la definició d'una B -coloració, es té que, donat $\Theta(v_2) = c_1 \dots c_k$, per a qualsevol vèrtex $z \in V(H)$, $c_k^\Phi \dots c_1^\Phi z = v_2$, i en conseqüència, donat el Lemma 1.4.3, seguint en F el camí corresponent a la seqüència de colors $c_1 \dots c_k$ des de cada un dels vèrtexs (w, z) i (u_1, v_1) , s'arriba als vèrtexs (t, v_2) , $\forall t \in V(G)$ exactament en k passos. En particular, s'arribarà al vèrtex $y = (u_2, v_2)$ des de $x = (u_1, v_1)$ per un camí de llargada més petita o igual a $D + k$. ■

L'interés per aquest producte, pel que fa a aquest treball, és la seva equivalència amb l'operació de dígraf línia, tal com es veurà al següent apartat.

No incloem, per tant, altres resultats genèrics perquè considerem que cauen fora de l'àmbit d'aquesta tesi.

1.4.3 Producte acolorit i digraf línia iterat

Proposició 1.4.9 *Sigui (G, Ψ) un digraf d -regular amb diàmetre D i amb una arc-coloració, i sigui $(B(d, k), \Phi_B, \Theta_B)$ un digraf de De Bruijn amb una B -coloració pròpia. Llavors $(G, \Psi) \circ_d (B(d, k), \Phi_B, \Theta_B) \simeq L^k G$*

Demostració: Recordem que donat un digraf G , el conjunt de vèrtexs del digraf $L^k G$, $V(L^k G)$, ve definit com el conjunt de tots els possibles recorreguts de llargada k en G , i que el vèrtex $x \in V(L^k G)$ és adjacent cap al vèrtex $y \in V(L^k G)$ si i només si representen en G dos camins adjacents, és a dir, $x = v_0 v_1 \dots v_{k-1}$ i $y = v_1 \dots v_{k-1} v_k$ on $(v_{k-1}, v_k) \in A(G)$.

Ara bé, donada una arc-coloració de G , un camí de llargada k de u a v el podem definir com $(v, a_0 \dots a_{k-1})$ on $a_0 \dots a_{k-1}$ és una seqüència de colors tal que $u = c_{a_0}^{-\Psi} \dots c_{a_{k-1}}^{-\Psi} v$. Amb aquesta notació, en $L^k G$ dos vèrtexs x, y són adjacents si i només si $x = (v_0, a_0 \dots a_{k-1})$ i $y = (v_1, a_1 \dots a_{k-1} a_k)$ on $(v_0, v_1) \in A(G)$ i $\Psi(v_0, v_1) = a_k$. Fixem-nos, a més, que per a qualsevol seqüència de colors, $a_0 \dots a_{k-1}$, el parell determinat per $x = (v, a_0 \dots a_{k-1})$ és un vèrtex de $L^k G$. Aquesta definició, però, correspon a la de $(G, \Psi) \circ_d (B(d, k), \Phi_B, \Theta_B)$. El resultat queda, per tant, demostrat. ■

És interessant remarcar el fet següent, que es desprén de la demostració precedent:

Observació 1.4.10 *El resultat anterior no depèn de la coloració (C, Ψ) del digraf G .*

Aquesta observació no és certa en general si prenem un altre digraf amb una B -coloració diferent del digraf de De Bruijn.

1.5 Homomorfismes en digrafs línia

Donat un digraf G , d -regular, si considerem el digraf $L^k G$ com el producte acolorit $(G, \Psi) \otimes_d (B(d, k), \Phi_B, \Theta_B)$, apareix de forma natural l'existència d'homomorfismes de $L^k G$ tant sobre G com sobre $B(d, k)$. Així doncs, podem observar de manera immediata que l'aplicació $\psi : V(L^k G) \rightarrow V(G)$, en la qual $\psi(v, x_0 \cdots x_{k-1}) = v$, és un homomorfisme. De la mateixa forma, la aplicació $\psi' : V(L^k G) \rightarrow V(B(d, k))$ per la qual la imatge del vèrtex $(v, x_0 \cdots x_{k-1})$ és $x_0 \cdots x_{k-1}$ també es tracta d'un homomorfisme.

En qualsevol cas existeixen altres homomorfismes d'un digraf línia LG en el digraf G . Es poden trobar resultats en aquest sentit a [52]. En particular en aquesta referència es descriu un homomorfisme de $B(d, D)$ en $B(d, D - 1)$ en el qual al vèrtex $x_0 x_1 \cdots x_{D-1}$ li correspon el vèrtex $(x_0 - x_1)(x_1 - x_2) \cdots (x_{D-2} - x_{D-1})$, on la resta s'ha d'entendre mòdul d . És fàcil veure que aquest homomorfisme és arc-regular i la imatge de qualsevol vèrtex de la forma $aa \cdots a$ és el vèrtex $00 \cdots 0$. Aquest resultat el farem servir en el Capítol 2.

Capítol 2

Algorismes de broadcasting en digrafs línia

Resum

Proposem algorismes de broadcasting en digrafs línia sota els models d'un sol port i de p ports. Els nous algorismes proposats es basen en la idea d'induir un algorisme conegut sobre un digraf G en el seu digraf línia LG . Gràcies a la iteració d'aquest mètode apareixen noves fites superiors del temps de broadcasting en les famílies de digrafs línia iterats, millorant els resultats coneguts fins ara.

2.1 Introducció

Tal com s'ha exposat al Capítol 0, broadcasting és el procés en el qual un vèrtex del (di)graf ha de fer arribar una unitat d'informació, que anomenarem γ , a la resta de vèrtexs del (di)graf. Ens referirem al vèrtex des del qual s'inicia l'algorisme com a *vèrtex originador*.

Aquest problema apareix a la literatura considerat sota diferents models corresponents a diferents problemes de comunicació (vegeu [22, 32] per a recopilacions recents). En aquest capítol farem referència bàsicament a un d'ells, anomenat *model d'un sol port*, en el qual durant una unitat de temps un vèrtex que coneix γ pot comunicar-la a un dels vèrtexs que són adjacents des d'ell. Sota aquest model no és possible que un vèrtex rebí la peça d'informació a través de més d'un vèrtex alhora, tot i que aquesta és una restricció en realitat inexistent, ja que per conèixer γ només li cal rebre-la d'un vèrtex. Si en un algorisme es produeix aquest conflicte és suficient que un dels vèrtexs que hauria d'enviar la informació no ho faci. De la mateixa forma tampoc no és possible que un vèrtex rebí i envii γ durant la mateixa unitat de temps.

A la Secció 2.6 utilitzarem un altre model, anomenat *model de p ports* en el qual un vèrtex pot comunicar la informació a p dels seus veïns en una

mateixa unitat de temps.

En qualsevol dels models, un algorisme de broadcasting defineix un arbre generador del (di)graf, a partir dels arcs o les branques que han estat utilitzades en el procés. Aquest arbre és a més, en el cas de digrafs, una arborescència. Ens referirem a aquest arbre com a *arbre de broadcasting*.

Habitualment, l'objectiu en el disseny d'algorismes o protocols de broadcasting és el de minimitzar el temps d'execució. Donat un vèrtex $v \in V(G)$, es defineix $b(v)$ com el mínim nombre d'unitats de temps per a que finalitzi un algorisme de broadcasting éssent v el vèrtex originador. Donat un (di)graf G , l'expressió $b(G)$ designa el màxim valor de $b(v)$ per a qualsevol $v \in V(G)$.

Una primera fita inferior, general per a qualsevol (di)graf, ve donada per la proposició que enunciem a continuació:

Proposició 2.1.1 ([32]) *Sigui G un graf, dirigit o no, amb $n = |V(G)|$. Llavors, sota el model d'un sol port, $b(G) \geq \lceil \log_2 n \rceil$.*

De fet, aquest resultat posa de manifest que a cada unitat de temps, el nombre de vèrtexs que poden ser informats és com a màxim el nombre de vèrtexs que coneixien la informació fins aquell moment, ja que sota el model que considerem, cada vèrtex pot informar només un dels seus veïns. Un (di)graf en el qual es pugui assolir la fita de la Proposició 2.1.1 es diu que és un *(di)graf de broadcast*. És immediat que K_n és, per exemple, un digraf de broadcast.

És fàcil veure que aquesta fita inferior no serà assolible si el grau d del (di)graf és limitat. Així, per exemple, si $n = 2^k$ i $d < k$ la fita inferior $\lceil \log_2 n \rceil$ no es podrà assolir, ja que no serà possible que a cada unitat de temps els vèrtexs informats facin arribar la informació a algun veí seu.

D'altra banda, no és difícil obtenir altres fites per al temps de broadcasting per a un (di)graf general. Per exemple, la que proposem a continuació:

Proposició 2.1.2 ([32]) *Sigui G un graf, dirigit o no, amb diàmetre D i grau màxim Δ . Llavors, sota el model d'un sol port, $D \leq b(G) \leq \Delta D$.*

Donat un (di)graf G , un problema àmpliament considerat a la literatura és el de determinar quin és el valor de $b(G)$, o com a mínim fitar-lo de la manera més acurada possible. Evidentment, si es construeix un algorisme de

broadcasting en un (di)graf G tal que des de qualsevol vèrtex el temps en completar-se és inferior o igual a T_G , es té que $\max\{D, \lceil \log_2 n \rceil\} \leq b(G) \leq T_G$.

En els darrers anys s'ha estudiat extensament el problema de determinar fites superiors del temps de broadcasting en algunes famílies de digrafs línia iterats. Els millors resultats que s'han trobat fins ara els exposem a la Taula 2.1.

digraf	temps	referència
$B(d, D)$	$\frac{d+1}{2}(D+1)$	[10]
$B(d, D)$	$2D \lceil \log_2 d \rceil$	[28]
$B(d, D)$	$3D \lceil \log_3 d \rceil$	[28]
$B(d, D)$	$\frac{5}{4}(D \lceil \log_3 d \rceil + 3)$	[28]
$K(d, D)$	$\frac{d+3}{2}(D+1)$	[10]
$K(d, D)$	$2D \lceil \log_2 d \rceil$	[28]

Taula 2.1: Millors resultats trobats a la literatura

En el cas de digrafs Papallona, el problema de broadcasting només s'ha considerat de manera parcial per al cas no dirigit, WB , amb grau $d = 2$, i el temps que s'ha trobat l'enunciem a les proposicions següents:

Proposició 2.1.3 ([36]) *El temps de broadcasting per al graf $WB(2, n)$ és inferior o igual a $2n - 1$.*

Proposició 2.1.4 ([51]) *Si n és suficientment gran, existeix una constant c tal que $b(WB(2, n)) \leq 2n - \frac{1}{2} \log_2 \log_2 n + c$.*

Recentment s'ha estudiat el temps de broadcasting en grafs subjacents a digrafs línia en general, obtenint-se fites que milloren la majoria de resultats per als grafs de De Bruijn i Kautz entre d'altres (vegeu [9]).

El problema que nosaltres tractarem en aquest capítol és el de determinar fites superiors del temps de broadcasting en digrafs línia iterats en general,

mitjançant la construcció d'algorismes que aprofiten les propietats estudiades en el Capítol 1. El mètode que proposem es basa en suposar conegut un algorisme de broadcasting en un dígraf G per tal d'induir-lo sobre el seu dígraf línia. Es mostra en primer lloc un mètode senzill d'inducció que es va complicant en les diferents seccions, obtenint-se cada cop millors resultats. La iteració d'aquest mètode dóna resultats sobre el temps de broadcasting en les famílies de dígrafs línia iterats que milloren els resultats coneguts fins ara, inclús si es consideren els grafs subjacents a aquests dígrafs.

2.2 Broadcasting en dígrafs línia

Donat un dígraf G d -regular amb n vèrtexs, el nostre objectiu és trobar un protocol de broadcasting per al seu dígraf línia LG . Amb aquest propòsit definim el següent procés de comunicació:

Definició 2.2.1 *Donat un dígraf $G = (V, A)$, s'anomena procés d'emulació sobre G d'un protocol de broadcasting en LG al procés de comunicació sobre G en el qual un arc $(u, v) \in A(G)$ i un vèrtex $v \in V(G)$ cap el qual l'arc (u, v) és incident, transmeten una unitat d'informació γ a través de tots els arcs de G .*

Les regles per a aquest procés són les que s'enuncien a continuació:

1. *A cada unitat de temps un vèrtex $u \in V(G)$ pot enviar γ a través de tants arcs com el nombre d'arcs incidents en aquell pels quals ha passat prèviament la unitat d'informació.*
2. *No hi ha restriccions en quant al nombre d'arcs incidents en un mateix vèrtex pels quals passi γ simultàniament. Un vèrtex pot enviar i rebre informació en la mateixa unitat de temps.*

Un procés d'emulació sobre un dígraf G és equivalent a un algorisme de broadcasting sobre el seu dígraf línia LG . Efectivament, atès que els vèrtexs de LG corresponen als arcs de G , l'objectiu de l'emulació serà fer passar la unitat d'informació γ a través de tots els arcs de G . L'originador del procés hauria de ser un arc de G , encara que per a fer-ho més intel·ligible suposem que és un arc i el vèrtex cap al qual aquell arc incideix. L'equivalència de les

regles en un i altre cas es poden veure reflectides a la proposició que enunciem a continuació:

Proposició 2.2.2 *Les regles per a un procés d'emulació sobre G d'un protocol de broadcasting en LG són equivalents a les d'un algorisme de broadcasting sobre el digraf LG .*

Demostració: El fet que la unitat d'informació γ hagi passat a través dels arcs $(u_1, v), (u_2, v), \dots, (u_k, v)$ de G és equivalent a dir que els vèrtexs u_1v, u_2v, \dots, u_kv en LG han rebut γ . D'altra banda, si el vèrtex v envia la informació a través dels arcs $(v, w_1), \dots, (v, w_k)$ simultàniament, serà equivalent a que els vèrtexs u_1v, u_2v, \dots, u_kv en LG envien γ als vèrtexs vw_1, \dots, vw_k en una mateixa unitat de temps. Finalment, un vèrtex v que rep γ a través dels arcs $(u_{k+1}, v), \dots, (u_{k+p}, v)$ alhora, és una emulació del fet que els vèrtexs $u_{k+1}v, \dots, u_{k+p}v$ de LG reben la informació d'altres vèrtexs de la forma $w_ju_i, i = (k+1) \dots (k+p)$. ■

Adonem-nos que aquest procés d'emulació no determina unívocament l'algorisme de broadcasting en LG , ja que no s'ha especificat quin vèrtex d'entre u_1v, u_2v, \dots, u_kv envia γ al vèrtex vw_i .

2.2.1 Inducció d'un algorisme en LG

Sigui G un digraf d -regular sobre el qual es coneix un algorisme de broadcasting des d'un vèrtex v que funciona en temps t . L'objectiu d'aquest apartat és construir un protocol en LG des del vèrtex uv , o de forma equivalent un procés d'emulació sobre G . Amb aquest propòsit escollim una arc-coloració per als arcs de G .

Durant les t primeres unitats de temps en el procés d'emulació seguirem exactament l'algorisme de broadcasting en G des del vèrtex v . Com a resultat obtenim que tots els vèrtexs han estat informats mitjançant un arc. A partir d'aquest moment es tracta que la informació travessi tots els arcs incidents des de tots els vèrtexs. Per tal de fer-ho seguirem el següent procediment:

A l'instant $t+1$ tots els vèrtexs envien γ a través del arc sortint de color 1. Donat el resultat del Lema 1.4.3, a la fi d'aquesta unitat de temps, tots els vèrtexs hauran rebut la informació a través de l'arc amb color 1. Durant

la unitat de temps $t + 2$ els vèrtexs envien la informació a través de l'arc de color 2. Per tant, ara els vèrtexs coneixen γ a través dels arcs de colors 1 i 2, de manera que en la següent unitat de temps podran enviar-la a través de dos arcs diferents (3 i 4).

És fàcil comprovar que seguint aquest procediment, a cada unitat de temps, es pot doblar el nombre d'arcs pels quals cada vèrtex envia γ . Per tant, després de k unitats de temps el nombre total d'arcs informats des de cada vèrtex serà $1 + 1 + 2 + \dots + 2^{k-2} = 2^{k-1}$. Atès que G és d -regular, el procés d'emulació s'acabarà quan $2^{k-1} \geq d$, és a dir, en temps $t + \lceil \log_2 d \rceil + 1$.

De manera formal podem enunciar el resultat següent:

Teorema 2.2.3 *Donat un dígraf G , d -regular, tal que es pot completar un algorisme de broadcasting en temps t , llavors existeix un protocol de broadcasting en el seu dígraf línia LG que es completa en $t + \lceil \log_2 d \rceil + 1$ unitats de temps.*

2.2.2 Millora de l'algorisme en LG

En el protocol descrit a l'apartat anterior no hem fet ús dels següents fets: A l'instant t la informació γ ha arribat a cada vèrtex a través d'un arc d'un color determinat, i d'altra banda estem suposant que tots els vèrtexs han estat assabentats a temps t , sense tenir en compte que alguns ho han estat abans. Per exemple, suposem que el vèrtex u ha estat informat per mitjà d'un arc de color diferent de 1. Si fos així, a l'instant $t + 2$ podria enviar γ a través de dos arcs en comptes d'un. De la mateixa forma, si un vèrtex ha estat informat en el protocol en G a l'instant $t - h$, ha tingut temps d'enviar la informació a través de h arcs abans no comenci la segona part del protocol.

En aquesta secció mostrarem com, escollint una arc-coloració adequada, podem tenir en compte aquests dos fets, reduint en molts casos el temps de l'algorisme.

Per determinar una coloració adequada dels arcs de G considerem l'arbre generador que ve donat per l'algorisme de broadcasting en G des del vèrtex v i acolorim-lo segons les següents regles: per a cada vèrtex, l'últim arc que utilitzi per a informar algun veí, tindrà assignat el color 0. El penúltim tindrà assignat el color $-1 \pmod{d}$ i així successivament, de manera que si un vèrtex ha informat k veïns, el primer arc utilitzat tindrà color $-(k - 1)$

(mod d). Ens referirem a l'arbre acolorit d'aquesta forma com *arbre acolorit de broadcasting*.

A partir d'ara endavant suposarem que G és tal que admet una arc-coloració *compatible* amb l'arbre acolorit de broadcasting, és a dir, que donat l'arbre acolorit de broadcasting, es poden acolorir la resta dels arcs del dígraf obtenint una arc-coloració. Tot i que això no és possible en general, si ho serà en els casos que ens interessin. Així, per exemple, si G és un dígraf línia sí que es podrà fer, tal com es veu a la proposició següent:

Proposició 2.2.4 *Si G és un dígraf línia llavors admet una arc-coloració compatible amb qualsevol arbre acolorit de broadcasting.*

Demostració: Sigui G un dígraf línia. Llavors, donada la partició dels seus arcs com a dígrafs bipartits semicomplets, qualsevol arc-coloració es podrà fer de manera local, ja que per fer una arc-coloració del dígraf es poden acolorir els arcs a cada B_v de forma independent.

D'altra banda, atès que l'arbre de broadcasting és un arbre generador del dígraf, a cada B_v^+ hi ha exactament un arc incident cap a cada vèrtex que pertany a l'arbre de broadcasting (excepte en el cas del vèrtex originador de l'algorisme en G , que suposarem que ha estat informat per l'arc que pretenem que sigui l'originador a l'algorisme en LG). Pel que fa als vèrtexs a B_v^- , anomenarem $\delta_T(x)$ al nombre d'arcs incidents des de x que pertanyen a l'arbre de broadcasting, és a dir, al grau de sortida de x en l'arbre generador.

Per assignar una arc-coloració a G a partir de l'arbre acolorit de broadcasting, seguirem el procediment descrit a continuació.

Etiquetem els vèrtexs en B_v^+ i en B_v^- d'acord amb el següent esquema: assignem l'etiqueta 1 a un vèrtex $x \in B_v^-$ amb $\delta_T(x) \geq 1$. Als vèrtexs en B_v^+ adjacents des de x a l'arbre acolorit de broadcasting, els hi assignem les etiquetes $1, 2, \dots, \delta_T(x)$ de forma que l'arc $(1, i)$ tingui color $-(i-1) \pmod{d}$. A continuació prenem un altre vèrtex $x' \in B_v^-$ amb $\delta_T(x') \geq 1$ i li assignem l'etiqueta $1 + \delta_T(x)$. Amb els vèrtexs en B_v^+ adjacents des d'ell procedim de manera anàloga a com ho hem fet abans, és a dir, els hi assignem etiquetes $\delta_T(x) + 1, \dots, \delta_T(x) + \delta_T(x')$ de forma que l'arc (i, j) tingui color $(i-j) \pmod{d}$. Si procedim de la mateixa forma fins haver etiquetat tots els vèrtexs de B_v^- amb grau de sortida més

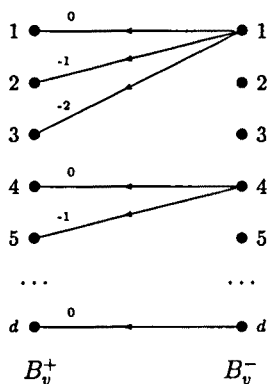


Figura 2.1: Assignació d'etiquetes als vèrtexs

gran o igual a 1 a l'arbre de broadcasting, haurem assignat etiquetes a tots els vèrtexs de B_v^+ . Un cop fet això, assignem als vèrtexs en B_v^- que no han estat etiquetats, les etiquetes restants (vegeu la Figura 2.1).

