

conectada al bus j_{N+1} , y esto se cumplirá si y sólo si, de estas $m-1$ memorias, al menos $m-1 - (N-1) = m-N$ están conectadas a dicho bus. Por tanto la condición es $d(j_{N+1}) \geq m - N + 1$, pero en el grafo original $N = d(i) - 1$, de donde:

$$d(j_{N+1}) + d(i) \geq m + 2 \quad (5.18)$$

Resumiendo, en términos de teoría de grafos nos queda:

Lema 5.4.1:

Sea H un bigrafo 1-centroconexo. Si existe la línea $ij \in E(H)$ con vértices terminales $i \in U$ y $j \in V$ tales que

$$d(i) + d(j) \geq |U| + 2 \quad (5.19a)$$

entonces el grafo $H - ij$ es 1-centroconexo.

O, ya que la línea eliminada contribuye en una unidad al grado de i y al de j , podríamos enunciar:

$\tilde{H} = H - ij$ es 1-centroconexo si

$$d_{\tilde{H}}(i) + d_{\tilde{H}}(j) \geq |U| \quad (5.19b)$$

Notar que, si $d(j) = m - n + 1 = |U| - n + 1$, y considerando que $d(i) \leq n$, resulta: $d(i) + d(j) \leq |U| + 1$, es decir, no es posible eliminar la línea ij , lo cual ya sabíamos por aplicación de la condición (5.8).

Este algoritmo demuestra ser particularmente útil para trabajar con matrices de adyacencia tales como las introducidas en el apartado 5.2.2. Veamos un ejemplo con $m=6$ y $n=4$:

Partimos de una matriz $H^0 = (h_{ij})$ con $h_{i,j} = 1 \quad \forall i,j$ (que representa el grafo completo $K_{6,4}$) (ver pág. siguiente). ¿Podemos eliminar p.e. la línea (1,1), es decir, hacer $h_{11} = 0$? Sí, porque sumando todos los 1's que quedan en la 1ª fila y 1ª columna obtenemos un total de $8 \geq 6$ (se cumple (5.2b)). Llegamos así a la matriz

que denotamos por H^1 . En ella podemos hacer $h_{12} = 0$ pues $\sum_{j \neq 2} h_{1j} + \sum_{i \neq 1} h_{i2} = 7 \geq 6$, obteniendo H^2 . Análogamente, de H^2 es posible pasar a H^3 , y así sucesivamente.

$$H^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.5 GENERALIZACION DEL PROBLEMA

En las secciones anteriores hemos podido comprobar la estrecha relación existente entre los grafos bipartitos 1-centroconexos y los tripartitos 2-centroconexos. Veremos ahora como las ideas anteriores son de inmediata generalización al estudio de los grafos $(r+1)$ -partitos r -centroconexos.

Consideremos el grafo $(r+1)$ -partito, $G(X,E)$, con conjuntos de vértices V, U_1, U_2, \dots, U_r , y cuyas líneas son todas de la forma (i^k, j) con $i^k \in U_k, k=1,2, \dots, r$, y $j \in V$. (Si nos atenemos al "interconexión" entre conjuntos de vértices, G tiene una estructura en estrella de r puntas). Análogamente, suponemos $|U_k| \geq |V| = n$.

Como vemos, la situación es análoga a las anteriores, sólo que, en este caso, cada vértice $j \in V$ puede considerarse como un elemento de enlace entre los vértices de los conjuntos U_k .

Así, decimos ahora que G es r -centroconexo si, dadas n r -plas cualesquiera, $\xi_1 = (i_1^1, i_1^2, \dots, i_1^r)$, $\xi_2 = (i_2^1, i_2^2, \dots, i_2^r)$, ..., $\xi_n = (i_n^1, i_n^2, \dots, i_n^r)$ con todos los vértices $i_h^k \in U_k$, $h=1,2,\dots,n$, distintos entre sí, es posible asignar a cada una de ellas un vértice distinto de V , $j_k - \xi_k$, de manera que $j_k i_h^k \in E \quad \forall k$ y $\forall h$.

De la misma forma que, en la sección 5.3, hemos establecido una correspondencia entre el grafo tripartito $G(U,V,W,E)$ y el grafo bipartito $H_G(U \times W, V, E)$; ahora podríamos hacer lo propio con el grafo r -partito $G(U_1, U_2, \dots, U_r, V, E)$ y el bigrafo $H_G(U_1 \times U_2 \times \dots \times U_r, V, E)$. A partir de esta correspondencia, es inmediato caracterizar, mediante el teorema análogo al teor. 5.3.1, a los grafos $(r+1)$ -partitos r -centroconexos.