Ara que tots els vèrtexs han estat etiquetats, assignem el color $(i - j) \pmod{d}$ a l'arc (i, j) .

És immediat comprovar que mitjançant aquest procediment es construeix una arc-coloració compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting. ■

Donat un arbre acolorit de broadcasting T sobre un digraf G , ens referirem al digraf arc-acolorit de forma compatible com (G, Ψ_T) . Direm que un vèrtex és de tipus k si ha rebut la informació a través d'un arc de color $-k \pmod{d}$.

Tal com hem definit l'arc-coloració de l'arbre de broadcasting és immediat que si v és un vèrtex de tipus k , llavors ha rebut γ a l'unitat de temps $t - k$ o abans, on t és el temps que necessita l'algorisme de broadcasting per finalitzar. Per tant, el vèrtex v ha tingut temps d'enviar la peça d'informació γ a $k - 1$ dels seus veïns. Pot-ser, tal com hagi estat dissenyat l'algorisme de broadcasting, això no és així: és possible que tots els seus veïns hagin estat informats abans, i per tant el vèrtex v hagi estat sense fer res durant algunes

unitats de temps. Si aquesta situació es produeix, modificarem l'algorisme de broadcasting de manera que durant les unitats de temps en que v hauria estat "adormit", envia informació als seus veïns. Això tindrà sentit sempre i quan considerem l'algorisme de broadcasting com una emulació en LG , en la qual un vèrtex pot rebre la informació a través de més d'un arc. És fàcil veure que es verifica el resultat següent:

Lema 2.2.5 *Sigui (G, Ψ_T) un digraf amb una arc-coloració determinada per un algorisme de broadcasting. Sempre es pot modificar l'algorisme de tal forma que es verifiqui que si un vertex és de tipus k , en acabar l'algorisme, haurà enviat γ a través dels arcs de colors $0, -1, \dots, -(k-1)$.*

Ens referirem a l'algorisme amb aquestes modificacions com *algorisme de broadcasting modificat*.

L'especificació del protocol d'emulació continua de la següent forma: Durant la unitat de temps $t+1$ cada vèrtex v envia γ a través de l'arc de color 1. Si v és de tipus $d-1$, d'acord amb el Lema 2.2.5, en acabar aquesta unitat de temps, haurà enviat la informació γ a tots els seus veïns. En cas contrari, haurà rebut la informació a través d'un nou arc (ja que tots els vèrtexs han enviat γ a través del color 1) i per tant podrà enviar-la a través de dos arcs més durant la següent unitat de temps. Adonem-nos que en el protocol descrit a la secció precedent consideravem que només podia enviar la informació a través d'un arc. De manera formal podem establir el següent resultat

Lema 2.2.6 *Sigui (G, Ψ_T) un digraf d -regular amb una arc-coloració compatible amb un arbre acolorit de broadcasting T , corresponent a un algorisme de broadcasting que funciona en temps t . Llavors existeix una emulació en LG de manera que després de la unitat de temps $t+h$,*

1. un vèrtex de tipus k , $k \in \{-1, -2, \dots, -(2^h - 1)\}$, ha enviat γ a tots els seus veïns;
2. un vèrtex de tipus k , $k \notin \{-1, -2, \dots, -(2^h - 1)\}$, ha enviat γ a través dels arcs de colors j , $1 \leq j \leq 2^h - 1$, i l'ha rebuda, com a mínim, a través de 2^h arcs.

Demostració: La demostració és per inducció en h , utilitzant l'algorisme de broadcasting modificat de forma que es verifiqui el Lema 2.2.5. Els casos $h = 0, 1$ són trivials. Suposem que l'enunciat és cert per a h_0 i considerem un vèrtex v de tipus k . Fixem-nos ara a la unitat de temps següent, és a dir $t + h_0 + 1$. Si $-k \in \{1, 2, \dots, 2^{h_0} - 1\}$ el resultat és cert, perquè ja ho era en $t + h_0$, és a dir, v ha enviat γ a tots els seus veïns. En cas contrari, el vèrtex v ha rebut la informació a través de 2^{h_0} arcs abans de començar la unitat de temps $t + h_0 + 1$, tal com hem suposat. En aquest últim cas, durant $t + h_0 + 1$, si $-k \in \{2^{h_0}, \dots, 2^{h_0+1} - 1\}$ podrà enviar γ a la resta dels seus veïns, verificant-se el resultat (1). En cas que $-k \notin \{1, 2, \dots, 2^{h_0+1} - 1\}$, el vèrtex v pot enviar γ a través dels arcs $2^{h_0}, \dots, 2^{h_0+1} - 1$. Atès que en qualsevol cas tots els vèrtexs hauran enviat γ a través dels arcs de colors $1, 2, \dots, 2^{h_0+1} - 1$, en aquesta darrera situació, v haurà rebut la informació γ a través de 2^{h_0+1} arcs (recordem que l'ha rebuda també abans de t a través de l'arc $-k$). Per tant, també es verifica el resultat (2) que preteniem demostrar. ■

Considerant que $\lceil \log_2(n+1) \rceil = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$, a partir del Lema 2.2.6 i de la Proposició 2.2.2, és immediat el resultat del teorema següent:

Teorema 2.2.7 *Sigui (G, Ψ_T) un dígraf d -regular amb una arc-coloració compatible amb un arbre acolorit de broadcasting T , corresponent a un algorisme de broadcasting que funciona en temps t . Llavors existeix un algorisme de broadcasting en LG que funciona en temps $t + \lfloor \log_2 d \rfloor + 1$.*

2.2.3 Exemple

Suposem que volem construir un algorisme de broadcasting sobre $B(3, 3)$ des del vèrtex 012. Per tal de fer-ho necessitem conèixer un algorisme sobre $B(3, 2)$ des del vèrtex 12. A la Figura 2.2 es pot observar l'arbre ja acolorit definit per aquest algorisme. Fixem-nos a més que en aquest cas es compleix el Lema 2.2.5 i per tant no farà falta fer cap modificació.

A fi de determinar l'arc-coloració adequada de $B(3, 2)$ etiquetem els vèrtexs a cada un dels subdígrafs B_v tal com s'indica a la Proposició 2.2.4 i acabem d'acolorir el dígraf segons aquest etiquetatge. Adonem-nos que tot i que l'arc 012 no forma part de l'arbre de broadcasting, atès que serà

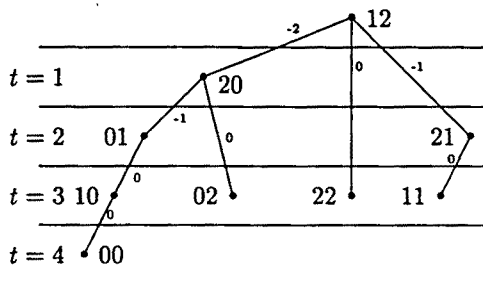


Figura 2.2: Àrbre acolorit de broadcasting sobre $B(3, 2)$.

L'originador a l'algorisme en LG podrem assignar-li un color abans d'etiquetar els vèrtexs. Les etiquetes assignades a cada vèrtex vindran determinades per la posició que aquest ocupi a la Figura 2.3.

Determinar l'arc-coloració del dígraf resulta ara immediat assignant el color $i - j$ a l'arc (i, j) a cada un dels B_v . Per tant, els colors assignats a cadascun dels arcs són els determinats en la Taula 2.2.

color	arcs									
0	001	202	100	112	010	211	220	021	122	
1	002	101	200	112	210	011	022	221	120	
2	000	102	201	111	212	010	020	222	121	

Taula 2.2: Arc-coloració de $B(3, 2)$.

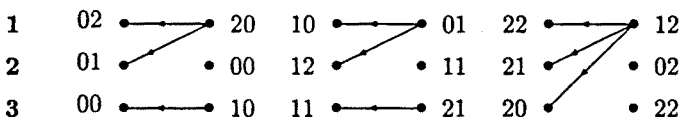


Figura 2.3: $B(3, 2)$ representat com subdígrafs $K_{3,3}$. Els arcs dibuixats són aquells que ja han estat acolorits.

Per a finalitzar l'algorisme ho farem de la següent forma: Durant l'instant 5, tots els vèrtexs envien γ a través de l'arc de color 1, i durant l'instant 6, l'envien a través dels arcs de colors 2 i 0, completant l'algorisme. Per tant, només resta traduir-ho en termes d'un algorisme de broadcasting sobre $B(3, 3)$ (Figura 2.4).

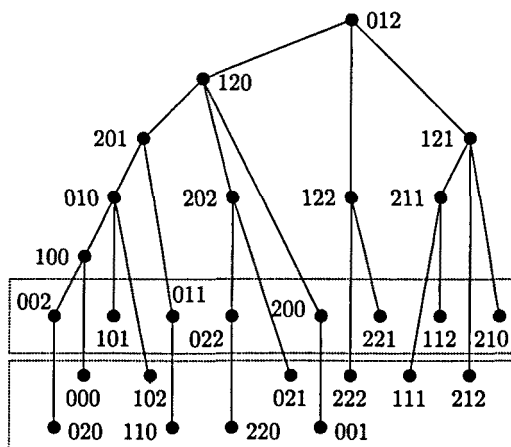


Figura 2.4: Algorisme de broadcasting sobre $B(3, 3)$

Adonem-nos que aquest algorisme de broadcasting no és únic, ja que existeix una ambigüïtat durant la unitat de temps 6: no queda especificat des de quins arcs incidents cap al mateix vèrtex v en $B(3, 2)$ —corresponents a diferents vèrtexs en $B(3, 3)$ — s'envia la informació cap als arcs incidents des de v . Per exemple, una altra possibilitat hagués estat fer que el vèrtex 002 enviés γ al vèrtex 021 i que el vèrtex 202 l'enviés a 020.

2.3 Algorisme en L^2G

En tota aquesta secció suposarem que (G, Ψ_T) és un dígraf d -regular amb $d = 2^\alpha(1 + \beta)$, $0 \leq \beta < 1$, amb una arc-coloració compatible amb qualsevol

arbre acolorit de broadcasting T corresponent a un algorisme que funciona en temps t .

Tal com hem vist a la secció anterior, donat un dígraf G amb un algorisme de broadcasting en temps t , podem obtenir un algorisme de broadcasting per al seu dígraf línia, LG , que funciona en temps $t + \lfloor \log_2 d \rfloor + 1 = t + \alpha + 1$. Aquest últim dígraf, atès que és un dígraf línia, per la Proposició 2.2.4, podem assegurar que tindrà una arc-coloració compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting corresponent a l'algorisme obtingut, i per tant podem obtenir un algorisme de broadcasting en L^2G que funciona en $t + 2\alpha + 2$ unitats de temps.

En qualsevol cas, en el protocol descrit a la secció precedent, en alguns casos, molts dels seus vèrtexs no fan res durant l'última unitat de temps, degut a que els seus veïns han estat informats anteriorment. Això succeeix amb la majoria d'algorismes de broadcasting, i en general no suposa cap pèrdua de temps, ja que no és possible terminar en una unitat de temps menys. No obstant això, si el que pretenem és aprofitar aquest protocol per induir un algorisme de broadcasting en L^2G , sí que, d'alguna forma, estem "desaprofitant" aquesta última unitat de temps del protocol en LG .

El que pretenem en aquesta secció és dissenyar un algorisme de broadcasting en L^2G directament de l'algorisme en G que funcioni en temps $t + 2\alpha + 1$. Veurem que això és possible si β no és massa gran.

Abans, però, de descriure aquest procediment, necessitarem alguns conceptes previs.

2.3.1 Emulació sobre G d'un algorisme en L^2G

De forma similar a com ho hem fet a la secció precedent, es tracta de trobar un procés de comunicació en G que sigui equivalent a un algorisme de broadcasting en L^2G . Ho farem de dues formes diferents, i utilitzarem una o l'altra segons ens convingui.

En primer lloc, considerarem que L^2G és el dígraf que té per conjunt de vèrtexs tots els possibles recorreguts de llargada 2 en G , i que dos vèrtexs en L^2G seran adjacents un cap a l'altre si representen en G camins adjacents, és a dir, $u_0u_1u_2$ serà adjacent cap als vèrtexs $u_1u_2u_3$, amb $(u_2, u_3) \in A(G)$. Per tant, l'objectiu de l'emulació serà fer que una peça d'informació γ passi a través de tots els possibles recorreguts de llargada 2 en G , o equivalentment,

que cada arc informi tots els arcs que són adjacents des d'ell. Originàriament considerarem que γ està continguda en un camí de llargada 2 que és incident cap a un vèrtex $v \in V(G)$. Les regles en aquest procés són una generalització de les regles d'emulació de LG sobre G , i per tant ometrem la demostració de l'equivalència:

Lema 2.3.1 *Les regles per a l'emulació sobre el digraf G d'un protocol de broadcasting en L^2G són les següents:*

1. *A cada unitat de temps un arc (u, v) pot enviar γ simultàniament a través de tants arcs com el nombre d'arcs a través dels quals l'hagi rebuda.*
2. *No hi ha restriccions en quant al nombre de vegades que un arc pot rebre la informació simultàniament des de diferents arcs. Un arc pot enviar i rebre informació en la mateixa unitat de temps.*

D'altra banda, donat un digraf G , d -regular, podem considerar L^2G com un producte acolorit tal i com s'ha vist a la Secció 1.4: $L^2G = (G, \Psi_T) \circ_d (B(d, 2), \Phi_B, \Theta_B)$. Per tant, donat un algorisme de broadcasting en G des d'un vèrtex $v \in V(G)$, podem induir un algorisme en L^2G des de qualsevol vèrtex (v, x_1x_2) de forma que a temps t hi hagi exactament un vèrtex de la forma $(u_i, x_1^i x_2^i)$ que conegui la informació γ per a cada $u_i \in G$.

Una primera aproximació al problema, tal com ho hem fet en el cas de LG , seria la següent: Durant la unitat de temps $t + 1$, tots els vèrtexs envien γ a través de l'arc de color 0, i d'aquesta manera, utilitzant el Lema 1.4.3, podem assegurar que queden informats els vèrtexs $(v_i, x_2^i 0)$, $\forall v_i \in V(G)$. Durant la següent unitat de temps els nous vèrtexs informats $(v_i, x_2^i 0)$, tornen a enviar la informació a través de l'arc de color 0. Per tant, després de $t + 2$ unitats de temps, coneixeran γ tots els vèrtexs de la forma $(v, 00)$. Només restarà, per finalitzar el protocol, aplicar a tots aquests vèrtexs l'equivalent a un algorisme de broadcasting en $B(d, 2)$ des del vèrtex 00 .

Aquesta aproximació no ens porta, però, cap millora sobre la iteració de l'algorisme en LG . Haurem, per tant, de tenir en compte els mateixos aspectes que havíem considerat per millorar el protocol en LG .

Per tal de treure'n profit d'aquelles consideracions, seguirem el protocol en LG —amb petites modificacions— fins que gariébé hagi finalitzat, és a

dir fins a $t + \alpha$. Serà a partir de llavors quan començarem a dissenyar el nou protocol. En el protocol per LG tindrem en compte, però, des de quin arc ha estat informat cada un dels arcs, la qual cosa no havíem especificat fins ara. En alguns casos no serà possible fer aquesta precisió (quan l'arc que envia γ és l'informat durant l'algorisme en G). En aquest cas direm que un arc de color $c \in \mathbb{Z}_d$ ha estat informat per un arc indeterminat, i ho denotarem mitjançant el parell (\cdot, c) . En el següent lema podem observar quina és la situació de l'algorisme a temps $t + \alpha$:

Lema 2.3.2 *Donat un digraf G en les condicions assumides en aquesta secció, existeix un protocol en L^2G tal que a temps $t + \alpha$ la informació γ ha arribat a tots els vèrtexs en L^2G corresponents als parells d'arcs en G amb colors $(i, i + 2^j)$, on $1 \leq i \leq 2^{\alpha-1} - 1$, $\lfloor \log_2 i \rfloor < j \leq \alpha - 1$. També han estat informats els vèrtexs en L^2G corresponents als parells indeterminats $(\cdot, 2^j)$.*

Demostració: La demostració es basa en el Lema 2.2.6 sobre la demostració del qual farem algunes modificacions. Per aquest lema sabem que a l'instant $t + h$, si un vèrtex $v \in V(G)$ és de tipus k , $k \notin \{-1, -2, \dots, -(2^h - 1)\}$ ha rebut γ a través de 2^h arcs, que seran $1, 2, \dots, (2^h - 1)$ i $-k$. Forçarem en aquest cas que, durant $t + h + 1$, l'arc $-k$ informi l'arc 2^h i que l'arc i informi l'arc $i + 2^h$. En cas que $k \in \{-1, -2, \dots, -(2^h - 1)\}$ sabem que ha estat informat com a mínim a través dels arcs $1, 2, \dots, (2^h - 1)$. Forçarem que, encara que hagin estat informats tots els veïns de v , l'arc i incident cap a v informi l'arc $i + 2^h$ incident des del mateix vèrtex. És fàcil comprovar que l'arc sortint 2^h , que ja havia estat informat, ho havia estat a través de l'arc $-k$. ■

Per finalitzar aquest apartat, donarem algunes definicions per tal de simplificar la notació durant la resta de la secció:

Definició 2.3.3 *Anomenarem protocol feble al protocol en L^2G descrit al Lema 2.3.2.*

Un protocol feble es podrà completar sempre en temps $t + \alpha$ i correspondrà en L^2G a un algorisme de broadcasting inacabat. De manera similar podem definir el següent:

Definició 2.3.4 *Anomenarem protocol fort a un protocol feble quan la indeterminació · és l'arc de color 0.*

Fixem-nos que un protocol fort és equivalent a un protocol feble en el cas que l'algorisme en G és tal que tots els vèrtexs han estat informats mitjançant un arc de color 0. També ens podem adonar de l'equivalència que s'enuncia a continuació:

Observació 2.3.5 *Un protocol fort correspon a un algorisme de broadcasting sobre $K_{2\alpha}$ des del vèrtex 0.*

Estem interessats en completar l'algorisme de broadcasting en L^2G en el mínim temps possible. Utilitzarem la pròxima definició en aquest sentit:

Definició 2.3.6 *Sigui D_α el conjunt de valors d per als quals qualsevol protocol feble sobre un digraf d -regular pot ésser completat en un protocol de broadcasting per L^2G en $\alpha + 1$ unitats de temps més.*

Atès que pel Lema 2.3.2 sempre es pot obtenir un protocol feble en temps $t + \alpha$, adonem-nos que $d \in D_\alpha$ implica l'existència d'un protocol sobre L^2G que funciona en temps $t + 2\alpha + 1$.

Anàlogament, en el cas de tenir un protocol fort:

Definició 2.3.7 *Sigui E_α el conjunt de valors d per als quals qualsevol protocol fort sobre un digraf d -regular pot ésser completat de la mateixa forma que en la definició precedent.*

És immediat que si $d \in D_\alpha$, tindrem com un cas particular que $d \in E_\alpha$, i per tant podem afirmar que $D_\alpha \subseteq E_\alpha$. D'atra banda podem fer també la següent observació:

Observació 2.3.8 *Cal remarcar que el fet que $d \in E_\alpha$ no implica l'existència d'un protocol sobre L^2G que funcioni en temps $t + 2\alpha + 1$. Seria cert en el cas que l'algorisme de broadcasting sobre G fos tal que el seu arbre acolorit només utilitzés el color 0. És a dir tots els vèrtexs fossin de tipus 0.*

Per tant, si considerem un dígraf G format per un sol vèrtex amb d llaços, i considerem en ell un algorisme de broadcasting, obtindrem un algorisme buit, i en conseqüència qualsevol arc-coloració serà compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting. D'altra banda, si el que busquem és un algorisme de broadcasting sobre dues iteracions del dígraf línia des d'un camí format pels colors 00, estem en les condicions de l'Observació 2.3.8, i per tant podem concloure el següent:

Observació 2.3.9 *Si $d \in E_\alpha$ llavors existeix un algorisme de broadcasting en $B(d, 2)$ des del vèrtex 00 en temps $2\alpha + 1$, on $\alpha = \lfloor \log_2 d \rfloor$.*

2.3.2 Disseny a partir de valors petits del grau

En aquesta subsecció veurem com, mitjançant la inducció sobre el grau del dígraf, es pot demostrar de forma constructiva l'existència d'algorismes de broadcasting en L^2G en temps $t + 2\alpha + 1$ per a valors de β des de 0 fins a un valor β_{\max} que s'aproxima força a la fita superior que es trobarà a la Subsecció 2.3.5.

Començarem per tant amb el resultat següent:

Proposició 2.3.10

1. Si $d \in D_\alpha$ llavors $2d \in D_{\alpha+1}$.
2. Si $d \in E_\alpha$ llavors $2d \in E_{\alpha+1}$.
3. Si $d \in D_\alpha$ i $d + 1 \in E_\alpha$ llavors $2d + 1 \in D_{\alpha+1}$.

Demostració:

1) Sigui $d \in D_\alpha$ amb $\alpha = \lfloor \log_2 d \rfloor$, i per tant $\alpha + 1 = \lfloor \log_2 2d \rfloor$. Recordem que existeix un protocol feble per a un dígraf G amb grau $2d$ tal com s'ha explicat a la subsecció precedent, que funciona en temps $t + \alpha + 1$.

Considerem ara els subdígrafs G_e i G_o induïts per els arcs de G amb colors parells i imparells respectivament. Partint del fet que a temps t tots els vèrtexs han estat informats, si observem el protocol feble induït

en G_e resulta ser exactament un protocol feble per a G_e (considerant el color $2i$ com i'), mentre que el protocol induït en G_o és un protocol fort per a G_o .

Efectivament, la informació ha arribat als arcs de la forma $2i$, amb $2 \leq 2i \leq 2^{\alpha+1} - 1$, és a dir, $1 \leq i \leq 2^\alpha - 1$. A més, l'arc $2i$ ha informat els arcs de la forma $2i + 2^j$ amb $\lfloor \log_2(2i) \rfloor + 1 \leq j \leq \alpha - 1$. De la mateixa manera amb G_o , identificant $2i + 1$ amb i'' .

Fixem-nos, a més, que tant G_e com G_o són digrafs d -regulars, i que en tots dos casos els protocols funcionen en temps $t + \alpha + 1$, ja que durant $t + 1$ en cadascun dels subdigrafs tots els vèrtexs estan inactius. En tots dos casos el protocol es pot completar en $\alpha + 1$ unitats de temps més, ja que per hipòtesi $d \in D_\alpha$.

Per tant, a temps $t + 2\alpha + 2$ tots els parells d'arcs de la forma $(2i, 2j)$ i $(2i + 1, 2j + 1)$ han rebut la informació. L'única tasca que queda per fer és que $(2i, 2j)$ informi $(2j, 2i + 1)$ i que $(2i + 1, 2j + 1)$ ho faci amb $(2j + 1, 2i)$, i això es pot fer en una sola unitat de temps, completant-se per tant l'algorisme en temps $t + 2(\alpha + 1) + 1$.

2) La demostració és anàloga a la del punt anterior i per això la ometem.

3) Abans de res, observem que $\alpha + 1 = \lfloor \log_2 2d \rfloor = \lfloor \log_2(2d + 1) \rfloor$. Considerem també en aquest cas els subdigrafs G_e i G_o però considerant el color $2d$ com si fós imparell, és a dir substituïm $2d$ per $2d + 1$ i per tant pertanyent a G_o . De la mateixa forma que en els casos precedents, els protocols induïts en G_e i en G_o són un protocol feble i l'altre fort per a G_e i G_o respectivament que funcionen en temps $t + \alpha + 1$. Per hipòtesi, tots dos podrien completar-se en $\alpha + 1$ unitats de temps més, quedant informats tots el parells d'arcs de la forma $(2i, 2j)$, $0 \leq i, j \leq d - 1$, i $(2i + 1, 2j + 1)$, $0 \leq i, j \leq d$. No obstant, canviarem el protocol en G_o una unitat de temps abans de completar-se, és a dir durant la unitat de temps $t + 2\alpha + 2$. Farem que per a cada j , $0 \leq j \leq d - 1$, un dels parells $(2i + 1, 2j + 1)$ que haurien de ser informats durant aquest últim instant vingui substituït per $(2i + 1, 2j)$, és a dir, l'arc amb color $2i + 1$ informi $2j$ en comptes de $2j + 1$.

Adonem-nos que després de la unitat de temps $t + 2\alpha + 2$, tots els arcs de G_e ha estat informats per altres $d + 1$ arcs: l'arc $2j$ ha esta informat per $2i$, $0 \leq i \leq d - 1$, i a més a través d'un arc amb color $2k + 1$ per a

algun k . Per tant, durant la unitat de temps $t + 2\alpha + 3$ poden quedar informats els parells $(2j, 2i + 1)$ per a tot $i \leq d$, i per a tot $j \leq d$.

També, després de $t + 2\alpha + 2$ tots els arcs de G_o han estat informats un mínim de d vegades: per cada $j \leq d$, han estat informats tots els parells $(2i + 1, 2j + 1)$ excepte un. Per tant, durant $t + 2\alpha + 3$, per a tot $j \leq d$ poden ser informats els $d - 1$ parells de la forma $(2j + 1, 2i)$ que no havien estat informats encara (recordem que un d'ells ha estat informat durant $t + 2\alpha + 1$) i el parell $(2j + 1, 2i + 1)$ que no havia rebut la informació.

Tot plegat, fa que el protocol pugui finalitzar en $t + 2(\alpha + 1) + 1$ unitats de temps.

Queda per considerar el cas en que l'algorisme per a G_o sigui tal que durant l'última unitat de temps no existeixi cap arc que informi un arc j determinat. Si això és així, voldrà dir que aquest arc j ja ha estat informat per la resta d'arcs, i per tant durant l'última unitat de temps pot enviar la informació a $d + 1$ arcs diferents. En conseqüència, la forma de finalitzar l'algorisme en aquest cas és la següent:

En comptes d'enviar γ a qui correspongués, durant la unitat de temps $t + 2\alpha + 2$ l'arc j enviarà la informació als d arcs en G_e , i durant $t + 2\alpha + 3$ l'envia a qui corresponia en la unitat de temps anterior. Per tant, arribats a aquest punt, l'arc j ha enviat la informació a la resta d'arcs en G . La resta d'arcs completen els protocols en G_e i en G_o durant $t + 2\alpha + 2$.

Amb això la situació abans de començar l'unitat de temps $t + 2\alpha + 3$ és que tots els arcs en G_e han estat informats per tots els arcs en G_e i a més per l'arc $j \in A(G_o)$. Per tant poden, durant $t + 2\alpha + 3$ informar els $d + 1$ arcs en G_o .

Al seu torn, els arcs en G_o poden enviar, durant l'última unitat de temps, la informació als d arcs en G_e .

Tot plegat fa que, també en aquest cas, el protocol pugui finalitzar en temps $t + 2(\alpha + 1) + 1$. ■

Un cop verificada una regla d'inducció només mancarà trobar que per a valors petits del grau es compleix el resultat que volem trobar. Això es pot veure en el lema que s'exposa a continuació:

Lema 2.3.11 *Es verifica que $4 \in D_2$ i $5 \in E_2$.*

Demostració: A la Taula 2.3 es mostra el procediment per a completar un protocol feble per a $d = 4$ i un de fort per a $d = 5$ en $\alpha + 1 = 3$ unitats de temps. En cada cas les columnes representen unitats de temps, i la fila i representa la tasca que duu a terme l'arc de color i incident cap al vèrtex genèric $v \in V(G)$. Per exemple, per a $d = 4$, durant la unitat de temps $t + 3$ els arcs amb colors 1, 2 i 3 incidents cap a cada v envien la informació a través de l'arc amb color 0. Atès que això es verificarà per a cada vèrtex del digraf, l'arc amb color 0 incident cap a qualsevol vèrtex haurà rebut la informació tres cops i en conseqüència podrà enviar-la a través de tres arcs durant $t+4$. Completar l'algorisme sobre L^2G representarà per tant, en la taula, que tots els arcs incidents cap a v envien γ a tots els arcs incidents des de v .

	$\leq t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$
0			1,2,3	0
1	3	0	1	2
2		0	2	1,3
3		0	3	1,2

$4 \in D_2$

	$\leq t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$
0	1,2	4	3	0
1	3	4	2	0,1
2		2	1,4	0,3
3		3	1,4	0,2
4			2,3	0,1,4

$5 \in E_2$

Taula 2.3: Demostració del Lema 2.3.11.

Recordem que pel Lema 2.3.2, a temps $t + 2$ els arcs amb colors 1, 2 i 3 han estat informats, i a més, l'arc amb color 1 ha informat l'arc amb color 3. ■

El resultat obtingut es pot millorar si trobem de forma heurística altres valors de d per als quals es compleixi que $d \in D_\alpha$ i $d + 1 \in E_\alpha$. Això es pot veure en el següent lema, la demostració del qual apareix en forma de taules a l'Apèndix A. (vegeu les Taules A.2, A.3, A.4 i A.5).

Lema 2.3.12 *Es verifica $10 \in D_3$, $11 \in E_3$, $44 \in D_5$ i $45 \in E_5$.*

Els resultats obtinguts en el Lema 2.3.12 i en la Proposició 2.3.10 permeten provar fàcilment el teorema que s'enuncia a continuació.

Teorema 2.3.13 *Sigui un digraf G d -regular, on $d = 2^\alpha(1 + \beta)$, $\alpha > 4$, amb una arc-coloració compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting corresponent a un algorisme que funciona en temps t . Llavors, si $\beta < 13/32$, existeix un algorisme de broadcasting en L^2G que funciona en temps $t + 2\alpha + 1$.*

2.3.3 Alguns casos particulars

Per a alguns valors del grau, no és possible millorar l'algorisme en LG amb l'anàlisi precedent, però sí que ho és fent una anàlisi una mica més detallada. En particular en el cas $d = 2$ tenim el resultat següent:

Teorema 2.3.14 *Donat un digraf G , 2-regular, amb una arc-coloració compatible amb un arbre acolorit de broadcasting, corresponent a un algorisme que funciona en temps t , es pot obtenir un algorisme de broadcasting en L^2G que funciona en temps $t + 3$.*

Demostració: Considerem la Taula 2.4, on s'esquematitzen les tasques a seguir per cadascun dels arcs, en funció del seu color i del tipus de vèrtex cap al qual incideixen.

vèrtex	arc entrant	$\leq t$	$t+1$	$t+2$	$t+3$
tipus 0	0		1	0	
	1			0	1
tipus 1	0				0,1
	1	0	1		

Taula 2.4: Demostració del Teorema 2.3.14

Sembla que hi ha un error en la unitat de temps $t + 3$ en la qual l'arc de color 0 incident cap a un vèrtex de tipus 1, envia γ a través de dos arcs, quan en alguns casos la pot haver rebut només un cop. Però una anàlisi més acurada ens mostra que si aquest arc ha rebut la informació un cop, llavors es tracta d'un arc incident des d'un vèrtex de tipus 1, i per tant l'ha rebuda en temps $\leq t$. Si és així, ha tingut temps d'enviar γ a través de dos arcs abans no s'acabi el protocol. En altre cas, ha rebut efectivament la informació a través de dos arcs, i per tant pot

enviar-la dos cops durant la unitat $t + 3$. En conseqüència, és possible terminar el protocol en temps $t + 2\alpha + 1 = t + 3$. ■

També en el cas $d = 5$ es pot fer una anàlisi similar, obtenint un resultat anàleg.

Proposició 2.3.15 *Sigui G un dígraf 5-regular amb una arc-coloració compatible amb un arbre acolorit de broadcasting, corresponent a un algorisme que funciona en temps t . Es pot obtenir un algorisme de broadcasting en L^2G que funciona en temps $t + 2\alpha + 1$.*

Demostració: El procediment per construir el protocol es pot trobar a la Taula A.6 que apareix a l'Apèndix A. La demostració és completament anàloga a la del resultat anterior i per tant ometem els comentaris. Les situacions en que es fa el mateix raonament que en el Teorema 2.3.14 estan marcades amb un asterisc.

Observem que, en aquest cas, $2\alpha + 1 = 5$. ■

2.3.4 Un altre exemple

Per tal d'aclarir les idees anteriors, arribats a aquest punt proposem el següent exemple: suposem que volem construir un algorisme de broadcasting en $B(9, 2)$ on el vèrtex originador és el 31.

Atès que $B(9, 2) = L^2K_1^9$, partirem d'un algorisme de broadcasting sobre un dígraf amb un sol vèrtex i 9 llaços. Evidentment, es tractarà d'un algorisme buit, puix que si el vèrtex originador coneix la informació, la coneixen tots els vèrtexs del dígraf.

D'aquesta forma, atès que l'arbre de broadcasting és trivial, és a dir, no conté cap arc, qualsevol arc-coloració de $B(9, 2)$ serà compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting. Assignarem per tant els colors $0, \dots, 8$ als llaços del dígraf.

D'altra banda, donats els resultats del Lema 2.3.11 i de la Proposició 2.3.10, es té que $9 \in D_3$ i en conseqüència, que es pot construir un algorisme de broadcasting que funciona en temps $t + 2\alpha + 1$, és a dir, en el nostre cas, en temps $T = 7$ (observem de pas que $\lceil \log_2 n \rceil = 7$, i per tant el dígraf que considerem es tracta d'un dígraf de broadcast).

		$t+1$	$t+2$	$t+3$
0	0_e			
1	0_o		3 (1_o)	5 (2_o)
2	1_e			6 (3_e)
3	1_o			7 (3_o)
4	2_e			
5	2_o			
6	3_e			
7	3_o			
8	4_o			

Taula 2.5: Protocol feble per a $d = 9$

Construïrem un esquema per induir un algorisme en L^2G per a un digraf general amb $d = 9$, tal com s'indica a la demostració de la Proposició 2.3.10 (apartat 3) a partir dels esquemes mostrats en la demostració del Lema 2.3.11.

Tal com es veu en el Lema 2.3.2 existeix un protocol feble per a $d = 9$ que funciona en 3 unitats de temps, que podem traduir en la Taula 2.5. En aquesta mateixa taula, hem expressat cadascun dels arcs considerant-los en G_e i G_o .

		$\leq t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$
0	0_e			2,4,6	0
1	0_o	3,5	8	7	1
2	1_e	6	0	2	4
3	1_o	7	8	5	1,3
4	2_e		0	4	2,6
5	2_o		5	3,8	1,7
6	3_e		0	6	2,4
7	3_o		7	3,8	1,5
8	4_o			5,7	1,3,8

Taula 2.6: Superposició dels esquemes per a $d = 4$ i $d = 5$

Donades les taules en la demostració del Lema 2.3.11, podem completar la nostra taula, segons la demostració de la Proposició 2.3.10, fins a temps

		$\leq t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$	$t+7$
0	0_e			2,4,6	0	1,3,5,7,8
1	0_o	3,5	8	7	0*	2,4,6,1
2	1_e	6	0	2	4	1,3,5,7,8
3	1_o	7	8	5	1,2*	0,4,6,3
4	2_e		0	4	2,6	1,3,5,7,8
5	2_o		5	3,8	1,6*	0,2,4,7
6	3_e		0	6	2,4	1,3,5,7,8
7	3_o		7	3,8	1,4*	0,2,6,5
8	4_o			5,7	1,3,8	0,2,4,6

Taula 2.7: Esquema per a fer broadcasting en L^2G per a $d = 9$

$t + 6$, quedant tal com es veu a la Taula 2.6.

Ara bé, seguint amb la mateixa demostració, durant $t + 6$ els arcs de G_o haurien d'enviar γ a algun arc en G_e , per tal de poder terminar el protocol a temps $t + 7$. Aquest fet s'indica amb un asterisc a la Taula 2.7 on es mostra l'esquema, ja complet, per induir un algorisme en L^2G per a $d = 9$.

Només resta ara, traduir l'esquema de la Taula 2.7 al nostre cas concret, es a dir, un algorisme en el dígraf $B(9, 2)$ éssent l'originador el vèrtex 31, a partir d'un protocol buit en K_1^9 .

Per tant, comencem l'algorisme de la mateixa forma que ho fariem en LG fins arribar a obtenir el protocol feble de la Taula 2.5: 31 envia la informació a través de l'arc de color 1, quedant informat el vèrtex 11, i així successivament fins a temps 3.

A partir de l'unitat de temps 4, seguirem, de la mateixa forma, l'esquema de la Taula 2.7 obtenint el protocol que s'indica a la Figura 2.5.

Atès que l'esquema serveix per a qualsevol vèrtex originador, és inevitable que es repeteixin en el nostre algorisme alguns vèrtexs (com a mínim ha de tornar a apareixer el mateix vèrtex 31). Els vèrtexs que resulten repetits, apareixen de color negre a la figura. Fem notar que, tal com s'han dissenyat els algorismes, no es possible que en una mateixa unitat de temps un vèrtex hagi d'informar més d'un veí. Això es degut a que, a cada un dels esquemes, si consideravem que un arc havia estat informat per un arc indeterminat i després tornava a rebre la informació a través d'un arc concret, no conside-

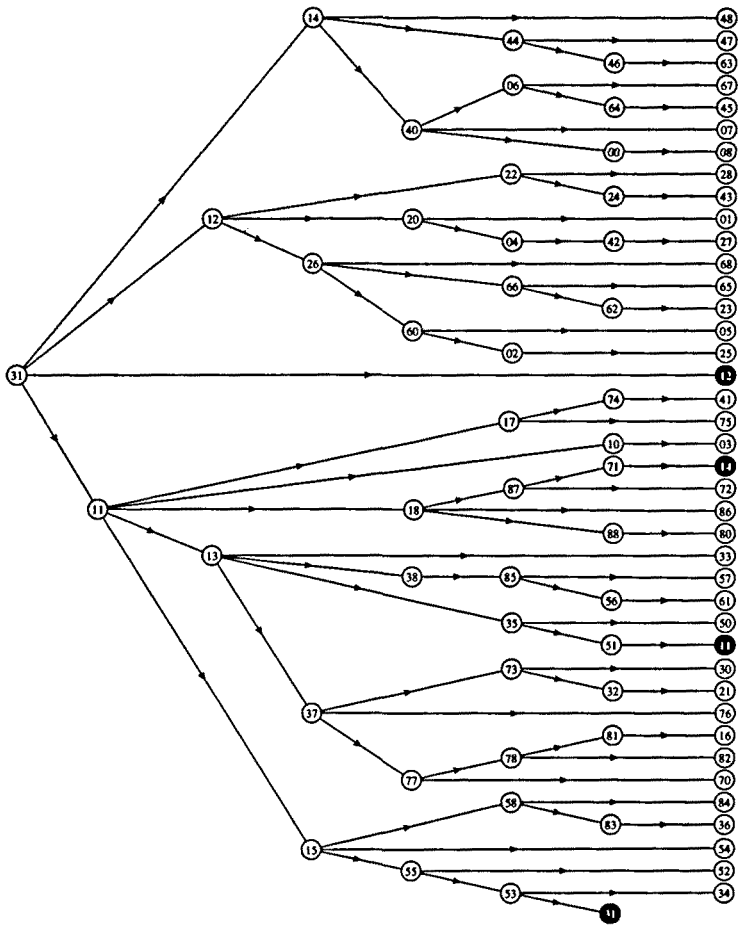


Figura 2.5: Algorithme de broadcasting en $B(9, 2)$.

ravem que havia estat informat a través de dos arcs, sino a través d'un de sol. Aquest fet resultarà més patent en seccions posteriors, quan descrivim protocols per a L^3G .

2.3.5 Aplicabilitat del mètode

En aquesta secció hem estat considerant que teniem un protocol de broadcasting en G que funcionava en temps t , de forma que en L^2G a temps t només hi ha $n = |V(G)|$ vèrtexs informats. Ara bé, atès que $|V(L^2G)| = nd^2$, si considerem que sota el nostre model el nombre de vèrtexs informats a cada unitat de temps no pot ser superior al nombre de vèrtexs informats fins llavors, a temps $t + 2\alpha + 1$ hi haurà com a molt $n2^{2\alpha+1}$ vèrtexs informats. Considerant, per tant, $d = 2^\alpha(1 + \beta)$, obtenim fàcilment el següent resultat comparant les dues quantitats.

Proposició 2.3.16 *Una fita superior del valor màxim de β per al qual es pot induir un algorisme de broadcasting en L^2G en temps $t+2\alpha+1$ és $\beta \leq \sqrt{2}-1$.*

Observació 2.3.17 *Destaquem que els valors de β per als quals hem obtingut un temps de broadcasting $t + 2\alpha + 1$ ($13/32 = 0.406\dots$), estan bastant a prop d'aquesta fita ($\sqrt{2} - 1 = 0.4142\dots$).¹*

La fita obtinguda a la proposició precedent no es pot assolir mai. En particular si considerem $L^{2s}G$, podem obtenir un algorisme de broadcasting en temps $t + s(2\alpha + 1)$. En el cas de $\beta = \sqrt{2} - 1$, l'expressió anterior es transforma en $t + \log_2(d^{2s})$, la qual cosa suposaria que s'està doblant el nombre de vèrtexs informats a cada unitat de temps. Per a qualsevol valor de s això no és possible, ja que el grau d és finit.

2.4 Protocol en L^kG

Igual que a la secció anterior, també suposarem ara un digraf G , d -regular, $d = 2^\alpha(1 + \beta)$, amb una arc-coloració (C, Ψ_T) compatible amb un arbre

¹A [1] es millora aquest resultat, tot utilitzant el mateix mètode, obtenint-se per a qualsevol valor de β inferior a $53/128 = 0.41406\dots$

acolorit de broadcasting corresponent a un algorisme que funciona en temps t .

Per tal de millorar els resultats de la secció precedent, hom pot tractar d'induir un algorisme de broadcasting en $L^k G$ directament a partir del protocol de broadcasting en G que funcioni en temps $t + k\alpha + h$, $h < k$.

Amb aquesta finalitat podem definir, similarment a com ho hem fet en LG i en $L^2 G$, un procés d'emulació de $L^k G$ sobre G amb regles anàloges a les dels casos precedents. Atès que conceptualment, aquesta generalització aporta ben poc a la definició del problema, en aquesta secció esboçarem els conceptes passant una mica per alt els detalls.

Si considerem $L^k G$ com un producte acolorit de digrafs, podem observar que el nostre problema és equivalent al de trobar un algorisme de broadcasting en $B(d, k)$ en el qual l'arbre de broadcasting, acolorit segons la B -coloració pròpia del digraf de De Bruijn, té la mateixa coloració independentment de quin sigui el vèrtex originador.

Una primera aproximació a l'algorisme és la següent: Sigui $x_1 \cdots x_k$ el vèrtex originador. Des d'aquest vèrtex s'informa, mitjançant un recorregut de llargada k , el vèrtex $0 \cdots 0$ i des d'aquest últim vèrtex es comença un algorisme de broadcasting en el que s'informen tots els vèrtexs.