Por otra parte, y como era de esperar, el "ahorro" de líneas de un grafo $(r+1)$ -partito r -centroconexo mínimo respecto al grafo "completo" de tamaño $|V|(|U_1| + |U_2| + \dots + |U_r|)$, es el mismo que en los grafos 2- y 3-partitos, es decir,

$$|V|(|V| - 1) \quad (5.20)$$

Esto es una consecuencia directa de la generalización del teorema 5.3.2bis.

Teorema 5.5.1:

Sea $G = G(U, V, E)$, $U = \bigcup_{k=1}^r U_k$, $|U_k| \geq |V| = n \quad \forall k$, un grafo $(r+1)$ -partito r -centroconexo. Entonces

$$\bar{d}(j) < n \quad \forall j \in V \quad (5.21)$$

Demostración:

La demostración se basa sobre la misma idea usada en probar el teorema 5.3.2bis, por lo que nos limitaremos a un caso particular.

Si, por ejemplo, $r=4$ y $n=7$, en la figura 5.5.1 se muestra como, de no cumplirse (5.21), es fácil escoger un conjunto de

$|V| = 7$ 4-plas a ninguna de las cuales puede asignársele, de la forma indicada, el vértice j . En efecto, para formar cada una de ellas, elegimos un vértice (no escogido anteriormente) de cada uno de los conjuntos U_i^1, U_i^2, U_i^3 y U_i^4 , y esto hasta agotar todos los vértices de dichos conjuntos y para cada valor de $i = 1, 2, 3, 4$; lo que da el total deseado.