Observem, però, que aquest mètode no porta cap millora sobre la iteració del primer model sobre LG , i en conseqüència hem de buscar millores sobre aquesta idea.

El primer que ens preguntem és si això és possible, i podem trobar una resposta en els resultats que proposem a continuació.

2.4.1 Fites per al nombre d'iteracions

Proposició 2.4.1 *Donat el digraf G es pot induir un algorisme de broadcasting en $L^k G$ que funciona en temps $t + k\alpha + h$, $h < k$ només si $\beta \leq 2^{\frac{k}{d}}$.*

Ometem la demostració per ser una extensió de la Proposició 2.3.16 amb una demostració completament anàloga.

Com també succeïa en el cas de $L^2 G$ aquesta fita mai no serà assolible, ja que el grau d és finit. Podem, per tant, buscar una fita més precisa, que tingui en compte aquest fet. Amb aquest fi farem ús del següent resultat:

Lema 2.4.2 ([6]) *Sigui z_d l'arrel real més gran del polinomi $p(z) = z^{d+1} - 2z^d + 1$. Llavors donat un dígraf G d -regular, amb $n = |V(G)|$ suficientment gran, cap algorisme de broadcasting no pot funcionar en temps inferior a $\log_2 n / \log_2 z_d + O(1)$.*

Per tant, considerant el comportament assimpòtic, obtenim el resultat que segueix:

Proposició 2.4.3 *Sigui z_d l'arrel real més gran del polinomi $p(z) = z^{d+1} - 2z^d + 1$. Donat un algorisme de broadcasting sobre un dígraf G , d -regular, que funciona en temps t , només es podrà induir un algorisme en $L^k G$ en temps $t + k\alpha + h$ si*

$$\frac{h}{k} \geq \frac{\log_2 d}{\log_2 z_d} - \alpha$$

Demostració: Sigui $n_0 = |V(G)|$. Si es pot induir un algorisme en $L^k G$ que funciona en temps $t + k\alpha + h$, iterant la inducció podem obtenir un algorisme de broadcasting sobre $L^{sk} G$ que funciona en temps $t + sk(\alpha + h/k)$ per qualsevol $s \in \mathbb{N}$. Per tant, tenint en compte que $|V(L^{sk} G)| = n_0 d^{sk}$, per a $s \rightarrow \infty$, donat el Lema 2.4.2, s'haurà de complir $\alpha + h/k \geq \log_2 d / \log_2 z_d$. ■

A la Taula 2.8 es mostren les dues fraccions $\frac{h}{k}$ que més a prop estan de la fita inferior de la Proposició 2.4.3 per a valors petits del grau, considerant $k \leq 6$. És a dir, el millor que es pot fer en $L^k G$ no considerant més de 6 iteracions.

De totes maneres, atès que $\lim_{d \rightarrow \infty} z_d = 2$, el valor de la fita trobada tendirà a $\log_2 d$ quan d es faci gran, i per tant només valdrà la pena considerar aquesta fita per a valors petits dels grau². Observem, per tant, que les dues fites trobades resulten ser equivalents per a valors grans del grau.

A la Figura 2.6 es pot comparar el valor de les dues fites i els valors obtinguts dels temps de broadcasting amb els protocols per a LG i $L^2 G$ (els valors trobats s'han d'entendre com a constants multiplicatives del diàmetre del dígraf) en funció del grau.

²Per exemple, la diferència entre una i altra per a $d = 13$ és de $3 \cdot 10^{-4}$.

d	$\frac{\log_2 d}{\log_2 z_d} - \alpha$	$\frac{h_1}{k_1}$	$\frac{h_2}{k_2}$
2	0.4404	1/2	3/5
3	0.8028	5/6	1
4	0.1124	1/6	1/5
5	0.3809	2/5	1/2
6	0.6161	2/3	4/5
7	0.8238	5/6	1
8	0.0086	1/6	1/5
9	0.1744	1/5	1/4
10	0.3243	1/3	2/5
11	0.4607	1/2	3/5
12	0.5856	3/5	2/3

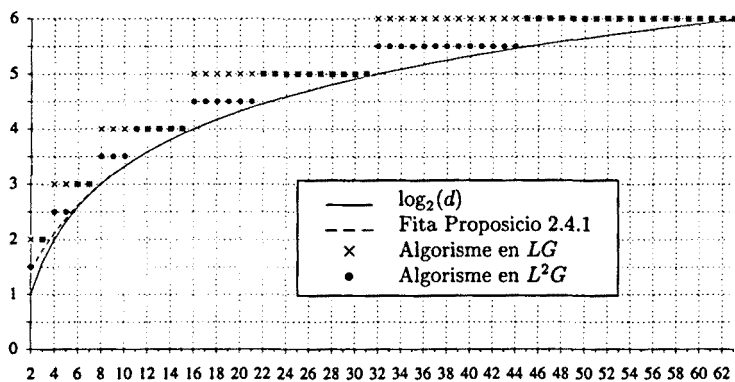
Taula 2.8: El millor que es pot fer en $L^k G$ 

Figura 2.6: Comparació dels algorismes amb les fites

Observem que bàsicament els valors trobats corresponen a $\lceil \log_2 d \rceil$ i a $\frac{1}{2} \lceil 2 \log_2 d \rceil$. El valor desitjable per al temps de broadcasting utilitzant un major nombre d'iteracions ($L^k G$) seria, per tant, $\frac{1}{k} \lceil k \log_2 d \rceil$.

2.4.2 Disseny a partir de valors petits del grau

Es tracta de generalitzar els resultats obtinguts per a L^2G . Amb aquesta finalitat definirem alguns conceptes similars als utilitzats en el cas de L^2G :

Definició 2.4.4 *Sigui $D_\alpha^{k,h}$ el conjunt de valors d per als quals qualsevol protocol feble sobre un dígraf d -regular pot ésser completat en un protocol de broadcasting per a L^kG en $(k-1)\alpha + h$ unitats de temps més.*

De manera anàloga es defineix el conjunt $E_\alpha^{k,h}$. Pretenem amb això obtenir un resultat similar al de L^2G , és a dir, dissenyar protocols utilitzant el mètode d'inducció sobre el grau del dígraf. Això es pot veure en la següent proposició.

Proposició 2.4.5 *Sigui $d \in D_\alpha^{k,h}$. Llavors, si $B(2^\alpha, k-1)$ és un dígraf de broadcast, també es verifica $2^\alpha d \in D_{\alpha+\alpha}^{k,h}$.*

Demostració: Donat un dígraf G amb grau $2^\alpha d$, considerem els subdígrafs $G_0, \dots, G_{2^\alpha-1}$ on G_i és el subdígraf induït pels arcs amb color $j \equiv i \pmod{2^\alpha}$ i per tant és d -regular. No és difícil comprovar que el protocol induït per G_0 és exactament un protocol feble per a G_0 que funciona en temps $t + \alpha + a$, mentre que els protocols induïts en G_i , $i \neq 0$, són exactament protocols forts per als subdígrafs G_i , que funcionen en el mateix temps.

En qualsevol dels casos, atès que $d \in D_\alpha^{k,h}$ i per tant $d \in E_\alpha^{k,h}$, els protocols es poden completar en $(k-1)\alpha + h$ unitats de temps. En conseqüència, a temps $t + k\alpha + a + h$ tots els camins de la forma $x_0^i x_1^i \dots x_{k-1}^i$ amb $x_j^i \equiv i \pmod{2^\alpha}$ han estat informats. En les $a(k-1)$ unitats de temps restants caldrà informar la resta de camins. Ara bé, aquest procés és equivalent a fer broadcasting en $B(2^\alpha, k)$ amb múltiples originadors, és a dir partint de l'estat al qual tots els vèrtexs de la forma $xx \dots x$ estan informats.

Tal com s'ha vist a la Secció 1.5, existeix un homomorfisme arc-regular de $B(d, n)$ en $B(d, n-1)$ que identifica tots els vèrtexs de la forma $xx \dots x$ en el vèrtex $00 \dots 0$. No és difícil veure, per tant, que el nostre problema es reduirà a trobar un algorisme de broadcasting en $B(2^\alpha, k-1)$ des del vèrtex $00 \dots 0$ que funcioni en temps $a(k-1)$. Això serà possible si $B(2^\alpha, k-1)$ és un dígraf de broadcast. ■

Els resultats derivats de l'existència de protocols forts, i per tant, la inducció sobre $2d + 1$, no hem estat capaços d'obtenir-los fins ara.

Si ens centrem en un cas particular de k , podem obtenir alguns resultats concrets. Per exemple, si volem obtenir resultats per a $L^3 G$, el primer que haurem de fer es trobar un digraf de De Bruijn amb diàmetre $D = 2$ éssent el grau una potència de 2, de forma que sigui un digraf de broadcast. El resultat el podem observar en la proposició que enunciem a continuació?

Proposició 2.4.6 ([52]) *El temps de broadcasting per al digraf $B(8, 3)$ és 6, i per tant $B(8, 3)$ és un digraf de broadcast.*

Si volguéssim obtenir resultats per a alguns valors del grau hauríem de trobar algorismes en els primers casos. Observem, per tant, la següent proposició:

Proposició 2.4.7 *Es verifiquen les següents relacions: $4 \in D_2^{3,1}$, $8 \in D_3^{3,1}$ i $16 \in D_4^{3,1}$.*

Demostració: Mostrarem només el cas $4 \in D_2^{3,1}$. El mateix tipus de raonaments porten als altres resultats que es poden trobar en [1].

Dissenyar un protocol sobre $L^3 G$ és equivalent a que la informació acumulada en cada camí de llargada 2, es a dir en cada parell d'arcs, arribi a tots els arcs cap als quals és incident, i amb això queden informats tots els camins de llargada 3, i per tant tots els vèrtexs en $L^3 G$. La situació de partida és que a temps t , el temps en finalitzar un algorisme sobre G , tots els vèrtexs coneixen la informació a través d'un arc.

Començarem amb un protocol feble sobre $L^2 G$. Ara bé, quan un arc i informa un altre arc j , apareix un recorregut de llargada 2, ij , que ha estat informat, i per tant pot començar a informar arcs cap als quals és incident. En qualsevol cas, si l'arc i havia estat informat per un arc indeterminat (\cdot), es tindrà que la parella ij ha estat informada per una indeterminació, i per tant, si torna a rebre la informació γ , no es podrà considerar que l'ha rebuda dues vegades, ja que l'informant podria ser precisament la indeterminació.

Tot això es pot veure reflectit a les Taules 2.9 i 2.10. En la primera apareix l'equivalent a un protocol en $L^2 G$. Ara bé, quan un arc i queda

informat a través d'un arc determinat j es passa a considerar el camí ij com informat a la Taula 2.10, i per tant a partir d'aquest moment a la Taula 2.9 apareixen les accions de l'arc j entre parèntesi per indicar que són accions equivalents a les realitzades a l'altra taula.

A la Taula 2.10 apareixen en petit el nombre de cops que cada parella ij ha estat informada, i per tant el nombre de cops que pot enviar la informació durant la següent unitat de temps. Aquest nombre apareix entre parèntesi si no es pot determinar la parella que l'ha informada, i si torna a rebre γ , s'ha de deixar de considerar que ja havia estat informada.

	$\leq t+2$	$t+3$	$t+4$
0			(0),(3)
1	3	0	1
2		0	2
3		(3)	(2)

Taula 2.9: L'equivalent a un protocol en L^2G

Per tant, tal com es pot apreciar en temps $t + 3\alpha + 1 = t + 7$, totes les parelles han informat tots els arcs i en conseqüència $4 \in D_2^{3,1}$. ■

Com a corol·lari de les últimes proposicions obtenim el següent resultat:

Proposició 2.4.8 *Donat un dígraf G , 2^α -regular, amb una arc-coloració compatible amb un arbre acolorit de broadcasting, corresponent a un algorisme que funciona en temps t , es pot obtenir un algorisme de broadcasting en L^3G que funciona en temps $t + 3\alpha + 1$.*

Tal com hem fet en aquest cas concret, podem haver trobat resultats per a altres valors del grau i amb nombre d'iteracions més elevat. Ens remetem a [1] on es mostren diferents algorismes trobats per ordinador.

2.5 Broadcasting en dígrafs línia iterats

Sigui G un dígraf d -regular sobre el qual es coneix un algorisme de broadcasting que funciona en temps t . D'acord amb les seccions precedents, si

pretenem construir un algorisme de broadcasting sobre el dígraf $L^n G$, ens hem de plantejar dos possibles casos:

En primer lloc considerem que G té una arc-coloració compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting corresponent a l'algorisme sobre G . En aquest cas, si per al grau d es pot construir un protocol per a $L^k G$ en temps $k\alpha + h$, iterant la inducció si cal, és fàcil veure que es pot obtenir un algorisme de broadcasting per a $L^n G$ en temps $t + \lceil c_d n \rceil$, amb $c_d = h/k + \alpha$.

En cas que el dígraf G no tingui cap arc-coloració compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting, serà necessari induir un algorisme de broadcasting sobre LG segons el mètode descrit a la Secció 2.2.1, que es pot fer en temps $t + \lceil \log_2 d \rceil + 1$. Atès que LG és un dígraf línia, tindrà una arc-coloració compatible i per tant podrem continuar com en el primer cas.

A continuació veurem com, per a algunes famílies de dígrafs línia iterats, en el primer cas, el dígraf té una coloració compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting:

	$t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$	$t+7$
00			₁ 1	₁ 2	₂ 0,3
10		⁽¹⁾ 0	⁽¹⁾ 2	⁽¹⁾ 3	₁ 1
20		⁽¹⁾ 3	⁽¹⁾ 1	⁽¹⁾ 2	⁽¹⁾ 0
30				₂ 0,1	₃ 2,3
01				₂ 0,1	₃ 2,3
11			⁽¹⁾ 2	⁽¹⁾ 3	₂ 0,1
21				₁ 2	₃ 0,1,3
31			₁ 2	₁ 1	₃ 0,3
02				₁ 2	₃ 0,1,3
12				₂ 1,3	₃ 0,2
22			⁽¹⁾ 1	⁽¹⁾ 3	₂ 0,2
32			₁ 3	₂ 1,2	₂ 0
03			₁ 0	₁ 1	₂ 2,3
13	⁽¹⁾ 3	⁽¹⁾ 2	⁽¹⁾ 0	⁽¹⁾ 1	₁
23				₁ 0	₃ 1,2,3
33		₁ 1	₁ 2	₁ 3	₂ 0

Taula 2.10: Acabament del protocol en $L^3 G$

2.5.1 Coloracions compatibles

Considerarem en aquest apartat, les famílies més conegudes de dígrafs línia iterats: dígrafs de De Bruijn, Kautz i Papallona.

Dígrafs de De Bruijn

Tal com s'ha vist en el Capítol 1, un dígraf de De Bruijn $B(d, D)$, en termes de dígrafs línia, és isomorf a $L^{D-1}K_d^* \simeq L^D K_1^d$.

En qualsevol cas, tant K_d^* com K_1^d admeten una coloració compatible amb qualsevol arbre acolorit de broadcasting. En el cas de K_d^* perquè es tracta d'un dígraf línia, i en el cas de K_1^d perquè, atès que només té un vèrtex, l'algorisme de broadcasting és un algorisme buit, i per tant, qualsevol coloració és compatible amb l'arbre acolorit. Els temps de broadcasting són $\lceil \log_2 d \rceil$ i 0 respectivament.

Dígrafs de Kautz

Al Capítol 1 es mostra com un dígraf de Kautz $K(d, \dot{D})$, en termes de dígrafs línia, és isomorf a $L^{D-1}K_{d+1}$.

Veurem doncs, que K_{d+1} admet una arc-coloració compatible amb un arbre acolorit de broadcasting. No ho farem en qualsevol algorisme de broadcasting sobre K_{d+1} , sino només en un algorisme predefinit, que resulti ser òptim.

Etiquetem els vèrtexs amb els nombres $0, \dots, d$ de forma que comencem des del vèrtex 0 i considerem un algorisme de broadcasting en K_{d+1} definit de manera anàloga a la d'un protocol fort en G (vegeu la Definició 2.3.4). És a dir a temps t_i , si el vèrtex i coneix la informació, l'envia al vèrtex $i + 2^{t_i - 1}$. És fàcil adonar-se que d'aquesta forma es defineix un algorisme de broadcasting que finalitza a temps $t = \lceil \log_2 d \rceil$ ([22]).

D'altra banda considerem la següent arc-coloració de K_{d+1} : l'arc (i, j) té color $j - i - 1 \pmod{d+1}$. És també fàcil comprovar que es tracta d'una arc-coloració ben definida on s'utilitzen els colors $0, \dots, d$, (atès que no existeix cap arc (i, i) , no s'utilitzarà mai el color $d+1 \equiv -1 \pmod{d+1}$).

Amb aquesta arc-coloració l'arbre de broadcasting queda acolorit de forma que tots els arcs utilitzats per l'algorisme en la mateixa unitat de

temps t_i tenen el mateix color ($2^{t_i-1} - 1$). Per tant, podem canviar els noms dels colors utilitzats de forma que el color utilitzat durant l'última unitat de temps sigui el 0, l'usat en la penúltima, el color $-1 \pmod{d}$, i així successivament. Un cop fet això es complirà que si un vèrtex ha rebut la informació a temps $t - k$, l'ha rebuda a través d'un arc de color $-k$. Amb aquesta coloració, l'arbre de broadcasting resulta ser un arbre acolorit de broadcasting.

Daltra banda, atès que K_{d+1} és arc-transitiu, si pretenem generar un algorisme en $L^k G$, serà indiferent l'arc a través del qual arriba la informació al vèrtex 0 (l'originador), i per tant, el podem escollir de forma que el seu color no sigui inadequat.

Dígrafs Papallona

En el capítol dedicat a l'estudi de la tècnica del dígraf línia es defineix el dígraf Papallona $WDB(d, n)$ com el resultat de la iteració de l'operació del dígraf línia. En concret es mostra que $WDB(d, n) \simeq L^n dC_n$.

Es tracta de veure que el dígraf dC_n es pot acolorir a partir de la coloració de l'arbre de broadcasting. Però és immediat que l'arbre de broadcasting correpon a un camí de llargada n , i per tant, per a acolorir-lo només s'utilitzarà el color 0. El problema es redueix a acolorir el dígraf $(d-1)C_n$ amb els colors $1, \dots, d-1$, que sempre serà possible. El temps de broadcasting per a aquest dígraf és $n - 1$.

2.5.2 Broadcasting en algunes famílies de dígrafs

Els resultats obtinguts fins ara ens permeten establir noves fites superiors per al temps de broadcasting en les famílies de dígrafs línia iterats: De Bruijn, Kautz i Papallona.

Sigui (G, Ψ_T) un dígraf d -regular, $d = 2^\alpha(1 + \beta)$, $0 \leq \beta < 1$, amb una arc-coloració compatible amb l'arbre acolorit de broadcasting corresponent a un algorisme que funciona en temps t . Sigui $c_d = \alpha + \frac{h}{k}$, on $\frac{h}{k}$ és el mínim valor tal que existeix un protocol en $L^k G$ que funciona en temps $t + k\alpha + h$.

Amb aquesta notació podem enunciar el teorema següent,

Teorema 2.5.1 *Es verifiquen les desigualtats següents:*

1. $b(B(d, D)) \leq \lceil c_d D \rceil$;
2. $b(K(d, D)) \leq \lceil c_d D \rceil + 1$;
3. $b(WDB(d, n)) \leq \lceil (c_d + 1)n \rceil - 1$.

Aquest resultat, enunciat de manera simple es pot precisar més en alguns casos particulars, millorant les constants aditives. Per exemple, en el cas dels digrafs de Kautz, el resultat és en realitat $b(K(d, D)) \leq \lceil (D - 1)c_d \rceil + \alpha + 1$. També en el cas dels digrafs de De Bruijn, si el grau és una potència de 2, considerant un algorisme òptim per a $K_{2^\alpha}^*$, obtenim $b(B(2^\alpha, D)) \leq \lceil (D - 1)c_d \rceil + \alpha$.

Per finalitzar aquesta secció, mostrem a la Taula 2.11 una comparació amb els resultats precedents dels valors trobats del temps de broadcasting en els digrafs de De Bruijn per a valors petits del grau. Mostrem en cada cas la constant multiplicativa del diàmetre, c_d , obviant les constants aditives, que en el resultat que es presenta són més petites que en les fites precedents.

d	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fita anterior	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
Cas no dirigit	1.5	2	2.5	2.8	3	3.28	3.5	3.67	3.8
Nou resultat	1.5	2	2.33	2.5	3	3	3.33	3.5	3.5
Fita inferior	1.44	1.80	2.11	2.38	2.62	2.82	3.01	3.17	3.32

Taula 2.11: valors de c_d per a $B(d, D)$

Els valors que és presenten a la Taula 2.11, són però, susceptibles de ser millorats, trobant resultats per a iteracions superiors del digraf línia. A l'Apèndix A es mostra una altra taula (Taula A.1) amb els resultats trobats fins a la data de la presentació d'aquest treball obtingudes en [1], Projecte Final de Carrera encara per finalitzar.

2.6 Altres models

Els resultats que hem obtingut per al problema de broadcasting sota el model d'un sol port són fàcilment generalitzables al model de p ports. Tal com s'ha exposat a la introducció d'aquest capítol, les restriccions per a aquest model

són que si un vèrtex coneix la informació γ , pot, durant una mateixa unitat de temps, enviar-la a p dels vèrtexs que són adjacents des d'ell.

Sota aquest model, una fita inferior per al temps de broadcasting anàloga a la de la Proposició 2.2.6, la podem enunciar de la següent forma:

Proposició 2.6.1 ([22]) *Donat un graf o digraf G amb $V(G) = n$, el temps de broadcasting sota el model de p ports és més gran o igual a $\lceil \log_{p+1} n \rceil$.*

Així doncs, sota aquest model, els resultats sobre la inducció d'algorismes en LG que generalitzen els dels Teoremes 2.2.3 i 2.2.7 són els següents:

Proposició 2.6.2 *Donat un digraf G , d -regular, tal que es pot completar un algorisme de broadcasting sota el model de p ports, $p \leq d$, en temps t , llavors existeix un protocol de broadcasting sota el mateix model en el seu digraf línia LG que es completa en $t + \lceil \log_{p+1} \frac{d}{p} \rceil + 1$ unitats de temps.*

Teorema 2.6.3 *Sigui (G, Ψ_T) un digraf d -regular amb una arc-coloració compatible amb un arbre acolorit de broadcasting T , corresponent a un algorisme de broadcasting que funciona en temps t sota el model de p ports, $p \leq d$. Llavors existeix un algorisme de broadcasting en LG sota el mateix model que funciona en temps $t + \lceil \log_{p+1}(d+1) \rceil$.*

Ometem les demostracions de tots dos, ja que el lector pot fàcilment adaptar els raonaments fets sota el model d'un sol port, fins arribar a aquests mateixos resultats.

Observem, que si p és gran, tots dos algorismes funcionen en el mateix temps per a la majoria de valors del grau, tal com es pot apreciar en la observació que proposem:

Observació 2.6.4 *Considerant $d = (p+1)^\alpha(1+\beta)$, amb $0 \leq \beta < p$, el temps de broadcasting donat per la Proposició 2.6.2 i pel Teorema 2.6.3 coincideixen si $\beta \leq p-1$.*

Observem també que si $d = (p+1)^\alpha(1+\beta)$, el temps obtingut en el Teorema 2.6.3 es pot expressar com $t + \alpha + 1$.

Per a la inducció d'algorismes en iteracions superiors del dígraf línia, també són aplicables els mètodes exposats en aquest capítol sota el model d'un sol port.

Així, per exemple, si considerem inducció d'algorismes en L^2G , obtenim una fita superior anàloga a la de la Proposició 2.3.16:

Proposició 2.6.5 *Una fita superior del valor màxim de β per al qual es pot induir un algorisme de broadcasting en L^2G en temps $t + 2\alpha + 1$ és $\beta \leq \sqrt{p+1} - 1$.*

Ens remetem a [1] per a altres resultats sota el model de p ports seguint les mateixes idees d'aquest capítol.

Capítol 3

Vulnerabilitat en digrafs línia

Resum

En aquest capítol, en dues parts ben diferenciades, s'estudia la vulnerabilitat en els digrafs línia iterats sota diferents aspectes: Sota el model d'encaminaments fixats, el diàmetre del digraf de supervivència resulta ser més petit o igual a 3, i en alguns casos més petit o igual a 2, el qual resulta ésser òptim. En quant al retard en sistemes multihop, el problema de vulnerabilitat del diàmetre per a digrafs línia iterats continua éssent un problema obert. Fem en aquesta segona part una anàlisi per noves famílies de digrafs que resulten ser asimptòticament òptimes quan el grau creix.

3.1 Vulnerabilitat de l'encaminament

Un *encaminament* ρ en un digraf G és una aplicació que assigna a cada parell u, v de vèrtexs diferents de G un camí de u a v , $\rho(u, v)$. Els camins $\rho(u, v)$ s'anomenen *rutes* de l'encaminament. Una *xarxa* és un parell ordenat (G, ρ) . Per mesurar la vulnerabilitat d'una xarxa, a [16] es proposa un paràmetre anomenat diàmetre del digraf de supervivència.

Donada una xarxa (G, ρ) i un conjunt d'elements $F \subset V(G) \cup A(G)$, $|F| < \kappa(G)$, es defineix el *digraf de supervivència* $R = R(G, \rho)/F$, com el digraf que té per conjunt de vèrtexs el format pels vèrtexs de G que no estan en F , $V(R) = V(G) \setminus F$, i donats $u, v \in V(R)$, el vèrtex u és adjacent cap a v en $R(G, \rho)/F$ si la ruta $\rho(u, v)$ no conté cap element de F .

Si fallen alguns nodes o enllaços de la xarxa, les rutes que contenen aquests elements no es podran fer servir. De tota manera, la comunicació encara pot ser possible utilitzant una seqüència de rutes que no estiguin afectades per les "avaries". El nombre màxim de rutes que s'han de prendre per establir una comunicació entre dos nodes de la xarxa en cas d'avaries, vindrà determinat pel diàmetre del digraf de supervivència $D(R(G, \rho)/F)$. Així doncs, el diàmetre del digraf de supervivència mesura l'endarreriment en la transmissió de missatges en una xarxa (G, ρ) provocat per l'eliminació d'alguns vèrtexs

i/o arcs¹.

A [31] es demostra que per a tot encaminament de llargada mínima en els digrafs $K(d, D)$ i $B(d, D)$, i per a qualsevol conjunt d'avaries amb menys de $\kappa(G)$ elements, el diàmetre del digraf de supervivència és 2, és a dir, és òptim². A [18] es prova el mateix resultat, utilitzant, però, una demostració més curta basada en l'estudi del diàmetre del digraf de supervivència per a digrafs línia iterats. En aquest mateix article també es prova que si k és prou gran, existeix un encaminament ρ en $L^k G$ tal que $D(R(G, \rho)/F) \leq C$ on C és una constant que depèn només de G i no del nombre d'iteracions.

Utilitzant una idea esbossada en [40], demostrem a [45] que si k és prou gran, existeix un encaminament ρ en $L^k G$ tal que $D(R(G, \rho)/F) \leq 3$ on $|F| < \kappa(G)$.

En aquesta secció, provarem un resultat semblant, amb una demostració més senzilla, basada en les mateixes idees que ja vam utilitzar a [41] per a grafs i digrafs ℓ -geodètics. El resultat obtingut serà només aplicable, però, a digrafs sense llaços, però com a corol·lari obtenim també que per alguns casos, com ara per al digraf $K(d, D)$, es té $D(R(G, \rho)/F) \leq 2$ per a qualsevol conjunt d'avaries F amb $|F| < \kappa(G)$.

Abans, però, farà falta definir alguns conceptes previs.

3.1.1 Alguns paràmetres i propietats

Per tal de simplificar la notació definim la distància d'un vèrtex v a un conjunt de vèrtexs F , $d(v, F)$, com la mínima de les distàncies de v a qualsevol vèrtex $u \in F$, $d(v, F) = \min_{u \in F} d(v, u)$. Anàlogament, $d(F, v) = \min_{u \in F} d(u, v)$.

Definim també la *concatenació* de dos recorreguts $v_0 \rightsquigarrow v_k = v_0, \dots, v_k$ i $u_0 \rightsquigarrow u_m = u_0, \dots, u_m$ tals que $v_k = u_0$, com el recorregut $v_0 \rightsquigarrow u_m = v_0, \dots, (v_k = u_0), \dots, u_m$. Escriurem $(v_0 \rightsquigarrow v_k) * (u_0 \rightsquigarrow u_m)$ per referir-nos a aquest recorregut.

A [45] definim un paràmetre que utilitzem per mesurar el diàmetre del digraf de supervivència en digrafs:

¹La raó de la restricció $|F| < \kappa(G)$ és que sense ella el digraf pot quedar desconnectat, i per tant el diàmetre del digraf de supervivència esdevendria infinit.

²En efecte, $D(R(G, \rho)/F) \leq 2$ és òptim ja que si considerem un conjunt qualsevol d'avaries, com a mínim hi haurà una ruta que es veurà afectada, i per tant mai no es pot tenir $D(R(G, \rho)/F) = 1$.

Definició 3.1.1 ([45]) *Sigui G un dígraf fortament connex amb diàmetre D . El paràmetre h , $1 \leq h \leq D$, es defineix com el nombre sencer més gran tal que donats dos vèrtexs qualssevol no necessàriament diferents, $v, u \in V(G)$, es verifica que si existeixen dos camins diferents de v a u amb la mateixa llargada t , llavors $t > h$.*

Un altre paràmetre que necessitarem es defineix a [19], on s'utilitza per avaluar la connectivitat en grafs i dígrafs. Aquí el farem servir, juntament amb el paràmetre h , per definir un encaminament sobre el qual donem fites per al diàmetre del dígraf de supervivència.

Definició 3.1.2 ([19]) *Sigui G un dígraf fortament connex amb diàmetre D . El paràmetre $\ell = \ell(G)$, $1 \leq \ell \leq D$, es defineix com el nombre sencer més gran tal que donats dos vèrtexs qualssevol, $u, v \in V(G)$, es verifica:*

(a) *Si $d(u, v) < \ell$, llavors només existeix un camí $u \rightsquigarrow v$ de llargada igual a $d(u, v)$. A més, no existeix cap camí de llargada $d(u, v) + 1$.*

(b) *Si $d(u, v) = \ell$, llavors existeix un únic camí de llargada igual a $d(u, v)$.³*

Observem que el paràmetre ℓ està ben definit si el dígraf G no té llaços. En conseqüència, en aquesta secció, encara que no ho fem de manera explícita ens referirem sempre a dígrafs amb aquesta restricció.

Farem servir també algunes de les proposicions que apareixen a a [19] i [20]:

Proposició 3.1.3 ([19]) *Sigui G un dígraf amb grau mínim $\delta > 1$ i amb $\ell = \ell(G)$. Siguin κ i λ la connectivitat i l'arc-connectivitat de G respectivament. Llavors,*

(a) $\lambda = \delta$ si $D \leq 2\ell$;

(b) $\kappa = \delta$ si $D \leq 2\ell - 1$;

Atès que en tot moment suposarem com a mínim $D \leq 2\ell - 1$ ó $D \leq 2\ell$, considerarem la cardinalitat del conjunt d'avaries més petita que δ , donant

³Tot i que aquesta definició és semblant a la del paràmetre h , no són iguals, i de fet són independents, en el sentit que per a alguns dígrafs es té $\ell \geq h$, mentre que per a altres es verifica $\ell \leq h$.

per cert que, en virtut d'aquesta proposició, el digraf no quedarà mai desconnectat.

La proposició que acabem de citar es basa en una altra de la qual en farem ús de forma independent, i per tant també la presentem.

Proposició 3.1.4 ([20]) *Sigui G un digraf amb grau mínim $\delta > 1$ i amb $\ell = \ell(G)$. Sigui $F \subset V(G)$, $|F| < \delta$, un conjunt d'avaries. Donat un vèrtex $v \in V(G) \setminus F$, sempre existeix un altre vèrtex $w \in V(G) \setminus F$ adjacent des de v tal que,*

- (a) *Si $d(v, F) < \ell$, llavors $d(w, F) \geq d(v, F) + 1$;*
- (b) *Si $d(v, F) \geq \ell$, llavors $d(w, F) \geq \ell$.*

Un cop descrits els principals enunciats que necessitem, definim un nou paràmetre, derivat dels paràmetres h i ℓ , en el qual ens basarem durant tota la secció.

Definició 3.1.5 *Sigui G un digraf amb paràmetres $\ell = \ell(G)$ i $h = h(G)$. Definim $\omega(G) = \min\{\ell, h\}$.*

Atès que $\omega \leq \ell$, les Proposicions 3.1.3 i 3.1.4 continuaran éssent certes si substituïm als enunciats el paràmetre ℓ pel paràmetre ω . Així doncs, el següent corol·lari es desprèn sense dificultat aplicant reiteradament la Proposició 3.1.4 amb aquest canvi.

Corol·lari 3.1.6 *Sigui G un digraf amb $\omega(G) = \omega$ amb grau mínim $\delta > 1$. Sigui $F \subset V(G)$, $|F| < \delta$, i sigui $v \in V(G) \setminus F$. Aleshores, fixat $r \geq \omega - 1$ existeix un recorregut $v \rightsquigarrow v'$ de llargada r que no conté cap element de F , on v' és tal que $d(v', F) \geq \omega$.*

És fàcil comprovar que els resultats anteriors són també vàlids intercanviant el sentit dels arcs, i per tant es verifica també el corol·lari que enunciem a continuació:

Corol·lari 3.1.7 *Sigui G un digraf amb $\omega(G) = \omega$ amb grau mínim $\delta > 1$. Sigui $F \subset V(G)$, $|F| < \delta$, i sigui $v \in V(G) \setminus F$. Aleshores, fixat $r \geq \omega - 1$ existeix un recorregut $v' \rightsquigarrow v$ de llargada r que no conté cap element de F , on v' és tal que $d(F, v') \geq \omega$.*

3.1.2 Digraf de supervivència. Fites per al diàmetre

En aquesta secció, donat un digraf G , considerarem només encaminaments segons la següent definició:

Definició 3.1.8 *Sigui G un digraf amb $\omega = \omega(G)$, i sigui ρ un encaminament. Direm que ρ és un ω -encaminament si totes les rutes són de llargada inferior o igual al diàmetre, i a més, tots els recorreguts de llargada ω entre vèrtexs diferents són rutes en ρ .*

Adonem-nos que, donada la definició del paràmetre $\omega \leq h$, les rutes de llargada ω queden determinades de manera unívoca. Pel que fa als vèrtexs entre els quals no hi hagi un recorregut de llargada ω , les rutes entre ells poden ser qualssevol. Tot i que pot semblar una mica enrevessat, no deixa de ser, per exemple, un encaminament que sovint es considera en els digrafs de Kautz, ja que tal com es veurà, $\omega(K(d, D)) = D$.

Estem ara en condicions de exposar el nostre primer teorema en quant al digraf de supervivència, corresponent al cas en que considerem avaries només en els vèrtexs, és a dir, $F \subset V(G)$:

Teorema 3.1.9 *Sigui G un digraf fortament connex amb grau mínim $\delta > 1$, diàmetre D , i $\omega = \omega(G)$. Sigui $F \subset V(G)$, $|F| < \delta$, i sigui ρ_ω un ω -encaminament en G . En aquestes condicions, si $D \leq 2\omega - 1$ llavors $D(R(G, \rho_\omega)/F) \leq 3$.⁴*

Demostració: Suposem que la ruta $\rho_\omega(v, u)$ conté elements de F . D'acord amb el Corol·lari 3.1.6 existeixen recorreguts $v \rightsquigarrow v'$ i $u' \rightsquigarrow u$ de llargada exactament ω amb $d(v', F), d(F, u') \geq \omega$ (Figura 3.1). En conseqüència, atès que estem considerant un ω -encaminament, les rutes $\rho_\omega(v, v')$ i $\rho_\omega(u', u)$ coincideixen amb els camins trobats.

D'altra banda, la ruta $\rho_\omega(v', u')$ no pot contenir cap element de F , ja que, donades les hipòtesis del teorema, hauria de tenir llargada superior a D .

⁴D'aquest resultat es desprén que, donades les hipòtesis del teorema, la supressió d'un conjunt de menys de δ vèrtexs no desconecta mai el digraf (el diàmetre hauria de ser infinit), i per tant aquest resultat és conseqüent amb la Proposició 3.1.3 (a).

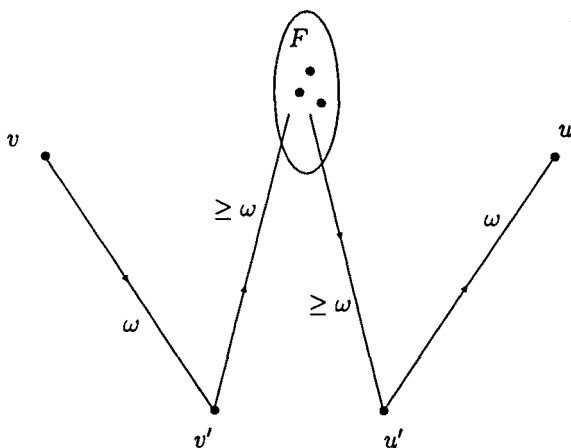


Figura 3.1: Fallada de vèrtexs

Per tant, la concatenació de rutes $\rho_\omega(v, v') * \rho_\omega(v', u') * \rho_\omega(u', u)$ no conté cap element de F , i d'aquesta forma $D(R(G, \rho_\omega)/F) \leq 3$. ■

El resultat següent és anàleg al Teorema 3.1.9, considerant, però, avaries només en els arcs, és a dir, $F \subset A(G)$.

Teorema 3.1.10 *Sigui G un digraf fortament connectat amb grau mínim $\delta > 1$, diàmetre D , i $\omega = \omega(G)$. Sigui $F_A \subset A(G)$, $|F_A| < \delta$, i sigui ρ_ω un ω -encaminament en G . En aquestes condicions, si $D \leq 2\omega$ llavors $D(R(G, \rho_\omega)/F_A) \leq 3$.*

Demostració: Considerem en primer lloc que la ruta $\rho_\omega(v, u)$ conté arcs que pertanyen a F_A suposant però, que no hi ha cap arc incident des de v ni incident cap a u que pertanyi a F_A .

En aquest cas considerem dos conjunts de vèrtexs que anomenarem F_v i F_u que contenen respectivament els vèrtexs des dels quals i cap als quals els arcs en F_A són incidents, és a dir, si $(w_1, w_2) \in F_A$ llavors $w_1 \in F_v$ i $w_2 \in F_u$.

Donats els Corol·laris 3.1.6 i 3.1.7, sabem que existeixen vèrtexs v' i u' , amb $d(v', F_v), d(F_u, u') \geq \omega$ i tals que $\rho_\omega(v, v')$ no conté elements de F_v i $\rho_\omega(u', u)$ no conté elements de F_u .

D'altra banda, tal com es veu a la Figura 3.2, si $D \leq 2\omega$ la ruta $\rho_\omega(v', u')$ no pot contenir arcs de F_A i en conseqüència la concatenació de rutes $\rho_\omega(v, v') * \rho_\omega(v', u') * \rho_\omega(u', u)$ no conté cap element de F , i d'aquesta forma $D(R(G, \rho_\omega)/F_A) \leq 3$.

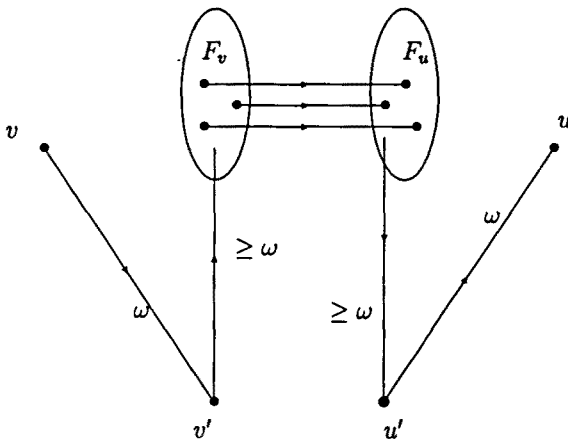


Figura 3.2: Fallada d'arcs

Queda però, pendent el cas en que algun arc incident des de v i/o incident cap a u estigui contingut en F_A . En aquest cas els conjunts F_v i/o F_u contenen els vèrtexs v i/o u , no podent-se aplicar algun dels Corol·laris 3.1.6 i 3.1.7.

Considerem només que $v \in F_v$, ja que la demostració en cas que $u \in F_u$ és completament anàloga. El primer que hem de demostrar en aquest cas és que existeix un vèrtex v'' adjacent des de v amb $v'' \notin F_v$.

Sigui $\Gamma_v^+(v) = \{u' \in F_u \mid (v, u') \in F_A\}$ i sigui $\Gamma_v^+(v) = (\Gamma^+(v) \cap F_v) \setminus \Gamma_v^+(v)$. Atès que $|F_A| < \delta$ i que hi ha com a mínim un arc incident des de cada vèrtex en $\Gamma_v^+(v)$ contingut en F_A , s'obté $|\Gamma_v^+(v) \cup \Gamma_v^+(v)| < \delta$.

Per tant el vèrtex v com a mínim és adjacent cap a $\delta - |\Gamma_u^+(v) \cup \Gamma_v^+(v)| \geq 1$ vèrtex $v'' \notin F_v$.