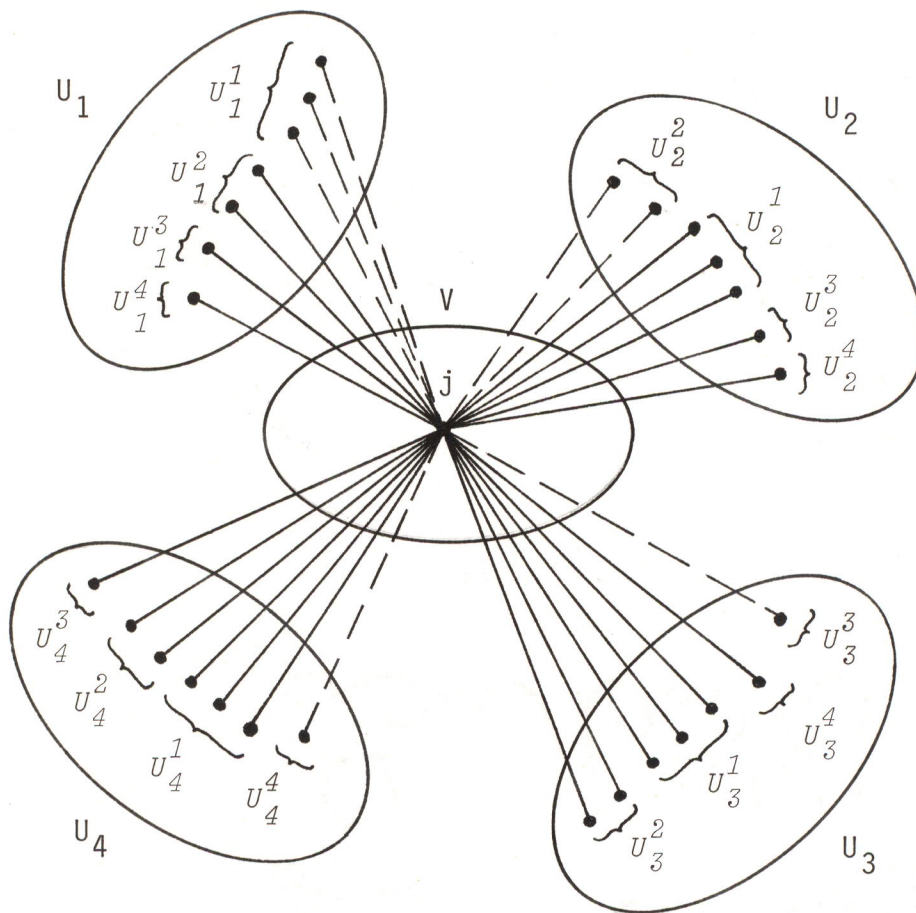


Fig. 5.5.1

APENDICE A

Queremos demostrar que, dada la matriz $M = \begin{pmatrix} \vec{m}_1 \\ \vec{m}_2 \end{pmatrix}$ con $N = \det(M) \neq 0$, existe un conjunto de N puntos o vectores $\vec{r}_1 = (r_{11}, r_{12}), \dots, \vec{r}_N = (r_{N1}, r_{N2})$ con $r_{i1}, r_{i2} \geq 0$ y distancia ortogonal al origen $d(\vec{0}, \vec{r}_i) = r_{i1} + r_{i2}$ mínima $\forall i = 1, \dots, N$, de manera que el lugar geométrico

$$C_{\vec{0}} = \{N \text{ cuadrados unitarios con centros } \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N\} \quad (\text{A.1})$$

tiene forma de "L". Como hemos dicho en el apartado 3.4.2, una "L" queda determinada por sus dimensiones l, h, x, y según la figura 3.4.1. Si x y/o y son cero, la "L" degenera en un rectángulo.

Así, y de forma más intuitiva, el problema consiste en, a partir del cuadrado unitario $(0,0)$, demostrar que es posible elegir N cuadrados unitarios con centros distintos módulo M , situados en el primer cuadrante, y lo "más cerca posible" del origen, de manera que la figura obtenida sea una "L" o, como caso particular, un rectángulo.

Según lo anterior, y si denotamos por T_λ el conjunto de puntos situados a distancia⁽¹⁾ λ del $\vec{0}$, o sea:

$$T = \{(m,n) \mid d(\vec{0}, (m,n)) = m+n = \lambda, \quad m,n \geq 0\} \quad (\text{A.2})$$

para construir nuestra "L" deberemos tomar sucesivamente todos los

(1) En todo caso se entenderá "distancia ortogonal" de valor no negativo, pues si $\vec{u}, \vec{v} \in Z^2$ son tales que $d(\vec{u}, \vec{v}) < 0$, \vec{v} no es "alcanzable" desde \vec{u} (bien entendido que hablamos de vectores y no de las clases residuales a las que representan).

puntos de los conjuntos $T_0 = \{\vec{0}\}$, T_1 , T_2, \dots hasta que se produzcan "repeticiones", es decir hasta que aparezca algún punto \vec{v} congruente mod. M con otro \vec{v}' tomado anteriormente, esto es, a distancia del origen menor o igual.

En el primer caso estaremos ante una "elección forzada" pues deberemos rechazar \vec{v} y tomar \vec{v}' . En cambio, en el segundo caso la elección es libre y podemos tomar \vec{v} o \vec{v}' .

Evidentemente, a partir de entonces y hasta completar el sistema completo de residuos, nuestras elecciones serán más y más restrictivas en el sentido de que tomaremos cada vez menos puntos de los conjuntos T_λ . En efecto, notar que si, por ejemplo rechazamos \vec{v} ($\equiv \vec{v}' \pmod{M}$) por ser $d(\vec{0}, \vec{v}') \leq d(\vec{0}, \vec{v})$, debemos también eliminar todos los puntos "situados más allá" de \vec{v} , puntos de Z^2 interiores a la región rayada de la figura A.1

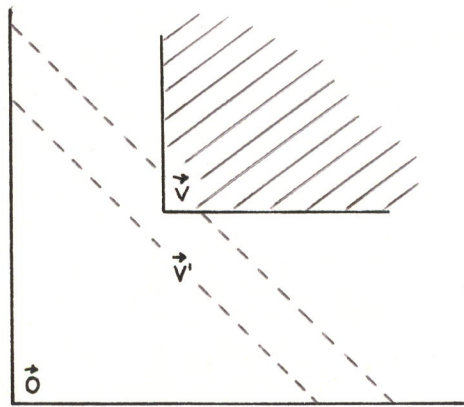


Fig. A.1

En principio parece razonable, y luego veremos que da buen resultado, buscar dichas "repeticiones" moviéndonos según las dos direcciones básicas, es decir, la de los vectores coordenados $(1,0)$ y $(0,1)$.