Així doncs, segons el Corol·lari 3.1.6 existeix un recorregut $v'' \rightsquigarrow v'$ de llargada $\omega - 1$ que no conté elements de F_A . Amb això el recorregut $(v, v'') * (v'' \rightsquigarrow v')$ té llargada ω i per tant és una ruta en un ρ_ω -encaminament. La resta de la demostració segueix com en el cas anterior. ■

Si considerem que el conjunt d'avaries F conté alhora arcs i vèrtexs, obtenim el següent resultat com a corol·lari dels Teoremes 3.1.9 i 3.1.10, simplement considerant els vèrtexs $w \in F$, com a pertanyents a la intersecció $F_v \cap F_u$ tal com es pot apreciar a la Figura 3.3

Corol·lari 3.1.11 *Sigui G un digraf fortament connex amb grau mínim $\delta > 1$, diàmetre D , i $\omega = \omega(G)$. Sigui $F \subset V(G) \cup A(G)$, $|F| < \delta$, i sigui ρ_ω un ω -encaminament en G . En aquestes condicions, si $D \leq 2\omega - 1$ llavors $D(R(G, \rho_\omega)/F) \leq 3$.*

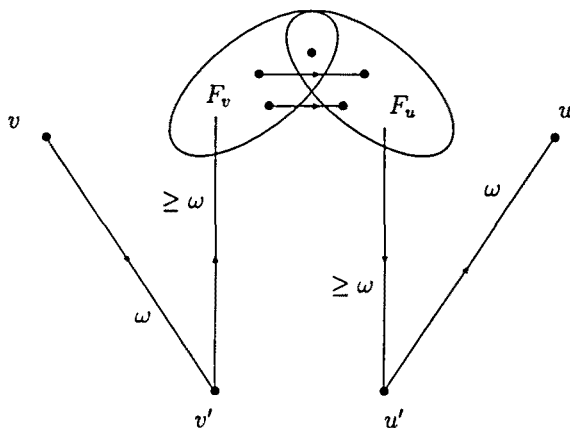


Figura 3.3: Fallada d'arcs i vèrtexs

Per finalitzar, si impossem condicions més fortes en quant al valor del paràmetre ω obtenim millors resultats pel que fa al diàmetre del digraf de

supervivència. La demostració del teorema següent utilitza idees molt semblants a les des casos precedents, i per tant ometrem alguns detalls, que es poden trobar a les demostracions anteriors.

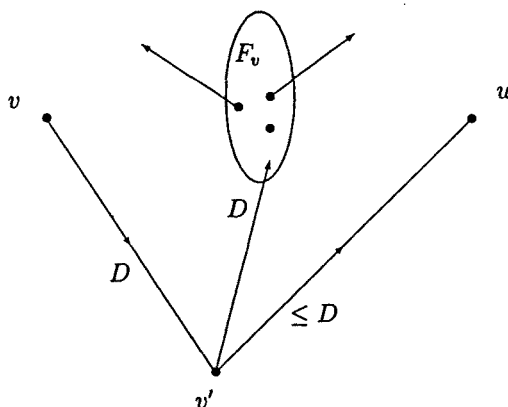


Figura 3.4: $D = \omega$

Teorema 3.1.12 *Sigui G un digraf fortament connex amb grau mínim $\delta > 1$, diàmetre D , i $\omega = \omega(G)$. Sigui $F \subset V(G) \cup A(G)$, $|F| < \delta$, i sigui ρ_ω un ω -encaminament en G . En aquestes condicions, si $\omega = D$ llavors $D(R(G, \rho_\omega)/F) \leq 2$.*

Demostració: Suposem que la ruta $\rho_\omega(v, u)$ conté algun element de F .

Considerem en primer lloc que no hi ha cap arc incident des del vèrtex v que pertanyi a F . Sigui $F_v = (F \cap V(G)) \cup \{w_1 \in V(G) \mid (w_1, w_2) \in F\}$. D'acord amb el Corol·lari 3.1.6 hi ha un recorregut $v \rightsquigarrow v'$ de llargada exactament $D = \omega$ que no conté cap element de F amb $d(v', F) \geq \omega$. Per tractar-se d'un ω -encaminament, $\rho_\omega(v, v')$ coincideix amb el recorregut esmentat.

D'altra banda la ruta $\rho_\omega(v', u)$ no pot contenir cap element de F ja que $d(v', F) = D$.

D'aquesta forma, la concatenació de rutes $\rho_\omega(v, v') * \rho_\omega(v', u)$ no conté cap element de F , i per tant $D(R(G, \rho_\omega)/F) \leq 2$ (Figura 3.4).

En cas que F contingui algun arc de la forma (v, w) es procedeix com en la demostració del Teorema 3.1.10. ■

3.1.3 Dígraf de supervivència en dígrafs línia iterats

Per avaluar el diàmetre del dígraf de supervivència en dígrafs línia iterats, utilitzarem els resultats de la secció precedent, considerant dues propietats que compleixen aquests dígrafs. La primera d'elles es basa en el fet que un dígraf línia LG només té llaços si G en té (vegeu Capítol 1), i per tant, si G és un dígraf sense llaços, llavors en LG està definit el paràmetre ω .

L'altra propietat referent als dígrafs línia es desprèn directament dels fets que $\ell(LG) = \ell(G) + 1$ ([20]) i que $h(LG) = h(G) + 1$ ([45]).

Lema 3.1.13 *Sigui G un dígraf amb grau mínim $\delta > 1$ i tal que $\omega = \omega(G)$. Llavors $\omega(L^k G) = \omega(G) + k$.*

Així doncs, podem establir el següent teorema que ja vam demostrar a [45] d'una altra manera totalment diferent:

Teorema 3.1.14 *Sigui G un dígraf fortament connex d -regular amb $d > 1$ i sense llaços. Llavors si k és suficientment gran, existeix un encaminament ρ en $L^k G$ tal que $D(R(L^k G, \rho)/F) \leq 3$ per a qualsevol $F \subset V(L^k G) \cup A(L^k G)$ amb $|F| < \kappa(L^k G)$.*

Demostració: Sigui G un dígraf sense llaços. En aquest cas està definit $\omega(G)$. Sigui per tant $r(G) = D(G) - 2\omega(G)$. Segons el Lema 3.1.13, es tindrà $r(L^k G) = D(L^k G) - 2\omega(L^k G) = r(G) - k$. En conseqüència, per $k > r(G)$ es té $D(L^k G) \leq 2\omega(L^k G)$, i per tant estem en les condicions del Corol·lari 3.1.11. ■

Finalment, és fàcil comprovar que $\omega(K_{d+1}) = 1$ i per tant, a partir del Teorema 3.1.12, obtenim el següent corol·lari, ja demostrat a [31] i a [18]:

Corol·lari 3.1.15 *Sigui $G \simeq K(d, D)$. Llavors per a qualsevol conjunt $F \subset V(G) \cup A(G)$, amb $|F| < \kappa(G)$ es té $D(R(G, \rho_D)/F) \leq 2$.⁵*

⁵A [18] aquest resultat es demostra a partir dels anomenats vèrtexs F -centrals, és a

3.2 Vulnerabilitat del diàmetre*

Donat un (di)graf G amb grau màxim Δ , direm que és un (di)graf (Δ, D', s) si en eliminar s vèrtexs qualssevol, el diàmetre del digraf resultant és més petit o igual que D' .

En una xarxa de comunicacions en la qual cada node té informació sobre l'estat de la xarxa, l'existència d'avaries (nodes que fallen) produeix que, per establir una comunicació entre dos nodes determinats, es pugui produir un retard degut a l'augment de la distància ente ells. El valor de D' mesurarà, d'alguna forma, quin és aquest retard. És habitual referir-se a aquesta situació com a *vulnerabilitat del diàmetre*.

El problema de construcció de (di)grafs (Δ, D', s) amb ordre el més elevat possible ha estat estudiat àmpliament tant en el cas de grafes ([7, 54, 55]) com en el cas de digrafs ([39]).

Presentem alguns dels resultats als quals farem referència en aquesta secció. El primer d'ells estableix una fita superior per a l'ordre d'un digraf (Δ, D', s) :

Proposició 3.2.1 ([39]) *Sigui G un digraf (Δ, D', s) amb ordre n . Llavors es verifica $n \leq M_{FD}(\Delta, D', s)$, amb*

$$M_{FD}(\Delta, D', s) = 1 + \Delta + \left\lfloor \frac{\Delta^2 + \Delta^3 + \dots + \Delta^{D'}}{s + 1} \right\rfloor$$

Un altre resultat trivial del qual en farem ús ens dona una condició suficient per tal que un digraf sigui un digraf (Δ, D', s) :

Proposició 3.2.2 *Sigui G un digraf amb grau màxim Δ , tal que per a cada parell de vèrtexs $v, u \in V(G)$ tals que $(v, u) \notin A(G)$ existeixen $s + 1$ camins disjunts de v cap a u de llargada com a molt D' . Llavors G és un digraf (Δ, D', s) .*

La qüestió de la vulnerabilitat del diàmetre en digrafs línia iterats també ha estat objecte d'estudi sense arribar, però, a resultats globals. En [43] es dir, vèrtexs que estan a distància D des de i cap a qualsevol vèrtex de F . Adonem-nos que, tanmateix, la demostració el Teorema 3.1.12 només requereix l'existència de vèrtexs que estiguin a distància D cap als vèrtexs de F i no pas des d'ells.

*Els resultats d'aquesta secció han estat publicats en [42]

donen algunes condicions per tal que si un dígraf G és un dígraf (Δ, D', s) es pugui afirmar que el seu dígraf línia, LG , és un dígraf $(\Delta, D' + 1, s)$. En general, les condicions imposades no es conserven en el dígraf línia, i per tant, aquest resultat no permet afirmar-ne res de successives iteracions.

A [17] es diu que si G és un dígraf (Δ, D', s) llavors $L^k G$ és un dígraf $(\Delta, D' + k, s)$. Aquest resultat resulta ser fals tal com es pot veure a [44].

En conseqüència el problema de la vulnerabilitat del diàmetre per dígrafs línia iterats és encara un problema obert.

Per a algunes famílies de dígrafs línia sí és cert que es coneixen fites, en especial per als dígrafs de Kautz i de De Bruijn ([34]). En aquesta secció farem una altra demostració d'aquests resultats que utilitzarem per provar-ne de nous sobre altres famílies de dígrafs línia iterats que, en alguns casos, es troben molt a prop de la fita de la Proposició 3.2.1.

3.2.1 Camins disjunts en el dígraf de Kautz amb $D \leq 3$

Proposició 3.2.3 *Sigui $K(d, D)$ un dígraf de Kautz amb diàmetre $D \leq 3$. Entre qualsevol parell de vèrtexs de $K(d, D)$ existeixen com a mínim $d - 1$ recorreguts disjunts de llargada exactament $D + 1$.*

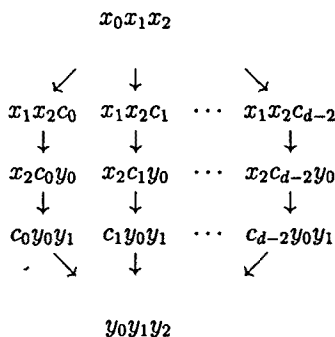
Demostració: Farem la demostració només per al cas $D = 3$, obviant els altres casos, que resulten trivials.

Considerem dos vèrtexs genèrics en $K(d, 3)$, $x = x_0x_1x_2$ i $y = y_0y_1y_2$, $x_i, y_j \in \{c_0, \dots, c_d\}$, entre els quals trobarem els possibles recorreguts de llargada 4. Apareixen dos possibles casos que tractarem per separat:

a) $x_2 \neq y_0$.

Suposarem, sense pèrdua de generalitat, $x_2 = c_d$ i $y_0 = c_{d-1}$. Per tant els possibles camins són els que es mostren a la Figura 3.5.

Per construcció dels camins, es té que dos vèrtexs representats en la mateixa fila i en columnes diferents han de ser forçosamet diferents. De la mateixa forma, tampoc no poden ésser iguals dos vèrtexs situats en files consecutives, donat que, segons la definició dels dígrafs de Kautz, dos símbols consecutius han de ser diferents. Finalment, un vèrtex en la primera fila no pot ser igual a un en la tercera, donat que en aquest

Figura 3.5: Recorreguts de llargada 4 en $K(d, 3)$

cas hem imposat $x_2 \neq y_0$. Per tant, tots els recorreguts que apareixen a l'esquema són disjunts.

b) $x_2 = y_0$.

En aquest cas pot existir, com a molt, un vèrtex en la primera fila que coincideixi amb un a l'última: Observem que el primer símbol en els vèrtexs de la primera fila sempre és x_1 , mentre que a l'última, és diferent per cada columna. En aquest cas, però, existeix un recorregut adicional de llargada 4, utilitzant el símbol c_{d-1} , de forma que es continua verificant el resultat. ■

3.2.2 Camins disjunts en els digrafs de Kautz i de De Bruijn

El nombre de camins disjunts en els digrafs de Kautz i de De Bruijn ha estat estudiat a [34]. En qualsevol cas, per tal d'obtenir el resultat principal d'aquesta secció serà convenient presentar la demostració d'un resultat similar al que apareix allà, tot imposant restriccions addicionals⁶.

⁶A [34] es demostra que en els digrafs $K(d, D)$ i $B(d, D)$ existeixen respectivament $d-2$ i $d-1$ camins disjunts de llargada més petita o igual a $D+1$. El que nosaltres volem demostrar és que existeixen respectivament $d-2$ i $d-1$ recorreguts disjunts de llargada

Considerem d recorreguts de llargada $D + 1$ en un digraf de De Bruijn $B(d, D)$, des del vèrtex $x = z_{-D} \cdots z_{-1}$ fins a $y = z_1 \cdots z_D$, que representarem com una seqüència de símbols $W_i = z_{-D} \cdots z_{-1} z_0 z_1 \cdots z_D$ on $z_0 = c_i$ (veure Figura 3.6).

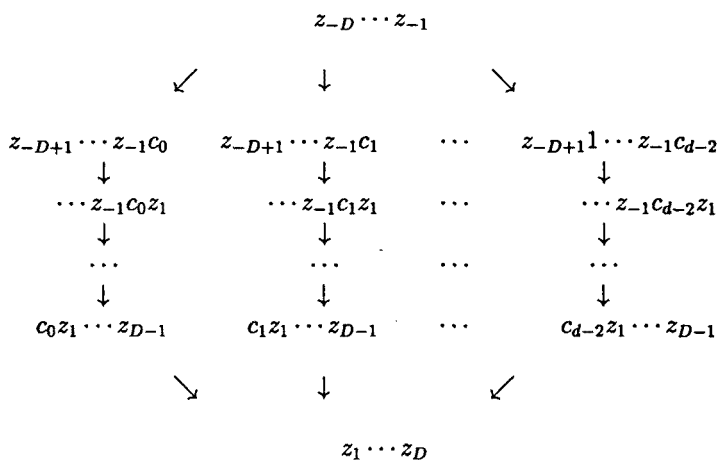


Figura 3.6: d recorreguts de llargada $D + 1$ sobre el digraf $B(d, D)$

En aquest context direm que dos recorreguts (o subrecorreguts) són *similars* si difereixen com a molt en el símbol $z_0 = c_i$. És fàcil comprovar que es tracta d'una relació d'equivalència.

Denotarem per v_{ij} , $1 \leq i \leq D$, l' i -èsim vèrtex en el recorregut j (el recorregut en el qual $z_0 = c_j$). Anomenarem *salt* entre els vèrtexs v_{ij} i v_{kl} al valor $s = k - i$.

Teorema 3.2.4 *Sigui $v_{ij} = v_{kl}$, $s = k - i > 0$. Llavors, si $v_{mn} = v_{op}$ amb $t = o - m > 0$, es verifica alguna de les condicions següents:*

1. $j = n$, $l = p$ si $t = s$.

exactament $D + 1$.

2. $n = p$ si $t < s$.⁷

Demostració: Si dos vèrtexs són iguals llavors els símbols que componen les seves seqüències són els mateixos. Per tant, segons les condicions de l'enunciat, es verifiquen les igualtats següents:

$$\begin{array}{rcccccccc} v_{kl} & = & \cdots & c_l & z_1 & \cdots & z_s & \cdots \\ \parallel & & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ v_{(k-s)j} & = & \cdots & z_{-s} & \cdots & z_{-1} & c_j & \cdots \end{array} \quad (3.1)$$

$$\begin{array}{rcccccccc} v_{(m+t)p} & = & \cdots & c_p & z_1 & \cdots & z_t & \cdots \\ \parallel & & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ v_{mn} & = & \cdots & z_{-t} & \cdots & z_{-1} & c_n & \cdots \end{array} \quad (3.2)$$

Fixem-nos que, atès que el símbol $z_0 = c_i$ apareix en tots els vèrtexs per algun i , apareixerà en les equacions (3.1) i (3.2).

Per tal de provar el resultat, ho farem per separat en cada uns dels casos:

a) $t = s$.

En aquest cas es té $z_{-t} = z_{-s}$ i $z_t = z_s$. D'altra banda, de les equacions (3.1) i (3.2) obtenim, $c_l = z_{-s}$, $c_p = z_{-t}$, $c_j = z_s$ i $c_n = z_t$. En conseqüència, $c_n = c_j$ i $c_p = c_l$ i per tant, $n = j$ i $l = p$.

b) $t < s$.

Considerem el recorregut W_l segons la Figura 3.6, i considerem el subrecorregut, que anomenarem P_1 des del vèrtex v_{il} fins al vèrtex v_{kl} . Atès que $v_{ij} = v_{kl}$, es té, per (3.1), que $z_x = z_{x-s}$ per tot $x \neq s, 0$, amb $s = k - i$, tal que z_x i z_{x-s} pertanyin a P_1 .

De la mateixa forma, considerem el recorregut P_2 des del vèrtex v_{mn} fins el vèrtex v_{on} . Igual que en el cas anterior, donat que $v_{mn} = v_{on}$, es té per (3.2) que $z_x = z_{x+t}$ per tot $x \neq t, 0$, amb $t = o - m$, tal que z_x i z_{x+t} pertanyin a P_2 .

⁷En cas que $t > s$, és suficient intercanviar el paper de t i s per obtenir un resultat similar.

Per continuar amb aquesta demostració requerim un resultat que exposem en forma de lema, perquè la seva demostració és aliena a aquest context:

Lema 3.2.5 *Existeix una subseqüència CS en P_1 de llargada com a mínim $s + t + 1$ que és similar a una subseqüència de P_2 . A més, $z_t, z_{-t} \in CS$.*

Demostració: Per aquesta demostració tindrem en compte els fets que enunciem a continuació:

- La seqüència corresponent qualsevol recorregut W_i des del vèrtex $x = z_{-D} \cdots z_{-1}$ fins a $y = z_1 \cdots z_D$ té llargada $2D + 1$;
- Cap dels vèrtexs que estem considerant no pot ser x ni y , i per tant, els símbols z_{-D} i z_D no apareixen a les seqüències P_1 ni P_2 .
- P_1 i P_2 són subseqüències de W_l i W_n de llargada $D + s$ t $D + t$ respectivament.

Com a conseqüència d'aquests fets, la llargada mínima de la intersecció entre P_1 i P_2 , és $s + t + 1$ tal com es mostra a la Figura 3.7.

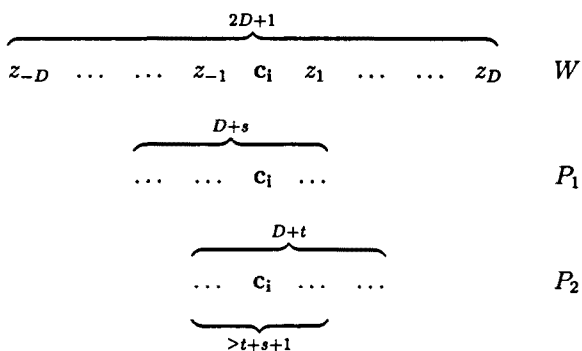


Figura 3.7: Demostració del Lema 3.2.5

Per provar que $z_t, z_{-t} \in CS$ ho farem de la següent forma: Atès que els símbols en P_2 són els que apareixen a l'equació (3.2), es té que z_t i z_{-t} pertanyen a P_2 . De la mateixa forma, $z_s, z_{-s} \in P_1$, i per tant z_i pertany a P_1 sempre i quan $-s \leq i \leq s$, $i \neq 0$. El lema queda demostrat ja que $t < s$. ■

(Continua la demostració del teorema)

Com a conseqüència de que la llargada de CS és més gran o igual que $t+s+1$, es té que si $z_i \in CS$, llavors z_{i-s} o bé z_{i+t} també hi pertanyen. Tal com hem exposat al principi de la demostració, si $z_{i-s} \in CS$, llavors $z_i = z_{i-s}$, sempre que $i \neq s, 0$. De la mateixa forma, si $z_{i+t} \in CS$ llavors $z_i = z_{i+t}$ sempre que $i \neq -t, 0$.

Per finalitzar la demostració necessitarem també el següent lema:

Lema 3.2.6 Si $z_{at-bs} \in CS$ i $z_{a't-b's} \in CS$ amb $a \leq a', b \leq b'$, llavors $z_{at-bs} = z_{a't-b's}$ sempre i quan no existeixin $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ amb $a \leq \alpha \leq a'$ i $b \leq \beta \leq b'$ tals que $\alpha t - \beta s = 0$.

Demostració: Tal com s'ha demostrat anteriorment, es verifica alguna de les igualtats: $z_{at-bs} = z_{(a+1)t-bs}$ o bé $z_{at-bs} = z_{at-(b+1)s}$. Suposem que es compleix la primera igualtat fins a n cops, és a dir $z_{at-bs} = z_{(a+1)t-bs} = z_{(a+2)t-bs} = \dots$. Per tant, es té $z_{at-bs} = z_{a_n t-bs}$ amb $a \leq a+n = a_n$. Arribats a aquest punt distingirem dos casos:

a) $a_n < a'$.

Atès que una nova iteració no és possible, tindrem $z_{a_n t-bs} = z_{a_n t-(b+1)s}$. Així doncs, es pot repetir aquest procés fins arribar a $z_{at-bs} = z_{a't-b_k s}$ o bé $z_{at-bs} = z_{a_k t-b's}$.

Suposarem que la primera igualtat és la que es verifica. Atès que $z_{a't-b_k s} \in CS$ i $z_{a't-b's} \in CS$, llavors $z_{a't-(b_k+i)s} \in CS$ per a tot $i \leq b' - b_k$, i en conseqüència $z_{at-bs} = z_{a't-b's}$. En altres casos la demostració és anàloga.

b) $a_n \geq a'$.