Así, "moviéndonos horizontalmente", sea l el menor entero positivo tal que al vector $(1,0) \in T_1$ no debemos tomarlo pues

existe al menos un vector (m,n) , $m,n \geq 0$, congruente con el, situado a una distancia *menor* del origen, o sea:

$$(1,0) \equiv (m,n) \pmod{M} \quad \text{con } m+n < 1 \quad (\text{A.3})$$

Veamos que, entonces, $m=0$. En efecto, si no fuera así, y restando el vector $(m,0)$ de ambos miembros de (A.3), tendríamos

$$(1-m,0) \equiv (0,n) \pmod{M} \quad (\text{A.4a})$$

con $0 < 1-m < 1$ y $d(\vec{0}, (0,n)) = n < 1$ (A.4b)

en contra de la hipótesis de que l era el menor entero positivo que cumplía (A.3).

Entonces, con $m=0$ y $n=y$, y resumiendo:

(L1) Sea $l \in \mathbb{Z}^+$ el menor número tal que

$$(1,0) \equiv (0,y) \pmod{M} \quad \text{con } y < 1 \quad (\text{A.5})$$

Si existen varios y 's que cumplen (A.5) *elegimos el menor.*

Como hemos dicho, (A.5) representa una "elección forzada": debemos rechazar el punto $(1,0)$ y todos los situados a partir de él según se muestra en la figura A.2.

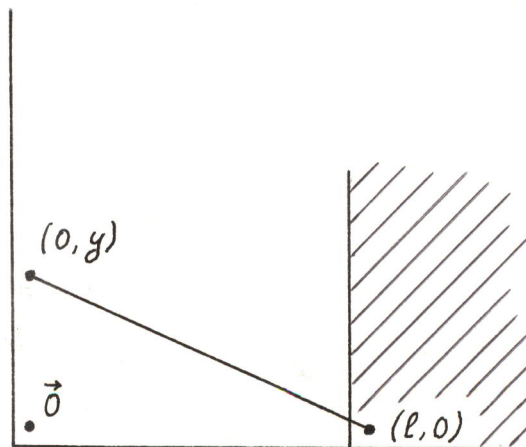


Fig. A.2

Un razonamiento similar al realizado antes permite demostrar que, si h es el menor entero positivo tal que

$$(0, h) \equiv (m', n') \text{ con } m' + n' \leq h \quad (\text{A.6})$$

entonces $n' = 0$, y nos queda:

$$\begin{aligned} (\text{L2}) \text{ Sea } h \in \mathbb{Z}^+ \text{ el menor número tal que} \\ (0, h) \equiv (x, 0) \pmod{M} \text{ con } x \leq h \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Análogamente, si hubiese varios x 's que cumplen (A.7), escogemos el menor de ellos.

Notar que ahora, al "movernos verticalmente", en la primera repetición que nos interesa localizar, los dos puntos congruentes pueden estar a *menor* ($h < x$) o *igual* ($h = x$) distancia del origen. En el primer caso la elección es forzada: debemos rechazar $(0, h)$. En cambio, en el segundo, podemos tomar $(0, h)$ rechazando $(x, 0)$ o viceversa.

Como se puede suponer, y demostraremos seguidamente, la decisión correcta es eliminar en todo caso el punto $(0, h)$ y todos los situados a partir de él. Así, la situación que nos queda es la mostrada en la figura A.3.

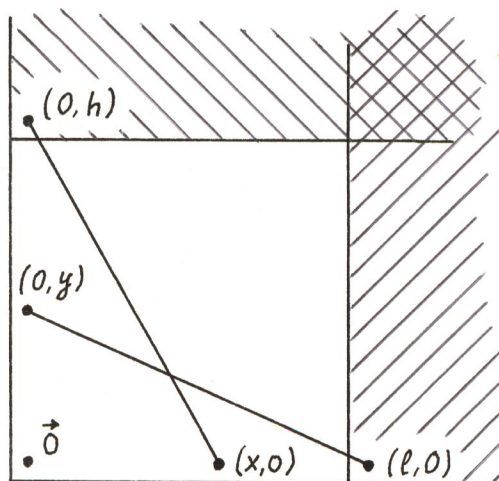


Fig. A.3

Por lo visto anteriormente, $(0,y) [(x,0)]$ es el *único* punto congruente con $(1,0) [(0,h)]$ situado a distancia menor [menor o igual] del origen que éste. Por tanto, podemos desechar el punto $(0,h)$ y todos los "siguientes" si:

1. Con ello no se elimina $(0,y)$, o sea $y < h$.
2. $(x,0)$ ya ha sido tomado anteriormente, es decir $x < 1$.

Veamos que se cumple $x < 1$:

Las condiciones (A.5) y (A.7) equivalen respectivamente

a

$$(1,-y) \equiv \vec{0} \pmod{M} \quad (\text{A.8})$$

$$(-x,h) \equiv \vec{0} \pmod{M} \quad (\text{A.9})$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos

$$(1-x, h-y) \equiv \vec{0} \pmod{M} \quad (\text{A.10})$$

Si suponemos $x \geq 1$, y considerando que $y < 1$ y $x \leq h$, resulta:

$$h \geq x \geq 1 > y \quad (\text{A.11})$$

Entonces, sumando $(x-1, 0)$ a ambos miembros de (A.10),

$$(0, h-y) \equiv (x-1, 0) \pmod{M} \quad (\text{A.12a})$$

pero, según (A.11),

$$\begin{aligned} 0 < h-y &\leq h \\ \text{y } 0 \leq x-1 &< h-y \end{aligned} \quad (\text{A.12b})$$

en contra de la hipótesis (L2) (recordar la elección de h y x en (A.7)).

De forma totalmente análoga (notar las correspondencias $x \leftrightarrow y$, $l \leftrightarrow h$) se demuestra que $y < h$.

Según (A.8) y (A.9), los dos vectores $(l, -y)$ y $(-x, h)$ pertenecen al retículo generado por la matriz M , es decir que ambos pueden expresarse como combinación lineal de \vec{m}_1 y \vec{m}_2 . Además, por ser $x < l$ e $y < h$,

$$lh - xy > 0 \quad (\text{A.13})$$

luego los dos vectores son linealmente independientes y, si consideramos la matriz $M_L = \begin{pmatrix} l & -y \\ -x & h \end{pmatrix}$ se cumple:

$$\det(M_L) = N \quad (\text{A.14})$$

Entonces, la "L" de dimensiones l, h, x, y contiene todos los residuos módulo M . (Recordar la equivalencia entre la matriz M_L y la "L" a que da lugar según la figura 3.4.2).

Para demostrar que los puntos de Z^2 situados en el interior de esta "L" forman un sistema completo de residuos mod. M , tenemos que ver que

$$\det(M_L) = \det(M) = N \quad (\text{A.15})$$

O sea que en dicha "L", y aparte de sí mismo, no existe ningún otro punto congruente con el $\vec{0}$.

Supongamos lo contrario, es decir que existe $(m, n) \equiv (0, 0) \pmod{M}$ con $(m, n) \neq \vec{0}$ perteneciente a la región I de la figura A.4, esto es, con

$$\begin{aligned} 0 &\leq m < l-x \\ \text{y} \quad 0 &\leq n < h \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

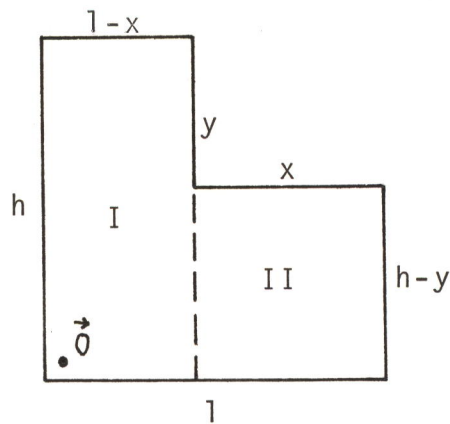


Fig. A.4

En primer lugar, notar que no puede ser $m=0$ [$n=0$] pues entonces

$$(0, n) \equiv (0, 0) \pmod{M} \quad (\text{A.17a})$$

$$[(m, 0) \equiv (0, 0) \pmod{M}] \quad (\text{A.17b})$$

en contra de la hipótesis (L2) [(L1)]. Por tanto, la región considerada queda reducida a los puntos de Z^2 tales que

$$0 < m < 1-x \quad (\text{A.18a})$$

$$y \quad 0 < n < h \quad (\text{A.18b})$$

Entonces, de

$$(-x, h) \equiv \vec{0} \pmod{M} \quad (\text{A.19})$$

$$(m, n) \equiv \vec{0} \pmod{M} \quad (\text{A.20})$$

y restando miembro a miembro, obtenemos:

$$(-x-m, h-n) \equiv \vec{0} \pmod{M} \quad (\text{A.21})$$

lo que equivale a

$$(0, h-n) \equiv (x+m, 0) \pmod{M} \quad (\text{A.22a})$$

con $0 < h-n < h$

y $0 < x+m < x + (1-x) = 1 \quad (\text{A.22b})$

Entonces, si en (A.22a) se cumple

$$h-n < x+m \quad (\text{A.22c})$$

se contradice la hipótesis (L1). En cambio, si

$$h-n \geq x+m \quad (\text{A.22d})$$

se contradice (L2).