Es té $z_{at-bs} = z_{a't-bs}$. Atès que $z_{a't-b's}, z_{a't-bs} \in CS$ resulta que $z_{a't-b's} = z_{a't-bs}$. ■

(Continua la demostració del teorema)

Considerant, tal com s'ha vist al Lema 3.2.5, que $z_t, z_{-t} \in CS$, podem concloure la demostració com a corol·lari del Lema 3.2.6:

En el cas que $\text{mcd}(t, s) = 1$, donat el Lema 3.2.6, tenim que $z_t = z_{(s-1)t-ts} (= z_{-t})$. En altre cas, si $\alpha t - \beta s = 0$, es té que $(\alpha - 1)t - \beta s = -t$, podent-se aplicar el Lema 3.2.6 per provar de manera immediata que $z_t = z_{-t}$.

Per finalitzar, tal com es mostra a l'equació (3.2), $c_p = z_t$ i $z_{-t} = c_n$. En conseqüència $c_n = c_p$ i per tant $n = p$. ■

Idèntic resultat es pot obtenir per als digrafs de Kautz, considerant que existeixen $d - 1$ recorreguts de llargada exactament igual a $D + 1$.

Com a corol·lari immediat del Teorema 3.2.4 s'obté el següent resultat, similar al que apareix a [34]:

Corol·lari 3.2.7

1. Sigui $B(d, D)$ el digraf de De Bruijn de grau d i diàmetre D . Donats dos vèrtexs qualssevol, existeixen d recorreguts de llargada $D + 1$, éssent $d - 1$ d'ells disjunts.
2. Sigui $K(d, D)$ el digraf de De Bruijn de grau d i diàmetre D . Donats dos vèrtexs qualssevol, existeixen $d - 1$ recorreguts de llargada $D + 1$, éssent $d - 2$ d'ells disjunts.

3.2.3 Noves famílies de digrafs poc vulnerables

Presentem a continuació algunes famílies de digrafs línia iterats que demostrarem que són òptimes en quant a la vulnerabilitat del diàmetre:

Definició 3.2.8 Sigui $KK(d_1, d_2, D)$ el digraf resultant del producte directe de dos digrafs de Kautz amb diàmetre $D - 1$ i graus d_1 i d_2 respectivament, és a dir, $KK(d_1, d_2, D) = K(d_1, D - 1) \times K(d_2, D - 1)$.

Definició 3.2.9 Sigui $BK(d_1, d_2, D)$ el digraf resultant del producte directe d'un digraf de De Bruijn amb diàmetre $D - 1$ i grau d_1 , i d'un digraf de Kautz amb diàmetre $D - 1$ i grau d_2 . És a dir, $BK(d_1, d_2, D) = B(d_1, D - 1) \times K(d_2, D - 1)$.

A la proposició que enunciem a continuació, es mostra quin és el diàmetre dels digrafs KK i BK .

Proposició 3.2.10 Els digrafs $KK(d_1, d_2, D)$ i $BK(d_1, d_2, D)$ tenen diàmetre D .

Demostració: Atès que els digrafs $K(d, D-1)$ i $B(d, D-1)$ són D -assolibles tal com es desprén, per exemple, del Corol·lari 3.2.7, el diàmetre dels digrafs $KK(d_1, d_2, D)$ i $BK(d_1, d_2, D)$ no és superior a D .

D'altra banda, si tenim present que el digraf de Kautz $K(d, D-1)$ no és $(D-1)$ -assolible (vegeu [35]), és suficient considerar un parell de vèrtexs $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V(KK(d_1, d_2, D))$ amb $v_1, v_2 \in V(K(d_1, D-1))$ i $w_1, w_2 \in V(K(d_2, D-1))$ de forma que no existeixi cap camí de llargada $D-1$ des de w_1 cap a w_2 i tals que $d(v_1, v_2) = D-1$. Llavors es té que el diàmetre ha de ser més gran que $D-1$. Anàlogament si considerem el digraf $BK(d_1, d_2, D)$. ■

És immediat, a partir de la definició del producte directe, que el digraf $KK(d_1, d_2, D)$ és regular amb grau $d_1 d_2$ i ordre

$$(d_1 d_2)^{D-1} \left(1 + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1 d_2}\right)$$

De la mateixa manera, el digraf $BK(d_1, d_2, D)$ també és regular amb grau $d_1 d_2$ i ordre

$$(d_2 d_1)^{D-1} \left(1 + \frac{1}{d_1}\right)$$

Tot utilitzant els resultats del Teorema 3.2.4, demostrarem que aquestes noves famílies de digrafs que acabem de definir tenen gran nombre de camins disjunts de llargada igual al diàmetre, i per tant en fallar alguns dels seus vèrtexs el diàmetre no augmentarà.

Teorema 3.2.11 *El digraf $KK(d_1, d_2, D)$ és un digraf $(d_1 d_2, D, s)$ amb $s = (d_1 - 1)(d_2 - 1) - 2$.*

Demostració: Atès que entre qualsevol parell de vèrtexs en $K(d, D-1)$ sempre existeixen $(d-1)$ recorreguts de llargada exactament D , el nombre de recorreguts de llargada D en el digraf $KK(d_1, d_2, D)$ és $(d_1 - 1)(d_2 - 1)$.

Suposem que hi ha dos vèrtexs iguals en aquests recorreguts, és a dir, $(v_{ia}, w_{ib}) = (v_{jc}, w_{jd})$. Demonstrarem que no pot haver-hi cap altra coincidència entre vèrtexs, i per tant, hi ha $(d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1$ recorreguts que són disjunts.

Suposem doncs que també existeix un altre vèrtex apareix repetit, és a dir, $(v_{kz}, w_{ky}) = (v_{lx}, w_{lv})$, o de forma equivalent, en els digrafs de Kautz, $v_{kz} = v_{lx}$ i $w_{ky} = w_{lv}$. Utilitzant el resultat del Teorema 3.2.4, si $l - k = j - i$ es té $a = z, b = y, c = x, d = v$. Això vol dir que totes dues coincidències apareixen en el mateix parell de recorreguts, i per tant $(d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1$ recorreguts d'entre els que estem considerant són disjunts.

Per altra part, si $l - k < j - i$ es té, també pel Teorema 3.2.4, que $x = z, v = y$, és a dir, la segona coincidència apareix dins d'un mateix recorregut. El resultat queda, per tant, demostrat. ■

De la mateixa forma, podem obtenir un resultat similar per al digraf $BK(d_1, d_2, D)$, la demostració del qual ometem, per ser del tot anàloga a la del resultat precedent.

Proposició 3.2.12 *El digraf $BK(d_1, d_2, D)$ és un digraf $(d_1 d_2, D, s)$ amb $s = d_1(d_2 - 1) - 2$.*

Utilitzant la mateixa idea del Teorema 3.2.11, aprofitant el resultat de la Proposició 3.2.3, podem obtenir un millor resultat per valors petits del diàmetre:

Proposició 3.2.13

1. Si $D \leq 4$ llavors $BK(d_1, d_2, D)$ és un digraf $(d_1 d_2, D, s)$ amb $s = d_1(d_2 - 1) - 1$.
2. Si $D \leq 4$ llavors $KK(d_1, d_2, D)$ és un digraf $(d_1 d_2, D, s)$ amb $s = (d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1$.

Definirem a continuació una nova família de digrafs que, per alguns valors del grau, també presenta un bon comportament en quant a la vulnerabilitat del diàmetre.

Definició 3.2.14 *Sigui G un digraf D -assolible. Definim $B^*G(d, D)$ com el digraf $B(d, D) \times G$.*

Alguns dels paràmetres relacionats amb aquest digraf es poden trobar a la següent proposició:

Proposició 3.2.15 *Sigui G un digraf d_1 -regular D -assolible amb n vèrtexs. El digraf $B^*G(d, D) = B(d, D) \times G$ té ordre nd^D , diàmetre D , i grau dd_1 . A més, si entre qualsevol parell de vèrtexs de G hi ha k recorreguts disjunts de llargada D , entre qualsevol parell de vèrtexs del digraf $B^*G(d, D)$ també existeixen k recorreguts disjunts de llargada D .*

Demostració: Els valors del nombre de vèrtexs, grau i diàmetre s'obtenen trivialment de la definició del producte directe. D'altra banda, atès que $B(d, D)$ és D -assolible, el nombre de recorreguts disjunts en G es conservarà en fer el producte. ■

A mode de resum, exposem a la Taula 3.1 algunes de les propietats dels digrafs estudiats en aquesta secció.

i	Digraf (G_i)	Grau (d_i)	Ordre (n_i)	$(s_i + 1)$
1	$k(d, D)$	d	$d^D + d^{D-1}$	$d - 2$
2	$B(d, D)$	d	d^D	$d - 1$
3	$K(d_1, D - 1) \times K(d_2, D - 1)$	$d_1 d_2$	$(d_1 d_2)^{D-2} (d_1 + 1)(d_2 + 1)$	$(d_1 - 1)(d_2 - 1) - 1$
4	$B(d_1, D - 1) \times K(d_2, D - 1)$	$d_1 d_2$	$(d_1 d_2)^{D-1} (1 + \frac{1}{d_2})$	$d_1(d_2 - 1) - 1$
	$B(d, D) \times G_i$	dd_i	$d^D n_i$	$s_i + 1$

Taula 3.1: Famílies de digrafs (Δ, D', s)

No és difícil comprovar que aquestes famílies de digrafs són asimptòticament òptimes en quant al nombre de vèrtexs quan el grau creix. És a dir, per a qualsevol dels digrafs definits en aquesta secció, utilitzant la fita de la Proposició 3.2.1, s'obté

$$\lim_{(d_1, d_2) \rightarrow \infty} \frac{|V(G)|}{M_{FD}(\Delta, D', s)} = 1.$$

A més, aquestes famílies omplen molts dels valors de les taules dels digrafs (Δ, D', s) més grans que es coneixen fins al dia d'avui, tal i com es mostra a l'Apèndix B.

Conclusions

En aquest treball hem estudiat alguns aspectes dels digrafs línia iterats, famílies de digrafs que han estat proposades per diversos autors com a bons models de xarxes d'interconnexió. La principal motivació per la qual es van considerar aquestes famílies va ser, en principi, la relació entre l'ordre, el grau i el diàmetre (problema (Δ, D)) que presenten aquests digrafs. Donat el seu bon comportament respecte d'aquests paràmetres, el pas següent va ser estudiar aquestes famílies sota altres punts de vista com ara la seva connectivitat o els algorismes d'encaminament. La direcció principal d'aquest estudi ha consistit en determinar la vulnerabilitat d'aquests digrafs d'una banda, i de l'altra la de construir bons algorismes de broadcasting. Sota tots dos aspectes, s'han obtingut nous resultats.

Les conclusions i possibles línies de recerca les presentem diferenciant cada una de les parts sobre les que ha tractat aquest treball.

Digrafs línia

El nou producte definit a la Secció 1.4 proporciona noves eines per estudiar diferents problemes en els digrafs línia iterats. Però no només això: permet també construir noves famílies de digrafs amb bones propietats semblants a les dels digrafs línia iterats. Aquest aspecte no l'hem considerat en aquest treball, doncs surt de l'àmbit de la tesi. Creiem en qualsevol cas que pot constituir un bon punt de partida per a futurs treballs de recerca, en especial per construir famílies de digrafs, que tot conservant les bones propietats dels digrafs línia, tinguin més alta simetria.

Algorismes de broadcasting

En el capítol referent a algorismes de broadcasting hem presentat un mètode per dissenyar algorismes en digrafs línia iterats que ha permès rebaixar les fites superiors conegudes en quant al temps per disseminar la informació. Hem analitzat a fons els casos d'inducció en LG i en L^2G , obtenint, per a alguns valors del grau, temps de broadcasting molt a prop de les fites inferiors teòriques, millorant-se d'aquesta manera la majoria dels resultats apareguts a la literatura fins al dia d'avui. No pretenem, però, haver esgotat el tema: per a un nombre més gran d'iteracions només l'hem esbossat i queden encara alguns interrogants per resoldre:

Quin és el límit real d'aquest mètode? És possible apropar-se indefinidament a la fita inferior obtinguda en la Proposició 2.4.3? Es pot arribar, utilitzant aquest mètode, a rebaixar la fita $1.5D$ en el cas de $d = 2$? Per això últim necessitariem com a mínim considerar la inducció en L^9G , per obtenir $\alpha + \frac{h}{k} = 1 + \frac{4}{9} = 1.444\dots > 1.414\dots$

És previsible que el mètode d'inducció d'algorismes de broadcasting es pugui aplicar també per a altres models, inclús per al disseny d'algorismes de broadcasting sobre hipergrafs línia dirigits ([5]). Aquesta tasca, però, no l'hem dut a terme encara.

Els principals resultats sobre broadcasting que hem descrit en aquesta tesi han estat publicats en [8], on hem rebut la menció de "Distinguished paper".

Un tema relacionat amb aquest és el dels algorismes de gossiping, problema que s'ha esmentat de passada al Capítol 0, però que no hem abordat.

En el disseny d'algorismes de gossiping a partir de protocols en digrafs més petits apareixen dificultats que no es presenten en els algorismes de broadcasting, com ara que el nombre de peces d'informació a distribuir augmenta d'un digraf al seu digraf línia. En la nostra recerca hem considerat aquest problema sense arribar, però, a resultats millors que els que es donen en aprofitar els algorismes de broadcasting presentats aquí per dissenyar protocols de gossiping (per tenir més detalls sobre aquest aspecte ens remetem a [22] i a [32]). Queda per tant oberta una possible línia de recerca.

Vulnerabilitat

Pel que fa a la vulnerabilitat de l'encaminament en digrafs línia iterats, hem presentat fites superiors per al diàmetre del digraf de supervivència que són òptimes o quasi-òptimes en cas que es tracti de digrafs sense llaços ($D(R(G, \rho)/F) \leq 3$). Un resultat similar, que inclou els digrafs amb llaços, l'hem publicat a [45]. Hem preferit mostrar aquí una demostració més simple, utilitzant un encaminament força semblant, que tot i que requereix condicions més restrictives, permet en alguns casos, tot utilitzant les mateixes idees, obtenir fites millors ($D(R(G, \rho)/F) \leq 2$). Queda pendent la generalització d'aquestes demostracions al cas de digrafs amb llaços, que de moment encara no hem fet.

El problema de vulnerabilitat del diàmetre en digrafs línia iterats continua essent un problema obert. Sembla, però, que no és possible obtenir un resultat general sense imposar condicions en el digraf sobre el qual s'aplica la tècnica del digraf línia. En aquest treball hem descrit tres noves famílies de digrafs línia que resulten ser asimptòticament òptimes en aquest aspecte quan el grau creix. Aquesta part de la tesi ha estat publicada a [42].

Apèndix A

Taules referents als algorismes de broadcasting

Millors resultats per als digrafs de De Bruijn

d	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fita anterior	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5
Cas no dirigit	1.5	2	2.5	2.8	3	3.28	3.5	3.67	3.8
Nou resultat	1.5	2	2.33	2.5	2.75	3	3.25	3.33	3.5
Fita inferior	1.44	1.80	2.11	2.38	2.62	2.82	3.01	3.17	3.32

Taula A.1: valors de c_d per a $B(d, D)$

Taules corresponents al Lema 2.3.12

	$\leq t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$	$t+7$
0			8,9	0,1,2,4	3,5,6,7
1	3,5	8	6	0	1,2,4,7,9
2	6	9	5	0	1,2,3,4,7,8
3	7	0	3	1,2,4	5,6,8,9
4		8	6	0	1,2,3,4,5,7,9
5		9	5	0,2,3,4	1,6,7,8
6		0	3	1,2,4,7	5,6,8,9
7		7	5,6	0,4	1,2,3,8,9
8			0,9	1,2,4,7	3,5,6,8
9			0,8	1,2,4,7	3,5,6,9

Taula A.2: $10 \in D_3$

	$\leq t+3$	$t+4$	$t+5$	$t+6$	$t+7$
0	1,2,4	8	9	10	0,3,5,6,7
1	3,5	9	10	0,8	1,2,4,6,7
2	6	10	8	0,9	1,2,3,4,5,7
3	7	8	10	0,1,2	3,4,5,6,9
4		9	8	0,1,2	3,4,5,6,7,10
5		10	9	0,1,2	3,4,5,6,7,8
6		7	3,1	0,4,5	2,6,8,9,10
7		6	4,2	0,3,5	1,7,8,9,10
8			3,5	2,4,6,7	0,1,8,9,10
9			4,6	1,3,5,7	0,2,8,9,10
10			5,7	1,2,4,6	0,3,8,9,10

Taula A.3: $11 \in E_3$

Taula A.4: $44 \in D_5$.

arc	$\leq t+5$	$t+6$	$t+7$	$t+8$	$t+9$	$t+10$	$t+11$
0						32	43*
1	3,5,9,17	26	15	37	0	16	38*
2	6,10,18	27	12	38	21	0	38*
3	7,11,19	34	17	13-15	22-27	12	S,28-33
4	12,20	28	41	39	22	0	38*
5	13,21	35	18	14-17	23-28	12	S,29-34
6	14,22	36	19	15-18	24-29	12	S,30-35
7	15,23	37	20	17-19	25-30	12	S,31-36
8	24	33	13	40	23	0	38*
9	25	39	21	18-20	26-31	12	S,32-37
10	26	40	22	19-21	27-32	12	S,33-38
11	27	41	23	20-22	28-33	12	S,34-39
12	28	42	24	21-23	29-34	12	S,35-40
13	29	43	25	22-24	30-35	12	S,36-41
14	30	29	26	23-25	31-36	12	S,37-41,17
15	31	30	27	24-26	32-37	12	S,38-42,5
16		31	14	33	24	0	39*
17		32	28	25-27	33-38	12	S,39-3
18		31	29	26-28	34-39	13	S,40-6
19		32	30	27-29	35-40	13	S,41-7
20		33	31	28-30	36-41	13	S,42-9
21		34	32	29-31	37-42	13	S,43-10
22		35	33	30-32	38-43	13	S,3-11
23		36	34	31-33	39-3	13	S,5-12
24		37	35	32-34	40-5	13	S,6-13
25		38	36	33-35	41-6	13	S,7-14
26		39	37,17	34-36	42-7	13	S,9-15
27		40	38,18	35-37	43-9	13	S,10-17
28		41	39,19	36-38	3-10	13	S,11-18
29		42	40,20	37-39	5-11	13	S,12-19
30		43	41,21	38-40	6-12	13	S,13-20
31		38	42,22	39-41	7-13	13	S,14-21
32			43,23	40-42	9-14	13	S,15-22
33			3,24	41-43	10-15,25	13	S,17-23
34			5,25	42-3	11-17,26	13	S,18-24
35			6,42	43-5	12-18,27	13	S,19-25
36			7,43	3-6	13-19,28	13	S,20-25,9
37			9,3	5-7	14-20,29	13	S,21-26,10
38			10,5	6-9	15-21,30	13	S,22-27,11
39			11,6	7-10	17-22,31	13	S,23-28,12
40			12,7	9-11	18-23,32	13	S,24-29,13
41			13,9	10-12,34	18-24	13	S,25-30,14
42			14,10	11-13,35	19-25	13	S,26-31,15
43			15,11	12-14,36	20-26	13	S,27-32,17

$S = \{0, 1, 2, 4, 8, 16\}$. En els intervals $a-b$ s'exclouen els elements de S i s'han d'entendre cíclics mod 44. Per exemple 41-5 representa el conjunt $\{41, 42, 43, 3, 5\}$. * representa la resta d'arcs. En petit apareix el nombre de cops que cada arc ha rebut la informació fins a aquella unitat de temps.