De la misma forma se demuestra que el punto $(m,n) \equiv (0,0) \pmod{M}$ no puede pertenecer a la región II de la figura 1.4. Por tanto no existe tal punto, y la "L" considerada contiene exactamente las N clases de restos módulo M.

Sólo nos resta comprobar que todo punto de Z^2 fuera de la "L" está a una distancia del origen mayor o igual que el punto de la "L" con el cual es congruente. Pero esto es consecuencia directa de la forma en que hemos construido dicha "L". En efecto, ningún punto de la región A (ver figura A.5) puede estar, como representante de su clase residual, a distancia mínima del origen pues, como ya hemos visto, todos los puntos de A se alcanzan a partir de $(1,0)$ y, según (A.5), este punto es congruente con $(0,y)$ situado a menor distancia del origen ($y < 1$).

Lo mismo ocurre con los puntos de la región B (figura A.5) que se alcanzan a partir del punto $(1-x, h-y) \equiv \vec{0} \pmod{M}$.

En cuanto a los vectores de la región C, si $x < h$ nos encontramos en la misma situación que en los casos anteriores.

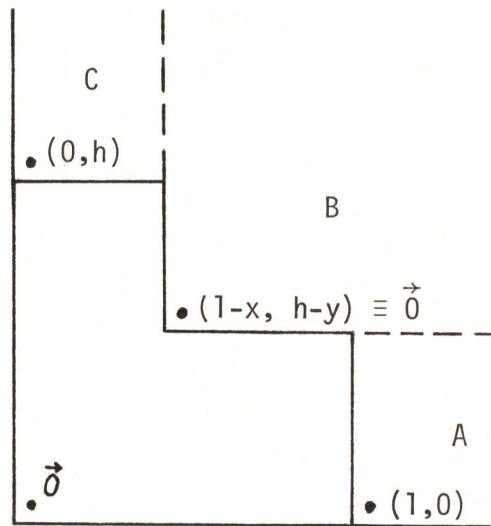


Fig. A.5

En cambio, si $x = h$, todos los puntos de la región C, alcanzables a partir de $(0,h)$, son congruentes y están a la misma distancia del origen que los respectivos puntos alcanzables a partir de $(x,0)$ que, como sabemos, pertenece a la "L". Por tanto, en este caso, tampoco ningún punto de dicha región podrá estar a menor distancia del origen que el punto de la "L" congruente con él.

BIBLIOGRAFIA

- [AYF1] I.ALEGRE, L.A.YEBRA, M.A.FIOL, M.VALERO y T.LANG:
"A algorithm to minimize the diameter of directed graphs"
2^o Simposio Español de Informática Repartida, Santiago de
Compostela, 15-18 Sep., 1982.
- [A1] S.B.AKERS: "On the construction of (d,k) graphs".
IEEE Trans. Electron. Comput., vol.EC-14, Junio 1965, p.488.
- [A2] T.M.APOSTOL: "Introducción a la Teoría Analítica de Números"
Ed. Reverté, 1980
- [AL1] B.W.ARDEN y H.LEE: "A regular network for multicomputer
systems". IEEE Transc. on Comp., vol.C-31, no.1, Enero 1982
pp. 60-69.
- [AL2] B.W.ARDEN y H.LEE: "Analysis of chordal ring network"
IEEE Transc. on Comp., vol.C-30, no.4, Abril 1981, pp.291-295.
- [AG1] M.AJMONE y F.GREGORETTI: "Markov models for multiple bus
multiprocessor systems". UCLA, report no. CSD.810304, Febre
ro 1981.
- [B1] J.C.BERMOND: "Cycles in digraphs - a survey"
Journal of Graph Theory, vol.5, no.1 (1981), pp. 1-43.
- [B2] B.BOLLOBAS: "Extremal Graph Theory"
Academic Press, 1978.