Taula A.5: $45 \in E_5$

arc	$\leq t+5$	$t+6$	$t+7$	$t+8$	$t+9$	$t+10$	$t+11$
0	1,2,4,8,16	26	6	10	5	9	44 *
1	3,5,9,17	1 27	1 28	2 29,30	5 31-35	11 36-1,0	22 *
2	6,10,18	1 28	1 29	2 30,31	5 32-36	11 37-2,0	22 *
3	7,11,19	1 29	1 30	2 31,32	5 33-37	11 38-3,0	22 *
4	12,20	1 30	1 31	2 32,33	5 34-38	12 39-4,0,5	22 *
5	13,21	1 31	1 32	2 33,34	5 35-39	12 40-5,0,8	23 *
6	14,22	1 32	1 33	3 34,35,11	5 36-40	11 41-6,0	22 *
7	15,23	1 33	1 34	3 35,36,12	5 37-41	11 42-7,0	22 *
8	24	1 34	1 35	3 36,37,13	5 38-42	12 43-8,0,16	23 *
9	25	1 35	1 36	3 37,38,14	5 39-43	12 44-9,0,17	23 *
10	26	1 36	1 37	3 38,39,15	5 40-44,4	11 1-10,0	22 *
11	27	1 37	1 38	3 39,40,16	6 41-1,8	11 2-11,0	22 *
12	28	1 38	1 39	3 40,41,17	6 42-2,9	11 3-12,0	22 *
13	29	1 39	1 40	3 41,42,18	6 43-3,16	11 4-13,0	22 *
14	30	1 40	1 41	3 42,43,19	6 44-4,17	11 5-14,0	22 *
15	31	1 41	1 42	3 43,44,20	6 1-5,18	11 6-15,0	22 *
16		1 42	1 43	3 44,1,21	6 2-6,19	12 7-16,0,26	23 *
17		1 43	1 44	3 1,2,22	6 3-7,20	12 8-17,0,27	23 *
18		1 44	1 1	3 2,3,23	6 4-8,21	12 9-18,0,28	22 *
19		1 32	1 2	3 3,4,24	6 5-9,22	12 10-19,0,29	22 *
20		1 33	1 3	3 4,5,25	6 6-10,23	12 11-20,0,30	22 *
21		1 34	1 4	3 5,6,26	6 7-11,24	12 12-21,0,31	22 *
22		1 35	1 5	3 6,7,27	6 8-12,25	12 13-22,0,32	22 *
23		1 36	1 6	3 7,8,28	6 9-13,32	12 14-23,0,33	22 *
24		1 37	1 7	3 8,9,29	6 10-14,33	12 15-24,0,34	22 *
25		1 38	1 8	3 9,10,30	6 11-15,34	12 16-25,0,35	22 *
26		1 39	2 9,7	3 10,11,31	6 12-16,35	11 17-26,0	22 *
27		1 40	2 10,8	3 11,12,32	6 13-17,36	11 18-27,0	22 *
28		1 41	2 11,9	3 12,13,33	6 14-18,37	11 19-28,0	22 *
29		1 42	2 12,10	3 13,14,34	6 15-19,38	11 20-29,0	22 *
30		1 43	2 13,11	3 14,15,35	6 16-20,39	11 21-30,0	22 *
31		1 44	2 14,12	3 15,16,36	6 17-21,40	11 22-31,0	22 *
32			2 15,13	3 16,17,37	6 18-22,41	12 23-32,0,2	23 *
33			2 16,14	3 17,18,38	6 19-23,42	12 24-33,0,3	23 *
34			2 17,15	3 18,19,39	6 20-24,43	12 25-34,0,6	23 *
35			2 18,16	3 19,20,40	6 21-25,44	12 26-35,0,7	23 *
36			2 19,17	3 20,21,41	6 22-26,1	12 27-36,0,10	22 *
37			2 20,18	3 21,22,42	6 23-27,2	12 28-37,0,11	22 *
38			2 21,19	3 22,23,43	6 24-28,3	12 29-38,0,12	22 *
39			2 22,20	3 23,24,44	6 25-29,4	12 30-39,0,13	22 *
40			2 23,21	3 24,25,1	6 26-30,5	12 31-40,0,14	22 *
41			2 24,22	3 25,26,2	6 27-31,6	12 32-41,0,15	22 *
42			2 25,23	3 26,27,3	6 28-32,7	12 33-42,0,43	22 *
43			2 26,24	3 27,28,4	6 29-33,8	12 34-43,0,44	23 *
44			2 27,25	3 28,29,5	6 30-34,9	12 35-44,0,1	23 *

En els intervals $a-b$ s'exclou el zero i s'han d'entendre cíclics mod 45. * representa la resta d'arcs. En petit apareix el nombre de cops que cada arc ha rebut la informació fins a aquella unitat de temps.

Taula corresponent a la Proposició 2.3.15

v.tipus	a.ent.	$\leq t$	$t+1$	$t+2$	$t+3$	$t+4$	$t+5$
0	0		1	2	4	0	3
	1			3	4	0	1,2
	2				2	0,1	3,4
	3				3	0,4	1,2
	4					0,1	2,3,4
1	0						0,1,2,3,4*
	1			3	4	0	1,2
	2				2	0,1	3,4
	3				3	0,4	1,2
	4	0	1	2	4	3	
2	0						0,1,2,3,4*
	1			3	4	0	1,2
	2				2	0,1	3,4
	3	0,4	1	2	3		
	4					0,4	1,2,3
3	0						0,1,2,3,4*
	1			3	4	0	1,2
	2	0,4,3	1	2			
	3				2	0,1	3,4
	4					0,4	1,2,3
4	0						0,1,2,3,4*
	1	0,4,3,2	1				
	2				2	0,4	1,3
	3				3	0,1	2,4
	4					0,4*	1,2,3

Taula A.6: Demostració de la Proposició 2.3.15

Apèndix B

Digrafs (Δ, D', s) més grans (setembre 1996)

Símbols y notacions utilitzats a les taules d'aquest apèndix:

FD	Digraf bipartit FD , [24].
II	Digraf de Imase-Itoh, [34].
K	Digraf de Kautz $K(d, D)$, Corol·lari 3.2.7.
B	Digraf de De Bruijn $B(d, D)$, Corol·lari 3.2.7.
BK	$B(d, D - 1) \times K(d', D - 1)$, Proposició 3.2.12.
KK	$K(d, D - 1) \times K(d', D - 1)$, Teorema 3.2.11.
B^*B	$B(d, D) \times B(d', D - 1)$, Proposició 3.2.15.
B^*K	$B(d, D) \times K(d', D - 1)$, Proposició 3.2.15.
B^*BK	$B(d, D) \times B(d', D - 1) \times K(d'', D - 1)$, Proposició 3.2.15.
B^*KK	$B(d, D) \times K(d', D - 1) \times K(d'', D - 1)$, Proposició 3.2.15.

El nombre que apareix a les taules sota cada digraf correspon a l'expressió $\frac{n}{\Delta^D / (s+1)}$, on n és l'ordre del digraf en cada cas. Fixem-nos que com més gran sigui aquest valor, el digraf està més a prop de la fita superior. Aquest valor pot ser més gran que la unitat, en especial per valors petits del grau.

Digrafs (Δ, D', s) més grans amb $D' = 3$

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ										
2	$\frac{II}{1,50}$									
3	$\frac{K}{0,89}$	$\frac{II}{1,33}$								
4	$\frac{II}{1,25}$	$\frac{K}{0,94}$	$\frac{II}{1,25}$							
5			$\frac{K}{0,96}$	$\frac{II}{1,20}$						
6	$\frac{II}{1,16}$	$\frac{II}{1,16}$	$\frac{BK}{0,89}$	$\frac{K}{0,97}$	$\frac{II}{1,16}$					
7					$\frac{K}{0,98}$	$\frac{II}{1,14}$				
8	$\frac{II}{1,12}$	$\frac{B^*K}{0,94}$	$\frac{II}{1,12}$		$\frac{BK}{0,94}$	$\frac{K}{0,98}$	$\frac{II}{1,12}$			
9	$\frac{B^*K}{0,89}$	$\frac{II}{1,11}$	$\frac{KK}{0,79}$		$\frac{BK}{0,89}$		$\frac{K}{0,99}$	$\frac{II}{1,11}$		
10	$\frac{II}{1,10}$		$\frac{B^*K}{0,96}$	$\frac{II}{1,10}$			$\frac{BK}{0,96}$	$\frac{K}{0,99}$	$\frac{II}{1,10}$	
11									$\frac{K}{0,99}$	$\frac{II}{1,10}$
12	$\frac{II}{1,08}$	$\frac{II}{1,08}$	$\frac{II}{1,08}$	$\frac{B^*K}{0,97}$	$\frac{II}{1,08}$		$\frac{BK}{0,89}$	$\frac{BK}{0,94}$	$\frac{BK}{0,97}$	$\frac{K}{0,99}$
13										
14	$\frac{II}{1,07}$				$\frac{B^*K}{0,98}$	$\frac{II}{1,07}$				
15	$\frac{B^*K}{0,89}$	$\frac{II}{1,07}$	$\frac{B^*K}{0,96}$	$\frac{II}{1,07}$			$\frac{KK}{0,85}$		$\frac{BK}{0,89}$	
16	$\frac{II}{1,06}$	$\frac{B^*K}{0,94}$	$\frac{II}{1,06}$		$\frac{B^*BK}{0,94}$	$\frac{B^*K}{0,98}$	$\frac{II}{1,06}$	$\frac{KK}{0,88}$		
17										
18	$\frac{II}{1,06}$	$\frac{II}{1,06}$	$\frac{B^*KK}{0,79}$	$\frac{B^*K}{0,97}$	$\frac{II}{1,06}$		$\frac{B^*K}{0,99}$	$\frac{II}{1,06}$	$\frac{KK}{0,86}$	
19										
20	$\frac{II}{1,05}$	$\frac{B^*K}{0,94}$	$\frac{II}{1,05}$	$\frac{II}{1,05}$			$\frac{B^*BK}{0,96}$	$\frac{B^*K}{0,9}$	$\frac{II}{1,05}$	

Digrafs (Δ, D', s) més grans amb $D' = 4$

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ										
2	$FD_{1,5}$									
3	$K_{0,89}$	$FD_{0,88}$								
4	$BK_{0,75}$	$K_{0,94}$	$FD_{0,62}$							
5			$K_{0,96}$	$FD_{0,48}$						
6	$B*K_{0,89}$	$BK_{0,75}$	$BK_{0,89}$	$K_{0,97}$	$FD_{0,40}$					
7					$K_{0,98}$	$FD_{0,33}$				
8	$B*BK_{0,75}$	$B*K_{0,94}$	$BK_{0,75}$		$BK_{0,94}$	$K_{0,98}$	$FD_{0,29}$			
9	$B*K_{0,89}$		$KK_{0,79}$		$BK_{0,89}$		$K_{0,99}$	$FD_{0,24}$		
10			$B*K_{0,96}$	$BK_{0,75}$			$BK_{0,96}$	$K_{0,99}$	$FD_{0,22}$	
11									$K_{0,99}$	$FD_{0,20}$
12	$B*K_{0,89}$	$B*K_{0,94}$	$B*BK_{0,89}$	$B*K_{0,97}$	$KK_{0,83}$		$BK_{0,89}$	$BK_{0,94}$	$BK_{0,97}$	$K_{0,99}$
13										
14					$B*K_{0,98}$	$BK_{0,75}$				
15	$B*K_{0,89}$		$B*K_{0,96}$				$KK_{0,85}$		$BK_{0,89}$	
16	$B*BK_{0,75}$	$B*K_{0,94}$	$B*BK_{0,75}$		$B*BK_{0,94}$	$B*K_{0,98}$	$BK_{0,75}$	$KK_{0,88}$		
17										
18	$B*K_{0,89}$	$B*BK_{0,75}$	$B*KK_{0,79}$	$B*K_{0,97}$	$B*BK_{0,89}$		$B*K_{0,99}$	$BK_{0,75}$	$KK_{0,86}$	
19										
20	$B*BK_{0,75}$	$B*K_{0,94}$	$B*K_{0,96}$	$B*BK_{0,75}$			$B*BK_{0,96}$	$B*K_{0,9}$	$BK_{0,75}$	

Digrafs (Δ, D', s) més grans amb $D' > 4$

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Δ										
2										
3	$B_{0,67}$									
4	$K_{0,63}$	$B_{0,75}$								
5		$K_{0,72}$	$B_{0,80}$							
6	$B^*B_{0,67}$	$BK_{0,67}$	$K_{0,78}$	$B_{0,83}$						
7				$K_{0,82}$	$B_{0,86}$					
8	$B^*K_{0,63}$	$B^*B_{0,75}$		$BK_{0,78}$	$K_{0,84}$	$B_{0,88}$				
9	$B^*B_{0,67}$	$KK_{0,59}$		$BK_{0,74}$		$K_{0,86}$	$B_{0,89}$			
10		$B^*K_{0,72}$	$B^*B_{0,80}$			$BK_{0,84}$	$K_{0,88}$	$B_{0,90}$		
11								$K_{0,89}$	$B_{0,91}$	
12	$B^*B_{0,67}$	$B^*B_{0,75}$	$B^*K_{0,78}$	$B^*B_{0,83}$		$BK_{0,78}$	$BK_{0,83}$	$BK_{0,87}$	$K_{0,90}$	$B_{0,92}$
13										$K_{0,91}$
14				$B^*K_{0,82}$	$B^*B_{0,86}$					$BK_{0,90}$
15	$B^*B_{0,67}$	$B^*K_{0,72}$	$B^*B_{0,80}$			$KK_{0,75}$		$BK_{0,80}$		$BK_{0,88}$
16	$B^*K_{0,63}$	$B^*B_{0,75}$		$B^*BK_{0,80}$	$B^*K_{0,84}$	$B^*B_{0,88}$	$KK_{0,78}$			$BK_{0,86}$
17										
18	$B^*B_{0,67}$	$B^*BK_{0,67}$	$B^*K_{0,78}$	$B^*B_{0,83}$		$B^*K_{0,86}$	$B^*B_{0,89}$	$KK_{0,77}$		$BK_{0,81}$
19										
20	$B^*K_{0,63}$	$B^*B_{0,75}$	$B^*B_{0,80}$			$B^*BK_{0,84}$	$B^*K_{0,88}$	$B^*B_{0,90}$		$KK_{0,83}$

Bibliografia

- [1] J. Baylina. Algorismes de broadcasting en digrafs línia iterats. PFC, ETSETB, Universitat Politècnica de Catalunya, 1996. (Sense finalitzar).
- [2] L. W. Beinecke and R. J. Wilson. *Selected topics in graph theory I*. Academic Press, London, 1978.
- [3] J.-C. Bermond, E. Darrot, O. Delmas, and S. Perennes. Hamilton circuits in butterfly networks. Technical report, C.N.R.S.-U.R.A, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1995.
- [4] J.-C. Bermond, C. Delorme, and J. J. Quisquater. Strategies for interconnection networks: Some methods from graph theory. *Graphs and Combinatorics*, 5:107–123, 1989.
- [5] J.-C. Bermond and F. Ö. Ergincan. Directed line hypergraphs. In preparation.
- [6] J.-C. Bermond, P. Hell, A. L. Liestman, and J. Peters. Broadcasting in bounded degree graphs. *SIAM Journal on Discrete Math.*, 5(1):10–24, 1992.
- [7] J.-C. Bermond, N. Homobono, and C. Peyrat. Large fault-tolerant interconnection networks. *Graphs and Combinatorics*, 5:107–123, 1989.
- [8] J.-C. Bermond, X. Muñoz, and A. Marchetti-Spaccamela. Induced broadcasting algorithms in iterated line digraphs. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 1123, pages 313–324. EURO-PAR'96, Springer Verlag, 1996. Classificat com a “distinguished paper”.

- [9] J.-C. Bermond and S. Perennes. Efficient broadcast protocols on the De Bruijn and similar networks. In *Proceedings of SIROCCO'95*, Olympia, 1995.
- [10] J.-C. Bermond and C. Peyrat. Broadcasting in De Bruijn networks. In *Proc. of the 19th E-E Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, pages 283–292, Florida, 1988.
- [11] W. G. Bridges and S. Toueg. On the impossibility of directed Moore graphs. *J. Comb. Theory B*, 29:339–341, 1980.
- [12] C. Catlett and L. Smarr. Metacomputing. In *Communications of the ACM*, volume 35(6), pages 44–52, 1992.
- [13] G. Chartrand and L. Lesniak. *Graphs & Digraphs*. Wadsworth & Brooks, Monterrey, 1986.
- [14] F. R. K. Chung, E. G. Coffman, M. I. Reiman, and B. Simon. On the capacity and forwarding index of communication networks. *IEEE Trans. on Information Theory*, 33:224–232, 1987.
- [15] N. G. de Bruijn. A combinatorial problem. *Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen Proc.*, Ser. A49:758–764, 1946.
- [16] D. Dolev, J. Halpern, B. Simons, and H. Strong. A new look at fault tolerant network routing. *Information and Computation*, 72:180–196, 1987.
- [17] D.-Z. Du, Y.-D. Lyuu, and D. Hsu. Line digraph iterations and connectivity analysis of De Bruijn and Kautz graphs. *IEEE Trans. on Comp.*, 42:612–616, 1993.
- [18] M. Escudero, J. Fàbrega, M. A. Fiol, and N. Homobono. On surviving route graphs of iterated line digraphs. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 1:451–466, 1988.
- [19] J. Fàbrega and M. A. Fiol. Maximally connected digraphs. *J. Graph Theory*, 13:657–668, 1989.
- [20] M. A. Fiol, J. Fàbrega, and M. Escudero. Short paths and connectivity in graphs and digraphs. *Ars Combinatoria*, 29B:17–31, 1990.

- [21] M. A. Fiol, J. L. A. Yebra, and I. Alegre. Line digraph interations and the (d, k) problem. *IEEE Trans. on Comp.*, 33:400–403, 1984.
- [22] P. Fraignaud and E. Lazard. Methods and problems of communication in usual networks. *Discrete Appl. Math.*, 53:79–133, 1994.
- [23] D. Geller and F. Harary. Connectivity in digraphs. *Lecture Notes in Mathematics*, 186:400–403, 1970.
- [24] J. Gómez, P. Morillo, and C. Padró. Large (d, D, D', s) -bipartite digraphs. *Discrete Mathematics*, 59:103–114, 1995.
- [25] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley, 1969.
- [26] F. Harray and R. Z. Norman. Some properties of line digraphs. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, (2)9:161–168, 1960.
- [27] M.-C. Heydemann, J. C. Meyer, and D. Sotteau. On forwarding indices of networks. *Disc. Appl. Math*, 23:103–123, 1989.
- [28] M.-C. Heydemann, J. Opatrny, and D. Sotteau. Broadcasting and spanning trees in De Bruijn and Kautz networks. *Discrete Appl. Math.*, 37–38:297–317, 1992.
- [29] W. D. Hillis. The connection machine. In *ACM Distinguished dissertation*. MIT Cambridge Press, 1987.
- [30] M. G. Hluchyj and M. J. Karol. Shufflenet: an application of generalized perfect shuffles to multihop lightwave networks. In *INFOCOM'88*, pages 379–380, 1988.
- [31] N. Homobono and C. Peyrat. Fault tolerant routings in Kautz and De Bruijn networks. *Disc. Appl. Math.*, 24:179–186, 1989.
- [32] J. Hromkovic, R. Klasing, B. Monien, and R. Peine. Dissemination of information in interconnection networks (broadcasting and gossiping). In D.-Z. Du and D. F. Hsu, editors, *Combinatorial Network Theory*. Kluwer Academic Publ., 1996.
- [33] M. Imase and M. Itoh. A design for directed graphs with minimum diameter. *IEEE Trans. on Comp.*, C-32:782–784, 1983.

- [34] M. Imase, T. Soneoka, and K. Okada. Fault-tolerant processor interconnection networks. *Systems and Computers in Japan*, 17(8):21–30, 1986.
- [35] W. H. Kautz. Design of optimal interconnection networks for multiprocessors. *Architecture and design of digital computers*, NATO advanced summer institute:249–272, 1969.
- [36] R. Klasing, B. Monien, R. Peine, and E. Stöhr. Broadcasting in butterfly and De Bruijn networks. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 577, pages 351–362. STACS'92, Springer Verlag, 1992.
- [37] F. T. Leighton. *Parallel Algorithms and Architectures*. Morgan and Kaufmann, 1992.
- [38] W. F. McColl. Universal computing. In *Lecture Notes in Computer Science*, volume 1123, pages 25–36. EURO-PAR'96, Springer Verlag, 1996. Invited Talk.
- [39] P. Morillo, M. A. Fiol, and J. Guitart. On the (d, d, d', s) -digraph problem. In *A.A.E.C.C. Lecture Notes in Computer Science*, volume 356, pages 334–340. Springer Verlag, 1989.
- [40] X. Muñoz. Estudio de la vulnerabilidad del encaminamiento y los índices de transmisión en grafos definidos por secuencias. PFC, ETSETB, Universitat Politècnica de Catalunya, 1992.
- [41] X. Muñoz and J. Fàbrega. Diameter of the surviving route digraph in ℓ -geodetic digraphs and graphs. In *14th British Combinatorial Conference*, Keele, 1993.
- [42] X. Muñoz and J. Gómez. Asymptotically optimal (Δ, D', s) -digraphs. *Ars Combinatoria*, 1996. To appear.
- [43] C. Padró and P. Morillo. Diameter vulnerability of iterated line digraphs. *Discrete Math.*, 149/1–3:189–204, 1996.
- [44] C. Padró, P. Morillo, and M. A. Fiol. Comments on “Line digraph iterations and connectivity analysis of De Bruijn and Kautz graphs”. *IEEE Trans. on Comp.*, 45(6):768, 1996.

- [45] C. Padró, P. Morillo, and X. Muñoz. Fault-tolerant fixed routings in some families digraphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 1996. To appear.
- [46] D. Peleg and E. Upfal. A trade-off between space and efficiency for routing tables. *Journal of the ACM*, 36(3):510–530, 1989.
- [47] J. Petersen. Die theorie der regulären graph. *Acta Math.*, 15:193–220, 1891.
- [48] S. Poljak, A. Pultr, and V. Rodl. On the dimension of Kneser graphs. In *Algebraic methods in graph theory*, pages 631–646. Szeged, 1978.
- [49] C. E. Praeger. Highly arc transitive digraphs. *Europ. J. Combinatorics*, 10:281–292, 1989.
- [50] S. M. Reddy, D. K. Pradhan, and J. G. Kuhl. Directed graphs with minimum diameter and maximum node connectivity. Technical report, School of Engineering Oakland Univ., 1980.
- [51] E. Stöhr. An upper bound for the broadcasting in butterfly network. Manuscript.
- [52] P. Tvrdik, M.-C. Heydemann, and R. Harbane. Uniform homomorphisms of De Bruijn and Kautz networks. Technical Report 986, LRI, Université de Paris-Sud, 1995.
- [53] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.*, 54:150–168, 1932.
- [54] J. Yebra. Largest invulnerable graphs. Preprint.
- [55] J. Yebra, V. Rayward-Smith, and A. Revitt. The $(\Delta, d, d', \Delta - 1)$ -problem with applications to computer networks. *Annals of Operations Research*, 33:113–124, 1991.



